https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
10 2009
Số 388

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 46
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35144272, (04) 35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoctuoitre

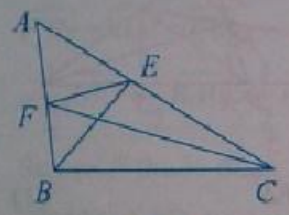
DỪNG LẠI hay Bước tiếp ?

NGUYỄN MINH HÀ
(GV Đại học Sư phạm Hà Nội)

1. Điểm 0 hay điểm 10 ?

Trong một cuộc thi học sinh giỏi nọ của thành phố kia có một bài toán khá hay.

✪**Bài toán 1.** *Cho tam giác ABC có AB < AC và BE, CF thứ tự là các đường phân giác kẻ từ B, C. Chứng minh rằng BF < CE.*



Hình 1

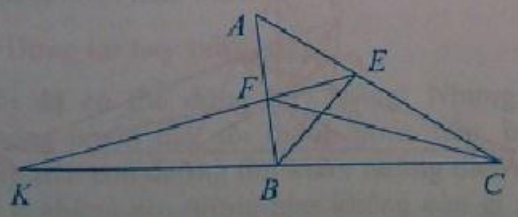
Đáp án của Người ra đề rất tự nhiên và đơn giản:

Theo tính chất của đường phân giác, chú ý rằng $AB < AC$ (h. 1), ta có

$$\frac{AF}{BF}=\frac{AC}{BC}>\frac{AB}{CB}=\frac{AE}{CE} \Rightarrow 1+\frac{AF}{BF}>1+\frac{AE}{CE}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BF}>\frac{AC}{CE} \Rightarrow \frac{CE}{BF}>\frac{AC}{AB}>1 \Rightarrow BF<CE. \square$$

Sẽ chẳng có chuyện gì đáng nói nếu không xuất hiện một thí sinh "*Độc đáo*" với lời giải rất "*độc*" như sau (h. 2)



Hình 2

Đặt K là giao của BC và EF. Vì BE là phân giác của góc $\widehat{ABC}$ và vì $\widehat{EBC}$ là góc ngoài của tam giác EBK nên ta có

$$\widehat{EBF}=\widehat{EBC}=\widehat{BEK}+\widehat{BKE}$$
$$>\widehat{BEK}=\widehat{BEF} \Rightarrow BF<FE \qquad (1)$$

Vì CF là phân giác của góc $\widehat{ACB}$ và $\widehat{EFC}$ là góc ngoài của tam giác FCK nên ta có

$$\widehat{ECF}=\widehat{FCB}=\widehat{FCK}<\widehat{FCK}+\widehat{FKC}=\widehat{EFC}$$
$$\Rightarrow FE<CE \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BF < CE$. □

Ngay lập tức, hội đồng chấm thi chia thành hai nhóm: nhóm "*phủ nhận*" và nhóm "*thừa nhận*". Nhóm "*phủ nhận*" cho rằng:

Chi tiết quan trọng nhất của lời giải trên là "*BC, EF cắt nhau tại điểm K thuộc tia đối của tia BC*". Thí sinh đã không chứng minh được chi tiết này, thậm chí không có ý thức chứng minh chi tiết này. Do đó, lời giải trên không có giá trị, đề nghị cho *0 điểm*.

Nhóm "*thừa nhận*" cho rằng:

Đúng là lời giải của thí sinh có sai sót. Tuy nhiên, sai sót trên là nhỏ và việc khắc phục nó khá đơn giản:

Ta có $\frac{AF}{BF}=\frac{AC}{BC}>\frac{AB}{CB}=\frac{AE}{CE}$. *Từ đó, theo định lí Thalès ta có BC và EF cắt nhau tại điểm K thuộc tia đối của tia BC.*

Điều đáng nói là, lời giải trên rất mới, rất sáng tạo và đặc biệt là chỉ dùng kiến thức lớp 7, đề nghị cho *10 điểm*.

Điểm 0 hay *điểm 10*? Sau một hồi tranh luận sôi nổi, cả hai nhóm đi đến thống nhất: quyết định cuối cùng thuộc về Chủ tịch Hội đồng chấm thi (CTHĐCT).

2. Lớp 7 hay lớp 8?

Câu chuyện trên đây tôi được nghe từ bạn tôi, một giáo viên toán rất nổi tiếng. Tôi nóng lòng hỏi ngay sau khi bạn tôi kết thúc câu chuyện:

Chủ tịch HĐCT quyết định thế nào?

Không trả lời trực tiếp câu hỏi của tôi. Bạn tôi chậm rãi nhắc lại ý kiến của CTHĐCT: "*Nhóm phủ nhận*" quá nghiêm khắc; "*Nhóm thừa nhận*" quá rộng rãi. Theo CTHĐCT, lời giải của thí sinh "*Độc đáo*" chỉ được coi là rất mới, rất sáng tạo nếu có thể hoàn chỉnh nó bằng kiến thức lớp bảy.

"*Ông CTHĐCT này siêu, nhận xét rất xác đáng*", tôi bình luận.

"*Nhưng! Chứng minh chi tiết "BC, EF cắt nhau tại điểm K thuộc tia đối của tia BC" bằng kiến thức lớp bảy là chuyện không đơn giản. Tôi đã cố gắng nhiều mà không được, anh hãy thử xem*", bạn tôi đề nghị.

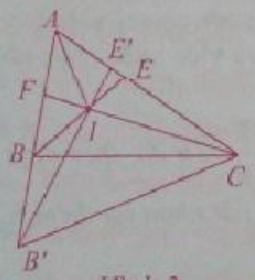
"*Đúng là không đơn giản*", tôi thừa nhận.

Lời đề nghị của người bạn yêu toán cứ bám riết lấy tôi. Sau nhiều ngày suy nghĩ, tôi đã tìm được hai cách hoàn chỉnh lời giải của thí sinh "*Độc đáo*" bằng kiến thức lớp 7.

Cách 1. Ta cần có hai bổ đề.

Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC có AB < AC và BE, CF là các đường phân giác. Khi đó AF < AE.*

Chứng minh (h. 3)



Hình 3

Gọi I là giao của BE và CF. Trên tia đối của tia BA lấy điểm B' sao cho $AB' = AC$. Gọi E' là giao của $B'I$ và AC thì E' thuộc đoạn AE. Do đó $AE' < AE$ (1)

Vì $\Delta AB'C$ cân tại A có AI là phân giác của góc $\widehat{B'AC}$ nên $\Delta IB'C$ cân tại I. Suy ra

$\widehat{E'B'A} = \widehat{IB'A} = \widehat{AB'C} - \widehat{IB'C} = \widehat{ACB'} - \widehat{ICB'} = \widehat{ICA}$

$= \widehat{FCA} \Rightarrow \Delta AB'E = \Delta ACF \Rightarrow AE' = AF$ (2)

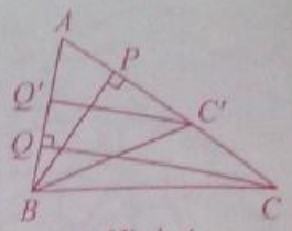
Từ (1) và (2) suy ra $AF < AE$.

Bổ đề 2. *Cho tam giác ABC có AB < AC và BP, CQ là các đường cao. Khi đó BP < CQ.*

Chứng minh

Bổ đề 2 được chứng minh tương tự như Bổ đề 1.

Trên đoạn AC lấy điểm C' sao cho $AC' = AC$. Gọi Q' là hình chiếu của C' trên AB (h. 4).



Hình 4

Dễ thấy $C'Q' < CQ$ (1).

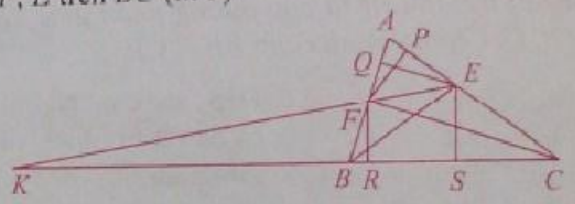
Vì $\Delta ABC'$ cân tại A có BP, $C'Q'$ là các đường cao nên có $BP = C'Q'$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BP < CQ$.

Lưu ý. Có thể chứng minh bổ đề 1 bằng cách nhận xét rằng $BP.AC = CQ.AB = 2S_{ABC}$.

Trở lại việc hoàn chỉnh lời giải của thí sinh "*Độc đáo*".

Gọi P, Q tương ứng là hình chiếu của F, E trên AC, AB. R, S tương ứng là hình chiếu của F, E trên BC (h. 5).



Hình 5

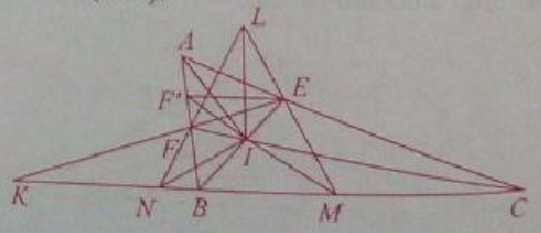
Dễ thấy $FP = FR$, $EQ = ES$ (1)

Mặt khác, theo Bổ đề 1, $AF < AE$. Từ đó, áp dụng bổ đề 2 cho ΔAFE, ta có $FP < EQ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $FR < ES$. Từ đó, dễ dàng suy ra BC, EF cắt nhau và giao điểm K của chúng thuộc tia đối của tia BC.

Cách 2. Có ba trường hợp:

• Trường hợp $\widehat{BAC} < 90°$. Trên các tia BC, CB lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $BM = BA$, $CN = CA$ (h. 6).



Hình 6

Vì $BA + CA > BC$ nên M, N theo thứ tự thuộc các tia NC, MB (1)

Mặt khác, vì $\Delta BME = \Delta BAE$ (c.g.c) và $\Delta CNE = \Delta CAF$ (c.g.c) nên $\widehat{BME} = \widehat{BAE}$ và $\widehat{CNE} = \widehat{CAF}$, do đó $\widehat{NME} = \widehat{BAC}$ và $\widehat{MNE} = \widehat{CAB}$ (theo (1)).

Suy ra $\widehat{NME}+\widehat{MNF}=2\widehat{BAC}<2.90^\circ=180^\circ$. Do đó, các tia ME, NF cắt nhau.

Gọi L là giao điểm của ME, NF. Dễ thấy L thuộc nửa mặt phẳng bờ BC chứa A và tam giác LMN cân tại L (2)

Vì $\Delta BME=\Delta BAE$, $\Delta CNF=\Delta CAF$ nên $\widehat{IEM}=\widehat{IEA}$, $\widehat{IFN}=\widehat{IFA}$. Từ đó, chú ý rằng $\widehat{ICM}=\widehat{ICE}$, $\widehat{IBN}=\widehat{IBF}$, ta có MI, NI là phân giác của các góc $\widehat{LMN}$, $\widehat{LNM}$. Suy ra LI là phân giác của góc $\widehat{MLN}$ (3)

Trên tia LN lấy điểm F' sao cho $LF'=LE$. Theo (2), EF' song song với BC (4)

Từ (2) và (3) với chú ý rằng $\widehat{ABC}>\widehat{ACB}$ (vì $AB<AC$), ta có

$$\widehat{F'IN}=\widehat{EIM}=\widehat{EIA}$$

$$=\frac{1}{2}\widehat{ABC}+\frac{1}{2}\widehat{BAC}>\frac{1}{2}\widehat{ACB}+\frac{1}{2}\widehat{CAB}=\widehat{FIA}=\widehat{FIN}.$$

Suy ra F thuộc đoạn $F'N$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra EF, BC cắt nhau và giao điểm K của chúng thuộc tia đối của tia BC.

• Các trường hợp $\widehat{BAC}<90^\circ$ và $\widehat{BAC}=90^\circ$ được giải quyết một cách tương tự (bạn đọc tự kiểm tra). ❐

Lớp 7 hay *lớp 8*? Cách giải quyết vấn đề nào hay hơn? Câu trả lời xin dành cho bạn đọc. Chỉ xin lưu ý rằng, hai cách giải quyết vấn đề bằng kiến thức lớp bảy mà tôi vừa trình bày ở trên là hoàn toàn mới.

3. Dừng lại hay bước tiếp?

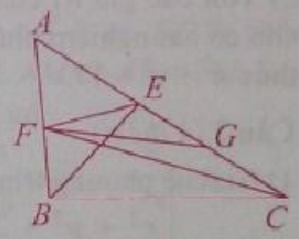
Tôi đã có thể dừng lại? Vâng! Nhưng tôi không muốn thế, tôi muốn bước tiếp, bước tiếp trên con đường tìm kiếm những điều mới lạ ở những nơi tưởng như không còn gì mới lạ. Tôi mơ hồ cảm thấy những gì mà tôi vừa mới đạt được còn có thể giúp tôi làm được một việc gì đó thú vị hơn. Vào một ngày đẹp trời, tôi bỗng nhận ra rằng tất cả những gì mà tôi vừa đề cập đến đều liên quan chặt chẽ tới *bài toán Steiner – Leimus mở rộng*, bài toán rất quen thuộc và khá nổi tiếng của hình học sơ cấp. *Bài toán Steiner – Leimus mở rộng* có nhiều cách chứng minh. Nhưng tất cả các cách chứng minh này đều phải sử dụng hoặc kiến thức lớp 8 hoặc kiến thức lớp 9. Do đó, cách chứng minh chỉ sử dụng kiến thức lớp 7 mà tôi trình bày dưới đây có vẻ đẹp riêng của nó.

✪**Bài toán 2** (Steiner – Leimus mở rộng). *Cho tam giác ABC có $AB\le AC$ và BE, CF là các đường phân giác. Chứng minh rằng*

$$BE\le CF.$$

Chứng minh. Có hai trường hợp.

• *Trường hợp 1. $AB<AC$.* (h. 7)



Hình 7

Theo Bài toán 1, do $BF<CE$, suy ra tồn tại điểm G thuộc đoạn CE sao cho $GE=BF$.

Theo Bổ đề 1, $AF<AE$. Do đó $\widehat{AEF}<\widehat{AFE}$. Suy ra $\widehat{BFE}<\widehat{GEF}$. Từ đó, với chú ý rằng $FE=EF$; $FB=EG$, ta có, $BE<GF$ (xét hai tam giác BEF và GFE) (1)

Mặt khác, vì góc ngoài của tam giác lớn hơn góc trong không kề với nó nên:

$$\widehat{FGC}>\widehat{FEC}>\widehat{AFE}>\widehat{ABE}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}$$

$$>\frac{1}{2}\widehat{ACB}=\widehat{ACF}=\widehat{GCF}.$$

Suy ra $GF<CF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BE<CF$.

• *Trường hợp 2. $AB=AC$.*

Dễ thấy $BE=CF$.

Tóm lại, $BE\le CF$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $AB=AC$.

Dừng lại hay bước tiếp? Câu trả lời phụ thuộc vào năng lực và ý chí của mỗi người. Tuy nhiên, có một điều chắc chắn rằng, nếu ai đó cứ luôn dừng lại một cách dễ dãi thì người ấy sẽ không bao giờ có thể trở thành một học sinh giỏi toán.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10
KHỐI THPT CHUYÊN, ĐẠI HỌC VINH
NĂM HỌC 2009 - 2010

VÒNG 1

(Thời gian làm bài: 120 phút)

Câu 1 (2 *điểm*). Cho phương trình $x^2 - (2m-3)x + m(m-3) = 0$, với m là tham số.

1) Với giá trị nào của m thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt?

2) Tìm các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt u, v thoả mãn hệ thức $u^2 + v^2 = 17$.

Câu 2 (4 *điểm*)

1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x+y) = 23 \\ x + y + xy = 11. \end{cases}$$

2) Cho các số thực x, y thoả mãn $x > 8y > 0$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x + \frac{1}{y(x-8y)}.$$

Câu 3 (4 *điểm*). Cho hai đường tròn (O_1, R_1) và (O_2, R_2) cắt nhau tại hai điểm I, P. Cho biết $R_1 < R_2$ và O_1, O_2 nằm khác phía đối với đường thẳng IP. Kẻ hai đường kính IE, IF tương ứng của (O_1, R_1) và (O_2, R_2).

1) Chứng minh rằng E, P, F thẳng hàng.

2) Gọi K là trung điểm EF. Chứng minh rằng O_1PKO_2 là tứ giác nội tiếp.

3) Tia IK cắt (O_2, R_2) tại điểm thứ hai B, đường thẳng vuông góc với IK tại I cắt (O_1, R_1) tại điểm thứ hai A. Chứng minh rằng $IA = BF$.

VÒNG 2

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1 (2,5 *điểm*). Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-7} = \sqrt{x}$;

2) $x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 6x + 4 = 0$.

Câu 2 (2,5 *điểm*)

1) Tìm các số nguyên dương x, y thoả mãn phương trình $x^2 + y^2 - 13(x-y) = 0$.

2) Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố lẻ p đều không tồn tại các số nguyên dương m, n thoả mãn

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}.$$

Câu 3 (2 *điểm*). Cho các số thực dương x, y, z thoả mãn $x + 2y + 3z = 18$. Chứng minh rằng

$$\frac{2y+3z+5}{1+x} + \frac{3z+x+5}{1+2y} + \frac{x+2y+5}{1+3z} \geq \frac{51}{7}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Câu 4 (3 *điểm*). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O và $\widehat{ACB} = 45°$. Kẻ các đường cao AA' và BB'. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, M và N tương ứng là trung điểm của AB và CH.

1) Chứng minh rằng $A'MB'N$ là hình vuông.

2) Chứng minh rằng $A'B'$, MN, OH đồng quy.

LÊ QUỐC HÁN

(GV Khoa Toán ĐH Vinh) giới thiệu

CÁC BẠN NHỚ ĐẶT MUA TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ QUÝ IV NĂM 2009 VÀ CÁC ẤN PHẨM CỦA TẠP CHÍ TẠI CÁC CƠ SỞ BƯU ĐIỆN TRONG CẢ NƯỚC

LỜI GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI

NĂM HỌC 2009 - 2010

(Đề thi đã đăng trên THTT số 387, tháng 9 năm 2009)

DÀNH CHO MỌI THÍ SINH

Câu 1. 1) Ta có

$A=\sqrt{20a+92+\sqrt{(a^2+8)^2}}=\sqrt{(a+10)^2}=|a+10|$.

2) $A+B=|a+10|+(a^2+10a)^2+2(a+10)^2=0$ $\Leftrightarrow a=-10$.

Câu 2. Gọi x, y lần lượt là thời gian người thứ nhất, người thứ hai cần để hoàn thành công việc. Ta được hệ gồm hai PT

$$\frac{18}{x}+\frac{18}{y}=1 \text{ và } \frac{6}{x}+\frac{12}{y}=\frac{1}{2}.$$

Giải hệ trên được nghiệm $(x\,;y)=(36\,;36)$.

