https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO * HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

9
2003

SỐ 315 - NĂM THỨ 40 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Thầy Phạm Văn Khánh hiệu trưởng và học sinh trường THCS Giảng Võ, Hà Nội

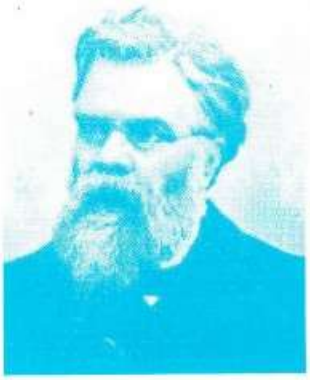
Thầy Kiều Trung Tiến hiệu trưởng và học sinh trường THPT Nguyễn Trãi, Hà Nội

CHÀO NĂM HỌC MỚI 2003 - 2004

Trường THPT Nguyễn Gia Thiều, Hà Nội ▶

LỊCH SỬ TOÁN HỌC

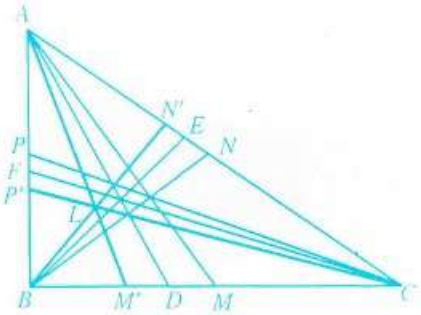
EMILE LEMOINE, KĨ SƯ KHẢO CỨU TAM GIÁC



Ê-min-lơ Lơ-moan (Emile Michel Hyacinthe Lemoine) kĩ sư người Pháp sinh ngày 22-11-1840 mất ngày 21.12.1912. Lemoine nổi tiếng chủ yếu vì say mê nghiên cứu tam giác. Chính một phần nhờ có Lemoine mà trong nửa sau thế kỉ 19, người ta thấy có sự hứng thú trở lại đối với điều mà các nhà toán học thời đó gọi là "Hình học hiện đại tam giác". Người ta tìm thấy trong hình học đó nhiều tính chất mới lạ, nhiều đặc trưng mới. Lemoine là giáo sư trường ĐH Bách Khoa, chơi nhạc trong dàn nhạc Trompet.

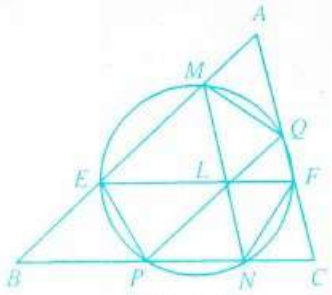
1. Các yếu tố của tam giác được công nhận là của Emile Lemoine

Năm 1873, Lemoine tìm ra những *đường đối trung* của tam giác AM', BN', CP', đó là đường đối xứng của trung tuyến AM, BN, CP qua đường phân giác AD, BE, CF tương ứng với cùng một đỉnh của một tam giác. Trong một kết quả nghiên cứu mới, Lemoine chứng minh rằng các đường đối trung của một tam giác đồng quy tại một điểm L, sau này ở Pháp được gọi là *điểm Lemoine* (h. 1) (ở Đức gọi là đỉnh Grebe). Đẹp hơn nữa là những khoảng cách từ điểm đó đến ba cạnh a, b, c của tam giác tỉ lệ với $1/h_a$, $1/h_b$, $1/h_c$ trong đó h_a, h_b, h_c là các đường cao tương ứng. Bạn hãy thử chứng minh điều này.

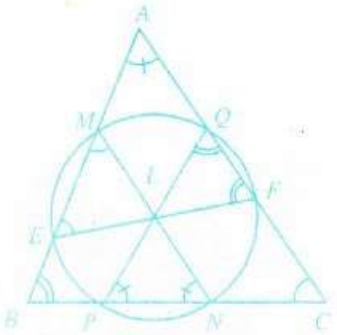


Hình 1

Không dừng lại đó, Lemoine còn xét những yếu tố khác trong tam giác. Nếu từ điểm Lemoine của một tam giác, vạch những đường thẳng song song với các cạnh của tam giác EF, MN, PQ (gọi là các *đường song song Lemoine*), các đường thẳng này cắt các cạnh của tam giác ở sáu điểm, tất cả các điểm đó cùng thuộc một đường tròn, gọi là *đường tròn Lemoine thứ nhất* (h. 2). Hơn nữa, hình lục giác $MQFNPE$ tạo bởi sáu điểm đó, có 3 cạnh bằng nhau $MQ = FN = PE$, gọi là *hình lục giác Lemoine thứ nhất* . Chưa hết: còn có thể nói về *đường tròn Lemoine thứ hai* khi qua điểm Lemoine kẻ các đường thẳng cắt các cạnh tam giác tại EF, MN, PQ sao cho $\Delta ABC \backsim \Delta AFE \backsim \Delta NBM \backsim \Delta PQC$ (h. 3)



Hình 2



Hình 3

2. Lược đồ hình học : một hi vọng bị lãng quên

Những người cùng thời với Lemoine đón nhận khá lạnh nhạt sáng kiến của Lemoine về phương pháp dựng hình. Năm 1888 tại hội nghị ở Oran của Hội nước Pháp về tiến bộ Khoa học, Lemoine đã giới thiệu một *Lược đồ hình học*, trong đó trình bày phương pháp "đơn giản hóa" việc dựng hình bằng cách phân tích việc dựng hình thành các phép dựng cơ bản, gọi là các thao tác sơ đẳng như sau :

1) Cắm đầu nhọn của compa ở một điểm cho trước.
2) Cắm đầu nhọn của compa trên một đường cho trước.
3) Vạch đường tròn với compa đã được đặt.
4) Đặt một cái thước dọc theo một đường thẳng.
5) Vạch một đường thẳng với cái thước đã được đặt.

Cách trình bày của Lemoine không thành công, có thể do ông chọn ví dụ để minh họa không tốt : bài toán Apollonius nổi tiếng (*dựng một đường tròn tiếp xúc ngoài với ba đường tròn đã cho*). Bài toán này đòi hỏi... hơn 400 thao tác sơ đẳng để dựng xong. Lemoine khẳng định có thể rút gọn còn 199 thao tác. Nhưng bước tiến bộ này không làm phấn khởi những đồng nghiệp của Lemoine, họ không quan tâm tới *Lược đồ hình học* đó của ông.

(Xem tiếp trang 5)

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

PHÂN TÍCH MỘT SỐ ĐA THỨC BẬC BỐN THÀNH NHÂN TỬ

NGUYỄN PHƯỚC
(GV THCS Kim Long, Huế)

Để phân tích đa thức thành nhân tử, cách thông thường là khéo léo phân tích đa thức đó thành các hạng tử có nhân tử chung. Việc tìm nhân tử chung không dễ dàng đối với đa thức bậc bốn. Bài này trình bày phương pháp phân tích một số dạng đa thức bậc bốn thành nhân tử nhờ cách đặt biến phụ một hoặc nhiều lần khiến cho quá trình phân tích tìm nhân tử dễ dàng hơn. Chú ý rằng phương pháp này có thể thực hiện ở lớp 7, lớp 8 khi chưa biết cách giải phương trình bậc hai.

Ta cần biết hằng đẳng thức (HĐT) cơ sở sau :

Xét đa thức $Q(y) = ay^2 + by + c$. Nếu có các số m, n sao cho

$$\boldsymbol{m.n = ac} \text{ và } \boldsymbol{m+n = b}$$

thì $ay^2 + by + c = ay^2 + (m + n)y + mn/a$

hay $$\boldsymbol{ay^2 + by + c = a\left(y+\frac{m}{a}\right)\left(y+\frac{n}{a}\right)} \qquad (*)$$

Nói riêng khi $a = 1$ thì

$$\boldsymbol{y^2 + by + c = (y + m)(y + n)}$$

Trong trường hợp a, b, c nguyên thì trước hết phân tích số nguyên ac thành tích hai số nguyên $m.n$ sao cho $|m| < b$, $|n| < b$ sau đó chọn m, n thỏa mãn $m + n = b$.

Dưới đây ta xét một số dạng đa thức bậc 4 có thể phân tích thành nhân tử nhờ cách đặt biến phụ và sử dụng hằng đẳng thức trên.

1. Đa thức dạng $P(x) = ax^4 + bx^2 + c$

Cách giải. Đặt biến phụ $y = x^2$ và áp dụng HĐT (*).

Ví dụ 1. *Phân tích $P(x) = 6x^4 + 19x^2 + 15$ thành nhân tử.*

Lời giải. Đặt $y = x^2$ có $Q(y) = 6y^2 + 19y + 15$.

Tìm m, n sao cho $m.n = 90$ và $m + n = 19$ với $m<19$, $n<19$. Vì $90 = 6.15 = 9.10$ nên chọn $m = 9$, $n = 10$ ta có $6y^2 + 19y + 15 = 6y^2 + 9y + 10y + 15$ $= 3y(2y + 3) + 5(2y + 3) = (2y + 3)(3y + 5)$.

Từ đó $P(x) = 6x^4+19x^2+15 = (2x^2+3)(3x^2+5)$

Ví dụ 2. *Phân tích $P(x) = 6x^4 + x^2 - 15$ thành nhân tử.*

Lời giải. Đặt $y = x^2$ có $Q(y) = 6y^2 + y - 15$. Tìm m, n sao cho $m.n = -90$ và $m + n = 1$. Chọn được $m = 10$, $n = -9$. Từ đó $Q(y) = 6y^2 + y - 15$ $= 6y^2 + 10y - 9y - 15$

$= 2y(3y + 5) - 3(3y + 5) = (3y + 5)(2y - 3)$.

Từ đó $P(x) = (3x^2 + 5)(2x^2 - 3)$

2. Đa thức dạng
$P(x) = (x+a)(x+b)(x+c)(x+d) + e$ với $a+b = c+d$

Cách giải. Đặt biến phụ $y = (x+a)(x+b)$ và áp dụng HĐT (*). Có thể đặt $y = (x+c)(x+d)$ hoặc $y = x^2 + (a+b)x$

Ví dụ 3. *Phân tích đa thức*

$$P(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 15$$

thành nhân tử.

Lời giải. Với $a = 1$, $b = 4$, $c = 2$, $d = 3$ thì $a + b = 5 = c+d$. Biến đổi

$P(x) = (x+1)(x+4)(x+2)(x+3) - 15$

$= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 15$

Đặt $y = (x+1)(x+4) = x^2 + 5x + 4$ thì $P(x)$ trở thành $Q(y) = y(y+2) - 15 = y^2 + 2y - 15$.

Áp dụng HĐT (*) với $m = 5$, $n = -3$ có $Q(y) = (y+5)(y-3)$. Từ đó $P(x) = (x^2+5x+9)(x^2+5x+1)$

Tổng quát nếu đa thức dạng

$P(x) = (a_1x + a_2)(b_1x + b_2)(c_1x + c_2)(d_1x + d_2)$

thỏa mãn $a_1b_1 = c_1d_1$ và $a_1b_2 + a_2b_1 = c_1d_2 + c_2d_1$ thì đặt $y = (a_1x + a_2)(b_1x + b_2)$ rồi biến đổi như trên. Xét $P(x)/a_1b_1c_1d_1$ thì trở về dạng trên.

3. Đa thức dạng
$P(x) = (a_1x + a_2)(b_1x + b_2)(c_1x + c_2)(d_1x + d_2)$
với $a_1 b_1 = c_1d_1$ và $a_2b_2 = c_2d_2$

Cách giải. Đặt biến phụ $y = (a_1x+a_2)(b_1x+b_2)$ và áp dụng HĐT (*).

Có thể đặt $y = (c_1x + c_2)(d_1x + d_2)$

Ví dụ 4. *Phân tích*

$P(x) = (3x+2)(3x-5)(x-1)(9x+10) + 24x^2$

thành nhân tử

Lời giải. Dễ thấy $a_1b_1 = 3.3 = 1.9 = c_1d_1$ và $a_2b_2 = 2.(-5) = (-1).10 = c_2d_2$

$P(x) = (9x^2 - 9x - 10)(9x^2 + x - 10) + 24x^2$

Đặt $y = (3x+2)(3x-5) = 9x - 9x - 10$ thì $P(x)$ trở thành $Q(y) = y(y + 10x) + 24x^2 = y^2 + 10xy + 24x^2$. Từ $m.n = 24x^2$ và $m+n = 10x$ ta chọn được $m = 6x$ và $n = 4x$. Áp dụng HĐT (*) được

$Q(y) = (y + 6x)(y + 4x)$, suy ra

$P(x) = (9x^2 - 3x - 10)(9x^2 - 5x - 10)$

4. Đa thức dạng $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + kbx + a$ với $k = 1$ hoặc $k = -1$

Cách giải. Đặt biến phụ $y = x^2 + k$ và biến đổi $P(x)$ về dạng chứa hạng tử $ay^2 + bxy$ rồi sử dụng HĐT (*)

Ví dụ 5. *Phân tích $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 9x^2 - 3x + 2$ thành nhân tử.*

Lời giải. Đặt $y = x^2 - 1 \Rightarrow y^2 = x^4 - 2x^2 + 1$

Biến đổi $P(x) = 2(x^4-2x^2+1) + 3x^3 - 5x^2 - 3x$

$= 2(x^2 - 1)^2 + 3x(x^2 - 1) - 5x^2$

Từ đó $Q(y) = 2y^2 + 3xy - 5x^2$

Tìm m, n sao cho $m.n = -10x^2$ và $m + n = 3x$.

Chọn $m = 5x$ và $n = -2x$ ta có

$Q(y) = 2y^2 + (5x - 2x)y - 5x^2$

$= 2y^2 - 2xy + 5xy - 5x^2 = 2y(y - x) + 5x(y - x)$

$= (y - x)(2y + 5x)$

Từ đó $P(x) = (x^2 - 1 - x)(2x^2 - 2 + 5x)$

5. Đa thức dạng $P(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx+e$ với $e = d^2/b^2$

Cách giải. Đặt biến phụ $y = x^2 + \dfrac{d}{b}$ và biến đổi $P(x)$ về dạng chứa hạng tử $y^2 + bxy$ rồi sử dụng HĐT (*).

Ví dụ 6. *Phân tích $P(x) = x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4$ thành nhân tử.*

Lời giải. Dễ thấy $b = -1$, $d = 2$, $e = 4$. Đặt $y = x^2 - 2 \Rightarrow y^2 = x^4 - 4x^2 + 4$. Biến đổi

$P(x) = x^4 - 4x^2 + 4 - x^3 - 6x^2 + 2x$

$= (x^2 - 2)^2 - x(x^2 - 2) - 6x^2$.

Từ đó $Q(y) = y^2 - xy - 6x^2$.

Tìm m, n sao cho $m.n = -6x^2$ và $m + n = -x$. Chọn $m = 2x$ và $n = -3x$ ta có

$Q(y) = y^2 + (2x - 3x)y - 6x^2$

$= y^2 + 2xy - 3xy - 6x^2$

$= y(y + 2x) - 3x(y + 2x) = (y + 2x)(y - 3x)$

Từ đó $P(x) = (x^2 - 2 + 2x)(x^2 - 2 - 3x)$

Nếu đa thức $P(x)$ có chứa ax^4 thì có thể xét đa thức $Q(x) = \dfrac{P(x)}{a}$ theo cách trên.

6. Đa thức dạng $P(x) = (x+a)^4 + (x+b)^4 + c$

Cách giải. Đặt biến phụ $y = x + \dfrac{a+b}{2}$ và biến đổi $P(x)$ về dạng $mx^4 + nx^2 + p$.

Ví dụ 7. *Phân tích $P(x) = (x-3)^4 + (x-1)^4 - 16$ ra thừa số.*

Lời giải. Đặt $y = x - 2$. Lúc đó $P(x)$ trở thành

$Q(y) = (y - 1)^4 + (y + 1)^4 - 16$

$= 2y^4 + 12y^2 - 14 = 2(y^4 + 6y^2 - 7)$

$= 2(y^2 + 7)(y^2 - 1) = 2(y^2 + 7)(y - 1)(y + 1)$

nhờ sử dụng HĐT (*)

Suy ra $P(x) = 2(x^2 - 4x + 11)(x - 3)(x - 1)$

Mời các bạn sử dụng phương pháp trên để làm các bài tập dưới đây.

Bài tập : Phân tích mỗi đa thức sau thành nhân tử

1) $A(x) = (48x^2 + 8x - 1)(3x^2 + 5x + 2) - 4$

2) $B(x) = (12x - 1)(6x - 1)(4x - 1)(3x - 1) - 330$

3) $C(x) = 4(x^2+11x+30)(x^2+22x+120) - 3x^2$

4) $D(x) = (7 - x)^4 + (5 - x)^4 - 2$

5) $E(x) = x^4 - 9x^3 + 28x^2 - 36x + 16$

6) $F(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1$

PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ... *(Tiếp trang 9)*

3) Tam giác ABC có $3\text{cotg}A + 4\text{cotg}B = 7\text{cotg}C$.

a) Chứng minh rằng $3a^2 + 4b^2 = 7c^2$

b) Tìm giá trị lớn nhất của góc C.

4) Cho tam giác ABC với trọng tâm G. Giả sử $\widehat{AGB} + \widehat{ACB} = 180^o$. Chứng minh rằng $c^2 \geq ab$.

5) Cho tam giác ABC và một điểm M nằm trong tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 là hình chiếu của M lên BC, CA, AB. Chứng minh rằng

$\text{cotg}\widehat{AA_1B} + \text{cotg}\widehat{BB_1C} + \text{cotg}\widehat{CC_1A} = 0$

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT NK ĐHQG TP. HỒ CHÍ MINH

(Đề thi đã đăng trên THTT số 314 tháng 8/2003)

Câu I. a) Với $m = 0$, PT (1) vô nghiệm. Với $m \neq 0$, PT (1) vô nghiệm khi

$\Delta' = -m(m-1)(m+3) < 0$

Vậy PT đã cho vô nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ -3 < m \leq 0. \end{array}\right.$

b) PT (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -m(m-1)(m+3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < m < 1 \\ m < -3 \end{array}\right.$ (*)

Sử dụng hệ thức Vi–et ta có $|x_1 - x_2| = 1 \Leftrightarrow$ $4m^2 + 9m - 12 = 0 \Leftrightarrow m_1 = \dfrac{-9+\sqrt{273}}{8}$, $m_2 = \dfrac{-9-\sqrt{273}}{8}$ thỏa mãn (*).

Câu II. a) Điều kiện để PT có nghĩa : x không thể thuộc $-3 < x < 0$ và $0 < x < 5$. Bình phương hai vế của $\sqrt{x(x-2)} + \sqrt{x(x-5)} = \sqrt{x(x+3)}$ suy ra $x^2(3x^2 - 8x - 60) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 6$, $x_3 = -\dfrac{10}{3}$. Thử lại ta thấy PT đã cho có 2 nghiệm $x_1 = 0, x_2 = 6$.

b) Từ hệ đã cho suy ra $y > 0$ và

$\begin{cases} (x^2+y^2)(x^2-y^2) = 144 \\ y^2 = 2x^2 - 24 \end{cases}$

$\Rightarrow (x^2 + 2x^2 - 24)(x^2 - 2x^2 + 24) = 144.$

Khai triển vế trái, rút gọn ta được :

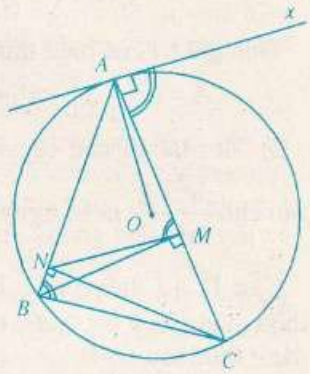
$x^4 - 32x^2 + 256 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 16)^2 = 16.$

Từ đó có $x^2 = 20$, $y^2 = 16$ và $x^2 = 12$, $y = 0$.

