BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

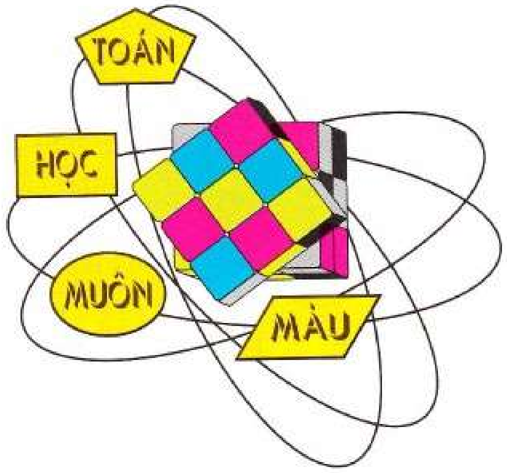
11 2004
SỐ 329

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 41
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187 B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT-Fax: (04) 5144272
Email: toanhoctt@yahoo.com

CÁC GIÁO VIÊN TOÁN

35 NĂM TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN NGOẠI NGỮ HÀ NỘI

Chào mừng ngày Nhà giáo Việt Nam



PHỦ MẶT PHẲNG bởi các ĐA GIÁC ĐỀU

Giải đáp :

PHỦ MẶT PHẲNG MÀ Ở MỖI ĐỈNH CHUNG CÓ 3 ĐA GIÁC

Giả sử ở mỗi đỉnh chung có 3 đa giác đều m, n, p cạnh là $\mathcal{D}_m$, $\mathcal{D}_n$, $\mathcal{D}_p$, (không xét trường hợp hai đa giác có đỉnh chung nằm trên cạnh của đa giác thứ ba), lúc đó độ dài các cạnh của $\mathcal{D}_m$, $\mathcal{D}_n$, $\mathcal{D}_p$ đều bằng nhau. Số đo góc trong của $\mathcal{D}_m$, $\mathcal{D}_n$, $\mathcal{D}_p$ lần lượt là (xem h.1) :

$$\alpha = 180^o\left(1-\frac{2}{m}\right),\ \beta = 180^o\left(1-\frac{2}{m}\right),$$

$$\gamma = 180^o\left(1-\frac{2}{p}\right)$$

Điều kiện để ba đa giác này có chung đỉnh và phủ kín mặt phẳng là $\alpha + \beta + \gamma = 360^o$ hay

$$\frac{2}{m}+\frac{2}{n}+\frac{2}{p} = 1 \text{ hay } \frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=\frac{1}{2} \qquad (1)$$

1) Giả sử $m > n > p \geq 3$ thì từ (1) có $\frac{1}{2}<\frac{3}{p}$ nên $p < 6$.

Nhận xét rằng có p đa giác $\mathcal{D}_n$ và $\mathcal{D}_m$ thay phiên nhau bao quanh đa giác $\mathcal{D}_p$ nên p phải là số chẵn (h. 1). Vậy chỉ xảy ra $p = 4$.

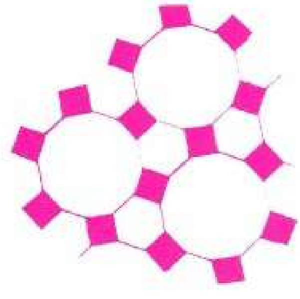
Hình 1

Từ (1) có $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{4}$.

Lại có $\frac{1}{4} < \frac{2}{n}$ nên $n<8$.

Tương tự trên vì có n đa giác $\mathcal{D}_p$ và $\mathcal{D}_m$ thay nhau bao quanh đa giác $\mathcal{D}_n$ nên n là số chẵn, suy ra $n = 6$, do đó $m = 12$.

Vậy nếu dùng *ba đa giác đều có m, n, p cạnh với $m > n > p$* để phủ mặt phẳng thì chỉ xảy ra một trường hợp là $p = 4$, $m = 6$, $m = 12$ (h. 2).



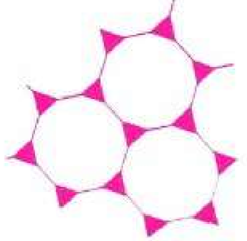
Hình 2

2) a) Giả sử có $m = n > p$ thì từ (1) có $\frac{2}{n}+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}$ (2)

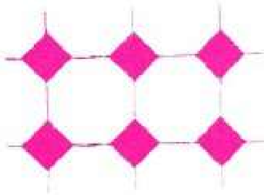
Từ đó có $\frac{1}{2}<\frac{3}{p}$ hay $p < 6$

Với $p = 3$ từ (2) có $n = 12$ (h. 3)

Với $p = 4$ từ (2) có $n = 8$ (h. 4)



Hình 3



Hình 4

Với $p = 5$ từ (2) suy ra số n không nguyên.

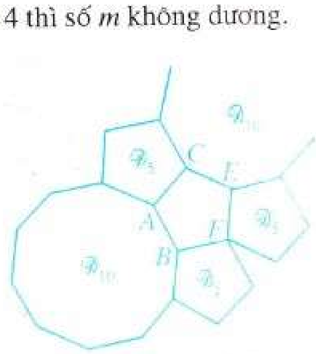
b) Giả sử có $m > n = p$ thì từ (1) có

$$\frac{1}{m}+\frac{2}{p}=\frac{1}{2} \qquad (3)$$

Từ đó có $\frac{1}{2}<\frac{3}{p}$ hay $p < 6$.

Với $p = 3$ hoặc $p = 4$ thì số m không dương.

Với $p = 5$ thì $m = 10$. Trên hình 5 ta thấy tại mỗi đỉnh A, B, C, E phải có đỉnh của hai đa giác đều 5 cạnh và một đa giác đều 10 cạnh, nhưng tại đỉnh F thì điều đó không thể xảy ra.



Hình 5

(Xem tiếp trang 4)

MỘT MÔ HÌNH CỦA FRACTAL CHO THCS

TRƯƠNG CÔNG THÀNH
(*NXB GD Hà Nội*)

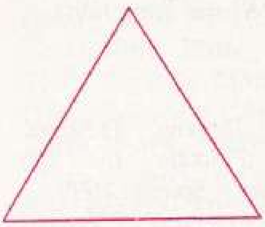
Theo cách hiểu hiện nay của nhiều nhà khoa học thì Fractal là *hình học của thế kỉ 21 – Hình học của kỉ nguyên tin học và các ứng dụng của nó vào cuộc sống thực là rất phong phú.*

Dưới đây, chúng tôi xin giới thiệu một đường cong, một ví dụ trong SGK của Hoa Kỳ và nhiều nước khác, một bài tập suy ra được từ SGK lớp 8 mới của Việt Nam.

Một trong những đặc trưng phổ biến của nhiều fractal là : người ta có thể phân chia chúng thành những thành phần nhỏ tùy ý, mỗi một bộ phận có *cấu trúc* y hệt như tổng thể. Như vậy, mỗi "bộ phận" chính là bản sao thu nhỏ của tổng thể fractal, theo ý tưởng ban đầu của Mandelbrot đó là những **hình tự đồng dạng**.