Câu 3. 1) Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2=mx+1\Leftrightarrow x^2-mx-1=0$ có $\Delta=m^2+4>0,\ \forall\ m$. Suy ra (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

2) Theo định lí Vietê ta có $x_1x_2=-1$, hơn nữa $y_i=mx_i+1$, $i=1,2$. Suy ra

$$M=(y_1-1)(y_2-1)=m^2x_1x_2=-m^2\le 0.$$

Vậy $\max M=0$, đạt được khi $m=0$.

Câu 4. (Bạn đọc tự vẽ hình) Đặt $BH=x$, áp dụng định lí Pythagore cho các ΔABH và ΔACH ta có $AH^2=25-x^2=45-(10-x)^2\Leftrightarrow x=4$. Từ đó suy ra $AH=3$.

b) Tam giác ABM cân tại B có BT là phân giác góc ABC nên $BT\perp AM$ và $AT=TM$. Suy ra $\Delta ATO\backsim\Delta AHM$. Ta có

$$\frac{S_{ATO}}{S_{AHM}}=\frac{AT^2}{AH^2}=\frac{AM^2}{4AH^2}=\frac{5}{18}\Rightarrow S_{ATO}=\frac{5}{18}S_{AHM}=\frac{5}{12}.$$

Câu 5. Đẳng thức đã cho tương đương với

$(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+y^2}-y)=1$, suy ra

$(\sqrt{1+x^2}+x)(\sqrt{1+y^2}+y)=(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+y^2}-y)$

$\Leftrightarrow x\sqrt{1+y^2}=-y\sqrt{1+x^2}$ (1)

- Nếu $x=0\Leftrightarrow y=0$, suy ra $x+y=0$.
- Nếu $x\ne 0$ thì từ (1) suy ra x và y trái dấu và $x^2(1+y^2)=y^2(1+x^2)\Leftrightarrow x^2=y^2$ $\Leftrightarrow x^2-y^2=0\Rightarrow x+y=0$.

DÀNH CHO THÍ SINH CHUYÊN TOÁN – TIN

Câu 6. Ta có

$$P+\frac{xy}{xy-\sqrt[3]{2}}=\frac{4\sqrt[3]{2}xy+\left(xy-\sqrt[3]{2}\right)^2}{2\left(xy+\sqrt[3]{2}\right)\left(xy-\sqrt[3]{2}\right)}\cdot\frac{2xy}{xy+\sqrt[3]{2}}$$

$$=\frac{\left(xy+\sqrt[3]{2}\right)^2}{2\left(xy+\sqrt[3]{2}\right)\left(xy-\sqrt[3]{2}\right)}\cdot\frac{2xy}{xy+\sqrt[3]{2}}=\frac{xy}{xy-\sqrt[3]{2}}.$$

Từ đó suy ra $P=0$.

Câu 7. 1) Giả sử PT $x^2+bx+c=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn đề bài, theo định lí Vietê ta có $x_1+x_2=-b$, $x_1x_2=c$. Kết hợp với giả thiết ta có $x_1=x_2^2+x_2$ (1) và

$$x_1x_2-(x_1+x_2)=4 \qquad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được $x_2^3-2x_2-4=0$ $\Leftrightarrow x_2=2\Rightarrow x_1=6$. Từ đó tìm được $(b\,;c)=(-8\,;12)$. Thử lại ta thấy $(b\,;c)=(-8\,;12)$ thoả mãn đề bài.

2) Thay $x=A-y-z$ vào HPT đã cho ta được

$$\begin{cases}\dfrac{A-y-z}{3}+\dfrac{y}{12}-\dfrac{z}{3}=1\\[2mm] \dfrac{A-y-z}{10}+\dfrac{y}{5}+\dfrac{z}{3}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4A-3y-7z=12\\ 3A+3y+7z=30\end{cases}$$

$\Rightarrow 7A=42\Rightarrow A=6$.

(Xem tiếp trang 11)

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

VỀ PHƯƠNG TRÌNH ĐA THỨC bậc hai, bậc ba

ĐẶNG THANH HẢI - TRẦN TUYẾT THANH
(GV Học viện PKKQ, Sơn Tây, Hà Nội)

I. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Đây là dạng phương trình (PT) có thể nói là đơn giản và cách giải của chúng được trình bày kĩ trong các sách giáo khoa. Chính vì vậy, chúng tôi không có bình luận gì về phương pháp giải mà chỉ đưa ra một số thí dụ tương đối điển hình nhằm làm cơ sở để giải các dạng phương trình bậc cao, giúp các bạn học sinh ôn thi tốt nghiệp THPT và thi tuyển sinh vào các trường Đại học, Cao đẳng.

★**Thí dụ 1.** *Các số thực a, b, c thoả mãn điều kiện $5a + 2b + 3c = 0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm.*

Lời giải. *Trường hợp 1.* Xét $a = 0$. Từ giả thiết có $b = -\dfrac{5a+3c}{2}$. Khi đó

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\frac{5a+3c}{2}\right)^2 - 4ac$$
$$= \frac{1}{4}(25a^2 + 9c^2 + 30ac) - 4ac$$
$$= \frac{1}{4}(25a^2 + 9c^2 + 14ac)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\left(\frac{7}{2}a + 2c\right)^2 + 5c^2 + \frac{51}{4}a^2\right) \geq 0.$$

Từ đó suy ra PT $ax^2 + bc + c = 0$ có nghiệm. ❐

★**Thí dụ 2.** *Tìm m để phương trình $x^2 - 5x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt mà nghiệm này gấp đôi nghiệm kia.*

Lời giải. Để PT đã cho có hai nghiệm phân biệt, trước hết phải có

$$\Delta = 25 - 4m > 0 \Rightarrow m < \frac{25}{4} \qquad (1)$$

Khi đó, không mất tính tổng quát giả sử x_1 ; $x_2 = 2x_1$ là các nghiệm của PT.

Áp dụng định lí Viète ta có $\begin{cases} x_1x_2 = m \\ x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$ (2)

Thay $x_2 = 2x_1$ vào (2) ta được $\begin{cases} x_1^2 = \dfrac{m}{2} \\ 3x_1 = 5 \end{cases} \Rightarrow m = \dfrac{50}{9}$.

Ngược lại, với $m = \dfrac{50}{9}$, ta có

$$x^2 - 5x + \frac{50}{9} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{5}{3} \\ x_2 = \dfrac{10}{3} = 2x_1 \end{array}\right. \text{(thỏa mãn).}$$

Vậy $m = \dfrac{50}{9}$ là giá trị cần tìm. ❐

II. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA

Trong chương trình toán ở bậc phổ thông, các PT bậc cao thường gặp là những PT bậc ba và PT bậc bốn dạng đơn giản. Về nguyên tắc chung, khi giải một PT bậc cao, ta phải tìm cách hạ bậc PT đã cho để chuyển về PT bậc nhất hoặc PT bậc hai là những dạng PT đã biết cách giải.

Phương trình bậc ba là phương trình có dạng

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \ (a \neq 0) \qquad (1)$$

Khi giải PT (1) thường áp dụng các cách sau:

Cách 1. *Đưa về PT tích.*

Cách 2. *Áp dụng tính chất cực trị của hàm bậc ba (tổng quát hơn là phương pháp hàm số).*

Cách 3. *Đổi vai trò giữa tham số và biến số.*

1. Cách 1. Đưa về PT tích

Thường áp dụng các kết quả sau:

• Nếu PT (1) với các hệ số a, b, c, d là các số nguyên, có nghiệm nguyên x_0 thì x_0 là ước của số hạng tự do d.

• Nếu PT (1) với các hệ số a, b, c, d là các số nguyên, có nghiệm hữu tỉ $x_0 = \frac{p}{q}$ $((p, q) = 1)$ thì p là ước của số hạng tự do d, còn q là ước của hệ số bậc cao nhất a.

• Trong trường hợp PT có tham số, nếu đồ thị hàm $y = f(x, m)$ có điểm cố định $A(x_0 ; 0)$ thì PT $f(x, m) = 0$ có nghiệm x_0 với mọi m.

Khi đó PT (1) $\Leftrightarrow (x - x_0)g(x) = 0$ (trong đó $g(x)$ là tam thức bậc hai).

★ **Thí dụ 3.** *Giải phương trình*

$$x^3 - 6x^2 + 7x + 2 = 0 \qquad (1)$$

Lời giải. Ta có $d = 2$ có bốn ước là ± 1; ± 2. Thử thấy $x = 2$ là một nghiệm của PT (1). Do đó PT (1) $\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - 4x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ x^2 - 4x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 2 + \sqrt{5} \\ x = 2 - \sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của PT (1) là

$$\{2 ; 2 - \sqrt{5} ; 2 + \sqrt{5}\}. \square$$

Cách 2. Sử dụng tính chất cực trị của hàm bậc ba (phương pháp hàm số)

Xét hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$, có đồ thị là (C); $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

a) PT $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép thì hàm số y luôn đồng biến hoặc nghịch biến. PT $y = 0$ có đúng một nghiệm.

b) PT $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi và chỉ khi y đạt cực đại, cực tiểu tại các điểm x_1, x_2.

• Nếu các giá trị cực trị là y_1, y_2 thì $y_1 = r(x_1)$; $y_2 = r(x_2)$; trong đó $r(x)$ là số dư của phép chia $y(x)$ cho $y'(x)$.

• $y_1.y_2 < 0 \Leftrightarrow (C)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT $y = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

• $y_1.y_2 = 0 \Leftrightarrow (C)$ tiếp xúc với $Ox \Leftrightarrow$ PT $y = 0$ có đúng hai nghiệm (một nghiệm đơn và một nghiệm kép).

• $\left[\begin{array}{l} y_1.y_2 > 0 \\ y' = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow (C)$ cắt trục hoành tại một điểm. Khi đó PT $y = 0$ có đúng một nghiệm.

★ **Thí dụ 4.** *Chứng minh rằng phương trình*

$$(x + a)^3 + (x + b)^3 - x^3 = 0 \qquad (1)$$

luôn có nghiệm duy nhất.

Lời giải. *Xét hàm số*

$$y = (x + a)^3 + (x + b)^3 - x^3$$
$$= x^3 + 3(a + b)x^2 + 3(a^2 + b^2)x + a^3 + b^3 \ (C).$$

Ta có $y' = 3x^2 + 6(a + b)x + 3(a^2 + b^2)$.

Xét y', có $\Delta' = 9(a + b)^2 - 9(a^2 + b^2) = 18ab$.

Trường hợp 1. Nếu $\Delta' = 18ab \leq 0 \Leftrightarrow ab \leq 0$ thì $y' \geq 0$ với mọi x, suy ra hàm số y đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ đó (C) và Ox có duy nhất một giao điểm. Vậy PT $y = 0$ có nghiệm duy nhất.

Trường hợp 2. Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow ab > 0$, thì khi đó $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 (lưu ý x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số).

Gọi y_1, y_2 là các giá trị cực trị của hàm số y. Ta đi xác định y_1, y_2.

Lấy $y(x)$ chia cho $y'(x)$ được thương là $p(x)$ và dư là $r(x) = -ab(4x + a + b)$.

Ta có $y(x) = y'(x).p(x) + r(x)$.

Vậy $y_1 = y(x_1) = y'(x_1).p(x_1) + r(x_1) = r(x_1)$, vì $y'(x_1) = 0$.

Tương tự $y_2 = r(x_2)$.

Từ đó $y_1.y_2 = r(x_1).r(x_2)$

$= a^2b^2(4x_1 + a + b)(4x_2 + a + b)$

$= a^2b^2\left(16x_1x_2 + 4(a + b)(x_1 + x_2) + (a + b)^2\right)$

$= a^2b^2(16(a^2 + b^2) - 7(a + b)^2)$

$= a^2b^2(9a^2 + 9b^2 - 14ab)$

(vì $x_1.x_2 = a^2 + b^2$ và $x_1 + x_2 = -2(a + b)$).

Vậy $y_1.y_2 = a^2b^2\left((3a - 3b)^2 + 4ab\right) > 0$, vì $ab > 0$.

Do $y_1.y_2 > 0$ nên (C) và Ox có duy nhất một giao điểm. Suy ra PT $y = 0$ có nghiệm duy nhất.

Từ hai trường hợp trên suy ra PT $y = 0$ luôn có nghiệm duy nhất. $\square$

3. Cách 3. Phương pháp đổi vai trò tham số và biến số

Xét phương trình $f(x, m) = 0$ (1) với x là biến số, m là tham số). Để giải PT (1), ta tìm cách biến đổi PT (1) sao cho rút được x theo m. Có nhiều bài toán, việc giải x theo m đôi khi lại khó khăn hơn việc giải m theo x. Nếu ta quan niệm m là biến số, còn x là tham số, thì việc giải bài toán thứ hai đôi khi thuận tiện hơn bài toán thứ nhất. Sau khi rút được m theo x, chẳng hạn $m = g(x)$ (2). Ta giải tiếp PT (2). Giải PT (2), tức là rút x theo m sẽ đơn giản hơn việc giải PT (1).

★Thí dụ 5. *Cho phương trình*

$$x^3 - mx^2 - (m+1)x + m^2 + m = 0 \quad (1)$$

Xác định m để phương trình (1) có đúng ba nghiệm phân biệt.

Lời giải. Viết PT (1) lại dưới dạng

$$g(m) = m^2 - (x^2 + x - 1)m + x^3 - x = 0 \quad (2)$$

Xem (2) là PT bậc hai (đối với m).

Ta có $\Delta_g = (x^2 + x - 1)^2 - 4(x^3 - x)$

$= (x^2 - x - 1)^2 \geq 0, \forall x.$

Vậy (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{x^2 + x - 1 + x^2 - x - 1}{2} \\ m = \dfrac{x^2 + x - 1 - x^2 + x + 1}{2} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = x^2 - 1 \\ m = x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x^2 - m - 1 = 0 \ (3) \end{array}\right.$

Đặt $f(x) = x^2 - m - 1$.

Ta thấy PT (1) có đúng ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT (3) có đúng hai nghiệm phân biệt khác m.

Tức là $\begin{cases} m + 1 > 0 \\ f(m) = m^2 - m - 1 \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \neq \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Vậy với $m > -1$ và $m \neq \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ thì PT (1) có đúng ba nghiệm phân biệt. ❐

(*Xem tiếp trang 15*)

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ mới cho ra mắt bạn đọc cuốn sách

Sách mới phát hành

CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC 45 NĂM

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Cuốn sách bao gồm 450 đề toán hay với nhiều cách giải thú vị được chọn lọc từ chuyên mục "Đề ra kì này" trên Tạp chí THTT, sắp xếp theo phân môn: Số học và Tổ hợp, Đại số và Giải tích, Hình học và phân chia theo cấp học

- **Dành cho THCS**
- **Dành cho THPT**

Sách dày 300 trang, khổ 19 x 26,5 cm. Giá bìa 48500 đồng.

Sách là tư liệu quý cho học sinh, giáo viên toán cấp THCS và THPT, các bạn yêu thích toán.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, 187B Giảng Võ, Hà Nội
ĐT-Fax: 04.35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

Khai thác định lí Euler VÀ ĐỒNG DƯ THỨC

LÊ XU
(Hà Nội)

Trước hết, xin nhắc lại vài kiến thức quen thuộc.

• ***Hàm số Euler*** $\varphi(m)$ với số nguyên dương m là số các số tự nhiên nhỏ hơn m và nguyên tố với m.

• ***Định lí Euler.*** *Cho m là số nguyên dương và $(a, m) = 1$ thì* $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Bây giờ ta xét $m = a.b$ trong đó $(a, b) = 1$, thì có kết quả sau

■ **Định lí 1.** *Với $(a,b) = 1$ thì*

$$a^{\varphi(b)} + b^{\varphi(a)} \equiv 1 \pmod{ab} \qquad (1)$$

Chứng minh. Theo Định lí Euler thì $a^{\varphi(b)} \equiv 1 \pmod{b}$ mà $b^{\varphi(a)} \equiv 0 \pmod{b}$ nên $a^{\varphi(b)} + b^{\varphi(a)} \equiv 1 \pmod{b}$. Tương tự có $a^{\varphi(b)} + b^{\varphi(a)} \equiv 1 \pmod{a}$. Do đó theo tính chất của đồng dư thức thì $a^{\varphi(b)} + b^{\varphi(a)} \equiv 1 \pmod{ab}$. □

Bài viết này trình bày một vài sự mở rộng của Định lí 1 theo hai hướng: xét môđun là tích của các số nguyên tố cùng nhau từng đôi một và xét lũy thừa bậc cao của các số hạng trong đồng dư thức. Khi mở rộng theo hướng xét môđun là tích của các số nguyên tố cùng nhau từng đôi một ta có kết quả sau.

■ **Định lí 2.** *Giả sử có k ($k \geq 2$) số nguyên dương $m_1, m_2, \ldots, m_k$ và chúng nguyên tố với nhau từng đôi một. Đặt $M = m_1.m_2...m_k = m_i t_i$ với $i = 1, 2, \ldots, k$, ta có*

$$t_1^{\varphi(m_1)} + t_2^{\varphi(m_2)} + \ldots + t_k^{\varphi(m_k)} \equiv 1 \pmod{M} \qquad (2)$$

Chứng minh. Từ giả thiết có $(m_i, t_i) = 1$ với mỗi $i = 1, 2, \ldots k$ nên theo Định lí Euler thì

$$t_i^{\varphi(m_i)} \equiv 1 \pmod{m_i} \qquad (2a)$$

Mặt khác với i, j thuộc tập $\{1, 2, \ldots, k\}$ và $j \neq i$ thì t_j chia hết cho m_i nên $(t_j, m_i) = m_i$ hay

$$t_j^{\varphi(m_i)} \equiv 0 \pmod{m_i} \qquad (2b)$$

Đặt $S = t_1^{\varphi(m_1)} + t_2^{\varphi(m_2)} + \ldots + t_k^{\varphi(m_k)}$.

Từ (2a) và (2b) có $S \equiv t_i^{\varphi(m_i)} \equiv 1 \pmod{m_i}$

$\Leftrightarrow S - 1 \equiv 0 \pmod{m_i}$ với mỗi $i = 1, 2, \ldots, k$.

Vì $m_1, m_2, \ldots, m_k$ nguyên tố với nhau từng đôi một, nên theo tính chất đồng dư thức có $S - 1 \equiv 0 \pmod{m_1.m_2...m_k} \Leftrightarrow S \equiv 1 \pmod{M}$, tức là có (2). □

Khi mở rộng Định lí 1 theo hướng nâng lên lũy thừa các số hạng ta có kết quả sau.