Thử lại ta thấy hệ có 4 nghiệm (x, y) là $(2\sqrt{5}, 4)$, $(-2\sqrt{5}, 4)$, $(2\sqrt{3}, 0)$, $(-2\sqrt{3}, 0)$

Câu III. a) Từ ĐK của bài toán thì 4 điểm B, C, M, N nằm trên một đường tròn. Suy ra $\Delta AMN \backsim \Delta ABC$

$\Rightarrow \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AM}{AB}$ (1)

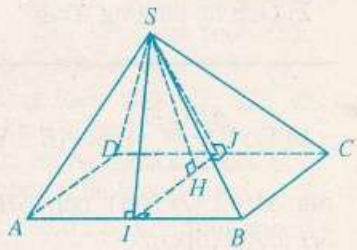


Vì ΔMAB vuông cân tại M nên $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Vẽ tia Ax tiếp xúc với đường tròn (O). Ta có $\widehat{MAx} = \widehat{ABC} = \widehat{AMN} \Rightarrow MN // Ax$, mà $OA \perp Ax$ nên $OA \perp MN$.

Câu IV. a) Ta có $IJ^2 = a^2$, $SI^2 = \dfrac{3a^2}{4}$, $SJ^2 = \dfrac{a^2}{4}$ suy ra $SI^2 + SJ^2 = IJ^2$ hay ΔSIJ vuông tại S. Do đó



$S_{SIJ} = \dfrac{1}{2} SI.SJ$

$= \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$ (đvdt)

TIN BUỒN

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ thương tiếc báo tin

ThS HOÀNG HOA TRẠI

sinh ngày 9.10.1951 tại Cương Giáng, Nghi Xuân, Hà Tĩnh, giảng dạy tại trường THPT chuyên Lê Khiết, tỉnh Quảng Ngãi, do mắc bệnh hiểm nghèo đã từ trần ngày 20.8.2003, an táng tại nghĩa trang quê nhà ngày 21.8.2003. Nhà giáo Hoàng Hoa Trại là cộng tác viên của tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

Tòa soạn tạp chí THTT xin gửi đến gia quyến ThS Hoàng Hoa Trại và nhà trường Lê Khiết lời chia buồn sâu sắc.

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN TOÁN
TRƯỜNG THPT NĂNG KHIẾU TRẦN PHÚ HẢI PHÒNG NĂM 2003

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu I. (2 điểm)

1) Cho $x = \dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}+1}}$

Tính giá trị của biểu thức

$$A = (x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1)^{2003}$$

2) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương a, b sao cho $\dfrac{a^2-2}{ab+2}$ là số nguyên.

Câu II. (2 điểm) Cho bốn số thực a, b, c, d thỏa mãn $a \ge b \ge c \ge d \ge 0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau :

1) $a^2 - b^2 + c^2 \ge (a - b + c)^2$;

2) $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 \ge (a - b + c - d)^2$

Câu III. (3 điểm)

1) Giải phương trình $5\sqrt{1+x^3} = 2(x^2+2)$;

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19(x-y)^2 \\ x^2 - xy + y^2 = 7(x-y) \end{cases}$$

Câu IV. (3 điểm) Một đường tròn tiếp xúc với hai cạnh Ox, Oy của góc xOy lần lượt tại A và B. Từ điểm A vẽ đường thẳng song song với OB cắt đường tròn đã cho tại điểm thứ hai C. Tia OC cắt đường tròn tại E. Hai đường thẳng AE và OB cắt nhau tại K.

1) Chứng minh rằng $OK = KB$;

2) Chứng minh rằng $\dfrac{EB}{EA} = \dfrac{CB}{CA}$

3) Gọi a, b, c thứ tự là khoảng cách từ C đến AB, OB, OA. Chứng minh $a^2 = bc$.

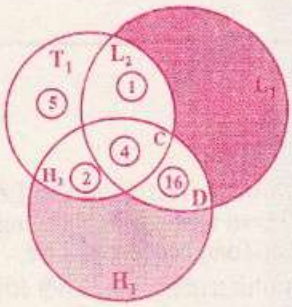
Câu V. (1 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn tâm O. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E, trên tia đối của tia CA lấy điểm F sao cho $BE = BC = CF$. Gọi M là điểm bất kì thuộc đường tròn (O).

Chứng minh rằng $MA + MB + MC \le EF$.

Xác định vị trí của M trên đường tròn (O) để $MA + MB + MC = EF$

---

b) Do $\left.\begin{matrix} AB \perp SI \\ AB \perp IJ \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp \text{mp}(SIJ) \Rightarrow AB \perp SH$ mà $SH \perp IJ$ (gt) nên $SH \perp \text{mp}(ABCD) \Rightarrow SH \perp AC$ (đpcm).



Câu V. Gọi T_1, L_1, H_1, L_2, H_2, D, C lần lượt là số học sinh *chỉ* chọn thi môn Toán, môn Lý, môn Hóa, môn Toán và môn Lý (không thi Hóa), môn Toán và môn Hóa (không thi Lý), môn Lý và môn Hóa (không thi Toán), thi cả ba môn. Từ biểu đồ Ven–Ơle (hình dưới) và giả thiết có : $H_1 = L_1 = 0$; $C + L_2 = T_1$; $H_2 + C = 6$; $D + C = 5C \Rightarrow D = 4C$.

Theo bài ra ta có :

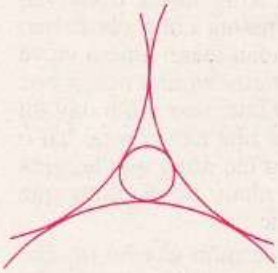
$T_1 + L_2 + C + H_2 + D = 28$ hay $(L_2 + C) + L_2 + 6 + 4C = 28 \Rightarrow 2L_2 + 5C = 22$ (1).

Từ đây suy ra C chẵn, theo đầu bài $C \ge 3$ thì từ (1) có $C = 4$, do đó : $L_2 = 1$, $H_2 = 2$, $T_1 = 5$ và $D = 16$. Vậy số học sinh chọn thi môn Toán là $5 + 2 + 4 + 1 = 12$ (học sinh) ; môn Lý là : $1 + 4 + 16 = 21$ (học sinh) ; môn Hóa là : $2 + 4 + 16 = 22$ (học sinh).

Hướng dẫn giải

NGUYỄN ĐỨC TẤN

EMILE LEMOINE ... *(Tiếp bìa 2)*



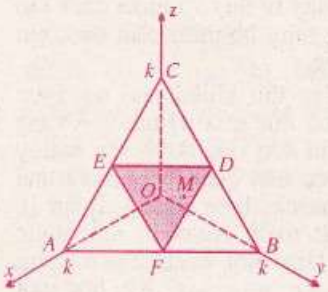
Hình 4

Bài tập : *Trong trường hợp đơn giản, với ba đường tròn cùng bán kính tiếp xúc với nhau, bạn hãy tìm số thao tác sơ cấp theo Lemoine để có thể hoàn thành việc dựng đường tròn thứ tư (h. 4)*

3. Bí ẩn của que gãy

Là người rất ham thích đặt và giải các bài toán, trong tập san đầu tiên của Hội Toán học Pháp, năm 1873, Lemoine đưa ra một vấn đề lí thú về các cạnh của một tam giác gọi là bí ẩn của que gãy : *Một que gãy làm ba đoạn mà ba đoạn đó lập được thành ba cạnh của một tam giác thì xác suất xảy ra là bao nhiêu ?*

Để cho đơn giản, Lemoine coi que được tạo thành bởi một số hữu hạn n đoạn bằng nhau và mỗi đoạn trong ba đoạn gãy gồm một số nguyên những phần nhỏ đó. Bằng cách kê ra theo n các trường hợp có thể có và các trường hợp thuận lợi, rồi bằng cách cho n dần tới vô hạn, Lemoine đạt tới xác suất là 1/4.



Hình 5

Bài toán có thể phát biểu theo ngôn ngữ hình học làm cho tính toán dễ dàng hơn. Giả sử, que có độ dài k và độ dài ba đoạn gãy là x, y và z (h. 5). Có thể biểu diễn hình học sự phân chia bằng một điểm M của không gian với hệ tọa độ $Oxyz$: $M(x, y, z)$ sao cho $x + y + z = k$ (*). Tập hợp những điểm M thỏa mãn (*) phải thuộc miền trong của tam giác ABC với $OA = OB = OC = k$. Ba đoạn gãy sẽ có thể tạo thành 3 cạnh của một tam giác nếu mỗi đoạn đó nhỏ hơn nửa chu vi (bạn hãy giải thích tại sao ?) tức là $x < k/2$, $y < k/2$, $z < k/2$.

Tập hợp những điểm M có đủ những điều kiện đó là miền trong tam giác DEF và xác suất tìm được là thương các diện tích của hai tam giác DEF và ABC.

Bạn thấy đấy, tam giác là một hình quen thuộc và đơn giản, nhưng vẫn còn ẩn dấu nhiều điều mà Lemoine đã hé mở để các bạn tiếp tục nghiên cứu.

NGUYỄN VĂN THIÊM
(theo *Recherche* tháng 12-2000)

TIN TỨC

HỘI THI TIN HỌC TRẺ KHÔNG CHUYÊN TOÀN QUỐC LẦN THỨ IX

Ngày 28.7.2003, Hội thi Tin học trẻ không chuyên toàn quốc lần thứ IX do Trung ương Đoàn TNCS Hồ Chí Minh, Bộ Khoa học và Công nghệ, Bộ Giáo dục và Đào tạo, Bộ Bưu chính - Viễn thông, Bộ Tài chính, Đài Truyền hình Việt Nam, Hội Tin học Việt Nam... phối hợp tổ chức đã khai mạc tại Đà Nẵng. Hội thi lần đầu tiên tổ chức tại Hà Nội ngày 17.8.1995.

Năm nay 158 thí sinh của 50 đơn vị tỉnh, thành, ngành tham dự, trong đó 49 học sinh tiểu học (bảng A), 48 học sinh trung học cơ sở (bảng B), 51 học sinh trung học phổ thông (bảng C). Có 10 thí sinh dự thi phần mềm sáng tạo (bảng D và E). *Nguyễn Khánh Ánh Hoàng* (Tp. HCM) đoạt giải nhất bảng A, *Huỳnh Ngọc An* (Bình Thuận) nhất bảng B, *Đinh Xuân Hải* (Đại học Vinh, Nghệ An) nhất bảng C. Giải nhất đồng đội thuộc về đội Bình Dương. *Nguyễn Tuấn Đạt* (học sinh lớp 2, tiểu học La Ngà, Quảng Ngãi) được nhận phần thưởng thí sinh nhỏ tuổi nhất. Cuộc thi có 5 thí sinh là học sinh thuộc dân tộc thiểu số. Kết quả cuộc thi cho thấy phong trào tin học không chuyên đã phát triển khá đồng đều trong cả nước.

VIỆT NAM ĐƯỢC XẾP HẠNG XÃ HỘI THÔNG TIN (ISI)

Tiến sĩ *Lê Trường Tùng*, Chủ tịch Hội Tin học Tp. Hồ Chí Minh vừa công bố thông tin này và cho biết, lần đầu tiên Việt Nam được xếp hạng ISI cùng với 53 nước khác. Đây là chỉ số đánh giá mức độ phát triển xã hội thông tin do IDG và World Time xếp hạng, dựa trên 23 yếu tố liên quan đến 4 nhóm : Hạ tầng máy tính, hạ tầng Internet, hạ tầng thông tin và hạ tầng xã hội.

HỘI NGHỊ CÁC HỘI THÀNH VIÊN HỘI TIN HỌC VIỆT NAM

Chiều 8.8.2003 tại Huế, Hội Tin học Việt Nam đã tổ chức Hội nghị các Hội thành viên lần thứ nhất. Đến nay cả nước đã có 22 Hội Tin học thành viên. Đại diện các Hội Tin học đã kí biên bản ghi nhớ về sự thống nhất hợp tác và phối hợp hành động vì sự nghiệp phát triển CNTT và truyền thông ở Việt Nam, giao cho Ban Soạn thảo bổ sung và sửa chữa bản Quy chế phối hợp hoạt động.

VTN
(Theo Tin hoạt động các Hội KHVKT)

GIỚI THIỆU SÁCH MỚI

Tập hợp các bài viết của giáo sư Nguyễn Cảnh Toàn, Tổng biên tập tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, trong đó 50 bài đã đăng trên THTT, cuốn sách ***74 CÂU CHUYỆN HỌC TOÁN THÔNG MINH, SÁNG TẠO*** *là tài liệu đọc thêm có ích cho học sinh trung học phổ thông và những ai quan tâm. 24 câu chuyện còn lại là tập hợp các bài báo giáo sư đã đăng trên các báo, tạp chí và tập san khác. Sách được Viện nghiên cứu & phổ biến kiến thức bách khoa phối hợp với Nhà xuất bản Nghệ An ấn hành, có trên thị trường từ 9.2003, 416 trang khổ 14.5 × 20.5 giá bán 45000 đồng. Có thể đặt mua qua bưu điện, sách sẽ gửi đến tận nơi không phải trả thêm cước phí. Tiền gửi về địa chỉ bà Nguyễn Thị Phương Thảo, nhà B4 phòng 411, khu tập thể Giảng Võ, đường Kim Mã, Quận Ba Đình, Hà Nội. Điện thoại (04)8463456. Bạn đọc tại Hà Nội có thể mua tại Nhà sách Từ điển Bách khoa 26 Lý Thường Kiệt, Hà Nội. ĐT (04)9362139.*

Xin giới thiệu một bài viết trích trong cuốn sách trên.

THTT

VĂN HÓA TOÁN HỌC

Ngày nay, ai cũng phải học suốt đời và đều bắt đầu bằng quãng đời học sinh. Trong quãng đời này, quá trình học được chia ra nhiều công đoạn dài, ngắn khác nhau : tiết học, tuần học, tháng học, học kì, năm học, khóa học. Có thể ví một công đoạn học với một chu trình sản xuất : đầu vào gồm kiến thức đã có, đầu ra vẫn gồm những kiến thức đó được củng cố vững chắc hơn và thêm các kiến thức mới học được ; tư duy là công nghệ để nối các kiến thức mới và cũ với nhau thành một chỉnh thể, sự nỗ lực phấn đấu học là năng lượng. Sự so sánh này là khập khiễng vì trong sản xuất, khi kết thúc một chu trình thì chu trình mới sẽ lặp lại y nguyên chu trình cũ khi giữa hai chu trình không có đổi mới công nghệ ; còn trong học tập, công đoạn kế sau khác công đoạn trước vì đầu vào của công đoạn sau là đầu ra của công đoạn trước : kiến thức đã chắc thêm và giàu thêm những kiến thức mới ;: không những thế, trình độ tư duy, trình độ nhân cách người học cũng đã trưởng thành lên so với khi bắt đầu công đoạn trước. Sự giàu thêm về kiến thức thì thấy rõ, nhiều khi chỉ qua một tiết học là đã có thêm kiến thức mới, còn sự trưởng thành về tư duy và nhân cách thì thường phải qua một công đoạn dài (năm học, khóa học) mới thấy rõ. Sự tích lũy ở đây có thể ví với sự tích lũy của từng hạt cát để thành bãi phù sa. Mỗi tiết học cũng cho người học thêm một hạt cát về tư duy và nhân cách nhưng khó thấy, khó đo. Vì vậy mà khi nói đến học, người đời thường nói đến học kiến thức, rất ít người nói đến học "tư duy" và rèn "nhân cách", vô hình chung bỏ đi cái rất quan trọng mà ta đã ví với công nghệ và năng lượng trong sản xuất. Ngay các giáo viên thường cũng chỉ lo sao dạy cho hết chương trình (hoàn thành nhiệm vụ về cung cấp kiến thức), còn tư duy và nhân cách học sinh được nâng lên đến đâu qua môn mình dạy thì được chăng hay chớ. Sự coi nhẹ này còn tai hại ở chỗ nó lãng phí rất nhiều sự tác động qua lại giữa việc học các bộ môn khác nhau. Sự tác động qua lại này biểu hiện ra ở ba mức :

- *Mức kiến thức:* Kiến thức môn này hỗ trợ cho việc học môn khác, dụ như kiến thức toán cần cho học lí, kiến thức địa lí cần cho học sử.

- *Mức tư duy :* Kiểu tư duy ở môn này có thể vận dụng sang môn khác, ví dụ tư duy lôgic trong toán học cũng phục vụ cho việc bố cục một bài văn, cho việc xây dựng một cách nhất quán tính cách một nhân vật tiểu thuyết.

- *Mức nhân cách :* Những phẩm chất của người học hình thành nên ở môn học này cũng phục vụ tốt cho việc học các môn khác ví như, trong học toán thì "ý thức đòi hỏi chính xác" được rèn dũa và điều đó cũng có ích cho việc học văn phạm của bất cứ thứ tiếng nào.

Nhờ sự tác động qua lại này ở cả ba mức mà hệ thống kiến thức phổ thông trở thành một chỉnh thể trong đó có ba sợi dây liên kết là kiến thức, tư duy và nhân cách. Hai sợi dây tư duy và nhân cách tạo nên mặt văn hóa trong từng bộ môn. Sau đây, xin đề cập văn hóa toán học.

Môn toán có một đặc thù khiến cho nó được mệnh danh là "môn thể dục của trí não". Nhưng thường người ta chỉ nghĩ đến việc rèn luyện tư duy lôgic, trong lúc toán học liên quan đến nhiều loại tư duy : lôgic, hình tượng, biện chứng, quản lí, kinh tế, kĩ thuật, thuật toán. Ngay tư duy lôgic cũng chỉ được quan tâm một cách phiến diện, chẳng hạn như rất coi nhẹ "quy nạp". Khi học một định lí, học sinh có thể hiểu được mắt xích lôgic nối giả thiết với kết luận nhưng không hiểu được người ta nghĩ thế nào mà phát minh ra định lí đó. Nguyên do là vì lâu nay ta không dạy cho học sinh một "toán học" đang vận động phát triển mà dạy cho học sinh một "toán học" đã hình thành xong xuôi, biến học sinh thành những người tham quan lâu đài toán học chứ không đặt họ vào vị trí những người cảm xúc, suy nghĩ, thiết kế và thi công ra lâu đài đó. Muốn làm việc này thì phải huy động, ngoài tư duy lôgic, nhiều tư duy khác và đó cũng là cách tốt nhất để phát triển chúng không những để phục vụ cho học toán mà còn cho việc học các môn khác. Sau đây, vì khuôn khổ bài viết chỉ xin hạn chế ở tư duy biện chứng và tư duy hình tượng.