Một trong những khái niệm hết sức quan trọng của hình học lớp 8 mới là : chu vi, diện tích (xung quanh và toàn phần), thể tích... và các tính chất của hình đồng dạng (chương III – hình 8). Rõ ràng là, để nắm chắc và hiểu một cách thấu đáo những khái niệm này, người học cũng như người dạy cần có những khái niệm ban đầu về dãy và dãy hữu hạn... Thông qua một trong những mô hình của đường cong Vôn Cốc (Von Kock), bạn đọc có thêm những khái niệm và tự phát hiện, mở rộng những khái niệm đó trong không gian ba chiều, từ đó có cách nhìn lại về những khái niệm mới được học.

Tạo ra Bông tuyết Kock (tên nhà toán học Thụy Điển sáng tạo ra đường cong này)



$C_1 = 3\,;\, S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}.$

Hình 1

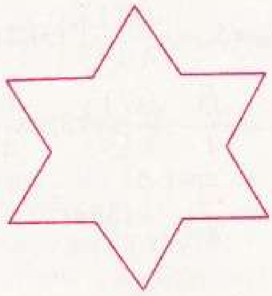
• Với một tam giác đều cạnh bằng 1 thì chu vi của nó là 3 và diện tích là $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (h.1). Ta viết $C_1 = 3$, $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

• Chia mỗi cạnh của hình đang xét ra thành ba phần bằng nhau, lấy phần giữa của mỗi cạnh và về phía ngoài của hình ban đầu dựng tam giác đều với cạnh là phần giữa rồi bỏ đi phần giữa đó (tức là cạnh của tam giác đều vừa dựng mà nằm trên cạnh của hình cũ) ta được hình mới.

Nếu hình đang xét có n cạnh thì hình mới có $4n$ cạnh.

Quy tắc biến đổi trên được gọi là *quy tắc sinh.*

Áp dụng quy tắc sinh đó với hình 1 ta được hình 2 có 12 cạnh.



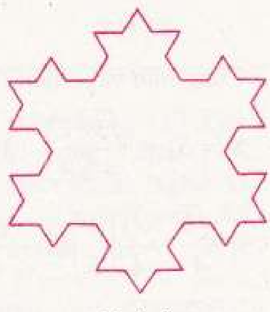
Hình 2

Ở hình 2, mỗi cạnh được thêm vào 1/3 nghĩa là chu vi được nhân thêm $1 + 1/3 = 4/3$. Như vậy, chu vi của hình 2 là:

$$C_2 = C_1 + C_1.\frac{1}{3} = C_1\left(\frac{4}{3}\right) = 3\left(\frac{4}{3}\right).$$

Mỗi một tam giác nhỏ có cạnh chỉ bằng 1/3 cạnh ban đầu, do đó diện tích mỗi tam giác mới theo quy tắc đồng dạng có diện tích bằng 1/9 diện tích của hình ban đầu. Như vậy diện tích của hình 2 là

$$S_2 = S_1 + S_1\left(\frac{1}{9}\right)(3)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)(3).$$



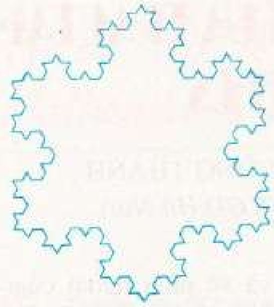
Hình 3

• Lặp lại quy tắc sinh nói trên đối với hình 2 ta được hình 3 có 48 cạnh.

Khi đó, chu vi và diện tích của hình 3 là :

$$C_3 = C_2 + C_2\frac{1}{3} = C_2\left(\frac{4}{3}\right) = 3\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = 3\left(\frac{4}{3}\right)^2.$$

$$S_3 = S_2 + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^2(3)(4) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)(3) + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^2(3)(4)$$



• Áp dụng quy tắc sinh đối với hình 3 ta được hình 4 có 192 cạnh.

Ở hình 4 công thức tính chu vi và diện tích sẽ là :

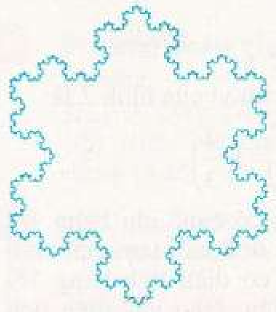
Hình 4

$$C_4 = C_3\left(\frac{4}{3}\right)=3\left(\frac{4}{3}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)=3\left(\frac{4}{3}\right)^3$$

$$S_4 = S_3 + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^3(3)(4)^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)(3)+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^2(3)(4) +$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^3(3)(4)^2$$



• Áp dụng quy tắc sinh đối với hình 4 ta được bông tuyết Von Kock ở hình 5 có 768 cạnh. Theo cách thiết lập công thức trên ta có chu vi hình 5 là

Hình 5

$$C_5 = C_4\left(\frac{4}{3}\right)=$$

$$=3\left(\frac{4}{3}\right)^3\left(\frac{4}{3}\right)=3\left(\frac{4}{3}\right)^4$$

Cũng như vậy, diện tích hình 5 là

$$S_5 = S_4 + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^4(3)(4)^3$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)(3)+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^2(3)(4) +$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^3(3)(4)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^4(3)(4)^3$$

• Tổng quát hóa, ở hình thứ n ($n > 1$) có 3.4^{n-1} cạnh với chu vi và diện tích như sau :

* Công thức tính chu vi : $C_n = 3\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

Do $\frac{4}{3} > 1$ nên C_n tăng lên vô hạn khi n tăng.

* Công thức tính diện tích :

$$S_n = \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)(3)+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^2(3)(4)$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^3(3)(4)^2+...+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}(3)(4)^{n-2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^2+...+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}\right]$$

• Gọi giới hạn của S_n là S. Ta tính S bằng cách áp dụng công thức sau với $q = \frac{4}{9} < 1$ rồi cho n dần tới vô hạn :

$$a+aq+aq^2+...+aq^n = a(1+q+q^2+...+q^n) = a.\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[1+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{4}{9}}\right]=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}:\frac{5}{9}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{3}{5}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{8}{5}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{5}<0{,}693$$

Không mấy khó khăn bạn đọc có thể khẳng định được bông tuyết Von Koch nằm trong hình lục giác đều có diện tích $S_d = S_\Delta = 6.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}<0{,}8661$.

Như vậy chu vi của bông tuyết *von Koch* thì tăng lên vô hạn cho dù diện tích nó hữu hạn và nhỏ hơn một đơn vị diện tích.

• Diện tích của hình thì dẫn đến một giới hạn còn chu vi của nó thì không !

Bằng cách tương tự bạn đọc trẻ tuổi có thể tự tạo ra những trò chơi hấp dẫn hoặc đưa ra các phản ví dụ hữu ích !

(Kì sau đăng tiếp)

Tài liệu tham khảo

1) H.O. Peitgen, H. Jürgens, D.Saupe, E.Maletsky, T.Perciante. Fractals for the Classroom : Strategic Activities – Spinger 1999.

2) Hoàng Chúng. Hình học Fractal là gì. Tạp chí THTT số 277 (7.2000)

3) Hoàng Chúng, Hoàng Quý, Hoàng Tụy - Tìm hiểu Fractal, một hình học mới lạ, NXBGD 2003.

ĐỀ THI GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH BỎ TÚI QUA TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

A. ĐỀ DÀNH CHO THCS (11.04)

Bài 1.CS. Tìm ƯCLN và BCNN của hai số $A = 1234566$ và $B = 9876546$.