■ **Định lí 3.** *Với $(a, b) = 1$ và n, v là hai số nguyên dương nào đó thì*

$$a^{n\varphi(b)} + b^{v\varphi(a)} \equiv 1 \pmod{ab} \qquad (3)$$

Chứng minh. Để tiện lập luận đặt $x = a^{\varphi(b)}$. Theo Định lí Euler có $x = a^{\varphi(b)} \equiv 1 \pmod{b}$ $\Leftrightarrow x - 1 \equiv 0 \pmod{b}$, đồng thời $x = a^{\varphi(b)} \equiv 0 \pmod{a}$. Từ đó có $x(x-1) \equiv 0 \pmod{a}$ và $x(x-1) \equiv 0 \pmod{b}$ nên $x(x-1) \equiv 0 \pmod{ab}$. Từ đó $x^3 \equiv x^2.x \equiv x.x \equiv x^2 \equiv x \pmod{ab}$ và cứ lập luận như thế có $x^n \equiv x \pmod{ab}$ hay $a^{n\varphi(b)} \equiv a^{\varphi(b)} \pmod{ab}$.

Tương tự có $b^{v\varphi(a)} \equiv b^{\varphi(a)} \pmod{ab}$, do đó theo (1) có

$a^{n\varphi(b)} + b^{v\varphi(a)} \equiv a^{\varphi(b)} + b^{\varphi(a)} \equiv 1 \pmod{ab}$.

tức là có (3). □

Hệ quả. Với $(a, b) = 1$ thì

$$a^{n\varphi(b)} + b^{n\varphi(a)} \equiv 1 \pmod{ab}.$$

Bạn đọc có thể chứng minh hệ quả này một cách trực tiếp khi nâng hai vế của hệ thức (1) lên lũy thừa bậc n (sử dụng nhị thức Newton)

với chú ý rằng $ab \equiv 0 \pmod{ab}$. Lưu ý rằng trong đồng dư thức thì $a \not\equiv 0 \pmod{ab}$ và $b \not\equiv 0 \pmod{ab}$ nhưng $ab \equiv 0 \pmod{ab}$!.

Với kí hiệu như ở Định lí 2 ta có $t_i t_j \equiv 0 \pmod{M}$ với $i \neq j$ và mọi i, j thuộc tập $\{1, 2, ..., k\}$ (nhưng $t_i \not\equiv 0 \pmod{M}$ với mọi $i = 1, 2, ..., k$).

Từ đó khi nâng hai vế của hệ thức (2) lên lũy thừa bậc n ta có kết quả sau.

■ **Định lí 4.** *Với các giả thiết như ở Định lí 2 ta có*

$$t_1^{n\varphi(m_1)} + t_2^{n\varphi(m_2)} + ... + t_k^{n\varphi(m_k)} \equiv 1 \pmod{M} \quad (4)$$

Với các kí hiệu như trên đặt $a = m_i$ và $b = t_i$ thì theo hệ thức (1) có

$$m_i^{\varphi(t_i)} + t_i^{\varphi(m_i)} \equiv 1 \pmod{M} \quad (5)$$

Cộng theo từng vế của k đồng dư thức dạng (5) và sử dụng hệ thức (2) ta được kết quả sau.

■ **Định lí 5.** *Với các giả thiết như ở Định lí 2 ta có*

$$m_1^{\varphi(t_1)} + m_2^{\varphi(t_2)} + ... + m_k^{\varphi(t_k)} \equiv k - 1 \pmod{M}$$

Khi nhân hai vế của hệ thức (5) với m_i ta được

$$m_i^{1+\varphi(t_i)} + m_i t_i^{\varphi(m_i)} \equiv m_i \pmod{M}$$

Do $m_i t_i^{\varphi(m_i)} = m_i t_i t_i^{\varphi(m_i)-1} = M t_i^{\varphi(m_i)-1}$ nên

$$m_i^{1+\varphi(t_i)} \equiv m_i \pmod{M} \quad (6)$$

với mỗi $i = 1, 2, ..., k$.

Cộng theo từng vế k đồng dư thức dạng (6) ta được kết quả sau.

■ **Định lí 6.** *Với các giả thiết như ở Định lí 2 ta có*

$$m_1^{1+\varphi(t_1)} + m_2^{1+\varphi(t_2)} + ... + m_k^{1+\varphi(t_k)}$$
$$\equiv m_1 + m_2 + ... + m_k \pmod{M}$$

Khi nhân hai vế của hệ thức (5) với t_i ta được

$$t_i . m_i^{\varphi(t_i)} + t_i^{1+\varphi(m_i)} \equiv t_i \pmod{M}$$

$$\Rightarrow t_i^{1+\varphi(m_i)} \equiv t_i \pmod{M} \quad (7)$$

với mỗi $i = 1, 2, ..., k$.

Cộng theo từng vế của k đồng dư thức dạng (7) ta được kết quả sau.

■ **Định lí 7.** *Với các giả thiết như ở Định lí 2 ta có*

$$t_1^{1+\varphi(m_1)} + t_2^{1+\varphi(m_2)} + ... + t_k^{1+\varphi(m_k)}$$
$$\equiv t_1 + t_2 + ... + t_k \pmod{M}.$$

Chú ý rằng $t_i t_j \equiv 0 \pmod{M}$ nên khi nâng lên lũy thừa bậc n của tổng $t_1 + t_2 + ... + t_k$ ta được kết quả sau.

■ **Định lí 8.** *Với các giả thiết như ở Định lí 2 ta có*

$$t_1^n + t_2^n + ... + t_k^n \equiv (t_1 + t_2 + ... + t_k)^n \pmod{M} \quad (8)$$

Khả năng tìm ra các hệ thức đồng dư mới chưa phải đã cạn, đề nghị bạn đọc nghiên cứu thêm.

Các hệ thức đồng dư đã nêu ở trên cho phép ta tìm được một vài nghiệm của một số dạng phương trình đồng dư khi môđun phân tích được thành tích của các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau từng đôi một.

★**Thí dụ 1.** *Tìm ít nhất bốn nghiệm của phương trình đồng dư* $x^3 + y^7 \equiv 1 \pmod{30}$ (9)

Lời giải. Do $30 = 5 \times 6$ và $(5, 6) = 1$ nên theo (1) có $5^{\varphi(6)} + 6^{\varphi(5)} \equiv 1 \pmod{30}$.

Vì $\varphi(6) = \varphi(2).\varphi(3) = 2$ và $\varphi(5) = 4$; $6^2 \equiv 6 \pmod{30}$ nên có $5^2 + 6^4 \equiv 25 + 6 \equiv 1 \pmod{30}$.

Ta thấy $25^3 \equiv 25 \pmod{30}$ và $6^7 \equiv 6 \pmod{30}$ nên theo (3) có $25^3 + 6^7 \equiv 25 + 6 \equiv 1 \pmod{30}$.

Tương tự có $25^7 \equiv 25 \pmod{30}$ và $6^3 \equiv 6 \pmod{30}$ nên $6^3 + 25^7 \equiv 1 \pmod{30}$.

Nếu phân tích $30 = 3 \times 10$ với $(3, 10) = 1$ thì theo (1) có $3^{\varphi(10)} + 10^{\varphi(3)} \equiv 1 \pmod{30}$. Tính toán tương tự trên ta có $3^4 + 10^2 \equiv 1 \pmod{30}$.

Vì $3^4 = 81 \equiv 21 \pmod{30}$ và $10^2 \equiv 10 \pmod{30}$ nên theo (3) có $(3^4)^3 + (10^2)^7 \equiv 1 \pmod{30}$ và $(3^4)^7 + (10^2)^3 \equiv 1 \pmod{30}$.

Suy ra phương trình (9) có ít nhất bốn nghiệm $(x ; y)$ là $(25 ; 6)$, $(6 ; 25)$, $(21 ; 10)$, $(10 ; 21)$. ❐

★**Thí dụ 2.** *Chứng minh rằng phương trình đồng dư sau có nghiệm* $(x ; y ; z ; t)$ khác $(0 ; 0 ; 0 ; 0)$:

$$x^3 + y^3 + z^3 \equiv t^3 \pmod{210} \qquad (10)$$

Lời giải. Do $210 = 5 \times 6 \times 7$ và $(5, 6) = (5, 7) = (6, 7) = 1$ nên ta đặt $m_1 = 5$, $t_1 = 42$, $m_2 = 6$, $t_2 = 35$, $m_3 = 7$, $t_3 = 30$. Theo (8) có

$$42^3 + 35^3 + 30^3 \equiv (42 + 35 + 30)^3 \equiv 107^3 \pmod{210}.$$

Vậy phương trình (10) có nghiệm $(x;y;z;t)$ là $(42;35;30;107)$.

Nếu phân tích $210 = 3 \times 7 \times 10$ thì tương tự như thế ta thấy phương trình (10) có nghiệm $(x ; y ; z ; t)$ là $(70 ; 30 ; 21 ; 121)$.

Chú ý rằng nếu hoán vị các giá trị của x, y, z, lại có các nghiệm của phương trình (10).

Mời các bạn tìm thêm các nghiệm khác của phương trình (10) và đưa ra những ứng dụng mới của các hệ thức đồng dư trên.

BÀI TẬP

1. Tìm ít nhất một nghiệm của mỗi phương trình đồng dư sau:

a) $x^{17} + y^{19} \equiv 1 \pmod{35}$;

b) $x^{11} + y^{13} \equiv 1 \pmod{45}$.

2. Chứng tỏ rằng mỗi phương trình sau có nghiệm nguyên dương:

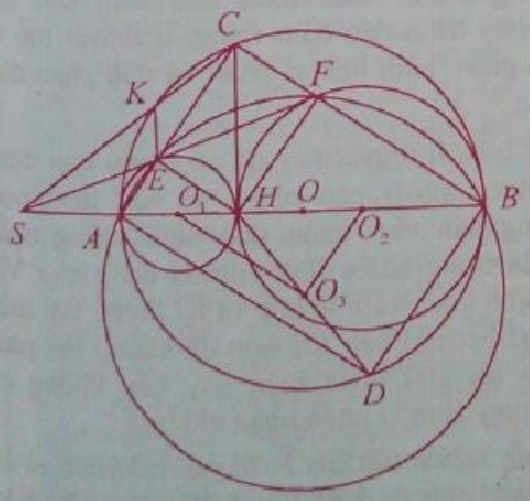
a) $3^x + 5^y + 7^z \equiv 2 \pmod{105}$;

b) $2^x + 3^y + 5^z + 7^t \equiv 3 \pmod{210}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI... *(tiếp trang 5)*

Câu 8. Từ giả thiết suy ra $(p, q) = 1$ và $ap + aq + 1 \vdots q$; $aq + ap + 1 \vdots p$. Suy ra $ap + aq + 1 \vdots pq \Rightarrow 2(ap + aq) > pq$. Do đó $a > \dfrac{pq}{2(p+q)}$.

Câu 9. a) Ta có $HE \perp AC$, $HF \perp BC$ nên $CEHF$ là hình chữ nhật, suy ra $\widehat{CEF} = \widehat{CHF} = \widehat{CBA}$. Vậy tứ giác $AEFB$ là tứ giác nội tiếp.



b) Từ giả thiết suy ra $O_1O_3 \perp AC$, $O_2O_3 \perp BC$. Mặt khác, do CD là đường kính đường tròn (O) nên $AD \perp AC$, $BD \perp BC$, suy ra $O_1O_3 \parallel AD$, $O_2O_3 \parallel BD$. Gọi M là trung điểm của HD, suy ra $O_1M \parallel AD$, $O_2M \parallel BD$. Do đó $M \equiv O_3$. Vậy H, O_3, D thẳng hàng.

c) Do các tứ giác $AEFB$, $AKCB$ nội tiếp nên $\widehat{SEA} = \widehat{ABC} = \widehat{SKA}$. Suy ra tứ giác $SAEK$ nội tiếp, dẫn đến $\widehat{SKE} = \widehat{CAB} = \widehat{CFE}$. Vậy tứ giác $EKCF$ nội tiếp, do đó $\widehat{EKF} = \widehat{ECF} = 90°$.

Câu 10. 1) Chia một cạnh hình vuông thành 100 phần bằng nhau, chia hình vuông đã cho thành 100 hình chữ nhật bởi các đoạn thẳng qua 100 điểm chia trên, song song với cạnh kề của nó. Khi đó các hình chữ nhật tạo thành có chu vi bằng nhau và bằng 2,02.

2) Ta chứng minh $P \le 2{,}02$ với mọi cách chia thoả mãn đề bài. Giả sử ngược lại, có một cách chia mà $P > 2{,}02$, xét hình chữ nhật (cạnh $a \times b$, $a < b$) có diện tích S nhỏ nhất trong cách chia này, khi đó $S < 0{,}01$. Ta có $P = 2(a + b) > 2{,}02 \Rightarrow a + b > 1{,}01$. Mặt khác, do $b < 1 \Rightarrow a + 1 < a + b = 1{,}01 \Rightarrow a < 0{,}01$.

Vậy $4S = 4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2 > 1{,}01^2 - 0{,}99^2 = 0{,}04 \Rightarrow S > 1{,}01$ (mâu thuẫn).

Vậy $\max P = 2{,}02$.

NGUYỄN THỊ THANH THỦY
(GV Trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội) giới thiệu

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

KIYOSI ITÔ (1915-2008)
CHA ĐẺ CỦA PHÉP TÍNH VI TÍCH PHÂN NGẪU NHIÊN

NGUYỄN DUY TIẾN - LÊ VĂN DŨNG
(ĐHKHTN Hà Nội)

Nước Anh (và châu Âu) có Newton để tự hào là ông tổ của phép tính vi tích phân (Calculus, hay Analysis), thì nước Nhật (và châu Á) có *Kiyosi Itô* để tự hào là cha đẻ của phép tính vi tích phân ngẫu nhiên (Stochastic Caculus hay Stochastic Analysis).

Kiyosi Ito sinh ngày 07 tháng 9 năm 1915, tại Hokusei (nay là Inabe), Nhật Bản. Ông học toán tại Đại học Hoàng Đế (Imperial University) ở Tokyo và tốt nghiệp năm 23 tuổi. Sau đó ông làm việc tại cơ quan thống kê Quốc gia và công bố hai bài báo về xác suất và quá trình ngẫu nhiên (năm 1942).

Năm 1945, *Kiyosi Ito* bảo vệ thành công luận án Tiến sĩ và giành được giải thưởng nhờ các kết quả xuất sắc của luận án này. Năm 1952, ông được phong danh hiệu Giáo sư của Đại học Tokyo, và làm việc ở đây cho tới lúc về hưu, (năm 1979). Ngoài ra, ông còn được phong chức danh Giáo sư tại các trường Đại học Aarhus (Đan Mạch) từ 1966 đến 1969, Đại học Cornell (Hoa Kỳ) từ 1960 đến 1975. Ông được công nhận là Viện sĩ của Nhật (Japan Academy of Sciences) vào năm 1991, của Viện khoa học Pháp (Académie des Sciences of France) vào năm 1989, và Viện khoa học Hoa Kỳ (the US Academy of Sciences) năm 1998.

Năm 2008, *Kiyosi Ito* vinh dự được nhận Huân chương Văn hóa Nhật Bản tại Cung điện Hoàng Đế (Nhật). Ông còn nhận được nhiều giải thưởng cao quý như: Giải thưởng Viện Hàn lâm Nhật Bản (1978); Giải thưởng Wolf (1987); Giải thưởng Kyoto (1998). Đặc biệt, ông là người đầu tiên nhận Giải thưởng Gauss tại Đại hội Toán học Quốc tế ở Madrid vào 2006 (lúc đó ông đã 91 tuổi, không thể đến Madrid để nhận giải, con gái út của ông, bà *Junko Ito*, giáo sư ngôn ngữ, đã thay mặt ông nhận giải thưởng này do Vua Tây Ban Nha, *Joan Carlos*, trao tặng). Ngoài ra, *K. Ito* còn được tặng học vị tiến sĩ danh dự của trường Đại học Paris VI (1981), Viện Kĩ thuật Liên bang Zurich (1987), và Đại học Warwick (1992).

Kiyosi Itô đã có những đóng góp lớn tới sự tiến bộ của khoa học toán học bằng việc đặt nền tảng của lí thuyết phương trình vi phân ngẫu nhiên và tích phân ngẫu nhiên (năm 1942). Ông cũng đóng một vai trò hàng đầu trong sự phát triển những phần này vào trong chương cốt lõi của lí thuyết xác suất hiện đại, được biết như là tích phân ngẫu nhiên.

Từ đầu những năm 1950, Lí thuyết phương trình vi phân ngẫu nhiên đã được áp dụng vào những nhánh khác nhau của toán học như phương trình đạo hàm riêng, lí thuyết thế vị, tích phân, hình học vi phân và tích phân điều hòa.

Đặc biệt, lí thuyết này đã có nhiều ứng dụng vượt ra ngoài các phạm vi của toán học, chẳng hạn như phân tích hiện tượng ngẫu nhiên trong nhiều lĩnh vực đa dạng như Vật lí, Sinh học, Kinh tế học và Kĩ thuật. Bài toán lọc (filtering) của *Kalman* đã không thể phát triển tới giai đoạn hiện nay nếu không có phương trình vi phân ngẫu nhiên.

Trong nghiên cứu của *F. Black, R. Merton* và *M. Scholes*, nhờ áp dụng lí thuyết phương trình vi phân ngẫu nhiên đã giúp *Merton* và *Scholes* nhận được giải thưởng Nobel Kinh tế năm 1997.

Itô đã đóng góp to lớn tới nhiều lĩnh vực khác như: sự phân giải hỗn loạn Wiener- Itô (*The*

Wiener- Itô chaos decomposition), quá trình khuyếch tán một chiều, lí thuyết quá trình Markov và quá trình khuyếch tán hữu hạn chiều. Trong lí thuyết xác suất trên không gian Banach, ông và Nisio đã đưa ra kết quả quan trọng về sự hội tụ của tổng các phần tử ngẫu nhiên độc lập (năm 1968).

Ông là đại diện tiêu biểu cho khoa học toán học thế kỉ XX, có ảnh hưởng mạnh mẽ tới nhiều nhánh khác nhau của toán học và khoa học. Có lẽ vì vậy mà cả "thế giới ngẫu nhiên" đều ngưỡng mộ và xem ông là cha đẻ của tính toán ngẫu nhiên.

Năm 2005, Hội nghị về Giải tích ngẫu nhiên và Ứng dụng đã được tổ chức tại Oslo (Nauy) để mừng thọ *Kiyosi Itô* 90 tuổi (tại hội nghị này ông còn đọc báo cáo: "*Memoiry of My Research on Stochastic Analysis*"). *Kiyosi Ito* mất ngày 10 tháng 11 năm 2008, tại Tokyo.