Ngày nay, ta đề cao tư duy sáng tạo. Muốn sáng tạo phải hiểu được cơ chế của sự sáng tạo, mà cốt lõi của cơ chế này là tư duy biện chứng.

Nếu ta xem mỗi sự vật A chỉ là A thì dù có giỏi khám phá cái mới, ta cũng chỉ quanh quẩn trong

A. Nhưng nếu ta xem A không tĩnh tại, mà đương vận động để trở thành một cái A', khác A, thì hiểu biết về A cho ta ngay mầm mống những hiểu biết về A'.

Ví dụ, nếu coi tam giác (A) là một tứ giác (A') (có một cạnh bằng không) thì từ định lí về đường trung bình trong tam giác, ta sẽ có ngay nghi vấn khoa học : "Vậy trong tứ giác (A'), có những định lí nào mở rộng định lí về đường trung bình trong tam giác (tứ giác A' đặc biệt có một cạnh bằng không). Có nghi vấn tức là phát hiện được vấn đề, bước đầu tiên của sự sáng tạo.

Muốn sáng tạo phải cảm thụ được cái đẹp. Trong toán học đó là cái đẹp của sự tài tình biến hóa, là cái đẹp của sự gọn gàng, tiết kiệm, đó là cái đẹp của sự mềm mại uyển chuyển trong tư duy, tránh được các nếp cũ, đường mòn, nhìn ra được sự thống nhất giữa những cái đối lập ; đó là cái đẹp của sự táo bạo dám bay vút lên những nấc rất cao của sự trừu tượng và rồi lại từ đó là là xuống thấp đến những ứng dụng thiết thực của đời thường. Cho nên một tác phẩm văn học như *Tây du kí* cũng có ích cho việc học toán. Ta học cách Tôn Ngộ Không dùng các phép biến hóa thần thông một cách có mục đích rõ ràng và tùy cơ ứng biến. Chẳng hạn, muốn ép bà La Sát cho mượn quạt thì lấy cái đích là "chui vào bụng bà mà đạp" và đã tùy cơ ứng biến lợi dụng lúc bà uống nước, biến thành con bọ rơi vào cốc nước để trôi xuống dạ dày. Trong toán học các phép biến đổi còn phong phú hơn rất nhiều các phép của họ Tôn. Ngay từ lớp 1 đã gặp rồi và ở lớp này có thể lợi dụng tâm lí thích các chuyện thần thoại để cho các nhà toán học nhí đóng vai các cô tiên để biến những phép tính khó (đối với trẻ lớp 1) như "*cộng thêm chín*" thành hai phép dễ là "*cộng thêm mười*" và "*trừ đi một*".

Về rèn luyện nhân cách (và cả tư duy) thì toán học có đặc thù là yêu cầu cao về tính chính xác và tính trừu tượng. Nó sẽ rèn luyện người học phẩm chất "đòi hỏi chính xác, chống đại khái tùy tiện", "tầm nhìn xa trông rộng" do không bị hạn chế bởi những cái cụ thể trước mắt.

Phạm vi ứng dụng của toán học, tuy đã mở ra rất rộng nhưng vẫn có hạn, còn phạm vi ứng dụng của văn hóa toán học thì rộng hơn nhiều, lan đến cả nhiều lĩnh vực phi toán, ví như phương châm "*dĩ bất biến ứng vạn biến*" mà trong toán học ta gặp hàng ngày (vì mỗi định lí chứa đựng một chân lí bất biến và được ứng dụng để làm rất nhiều bài tập), thì có thể ứng dụng khắp nơi trong cuộc sống.

Cuối cùng, có câu hỏi : "*Dạy và học kiểu này có khó không ?*". Xin trả lời : có cái khó "bản chất" và có "cái khó" do "định kiến" rồi không dám tiếp cận, "kính nhi viễn chi" nên cứ thấy khó mãi. Xin mạnh dạn tiếp cận rồi sẽ tự tìm ra câu trả lời. "Dạy con hổ" người ta còn làm được là nhờ dám tiếp cận nó rồi vạch lộ trình chinh phục nó.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 64

Problem. Let $P(x) = a_0x^s + ax^{s-1} + \ldots + a_s$ be a polynomial with integral coefficients a_0, $a_1,\ldots,a_s$. Assume that $P(0)$, $P(1)$ are odd numbers. Prove that $P(x)$ has no integral roots.

Solution. Let m and n be two arbitrary integers. Using the formula

$$m^r - n^r = (m-n)(m^{r-1} + m^{r-2}n + \ldots + n^{r-1}).$$

we can show that

$$P(m) - P(n) = a_0(m^s - n^s) + a_1(m^{s-1} - n^{s-1}) + \ldots + a_{s-1}(m-n)$$

is divisible by $m - n$. Therefore, the difference $P(m) - P(n)$ is an even number if m and n are simultanously even or odd. In particular, $P(m) - P(0)$ is even for an even number m. Since $P(0)$ is odd, this implies that $P(m)$ is also odd so that $P(m) \neq 0$. Similarly, $P(m) - P(1)$ is even for an odd number m. Since $P(1)$ is odd, this implies that $P(m)$ is also odd so that $P(m) \neq 0$. Since any integer m is either even or odd, we have proved that the equation $P(x) = 0$ possess no integral root m.

Từ mới:

polynomial	= đa thức
integral	= nguyên (tính từ)
root	= nghiệm, căn
simultanously	= đồng thời (phó từ)
similarly	= tương tự (phó từ)
possess	= có, sở hữu (động từ)

NGÔ VIỆT TRUNG

PROBLEM ... *(Tiếp trang 10)*

T11/315. Let be given a triangle ABC with $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ and $\widehat{B} > \widehat{C}$. Prove that a necessary and sufficient condition for $\widehat{A} = 2(\widehat{B} - \widehat{C})$ is $(b-c)(b+c)^2 = a^2b$.

T12/315. Let R be the radius of the circumscribed sphere of the tetrahedron $A_1A_2A_3A_4$ and let S_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ be the area of the face opposite to the vertex A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. M is an arbitrary point in space. Prove that

$$\frac{MA_1}{S_1} + \frac{MA_2}{S_2} + \frac{MA_3}{S_3} + \frac{MA_4}{S_4} \geq \frac{2\sqrt{3}}{R}.$$

PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN TAM GIÁC LƯỢNG

NGUYỄN MẠNH HÙNG
(Khoa CNTT, ĐH Thủy Lợi, Hà Nội)

Trong các bài toán về tam giác lượng người ta thường yêu cầu chứng minh hoặc thiết lập các mối quan hệ về các hàm số lượng giác của các góc trong tam giác từ một mối quan hệ đã biết.

Ví dụ 1. *Chứng minh rằng trong tam giác ABC nếu cotgA, cotgC, cotgB lập thành cấp số cộng thì a^2, c^2, b^2 cũng lập thành cấp số cộng theo thứ tự.*

(Đề thi tuyển sinh ĐH Thương mại Hà Nội 2000)

Nói cách khác : Nếu trong tam giác ABC có $\text{cotg}C - \text{cotg}A = \text{cotg}B - \text{cotg}C \Leftrightarrow \text{cotg}A + \text{cotg}B = 2\text{cotg}C$ thì $c^2 - a^2 = b^2 - c^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2c^2$, tức là $\sin^2 A + \sin^2 B = 2\sin^2 C$.

Cách giải thông thường là dùng công thức cộng cotang rồi biến đổi tương đương. Nhưng trong VD1 nếu thay giả thiết $\text{cotg}A + \text{cotg}B - 2\text{cotg}C = 0$ bằng $m\text{cotg}A + n\text{cotg}B + p\text{cotg}C = 0$ với các hệ số m, n, p nào đó thì việc dùng công thức cộng cotang sẽ rất khó khăn.

Bài viết này trình bày phương pháp sử dụng hệ số bất định và sử dụng một số hệ thức lượng giác tương ứng để chuyển từ một hệ thức lượng giác này thành hệ thức lượng giác mới.

Ta kí hiệu $\mathcal{H}(x, y, z)$, $\mathcal{K}(x, y, z)$, ... là các biểu thức của các biến x, y, z thì dạng tổng quát của ví dụ 1 là yêu cầu biến đổi biểu thức $\mathcal{H}(\text{cotg}A, \text{cotg}B, \text{cotg}C)$ thành $\mathcal{K}(\sin^2 A, \sin^2 B, \sin^2 C)$ hoặc $\mathcal{K}(a^2, b^2, c^2)$.

Ta cần một bổ đề để xác định các hệ số của các biến.

Bổ đề. Nếu có

$m\alpha + n\beta + p\gamma = x(\alpha + \beta) + y(\beta + \gamma) + z(\gamma + \alpha)$, trong đó m, n, p, x, y, z là các hệ số của các biến α, β, γ thì $2x = m + n - p$, $2y = n + p - m$, $2z = p + m - n$.

Thực vậy, từ hệ thức trong bổ đề có $\begin{cases} x+z=m \\ x+y=n \\ y+z=p \end{cases}$

Cộng theo từng vế của hai trong ba đẳng thức trên rồi trừ theo từng vế với đẳng thức còn lại ta có điều phải chứng minh.

Dưới đây trình bày 4 dạng bài toán biến đổi biểu thức lượng giác.

Dạng 1. Chuyển từ $\mathcal{H}(\text{cotg}A, \text{cotg}B, \text{cotg}C)$ thành $\mathcal{K}(\sin^2 A, \sin^2 B, \sin^2 C)$.

Để biến đổi ta dùng các công thức lượng giác:

$$\text{cotg}A + \text{cotg}B = \frac{\sin C}{\sin A \sin B} \qquad (1a)$$

$$\text{cotg}A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} \qquad (1b)$$

Chứng minh. a) $\sin A \sin B(\text{cotg}A + \text{cotg}B) = \sin B\cos A + \sin A\cos B = \sin(A+B) = \sin(\pi - C) = \sin C$.

b) $\text{cotg}A = \dfrac{\cos A}{\sin A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \cdot \dfrac{bc}{2S} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{4S}$

Lời giải VD1. Đặt

$\text{cotg}A + \text{cotg}B - 2\text{cotg}C =$
$= x(\text{cotg}A + \text{cotg}B) + y(\text{cotg}B + \text{cotg}C) + z(\text{cotg}C + \text{cotg}A)$

Áp dụng bổ đề được

$2x = 1 + 1 - (-2) \Rightarrow x = 2$, $2y = 1 - 2 - 1 \Rightarrow y = -1$, $2z = -2 - 1 - 1 \Rightarrow z = -1$.

Từ đó sử dụng công thức (1a) có :

$\text{cotg}A + \text{cotg}B - 2\text{cotg}C =$
$= 2(\text{cotg}A + \text{cotg}B) - (\text{cotg}B + \text{cotg}C) - (\text{cotg}C + \text{cotg}A)$

$$= \frac{2\sin C}{\sin A \sin B} - \frac{\sin A}{\sin B \sin C} - \frac{\sin B}{\sin C \sin A}$$

$$= \frac{1}{\sin A \sin B \sin C}(2\sin^2 C - \sin^2 A - \sin^2 B)$$

Theo giả thiết $\text{cotg}A + \text{cotg}B - 2\text{cotg}C = 0$

$\Rightarrow \sin^2 A + \sin^2 B = 2\sin^2 C$.

$\Leftrightarrow 4R^2\sin^2 A + 4R^2\sin^2 B = 8R^2\sin^2 C$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2c^2$ (đpcm)

Bạn đọc có thể sử dụng công thức (1b) và biến đổi tương tự trên để giải quyết VD 1.

Dạng 2. Chuyển từ $\mathscr{H}$ (tg$A$, tg$B$, tg$C$) thành $\mathscr{K}$ (sin2A, sin2B, sin2C)

Để biến đổi ta dùng công thức

$$\text{tg}A + \text{tg}B = \frac{\sin C}{\cos A\cos B} \qquad (2)$$

Chứng minh. $\cos A\cos B(\text{tg}A + \text{tg}B)$
$= \sin A\cos B + \sin B\cos A = \sin(A+B) = \sin(\pi - C)$
$= \sin C$

Ví dụ 2. *Tam giác ABC có*

$$2tgA + 3tgB - 5tgC = 0$$

Chứng minh rằng $7\sin 2C - \sin 2B \le 3\sqrt{3}$.

Lời giải. Áp dụng phương pháp hệ số bất định và công thức (2) có :

$0 = 2\text{tg}A + 3\text{tg}B - 5\text{tg}C =$
$= 5(\text{tg}A + \text{tg}B) - 2(\text{tg}B + \text{tg}C) - 3(\text{tg}C + \text{tg}A)$

$$= \frac{5\sin C}{\cos A\cos B} - \frac{2\sin A}{\cos B\cos C} - \frac{3\sin B}{\cos A\cos C}$$

$\Leftrightarrow 5\sin 2C = 2\sin 2A + 3\sin 2B$
$\Leftrightarrow 7\sin 2C - \sin 2B = 2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$
$= 8\sin A\sin B\sin C \le 3\sqrt{3}$

Dạng 3. Chuyển từ $\mathscr{H}$ (cotg(A/2), cotg(B/2), cotg(C/2)) thành $\mathscr{K}$ (sin$A$, sin$B$, sin$C$).

Để biến đổi ta dùng công thức

$$\text{cotg}(A/2) + \text{cotg}(B/2) = \frac{\cos(C/2)}{\sin(A/2)\sin(B/2)} \qquad (3)$$

Chứng minh.

$\sin(A/2)\sin(B/2)(\text{cotg}(A/2) + \text{cotg}(B/2)) =$
$= \sin(B/2)\cos(A/2) + \sin(A/2)\cos(B/2) =$

$$= \sin\frac{A+B}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}.$$

Ví dụ 3. *Tam giác ABC có*

2001cotg(A/2) + 2003cotg(B/2) = 2004cotg(C/2)
Tìm hệ thức giữa ba cạnh của tam giác ABC.

Lời giải. Áp dụng phương pháp hệ số bất định và công thức (3) có :

$0 = 2001\ \text{cotg}(A/2) + 2003\ \text{cotg}(B/2)$
$- 2004\ \text{cotg}(C/2)$

$$= \frac{3004\cos(C/2)}{\sin(A/2)\sin(B/2)} - \frac{1001\cos(A/2)}{\sin(C/2)\sin(B/2)}$$

$$- \frac{1003\cos(B/2)}{\sin(A/2)\sin(C/2)}$$

$\Leftrightarrow 3004\sin(C/2)\cos(C/2) - 1001\sin(A/2)$
$\cos(A/2) - 1003\sin(B/2)\cos(B/2) = 0$
$\Leftrightarrow 3004.2R.\sin C = 1001.2R\sin A + 1003.2R\sin B$
$\Leftrightarrow 3004c = 1001a + 1003b.$

Từ hệ thức này, định lí hàm số côsin và BĐT Cô–si có thể suy ra góc $C < 81^{\circ}$.

Dạng 4. Chuyển từ $\mathscr{H}$ (tg(A/2), tg(B/2), tg(C/2)) thành $\mathscr{K}$ (cos$A$, cos$B$, cos$C$)

Để biến đổi ta dùng công thức :

$$\text{tg}(A/2) + \text{tg}(B/2) = \frac{\cos(C/2)}{\cos(A/2)\cos(B/2)} \qquad (4)$$

Chứng minh.

$\cos(A/2)\cos(B/2)(\text{tg}(A/2) + \text{tg}(B/2))$
$= \sin(A/2)\cos(B/2) + \sin(B/2)\cos(A/2)$

$$= \sin\frac{A+B}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$$

Ví dụ 4. *Chứng minh rằng trong tam giác ABC nếu tg(A/2), tg(C/2), tg(B/2) lập thành cấp số cộng thì cosA, cosC, cosB cũng lập thành cấp số cộng theo thứ tự.*

Lời giải. Áp dụng phương pháp hệ số bất định và công thức (4) có :

$0 = \text{tg}(A/2) + \text{tg}(B/2) - 2\text{tg}(C/2) =$
$= 2(\text{tg}(A/2) + \text{tg}(B/2)) - (\text{tg}(B/2) + \text{tg}(C/2)) -$
$- (\text{tg}(C/2) + \text{tg}(A/2))$

$$= \frac{2\cos(C/2)}{\cos(A/2)\cos(B/2)} - \frac{\cos(A/2)}{\cos(B/2)\cos(C/2)} -$$

$$- \frac{\cos(B/2)}{\cos(A/2)\cos(C/2)}$$

$\Leftrightarrow 2\cos^2(C/2) - \cos^2(A/2) - \cos^2(B/2) = 0$
$\Leftrightarrow \cos A + \cos B = 2\cos C$

Các bạn hãy vận dụng phương pháp trên để giải một số bài tập sau :

1) Tam giác ABC có $2\text{tg}\frac{A}{2} + \sqrt{3}\,\text{tg}\frac{B}{2} = \text{tg}\frac{C}{2}$. Chứng minh rằng :

$(3-\sqrt{3})\cos A + (\sqrt{3}-1)\cos B =$
$= 1 + \sqrt{3} + (3+\sqrt{3})\cos C$

2) Tam giác ABC có $\sqrt{2001}\,\text{tg}\frac{A}{2} + \sqrt{2003}\,\text{tg}\frac{C}{2}$

$$= \sqrt{2002}\,\text{tg}\frac{B}{2} + \frac{1}{\sin A + \sin B + \sin C}.$$

Tìm mối liên hệ giữa cos$A$, cos$B$, cos$C$.

(Xem tiếp trang 2)

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP TRUNG HỌC CƠ SỞ

Bài T1/315. (Lớp 6). Gọi A là tích các số nguyên liên tiếp từ 1 đến 1001 và B là tích các số nguyên liên tiếp từ 1002 đến 2002. Hỏi số $A + B$ có chia hết cho 2003 không ?

Bạn tìm được mấy cách giải ?

HUỲNH QUANG LÂU
(GV THCS Ngô Mây, Phù Cát, Bình Định)

Bài T2/315. (Lớp 7). Chứng minh rằng tổng

$$A = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{3^{4n-2}} - \frac{1}{3^{4n}} + \ldots - \frac{1}{3^{100}}$$

nhỏ hơn 0,1. Hãy tổng quát hóa bài toán trên.

VŨ HỮU BÌNH
(GV THCS Trưng Vương, Hà Nội)

Bài T3/315. Tìm giá trị lớn nhất của tổng $T = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$.

HOÀNG XUÂN VINH
(NXB Giáo dục)

Bài T4/315. Giải phương trình

$$\sqrt{\frac{42}{5-x}} + \sqrt{\frac{60}{7-x}} = 6$$

TRẦN HỒNG SƠN
(GV THPT BC Thái Thụy, Thái Bình)

Bài T5/315. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $xy + yz + zx$ trong đó x, y, z là các số thực dương thỏa mãn các điều kiện : $x \geq y \geq z$ và $32 - 3x^2 = z^2 = 16 - 4y^2$.

NGUYỄN THỊ LOAN
(GV THCS Đức Bác, Lập Thạch, Vĩnh Phúc)

Bài T6/315. Cho góc $\widehat{xAy} = 90^0$ và một điểm M nào đó nằm bên trong góc xAy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M trên Ax, Ay. Trên đường thẳng qua M vuông góc với HK lấy điểm P thỏa mãn $PM = HK$. Tìm quỹ tích điểm P khi M thay đổi bên trong góc xAy.