Bài 2.CS. Tính giá trị của biểu thức

$$A = \frac{x^2(3y-5z+4)+2x(y^3z^2-4)+2y^2+z-6}{x(x^2+5y^2-7)+z^4+8}$$

tại $x = \frac{9}{4}$, $y = \frac{7}{2}$, $z = 4$.

Bài 3.CS. Tìm các số nguyên dương x và y sao cho $x^2 + y^2 = 2009$ và $x > y$.

Bài 4. CS. Tính gần đúng (độ, phút, giây) góc A của tam giác ABC biết rằng $AB = 15$cm, $AC = 20$cm và $BC = 24$cm.

Bài 5. CS. Tính gần đúng diện tích tam giác ABC biết rằng $\widehat{A} = \frac{1}{2}\widehat{B} = \frac{1}{4}\widehat{C}$ và $AB = 18$cm.

B. ĐỀ DÀNH CHO THPT (11.04)

Bài 1. PT. Tính giá trị của a, b, c nếu đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đi qua ba điểm $A(-7; 3)$; $B(14; 11)$; $C(3; -4)$.

Bài 2.PT. Tính gần đúng nghiệm (độ, phút, giây) của phương trình $2\sin x + 4\cos x = 3$.

Bài 3. PT. Tính gần đúng các nghiệm của phương trình $2^x + x^2 - 2x - 5 = 0$.

Bài 4. PT. Tính gần đúng diện tích tam giác ABC biết rằng $AB = 15$cm, $AC = 20$cm và $\widehat{B} = 80°$.

Bài 5. PT. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD của hình tứ diện $ABCD$, P là điểm trên cạnh CD sao cho $PD = 2PC$. Mặt phẳng (MNP) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của phần chứa đỉnh A và phần chứa đỉnh B.

• ***Quy ước :*** *Ghi phương pháp giải vắn tắt, công thức, phím bấm và kết quả của từng bài. Nếu kết quả là số hữu tỉ thì phải ghi kết quả dưới dạng số nguyên hoặc phân số. Nếu kết quả là số vô tỉ thì phải ghi kết quả dưới dạng số thập phân gần đúng có 10 chữ số.*

• *Nhận bài giải gửi trước ngày 10.12.2004 theo dấu Bưu điện. Các bạn học lớp 10 được dự thi phần THCS. Ghi rõ sử dụng máy tính loại nào. Ngoài phong bì ghi rõ : THI GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH BỎ TÚI tháng ... năm ...*

ĐIỀU LỆ CUỘC THI

I. MỤC ĐÍCH CUỘC THI

• Cuộc thi giải toán trên máy tính bỏ túi nhằm động viên, tạo điều kiện và mở rộng phong trào rèn luyện kĩ năng tính toán cho học sinh, một trong những yêu cầu của nội dung giáo dục toán học trong trường phổ thông.

• Cuộc thi yêu cầu giải toán thực hành trên máy tính bỏ túi, đòi hỏi việc vận dụng toán học để thiết lập một dãy liên tiếp các bước tính toán hợp lí trên máy tính qua hình thức gửi thư. Điều này cũng góp phần phát hiện các học sinh có năng khiếu về thực hành kĩ năng tính toán.

• Cuộc thi tạo mối liên hệ giữa học sinh, giáo viên các vùng miền và để nhiều học sinh đọc và học toán qua báo Toán học và Tuổi trẻ.

II. THỂ LỆ CUỘC THI

1. Cứ hai tháng một lần, đề thi được đăng trên tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. Có 5 bài dành cho Trung học Cơ sở và 5 bài dành cho Trung học Phổ thông. Thời gian nhận bài dự thi là trong 1 tháng tính từ ngày ra báo, không tính thêm điểm cho bài đến sớm. Đề thi bắt đầu đăng từ 11.2004.

2. Trường có từ 10 thí sinh tham gia trở lên và có xác nhận của Ban Giám hiệu thì được tham gia tính giải đồng đội.

3. Các máy tính khoa học phù hợp đều có thể được dùng. Khuyến khích sử dụng các máy SHARP EL–506W, EL–509W, EL–509WM đối với THPT và máy EL–500M đối với THCS.

III. ĐỐI TƯỢNG DỰ THI

1. Mọi học sinh đang học trong các trường THCS, THPT đều được tham gia.

2. Bài dự thi phải ghi đầy đủ (phía trên của tờ giấy) các thông tin sau :

Họ và tên : (Chữ in hoa)
Ngày tháng năm sinh :
Giới tính :
Nơi sinh :
Quê quán :
Học sinh lớp :
Trường (huyện, tỉnh) :
Năm học :
Bản phôtô thẻ học sinh : (trong lần gửi bài giải đầu tiên) hoặc chứng thực có dấu của nhà trường.
Ngoài phong bì đề rõ :
DỰ THI GIẢI TOÁN BẰNG MÁY TÍNH BỎ TÚI
(tháng ..., năm...)

IV. NỘI DUNG CÁC BÀI THI

Các bài toán phổ thông thuộc chương trình cấp học

Các bài toán thông thường nhưng có yêu cầu cao về mẹo tính hoặc kĩ thuật tính, các bài toán dạng mới nhưng giải được bằng các kiến thức và kĩ thuật tính trong chương trình.

V. GIẢI THƯỞNG CUỘC THI

Sau hai tháng, kết quả được công bố trên tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. Một số bài làm tốt sẽ được tặng thưởng. Tặng phẩm là các sản phẩm kĩ thuật tiên tiến của hãng SHARP.

Cuối năm học tính điểm qua các lần thi và trao giải cả năm học của cuộc thi.

- Giải thưởng cả năm học :

Giải nhất (5 giải): Mỗi giải trị giá 500.000 đồng.
Giải nhì (10 giải) : Mỗi giải trị giá 400.000 đồng.
Giải ba (15 giải) : Mỗi giải trị giá 300.000 đồng.

- Số lượng giải tập thể tùy thuộc chất lượng bài thi và số lượng HS dự thi của trường.
- Số giải cá nhân mỗi tỉnh, thành :

giải nhất ≤ 1, giải nhất + giải nhì ≤ 3, giải nhất + giải nhì + giải ba ≤ 7, bằng khen cho các thí sinh được điểm cao nhưng không được giải.

VI. TỔ CHỨC CUỘC THI

Tạp chí THTT và các nhà toán học, chuyên viên thuộc Vụ Giáo dục Trung học, Viện Chiến lược và Chương trình Giáo dục sẽ ra đề và chấm thi.

Tạp chí THTT cấp giấy chứng nhận cho bạn đọc đoạt giải.

Công ty cổ phần xuất nhập khẩu Lê Minh, nhà phân phối độc quyền các sản phẩm SHARP hân hạnh tài trợ cho cuộc thi này.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 67

Problem. Show that every simple polyhedron has at least two faces with the same number of edges.

Solution. Assume that there are no two faces have the same number of edges. The face with the fewest edges has at least three, the face with the next fewest edges has at least four, and so on. If n is the number of faces and F is the face with the most edges, then F has at least $n+2$ edges. Since there is a bordering face for each edge of F, there are at least $n+2$ faces bordering F. Therefore, the number of faces is at least $n+3$, a contradiction.