Ra đời vào năm 1960, xác suất thống kê của Việt Nam chịu ảnh hưởng lớn của *Itô*, dù ông chưa đến Việt Nam bao giờ. Năm 1961, *Igor Girsanov*, một chuyên gia người Nga, đã giảng về quá trình ngẫu nhiên cho cán bộ bộ môn Xác suất và Thống kê tại khoa Toán Đại học Tổng hợp Hà Nội. Trước đó (1961), *Girsanov* đã có kết quả hết sức quan trọng trong lí thuyết phương trình vi phân ngẫu nhiên: *Định lí Girsanov* nổi tiếng và càng ngày càng có nhiều ứng dụng, đặc biệt, trong ngành toán tài chính. Tiếp theo, thầy *Huỳnh Sum* (1936-1986) là giảng viên người Việt đầu tiên dạy quá trình ngẫu nhiên và hướng dẫn sinh viên viết luận văn tốt nghiệp đại học về tích phân ngẫu nhiên Itô. Thế rồi, nhiều nhà toán học ở Việt Nam đã nghiên cứu và trở thành những chuyên gia về toán tài chính và điều khiển sử dụng phương trình Itô, về ổn định của phương trình vi phân Itô, tích phân Itô, hệ động lực ngẫu nhiên,...

Với những điều trên, ta có thể gọi *Itô* là Ông, là Cha của những ai đang nghiên cứu Tính toán Itô, một *Newton* của Giải tích ngẫu nhiên.

TIN TỨC

ĐẠI HỘI ĐẠI BIỂU HỘI TOÁN HỌC HÀ NỘI
Nhiệm kì 2009 - 2014

Sáng ngày 20/9/2009, tại trường Đại học Khoa học Tự nhiên Hà Nội đã long trọng diễn ra Đại hội Đại biểu Hội Toán học Hà Nội nhiệm kì 2009 - 2014. Tham dự đại hội có GS. TSKH. Lê Tuấn Hoa, Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam, PGS. TS. Bùi Duy Cam, Hiệu trưởng trường Đại học Khoa học Tự nhiên Hà Nội, cùng đông đảo các thành viên của Hội Toán học Hà Nội. Tại Đại hội, GS. TSKH. Nguyễn Văn Mậu, Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội, đã đọc báo cáo tổng kết những thành tựu đạt được, những thuận lợi và khó khăn trong nhiệm kì vừa qua, đồng thời vạch ra phương hướng hoạt động của Hội trong thời gian tiếp theo. Đại hội đã nghe các ý kiến phát biểu của PGS. TS. Trần Huy Hổ, GS. TSKH. Lê Tuấn Hoa, ông Nguyễn Hữu Độ (Giám đốc Sở GD&ĐT Hà Nội). Ban Chấp hành nhiệm kì cũ cùng đông đảo hội viên tham dự đã bầu ra 18 thành viên cho Ban chấp hành mới trong nhiệm kì tiếp theo, 2009 - 2014. Đại hội đã diễn ra trong không khí đầm ấm, khẩn trương và thành công tốt đẹp.

HH.

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

Vấn đề tìm số hạng tổng quát của một dãy số cho bởi công thức truy hồi dạng tuyến tính đã được giải quyết. Thế nhưng, trong chương trình phổ thông thì vấn đề này còn là một dạng toán khó. Vì vậy, trong bài viết này chúng tôi trình bày một phương pháp tiếp cận việc tìm số hạng tổng quát của dãy số cho bởi công thức truy hồi dạng đơn giản.

Tìm số hạng tổng quát của dãy số

LÝ VĂN CÔNG
(GV THPT Thanh Bình, Thanh Hà, Hải Dương)

Trước hết chúng ta có nhận xét sau:

Với mọi dãy số (u_n), ta luôn có

$$u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + (u_{n-2} - u_{n-3}) + \ldots + (u_2 - u_1) + u_1.$$

Nếu (u_n) là cấp số cộng với công sai d thì

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}.$$

Nếu (u_n) là cấp số nhân với công sai q $(q \neq 1)$ thì

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1 . \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Bài toán 1. (Số hạng tổng quát của cấp số cộng).

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn điều kiện $u_{n+1} = u_n + d$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, trong đó $d \in \mathbb{R}$. Tìm u_n theo u_1 và d.

Lời giải. Ta có

$$u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + (u_{n-2} - u_{n-3}) + \ldots + (u_2 - u_1) + u_1$$
$$= \underbrace{d + d + d + \ldots + d}_{(n-1)\text{ số hạng}} + u_1$$

Vậy $u_n = u_1 + (n-1)d$. □

Bài toán 2. *Cho dãy số (u_n) thỏa mãn điều kiện $u_{n+1} = u_n + n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm u_n theo u_1.*

Lời giải. Ta có

$$u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + (u_{n-2} - u_{n-3}) + \ldots + (u_2 - u_1) + u_1$$
$$= (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 1 + u_1$$
$$= u_1 + \frac{(n-1)n}{2}. \square$$

Bài toán 3. *Cho dãy số (u_n) thỏa mãn điều kiện $u_{n+1} = u_n + 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm u_n theo u_1.*

Lời giải. Ta có

$$u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + (u_{n-2} - u_{n-3}) + \ldots + (u_2 - u_1) + u_1$$
$$= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2 + u_1$$
$$= u_1 + 2(2^{n-1} - 1). \square$$

Bài toán 4. *Cho dãy số (u_n) thỏa mãn điều kiện $u_{n+1} = 3u_n + 6$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm u_n theo u_1.*

Lời giải. Đặt $u_n = 3^n v_n$ suy ra $v_1 = \frac{u_1}{3}$.

$$v_{n+1} = v_n + \frac{2}{3^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Ta có

$$v_n = (v_n - v_{n-1}) + (v_{n-1} - v_{n-2}) + (v_{n-2} - v_{n-3}) + \ldots + (v_2 - v_1) + v_1$$
$$= \frac{2}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^{n-2}} + \frac{2}{3^{n-3}} + \ldots + \frac{2}{3} + v_1$$

$$= v_1 + \frac{3^{n-1}-1}{3^{n-1}} = \frac{u_1}{3} + \frac{3^{n-1}-1}{3^{n-1}}.$$

Do đó

$$u_n = 3^n\left(\frac{u_1}{3} + \frac{3^{n-1}-1}{3^{n-1}}\right) = \left(\frac{u_1}{3}+1\right).3^n - 3. \square$$

Bài toán 5. *Cho dãy số (u_n) thỏa mãn điều kiện $u_{n+1} = 4u_n + n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm u_n theo u_1.*

Lời giải. Đặt $u_n = 4^n.v_n$ suy ra

$$v_{n+1} = v_n + \frac{n}{4^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Ta có

$$v_n = (v_n - v_{n-1}) + (v_{n-1} - v_{n-2}) + (v_{n-2} - v_{n-3}) + ... + (v_2 - v_1) + v_1$$

$$= \frac{n-1}{4^n} + \frac{n-2}{4^{n-1}} + \frac{n-3}{4^{n-2}} + ... + \frac{1}{4^2} + v_1$$

$$= v_1 - \frac{3n+1}{9}.\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{9}$$

$$= \frac{u_1}{4} - \frac{3n+1}{9}.\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{9}.$$

Do đó

$$u_n = \left(\frac{u_1}{4} + \frac{1}{9}\right).4^n - \frac{3n+1}{9}. \square$$

Bài toán 6. *Cho dãy số (u_n) thỏa mãn điều kiện $u_{n+1} = 5u_n + 3^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm u_n theo u_1.*

Lời giải. Đặt $u_n = 5^n.v_n$ suy ra

$$v_{n+1} = v_n + \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}, \ n \in \mathbb{N}^* \quad (1)$$

Ta có

$$v_n = (v_n - v_{n-1}) + (v_{n-1} - v_{n-2}) + (v_{n-2} - v_{n-3}) + ... + (v_2 - v_1) + v_1.$$

Theo công thức (1) suy ra

$$v_n = \frac{u_1}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + ... + \left(\frac{3}{5}\right)^2.$$

Áp dụng công thức tính tổng n số hạng đầu của cấp số nhân, ta có

$$v_n = \frac{u_1}{5} + \frac{9}{2}.\left(\frac{5^{n-1}-3^{n-1}}{5^n}\right).$$

Vậy nên, ta có

$$u_n = \frac{u_1}{5}.5^n + \frac{9}{10}.5^n - \frac{3}{2}.3^n$$

hay $$u_n = \frac{2u_1+9}{10}.5^n - \frac{3}{2}.3^n. \square$$

Một số bài tập áp dụng

Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) cho bởi công thức truy hồi sau:

1. $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = u_n + n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = 4u_n + 3^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
3. $u_1 = \pi$ và $u_{n+1} = u_n + \sin n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
4. $u_1 = \pi$ và $u_{n+1} = u_n + \cos(3n-2), \forall n \in \mathbb{N}^*$.
5. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ và $u_{n+2} - 6u_{n+1} + 8 = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

VỀ PHƯƠNG TRÌNH ĐA THỨC...

(Tiếp trang 8)

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tìm a, b để đồ thị hàm số $y = x^3 + ax + b$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt cách đều nhau.

2. Xác định m để phương trình
$$x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x + 1 - m^2 = 0$$
có đúng ba nghiệm dương phân biệt.

3. Xác định các giá trị của a, b để phương trình
$$x^3 - ax^2 + (b-2a)x + 2a^2 - ab = 0$$
có ba nghiệm phân biệt.

4. Cho hàm số
$$y = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2-3m+2)x + 2m(2m-1).$$
Gọi họ đồ thị của hàm số là (C_m).

a) Tìm các điểm cố định của họ đồ thị (C_m).

b) Tìm các giá trị của tham số m để (C_m) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt.

5. Tìm m để phương trình $mx^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$ có ba nghiệm lập thành một cấp số nhân.

6. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình
$$2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3 = 0.$$
Với giá trị nào của m thì biểu thức $A = |x_1x_2 - 2(x_1+x_2)|$ đạt giá trị lớn nhất.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/388. (Lớp 6). Chứng minh rằng số có dạng $\overline{(33...3)}^2$, trong đó có k ($k > 0$) chữ số 3, luôn được viết dưới dạng hiệu của hai số tự nhiên viết bởi toàn chữ số 1 và số tự nhiên viết bởi toàn chữ số 2.

NGUYỄN ANH THUẤN
(Sở GD-ĐT Hải Phòng)

Bài T2/388. Tìm tất cả các số thực a sao cho $|3a-2| \le 1$ và $A = \dfrac{3a-1}{4a^4+a^2}$ là số nguyên.

HOÀNG THẾ NGHĨA
(GV THPT TTr. Vị Xuyên, Hà Giang)

Bài T3/388. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 3\sqrt{x} + 8\sqrt{y}$$

trong đó x, y là hai số không âm thỏa mãn

$$17x^2 - 72xy + 90y^2 - 9 = 0.$$

ĐÀO QUỐC DŨNG
(GV THPT Diễn Châu 4, Nghệ An)

Bài T4/388. Giải phương trình

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} + \sqrt{2x-5} = 2x^2 - 5x.$$

LƯƠNG CAO VINH
(GV THPT Cộng Hiền, Vĩnh Bảo, Hải Phòng)

Bài T5/388. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn tâm O, kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với B, C là các tiếp điểm. Trên đoạn OB lấy điểm N sao cho $BN = 2ON$. Đường trung trực của đoạn thẳng CN cắt OA tại M. Hãy tính tỉ số $\dfrac{AM}{AO}$.

TẠ HOÀNG THÔNG
(GV TP. Hồ Chí Minh)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/388. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{1}{a^4(b+1)(c+1)} + \frac{1}{b^4(c+1)(a+1)} + \frac{1}{c^4(a+1)(b+1)}$$

trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$.

CAO XUÂN NAM
(GV THPT chuyên Hà Giang)

Bài T7/388. Cho a, b là hai số thực thuộc khoảng $(0 ; 1)$. Dãy số (u_n), $(n = 0, 1, 2, ...)$ được xác định như sau: $u_0 = a$, $u_1 = b$.

$$u_{n+2} = \frac{1}{2010}.u_{n+1}^4 + \frac{2009}{2010}\sqrt[4]{u_n}, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

NGUYỄN ANH THẾ
(SV lớp Toán C, K40, ĐHSP Thái Nguyên)

Bài T8/388. Cho tam giác ABC. Gọi l_a, l_b, l_c theo thứ tự là độ dài các đường phân giác trong hạ từ A, B, C; R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Chứng minh rằng

$$\frac{l_a + l_b + l_c}{R} \le$$

$$\le 2\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

NGUYỄN VĂN ĐỈNH
(SV lớp K49F, Đại học Xây dựng Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/388. Cho đường tròn (O) và một dây cung AB của (O). Điểm C nằm trên đường tròn đó. Điểm M thuộc đường gấp khúc ACB (gồm hai đoạn thẳng AC và CB) và chia đường gấp khúc này thành hai phần có độ dài bằng nhau. Tìm tập hợp điểm M khi điểm C di chuyển trên đường tròn (O).

TRẦN XUÂN UY
(Nam Định)

Bài T10/388. Cho m, n, d là các số nguyên dương thỏa mãn các điều kiện $m < n$ và $(d, m) = 1$, $(d, n) = 1$. (Kí hiệu $(a ; b)$ là ước số chung lớn nhất của a và b).

Chứng minh rằng trong một dãy gồm n số nguyên bất kì tạo thành một cấp số cộng với công sai d luôn tồn tại hai số khác nhau mà tích của chúng chia hết cho $m.n$.

HỒ SỸ HÙNG
(GV THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An)

Bài T11/388. Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn các tính chất sau:

a) $f(0)=1$;

b) $f(x)\le 1$ với $\forall x\in\mathbb{R}$;

c) $f\left(x+\frac{11}{24}\right)+f(x)=f\left(x+\frac{1}{8}\right)+f\left(x+\frac{1}{3}\right)$.

Đặt $F(x)=\sum_{n=0}^{2009} f(x+n)$.

Hãy tính $F(2009)$.

VŨ THÁI LUÂN
(Viện CNTT Hà Nội)

Bài T12/388. Cho hai đa thức với hệ số thực (m, n là các số nguyên dương)

$P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$

và $Q(x)=x^m+b_1x^{m-1}+...+b_{m-1}x+b_m$.

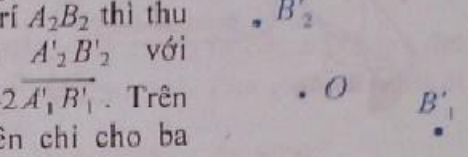
Biết rằng $Q(x)$ có m nghiệm thực và $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$.

Chứng minh rằng nếu tồn tại $k\in\{1,2,...,m\}$ sao cho $|b_k|>C_m^k.2009^k$ thì cũng tồn tại $i\in\{1,2,...,n\}$ sao cho $|a_i|>2008$.

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/388. Một thấu kính hội tụ L, quang tâm O, trục chính Ox, tiêu cực f tạo ảnh $A'_1B'_1$ của một vật sáng $A_1B_1\perp Ox$ (A_1 nằm trên Ox). Dịch chuyển A_1 trên Ox và A_1B_1 song song với chính nó, tới vị trí A_2B_2 thì thu được ảnh $A'_2B'_2$ với $\overline{A'_2B'_2}=-2\overline{A'_1B'_1}$. Trên hình vẽ bên chỉ cho ba điểm B'_1, O và B'_2.



1) Hãy vẽ trục chính Ox và các tiêu điểm của thấu kính L.

2) Cho $A_1A_2=12$cm và $A'_1A'_2=54$cm, hãy tính tiêu cự f của L.

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

Bài L2/388. Một thanh đồng chất, tiết diện đều, khối lượng m được treo nằm ngang bằng hai sợi dây nhẹ, dài, thẳng đứng ở hai đầu.

a) Lực căng một dây bằng bao nhiêu ngay sau khi dây kia bị cắt đứt?

b) Lực căng dây treo còn lại bằng bao nhiêu khi thanh tạo với phương ngang một góc α?

TRẦN KHÁNH HẢI
(GV THPT Quốc học Huế)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOL

T1/388. (For 6th grade). Prove that a number of the form $\left(\overline{33...3}\right)^2$ with k ($k>0$) digits 3, can always be written as the difference between of the number whose digits are 1 and the one whose digits are 2.

T2/388. Find all real numbers a such that $|3a-2|\le 1$ and $A=\frac{3a-1}{4a^4+a^2}$ is an integer.

T3/388. Find the greatest value of the expression

$$P=3\sqrt{x}+8\sqrt{y},$$

where x, y are two non-negative numbers satisfying $17x^2-72xy+90y^2-9=0$.

T4/388. Solve the equation

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}+\sqrt{2x-5}=2x^2-5x.$$

Bài T5/388. From a point A outside a given circle with center O, construct two tangent lines AB and AC with B, C are the tangency points. On OB, choose N such that $BN=2ON$. The perpendicular bisector of the line segment CN meets OA at M. Determine the ratio $\frac{AM}{AO}$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/388. Find the least value of the expression

$$A=\frac{1}{a^4(b+1)(c+1)}+\frac{1}{b^4(c+1)(a+1)}+\frac{1}{c^4(a+1)(b+1)}$$

where a, b, c are positive real numbers satisfying $abc=1$.

T7/388. Let a, b be two real numbers in the interval $(0;1)$. A sequence (u_n), $(n=0,1,2,...)$ is given by: $u_0=a$, $u_1=b$.

(Xem tiếp trang 28)

★**Bài T1/384.** *Hãy thay các chữ khác nhau trong đẳng thức sau bởi các chữ số khác nhau để được một đẳng thức đúng*

VỀ + TRƯỜNG + SA = 22 × 12 × 2009

Lời giải. *Chú ý.* Số tự nhiên n và tổng các chữ số của nó $s(n)$ có cùng số dư khi chia cho 9, nên $n - s(n)$ luôn chia hết cho 9.

Giả sử có 530376 = VỀ + TRƯỜNG + SA, trong đó các chữ được thay bằng các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Sử dụng chú ý trên đối với ba số hạng của tổng trên được

$$530376 - (0+1+2+3+4+5+6+7+8+9)$$

chia hết cho 9 hay $530376 - 45 = 530331$ chia hết cho 9, nhưng điều này không xảy ra, nghĩa là điều giả sử không đúng. Vậy không thể thay các chữ khác nhau trong đẳng thức đã cho bởi các chữ số khác nhau để được một đẳng thức đúng. ❐

Nhận xét. 1) Có những cách chứng minh phản chứng khác nhưng thường dài hơn. Bạn *Nguyễn Thị Kiều Duyên*, 6A, THCS Hành Đức, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi** có nhận xét rằng nếu thay dấu cộng trước chữ SA ở đề bài bằng dấu trừ thì ta có các đẳng thức đúng sau:

27 + 530418 − 69 = 530376,
28 + 530417 − 69 = 530376,
18 + 530427 − 69 = 530376,
17 + 530428 − 69 = 530376.