NGUYỄN NHƯ HIỀN
(GV THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Bảo, Hải Phòng)

Bài T7/315. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của các đường thẳng AO với BC, BO với AC, CO với AB. Chứng minh rằng : $AD + BE + CF \geq \frac{9R}{2}$.

NGUYỄN TRỌNG QUÂN
(SV 44C4 ĐH Thủy Lợi, Hà Nội)

CÁC LỚP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Bài T8/315. Tìm tất cả các số tự nhiên a sao cho tồn tại số tự nhiên $n > 1$ mà $a^n + 1$ chia hết cho n^2.

VŨ THANH TÙNG
(SV Toán K5, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội)

Bài T9/315. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{\sin^{n+2} x}{\cos^n x} + \frac{\cos^{n+2} x}{\sin^n x} \geq 1$$

trong đó $0 < x < \frac{\pi}{2}$ và n là số nguyên dương.

NGUYỄN ĐỄ
(Hải Phòng)

Bài T10/315. Các dãy số (u_n) và (v_n) $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ được xác định bởi :

$$u_0 = 2001,\ u_1 = 2002,\ v_0 = v_1 = 1,$$

$$u_{n+2} = 2002\sqrt{\frac{u_n}{v_{n+1}^{2001}}},\ v_{n+2} = 2002\sqrt{\frac{v_n}{u_{n+1}^{2001}}}$$

với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$

Chứng minh rằng các dãy này có giới hạn hữu hạn và tìm các giới hạn đó.

BÙI THẾ HÙNG
(SV K34B khoa Toán, ĐHSP Thái Nguyên)

Bài T11/315. Cho tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và $\widehat{B} > \widehat{C}$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để $\widehat{A} = 2(\widehat{B} - \widehat{C})$ là $(b - c)(b + c)^2 = a^2 b$.

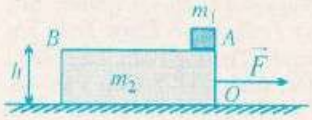
PHẠM ĐÌNH TRƯỜNG
(Hà Nội)

Bài T12/315. Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Gọi S_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ là diện tích mặt đối diện với đỉnh A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ tương ứng. M là điểm tùy ý trong không gian. Chứng minh rằng $\frac{MA_1}{S_1} + \frac{MA_2}{S_2} + \frac{MA_3}{S_3} + \frac{MA_4}{S_4} \geq \frac{2\sqrt{3}}{R}$

TRẦN VIỆT ANH
(SV K51 CLC khoa Toán Tin, ĐHSP Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/315. Một vật nhỏ khối lượng $m_1 = 1$kg (coi như 1 chất điểm) đặt trên vật thứ hai khối lượng $m_2 = 3$kg có độ dài $AB = l = 1$(m). Vật m_2 đặt trên bàn nằm ngang nhẵn, hệ số ma sát giữa m_1 và m_2 là $k = 0,1$ (hình vẽ). Vật m_2 cao $h = 0,8$ (m). Lấy $g = 10$m/s^2. Kéo m_2 với một lực không đổi nằm ngang có độ lớn $F = 10$(N). Hỏi sau bao lâu kể từ lúc bắt đầu kéo m_1 sẽ chạm mặt bàn và điểm chạm bàn cách O một đoạn bao nhiêu ? Cho biết ban đầu m_1 ở mép A.



NGUYỄN VĂN HẠNH
(GV THPT Hà Huy Tập, Vinh, Nghệ An)

Bài L2/315. Cắm nghiêng một thước thẳng AB vào chậu nước (chiết suất của nước $n = \frac{4}{3}$). Mắt nhìn thẳng đứng xuống phần thước chìm trong nước gần C (C là giao điểm của thước với mặt nước) sẽ thấy thước bị "gãy" tại C một góc β. Tìm giá trị cực đại của β.

TRẦN TRỌNG HƯNG
(Quảng Ngãi)

Cùng bạn đọc :

Trong đề bài T11/314 (THTT 8/2003) có in thiếu mấy chữ, xin sửa lại như sau : "Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn *ngoại tiếp* ΔABC và *nội tiếp* ΔDEF". Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/315. (For 6th grade)

Let A be the product of the consecutive integers from 1 to 1001 and B be the product of the consecutive integers from 1002 to 2002.

Is $A + B$ divisible by 2003 ?

Can you do it by distinct methods ?

T2/315. (For 7th grade)

Prove that the sum

$$A = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{3^{4n-2}} - \frac{1}{3^{4n}} + \ldots - \frac{1}{3^{100}}$$

is less than 0,1. Give a generalization of the problem.

T3/315. Find the greatest value of the sum $T = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, where a, b, c are positive integers satisfying the condition $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$.

T4/315. Solve the equation

$$\sqrt{\frac{42}{5-x}} + \sqrt{\frac{60}{7-x}} = 6$$

T5/315. Find the greatest value of the expression $xy + yz + zx$, where x, y, z are positive real numbers satisfying the conditions : $x \geq y \geq z$ and $32 - 3x^2 = z^2 = 16 - 4y^2$.

T6/315. Let be given an angle $\widehat{xAy} = 90^\circ$ and a point M inside the angle. Let H and K be respectively the projections of M on Ax and Ay. On the line passing through M perpendicular to HK take a point P such that $PM = HK$. Find the locus of P when M moves inside the angle xAy.

T7/315. Let be given an acute triangle ABC inscribed in a circle with center O and radius R. Let D, E, F be respectively the points of intersection of the lines AO and BC, BO and AC, CO and AB. Prove that $AD + BE + CF \geq \frac{9R}{2}$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/315. Find all natural number a so that there exists a natural number $n > 1$ such that $a^n + 1$ is divisible by n^2.

T9/315. Prove the inequality $\frac{\sin^{n+2} x}{\cos^n x} + \frac{\cos^{n+2} x}{\sin^n x} \geq 1$ where $0 < x < \frac{\pi}{2}$ and n is a positive integer.

T10/315. The sequences of numbers (u_n) and (v_n) $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ are defined by :

$u_0 = 2001$, $u_1 = 2002$, $v_0 = v_1 = 1$,

$$u_{n+2} = 2002\sqrt{\frac{u_n}{v_{n+1}^{2001}}}, \quad v_{n+2} = 2002\sqrt{\frac{v_n}{u_{n+1}^{2001}}}$$

for every $n = 0, 1, 2, \ldots$

Prove that these sequences have finite limits and find these limits.

(Xem tiếp trang 7)

Bài T1/311. (Lớp 6). *So sánh hai phân số sau:* $A = \dfrac{2003^{2003}+1}{2003^{2004}+1}$, $B = \dfrac{2003^{2002}+1}{2003^{2003}+1}$

Bạn tìm được bao nhiêu cách giải ?

Lời giải. Quy đồng mẫu số của A và B thì tử số của $B - A$ là

$C = \left(2003^{2004}+1\right)\left(2003^{2002}+1\right)-\left(2003^{2003}+1\right)^2$

$= 2003^{4006} + 2003^{2004} + 2003^{2002} + 1 - 2003^{4006} - 2.2003^{2003} - 1$

$= 2003^{2003}(2003-1) - 2003^{2002}(2003-1)$

$= 2003^{2002}.2002^2$

Vì $C > 0$ và mẫu số chung dương nên $B > A$.

Nhận xét. Ngoài cách nêu trên còn có nhiều cách giải khác. Dưới đây trình bày vắn tắt một số cách giải ngắn gọn khác (với A, B đều là số dương).

Cách 2. Ta có $A < B \Leftrightarrow \dfrac{1}{A} > \dfrac{1}{B}$. Quy đồng mẫu số rồi xét hiệu hai tử số là C như trên.

Nói cách khác, đó là việc quy đồng tử số của A và B rồi so sánh hiệu hai mẫu số là C như trên.

Cách 3. $\dfrac{1}{A} = \dfrac{2003(2003^{2003}+1)-2002}{2003^{2003}+1}$

$= 2003 - \dfrac{2002}{2003^{2003}+1}$

$\dfrac{1}{B} = \dfrac{2003(2003^{2002}+1)-2002}{2003^{2002}+1} = 2003 - \dfrac{2002}{2003^{2002}+1}$

So sánh hai mẫu số suy ra $A < B$.

Cách 4. $2003A = 1 + \dfrac{2002}{2003^{2004}+1}$

$2003B = 1 + \dfrac{2002}{2003^{2003}+1}$

Từ $2003A < 2003B$ suy ra $A < B$.

Cách 6. Trước hết chứng minh rằng nếu $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ với b, d dương thì $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d}$. Từ đó :

$A = \dfrac{2003^{2003}+1}{2003^{2004}+1} < \dfrac{2003^{2003}+1+2002}{2003^{2004}+1+2002} = B$

Với bài này có thể thay số 2003 bằng một số $n > 1$.

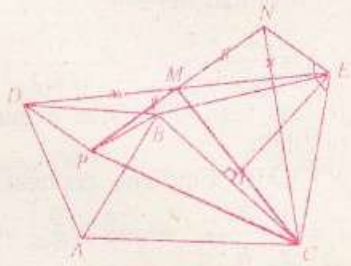
2) Các bạn sau đã trình bày nhiều cách giải :

Thái Nguyên : *Nguyễn Hoàng Tùng*, 6A5, THCS Chu Văn An, Tp. Thái Nguyên ; **Phú Thọ :** *Nguyễn Thị Huyền Trang*, 6A, THCS giấy Phong Châu, *Vũ Ngọc Bích*, 6A1, THCS Lâm Thao ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Thị Hà*, 6A, THCS Yên Lạc, *Nguyễn Thị Hồng Nguyên*, 6D, THCS Yên lạc ; **Hà Tây :** *Trần Ngọc Thúy*, *Trần Thị Thùy Trang*, 6B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa ; **Hải Dương :** *Chu Bá Quốc*, 6A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà, *Nguyễn Anh Tú*, 6B, THCS Bình Hàn ; **Hải Phòng :** *Phạm Văn Huy*, *Lê Bông Trang*, 6A5, THCS Chu Văn An, Q. Ngô Quyền ; **Thái Bình :** *Nguyễn Khánh Linh*, 6B, THCS Thanh Tân, Kiến Xương ; **Nam Định :** *Nguyễn Văn Huy*, 6A, THCS Nam Quang, Nam Trực ; **Nghệ An :** *Trần Văn Phúc*, 6A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu ; *Nguyễn Nữ Hoàng Tâm*, 6A, THCS Quán Hành, Nghi Lộc, *Nguyễn Hữu Hồng Quân*, 6E, THCS Trung Đô, Vinh ; **Thừa Thiên – Huế :** *Nguyễn Đăng Minh Thảo*, 6/10 THCS Thống Nhất ; **Bình Định :** *Trần Thị Quỳnh Giao*, 6A3, THCS Ngô Mây, Phù Cát ; **Khánh Hòa :** *Nguyễn Anh Thảo*, 6/14, THCS Thái Nguyên, Nha Trang ; **Đắc Lắc :** *Võ Văn Tuấn*, 6A5, THCS Buôn Hồ, Krông Buk.

VIỆT HẢI

Bài T2/311. (Lớp 7). *Cho tam giác ABC. Dựng đoạn thẳng BD sao cho* $\widehat{ABD} = 60^\circ$, $BD = BA$ *và tia BA nằm giữa hai tia BC, BD. Dựng đoạn thẳng BE sao cho* $\widehat{CBE} = 60^\circ$, $BE = BC$ *và tia BC nằm giữa hai tia BA, BE. Gọi M là trung điểm của DE, P là giao điểm hai đường trung trực của các đoạn thẳng BA và BD. Tính các góc của tam giác CMP.*

Lời giải. (của *Nguyễn Thu Trang*, 7E, THCS Quảng Tâm, Quảng Xương, **Thanh Hóa**)



Từ giả thiết suy ra ngay ABD và BCE là các tam giác đều nằm phía ngoài ΔABC. Trên tia đối của tia MP lấy điểm N sao cho $MN = MP$. Ta có $\Delta PMD = \Delta NME$ (c.g.c) $\Rightarrow PD = NE$ và $PD // NE$, mà $PD \perp AB \Rightarrow EN \perp AB$. Hạ $EH \perp BC$ ta có $\widehat{NEH} = \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{PBC} = \widehat{NEC}$. Từ đó $\Delta PBC = \Delta NEC$ (c.g.c) $\Rightarrow CP = CN$. Mặt khác $\widehat{PCB} = \widehat{NCE} \Rightarrow \widehat{PCN} = \widehat{BCE} = 60^\circ \Rightarrow \Delta CPN$ là tam giác đều. Vì M là trung điểm của PN nên $\widehat{PMC} = 90^\circ$; $\widehat{MPC} = 60^\circ$; $\widehat{PCM} = 30^\circ$.

Nhận xét. 1) Bài này không khó, các bạn tham gia giải đều có lời giải đúng.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Vĩnh Phúc : *Đỗ Hoàng Tùng*, 7E, THCS Vĩnh Yên, *Dương Văn Cường*, *Ngô Thị Bích Phượng*, *Bùi Thị Bích*

Phượng, Đào Trung Hiếu, 7A, THCS Yên Lạc, Yên Lạc ; **Nam Định :** *Hoàng Trọng Hiên*, 7B, THCS Trần Huy Liệu, Vụ Bản ; **Thanh Hóa :** *Lê Văn Nguyên*, 7D, *Lê Thị Nga*, 8D, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn ; *Hoàng Đức Ý*, 7E, THCS Trần Mai Ninh ; **Nghệ An :** *Mai Văn Minh*, 7G, THCS Đặng Thai Mai, Tp. Vinh ; **Hải Dương :** *Phạm An Tông*, 7B, THCS Tân An, Thanh Hà.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/311. *Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 4x + 1 = 0$. Chứng minh rằng $x_1^{2n} + x_2^{2n}$ có thể biểu diễn thành tổng các bình phương của 3 số nguyên liên tiếp với bất kì số nguyên dương n.*

Lời giải. Giả sử $x_1 > x_2$. Ta có $x_1 = 2 + \sqrt{3}$, $x_2 = 2 - \sqrt{3}$ và $x_1^{2n} + x_2^{2n}$

$$= \left(x_1^n - x_2^n\right)^2 + 2(x_1x_2)^n = \left(x_1^n - x_2^n\right)^2 + 2.$$

Chúng ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo $n = 1, 2, 3, ...$

$$x_1^n - x_2^n = \sqrt{3}.k_n,\ k_n \in N^* \ (*)$$

Thật vậy $x_1 - x_2 = 2\sqrt{3}$, $k_1 = 2$,

$$x_1^2 - x_2^2 = 8\sqrt{3},\ k_2 = 8$$

và từ công thức

$$x_1^{n+1} - x_2^{n+1} = \left(x_1^n - x_2^n\right)(x_1 + x_2) - \left(x_1^{n-1} - x_2^{n-1}\right)x_1x_2$$

$$= 4\left(x_1^n - x_2^n\right) - \left(x_1^{n-1} - x_2^{n-1}\right)$$

ta nhận được $k_{n+1} = 4k_n - k_{n-1}$ với mọi $n = 2, 3, ...$

Vậy (*) đúng, do đó

$$x_1^{2n} + x_2^{2n} = \left(x_1^n - x_2^n\right)^2 + 2 = 3k_n^2 + 2 =$$

$$= (k_n - 1)^2 + k_n^2 + (k_n + 1)^2 \text{ (đpcm).}$$

Nhận xét. 1) Khẳng định (*) có thể chứng minh bằng cách dùng khai triển nhị thức Niutơn.

2) Tòa soạn nhận được lời giải của 108 bạn, hầu hết các bạn giải đúng. Hoan nghênh các bạn lớp 7, lớp 8 đã giải tốt bài toán này : **Bắc Giang :** *Nguyễn Phi Yến*, 8A, THCS Ngô Sĩ Liên ; **Phú Thọ :** *Trần Tuấn Anh*, 8E, *Nguyễn Bảo Linh*, 8A, THCS Văn Lang, *Nguyễn Thị Thanh Thảo*, 8A, THCS Giấy - Phong Châu ; **Hà Tây :** *Lê Hồng Thuận*, 7B, THCS Nguyễn Thượng Hiền ; **Vĩnh Phúc :** *Bùi Thị Bích Phương*, 7A, *Đoàn Mạnh Hùng*, *Đỗ Đình Khanh*, 8A, THCS Yên Lạc, *Hà Đình Khánh*, 8A, THCS Quang Sơn, *Nguyễn Văn Linh*, 8A, THCS Hương Canh, *Nguyễn Hoài Nam*, 8D, THCS Liên Bảo ; **Nam Định :** *Trần Ngọc Tân*, 8A6, THCS Trần Đăng Ninh, Vụ Bản ; **Hải Dương :** *Hoàng Đình Phương*, 8/3, THCS Lê Quý Đôn ; **Hải Phòng :** *Phạm Thu Hằng*, 8A, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Lưu Bách*, 7C, THCS Lê Hữu Tập ; *Nguyễn Hữu Hải*, *Trịnh Huy Giang*, 8A, THCS Nguyễn Chích, *Lê Việt Hưng*, 7A3, THCS Quang Trung ; *Hoàng Vũ Hạnh*, 8B, THCS Trần Mai Ninh ; **Nghệ An :** *Thái Duy Dương*, 8A, THCS Bạch Liêu ; *Tăng Văn Vương*, 8C, THCS Cao Xuân Huy ; **Quảng Trị:** *Dương Đình Sơn*, 7/7, THCS Trần Hưng Đạo ; **Tây Ninh :** *Phạm Thị Cẩm Huyền*, 8A1, THCS Trần Bình Trọng ; **Khánh Hòa :** *Nguyễn Thị Hoàng Oanh*, 8/1, THCS Đinh Tiên Hoàng.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T4/311. *Tìm tất cả bộ ba số a, b, c thỏa mãn đẳng thức*

$$(a^2 + 1)(b^2 + 2)(c^2 + 8) = 32abc$$

Lời giải. (của nhiều bạn)

Sử dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số, ta có :

$$a^2 + 1 \geq 2|a|$$

$$b^2 + 2 \geq 2\sqrt{2}|b|$$

$$c^2 + 8 \geq 2\sqrt{8}|c|$$

Từ đó, ta thu được $(a^2 + 1)(b^2 + 2)(c^2 + 8) \geq 32|abc| \geq 32abc$, đẳng thức xảy ra chỉ khi $|a| = 1$, $|b| = \sqrt{2}$, $|c| = \sqrt{8}$ và abc là số dương. Ta thu được tất cả 4 bộ số (a, b, c) thỏa mãn là $(1, \sqrt{2}, \sqrt{8})$, $(-1, -\sqrt{2}, \sqrt{8})$, $(-1, \sqrt{2}, -\sqrt{8})$ và $(1, -\sqrt{2}, -\sqrt{8})$.

Nhận xét. Rất nhiều bạn giải bài toán này, đáng tiếc là chỉ có khoảng một nửa số bài gửi có đáp số đầy đủ 4 nghiệm. Rất nhiều bạn chỉ đưa ra lời giải với a, b, c là các số dương. Các bạn sau đây có lời giải đầy đủ và trình bày ngắn gọn.