Từ mới:

simple	= đơn, đơn giản (tính từ)
polyhedron	= đa diện
face	= mặt
edge	= cạnh
few	= ít (tính từ)
at least	= ít nhất (thành ngữ)
border	= tiếp giáp (động từ)
contradiction	= mâu thuẫn

NGÔ VIỆT TRUNG

TOÁN HỌC MUÔN MÀU

(Tiếp bìa 2)

Vậy nếu dùng *hai đa giác cùng loại bằng nhau và một đa giác loại khác* để phủ mặt phẳng thì chỉ xảy ra hai trường hợp với số cạnh (m, m, p) là (12, 12, 3), (8, 8, 4).

DÀNH CHO BẠN ĐỌC

Bạn hãy dùng *ít nhất hai loại đa giác đều* để phủ mặt phẳng sao cho ở mỗi đỉnh chung có :

1) 4 đa giác kề nhau.
2) 5 đa giác kề nhau.
3) 6 đa giác kề nhau.

Có nhiều bài giải gửi đến Tòa soạn đã tìm ra nghiệm nguyên dương của phương trình (1) hoặc (2) hoặc (3) nhưng rất tiếc là không có bạn nào lập luận xem với nghiệm đó thì có tồn tại hình thỏa mãn đề bài hay không !

PHI PHI

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT CHUYÊN TOÁN TIN TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH - NĂM 2004

MÔN THI : *TOÁN*

VÒNG 1

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu I.

1. Tính giá trị của biểu thức :

$P = x^3 + y^3 - 3(x + y) + 2004$, biết rằng :

$x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$,

$y = \sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}$

2. Rút gọn biểu thức sau :

$$P = \frac{1}{1+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{13}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2001}+\sqrt{2005}}$$

Câu II. Giải các phương trình sau :

1. $x^2 + \sqrt{x+2004} = 2004$

2. $x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2} = 0$

Câu III. Giả sử tam giác ABC có diện tích bằng 1, gọi a, b, c và h_a, h_b, h_c tương ứng là độ dài các cạnh và các đường cao của tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(h_a^2+h_b^2+h_c^2\right) \geq 36.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

Câu IV. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^0$, $AC = b$, $AB = c$ (với $b > c$). Đường kính EF của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông góc với BC tại M. Gọi I và J là chân đường vuông góc hạ từ E xuống các đường thẳng AB và AC. Gọi H và K là chân đường vuông góc hạ từ F xuống các đường thẳng AB và AC.

1. Chứng minh các tứ giác $AIEJ$ và $CMJE$ nội tiếp.

2. Chứng minh I, J, M thẳng hàng và IJ vuông góc với HK.

3. Tính độ dài cạnh BC và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC theo b, c.

4. Tính $IH + JK$ theo b, c.

VÒNG 2

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu V. 1. Tìm các giá trị của tham số m để tập nghiệm của phương trình sau có đúng một phần tử.

$$\frac{x^2-2m^2x+2m^4-7m^2+6}{x^2+7x+12} = 0$$

2. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x+y+z+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} = \dfrac{51}{4} \\ x^2+y^2+z^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2} = \dfrac{771}{16} \end{cases}$$

Câu VI. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P = x - y + 2004$, trong đó các số thực x và y thỏa mãn hệ thức :

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 36.$$

Câu VII. Chứng minh rằng tồn tại các số tự nhiên a, b, c nghiệm đúng phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ và thỏa mãn điều kiện : $\operatorname{Min}\{a, b, c\} > 2004$.

Câu VIII. Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi M, P, N, Q là các trung điểm của AB, BC, DE, EA. Chứng minh MN đi qua trung điểm của PQ khi và chỉ khi $MN // CD$.

Câu IX. Cho đường thẳng xy và một điểm A cố định nằm ngoài đường thẳng ấy. Điểm M chuyển động trên xy. Trên đoạn thẳng AM lấy điểm I sao cho $AI.AM = k^2$, trong đó k là số dương cho trước và k nhỏ hơn khoảng cách từ A đến đường thẳng xy. Dựng hình vuông $AIJK$. Tìm tập hợp điểm I và tập hợp điểm K.

LỜI GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 HỆ THPT CHUYÊN TRƯỜNG ĐHKHTN – ĐHQG HÀ NỘI 2004

(Đề thi đã đăng ở THTT số 328, tháng 10 năm 2004)

VÒNG 1

Câu I. 1) Phương trình đã cho tương đương với $(|x+1|-1)(|x-1|-1)=0 \Rightarrow x=0, x=\pm 2$.

2) Viết lại hệ đã cho dưới dạng :

$$\begin{cases}(x+2y+2)(x-y)=-7 & (1)\\ x^3+y^3+x-y = 8 & (2)\end{cases}$$

Từ (1), do x, y nguyên ta có các trường hợp sau :

a) $x-y=-1 \Rightarrow x+2y+2=7 \Rightarrow x=1$ và $y=2$ (thỏa mãn (2))

b) $x-y=1 \Rightarrow x+2y+2=-7 \Rightarrow x+2y=-9$ $\Rightarrow y$ không nguyên.

c) $x-y=-7 \Rightarrow x+2y+2=1$.

Giải hệ này được nghiệm $(x, y)=(-5, 2)$ không thỏa mãn phương trình (2).

d) $x-y=7 \Rightarrow x+2y+2=-1 \Rightarrow x+2y=-3$ $\Rightarrow y$ không nguyên.

Tóm lại hệ đã cho có duy nhất một nghiệm nguyên $(x, y)=(1, 2)$.

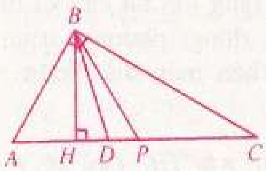
Câu II. Ta có

$$a^{102}+b^{102}=(a^{101}+b^{101})(a+b)-ab(a^{100}+b^{100}).$$

Từ giả thiết bài ra và đẳng thức trên suy ra

$1=a+b-ab$ hay $(a-1)(b-1)=0$

$\Rightarrow (a, b)=(1, 1)$. Do đó $P=2$.



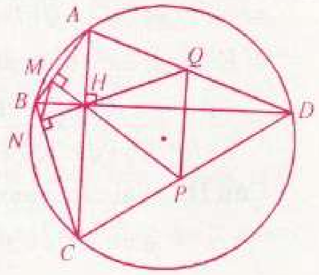
Hình 1

Câu III. (Hình 1). Gọi H, D, P lần lượt là chân các đường cao, phân giác, trung tuyến hạ từ B xuống cạnh AC. Nhận thấy ΔABC vuông tại B và $S_{ABC}=6(\text{cm}^2)$, $S_{ABP}=S_{CBP}=3(\text{cm}^2)$.

Vì $\dfrac{S_{ABD}}{S_{CBD}}=\dfrac{DA}{DC}=\dfrac{BA}{BC}=\dfrac{3}{4}$ nên $S_{ABC}=\dfrac{7}{4}S_{CBD}$

$\Rightarrow S_{CBD}=\dfrac{24}{7}(\text{cm}^2)$. Từ đó $S_{BDP}=S_{CBD}-S_{CBP}$ $=\dfrac{3}{7}(\text{cm}^2)$. Mặt khác $\Delta ABH \backsim \Delta ACB \Rightarrow$ $\dfrac{S_{ABH}}{S_{ACB}}=\left(\dfrac{3}{5}\right)^2$, suy ra $S_{ABH}=\dfrac{54}{25}(\text{cm}^2)$. Cuối cùng $S_{HBD}=S_{ABP}-S_{ABH}-S_{BDP}=\dfrac{72}{175}(\text{cm}^2)$.