2) Các bạn sau có lời giải đúng:

Phú Thọ: *Bùi Công Cường, Vũ Thị Mai*, 6A1, *Nguyễn Hồng Việt*, 6A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Tú Anh, Tạ Đức Chính, Nguyễn Văn Long, Nguyễn Thị Lan Oanh, Nguyễn Thành Công, Nguyễn Đức Đại*, 6A1, THCS Yên Lạc; **Hải Phòng:** *Nguyễn Huy Cường*, 6A4, THCS Hồng Bàng; **Nghệ An:** *Nguyễn Bá Khánh Hòa*, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Phan Hoàng Hồng Quân*, 6D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu.

VIỆT HẢI

★**Bài T2/384.** *Ta đã biết hai tam giác vuông có độ dài các cạnh là các số nguyên dương như (5, 12, 13) và (6, 8, 10) đồng thời số đo diện tích của mỗi tam giác bằng số đo chu vi của mỗi tam giác đó.*

Hỏi còn tam giác vuông nào có tính chất như vậy nữa không ?

Lời giải. Gọi b, c là độ dài các cạnh góc vuông, a là độ dài cạnh huyền của tam giác vuông đang xét (a, b, c nguyên dương $b \geq c$). Theo định lí Pythagore ta có

$$b^2 + c^2 = a^2 \quad (1)$$

$$bc = 2(a+b+c) \quad \text{(giả thiết)} \quad (2)$$

Từ (1) suy ra $(b+c)^2 - 2bc = a^2$

$\Rightarrow (b+c)^2 - 4(a+b+c) = a^2$

$\Rightarrow (b+c)^2 - 4(b+c) + 4 = a^2 + 4a + 4$

$\Rightarrow (b+c-2)^2 = (a+2)^2$

$\Rightarrow b + c - 2 = a + 2$ (do $b + c \geq 2$)

$\Rightarrow a = b + c - 4 \quad (3)$

Thay (3) vào (2) ta được $bc = 4(b + c - 2)$

$\Rightarrow (b-4)(c-4) = 8 = 4.2 = 8.1$

(lưu ý $b - 4 > -4$, $c - 4 > -4$).

Suy ra $\begin{cases} b-4=4 \\ c-4=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} b-4=8 \\ c-4=1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} b=8 \\ c=6 \\ a=10 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} b=12 \\ c=5 \\ a=13. \end{cases}$

Như vậy, ngoài hai tam giác vuông đã cho trong bài toán, không còn tam giác vuông nào có tính chất như vậy nữa. ❐

Nhận xét. 1) Tất cả các bạn tham gia giải đều đúng và lập luận chính xác. Lưu ý rằng vai trò của b và c là bình đẳng nên không cần xét trường hợp $b - 4 = 2$ hoặc $b - 4 = 1$.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: *Dương Tú Anh*, 7C, THCS Đa Tốn, Gia Lâm; **Phú Thọ:** *Trịnh Hồng Ngọc*, 7A1, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Phan Huy Hoàng*, 6E, THCS Vĩnh Tường; **Bắc Giang:** *Lê Anh Dũng*, 7A1, THCS Ngô Sỹ Liên,

TP. Bắc Giang; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Hương Lý*, 7A1, THCS Đông Thọ, Yên Phong; **Hà Nam:** *Nguyễn Đức Bảo*, 7C, THCS Nguyễn Hữu Tiến, Hòa Mạc, Duy Tiên; **Nam Định:** *Bùi Vũ Việt Hà*, 7A, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy; **Nghệ An:** *Lê Đình Tài*, 6A2, THCS Văn Yên, Đô Lương, *Phan Thanh Tùng*, *Đậu Hồng Quân*, 7D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Quảng Ngãi:** *Tông Thành Nguyên*, 6A, THCS Hành Phước, *Nguyễn Thị Kiều Duyên*, 6A, THCS Hành Đức, *Phạm Thị Hoài Thương*, *Bùi Thị Hàn Ny*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **TP. Hồ Chí Minh:** *Đoàn Hồng Minh*, 7A2, THCS Đinh Thiện Lý, P. Tân Phong, Q. 7.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★**Bài T3/384.** *Cho 1003 số hữu tỉ khác 0, trong đó bốn số bất kì nào trong chúng cũng có thể lập thành một tỉ lệ thức. Chứng minh rằng trong các số đã cho có ít nhất 1000 số bằng nhau.*

Lời giải. (Theo bạn *Trương Đình Đức*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An).

Từ 1003 số đã cho, chọn ra ba số bất kì a, b, c. Do bốn số bất kì nào cũng có thể lập thành một tỉ lệ thức nên 1000 số còn lại chỉ nhận một trong ba giá trị là $\frac{ab}{c}, \frac{ac}{b}, \frac{bc}{a}$. Do đó, theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất 333 số bằng nhau.

Lấy bất kì ba số $x = y = z$ trong 333 số này cùng với lần lượt 1 trong 1000 số còn lại, ta cũng được các tỉ lệ thức. Do vậy 1000 số này bằng nhau và bằng $x = y = z$.

Vậy 1003 số đã cho bằng nhau. □

Nhận xét. 1) Với lời giải trên, ta được kết quả *mạnh* hơn là cả 1003 số bằng nhau. Bằng lập luận tương tự, có thể khái quát kết quả này là: *Với n số hữu tỉ khác 0 ($n \in \mathbb{N}, n > 7$), trong đó bốn số bất kì nào trong chúng cũng có thể lập thành một tỉ lệ thức, thì n số đó bằng nhau.*

2) Một số bạn có lời giải chưa thật chặt chẽ, cụ thể là:

Nếu $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{1003}$ là các số đã cho thì

do a_1, a_2, a_3, a_4 lập thành một tỉ lệ thức nên $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4}$ (1),

do a_1, a_2, a_3, a_5 lập thành một tỉ lệ thức nên $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_5}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $a_4 = a_5$, ...

Lập luận trên chưa chặt chẽ ở chỗ, chẳng hạn, nếu a_1, a_2, a_3, a_5 lập thành một tỉ lệ thức thì (2) chỉ là một trường hợp, còn có thể: $\frac{a_1}{a_5} = \frac{a_2}{a_3}$, ... do đó chưa suy ngay được $a_4 = a_5$.

3) Ngoài lời giải của bạn *Đức* ở trên, bạn *Hà Nhật Cương*, 9A, THCS Anh Sơn, Nghệ An cũng có lời giải tốt.

TRẦN HỮU NAM

★**Bài T4/384.** *Cho x, y, z là các số không âm và thoả mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P = (x + 2y + 3z)(6x + 3y + 2z).$$

Lời giải. Áp dụng BĐT $ab \le \frac{1}{4}(a+b)^2$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$. Ta có thể làm theo các cách sau:

Cách 1. Ta có

$$P = (x+2y+3z)(6x+3y+2z)$$

$$\Leftrightarrow 2P = (2x+4y+6z)(6x+3y+2z)$$

$$\le \frac{(8(x+y+z)-y)^2}{4} = \frac{(8-y)^2}{4} \le \frac{8^2}{4} = 16.$$

(Do $x + y + z = 1$ nên $0 \le y \le 1$).

Vậy $P \ge 8$; $P = 8$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y = 0 \\ x+y+z = 1 \\ 2x+4y+6z = 6x+3y+2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x+z = 1 \\ x = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Cách 2

$$P = 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 + 15xy + 13yz + 20zx$$

$$= 6(x+y+z)^2 + 3xy + yz + 8xz$$

$$= 6(x+y+z)^2 + 3x(y+z) + 5y(y+z) - 4yz$$

$$\le 6(x+y+z)^2 + 3\frac{(x+y+z)^2}{4} + \frac{5.(x+y+z)^2}{4}$$

(do $yz \ge 0$)

$$= 8(x+y+z)^2 = 8 \text{ (do } x+y+z = 1).$$

$P = 8$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = y + z \\ y = z + x \\ yz = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 0 \\ y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 8, đạt được khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}; y = 0; z = \frac{1}{2}$. □

Nhận xét. 1) Đa số các bạn đều giải theo một trong hai cách trên. Tuy nhiên, có bạn đã dùng kiến thức THPT để giải bằng cách coi P là tam thức bậc hai biến x và dùng định lí về dấu của tam thức bậc hai, như vậy không đúng yêu cầu của cấp THCS.

2) Tuyên dương các bạn sau đây có lời giải tốt: **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Công Huân, Phạm Mỹ Linh*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ:** *Nguyễn Hữu Dũng*, 8A3, THCS Lâm Thao; **Bắc Giang:** *Võ Thanh Đạt*, 9C, THCS TTr. Cao Thượng; **Hà Nam:** *Đặng Duy Hiển*, 8B, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; **Thanh Hóa:** *Trần Minh Hoàng*, 8D, THCS Ngọc Trạo, TX. Bỉm Sơn; **Thái Bình:** *Trần Quang Đại*, Phú Mĩ, Bình Minh, Kiến Xương; **Bình Định:** *Lê Thu Ngọc*, 9A1, THCS Bình Định, An Nhơn.

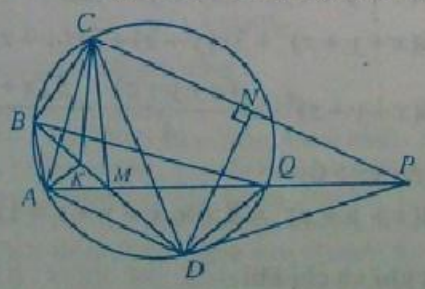
PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★Bài T5/384. *Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Các đường phân giác của các góc BAD và BCD cắt nhau tại điểm K nằm trên đường chéo BD. Gọi M là trung điểm của BD, Q là giao điểm của khác A của đường thẳng AM với đường tròn (O). Đường thẳng qua C song song với AD cắt tia AM tại điểm P, N là trung điểm của CP. Chứng minh rằng*

1) $S_{ABQ} = S_{ADQ}$;

2) *DN vuông góc với CP.*

Lời giải. (Theo bạn *Trần Đại Dương*, 9A, THCS Diễn Hùng, Diễn Châu, Nghệ An).



1) Vì M là trung điểm của BD nên $S_{ABQ} = S_{ABM} + S_{MBQ} = S_{ADM} + S_{MDQ} = S_{ADQ}$.

2) Ta chứng minh tam giác DCP cân tại D.

Vì AK, CK là phân giác của góc BAD và BCD nên $\frac{BA}{DA} = \frac{BC}{DC}\left(= \frac{BK}{DK}\right)$, do đó $AB.CD = BC.DA$ (1)

Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $ABCD$, ta được

$$BD.AC = BC.DA + AB.CD \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $2BM.AC = 2AB.CD$

$\Rightarrow \frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CD}$.

Kết hợp với $\widehat{ABM} = \widehat{ACD}$, ta có

$\Delta ABM \backsim \Delta ACD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{ADC}$ (3)

Tương tự, $\Delta CBM \backsim \Delta CAD \Rightarrow \widehat{CMB} = \widehat{CDA}$ (4)

Từ (3) chú ý rằng $CP // AD$, ta có

$\widehat{PCD} = \widehat{CDA} = \widehat{AMB} = \widehat{PMD}$,

do đó tứ giác $CMDP$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{CPD} = \widehat{CMB} \Rightarrow \widehat{CPD} = \widehat{CDA}$ (do (4))

$\Rightarrow \widehat{CPD} = \widehat{DCP}$.

Vậy tam giác CPD cân tại D có N là trung điểm của CP nên $DN \perp CP$. □

Nhận xét. 1) Một số bạn có cách giải không dùng định lí Ptolemy, tuy nhiên có hơi cồng kềnh vì phải kẻ thêm đường phụ.

2) Bạn *Cao Thanh Hà*, 9A, THCS Chu Văn An, Đăk Hà, **KonTum** đã phát hiện ra $ABCD$ là tứ giác điều hòa và trình bày lời giải theo hướng này cũng cho lời giải đúng.

3) Ngoài bạn *Dương* và bạn *Hà*, các bạn sau đây có lời giải tốt: **Vĩnh Phúc**: *Phạm Mỹ Linh*, $9A_1$, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh**: *Chu Hương Giang*, 9A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài, *Nguyễn Thị Hương Lý*, 7A1, THCS Đông Thọ, Yên Phong; ; **Hà Nội**: *Lý Phụng Hoàng*, THPTDL Nguyễn Siêu, Cầu Giấy; **Nghệ An**: *Võ Duy Vấn*, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Hà Nhật Cương*, 9A, THCS Anh Sơn; **Hà Tĩnh**: *Phạm Nhật Anh*, 9B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Quảng Ngãi**: *Phạm Quốc Việt*, 9A, THCS Nguyễn Tự Tân, Bình Sơn.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★**Bài T6/384.** *Với mỗi số tự nhiên n, gọi p(n) là ước số lẻ lớn nhất của n. Hãy tính tổng*

$$\sum_{n=2006}^{4012} p(n).$$

Lời giải. (Theo bạn *Phan Quốc Khánh*, 11A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**).

Từ định nghĩa, dễ thấy
$p(2n) = p(n)$, $p(2n+1) = 2n+1$.

Đặt $S_k = \sum_{n=k}^{2k} p(n)$, ta có

$$S_k = S_{k-1} - p(k-1) + p(2k-1) + p(2k)$$
$$= S_{k-1} - p(k-1) + 2k - 1 + p(k).$$

Vậy $S_k - p(k) = S(k-1) - p(k-1) + 2k - 1$.

Đặt $u_k = S_k - p(k)$. Khi đó $u_k = u_{k-1} + 2k - 1$.

Suy ra $u_k = u_1 + (3+5+7+...+2k-1)$
$= 1+3+5+...+2k-1 = k^2$.

Vậy $S_k = p(k) + k^2$.

Do đó $\sum_{n=2006}^{4012} p(n) = S_{2006} = 2006^2 + p(2006)$
$= 2006^2 + 1003 = 4025039$. ❐

Nhận xét. Bài này được rất nhiều bạn tham gia giải với nhiều cách khác nhau. Cách giải ở trên của bạn *Khánh* là cách giải ngắn gọn nhất. Cũng có không ít bạn giải sai bài toán này. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Đặng Duy Lính*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, *Nguyễn Đức Lập*, 11A1, THPT Tam Nông; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Mạnh Quân*, *Kim Đình Sơn*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Giang:** *Trần Thị Thu Nga*, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Hà Nội:** *Trần Thế Khải*, 11A1, khối THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Quảng Ninh:** *Hoàng Minh Tuấn*, 10 Toán, THPT chuyên Hạ Long; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Anh Thắng*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Minh*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **TP. Hồ Chí Minh:** *Phạm Tuấn Huy*, 8A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★**Bài T7/384.** *Giải phương trình*

$$\sqrt{3x-2} = -4x^2 + 21x - 22.$$

Lời giải. ĐK $x \ge \frac{2}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(3x-2) - \sqrt{3x-2} + \frac{1}{4} = 4x^2 - 18x + \frac{81}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x-2} - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(2x - \frac{9}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{3x-2} - \frac{1}{2} = 2x - \frac{9}{2} \\ \sqrt{3x-2} - \frac{1}{2} = -2x + \frac{9}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{3x-2} = 2x - 4 & (1) \\ \sqrt{3x-2} = 5 - 2x & (2) \end{array}\right.$$

• PT (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2 = (2x-4)^2 \\ x \ge 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 19x + 18 = 0 \\ x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{19 + \sqrt{73}}{8}.$$

• PT (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2 = (5-2x)^2 \\ \frac{2}{3} \le x \le \frac{5}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 23x + 27 = 0 \\ \frac{2}{3} \le x \le \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{23 - \sqrt{97}}{8}.$$

Đáp số. Tập nghiệm của phương trình là

$$\left\{\frac{19+\sqrt{73}}{8}; \frac{23-\sqrt{97}}{8}\right\}. ❐$$

Nhận xét. 1) Có rất nhiều bạn tham gia giải bài này, đa số đều cho lời giải đúng. Dạng tổng quát của PT trên là: $\sqrt{ax+b} = c(mx+n)^2 + dx + e$.

Lời giải xin dành cho bạn đọc.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt hơn cả:

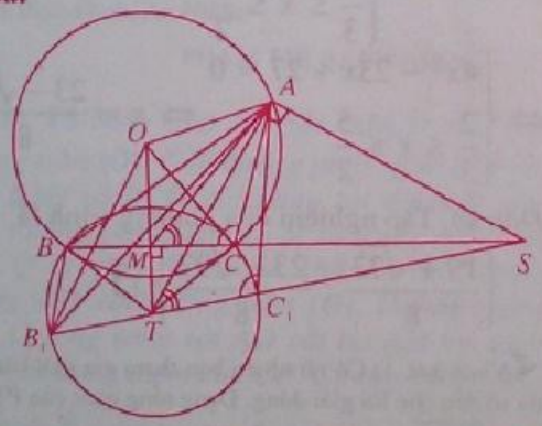
Bắc Ninh: *Nguyễn Thế Nam Huy*, 10A0, THPT Yên Phong I; **Quảng Ninh:** *Giang Thọ Anh*, *Nguyễn Xuân Hồng*, 10 Toán, THPT chuyên Hạ Long; **Vĩnh Phúc:** *Hà Quang Nhận*, 8B, THCS Như Thuỵ, Sông Lô; *Đỗ Công Huân*, 9A1, THCS Yên Lạc; *Nguyễn Dương Phụng*, 10A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Phú Yên:** *Phan Minh Trí*, 10 Toán, THPT Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hoà; **Thái Bình:** *Tạ Bá Trung*, 10A1, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy; *Trương Việt Trình*, 9A2, THCS Thanh Nê, Kiến Xương; *Nguyễn Anh Tuyến*, 10 Toán, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hoá:** *Lê Sĩ Bảo*, 10A1, THPT Lê Lợi, Thọ Xuân; *Lê Thị Cẩm Vân*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Thị Thuỷ*

Dương, 10A7, THPT Đô Lương 2; *Đặng Trung Đức*, 10A3, THPT Nguyễn Xuân Ôn, Diễn Châu; *Nguyễn Lê Trung Kiên*, 9E, THCS Trung Đô, TP. Vinh; *Thái Bá Tài*, 10A1, THPT Nguyễn Đức Mậu, Quỳnh Lưu; *Phan Đình Thi*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; *Trần Đại Dương*, 9A, THCS Diễn Hùng, Diễn Châu; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thị Ngọc Anh, Trần Viết Cường, Nguyễn Kim Ngọc Khánh*, 10 Toán 1, *Lê Quang Bình*, 10 Toán 2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Hữu Minh Tuấn*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bến Tre:** *Vũ Hữu Bình*, 10/3, THPT Nguyễn Đình Chiểu, TX. Bến Tre; **Đồng Nai:** *Nguyễn Thị Thanh Hoà*, 10 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Bình Định:** *Nguyễn Hùng Cường*, 10A2, THPT An Nhơn II; **Vĩnh Long:** *Lê Minh Nhựt*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

NGUYỄN THANH HỒNG

★Bài T8/384. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với AC < AB. Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B, C cắt nhau tại T. Đường thẳng qua A và vuông góc với AT cắt BC tại S. Trên đường thẳng ST lấy các điểm B_1, C_1 sao cho $TB_1 = TC_1 = TB$, C_1 nằm giữa S và T. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và AB_1C_1 đồng dạng với nhau.*

Lời giải



Ta thấy do $\widehat{CBT} = \widehat{CAB}$ nên $\widehat{TBA} = \widehat{CBT} + \widehat{ABC}$ $= \widehat{CAB} + \widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{BCA}$.