Khánh Hòa : *Nguyễn Thanh Tú*, 9H, THCS Nguyễn Hiền, Nha Trang, *Nguyễn Thị Hoàng Oanh*, 8, THCS Đinh Tiên Hoàng, Ninh Hòa, *Võ Thái Thông*, 7/4 Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh ; **Quảng Trị:** *Dương Bảo Nhân*, 9, THCS Đại Hòa ; **Bình Định :** *Trương Thị Hồng Phương*, 8A5, THCS Nhơn Hòa, *Huỳnh Tuấn Sang*, 9A4, THCS Đống Đa, Quy Nhơn ; **Quảng Ngãi :** *Phan Quốc Việt* và *Nguyễn Phan Linh*, 9H, THCS Trần Hưng Đạo, Tx. Quảng Ngãi ; *Huỳnh Kim Quỳnh*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Mộ Đức ; **Đồng Tháp :** *Lý Duy Khiêm*, 9A1, THPT Cao Lãnh, *Lữ Thiện Nhân*, 9A1, THPT Tx. Sa Đéc, *Huỳnh Võ Trung Dũng*, 9A2, THPT Cao Lãnh, **Phú Yên**, *Phan Thanh Tú Uyên*, 9A, THCS Lương Thế Vinh, Tx. Tuy Hòa, *Nguyễn Ngọc Tâm Quyên*, 8E, THCS Hùng Vương Tx. Tuy Hòa ; **Đồng Nai:** *Nguyễn Trung Thảo*, 9/9, THCS Trần Hưng Đạo, Tp. Biên Hòa, *Triệu Thị Phương Hiền*, 8, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Biên Hòa; **Quảng Ninh :** *Bùi Ngọc Duy*, 9, thực hành sư phạm.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T5/311. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$\frac{a^8}{(a^2+b^2)^2} + \frac{b^8}{(b^2+c^2)^2} + \frac{c^8}{(c^2+a^2)^2}$$

trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện : $ab + bc + ca = 1$

Lời giải. (của nhiều bạn). Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-acốp-xki ta có :

$$A = \frac{a^8}{(a^2+b^2)^2} + \frac{b^8}{(b^2+c^2)^2} + \frac{c^8}{(c^2+a^2)^2}$$

$$\geq \frac{\left(\frac{a^4}{a^2+b^2}+\frac{b^4}{b^2+c^2}+\frac{c^4}{c^2+a^2}\right)^2}{3} = \frac{B^2}{3} \quad (1)$$

$$\left((a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)\right) \times$$

$$\left(\frac{a^4}{a^2+b^2}+\frac{b^4}{b^2+c^2}+\frac{c^4}{c^2+a^2}\right) \geq \left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

$$\Rightarrow B \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$A \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{12} \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{12} = \frac{1}{12}.$$

Vậy $\min A = \frac{1}{12} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Nhận xét. 1) Một số bạn đã có nhận xét đúng :

a) Điều kiện a, b, c dương trong đề bài là không cần thiết.

b) Có thể thay giả thiết $ab + bc + ca = 1$ bằng giả thiết "mạnh hơn" : $ab + bc + ca \geq 1$.

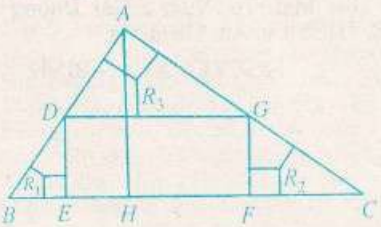
c) Có nhiều hướng để tổng quát bài toán trên. Chẳng hạn (cũng với cách giải trên) ta có bài toán : "Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$\frac{a_1^8}{(a_1^2+a_2^2)}+\frac{a_2^8}{(a_2^2+a_3^2)}+...+\frac{a_n^8}{(a_n^2+a_1^2)}$, trong đó $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực thỏa mãn : $a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_na_1 = k$ và hai trong các số này không cùng bằng 0".

2) Rất đông các bạn tham gia giải bài này (hơn 200 bạn) và hầu hết đều giải đúng. Các bạn có lời giải tốt là : **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Xuân Thọ*, 8B, THCS Vĩnh Yên, *Hà Đình Khánh*, 8A, THCS Quang Sơn, Lập Thạch, *Lê Trường Sơn*, 9C, THCS Vĩnh Tường ; **Phú Thọ :** *Ngô Vĩnh Thái*, 9A1, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh ; **Lạng Sơn :** *Nông Gia Tự*, 9A, THCS thị trấn Văn Quan; **Hà Nội :** *Nguyễn Tiến Hùng*, 9P, THCS Việt Nam - Angiêri, Thanh Xuân ; **Hải Phòng :** *Nguyễn Thị Thu Hiền*, 9A1, THCS Lương Khánh Thiện, Kiến An ; *Bùi Ngọc Khôi*, 9A, THPT NK Trần Phú ; **Thái Bình :** *Bùi Quang Trường*, 9B, THCS Quỳnh Thọ, Quỳnh Phụ ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Huy Liệu*, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc ; **Nghệ An :** *Nguyễn Thanh Tuấn*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; *Đậu Thế Linh*, 9A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Phạm Thái Khánh Kiệt*, 7A, THCS Nghĩa Quang, Nghĩa Đàn ; **Hà Tĩnh :** *Trần Thị Mai Hà*, 9G, THCS Bắc Hồng, Hồng Lĩnh ; **Gia Lai :** *Lê Hoài Nhật*, 9_6, THCS Trần Phú, Pleiku ; **Tây Ninh :** *Phạm Thị Cẩm Huyền*, 8A1, THCS Trần Bình Trọng, Hòa Thành ; **Quảng Nam :** *Đoàn Quang Vũ*, 9_1, THCS Lý Tự Trọng, Đại Lộc.

TRẦN HỮU NAM

Bài T6/311. *Cho tam giác ABC vuông tại A. Dựng hình chữ nhật EFGD sao cho E, F là các điểm trên cạnh BC, còn G, D lần lượt là các điểm trên cạnh AC, AB. Gọi R_1, R_2 và R_3 là bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác BDE, CGF và ADG theo thứ tự. Chứng minh rằng diện tích EFGD lớn nhất khi và chỉ khi $R_1^2 + R_2^2 = R_3^2$.*



Lời giải. Kẻ $AH \perp BC$. Ta có $\Delta ADG \backsim \Delta EBD \backsim \Delta FGC$. Kí hiệu S là diện tích, ta có :

$$\frac{S_{BDE}}{S_{ADG}} = \frac{R_1^2}{R_3^2}; \quad \frac{S_{CGF}}{S_{ADG}} = \frac{R_2^2}{R_3^2} \quad (1)$$

Mặt khác $\Delta BDE \backsim \Delta BAH$, $\Delta CGF \backsim \Delta CAH$

nên $\frac{S_{ADG}}{S_{ABC}} = \frac{AD^2}{AB^2}$ và $\frac{BD^2}{BA^2} = \frac{S_{BDE}}{S_{BAH}} = \frac{CG^2}{CA^2} = \frac{S_{CGF}}{S_{CAH}} = \frac{S_{BDE}+S_{CGF}}{S_{ABC}}$ (2)

Ta lại có $\frac{S_{EFGD}}{S_{ABC}} = \frac{2DE \times DG}{AH \times BC} = 2\frac{DE}{AH} \times \frac{DG}{BC}$

$= 2\frac{BD}{AB} \times \frac{AD}{AB}$ (3)

Mà $\frac{BD}{AB} \times \frac{AD}{AB} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{BD}{AB}+\frac{AD}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4}$ (4)

(theo BĐT trung bình cộng trung bình nhân)

Từ (3) và (4) có $S_{EFGD} \leq \frac{1}{2}S_{ABC}$.

Vậy S_{EFGD} lớn nhất $\Leftrightarrow AD = BD \Leftrightarrow S_{ADG} = S_{BDE} + S_{CGF}$ (theo (2)) $\Leftrightarrow \frac{R_1^2}{R_3^2}+\frac{R_2^2}{R_3^2} = 1$

(do (1)) $\Leftrightarrow R_3^2 = R_1^2 + R_2^2$.

Nhận xét. 1) Trong bài toán trên ta có thể thay các R_i bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp, độ dài đường trung tuyến... miễn là tỉ số giữa chúng bằng tỉ số đồng dạng.

2. Giải tốt bài này là các bạn :

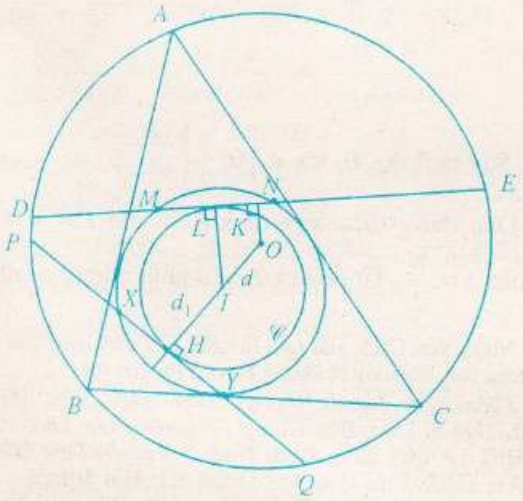
Phú Thọ : *Ngô Vĩnh Thái*, 9A1, THCS Giấy Phong Châu ; **Phú Ninh :** *Lê Trường Sơn*, 9C, THCS Vĩnh Tường, *Kim Đình Hải*, 9D, THCS Phạm Công Bình, Yên Lạc, *Nguyễn Hùng Cường*, 9B, THCS Lập Thạch ; **Bắc Ninh :** *Lê Quốc Khánh*, 9A, THCS Yên Phong ; **Hải Phòng :** *Bùi Ngọc Khôi*, *Lương Phú Khánh*, 9A, THPT NK Trần Phú ; **Hà Nội :** *Vũ Nhật Minh*, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Q. Cầu Giấy ; **Nam Định :** *Đặng Tuấn Hùng*, 9A, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, *Vũ Thanh Nhàn*, 9C, THCS Đào Sư Tích, Trực Ninh, *Vũ Duy Linh*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên ; **Thái Bình :** *Nguyễn Văn*

Phúc, 9B, THCS Quỳnh Thọ, Quỳnh Phụ ; **Thanh Hóa :** *Lưu Xuân Thế*, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc ; **Nghệ An :** *Đàm Thanh Thủy*, 8C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu ; **Hà Tĩnh :** *Trần Thị Mai Hà*, 9G, THCS Bắc Hồng, Hồng Lĩnh ; **Quảng Ngãi :** *Nguyễn Văn Cường*, THCS Đức Chánh, Mộ Đức ; **Bình Định :** *Huỳnh Tấn Sang*, 9A4, THCS Đống Đa, Quy Nhơn ; **Khánh Hòa :** *Đỗ Phú Thịnh*, 8^{12}, THCS Thái Nguyên, Nha Trang ; **Tp HCM :** *Nguyễn Anh Cường*, 9^1, THCS Lê Quý Đôn, Q.3.

BÍNH NAM HÀ

Bài T7/311. *Dây cung DE của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường tròn nội tiếp tam giác này tại các điểm M và N. Chứng minh rằng $DE \geq 2MN$.*

Lời giải. Dựng đường tròn $\mathscr{C}$ tâm trùng tâm I đường tròn nội tiếp ΔABC, tiếp xúc với DE tại L. Gọi H là giao của đường thẳng OI với đường tròn $\mathscr{C}$ với $OH = OI + IH$. Ta sẽ chứng minh $DE \geq PQ$. Kẻ $OK \perp DE$.



Ta có $OH = OI + IH = OI + IL \geq OL \geq OK$. Do đó $DE \geq PQ$.

Để chứng minh $DE \geq 2MN$ ta chỉ cần chứng minh $PQ \geq 2XY$ (X, Y là giao của PQ với đường tròn nội tiếp ΔABC). Đặt $IH = d_1$, $IO = d$. Ta phải chứng minh $XY^2 = 4(r^2 - d_1^2) \leq \frac{1}{4}PQ^2 = R^2 - (d + d_1)^2$ hay $4(r^2 - d_1^2) \leq R^2 - (d_1 + d)^2$ (R, r là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của ΔABC) (1)

* Nếu $R \geq 6r$ ta có

(1) $\Leftrightarrow 4(r-d_1)(r+d_1) \leq (R-d-d_1)(R+d+d_1)$ (2)

H nằm trong đường tròn nội tiếp ΔABC nên $r \geq d_1$.

– Nếu $d \geq d_1$ thì $R + d + d_1 \geq 6r + d + d_1 \geq 6r + 2d_1 \geq 4r + 4d_1$ mà $R > d + r$ nên $R - d - d_1 > r - d_1$ suy ra (2) đúng, dẫn đến (1) đúng.

– Nếu $d_1 \geq d$ thì $R-d-d_1 \geq 6r-d-d_1 > 6r-d-d_1 - (2r-d+3d_1) = 4r - 4d_1$ mà $R+d+d_1 > r+d_1$ suy ra (2) đúng, dẫn đến (1) đúng.

* Nếu $2r \leq R \leq 6r$, ta có

(1) $\Leftrightarrow 4r^2 - 4d_1^2 \leq R^2 - d_1^2 - d^2 - 2dd_1$ (3)

Áp dụng hệ thức Ơle $d^2 = R^2 - 4Rr$ ta có

$4r^2 - 4d_1^2 \leq 2Rr - d_1^2 - 2dd_1$

$\Leftrightarrow 3d_1^2 - 2dd_1 + 2Rr - 4r^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow 3\left(d_1 - \frac{d}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}(6Rr - 12r^2 - d^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow 3\left(d_1 - \frac{d}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}(6Rr - 12r^2 - R^2 + 2Rr) \geq 0$

$\Leftrightarrow 3\left(d_1 - \frac{d}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}(R-2r)(R-6r) \geq 0$

Điều này đúng vì $2r \leq R \leq 6r$. Vậy (3) đúng, dẫn đến (1) đúng.

Tóm lại $DE \geq 2MN$.

Đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều và DE là đường kính đường tròn ngoại tiếp.

Nhận xét. 1. Đa số các bạn dùng hệ thức Ơle để làm bài này. Tuy nhiên đa số chứng minh đều phụ thuộc vào hình vẽ, thiếu chặt chẽ.

2. Hai bạn *Lê Việt Hưng*, 7A3, THCS Quang Trung, **Thanh Hóa** và *Nguyễn Thành Phúc*, 9A, THCS Tây Đô, Vĩnh Lộc, **Thanh Hóa** có lời giải tốt.

VŨ KIM THỦY

Bài T8/311. *Mỗi quân cờ đôminô gồm hai hình vuông có 1 cạnh chung, trong hình vuông thứ nhất và thứ hai ghi x và g dấu chấm, được kí hiệu là (x, y) hoặc (y, x). Với mỗi cặp số (x, y) (cũng viết là (y, x)) chỉ có 1 quân cờ. Chia tập hợp các quân cờ mà $1 \leq x \leq 5$ và $1 \leq y \leq 5$ ra thành 3 nhóm, mỗi nhóm xếp thành chuỗi khép kín dạng*

a	b	b	c	c
a	e	e	d	d

trong đó các số a, b, c, d, e không nhất thiết khác nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chia nhóm như thế ?

Lời giải. Ta gọi quân cờ (quân đô–mi–nô) dạng (x, x), $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ là quân đúp. Dễ thấy mỗi nhóm không thể có ba quân đúp. Do đó có một nhóm, gọi là nhóm 3, chứa đúng một

quân đúp (e, e) và hai nhóm kia mỗi nhóm có chứa hai quân đúp.

Nhóm 1 chứa hai quân đúp (a, a), (b, b)

Nhóm 2 chứa hai quân đúp (c, c), (d, d)

với a, b, c, d, e phân biệt $\in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Số cách chia tập $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ thành 3 nhóm mỗi nhóm có 1 phần tử, hai nhóm kia mỗi nhóm có 2 phần tử là $\frac{5!}{2!2!1!} \cdot \frac{1}{2!} = 15$.

Nhóm 1 có dạng

a	a	a	b	b	
a	x	x	b	b	

(1) với $x \neq a, b$.

Nhóm 2 có dạng

c	c	c	d	d	
c	y	y	d	d	

(2) với $y \neq c, d$.

(do chuỗi khép kín nên có thể chuyển chỗ quân cờ theo chiều kim đồng hồ về dạng trên).

Ta thấy số e phải thuộc vào một trong hai nhóm trên. Chẳng hạn nếu $y = e$ thì dễ thấy $x \in \{c, d\}$ và khi đó nhóm 3 hoàn toàn được xác định như sau

e	e	e	a	a	
e	b	b	t	t	

với $t \neq x$

$t \in \{c, d\}$

(tức là nếu $x = c$ thì $e = d$, nếu $x = d$ thì $e = c$)

Như vậy có 4 cách chọn dạng (1) (2) : cụ thể $y = e, x \in \{c, d\}$ và $x = e, y \in \{a, b\}$.

Do đó có cả thảy $15.4 = 60$ cách chia nhóm.

Nhận xét. Các bạn sau đây đã làm đúng (mặc dầu giải còn dài dòng hoặc lý luận chưa thật rõ ràng sáng sủa) :

Lê Đình Huy, 10 Toán, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương** , *Đỗ Hoàng Huy*, 11T, THPT Lương Văn Tụy, **Ninh Bình**, *Nguyễn Hữu Tân*, 11T, PTNK, ĐHQG **Tp. Hồ Chí Minh** ; *Nguyễn Hoàng Thanh*, 12A1, PTCT ĐHSP **Hà Nội** ; *Trần Tấn Liêm*, 11A1, THPT Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng** ; *Lê Phương*, 12T, THPT Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**, *Mạch Nguyệt Minh*, 12A, THPT Lý Tự Trọng, **Cần Thơ**, *Hoàng Ngọc Minh*, 12T, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**, *Phan Đình Phúc*, 10A1, THPT Phan Bội Châu, **Nghệ An**.

Phần lớn các lời giải gửi đến cho đáp số không đúng.

Dạng toán tổ hợp vẫn còn là điều thách thức đối với nhiều bạn.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/311. *Chứng minh rằng với mọi x thuộc* $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ *ta luôn có* $\sin x \leq \frac{4}{\pi}x - \frac{4}{\pi^2}x^2$. (1)

Lời giải. Xét hàm số :

$$f(x) = \sin x - \frac{4}{\pi}x + \frac{4}{\pi^2}x^2 ; x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad (2)$$

Ta có $f'(x) = \cos x - \frac{4}{\pi} + \frac{8}{\pi^2}x$ và

$$f''(x) = -\sin x + \frac{8}{\pi^2}$$

Suy ra $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \arcsin\frac{8}{\pi^2} = b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Vậy $f'(x)$ là hàm số liên tục và đồng biến trên $[0; b]$, nghịch biến trên $\left[b, \frac{\pi}{2}\right]$.

Đồng thời, ta lại có $f'(0) < 0$ và $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ nên $f'(0).f'(b) < 0$, do đó tồn tại duy nhất số thực $c \in (0; b)$ để $f'(c) = 0$.