Câu IV. (Hình 2).



Hình 2

Ta có $\widehat{AHQ}=\widehat{CHN}$ $=\widehat{CBD}=\widehat{CAD}$, suy ra ΔQAH cân tại Q, từ đó ta cũng thấy ΔQHD cân tại Q, nói cách khác Q là trung điểm của AD. Tương tự ta cũng thấy P là trung điểm của CD. Do đó $PQ // AC$.

• Ta thấy $\widehat{CBH}=\widehat{NMH}$ (do tứ giác $BMHN$ nội tiếp) hơn nữa $\widehat{HQP}=\widehat{AHQ}=\widehat{CHN}=\widehat{CBH}$ suy ra $\widehat{NQP}=\widehat{NMP}$ nên bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.

Câu V. Sử dụng BĐT Cô–si cho bốn số dương ta có :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x^{10}}{y^2}+\frac{y^{10}}{x^2}+1+1\right)\ge 2x^2y^2;$$

$$\frac{1}{4}(x^{16}+y^{16}+1+1)\ge x^4y^4.$$

Suy ra

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x^{10}}{y^2}+\frac{y^{10}}{x^2}\right)+\frac{1}{4}(x^{16}+y^{16})+\frac{5}{2}\ge(1+x^2y^2)^2$$

$\Rightarrow Q\ge -\dfrac{5}{2}$. Do đó GTNN của Q là $\left(-\dfrac{5}{2}\right)$ đạt được khi $x^2=y^2=1$.

VÒNG 2

Câu VI. Điều kiện để PT có nghĩa là $x\ge 1$ (1)

Biến đổi PT được $2x+2+2\sqrt{x^2+2x-3}=4$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+2x-3}=1-x \Rightarrow x\le 1$. Kết hợp với (1) được $x=1$. Thay vào PT ban đầu ta thấy đúng.

Câu VII. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases}(x+y)(2x^2+2y^2) &= 30 \quad (1)\\ (x+y)(x^2+y^2-2xy) = 3 & \quad (2)\end{cases}$$

Trừ theo từng vế PT (1) cho PT (2) được $(x+y)^3 = 27 \Rightarrow x + y = 3$. Ta nhận được hệ tương đương : $\begin{cases}x+3y=3\\ x^2+y^2=5.\end{cases}$ Hệ này có 2 nghiệm (x, y) là $(1, 2)$ và $(2, 1)$.

Câu VIII. Áp dụng BĐT Cô–si cho các số dương ta có

$$P=\frac{(x^3+y^3)-(x^2+y^2)}{(x-1)(y-1)}=\frac{x^2(x-1)+y^2(y-1)}{(x-1)(y-1)}$$

$$=\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}\geq\frac{2xy}{\sqrt{(x-1)(y-1)}}\geq$$

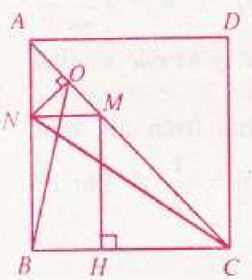
$$2\frac{x}{\left(\frac{x-1+1}{2}\right)}\cdot\frac{y}{\left(\frac{y-1+1}{2}\right)}=8.$$

Do đó $P_{\min} = 8$ khi $x = y = 2$.

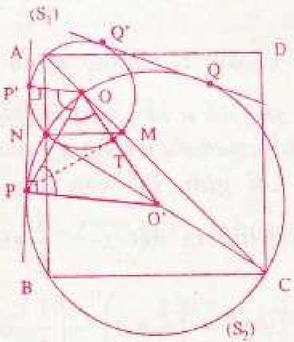
Câu IX. 1) Từ giả thiết $\widehat{MAB}=\widehat{MBC}$, suy ra $\widehat{MAB}+\widehat{MBA}=90^{\circ}$ hay $MA \perp MB$. Tương tự có $MB \perp MC$, $MC \perp MD$, $MD \perp MA$ do đó M là tâm hình vuông $ABCD$.

2) (Hình 3) Dựng $MH \perp BC$, khi đó $MH = NB$ và $\frac{ON}{MN}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{MH}{MC}=\frac{NB}{MC}$. Mặt khác $\widehat{ONB}=\widehat{NMC}=135^{\circ}$ nên $\Delta ONB \backsim \Delta NMC$.

Suy ra $\frac{OB}{NC}=\frac{ON}{MN}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (không đổi)



Hình 3



Hình 4

3) (Hình 4) Gọi P' là tiếp điểm thuộc đường tròn (S_1) ; O' là trung điểm của CN và T là giao điểm của đoạn OO' với (S_1). Ta có $\widehat{O'OP}=\widehat{O'PO}$. Do $O'P//OP'$ nên $\widehat{P'OP}=\widehat{O'PO}$, suy ra $\widehat{POP'}=\widehat{POO'}$. Vì $\Delta POP' = \Delta POT$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{PTO} = \widehat{PP'O} = 90^{\circ}$ hay $PT \perp OT$. Tương tự $QT \perp OT$. Từ đó suy ra P, T, Q thẳng hàng, hay PQ tiếp xúc với (S_1) tại T.

Câu X. Nhận xét rằng :

$$x_n=\left[\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right]-\left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right]<\frac{n+1}{\sqrt{2}}-\left(\frac{n}{\sqrt{2}}-1\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+1<2$$

$\Rightarrow 0 \leq x_n \leq 1$. Vì $x_0, x_1, \ldots, x_{199}$ chỉ nhận một trong hai giá trị 0 hoặc 1 nên các số khác không chỉ nhận giá trị 1. Suy ra số các số khác không là

$$\sum_{i=0}^{199}x_i=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]-\left[\frac{0}{\sqrt{2}}\right]+\left[\frac{2}{\sqrt{2}}\right]-\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]+\ldots+$$

$$+\left[\frac{200}{\sqrt{2}}\right]-\left[\frac{199}{\sqrt{2}}\right]=\left[\frac{200}{\sqrt{2}}\right]=\left[100\sqrt{2}\right]$$

Mà $141 < 100\sqrt{2} < 142$.

Vậy số các số khác không là 141.

Hướng dẫn giải :

PHẠM HÙNG

(GV khối PTCTT ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội)

SỬ DỤNG KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NEWTON ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

HUỲNH DUY THỦY
(GV THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn, Bình Định)

Trong nhiều trường hợp nếu ta sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton để chứng minh bất đẳng thức (BĐT) thì lời giải tương đối gọn hơn so với việc sử dụng phương pháp quy nạp toán học. Ở bài báo này chúng tôi muốn giới thiệu một số ví dụ vận dụng khai triển nhị thức Newton để chứng minh một số BĐT với hi vọng nó sẽ giúp ích cho các bạn trong kì thi tuyển sinh vào các trường Đại học sắp tới.

Để chứng minh $A \geq B$ ta có thể làm như sau :

1) Nếu đưa được A về dạng

$$A = (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i$$

ta tìm cách chứng minh B không lớn hơn tổng T của một số số hạng trong chuỗi thì $B \leq T \leq A$ (gọi là *cách ngắt chuỗi dương*).