Nhận xét rằng, nếu gọi M là giao điểm của OT và BC thì $\widehat{BAT} = \widehat{CAM}$ (kết quả này đã được chứng minh trong bài *Về một tứ giác đẹp*. THTT số 371, tháng 5 năm 2008, trang 2). Từ đây, áp dụng *định lí sin* cho các tam giác BAT và CAM ta được

$$\frac{TB}{TA} = \frac{\sin\widehat{BAT}}{\sin\widehat{TBA}} = \frac{\sin\widehat{CAM}}{\sin\widehat{BCA}} = \frac{MC}{MA} \qquad (1)$$

Để ý rằng $TB = TC_1$ nên từ (1) có $\dfrac{TC_1}{TA} = \dfrac{MC}{MA}$ (2)

Mặt khác vì $\widehat{TMS} = \widehat{TAS} = 90^\circ$, nên bốn điểm T, M, A, S cùng nằm trên một đường tròn, suy ra $\widehat{AMC} = \widehat{ATC_1}$ (3)

Từ (2) và (3) ta thấy $\Delta MAC \backsim \Delta TAC_1$. Từ đó $\dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{MC}{TC_1} = \dfrac{AC}{AC_1}$, kết hợp với $\widehat{ACB} = \widehat{AC_1B_1}$, ta được $\Delta ABC \backsim \Delta AB_1C_1$ (đpcm). □

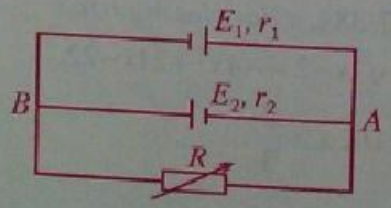
Nhận xét. 1) Mấu chốt của lời giải trên là kết quả $\widehat{BAT} = \widehat{CAM}$. Đây là một trong những tính chất đặc trưng của *tứ giác điều hòa* (*Tứ giác nội tiếp có tích các cặp cạnh đối bằng nhau, trong bài đó là tứ giác ABDC, với D là giao điểm của TA với đường tròn (O)*). Ngoài cách giải trên, nhiều bạn sử dụng các khái niệm *phương tích, trục đẳng phương, tâm đẳng phương* cũng đi đến kết quả của bài toán đã cho.

2) Các bạn sau có lời giải tốt hơn cả:

Hà Nội: *Nguyễn Văn Thắng, Nguyễn Văn Quý*, 10A1 Toán, khối THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, *Mai Anh Bằng*, 10T, trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Phú Thọ:** *Đặng Duy Linh*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Mạnh Quân, Kim Đình Sơn*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** *Trần Anh Tuấn*, 11A1, THPT Thuận Thành 1; **Quảng Ninh:** *Nguyễn Xuân Hồng, Hoàng Minh Tuấn*, 10 Toán, THPT chuyên Hạ Long; **Nam Định:** *Trần Trọng Huy*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** *Tạ Bá Trung*, 10A1, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy; **Thanh Hóa:** *La Hồng Quân*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Minh*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Thừa Thiên – Huế:** *Trần Viết Trai*, 11^5, THPT Quốc học Huế; **Quảng Nam:** *Nguyễn Hồng Sơn*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Phú Yên:** *Võ Văn Huy*, 10A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Hữu Minh Tuấn*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bến Tre:** *Lê Phúc Lữ, Huỳnh Công Bằng*, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Tiền Giang:** *Nguyễn Lê Anh Khoa*, 12 Toán, THPT chuyên Tiền Giang.

HỒ QUANG VINH

★Bài L1/384. *Cho mạch điện như hình vẽ với $E_1 = 6V$, $E_2 = 3V$, $r_2 = 2\Omega$.*



Điều chỉnh biến trở R để công suất tiêu thụ trên R đạt giá trị cực đại bằng $\frac{27}{8}$ W. Tìm R và r_1.

Lời giải. Ta giải bài toán bằng phương pháp nguồn tương đương. Thay hai nguồn đã cho bằng một nguồn tương đương có suất điện động E và điện trở trong r.

Suất điện động nguồn tương đương E bằng hiệu điện thế mạch ngoài U_{AB} khi mạch ngoài để hở.

Cường độ dòng điện qua các nguồn khi mạch ngoài để hở:

$$I = \frac{E_1 + E_2}{r_1 + r_2} = \frac{6+3}{x+2} = \frac{9}{x+2} \text{ (đặt } r_1 = x)$$

Hiệu điện thế giữa hai điểm A và B:

$$E = U_{AB} = I.r_2 - E_2 = \frac{9.2}{x+2} - 3 = \frac{12-3x}{x+2}.$$

Điện trở trong của nguồn tương đương bằng điện trở của đoạn mạch AB khi coi suất điện động của các nguồn bằng 0:

$$r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{2x}{x+2}.$$

Công suất của mạch ngoài:

$$P = I^2 R = \frac{E^2 R}{(r+R)^2} = \frac{E^2}{\left(\frac{r}{\sqrt{R}} + \sqrt{R}\right)^2} \le \frac{E^2}{4r}$$

$$= \frac{\left(\frac{12-3x}{x+2}\right)^2}{4.\frac{2x}{x+2}} = \frac{(12-3x)^2}{8x(x+2)}.$$

$$P_{max} = \frac{(12-3x)^2}{8x(x+2)} = \frac{27}{8} \text{(W)}$$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 3x^2 + 6x$

$\Leftrightarrow x^2 + 7x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -8$ (loại).

Khi đó $R = r = \frac{2x}{x+2} = \frac{2}{3}$.

Vậy để công suất tiêu thụ trên R cực đại bằng $\frac{27}{8}$ W thì $R = \frac{2}{3}\Omega$ và $r_1 = 1\Omega$. ❐

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng:

Nam Định: *Nguyễn Thị Kiều Trinh*, 11A3, THPT Trần Hưng Đạo; **Thái Bình:** *Trần Sỹ Đạt*, 12A1, THPT Nguyễn Trãi, Vũ Thư; **Thanh Hóa:** *Lê Quốc Đạt*, 12A1, THPT Yên Định, *Đinh Hùng*, 11E, THPT Hà Trung; **Nghệ An:** *Vũ Đình Hải*, *Nguyễn Bá Dũng*, A3K37 THPT chuyên Phan Bội Châu; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Tấn Đông*, 11 Lí, THPT Chuyên Lê Khiết; **Bến Tre:** *Liêu Khắc Vũ*, 9[3] THCS Tân Trung, Huyện Mỏ Cày Nam.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★Bài L2/384. *Đặt một vật sáng AB song song với mặt phẳng của màn ảnh MN. Giữa vật sáng AB và màn ảnh MN đặt một thấu kính hội tụ có tiêu cự $f = \frac{3}{4}$ m, sao cho trục chính của thấu kính vuông góc với AB và màn ảnh MN. Khoảng cách giữa AB và màn ảnh MN là 2m.*

1) Xác định các vị trí của thấu kính để có ảnh rõ nét của AB trên màn ảnh MN và hệ số phóng đại ảnh.

2) Phải dùng thấu kính có tiêu cự bằng bao nhiêu để chỉ có một vị trí của thấu kính cho ảnh rõ nét trên màn ảnh MN?

3) Người ta thay màn ảnh MN bằng một gương phẳng G, hướng mặt phản xạ ánh sáng về thấu kính. Điều chỉnh thấu kính để cho mặt phẳng chứa AB trùng với tiêu diện thấu kính. Hãy vẽ và xác định vị trí ảnh của AB cho bởi hệ thống thấu kính và gương phẳng.

Lời giải. 1) Ảnh $A'B'$ của vật AB phải nằm trên màn. Từ điều kiện của bài toán, ta có các phương trình

$$d + d' = 2 \quad (1) \; ; \qquad d' = \frac{df}{d-f} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $d^2 - 2d + 2f = 0$ (3)

Khi $f = \frac{3}{4}$ m, phương trình (3) có dạng

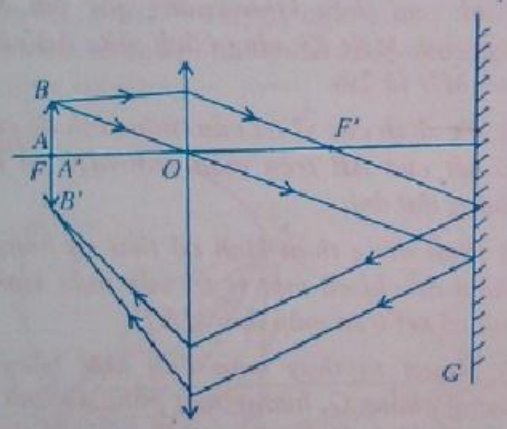
$$2d^2 - 4d + 3 = 0 \qquad (4)$$

Ta có $\Delta' = 4 - 6 < 0$. PT (4) vô nghiệm; nghĩa là không có vị trí nào của thấu kính có tiêu cự $f = \frac{3}{4}$m cho ảnh rõ nét trên màn.

2) Để chỉ có một vị trí cho ảnh rõ nét trên màn thì PT (3) phải cho nghiệm kép. Do đó ta có $\Delta' = 1 - 2f = 0$, suy ra $f = 0{,}5$ m.

Khi dùng thấu kính hội tụ có tiêu cự $f = 0{,}5$m thì chỉ có một vị trí của thấu kính cho ảnh rõ nét trên màn.

3) Vật AB ở tiêu diện thì các tia sáng sau khi qua thấu kính sẽ song song với nhau. Các tia sáng gặp gương phẳng G sẽ phản xạ thành chùm tia sáng song song. Các tia phản xạ song song này khi qua thấu kính sẽ hội tụ trên tiêu diện. Như vậy, ảnh $A'B'$ là ảnh thật, ngược chiều và bằng vật (xem hình vẽ).



Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Thái Bình:** *Trần Sỹ Đạt*, 12A1, THPT Nguyễn Trãi, Vũ Thư; **Quảng Ngãi:** *Tạ Việt Ý, Nguyễn Tấn Đông*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Vĩnh Phúc:** *Hà Duy Quang*, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Trọng Hoàng Hiệp*, 11 Toán 2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nghệ An:** *Nguyễn Trường Chinh*, 11A3, THPT Nghi Lộc III; **Bến Tre:** *Liêu Khắc Vũ*, 9^3, THCS Tân Trung, Huyện Mỏ Cày Nam; **Thanh Hóa:** *Lê Quốc Đạt*, 12A1, THPT Yên Định 1, *Nguyễn Văn Đức*, 12G, *Mai Chí Đạt*, 11E, THPT Hà Trung.

NGUYỄN VĂN THUẬN

CUỘC THI GIẢI TOÁN KỈ NIỆM 45 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

★Bài T7/THCS. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1 & (1) \\ y+\dfrac{y}{\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{35}{12}=0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $x^2-1>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>1. \end{array}\right.$

Lưu ý rằng với mọi số thực x, y luôn có

$$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=1;$$

$$\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\left(-y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$$

Kết hợp từng hệ thức trên với PT (1), được

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2+1}=-y+\sqrt{y^2+1} \\ y+\sqrt{y^2+1}=-x+\sqrt{x^2+1}. \end{cases}$$

Cộng theo vế của hai đẳng thức trên và rút gọn, suy ra $y=-x$. Thay vào PT (2), ta có

$$x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12} \qquad (3)$$

• Nếu $x<-1$ thì VT(3) < 0, phương trình không thoả mãn.

• Nếu $x>1$, bình phương hai vế thì được

$$x^2+\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{x^2}{x^2-1}=\left(\frac{35}{12}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4}{x^2-1}+\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1225}{144}=0.$$

Đặt $t=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$, $t>0$. PT trở thành

$$t^2+2t-\frac{1225}{144}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{25}{12} \\ t=-\dfrac{49}{12}. \end{array}\right.$$

Loại nghiệm $t=-\dfrac{49}{12}<0$, ta được $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{25}{12}$.

Bình phương hai vế, đưa về phương trình

$$144x^4 - 625x^2 + 625 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{25}{9} \\ x^2 = \dfrac{25}{16}. \end{array}\right.$$

Vì $x > 1$; $y = -x$ nên hệ phương trình trong đầu bài có hai nghiệm $(x\,;y)$ là

$$\left(\frac{5}{3};-\frac{5}{3}\right) \text{ và } \left(\frac{5}{4};-\frac{5}{4}\right). \square$$

Nhận xét. 1) Hầu hết các bạn đều làm theo cách trên. Hai bước quan trọng của bài toán là chứng minh $y = -x$ và đặt $t = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} > 0$. Một số bạn đã không lưu ý đến điều kiện VT(3) > 0 nên đã lấy cả nghiệm $(x;y) = \left(-\frac{5}{3};\frac{5}{3}\right)$, $\left(-\frac{5}{4};\frac{5}{4}\right)$ (!).

2) Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Việt Hoàng Phú*, 9B, THCS Gia Khánh, Bình Xuyên; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Văn Cương*, 9A1, THCS Đông Thọ, Yên Phong; **Nghệ An:** *Trương Đình Đức*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Trị:** *Nguyễn Hữu Ánh*, 9I, THCS Thành Cổ, TX Quảng Trị; **Quảng Ngãi:** *Phạm Quốc Việt*, 9A, THCS Nguyễn Tự Tân, Bình Sơn; **Kon Tum:** *Cao Thanh Hà*, 9A, THCS Chu Văn An, Đắk Hà.

NGUYỄN ANH DŨNG

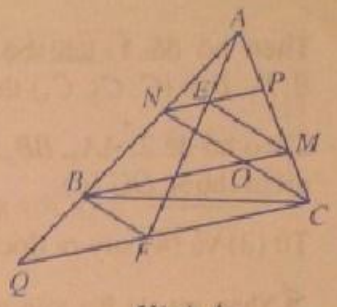
★**Bài T8/THCS.** *Cho tam giác ABC với trọng tâm G và điểm O nằm trong tam giác đó. Các đường thẳng AO, BO, CO theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Gọi A_2, B_2, C_2 theo thứ tự là các điểm đối xứng của O qua trung điểm của B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Chứng minh rằng các đường thẳng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy tại một điểm thuộc OG.*

Lời giải. Trước hết, xin giới thiệu và chứng minh hai bổ đề.

Bổ đề 1. Cho tam giác ABC và điểm O nằm trong tam giác. BO, CO theo thứ tự cắt AC, AB tại M, N; E, F theo thứ là điểm đối xứng của O qua trung điểm của MN, BC. Khi đó, A, E, F thẳng hàng.

Chứng minh. Đặt $P = NE \cap AC$; $Q = CF \cap AB$ (h.1).

Dễ thấy *OMEN*, *OBFC* là các hình bình hành.



Hình 1

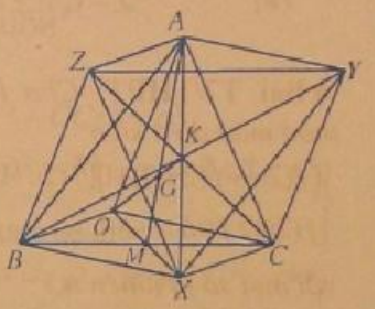
Suy ra *EM* // *NC*; *NP* //*BM* // *QC*; *BF* // *NC*. Từ đó, theo định lí Thales

$$\frac{EN}{EP} = \frac{MC}{MP} = \frac{BQ}{BN} = \frac{FQ}{FC}.$$

Do đó, theo định lí về chùm đường thẳng đồng quy, chú ý rằng *NP* // *QC*, ta có *A*, *E*, *F* thẳng hàng.

Bổ đề 2. Cho tam giác ABC với trọng tâm G. Điểm O nằm trong tam giác còn X, Y, Z theo thứ tự là điểm đối xứng của O qua trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Khi đó AX, BY, CZ đồng quy tại một điểm thuộc OG.

Chứng minh. Gọi *M*, *N*, *P* theo thứ tự là trung điểm của *BC*, *CA*, *AB*. Từ đó, chú ý rằng *M*, *N*, *P* theo thứ tự là trung điểm của *OX*, *OY*, *OZ*, ta có *BOCX*, *COAY*, *AOBZ* là các hình bình hành (h.2).



Hình 2

Từ đó, suy ra *BCYZ*, *CAZX*, *ABXY* là các hình bình hành. Do đó, các đoạn *AX*, *BY*, *CZ* đôi một cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn.

Vậy *AX*, *BY*, *CZ* đồng quy tại điểm *K*, trung điểm mỗi đoạn (1).

Mặt khác, vì *G* là trọng tâm của tam giác *ABC* nên *G* thuộc đoạn *AM* và $\dfrac{GA}{GM} = 2$.

Từ đó, chú ý rằng *MO* = *MX*, ta có *G* là trọng tâm của tam giác *AOA'*.

Từ *KA* = *KX*, suy ra *K* thuộc *OG* (2).

Từ (1) và (2) suy ra kết quả bổ đề 2.

Trở lại bài T8/THCS.

Gọi A_3, B_3, C_3 theo thứ tự là điểm đối xứng của *O* qua trung điểm của *BC*, *CA*, *AB*.

Theo bổ đề 1, các bộ ba điểm (A, A_2, A_3); $B, B_2, B_3)$; (C, C_2, C_3) thẳng hàng (3).

Theo bổ đề 2, AA_3, BB_3, CC_3 đồng quy tại một điểm thuộc OG (4).

Từ (3) và (4) suy ra đpcm. ❐

Nhận xét. 1) Bài toán này khá khó, chỉ có ít bạn tham gia giải. Các bạn đều cho lời giải đúng, tuy nhiên đa số các lời giải đều dài và phức tạp.

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Trần Thiên Chương*, 10T, THPT chuyên Hùng Vương; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Việt Hoàng Phú*, 9B, THCS Gia Khánh, Bình Xuyên; **Hà Nội:** *Phạm Huy Hoàng*, 9A5, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Hải Dương:** *Bùi Thế Bun*, $9A_2$, THCS Phú Thái, Kim Thành; **Nghệ An:** *Hà Nhật Cương*, 9A, THCS Anh Sơn; **Hà Tĩnh:** *Phạm Nhật Anh*, 9B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Bạc Liêu:** *Trần Quang Minh*, 8/4, THCS Trần Huỳnh, TX Bạc Liêu; **Đồng Nai:** *Nguyễn Hoàng Sơn*, 9[1], THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP Biên Hoà.