Ta có bảng biến thiên :

x	0		c		$\pi/2$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	0

Suy ra $f(x) \leq 0, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ hoặc $x = \frac{\pi}{2}$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Cách giải trên là cách giải phổ biến của rất nhiều bạn. Sau đây là những bạn có lời giải tốt.

Thân Ngọc Thành, Nguyễn Tuyết Mai, 10A, THPT NK Ngô Sĩ Liên, **Bắc Giang** ; *Nguyễn Phúc Thọ*, 10T, THPT Lê Quý Đôn, **Bình Định** ; *Nguyễn Tiến Dũng*, 9A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà, **Hải Dương** ; *Lê Đình Huy, Phạm Văn Toàn, Phạm Văn Dũng*, 10 Toán, *Nguyễn Thị Mai*, 11 Toán, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương** ; *Nguyễn Ngọc Tú, Nguyễn Trọng Hòa*, 11T, *Nguyễn Phương* Tuấn, 12T1, THPT Lam Sơn, **Thanh Hóa** ; *Phạm Việt Đức*, 10A chuyên Lí, *Đinh Nhật Minh*, 10A1 Tin, ĐHKHTN – ĐHQG, **Hà Nội** ; *Bùi Đăng Lương*, 11A1, THPT Phan Bội Châu, Vinh,. *Trần Thanh Luân*, 12C3, THPT Nghĩa Đàn, **Nghệ An** ; *Bùi Mạnh Cường*, 12A, THPT Lê Quý Đôn, **Hà Tĩnh** ; *Cao Hoàng Tân*, 11A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, *Lê Đỗ Tuấn Khanh*, 12Toán, *Nguyễn Đình Hiển*, 11 Toán, THPT Lê Hồng Phong, **Tp. HCM** ; *Lê Đắc Hải*, 10L2, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông, **Hà Tây** ; *Nguyễn Trường Khoa*, 12 Toán, THPT Thăng Long, Đà Lạt, **Lâm Đồng** ; *Nguyễn Văn Phi*, 12 Lý, THPT Lê Hồng Phong, *Nguyễn Cảnh Minh*, 12E, THPT Nguyễn Huệ, **Nam Định** ; *Phạm Duy Thành*, 11 Toán, NK Trần Phú, **Hải Phòng** ; *Hoàng Việt*, 11A, THPT Lào Cai, **Lào Cai** ; *Lê Hải Dương*, 11B, THPT Hải Lăng, *Hoàng Tiến Trung*, 12 Toán, THPT Lê Quý Đôn, **Quảng Trị** ; *Mạch Nguyệt Minh*, 12A1, THPT Lý Tự Trọng, **Cần Thơ** ; *Lê Hoài*

Nam, 10A1, *Lê Minh Thắng*, 12A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc** ; *Châu Văn Linh*, 11T, THPT Bến Tre, **Bến Tre** ; *Đỗ Quốc Khanh*, *Trương Minh Tiến*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/311. *Chứng minh rằng với mỗi tam giác ABC luôn có :*

$$\sqrt{3} \le \frac{\cos(A/2)}{1+\sin(A/2)} + \frac{\cos(B/2)}{1+\sin(B/2)} + \frac{\cos(C/2)}{1+\sin(C/2)} < 2$$

Lời giải. Đặt

$$T = \frac{\cos(A/2)}{1+\sin(A/2)} + \frac{\cos(B/2)}{1+\sin(B/2)} + \frac{\cos(C/2)}{1+\sin(C/2)}$$

$$= \mathrm{tg}\left(\frac{\pi-A}{4}\right) + \mathrm{tg}\left(\frac{\pi-B}{4}\right) + \mathrm{tg}\left(\frac{\pi-C}{4}\right)$$

$$= \mathrm{tg}\left(\frac{B+C}{4}\right) + \mathrm{tg}\left(\frac{A+C}{4}\right) + \mathrm{tg}\left(\frac{A+B}{4}\right)$$

$$= \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$$

Ở đây $\alpha = \frac{B+C}{2}$; $\beta = \frac{A+C}{2}$; $\gamma = \frac{A+B}{2}$.

Chú ý $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ và $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, hay α, β, γ là ba góc nhọn của một tam giác nào đó. BĐT cần CM là : $\sqrt{3} \le T < 2$.

i) Chứng minh $T \ge \sqrt{3}$

Ta có $T^2 = \left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^2 \ge$

$$\ge 3\left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} + \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right) = 3$$

$\Rightarrow T \ge \sqrt{3}$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

ii) *Chứng minh* $T < 2$.

Vì $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ nên $0 < \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}, \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}, \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} < 1$. Do đó : $\left(1-\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\right)\left(1-\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\right) > 0$

$$\Leftrightarrow \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} <$$

$$< 1 + \left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} + \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right) - \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$$

$$\Leftrightarrow T < 2 - \left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}.\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\right) \Rightarrow T < 2.$$

Tóm lại : $\sqrt{3} \le T < 2$ (đpcm).

Nhận xét. 1) Để chứng minh $T < 2$ chúng ta còn có một số cách giải khác như sau :

*) Xét hàm số $f(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{2x}{\pi}$ trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Sau đó sử dụng PP đạo hàm chứng minh được $f(x) < 1$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, từ đó suy ra $T < 2$.

**) Áp dụng BĐT Pêtrovica (chẳng hạn, xem cuốn *500 bài toán chọn lọc về bất đẳng thức*, tập I của tác giả *Phan Huy Khải*) cho hàm lồi : $g(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x}$ trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) Các bạn sau có lời giải tốt

Hà Nội : *Lê Hùng Việt Bảo*, 11A, *Nguyễn Trường Thọ*, 11A1, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội, *Đỗ Hoàng Khiêm*, 10A2, *Nguyễn Hoàng Thanh*, *Nguyễn Chí Hiệp*, 12A1, khối PTCTT–ĐHSP Hà Nội ; **Hải Phòng :** *Nguyễn Vũ Lân*, 9A, *Bùi Tuấn Anh*, 10T, *Phạm Minh Hằng*, *Bùi Phương Hoa*, 11T, THPT NK Trần Phú ; **Bắc Giang :** *Nguyễn Tuyết Mai*, *Thân Ngọc Thành*, 10A, THPT NK Ngô Sĩ Liên, *La Văn Thịnh*, 11A1, THPT số 2, Hiệp Hòa; **Bắc Ninh :** *Chu Đức Đạo*, *Nguyễn Văn Tuấn*, 10 Toán, THPT NK Hàn Thuyên, *Nghiêm Văn Thơ*, 11A1, THPT Yên Phong I ; **Thái Nguyên :** *Vũ Thành Nhân*, 12 Toán, THPT chuyên Thái Nguyên ; **Vĩnh Phúc :** *Phạm Văn Hoàng*, 11A1, THPT ch. Vĩnh Phúc ; **Phú Thọ :** *Lê Việt Hà*, 11A1, *Hoàng Ngọc Minh*, 12A1, THPT chuyên Hùng Vương ; **Hòa Bình:** *Đặng Phùng Hưng*, 10T, *Vũ Hữu Phương*, 12T, THPT Hoàng Văn Thụ, Tx. Hòa Bình; **Hải Dương :** *Lê Đình Huy*, *Trần Quốc Hoàn*, 10T, *Nguyễn Thị Thanh Hằng*, 11T, THPT Nguyễn Trãi, *Phạm Việt Hải*, 11A4, THPT Hồng Quang ; **Ninh Bình :** *Đỗ Hoàng Huy*, 11T1, THPT Lương Văn Tuỵ ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Ngọc Tú*, 11T, *Dương Trọng Cường*, 12I, THPT Lam Sơn ; **Nghệ An :** *Từ Việt Tiệp*, 12B2, khối PTCTT – ĐH Vinh, *Nguyễn Đức Minh*, 10A1, *Bùi Đăng Lương*, 11A1, THPT Phan Bội Châu ; **Bình Định :** *Nguyễn Phúc Thọ*, 10T, THPT Lê Quý Đôn ; **Phú Yên :** *Phan Thành Nam*, 12T2, THPT chuyên Lương Văn Chánh ; **Đồng Nai :** *Lê Phương*, 12T1, THPT chuyên Lương Thế Vinh ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Trần Minh Hoàng*, 10T, PTNK ĐHQG Tp. HCM.

HỒ QUANG VINH

Bài T11/311. *Tứ giác lồi ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Hai đường thẳng BC và AD cắt nhau tại I. Hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại J. Chứng minh rằng AB.CD = AD.BC khi và chỉ khi IJ cùng với một đường chéo của ABCD là hai cạnh đối của một tứ giác nội tiếp.*

Lời giải. Với bốn điểm A, B, C, D đôi một khác nhau, ta có : $AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ (chứng minh dành cho bạn đọc).

Trở lại bài toán của ta :

Thuận : $AB.CD = AD.BC$ và $AC \perp BD$

$\Rightarrow AB^2 + CD^2 + 2AB.CD = AD^2 + BC^2 + 2AD.BC$

$\Rightarrow (AB + CD)^2 = (AD + BC)^2$

$\Rightarrow AB + CD = AD + BC$.

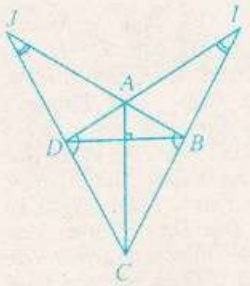
Kết hợp với $AB.CD = AD.BC$ nên

$$\begin{cases} AB = AD \\ CB = CD \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} DA = DC \\ BA = BC \end{cases}$$

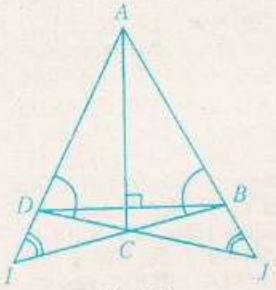
$\Rightarrow AC$ là trung trực của BD (h.1, h.2) hoặc BD là trung trực của AC (h.3, h.4).

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ hoặc $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} \Rightarrow \widehat{BID} = \widehat{BJD}$

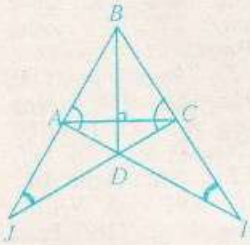
$\Rightarrow IJ$ và một đường chéo của tứ giác $ABCD$ là hai cạnh đối của một tứ giác nội tiếp.



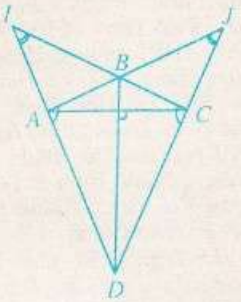
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

Chú ý rằng hệ thức $\widehat{BID} = \widehat{BJD} = \alpha$ xảy ra khi I, J cùng thuộc một cung tròn chứa góc α (lúc đó tứ giác $BDJI$ nội tiếp (h. 1) hoặc tứ giác $BDIJ$ nội tiếp (h. 2)) hoặc I, J thuộc hai cung tròn chứa góc α mà đối xứng nhau qua BD (lúc đó tứ giác $ACIJ$ nội tiếp (h. 3) hoặc tứ giác $ACJI$ nội tiếp (h. 4)).

Đảo : Giả sử $AC \perp BD$ và $BDIJ$ là tứ giác nội tiếp (h. 2) thì $\widehat{BID} = \widehat{BJD} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ (1). Trên BD lấy điểm B' đối xứng với B qua trục AC thì $\widehat{AB'C} = \widehat{ABC}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra B' trùng với D. Vậy $BC = CD$ và $AB = AD$ nên $AB.CD = AD.BC$. Chứng minh tương tự khi $BDJI$, $ACIJ$, $ACJI$ là tứ giác nội tiếp.

Nhận xét. 1) Đề toán trước đây đúng với điều kiện cần (khi $BDIJ$ nội tiếp) nhưng không phải là điều kiện đủ, đề bài chưa chuẩn xác nên đã được sửa lại.

Tòa soạn xin lỗi tác giả và bạn đọc về điều này.

Vì chỉ vẽ một hình và thực hiện phép chứng minh chỉ trên hình vẽ đó nên đa số các bạn không nhận thấy sự cần thiết phải điều chỉnh đề toán.

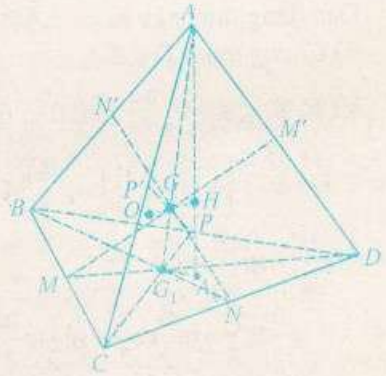
2) Ngoài cách giải trên, ta còn có thể giải nó nhờ khái niệm tích vô hướng của hai véctơ.

3) Các bạn sau có lời giải đúng và có nhận xét sửa đề bài : **Phú Thọ :** *Lê Bá Long*, 9A1, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Thọ Khiêm*, 10A10, *Hà Đình Thiệu*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, *Nguyễn Kim Thuật*, 8A THCS Yên Lạc ; **Bắc Ninh:** *Vũ Văn Tú*, 12 Toán, THPT NK Hàn Thuyên, *Nghiêm Văn Thơ*, 11A1, THPT Yên Phong I ; **Hải Dương :** *Phạm Trường Xuân*, 8/3, THCS Lê Quý Đôn, Tp. Hải Dương ; **Hải Phòng :** *Đinh Khang*, 9A, *Phạm Minh Hằng*, *Phạm Khoa Thu Hương*, 11 Toán, THPT NK Trần Phú ; **Nam Định :** *Nguyễn Đặng Phương Đỉnh*, 11I, THPT Giao Thủy A ; **Thanh Hóa :** *Trần Văn Thiện*, 11C5, THPT Như Thanh ; **Nghệ An :** *Trần Hoàng Đức*, *Nguyễn Đức Minh*, *Phan Đình Phúc*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh ; **Quảng Trị :** *Nguyễn Văn Việt*, 11 Toán, THPT Lê Quý Đôn, *Trần Minh*, 11A, THPT Hải Lăng ; **Đà Nẵng :** *Đỗ Quốc Khánh*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Quảng Nam :** *Nguyễn Anh Tâm*, 11/5, THPT Hoàng Diệu ; **Bình Định :** *Nguyễn Phúc Thọ*, 10T, THPT Lê Quý Đôn ; **Tp. HCM :** *Hồ Sĩ Tùng Lâm*, 11T2, *Nguyễn Lâm Hưng*, 12T, PTNK ĐHQG ; **Cần Thơ :** *Mạch Nguyệt Minh*, 12A1, THPT Lý Tự Trọng, Tp. Cần Thơ.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T12/311. *Tứ diện $ABCD$ có các đường cao đồng quy tại điểm H nằm bên trong tứ diện. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD, DB. Gọi R và R_1 lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ và $HMNP$. Chứng minh rằng : $R = 2R_1$.*

Lời giải. (*Vũ Hữu Phương*, 12CT, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**). Gọi G, O theo thứ tự là trọng tâm và tâm mặt cầu $\mathscr{C}(ABCD)$ ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.



a) Giả sử O_1, G', A_1 lần lượt là hình chiếu (vuông góc) của O, G, H trên mp(BCD) ; thế thì A_1, G' và O_1 tương ứng là trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và chúng thẳng hàng (trên đường thẳng Ơ-le của ΔBCD). Từ tính chất của trọng tâm của tứ diện

$(\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG_1})$, trực tâm tam giác $(\overrightarrow{O_1A_1} = 3\overrightarrow{O_1G_1})$ và định lí Ta-let ta được :

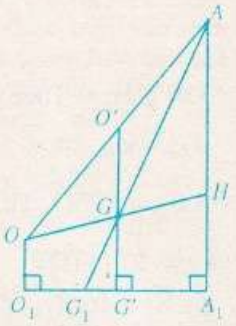
$$\frac{\overline{GH}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{G'A_1}}{\overline{O_1A_1}} = \frac{2\overline{G'A_1}}{3\overline{G_1A_1}}$$

$$= \frac{2}{3}\frac{\overline{GA}}{\overline{G_1A}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH}$$

$$\Rightarrow H = Đ_G(O)$$

với $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$ (1)



b) Từ (1) suy ra : Nếu gọi M', N' và P' lần lượt là trung điểm của AD, AB và AC thì tứ diện $OM'N'P'$ là ảnh của tứ diện $HMNP$ qua phép đối xứng tâm $Đ_G$.

$Đ_G : [HMNP] \to [OM'N'P'] \Rightarrow Đ_G : \mathscr{C}_1(HMNP) \to \mathscr{C}'_1(OM'N'P')$ (2) trong đó $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}'_1(...)$ kí hiệu mặt cầu ngoại tiếp.

Gọi O' là trung điểm của đoạn OA, thế thì : $AO' = O'O = \frac{1}{2}OA = \frac{R}{2}$. Phép vị tự $V_A^{1/2}$ biến tứ diện $ADBC$ thành tứ diện $AM'N'P'$ và biến O thành O', và do đó, biến mặt cầu $\mathscr{C}(ABCD)$ thành mặt cầu $\mathscr{C}'(AM'N'P')$ tâm O' bán kính $R' = R/2$. Ta được $OO' = O'M' = O'N' = O'P' = R/2$ và do đó tứ diện $OM'N'P'$ cũng nội tiếp mặt cầu $\mathscr{C}'(AM'N'P')$. Vậy là :

$V_A^{1/2}(\mathscr{C}(ADBC)) = \mathscr{C}'(AM'N'P') =$

$= \mathscr{C}'_1(OM'N'P')$ mà $\mathscr{C}'_1(OM'N'P')$ và $\mathscr{C}_1(HMNP)$ có cùng bán kính R_1 theo (2) nên ta có $R = 2R_1$.

Nhận xét. 1) Bài này có hai nhóm lời giải :

a) *Sử dụng tính chất của tứ diện trực tâm.* $H = Đ_G(O)$ (đây là một bài tập trong cuốn "*Tuyển tập 340 bài toán hình học không gian*" của tác giả I. F. Sarưgin). Để CM tính chất đó cũng có nhiều cách giải : sử dụng phép chiếu như lời giải trên ; PP véctơ hay PP hình hộp ngoại tiếp tứ diện. Bạn *Dương Đỗ Nhuận*, 10A2, ĐHKHTN – ĐHQG **Hà Nội** đã dùng tính chất này và tính chất trọng tâm tứ diện CM được A_o, G_1, H thẳng hàng (theo định lí Mênêlauyt đảo), với $A_o = Đ_o(A)$, sau đó áp dụng định lí Mênêlauyt thuận vào ΔOA_oH và cát tuyến G_1GA được $\overrightarrow{G_1A_o} = 2\overrightarrow{G_1H}$. Kết hợp giả thiết có $V_{G_1}^{-\frac{1}{2}} : [A_oDBC] \to [HMNP]$, suy ra đpcm.

b) *Sử dụng tính chất trực tâm tam giác* (ΔBCD). Gọi A_2 là giao điểm của tia AH với mặt cầu (O) ; D_1, B_1, C_1, F là các điểm đối xứng của A_1 lần lượt qua M, N, P, CD thì tứ diện $A_2D_1B_1C_1$ là ảnh tứ diện $HMNP$ trong phép đồng dạng (nghịch) f mà f là tích của phép vị tự V_A^2 và phép đối xứng mặt $Đ_{(BCD)}$ qua mp(BCD). Vậy mặt cầu (O) là ảnh của mặt cầu $(HMNP)$ qua phép đồng dạng đó. Bởi vậy $R = 2R_1$.