2) Nếu đưa được B về dạng

$$B = (x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^{n-i} y^i \qquad (*)$$

ta tìm cách đánh giá mỗi số hạng của chuỗi (*) không lớn hơn các biểu thức T_j mà $\sum_{j=0}^{n} T_j \leq A$, lúc đó $B \leq \sum_{j=1}^{n} T_j \leq A$.

Để làm sáng tỏ cách làm trên chúng tôi đưa ra một số bài toán minh họa.

Ví dụ 1. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên $m \geq 2$ ta có*

$$\left(\frac{m^2-1}{m^2}\right)^{2m+1}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^2 < 1 \qquad (1)$$

Lời giải. Đưa BĐT (1) về dạng

$$\left(1+\frac{1}{m^2-1}\right)^{2m+1} > \left(1+\frac{1}{m-1}\right)^2 = 1+\frac{2}{m-1}+\frac{1}{(m-1)^2}$$

Dùng công thức khai triển nhị thức Newton ta được

$$\left(1+\frac{1}{m^2-1}\right)^{2m+1} = 1+C_{2m+1}^1\left(\frac{1}{m^2-1}\right)+ C_{2m+1}^2\left(\frac{1}{m^2-1}\right)^2+\ldots+C_{2m+1}^{2m+1}\left(\frac{1}{m^2-1}\right)^{2m+1}$$

Sử dụng cách *ngắt chuỗi* dương : do mọi số hạng trong khai triển nhị thức Newton trên đều dương nên để chứng minh BĐT (1) ta sẽ chứng minh

$$C_{2m+1}^1\left(\frac{1}{m^2-1}\right)+C_{2m+1}^2\left(\frac{1}{m^2-1}\right)^2+C_{2m+1}^3\left(\frac{1}{m^2-1}\right)^3 > \frac{2}{m-1}+\frac{1}{(m-1)^2} \qquad (2)$$

Thật vậy

$$(2) \Leftrightarrow \frac{2m+1}{m^2-1}+\frac{m(2m+1)}{(m^2-1)^2}+\frac{m(2m+1)(2m-1)}{3(m^2-1)^3} > \frac{1}{(m-1)^2}+\frac{2}{m-1}=\frac{2m-1}{(m-1)^2}$$

$\Leftrightarrow 4m^2-1 > 3m^2-3$ (BĐT này hiển nhiên đúng).

Ví dụ 2. *Chứng minh BĐT $x^n+y^n \geq \frac{1}{2^{n-1}}$, trong đó n là số tự nhiên ; x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x+y=1$.*

Lời giải. Để vận dụng khai triển nhị thức Newton ta đặt $x = \frac{1}{2}+a$, $y = \frac{1}{2}-a$ khi đó

$$x^n+y^n = \left(\frac{1}{2}+a\right)^n+\left(\frac{1}{2}-a\right)^n$$

$$= \left[C_n^o\left(\frac{1}{2}\right)^n+C_n^1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.a+C_n^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}.a^2+\right.$$

$$+C_n^3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}a^3+...+C_n^n.a^n\Bigg]+$$

$$+\left[C_n^o\left(\frac{1}{2}\right)^n-C_n^1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.a+C_n^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}.a^2-\right.$$

$$\left.-C_n^3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}a^3+...+(-1)^nC_n^n.a^n\right]$$

Dù n chẵn hay n lẻ thì cũng có

$$x^n+y^n\geq\frac{1}{2^{n-1}}+C_n^2.\frac{a^2}{2^{n-3}}+C_n^4.\frac{a^4}{2^{n-5}}\geq\frac{1}{2^{n-1}}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=0$, tức là $x=y=\dfrac{1}{2}$

Ví dụ 3. *Chứng minh rằng nếu n là số tự nhiên lớn hơn 1 thì ta có BĐT :*

$$\sqrt[n]{n}<1+\sqrt{\frac{2}{n}}$$

Lời giải. Khi gặp bài này nhiều bạn có lẽ nghĩ đến việc sử dụng phương pháp quy nạp toán học (theo n) để giải. Nhưng nếu để ý với $n>1$ thì $\sqrt[n]{n}>1$ nên có thể đặt $\sqrt[n]{n}=1+x$ (với $x>0$), lúc đó theo công thức khai triển nhị thức Newton

$$n=(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+...+x^n>$$

$$>1+\frac{n(n-1)}{2}x^2\text{, từ đó } x^2<\frac{2}{n}\text{ hay } x<\sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Vì rằng $\sqrt[n]{n}=1+x$ nên suy ra $\sqrt[n]{n}<1+\sqrt{\dfrac{2}{n}}$.

Ví dụ 4. *Giả sử n là số nguyên dương. Hãy chứng minh* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<2+\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$

Lời giải. Nhận xét rằng

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=C_n^o+C_n^1\left(\frac{1}{n}\right)+C_n^2\left(\frac{1}{n^2}\right)+...+C_n^n\left(\frac{1}{n^n}\right)$$

Mặt khác ta nhận thấy :

$$C_n^k\left(\frac{1}{n^k}\right)=\frac{1}{k!}.\frac{n!}{(n-k)!n^k}<\frac{1}{k!}\ (k=1,2,...,n)$$

Do đó $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<2+\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$ (đpcm).

Để kết thúc bài báo xin mời các bạn thử giải các bài tập sau theo phương pháp trên.

1) Giả sử $p_k=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{2}{n}\right)...\left(1-\dfrac{k-1}{n}\right)$ với $2\leq k<n$.

Chứng minh BĐT

$$2+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{p_k}{k!}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

2) Cho $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực dương. Đặt $S=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i$. Chứng minh rằng

$$(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n)\leq 1+S+\frac{S^2}{2!}+...+\frac{S^n}{n!}$$

HD: Sử dụng BĐT Cô–si cho các số dương $1+x_1$, $1+x_2$, ..., $1+x_n$, sau đó áp dụng công thức khai triển nhị thức Newton cho biểu thức $\left(1+\dfrac{S}{n}\right)^n$.

PROBLEMS IN THIS ISSUE

(Tiếp trang 13)

T10/329. Let be given positive numbers a_i, b_i ($i=1, 2, ..., n$). Prove that

$$\frac{a_1^r}{b_1^s}+\frac{a_2^r}{b_2^s}+...+\frac{a_n^r}{b_n^s}\geq\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^r}{n^{r-s-1}(b_1+b_2+...+b_n)^s}$$

where r, s are positive rational numbers and

$$r\geq s+1.$$

T11/329. Suppose that the quadrilateral $ABCD$ is inscribed in a circle with center O, with radius R and the opposite rays of the rays BA, DA, CB, CD touch a circle with center I and radius r. Prove that by putting $d=OI$, we have :

$$\frac{1}{(d+R)^2}+\frac{1}{(d-R)^2}=\frac{1}{r^2}$$

T12/329. For a tetrahedron $ABCD$ with $AB=CD$, $AC=BD$, $AD=BC$, let φ_1, φ_2, φ_3 be respectively the measures of the dihedral angles with sides BC, CA, AB. Prove that

$$\cos\frac{\varphi_1}{2}.\cos\frac{\varphi_2}{2}.\cos\frac{\varphi_3}{2}=\frac{\sqrt{\cos A.\cos B.\cos C}}{\sin A.\sin B.\sin C}$$

where A, B, C denote the angles of triangle ABC.

KẾT QUẢ CUỘC THI GIẢI TOÁN KỈ NIỆM 40 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Cuộc thi này đã thu hút được sự tham gia đông đảo của các bạn trẻ yêu toán cả hai bậc THCS và THPT.