NGUYỄN MINH HÀ

★Bài T7/THPT. *Cho hàm số f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thoả mãn điều kiện:*

$$\begin{cases} (f(2n)+f(2n+1)+1)(f(2n+1)-f(2n)-1)=3(1+2f(n)) \\ f(2n)\ge f(n) \end{cases}$$

với mọi số tự nhiên n.

Hãy tìm các số tự nhiên n sao cho $f(n) \le 2009$.

Lời giải. Do $3(1+2f(n))$ là số nguyên dương lẻ, suy ra $f(2n+1)-f(2n)-1$ là số nguyên dương lẻ. Do đó

$$f(2n+1) \ge f(2n)+2 > f(2n) \ge f(n)$$

đúng với mọi số tự nhên n.

Bởi vậy

$f(2n+1)+f(2n)+1 \ge 2f(2n)+3 > 1+2f(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Từ đó ta có

$$\begin{cases} f(2n+1)-f(2n)-1=1 \\ f(2n+1)+f(2n)+1=3(1+2f(n)) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Suy ra $\forall n \in \mathbb{N}$ thì $f(2n+1)=f(2n)+2$; $f(2n)=3f(n)$. (1)

Tiếp theo ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo $n \in \mathbb{N}$ rằng $f(n) < f(n+1)$ (2)

Từ (1) ta có $f(1)=f(0)+2 > f(0)$ $(f(0)=3f(0) \Rightarrow f(0)=0)$.

Giả sử đã có $f(0) < f(1) < \ldots < f(k)$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Nếu k là số chẵn, $k=2m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ thì

$f(k+1)=f(2m+1)=f(2m)+2 > f(2m)=f(k)$.

Nếu k là số lẻ, $k=2m+1$ $(m \in \mathbb{N})$ thì

$f(k+1)=f(2m+2)=3f(m+1) \ge 3(f(m)+1)$
$> 3f(m)+2=f(2m)+2=f(2m+1)=f(k)$
(chú ý $k=2m+1 \Rightarrow m+1 \le k \Rightarrow f(m) < f(m+1)$ $\Rightarrow f(m)+1 \le f(m+1)$ do tất cả các số ở đây đều là các số nguyên).

Như vậy, trong mọi trường hợp ta có $f(k+1) > f(k)$, tức là khẳng định (2) đúng.

Từ (1) ta đã có $f(0)=0$, $f(1)=2$.

Do đó $f(2)=3f(1)=6$, $f(3)=f(2)+2=8$,

$f(13)=f(12)+2=f(2^2.3)+2=3^2.f(3)+2=74$,

$f(27)=f(2.13+1)=3f(13)+2=224$,

$f(53)=f(2^2.13+1)=3^2f(13)+2=668$,

$f(108)=f(2^2.27)=3^2f(27)=2016$,

$f(107)=f(2.53+1)=3f(53)+2=2006$.

Bởi vậy $f(107) < 2009 < f(108)$.

Kết hợp với (2) ta có kết luận $f(n) \le 2009 \Leftrightarrow n \in \{0, 1, 2, \ldots, 107\}$. ❐

Nhận xét. Đây là bài toán *hàm số số học* hay nhưng không quá khó. Các bạn sau có lời giải tốt:

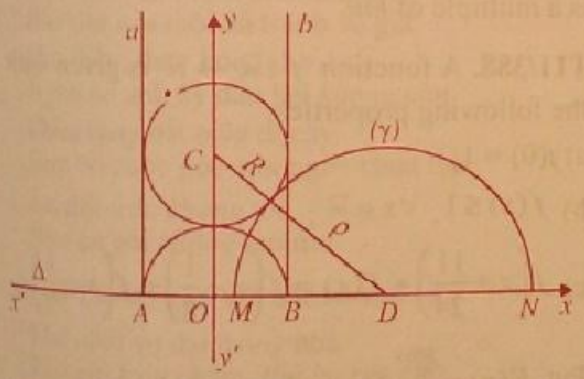
Bắc Ninh: *Nguyễn Thế Nam Huy*, 10A0, THPT Yên Phong I, *Nguyễn Văn Quý*, 10T, THPT chuyên; **Quảng Ninh:** *Nguyễn Xuân Hồng*, 10T, THPT chuyên Hạ Long; **Hải Dương:** *Nguyễn Tuấn Dũng*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Mạnh Quân*, *Nguyễn Minh Thuận*, 10A1, THPT chuyên; **Hà Nội:** *Mai Anh Bằng*, 10T, THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội, *Vũ Đình Long*, *Nguyễn Văn Quý*, 10A1 Toán, khối chuyên Toán – Tin, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Nam Định:** *Trần Trọng Huy*, 10T, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Vương Khôi*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Văn Nhật*, *Hồ Phạm Thiều*, 10A1, THPT Lê Hữu Trác I; **Bình Định:** *Nguyễn Hùng Cường*, 10A2, THPT An Nhơn II; **Phú Yên:** *Võ Văn Huy*, 10A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★**Bài T8/THPT.** *Cho hai điểm A, B phân biệt và cố định trên đường thẳng Δ, xác định điểm N sao cho:* $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BA}$, *với* $k = \dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ (*)

Trên nửa mặt phẳng bờ Δ, dựng nửa đường tròn (α) đường kính MN. Chứng minh rằng khi M di động trên Δ thì (α) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Lời giải. Dễ thấy rằng khi $M \equiv A$ thì $k = 0$ và $N \equiv B$, khi $M \equiv B$ thì N ra vô tận trên Δ ($k = \infty$) và khi M chạy ra vô tận trên Δ thì $k = 1$ và $N \equiv A$. Với ba vị trí đặc biệt này của M ta có *ba nửa đường tròn đặc biệt*: nửa đường tròn $\left(O, c = \dfrac{AB}{2}\right)$ và hai "*nửa đường tròn*" *Aa*, *Bb* vuông góc với Δ ở *A* và *B* và nằm về một phía (phía trên) của Δ. Ta dự đoán *đường tròn* $\mathscr{C}$ *cố định cần tìm tiếp xúc với Aa, Bb và nửa đường tròn (O, c).*



Chứng minh. Ta đưa vào hệ trục tọa độ *Oxy*, trung điểm *O* của đoạn *AB* được chọn làm gốc tọa độ. $O(0\,;\,0)$, đặt $AB = 2c$ thì $A(-c\,;\,0)$ và $B(c\,;\,0)$, trục hoành $x'Ox$ là trục $\vec{\Delta}$, trục tung $y'Oy$ là trung trực $t[AB]$ của đoạn *AB*.

Gọi *C* là một điểm nằm trên nửa trục dương *Oy* và đặt $\overline{OC} = y$; $C(0\,;\,y)$. Cặp điểm $\{M, N\}$ trên Δ: $\overline{OM} = x_1$, $\overline{ON} = x_2$ tức là $M(x_1;0)$ và $N(x_2;0)$. Thế thì tâm *D* của nửa đường tròn (α) đường kính *MN* có tọa độ $D\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};0\right)$ và $\rho = \dfrac{MN}{2} = \dfrac{1}{2}(x_2 - x_1)$.

Dễ thấy (*) $\Leftrightarrow \overline{BM}.\overline{BN} + \overline{AB}.\overline{AM} = 0$

$$\Leftrightarrow \overline{BM}.\overline{AN} = -\overline{AB}^2 \qquad (1)$$

Vì vậy, (1) tương đương với $x_2 = \dfrac{cx_1 + 3c^2}{-x_1 + c}$ do đó

$$(*) \Leftrightarrow x_1x_2 + c(x_1 - x_2) + 3c^2 = 0 \qquad (2)$$

Điều kiện cần và đủ để đường tròn $\mathscr{C}(C, R)$ tiếp xúc với (α) là $DC = \rho \pm R$ (3) (với dấu + hay − tùy theo (α) tiếp xúc ngoài hay tiếp xúc trong với $\mathscr{C}(C, R)$).

Ta tính phương tích $p = \mathscr{P}_{D/(\alpha)}$ bằng hai cách khác nhau. Một mặt, $p = \overline{OM}.\overline{ON} = x_1x_2$ và theo (2) ta được

$$p = c(x_2 - x_1) - 3c^2 = \pm 2c\rho - 3c^2 \qquad (4)$$

Mặt khác,

$$p = \overline{OD}^2 - \rho^2 = (DC^2 - OC^2) - \rho^2$$
$$= (\rho \pm R)^2 - y^2 - \rho^2 = R^2 - y^2 \pm 2\rho R \qquad (5)$$

Từ (4) và (5) ta thu được hệ thức

$$2\rho(c \mp R) = 3c^2 - (y^2 - R^2) \qquad (**)$$

Hệ thức (**) là *điều kiện cần và đủ* để (α) tiếp xúc với đường tròn $\mathscr{C}(C, R)$, trong đó *C* được xác định trên tia *Oy* bởi $OC = y$.

Muốn cho đẳng thức (**) xảy ra với mọi cặp điểm $\{M, N\}$ trên Δ thỏa mãn điều kiện (*) đòi hỏi, cũng tức là (**) thỏa mãn với mọi giá trị của ρ, *cần và đủ* là

$$c \mp R = 0 \text{ và } 3c^2 - (y^2 - R^2) = 0 \ (y > 0) \qquad (***)$$

Vì vậy, điều kiện (***) tương đương với $R = c$ và $\overline{OC} = y = 2c$. Ta đi đến kết luận:

Khi điểm *M* di động trên Δ, *nửa đường tròn (α) đường kính MN luôn tiếp xúc với đường tròn cố định* $\mathscr{C}(C, R)$ *có tâm nằm trên Oy* ($\subset t[AB]$), *xác định bởi* $\overline{OC} = 2c$ (= *AB*) *và bán kính* $R = c = \dfrac{AB}{2}$. □

Nhận xét. 1) Bài toán này về hình thức phát biểu mà nói thì được xếp vào loại *toán chứng minh*. Tuy nhiên, xét về *thực chất* thì bài toán này phải được xem là thuộc loại toán *tìm hình* (và do đó, cũng được xếp vào loại *toán dựng hình*). Muốn cho bài toán trở nên khó hơn ta có thể phát biểu nó dưới dạng sau đây: Tìm một đường cong $\mathscr{C}$ sao cho mọi nửa đường tròn (α) đường kính MN đều tiếp xúc với nó. Người ta gọi $\mathscr{C}$ là *hình bao* của họ các nửa đường tròn (α). Khái niệm hình bao được xem là *đối ngẫu* của khái niệm quỹ tích. Chẳng hạn, như đã biết đường tròn tâm O là *quỹ tích* những điểm cách O một khoảng $d(OM) = R$. Mặt khác, lại có thể xem đường tròn $\mathscr{C}(O, R)$ là *hình bao* của những đường thẳng m cách O một khoảng $d(O, m) = R$.

Cuối cùng, để nói rõ hơn nữa thì có thể kết luận như sau: Hình thức phát biểu (dưới dạng toán chứng minh) của bài toán T8/THPT trên đây chính là *phát biểu kết quả phản biện luận của bài toán tìm hình* (cũng được xem là bài toán dựng hình.

2) Hầu hết các bạn đều sử dụng phương pháp tọa độ, tuy nhiên có hai bạn sử dụng vectơ (tích vô hướng) cho lời giải khá đẹp và gọn gàng (Nhưng lời giải vẫn có tính áp đặt). Đó là các bạn *Trần Trọng Huy*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định** và *Nguyễn Hồng Sơn*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Quảng Nam**. Tuy có lời giải độc đáo và ngắn gọn nhất nhưng bạn *Huy* lại giải quá tắt, bạn cần rút kinh nghiệm trong việc trình bày lời giải, kể cả những bài toán dự thi như kiểu dạng thi này.

3) Ngoài hai bạn nói trên, các bạn sau đây cũng đáng được biểu dương: *Nguyễn Đồng Tiến*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn, **Bình Định**, *Huỳnh Công Bằng* và *Lê Phúc Lữ*, 12 Toán, THPT chuyên **Bến Tre**.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

PROBLEMS... (*Tiếp trang 17*)

$$u_{n+2} = \frac{1}{2010}.u_{n+1}^4 + \frac{2009}{2010}\sqrt[4]{u_n}\text{, for all } n \in \mathbb{N}.$$

Prove that (u_n) has a finite limit, and find that limit.

T8/388. Let l_a, l_b, l_c be respectively the lengths of the interior angle-bisectors from the three vertices A, B, C of a triangle ABC; Let R be its circumradius. Prove that

$$\frac{l_a + l_b + l_c}{R} \le$$

$$\le 2\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\right).$$

When does the equality occur?

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/388. Let AB be a fixed chord on a given circle (O). A point C moves on the circle and let M be a point on the zigzag ACB (consisting of two line segments AC and CB) such that it divides this zigzag into two parts of equal length. Find the locus of M when C moves around the circle (O).

T10/388. Let m, n, d be positive integers such that $m < n$ and $\gcd(d, m) = 1$, $\gcd(d, n) = 1$. (Here, $\gcd(a, b)$ denotes the greatest common divisor of a and b).

Prove that in an arithmetic progression of n terms with common difference d, there always exist two distinct terms whose product is a multiple of mn.

T11/388. A function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is given with the following properties:

a) $f(0) = 1$;

b) $f(x) \le 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

c) $f\left(x + \frac{11}{24}\right) + f(x) = f\left(x + \frac{1}{8}\right) + f\left(x + \frac{1}{3}\right)$.

Put $F(x) = \sum_{n=0}^{2009} f(x+n)$.

Find $F(2009)$.

Bài T12/388. Given two positive degrees polynomials with real coefficients

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

and $$Q(x) = x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m,$$

where $Q(x)$ has exactly m real roots and $P(x)$ is divisible by $Q(x)$.

Prove that if there exists a $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ such that $|b_k| > C_m^k.2009^k$, then there also exists an $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ such that $|a_i| > 2008$.

Translated by LE MINH HA

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Giải đáp: Trâu và TOÁN

(Đề đăng trên THTT số 384, tháng 6.2009)

Từ *trâu* gắn với các thuật ngữ toán học khá nhiều, xin nêu một số thí dụ.

1) Từ TRÂU gắn với các số

- Cưới em *tám vạn trâu* bò
  Bảy vạn dê lợn, *chín* vò rượu tăm
- Làm ruộng *không trâu*, làm giàu *không* thóc
- Trai *mười bảy* bẻ gãy sừng *trâu*
- Thằng Bờm có cái quạt mo
  Phú ông xin đổi *ba* bò *chín trâu*
- *Một trâu* anh sắm *đôi* cày
  Một anh *hai* vợ có ngày oan gia
  Tan đàn xẻ *nghé không* xa
- *Trâu năm sáu* tuổi còn nhanh
  Bò *năm sáu* tuổi đã tranh về già
- Phù thủy, thầy bói, lái *trâu*
  Nghe *ba* anh ấy đầu lâu *không* còn
- Chửa sáng dắt *trâu* đi cày
  Dọn bờ cuốc góc *nửa* ngày chưa tha
- Ăn thịt *trâu không* tôi
  Như ăn gỏi *không* rau mơ

2) Từ TRÂU gắn với các số thứ tự

- *Thứ nhất* vợ dại *trong* nhà
  Thứ nhì trâu chậm, *thứ ba* rựa cùn
- *Mười năm* vác sách theo thầy
  Năm thứ mười một vác cày theo *trâu*

3) Từ TRÂU gắn với năm, tháng

- Tháng *Tám* đánh *trâu* ra
  Tháng *Ba* đánh *trâu* về
- Dù ai buôn đâu bán đâu
  Mùng *mười* tháng *Tám* chọi *trâu* thì về
  Dù ai buôn bán *trăm* nghề
  Mùng *mười* tháng *Tám* nhớ về chọi *trâu*
- Tháng *Tư* đi tậu *trâu* bò
  Để ta sắm sửa làm mùa tháng *Năm*
- *Trăm năm* còn có gì đâu
  Miếng trầu liền với con *trâu một* vần
- Tướng người trán ngắn đầu to
  Quanh *năm* chỉ biết chăn bò chăn *trâu*

4) Từ TRÂU gắn với các thuật ngữ toán học (số, toán, bằng, hơn, cong, nhiều, giữa, dài, gốc, trong, ngoài, trên, dưới, chân, ẩn, bé, cắt, mặt, ...)

- *Số* em giàu, lấy khó cũng giàu
  Số em nghèo, *chín* đụn *mười trâu* cũng nghèo
- Sai con *toán*, bán con *trâu*
- Ruộng sâu *trâu* nái *không bằng* con gái đầu lòng
- Yếu *trâu hơn* khỏe bò
- Sừng *trâu cong* khó *uốn*
  Kẻ ương ngạnh khó dạy thành người
- Chẳng tham lắm ruộng *nhiều trâu*
  Tham vì ông lão tốt râu mà hiền
- Nước *giữa* dòng chê trong chê đục
  Vũng *trâu* đắm hì hục khen ngon
- *Trâu* buộc thì ghét *trâu* ăn
  Quan võ thì ghét quan văn *dài* quần
- Thằng Cuội ngồi *gốc* cây đa
  Bỏ *trâu* ăn lúa gọi cha ời ời
- Thóc giống đuổi chuột *trong* bồ
  Một trăm lá mạ đuổi vồ con *trâu*
- Con *trâu* có *một* hàm răng
  Ăn cỏ đất *bằng*, uống nước *ngoài* ao
- *Trên* đồng cạn, *dưới* đồng sâu
  Chồng cày vợ cấy con *trâu* đi bừa

...

Các bạn có tên dưới đây sẽ được nhận tặng phẩm vì đã nêu được nhiều thí dụ.