2) Ngoài các bạn kể trên, các bạn sau có lời giải tốt và khá gọn :

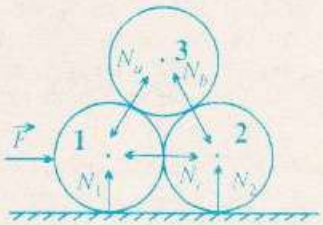
Hà Nội : *Nguyễn Trường Thọ*, 11A1, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội ; **Phú Thọ :** *Đinh Đức Thành*, 10T, *Lê Việt Hà*, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì ; **Hải Dương :** *Phạm Việt Hải*, 11A4, THPT Hồng Quang; **Hải Phòng :** *Lê Hải Yến*, 12T, THPT NK Trần Phú ; **Quảng Bình :** *Lê Đức Anh*, 11T, THPT chuyên Quảng Bình ; **Quảng Trị :** *Trương Song Hào*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Thừa Thiên – Huế :** *Ngô Phước Nguyên Ngọc*, 11T, Quốc học Huế ; **Đà Nẵng :** *Đỗ Quốc Khánh*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Đồng Nai :** *Lê Phương*,12T1, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Tp. Biên Hòa ; **Cần Thơ :** *Mạch Nguyệt Minh*, 12A1, THPT Lý Tự Trọng, Tp. Cần Thơ ; **Vĩnh Long :** *Võ Minh Tâm*, 11T1, THPT ch. Nguyễn Bỉnh Khiêm, Tx. Vĩnh Long.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài L1/311. *Ba hình trụ giống hệt nhau được bố trí như hình vẽ. Khối lượng mỗi hình trụ là M = 10kg. Bỏ qua ma sát ở mọi mặt tiếp xúc. Hai hình trụ 1 và 2 đặt trên sàn nằm ngang.*

Ban đầu giữ cho các hình trụ đứng yên và tiếp xúc nhau. Người ta buông tay và đồng thời tác dụng một lực $\vec{F}$ theo phương ngang vào hình trụ 1. Hãy xác định độ lớn của F để các hình trụ luôn tiếp xúc nhau. Lấy $g = 10m/s^2$.

Giải. Các lực tác dụng lên các hình trụ (trừ trọng lực) được biểu diễn trên hình.



+ Khi lực $\vec{F}$ có độ lớn nhỏ hơn một giá trị giới hạn F_{min} thì giữa hình trụ 1 và 2 sẽ mất tiếp xúc, hay $N_C = 0$. Áp dụng định luật II Niutơn cho hình trụ 2, xét theo phương ngang ta có :

$$Ma_{min} = N_b\sin30^o = \frac{N_b}{2} \quad (1)$$

Áp dụng định luật II Niutơn cho hình trụ 1, xét theo phương ngang và phương thẳng đứng, ta lần lượt có :

$Ma_{min} = F - N_a\sin30^o$ (2) ; và $Mg = N_b\cos30^o + N_a\cos30^o$ (3).

Ngoài ra, ta còn có (xét cả hệ) : $3Ma_{min} = F$ (4)

Từ (1), (2), (3) và (4) tìm được :

$$F = 3Ma_{min} = F_{min} = \frac{Mg}{\sqrt{3}} = \frac{100\sqrt{3}}{3} \text{ (N)}$$

+ Khi độ lớn của $\vec{F}$ lớn hơn giá trị giới hạn F_{max} thì giữa hai hình trụ 2 và 3 sẽ mất tiếp xúc, hay $N_b = 0$. Áp dụng định luật II Niutơn cho hình trụ 3, xét theo phương ngang và phương thẳng đứng ta lần lượt có :

$Ma_{max} = N_a\sin30^o$ (5), và $Mg = N_a\cos30^o$ (6)

Từ đó, tìm được : $a_{max} = \frac{g}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow F_{max} = 3Ma_{max} = 100\sqrt{3}$ (N).

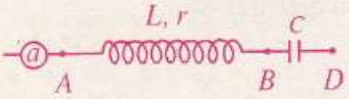
Vậy độ lớn của $\vec{F}$ phải thỏa mãn điều kiện :

$\frac{100\sqrt{3}}{3} < F < 100\sqrt{3}$ (N) hay 57,7N<F<173,3N.

Nhận xét. Các bạn có lời giải và đáp số đúng : **Bình Định :** *Lê Văn Thông*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quy Nhơn ; **Đắc Lắc :** *Lưu Xuân Bách*, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột ; **Hà Tây :** *Đào Xuân Dũng*, 11 Lí 1, *Lê ĐắcHải*, 10L2, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông ; **Thanh Hóa :** *Lê Thế Anh*, 9A1, THCS Trần Mai Ninh, Tp. Thanh Hóa ; **Nghệ An :** *Thái Bá Sơn*, K30, A3, *Võ Hoàng Biên*, K31, chuyên Lí, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Thị Ngọc*, 11A2, *Trần Văn Dũng*, 12A4, THPT Xuân Hòa, Mê Linh, *Nguyễn Thị Phương Dung*, 11A3, THPT ch. Vĩnh Phúc.

MAI ANH

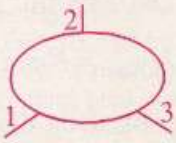
Bài L2/311. *Một mạch điện AD gồm một cuộn cảm L có điện trở thuần r và một tụ điện C (hình vẽ). Đặt vào A và D một hiệu điện thế xoay chiều ổn định :*



$u = U\sqrt{2}\sin100\pi t$, thì thấy $u_{AB} = u_{BD} = U$ và số trỏ của ampe kế là I.

a) Hãy xác định L và r, cho biết $C = (100/\pi)\mu F$.

b) Cho đoạn mạch ABD vào một hộp kín với các đầu A, B, D chìa ra ngoài nhưng quên không đánh dấu đầu nào là A, là B, là D nên phải đánh dấu lại một cách bất kì là 1, 2 và 3. Đấu nguồn xoay chiều nói trên với hai đầu 2 và 3 qua một tụ điện C_1 ($C_1 > C$), thì thấy ampe kế a trỏ giá trị I_1 ($I_1 > I$). Cặp đầu (2, 3) ứng với cặp đầu nào trong số các cặp (A, B) (A, D) (B, D) ?



c) Đấu nguồn xoay chiều nói trên với hai đầu 1, 2 qua một tụ điện C_1 nói trên thì ampe kế a trỏ giá trị I_2, sau đó đấu nguồn xoay chiều với hai đầu 1,3 qua tụ điện C_1 thì ampe kế a trỏ giá trị I_3 và thấy $I_3 > I_2$. Hỏi mỗi đầu 1, 2, 3 ứng với đầu nào trong số các đầu A, B, D.

Lời giải. a) Theo đề bài, ta có :

$$Z_{AB} = Z_{BD} \Rightarrow r^2 + (Z_L - Z_C)^2 = r^2 + Z_L^2 = Z_C^2$$

với $Z_C = 100\Omega$. Từ đó, tìm được : $L = \frac{1}{2\pi}$ (H)

và $r = 50\sqrt{3}$ (Ω)

b) Kí hiệu Z_{23}, Z_{12}, Z_{13} là tổng trở của đoạn mạch tạo ra khi lần lượt đấu nguồn xoay chiều với hai đầu (2, 3), (1, 2) và (1, 3) qua C_1. Ta có : $I_1 > I \Rightarrow Z_{23} < Z_{AD} = 100$ (Ω) (1)

+ Nếu (2, 3) ứng với (*A, D*) thì

$$Z_{23} = \sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C - Z_{C_1})^2}$$

$\Rightarrow Z_{23} = \sqrt{10^4 + 100Z_{C_1} + Z_{C_1}^2} > 100\Omega$, không thỏa mãn (1) : loại ;

+ Nếu (2, 3) ứng với (*B, D*) thì $Z_{23} = Z_C + Z_{C_1} > 100\Omega$: loại.

Vậy (2, 3) ứng với (*A, B*), và do đó (1) ứng với *D*.

c) Theo đề bài $I_3 > I_2 \Rightarrow Z_{13} < Z_{12}$ (2)

Nếu (1, 2) ứng với (*D, A*) và (1, 3) ứng với (*D, B*) thì $Z_{13} = Z_C + Z_{C_1} = 100 + Z_{C_1}$; $Z_{12} = \sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C - Z_{C_1})^2} = \sqrt{(100 + Z_{C_1})^2 - 100Z_{C_1}} < Z_{13}$: không thỏa mãn (2), loại. Vậy phải có (1, 2) ứng với (*D, B*) và (1, 3) ứng với (*D, A*). Nghĩa là đầu (2) ứng với *B*, và đầu (3) ứng với *A*.

Nhận xét. Các bạn có lời giải gọn và đúng :

Bắc Giang : *Hồ Năng Tân*, 11B, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; **Hải Dương :** *Mạc Trường Giang*, 11B5, THPT Nhị Chiểu, Kinh Môn ; **Nghệ An :** *Phạm Ngọc Trường*, K30A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh ; **Quảng Ngãi :** *Phạm Bá Tùng*, 11 Lí, THPT Lê Khiết ; **Ninh Bình :** *Trần Thị Tuyết Nhung*, 12A4, THPT chuyên Lương Văn Tụy ; **Thái Nguyên :** *Phạm Hồng Nam*, 11B6, PT Trung tâm Sông Công ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Tuấn Linh*, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Quảng Nam :** *Nguyễn Hữu Hiệp*, 11/1, THPT Trần Cao Vân, Tam Kỳ ; **Cần Thơ :** *Mạch Nguyệt Minh*, 12A1, THPT Lí Tự Trọng ; **Phú Thọ :** *Nguyễn Nhật Minh*, 12E, THPT Đoan Hùng, *Lê Việt Hà*, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì ; **Bình Định:** *Lê Văn Thông, Đinh Thành Vinh*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quy Nhơn ; **Bắc Ninh :** *Vũ Tuấn Linh*, 11 Lí, *Cao Xuân Bình*, 12 Lí, THPT NK Hàn Thuyên.

MAI ANH

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

NHỮNG ĐIỂM MỚI TRONG SÁCH GIÁO KHOA THÍ ĐIỂM ĐẠI SỐ 10

NGUYỄN HUY ĐOAN
(Chủ biên SGKTĐ Đại số 10)

Sách giáo khoa thí điểm Đại số 10 - bộ sách thứ nhất do GS Đoàn Quỳnh làm tổng chủ biên (sau đây viết tắt là ĐS10) ban KHTN (ban A) và ban KHXH&NV (ban C) được biên soạn theo chương trình thí điểm môn Toán THPT, ban hành theo Quyết định số 47 / 2002 / QĐ-BGD&ĐT ngày 19 - 11 - 2002 của Bộ trưởng Bộ GD – ĐT và theo những định hướng chung về đổi mới phương pháp dạy học. Do đó sách ĐS10 có nhiều điểm mới về nội dung cũng như về hình thức thể hiện so với các SGK trước đây. Tuy nhiên, trong phạm vi bài viết này, chúng tôi chỉ trình bày những điểm đáng chú ý nhất mà thôi.

1. Về nội dung kiến thức và mức độ yêu cầu

Sách ĐS10 gồm 6 chương với thời lượng (số tiết) dự kiến như sau :

Chương I - Mệnh đề, tập hợp (gồm cả tính gần đúng). Ban A : 13, ban C : 9.

Chương II - Hàm số bậc nhất và bậc hai. Ban A : 11, ban C : 8.

Chương III - Phương trình và hệ phương trình. Ban A : 16, ban C : 10.

Chương IV - Bất đẳng thức và bất phương trình. Ban A : 26, ban C : 15.

Chương V - Thống kê. Ban A : 9, ban C : 8.

Chương VI - Góc lượng giác và công thức lượng giác. Ban A : 12, ban C : 10.

Ôn tập và kiểm tra cuối năm. Ban A : 3, ban C : 2.

Tổng số : Ban A : 90 tiết, ban C : 62 tiết.

Như vậy, so với chương trình hiện hành (tổng số là 99 tiết), thời gian dành cho hai nội dung quan trọng là phương trình và bất phương trình giảm đi đáng kể trong khi có thêm hai nội dung mới là lượng giác và thống kê. Do đó, sách ĐS10 chỉ trình bày những vấn đề cơ bản nhất của nội dung chương trình ; còn những vấn đề sâu sắc hơn sẽ được đề cập trong các giáo trình tự chọn theo quy định. Dưới đây là một số điểm cụ thể :

Nội dung chương 1 so với trước đây không có gì thay đổi lớn ngoài việc phân tích sâu hơn vấn đề áp dụng mệnh đề vào suy luận toán học.

Điều thay đổi đáng chú ý của chương 2 là đề cao yêu cầu đọc đồ thị (tức là nhận biết một số tính chất của hàm số thông qua đồ thị của nó), và việc khảo sát hàm số bậc hai nhờ đồ thị (dùng tịnh tiến đồ thị để suy ra đồ thị của hàm số bậc hai rồi từ đồ thị suy ra các tính chất của nó).

Do số tiết học dành cho chương 3 và 4 giảm đi đáng kể so với chương trình hiện hành nên cả nội dung lẫn mức độ yêu cầu của chương này đều giảm, nhất là về phương trình và bất phương trình bậc hai. Chẳng hạn, không yêu cầu giải và biện luận các phương trình, bất phương trình cũng như các hệ phương trình và bất phương trình quy về bậc hai (ngoại trừ phương trình trùng phương đối với ban A). Riêng đối với ban C, chỉ đòi hỏi giải và biện luận phương trình bậc nhất và phương trình quy về bậc nhất như phương trình chứa ẩn ở mẫu và phương trình tích ; và không có các nội dung liên quan đến định lí đảo về dấu của tam thức bậc hai.

Chương 5 hệ thống những khái niệm ban đầu về thống kê mà học sinh đã làm quen ở lớp dưới. Ngoài ra còn cung cấp các khái niệm như phương sai, độ lệch chuẩn, các công thức tính, đặc biệt là ý nghĩa thực tế của các khái niệm này.

Chương 6 gồm những kiến thức mở đầu về lượng giác như các khái niệm : góc và cung lượng giác, các giá trị lượng giác của các góc lượng giác và những công thức lượng giác.

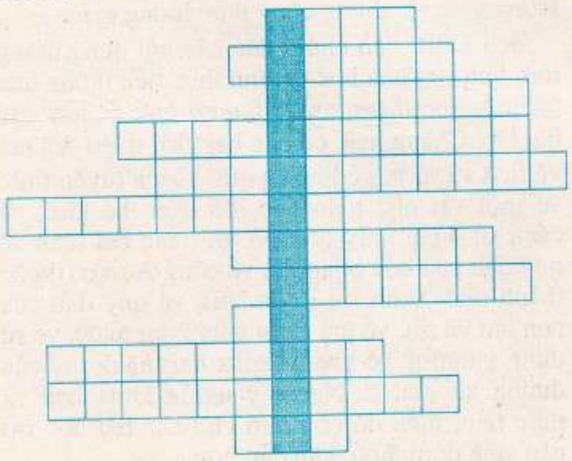
Sách ĐS10 còn chú ý đến các nội dung mang tính lịch sử khoa học và tính thực tiễn thông qua các *bài đọc thêm*, mục "*Em có biết ?*" hay các bài tập. Chẳng hạn, có các bài giới thiệu đôi nét về lịch sử số π, về lịch sử quy hoạch tuyến tính, về một vài nhà toán học lớn trên thế giới, về cách sử dụng máy tính bỏ túi ; các bài toán về quỹ đạo của quả bóng đá, về cổng Ac-xơ (thuộc thành phố Xanh Lu-i của Mĩ), về quỹ đạo của con tàu vũ trụ, về lựa chọn máy bơm nước, về sử dụng vitamin, về khe hở giữa hai thanh ray của đường xe lửa, ... Ngoài ý nghĩa khoa học và thực tiễn, điều đó còn làm cho các bài học trở nên sinh động hơn, hấp dẫn hơn.

(Xem tiếp trang 23)

Ô CHỮ NĂM THỨ 40 THTT

Bạn hãy điền các chữ cái (không dấu) hoặc số vào các ô theo gợi ý dưới đây, được xếp theo thứ tự các hàng. Cột dọc xanh sẽ là một trong các hoạt động tiến tới kỉ niệm 40 năm Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ (15.10.1964 - 15.10.2004)

- Tên viết tắt của tạp chí
- Tháng 10 này tạp chí bước sang ...
- Ấn phẩm này dành cho các bạn ...
- Tên của tạp chí bằng tiếng Anh bắt đầu bằng từ này.
- Đầu tiên, THTT đặt trụ sở tại phố ...
- Phần chính trong tên điện thư (email) của tạp chí.
- Tên tắt bạn đọc thường gọi THTT.
- Nếu dịch sang tiếng Anh, trong tạp chí gặp nhiều từ này.
- Ngày phát hành THTT tại Hà Nội.
- Chuyên mục THTT có từ số đầu tiên
- Địa chỉ hiện nay của THTT
- Nhiều bạn đọc của THTT đoạt giải kì thi này.



VKT

Kết quả :

BÀI TOÁN HỌ ĐƯỜNG THẲNG CẮT ĐOẠN THẲNG

Kết luận cuối cùng của lời giải bài toán là không chính xác. Nguyên nhân dẫn đến sai lầm của lời giải là với ĐK : $f(x_A, y_A).f(x_B, y_B) \le 0$ chỉ mới khẳng định được (D_m) không song song với AB. Vẫn có thể xảy ra khả năng : $f(x_A, y_A) = f(x_B, y_B) = 0$ (lúc đó (D_m) chứa đoạn thẳng AB đó). Các bạn cũng dễ nhận thấy rằng với $m = 4$ thì $A(-1, 3)$ và $B(1, -5)$ đều thuộc đường thẳng $(D_4) : 4x + y + 1 = 0$, nghĩa là $m = 4$ không thỏa mãn điều kiện đề bài. Một lời giải đúng cho bài này là :

Để (D_m) cắt đoạn AB thì phải có

$$\begin{cases} f(x_A, y_A).f(x_B, y_B) \le 0 \\ f^2(x_A, y_A) + f^2(x_B, y_B) \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ne 4.$$

Các bạn sau có lời phân tích sai lầm tốt hơn cả:

Hải Dương : *Phạm Thế Thính*, 12A1, THPT Kinh Môn ; **Thanh Hóa :** *Trần Văn Giáp*, 11B2, THPT Hoằng Hóa 4, Hoằng Hóa, *Trần Văn Thiện*, 11C5, THPT Như Thanh ; **Quảng Nam :** *Nguyễn Trung Hải, Nguyễn Văn Thư*, 11/1, THPT Sào Nam, Duy Xuyên.

NGỌC HIỂN

TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

Có một bài toán với nội dung như sau :

Cho họ đường tròn C_α ($\alpha \in [0, \pi]$) có PT :

$x^2 + y^2 - 2(\cos\alpha - 1)x - 2y\sin\alpha + 3 = 0$

Hãy tìm tập hợp tâm các đường tròn thuộc họ C_α?