Các tỉnh, thành phố có nhiều bạn tham gia là:

Hà Nội, Hải Phòng, Đà Nẵng, TP Hồ Chí Minh, Phú Thọ, Vĩnh Phúc, Bắc Giang, Bắc Ninh, Hải Dương, Quảng Ninh, Hà Tây, Hưng Yên, Nam Định, Thái Bình, Ninh Bình, Thanh Hóa, Nghệ An, Hà Tĩnh, Quảng Trị, Thừa Thiên - Huế, Quảng Nam, Bình Định, Phú Yên, Khánh Hòa, Gia Lai, Đăk Lăk, Lâm Đồng, Cần Thơ...

Một số bạn nhỏ tuổi ở lớp 7 cũng tham gia và có bạn đoạt giải.

Các trường sau đây có nhiều bạn tham gia giải và đoạt giải tập thể :

- Trường THPT NK Trần Phú, Hải Phòng

- Trường THPT NK Hưng Yên

- Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng

- Trường THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa, Đồng Nai

- Trường THPT Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh

- Trường THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc

- Trường THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, Thanh Hóa.

- Trường THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, Thanh Hóa.

DANH SÁCH CÁC BẠN ĐOẠT GIẢI CUỘC THI

CÁC LỚP THCS

Giải Nhất (2 giải)

1) Nguyễn Hữu Kiên, 9A, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**

2) Phan Thị Thu Trang, 8/4, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Điện Thắng, Điện Bàn, **Quảng Nam**

Giải Nhì. (3 giải)

1) Phan Thành Việt, 9D, THCS Lương Thế Vinh, TX. Tuy Hòa, **Phú Yên**.

2) Phạm Thanh Huyền, 9A, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Bảo, **Hải Phòng.**

3) Trịnh Huy Giang, 9A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn,**Thanh Hóa**.

Giải Ba (5 giải)

1) Trịnh Ngọc Tú, 9A3, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ, **Hà Tây**

2) Đoàn Mạnh Hùng, 9A, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**

3) Đào Đức Chính, 9C, THCS Hoàng Liệt, Quận Hoàng Mai, **Hà Nội**

4) Vũ Thị Quỳnh Hoa, 9C, THCS Chu Văn An, Chí Linh, **Hải Dương**.

5) Võ Thái Thông, 8/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh, **Khánh Hòa.**

Giải Khuyến Khích. (13 giải)

1) Nguyễn Xuân Thọ, 9B, THCS Vĩnh Yên, TX. Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc.**

2) Phạm Huy, 9C, THCS Tam Dương, Tam Dương, **Vĩnh Phúc**.

3) Lê Viết Tuấn, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa.**

4) Vũ Đình Quyền, 9B, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách, **Hải Dương**.

5) Nguyễn Trọng Hiến, 8E, trường Hà Nội - Amsterdam, **Hà Nội.**

6) Lê Quang Trưởng, 9D, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn, **Thanh Hóa.**

7) Vũ Việt Trung, 7H, THCS Lê Quý Đôn, Quận Cầu Giấy, **Hà Nội.**

8) Nguyễn Tài Đại, 8A, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Kbang, **Gia Lai.**

9) Phạm Duy Hiệp, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, **Nam Định.**

10) Bùi Phong Quang, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, **Thanh Hóa.**

11) Nguyễn Kim Thuật, 9A, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc.**

12) Đặng Văn Thùy, 9A3, THCS Ngô Sỹ Liên, Chương Mỹ, **Hà Tây.**

13) Võ Văn Tuấn, 7A5, THCS Buôn Hồ, Krông Buk, **Đăk Lăk.**

CÁC LỚP THPT

Giải Nhất. (2 giải)

1) Lê Hùng Việt Bảo, 12A Toán, ĐHKHTN - ĐHQG **Hà Nội.**

2) Nguyễn Ngọc Cường, 12A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, **Nghệ An.**

Giải Nhì (4 giải)

1) Lương Xuân Bách, 11T, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**.

2) Trần Trọng Đan, 11T, THPT NK Trần Phú, **Hải Phòng.**

3) Đỗ Quốc Khánh, 12A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng.**

4) Hà Phương, 12T1, THPT Hà Nội - Amsterdam, **Hà Nội.**

Giải Ba (6 giải)

1) Đào Lê Anh, 11A1, Khối PTCTT, ĐH Vinh, **Nghệ An.**

2) Nguyễn Hoàng Dũng, 11A1, khối PTCTT, ĐH Vinh, **Nghệ An.**

3) Bùi Xuân Vũ, 11T, THPT chuyên HưngYên, **Hưng Yên**.

4) Nguyễn Lệnh Quân, 11A1, khối PTCTT, ĐHSP **Hà Nội**.

5) Nguyễn Xuân Tường, 10T, THPT Lương Văn Tụy, **Ninh Bình**.

6) Nguyễn Văn Vinh, 12A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**.

Giải Khuyến khích. (9 giải)

1) Phạm Văn Dưỡng, 11T, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương**.

2) Bùi Hữu Đức, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**.

3) Dương Đạt Nguyện, 12A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**.

4) Nguyễn Văn Thạnh, 11T, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa.**

5) Nguyễn Đình Hiển, 12T, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. **Hồ Chí Minh**.

6) Nguyễn Tuyết Mai, 12A, THPT NK Ngô Sỹ Liên, **Bắc Giang**.

7) Trần Quốc Hoàn, 11T, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương**.

8) Nguyễn Đức Sơn, 11T, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**.

9) Nguyễn Anh Tâm, 12T, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**.

Ngoài các bạn đoạt giải, rất nhiều bạn đã thể hiện được khả năng của mình qua nhiều bài giải, trong đó có những chứng minh hay, gọn, không cần dùng đến các công thức phức tạp. Hoan nghênh các bạn sau đây có nhiều bài giải đúng.

Các bạn THCS

Vĩnh Phúc: *Đỗ Lê Việt Thắng*, 9C, THCS Vĩnh Yên, TX. Vĩnh Yên, *Đỗ Ngọc Đăng*, 9B, THCS Lập Thạch, *Nguyễn Hải Long*, 9A, THCS Yên Lạc; **Hà Nam :** *Nguyễn Mạnh An*, 9B, THCS Trần Phú, TX Phủ Lý ; **Nam Định :** *Trần Quang Huy*, 9A1, THCS Phùng Chí Kiên, *Đinh Quang Huy*,9A6, THCS Trần Đăng Ninh, TP Nam Định ; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hữu Cường*, 8B, THCS Yên Phong, Yên Phong, *Đặng Thị Xuân*, 9A, THCS Yên Phụ, Yên Phong ; *Nguyễn Công Anh*, 9A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài ; **Bắc Giang :** *Thân Ngọc Thức*, 9A, THCS Nguyên Hồng, Tân Yên ; **Phú Thọ :** *Nguyễn Sơn Tùng*, 8B, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, *Đinh Thành Tuân*, 9A, THCS Văn Lang, Việt Trì, *Trần Mạnh Trung*, 9A, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh ; **Thái Bình:** *Lê Thái Hưng*, 9B, THCS Lương Thế Vinh, TX. Thái Bình, *Nguyễn Huy Thông*, 9B, THCS NK Kiến Xương, Kiến Xương ; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Lưu Bách*, 8C, *Lê TrungThành*, *Tạ Trần Tùng* và *La Tiến Thành*, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, *Lê Văn Hoàn*, *Lê Hữu Tuấn*, *Lê Ngọc Tuấn*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, *Hoàng Đức Ý*, 8E, *Hoàng Vũ Hanh*, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa, *Bùi Phương Dung*, 9A, THCS Hoằng Trung, Hoằng Hóa ; **Đăk Lak :** *Đỗ Thanh Tùng*, 9A6, THCS Lương Thế Vinh, Quảng Phú, Cư M'Gar, *Phan Duy Khánh*, 9A7, THCS Trần Hưng Đạo, Buôn Ma Thuột, *Tôn Thất Nhật Trường*, 9A5, THCS Phan Chu Trinh ; **Gia Lai :** *Dương Cao Nguyên*, 9/2, THCS Nguyễn Du, Pleiku ; **TP. Hồ Chí Minh:** *Đỗ Tuấn Hoàng Anh*, 9A14, trường Trần Đại Nghĩa, *Lương Phạm Vinh Hiển*, 8A5, THCS Phú Mỹ, Bình Thạnh ; **Bạc Liêu:** *Trần Mỹ Linh*, 8/4, THCS Trần Huỳnh, TX. Bạc Liêu.