1) *Trần Sỹ Đạt*, 12A1, THPT Nguyễn Trãi, Vũ Thư, **Thái Bình.**

2) *Võ Văn Huy*, 10A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa, **Phú Yên.**

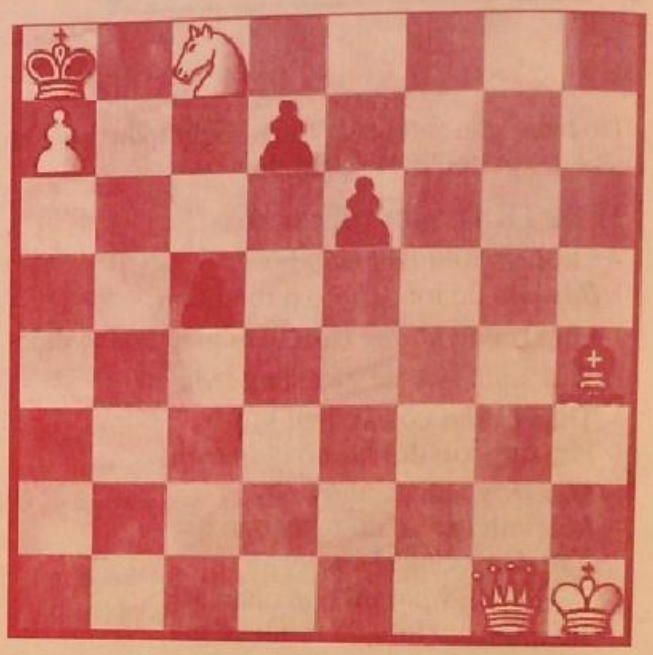
3) *Mai Anh Bằng*, 11T1, Trường THPT chuyên, ĐHSP **Hà Nội.**

4) *Phạm Xuân Quỳnh*, 11A5, THPT Bác Duyên Hà, Hưng Hà, **Thái Bình.**

5) *Ngô Trung Hiếu*, 11A1, THPT Tân Lược, Bình Tân, **Vĩnh Long.**

VIỆT HẢI

Kì 3 Trắng đi trước CHIẾU HẾT SAU BA NƯỚC



HÌNH HOA gồm 45 số

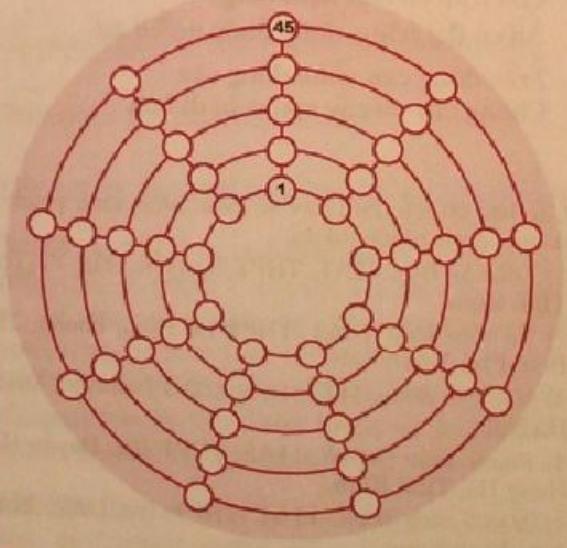
Nhân dịp kỉ niệm 45 năm xuất bản tờ tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đầu tiên mời các bạn thử tính toán để giải bài toán điền số sau.

Hãy điền 45 số tự nhiên từ 1 đến 45 vào các ô tròn trong hình hoa dưới đây, mỗi số trong một ô tròn, sao cho:

1) Tổng 5 số nằm trên mỗi đường thẳng hướng tâm đều bằng nhau.

2) Tổng 9 số nằm trên mỗi vòng tròn đều bằng nhau.

ĐAN QUỲNH



Giải đáp: Thế cờ (Kì 2)

(THTT số 384, tháng 6 năm 2009)

1.♗c4 ♔f5 [1...♔e5 2.♕d5+ ♔f6 3.♕g5#] 2.♕h5+ ♔f6 [2...♔e4 3.♕d5#] 3.♕g5#

Các bạn sau có đáp án tốt hơn cả, được nhận tặng phẩm:

1) *Nguyễn Trường Giang*, Phòng 511, Nhà A9, Nghĩa Tân, Quận Cầu Giấy, Hà Nội.

2) *Nguyễn Hoàng Nam*, lớp 7C, THCS Thạch Thất, Hà Nội.

3) *Cao Ánh Tuyết*, lớp A5 346, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An.

4) *Trương Trọng Lễ*, lớp 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP. Cần Thơ.

5) *Vũ Thanh Tùng*, lớp 12 Toán, THPT chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình.

LÊ THANH TÚ
(Đại kiện tướng Quốc tế)

VIETNAM® CALCULATOR
MÁY TÍNH ĐIỆN TỬ VIỆT NAM

VN-570RS

VN-500RS

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH CẦM TAY VIETNAM CALCULATOR THÁNG 10/2009

Trưởng ban tổ chức: Trần Minh Thế
Chuyên viên Toán học sinh giỏi máy tính cầm tay

Bài 1: Hãy tìm tất cả các số tự nhiên là bội của 2013 có dạng $\overline{7*06*14}$.

Bài 2: Cho sin x = 0,6 $(0 < x < \frac{\pi}{2})$ và cosy =– 0,7 $(\pi < y < \frac{3\pi}{2})$.

Tính gần đúng với 5 chữ số thập phân:

a) $A = \dfrac{x^4 + \tan^3 x}{\sin^3(x+x^2) + \cos^3(x-x^2)}$; b) $B = \dfrac{\tan^7(2x^2+y^2) + \cot^7(2x^2-y^2)}{\sin^5(x-y) + \cos^5(x+y)}$

Bài 3: Cho số $B_{2008} = 8^{8^{8^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{8}}}}}}$ (B_{2008} gồm 2008 chữ số 8 lũy thừa liên tiếp nhau).

Hãy tìm hai chữ số hàng chục và hàng đơn vị của B_{2008}.

Bài 4: Cho $(2 + x^2)^{40} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{80}x^{80}$.

Tính: $A = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{80}$.

Bài 5: Để thực hiện một công việc, một công ty máy tính đã giao việc cho 100 nhân viên thuộc 4 nhóm gồm nhóm A, nhóm B, nhóm C và nhóm D.

Thời gian làm việc như sau (giả sử thời gian làm việc của mỗi người trong một nhóm là như nhau):

Nhóm A mỗi người làm việc 7 giờ, nhóm B mỗi người làm việc 5 giờ, nhóm C mỗi người làm việc 2 giờ và nhóm D mỗi người làm việc 6 giờ. Công ty cũng đã chi tiền bồi dưỡng như nhau cho từng người trong một nhóm theo cách:

Nhóm A mỗi người nhận 60.000 đồng, nhóm B mỗi người nhận 150.000 đồng, nhóm C mỗi người nhận 180.000 đồng và nhóm D mỗi người nhận 200.000 đồng.

Biết rằng : Tổng thời gian làm việc của 100 nhân viên là 441 giờ.
Tổng số tiền công ty đã chi cho 100 nhân viên là 16.300.000 đồng.
Hỏi số người trong từng nhóm là bao nhiêu?

Bài dự thi xin gửi về:
- Bằng thư xin gửi:
CÔNG TY CỔ PHẦN MÁY TÍNH ĐIỆN TỬ VIỆT NAM
Địa chỉ: 63/117 - Thái Hà - Quận Đống Đa - Hà Nội; Điện thoại: 04.35378736.
- Bằng email xin gửi: btc_hocsinhgioitoan@maytinhdientu.com.vn

Thời gian nhận bài tham gia dự thi: từ ngày 15 đến ngày 30 hàng tháng.
Thời gian công bố danh sách người trúng thưởng: ngày 8 hàng tháng.
Mọi thông tin về cuộc thi và danh sách người trúng thưởng sẽ được đăng tại website: Http://www.maytinhdientu.com.vn.

Đáp số cuộc thi Tháng 9/2009.
Đáp số bài 1: Có nhiều đáp án thoả đề ra x = 31621747; 999962003; 31622003 ; . . . (vì đề không yêu cầu tìm số tự nhiên x nhỏ nhất).
Đáp số bài 2: số 2; **Đáp số bài 3:** b = 9; **Đáp số bài 4:** x = 69 ; y = 88.
Đáp số bài 5: a = -2009 , b = 2, c = 956, d = -757 P(2009) = 9992009.

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 388(10.2009)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35144272, 04.35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN
GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
GS. ĐOÀN QUỲNH
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam
NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm
Tổng biên tập NXB Giáo dục Việt Nam
NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : PGS. TS. PHAN DOÃN THOẠI
Phó Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC
Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHẤT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary School**
Nguyễn Minh Hà – Dừng lại hay bước tiếp?

4 Đề thi vào lớp 10 Khối THPT chuyên Đại học Vinh năm học 2009 – 2010.

5 Lời giải đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội, năm học 2009 – 2010.

6 **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation**
Đặng Thanh Hải, Trần Tuyết Thanh – Về phương trình đa thức bậc hai, bậc ba.

9 **Tìm hiểu sâu thêm Toán học sơ cấp – Advanced Elementary Mathematics**
Lê Xu – Khai thác định lí Euler về đồng dư thức.

12 **Lịch sử toán học – History of Maths**
Nguyễn Duy Tiến, Lê Văn Dũng – Kiyosi Itô (1915-2008), Cha đẻ của phép tính vi tích phân ngẫu nhiên.

13 **Tin tức**
Đại hội đại biểu Hội toán học Hà Nội nhiệm kì 2009 – 2014.

14 **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**
Lý Văn Công – Tìm số hạng tổng quát của dãy số.

16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/388, ..., T12/388, L1/388, L2/388.

18 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 384.

24 **Cuộc thi giải toán Kỉ niệm 45 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ – The M&Y 45th Anniversary Contest**
Giải các bài T7/THCS, T8/THCS, T7/THPT, T8/THPT.

29 **Câu lạc bộ – Math Club**

30 **Giải trí toán học – Math Recreation**

Tranh bìa I. Nghiêm Minh Nghĩa

Biên tập : NGUYỄN THANH HỒNG
Trị sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THƯ
Mĩ thuật : MINH THO
Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH

Cảm tưởng về một chuyến đi

Phó Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam *Nguyễn Minh Khang* (thứ 5, hàng đứng, từ trái sang) cùng với các thầy cô giáo và các em học sinh đoạt giải Vàng cuộc thi Olympic Tiếng Anh Tiểu học toàn quốc trong đợt tham quan học tập tại Singapore.

Tất cả bắt đầu từ ngày thứ Bảy (13/6/2009), khi Ban giám khảo cuộc thi Olympic tiếng Anh Tiểu học khu vực phía Bắc công bố giải thưởng. Niềm vui vỡ òa trong tiếng reo hò, vỗ tay của thầy trò và phụ huynh. *Vương Quân*, học sinh đoạt giải Vàng của trường Tiểu học Khương Thượng, Đống Đa, Hà Nội ôm chầm lấy tôi, rồi rít hỏi : "Cô ơi, thế là con với cô được đi Singapore rồi phải không ?". Thật là tuyệt vời và sung sướng vì đây là lần đầu tiên Bộ Giáo dục và Đào tạo, phối hợp với NXB Giáo dục Việt Nam tổ chức cuộc thi giao lưu tiếng Anh cho học sinh tiểu học toàn quốc với cơ cấu giải thưởng lớn, đặc biệt là thưởng cho học sinh đoạt giải Vàng và giáo viên trực tiếp giảng dạy một chuyến tham quan, học tập tại Singapore.

- Chúc mừng hai cô trò nhé!, tôi nhận lời chúc mừng và những bó hoa tươi thắm từ tay chị Hiệu trưởng và bạn bè, đồng nghiệp.10 giải Vàng đã được chọn sau ba cuộc thi tại ba miền Bắc, Trung, Nam. Và ngày tập trung lên đường đã đến, ngày 5/8/2009.

Vào bữa tối tại khách sạn Grand Central, chúng tôi gặp nửa còn lại của đoàn. Đoàn khởi hành từ Thành phố Hồ Chí Minh do Ông Nguyễn Minh Khang, Phó Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam dẫn đầu. Bữa tiệc giao lưu thật là vui vẻ, hứa hẹn một chuyến đi thành công.

Nhà xuất bản Giáo dục Panpac Singapore là điểm đến quan trọng nhất trong chuyến tham quan. Chúng tôi được đón tiếp rất trang trọng và nồng hậu do mối quan hệ mật thiết giữa NXB Giáo dục Việt Nam và NXB Giáo dục Panpac Singapore trong việc xuất bản và phát hành nhiều đầu sách sang Việt Nam, đặc biệt là cuốn *Let's Learn English*- giáo trình đang được dạy trong nhiều trường tiểu học ở Việt Nam. Ông Phó Tổng giám đốc NXB Giáo dục Panpac trao tận tay những ấn bản từ điển mới nhất và những cuốn truyện tranh hấp dẫn cho các học sinh, giáo viên và các vị khách mời trong đoàn. Đại diện phía NXB Giáo dục Việt Nam cũng trao những món quà đầy ý nghĩa mang đậm phong cách Việt tới những đối tác anh em.

Lưu luyến chia tay với những tủ sách đồ sộ của NXB Giáo dục Panpac, xe đưa chúng tôi đi ăn tại một nhà hàng sang trọng trong thành phố, thăm Công viên *Night Safari* với rất nhiều loài thú quý hiếm được bảo tồn trong môi trường nhiệt đới ở Singapore.

Ngày thứ ba có lẽ là ngày bận rộn nhất trong cuộc hành trình. Sau bữa sáng tại khách sạn, cả đoàn lên xe đi thăm vườn Bách thảo (*Botanical Garden*). Ấn tượng nhất là vườn lan! Tất cả đều trầm trồ, ngưỡng mộ cách bài trí vườn cây và vẻ đẹp rạng rỡ của hàng trăm loài lan đua nhau khoe sắc. Ai cũng tranh thủ chụp hình lưu niệm. Tiếp đến là đảo *Sentosa* nổi tiếng với dàn nhạc nước vô cùng ấn tượng.

Ngày hôm sau, cả đoàn đi tham quan những bảo tàng tiêu biểu của nước bạn. Ngoài khuôn viên viện Bảo tàng Văn minh Châu Á, dọc theo con sông Singapore hiện hòa là hình ảnh của một số vị lãnh tụ vĩ đại trên thế giới. Chúng tôi vô cùng xúc động khi đứng bên hình ảnh vị Lãnh tụ kính yêu của dân tộc Việt Nam – Chủ Tịch Hồ Chí Minh - được gắn trang trọng trên tấm biển bên rặng cây lớn trước cửa Viện Bảo tàng Quốc gia, cả đoàn thực sự ngạc nhiên trước những thước phim tài liệu sống động tái hiện lịch sử của Đảo quốc Singapore.

Tạm biệt Singapore, kết thúc một chuyến đi thăm quan học tập bổ ích và lí thú, chúng tôi trao cho nhau số điện thoại, địa chỉ email để liên lạc và gửi ảnh. Những cái bắt tay thật chặt và ánh mắt nhìn lưu luyến. Hẹn gặp lại ở Việt Nam một ngày gần nhất !

Hà Nội ngày 10 tháng 8 năm 2009

TRẦN THỊ THÁI
(GV tiếng Anh trường Tiểu học Khương Thượng, Đống Đa, Hà Nội)

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

TRƯỜNG THPT LỤC NGẠN SỐ 3 - BẮC GIANG

10 năm xây dựng và phát triển

Ông TRẦN VĂN THI
Hiệu trưởng nhà trường

Trường THPT Lục Ngạn số 3 - Bắc Giang tiền thân là Trường PT cấp 2+3 Phượng Sơn được thành lập năm 1999. Khi mới thành lập khối cấp 3 chỉ có 8 cán bộ giáo viên với hơn 200 học sinh (gồm 4 lớp 10). Điểm tuyển sinh vào lớp 10 của trường thuộc nhóm các trường thấp nhất tỉnh.

Ngay từ khi mới thành lập, Chi bộ đảng, BGH nhà trường đã xây dựng kế hoạch và xác định rõ mục tiêu phấn đấu, phát triển của nhà trường trong những ngày đầu và kế hoạch nhiều năm. Tập thể CBGV nhà trường đã đoàn kết một lòng nỗ lực phấn đấu đưa nhà trường thực hiện thắng lợi các chỉ tiêu nhiệm vụ mà ngành giáo cũng như các nhiệm vụ chính trị khác của địa phương. Các chỉ tiêu nhiệm vụ giáo dục ngày càng tăng qua các năm cả về chất lượng và số lượng. Đến nay nhà trường đã có 38 lớp với gần 2000 học sinh và 74 CBGV.

• **Về chất lượng giáo dục :** Ngay từ khoá tốt nghiệp đầu tiên (2002 - 2003), tỉ lệ tốt nghiệp THPT của trường là 80%, có 1 học sinh đạt loại giải tiêu biểu cho các trường THPT huyện Lục Ngạn, 6 em đỗ Đại học và hàng chục em đỗ Cao đẳng. Các năm học tiếp sau, tỉ lệ tốt nghiệp THPT tăng dần đến hơn 90% và có năm xấp xỉ 100%. Tỉ lệ đỗ Đại học và Cao đẳng cũng tăng dần qua các năm. Nhiều em học sinh đỗ hai trường Đại học với điểm số cao. Tiêu biểu như các em: *Trần Thị Yến, Nguyễn Đức Linh, Nguyễn Thị Ut, Hồ Thị Hường, Lê Bá Hiếu, Nguyễn Thị Hoà,...* Nhà trường đã tạo được niềm tin cho học sinh và phụ huynh học sinh.

• **Về đội ngũ CBGV:** Đội ngũ CBGV trẻ, nhiệt tình, ham học hỏi và có xu hướng ổn định công tác lâu dài tại địa phương. Đến nay 100% CBGV đạt chuẩn, 4 Thạc sĩ và 6 CBGV đang theo học Thạc sĩ. Chi bộ Đảng của trường nhiều năm liên tục là Chi bộ trong sạch vững mạnh. Nhà trường nhiều năm liền được công nhận là trường Tiên Tiến. Nhiều giáo viên đạt danh hiệu giáo viên giỏi các cấp được Sở GD&ĐT, Tỉnh Bắc Giang tặng Giấy khen và Bằng khen.

• **Về công tác xã hội hoá giáo dục:** Nhà trường luôn quan hệ mật thiết với các đơn vị bộ đội, các doanh nghiệp tại địa phương; tranh thủ sự quan tâm chỉ đạo của các cấp lãnh đạo ở xã, ở huyện, ở Sở GD&ĐT. Đặc biệt, nhà trường đã động viên được sự đóng góp hàng trăm triệu đồng của Hội Phụ huynh học sinh để tu sửa cơ sở vật chất (như mở rộng diện tích tạo khuôn viên gọn đẹp và tăng diện tích sân chơi, bãi tập,...), động viên CBGV và học sinh nâng cao chất lượng dạy và học, phấn đấu xây dựng trường Chuẩn Quốc gia.

Phát huy những thành quả đã đạt được, trong những năm tới nhà trường tiếp tục tăng cường công tác quản lí nâng cao chất lượng giáo dục toàn diện; tạo điều kiện cho CBGV được học tập nâng cao chuyên môn nghiệp vụ; tăng cường làm thủ tục để được đầu tư xây dựng các hạng mục công trình (nhà lớp học, nhà công vụ, nhà đa năng, sân chơi bãi tập,...). Phấn đấu đến năm 2011 trường đạt danh hiệu trường Chuẩn Quốc gia.

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT10M9

Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004
In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội
In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2009

Giá : 6000 đồng
Sáu nghìn đồng