Một học sinh đưa ra lời giải: Gọi $I(x_I, y_I)$ là tâm một đường tròn nào đó thuộc họ C_α. PT của C_α được viết lại dưới dạng

$$[x - (\cos\alpha - 1)]^2 + (y - \sin\alpha)^2 = -2\cos\alpha - 1$$

Từ đó : $\begin{cases} x_I = \cos\alpha - 1 & (1) \\ y_I = \sin\alpha & (2) \end{cases}$

Từ (1), (2) suy ra $(x_I + 1)^2 + y_I^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Vậy tập hợp tâm các đường tròn C_α là đường tròn có PT $(x+1)^2 + y^2 = 1$.

Học sinh đó kêu lên Ơ-rê-ka ! (tìm ra rồi !). Bạn có tìm ra đúng như thế không ?

NGUYỄN PHÚC
(Hà Nội)

NHỮNG ĐIỂM MỚI ... *(Tiếp trang 21)*

2. Về phương pháp và hình thức thể hiện

Về phương pháp và hình thức thể hiện các nội dung nêu trên, sách ĐS10 có các điểm đáng chú ý sau đây :

1) *Đề cao phương pháp trực quan* nhằm giảm bớt sự căng thẳng do phải tư duy trừu tượng quá nhiều và quá chặt chẽ. Chẳng hạn :

– Hầu hết các khái niệm đều được xây dựng từ ví dụ cụ thể, trực quan với mục đích chính là làm cho học sinh hiểu được khái niệm mà không yêu cầu học sinh phải thuộc và phát biểu chính xác khái niệm đó (các khái niệm về mệnh đề, tập hợp, thống kê, khái niệm góc và cung lượng giác, ...).

– Việc khảo sát sự biến thiên của hàm số bằng phương pháp đại số mặc dù có được giới thiệu, nhưng hầu hết các kết quả khảo sát các hàm số đều được suy ra từ đồ thị (điều này lí giải tại sao có nhiều bài tập yêu cầu học sinh vẽ đồ thị trước rồi mới suy ra sự biến thiên sau). Kể cả định lí về dấu của tam thức bậc hai cũng được suy ra từ đồ thị.

– Khuyến khích giáo viên sử dụng đồ dùng dạy học (có thể tự sáng tạo lấy) chẳng hạn để minh hoạ tính đối xứng của đồ thị, sự tịnh tiến đồ thị, ... Nếu có điều kiện, có thể sử dụng các phương tiện cao cấp như đèn chiếu, máy vi tính với phần mềm thích hợp.

2) *Tăng cường các hoạt động của học sinh* trong giờ học nhằm phát huy tính chủ động của học sinh trong việc tiếp thu bài học. Cụ thể là :

– Các tác giả bước đầu đã cố gắng đưa các hoạt động vào các tiết học (chỉ là gợi ý và kí hiệu bởi Hn) và khuyến khích giáo viên thực hiện bài giảng theo hướng : giáo viên chỉ là người tổ chức các hoạt động trên lớp, gợi ý, hướng dẫn học sinh tự tìm hiểu, tự khám phá, tự rút ra những kết luận khoa học. Các hoạt động trên lớp ở đây bao gồm : trả lời câu hỏi, bài tập thực hành, bài tập vận dụng, so sánh, nhận xét,... với nhiều mục đích khác nhau. Có hoạt động nhằm đi đến một khái niệm hoặc để rút ra một kết luận quan trọng, có hoạt động nhằm củng cố kiến thức hay hình thành kĩ năng. Đây là một phương pháp dạy học tiên tiến và phù hợp với điều kiện ở nước ta. Việc áp dụng phương pháp dạy học mới này chắc chắn còn cần nhiều thời gian thử nghiệm và nghiên cứu nữa mới có thể định hình ở Việt Nam.

– Những phương pháp nghiên cứu như : quan sát, phỏng đoán, kiểm nghiệm, ... là những phương pháp nghiên cứu đặc trưng của các môn khoa học thực nghiệm. Chúng cũng có tác dụng rèn luyện tính nhanh nhạy, óc suy luận lôgic trong toán học. Hơn nữa, các phương pháp này đôi khi vượt trội về sự dễ hiểu, tính thuyết phục và khả năng khắc sâu kiến thức cho học sinh. Do đó, các tác giả cũng đã sử dụng chúng để tiếp cận một số nội dung kiến thức trong sách.

3) *Kênh hình* trong sách ĐS10 cũng được chú ý hơn. Các hình sẽ góp phần làm giảm sự căng thẳng và gây hứng thú khi đọc sách. Hình cũng là một phương tiện truyền tải trực quan nội dung kiến thức và là cầu nối SGK với thực tiễn đời sống.

Tóm lại, các tác giả đã cố gắng thể hiện chương trình thí điểm đại số lớp 10 đã được Bộ duyệt sao cho nội dung và yêu cầu của sách ĐS10 nhẹ nhàng hơn, gắn với thực tiễn nhiều hơn, bớt hàn lâm hơn và góp phần vào việc đổi mới phương pháp dạy học trong nhà trường phổ thông ở nước ta hiện nay.

Giải đáp : TỔNG SỐ BẰNG NHAU

Tổng của các biểu thức trên 16 quân bài là $16p + 8q + 8r + 8s$. Do đó tổng mỗi hàng, mỗi cột mỗi đường chéo là $4p + 2q + 2r + 2s$. Bài toán có nhiều cách xếp. Sau đây là một ví dụ.

p	$p+s$	$p+r+s$	$p+2q+r$
$p+q+2r$	$p+q+s$	$2p$	s
$p+q$	r	$p+q+r+s$	$2p+s$
$p+2s$	$2p+q+r$	q	$p+r$

Các bạn được nhận quà của tòa soạn :

Nguyễn Minh Tú, 8A3, THCS Sông Đà, **Hòa Bình** ; *Mai Thanh Văn*, 110 Thạch Hãn, Thuận Hòa, Huế, **Thừa Thiên - Huế** ; *Trần Thanh Sơn*, 11/2 THPT Núi Thành, **Quảng Nam** ; *Nguyễn Trung Hải*, 11/1 THPT Sào Nam, Duy Xuyên, **Quảng Nam**.

VŨ THANH THÀNH

VIẾT SỐ NÀO ?

Tính viết vào bảng con trên bàn của mình một số có 4 chữ số kiểu chữ in Ả rập. Toán ngồi đối diện với Tính nhìn vào bảng cũng thấy một số có 4 chữ số. Biết rằng hiệu số của số mà Tính viết và số do Toán nhìn thấy có tổng các chữ số là 27. Các bạn có thể cho biết Tính đã viết số nào không ?

NGÔ HÂN
(Bắc Ninh)

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

NĂM THỨ 40
Số 315 (9-2003)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Nguyễn Phước – Phân tích một số đa thức bậc bốn thành nhân tử.

3 Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh lớp 10 trường THPT NK ĐHQG Tp. HCM.

4 Đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên toán trường THPT năng khiếu Trần Phú, Hải Phòng 2003.

6 *Nguyễn Cảnh Toàn* – Văn hóa toán học.

7 **Tiếng Anh qua các bài toán – English through Math Problems**
Bài số 64.

8 **Tìm hiểu sâu thêm toán học sơ cấp – Advanced Elementary Mathematics**
Nguyễn Mạnh Hùng – Phương pháp hệ số bất định trong một số bài toán tam giác lượng

10 **Đề ra kì này - Problems in this Issue**
T1/315, ..., T12/315, L1, L2/315

12 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 311

21 **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**
Nguyễn Huy Đoan – Những điểm mới trong sách giáo khoa thí điểm Đại số 10

22 **Câu lạc bộ – Math Club**
Sai lầm ở đâu – Where's the Mistake ?

23 **Giải trí toán học – Math Recreation**

Bìa 2 : **Lịch sử toán học – History of Math**
Emile Lemoine, kĩ sư khảo cứu tam giác

Bìa 3 : **Toán học muôn màu – Multifarious Mathematics** – Phân chia hình vuông thành các hình vuông

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN
Phó tổng biên tập :
NGÔ ĐẠT TỨ

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Giám đốc NXB Giáo Dục :
NGÔ TRẦN ÁI
Tổng biên tập NXB Giáo Dục :
VŨ DƯƠNG THỤY

Trưởng ban biên tập : NGUYỄN VIỆT HẢI. *Biên tập :* VŨ KIM THỦY, HỒ QUANG VINH
Trị sự : VŨ ANH THƯ. *Trình bày :* NGUYỄN THỊ OANH
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Tp. Hồ Chí Minh. ĐT : 08.8309049

ĐÓN ĐỌC THTT SỐ 316 (10/2003)

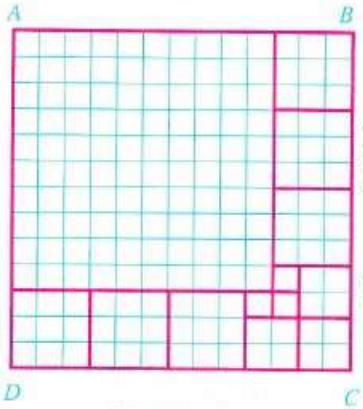
- Tại sao phương trình bậc 5 không giải được bằng căn thức ?
- Dùng phép hoán vị để mã hóa khi chuyển tin.
- Tìm giá trị biểu thức hình học dạng $ab \pm cd$
- Những sai lầm dễ mắc phải khi làm toán thi vào Đại học năm 2003.
- Kết quả *Cuộc thi Ai thông minh nhanh trí* 2003

Các bạn nhớ đặt mua THTT quý IV tại các cơ sở Bưu điện.

THTT

TOÁN HỌC MUÔN MÀU

PHÂN CHIA HÌNH VUÔNG THÀNH CÁC HÌNH VUÔNG



Hình 1

Ta thử phân chia một hình vuông $ABCD$ với các đường kẻ gồm 13×13 ô vuông thành k ($k > 1$) hình vuông nhưng chỉ được chia theo các đường kẻ sẵn. Dễ thấy giá trị lớn nhất của k là 169. Ở hình 1 chỉ ra một cách phân chia $ABCD$ thành $k = 13$ hình vuông, lúc đó $13^2 = 10^2 + 6.3^2 + 3.2^2 + 3.1^2$.

Dành cho bạn đọc

1) Bạn có bao nhiêu cách phân chia $ABCD$ thành $k = 12$ hình vuông ? (hai hình đối xứng qua trục chỉ coi là 1 cách).

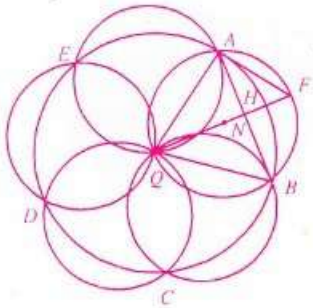
2) Bạn tìm được giá trị nhỏ nhất của k là bao nhiêu ?

GIẢI ĐÁP : HÌNH HOA HAI MÀU

Cho hình tròn tâm Q bán kính $QA = R = 50$(mm). Các hình tròn nhỏ bằng nhau đường kính $d = 2r$ (mm). (Nhiều bạn đã phát hiện ra đề bài in nhầm đơn vị đo).

a) Giả sử 4 hình tròn nhỏ đều đi qua điểm Q và lần lượt cắt đường tròn tâm Q tại từng cặp điểm A và B, B và C, C và D, D và A. Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AB = QA\sqrt{2} = R\sqrt{2} = 50\sqrt{2} \approx 70,71$(mm).

Để 4 hình tròn nhỏ đó phủ kín hình tròn tâm Q thì chúng phải có đường kính là $d = 2r = 70,8$ (mm).



Hình 2

b) Giả sử 5 hình tròn nhỏ đều đi qua điểm Q và cắt đường tròn tâm Q tại 5 điểm A, B, C, D, E (h. 2). Vì $ABCDE$ là ngũ giác đều thì $\widehat{AQF} = 36^o$. Từ đó $d = QF = \dfrac{QA}{\cos\widehat{AQF}} = \dfrac{50}{\cos 36^o} \approx 61,8034$ (mm). Nếu sắp xếp 5 hình tròn nhỏ như ở hình 2 mà muốn chúng phủ kín hình tròn tâm Q thì đường kính d phải lấy là $d = 61,9$ (mm).

c) Tuy nhiên nếu ta sắp xếp 5 hình tròn nhỏ đường kính $d = 61$mm như ở hình 3 thì chúng vẫn phủ kín hình tròn tâm Q.

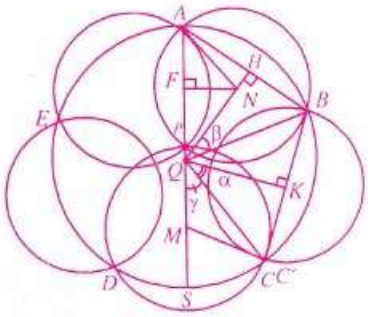
Đường tròn tâm K cắt đường tròn tâm Q tại B, C với $BC = 2r = 61$ (mm). Đường tròn tâm N cắt đường tròn tâm Q tại B, A và cắt đường kính AS tại P sao cho $AP = 47,20$, do đó $PQ = AQ - AP = 50 - 47,20 = 2,80$; $\sin\widehat{KQC} = \dfrac{KC}{QC} = \dfrac{BC}{2R} = 0,61 \Rightarrow \widehat{KQC} \approx \alpha = 37^o,589$ (1)

(viết trong hệ thập phân), lúc đó $\sin\alpha \approx 60,999$.

Từ $NF^2 = NA^2 - AF^2$ có $(2NF)^2 = (2r)^2 - AP^2 = 61^2 - 47,2^2 = 1493,16 \Rightarrow NF \approx 19,3207$; $QF = QP + AP/2 = 2,80 + 23,60 = 26,40$. Có $\text{tg}\widehat{NQF} = \dfrac{NF}{QF} \approx 0,7318 \Rightarrow \widehat{NQF} \approx \beta = 36^o,196$ (2)

Từ (1) và (2) có $\widehat{SQC} = 180^o - (\widehat{AQB} + \widehat{BQC}) \approx 32^o,430$ (3)

Đường tròn tâm M (với M thuộc QS) đi qua P cắt đường tròn tâm Q tại C'. Ta có $QM = PM - PQ = 30,50 - 2,80 = 27,70$.



Hình 3

Áp dụng định lí hàm số côsin trong $\Delta QMC'$ có :

$$\cos\widehat{MQC'} = \frac{R^2 + QM^2 - r^2}{2QC'.QM} = \frac{50^2 + 27,70^2 - 30,5^2}{100.27,70} \approx 0,8437 \Rightarrow \widehat{MQC'} \approx \gamma = 32^o,467 \ (4)$$

Từ (3) và (4) lấy sai số đến 0,01 nên $\widehat{MQC'} > \widehat{MQC}$ suy ra 5 hình tròn nhỏ phủ kín hình tròn tâm Q.

Các bạn sau được nhận tặng phẩm :

1) *Nguyễn Văn Ngọc*, 9C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ, **Bắc Ninh**,

2) *Nguyễn Duy Huy*, 11 Lý 1, THPT Nguyễn Huệ, **Hà Tây**,

3) *Nguyễn Trung Hải*, 11/1, THPT Sào Nam, Duy Xuyên, **Quảng Nam.**

PHI PHI

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

LỄ KHÁNH THÀNH TRƯỜNG THCS PHÚ ĐÌNH, ĐỊNH HÓA, THÁI NGUYÊN

Hưởng ứng lời kêu gọi của Thủ tướng Chính phủ về việc kiên cố hóa trường học, dưới sự chỉ đạo của Bộ Giáo dục và Đào tạo, Nhà xuất bản Giáo dục cùng với Công ty Thiết bị Giáo dục 1 và Viện Nghiên cứu Thiết kế trường học đã đầu tư xây dựng một nhà học 2 tầng (10 phòng) tại trường THCS Phú Đình, huyện Định Hóa, tỉnh Thái Nguyên. Tổng nguồn vốn đầu tư khoảng 1,5 tỉ đồng, trong đó NXB Giáo dục đóng góp 50% vốn. Ngày 4/9/2003 đã tổ chức khánh thành công trình và khai giảng năm học mới của trường THCS Phú Đình. Tham dự lễ có : Ông Nguyễn Minh Hiển, Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo; Ông Đỗ Xuân Thụ, Vụ trưởng Vụ Tổ chức cán bộ và đại diện các Vụ, Viện thuộc Bộ GD&ĐT ; Ông Hứa Đức Nhị, Phó Bí thư Tỉnh ủy, Chủ tịch tỉnh ; Ông Nguyễn Bắc Son, Phó BT thường trực Tỉnh ủy ; Ông Nghiêm Đình Vỳ, Phó Trưởng ban Khoa giáo TƯ ; Ông Ngô Trần Ái, Giám đốc NXB Giáo dục ; các ông Phó Giám đốc NXB Giáo dục : Nguyễn Đăng Quang, Nguyễn Quý Thao, Nguyễn Xuân Hòa ; Ông Giám đốc Công ty Thiết bị Giáo dục 1 ; Ông Viện trưởng Viện Nghiên cứu Thiết kế trường học ; Ông Lê Duy Vy, Giám đốc Sở Giáo dục - Đào tạo tỉnh Thái Nguyên ; đại diện UBND huyện Định Hóa, xã Phú Đình, ...

Đây là tấm lòng, tình cảm chân thành của cán bộ công nhân viên NXB Giáo dục, Công ty Thiết bị Giáo dục 1, Viện Nghiên cứu Thiết kế trường học đối với nhân dân Định Hóa, nơi miền núi xa xôi còn gặp nhiều khó khăn, khu vực ATK thời kháng chiến chống Pháp, cái nôi của cách mạng Việt Nam.

TRANG WEB CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Địa chỉ: **http ://www.nxbgd.com.vn**

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

• Giới thiệu về NXBGD, cung cấp cho bạn đọc những thông tin chính thức về các định hướng, chủ trương của Bộ GD&ĐT, của NXBGD về công tác xuất bản, phát hành sách giáo dục. Thường xuyên cập nhật những thông tin mới nhất có liên quan đến sách giáo khoa, sách tham khảo và hoạt động của NXBGD. Các phóng viên có thể lấy thông tin từ đây cung cấp cho các báo.

• Giới thiệu một cách hệ thống các loại xuất bản phẩm của NXBGD. Danh mục sản phẩm với các thông tin chính về từng cuốn sách (tên sách, tác giả, số trang, khổ, giá bìa, tóm tắt nội dung, ...) được cập nhật thường xuyên và các công cụ tìm kiếm thuận tiện sẽ phục vụ tối đa nhu cầu tìm kiếm đa dạng của độc giả. *Từ nay bạn đọc có thể đặt mua hàng trên mạng và có thể nhận được sách qua đường bưu điện.* Bạn có thể truy cập vào website NXBGD để có những thông tin chi tiết hơn.

Được đưa lên mạng từ tháng 9/2001, website NXBGD ngày càng được cải tiến và trở nên khá quen thuộc với các thầy giáo, các em học sinh và bạn đọc quan tâm đến giáo dục. Hi vọng rằng website sẽ trở thành cầu nối giữa bạn đọc và NXBGD, đồng thời sẽ đáp ứng ngày càng tốt hơn nhu cầu thông tin cho bạn đọc.

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT17M3

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 187B phố Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2003

Giá : 3000đ
Ba nghìn đồng