Các bạn THPT

Hà Nội: *Nguyễn Đức Phương*, 11A1, Khối PTCTT, ĐHSP Hà Nội ; **Quảng Ninh:** *Vũ Ngọc Hải*, 11T, THPT chuyên Hạ Long, *Hoàng Trung Hiếu*, 10T, THPT DL Yên Hưng, Yên Hưng ; **Vĩnh Phúc :** *Vũ Văn Quang*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Hải Phòng :** *Phạm Quỳnh Anh*, 10T, THPT NK Trần Phú, *Nguyễn Minh Trường*, 12T, THPT NK Trần Phú ; **Phú Thọ :** *Nguyễn Quang Huy*, 10A1, *Lê Bá Long*, 10T, THPT chuyên Hùng Vương ; **Hải Dương :** *Lê Đình Huy*, 11T, THPT NK Nguyễn Trãi, *Phạm Hoàng Thái*, 10K, THPT Kim Thành, Kim Thành **Thanh Hóa :** *Trần Văn Thiện*, 12C5, THPT Như Thanh, Như Thanh ; **Nghệ An :** *Ngô Sỹ Vinh*, 11A1, khối PTCTT ĐH Vinh ; **Đà Nẵng :** *Nguyễn Tường Huân*, 10/1, *Trương Minh Tiến*, 12A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Bình Định :** *Nguyễn Phúc Thọ*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Đồng Nai:** *Tạ Quang Hiển*, 12T, *Nguyễn Văn Quốc Khánh*, 11T1, THPT Lương Thế Vinh, Biên Hòa ; **TP. Hồ Chí Minh :** *Lê Nguyễn Minh Khoa*, 11T, *Nguyễn Tuấn Tú*, 10T, THPT Lê Hồng Phong, *Lương Minh Thắng*, 11T, THPT NK ĐHQG TP. HCM ; **Cần Thơ :** *Nguyễn Duy Xuân Bách*, *Võ Hoàng Hưng*, 11A1, THPT Lý Tự Trọng.

Các bạn đoạt giải hãy gửi địa chỉ mới của mình về Tòa soạn để Tòa soạn gửi Bằng chứng nhận và quà tặng.

THTT

CÁC LỚP THCS

Bài T1/329. (Lớp 6). Giả sử p, q là hai số nguyên tố thỏa mãn $p > q > 3$ và $p - q = 2$. Chứng minh rằng $p+q$ chia hết cho 12.

HỒ SỸ HÙNG
(GV THPT Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An)

Bài T2/329. (Lớp 7). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4$$

trong đó a, b, c là các số thực không nhỏ hơn 1 và không lớn hơn 2.

HOÀNG NGỌC MINH
(GV K7, CN KHTN, ĐHKHTN Hà Nội)

Bài T3/329. Chứng minh rằng tổng số (gồm 1999 số hạng)

$$s = 1^{100} - 2^{100} + 3^{100} - 4^{100} + ... + n^{100} - (n+1)^{100} + ... - 1998^{100} + 1999^{100}$$

chia hết cho 201899.

NGUYỄN VĂN TIẾN
(GV THCS TTr Lâm Thao, Phú Thọ)

Bài T4/329. Giải phương trình

$$x = (2004+\sqrt{x})(1-\sqrt{1-\sqrt{x}})^2$$

NGUYỄN ANH THUẤN
(GV THCS Trần Văn Ơn, Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T5/329. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{b+\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{c}{c+\sqrt{(c+a)(c+b)}}\le 1$$

trong đó a, b, c là các số thực dương.

ĐỖ VĂN THU
(SV K26G khoa Toán ĐHSP Hà Nội II)

Bài T6/329. Cho tứ giác $MNPQ$ nội tiếp đường tròn và MP cắt NQ tại E. Lấy điểm K nằm trong đoạn ME. Tiếp tuyến tại E với đường tròn ngoại tiếp tam giác NEK cắt các đường thẳng QM và QP lần lượt tại F và G. Chứng minh rằng

$$\frac{EG}{EF}=\frac{KP}{KM}$$

NGUYỄN TRẦN THI
(SV ĐH Toán 3, CĐSP Phú Yên)

Bài T7/329. Xét các tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ có chu vi $a+b+c = k$ (không đổi). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = \frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{2a+b+c}+\frac{ac}{a+2b+c}$$

PHẠM HOÀNG HÀ
(GV THPT chuyên Ngoại ngữ, ĐHNN Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T8/329. Cho a, b là hai số thực khác 0. Xét dãy số (u_n) $(n = 0, 1, 2, ...)$ được xác định như sau : $u_0 = 0, u_1 = 1$,

$u_{n+2} = au_{n+1} - bu_n$ với mọi $n = 2, 3, ...$

Chứng minh rằng nếu có bốn số hạng liên tiếp của dãy là số nguyên thì mọi số hạng của dãy đều là số nguyên.

ĐẶNG HÙNG THẮNG
(ĐHKHTN Hà Nội)

Bài T9/329. Tìm tất cả các giá trị của tham số p sao cho các nghiệm x_1, x_2, x_3 của phương trình $x^3 - 3x^2 - px - 1 = 0$ thỏa mãn

$$\frac{1}{2005}<\frac{1}{(x_1-1)^3}+\frac{1}{(x_2-1)^3}+\frac{1}{(x_3-1)^3}<\frac{1}{2004}.$$

HOÀNG ANH TUẤN
(GV TTGDTX Văn Bàn, Lào Cai)

Bài T10/329. Cho các số dương a_i, b_i $(i = 1, 2, ..., n)$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1^r}{b_1^s}+\frac{a_2^r}{b_2^s}+...+\frac{a_n^r}{b_n^s}\ge\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^r}{n^{r-s-1}(b_1+b_2+...+b_n)^s}$$

trong đó r, s là các số hữu tỉ dương và $r \ge s+1$.

NGUYỄN TIẾN TIẾN
(SV K50B khoa Toán Tin, ĐHSP Hà Nội)

Bài T11/329. Giả sử tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R và các tia đối của các tia BA, DA, CB, CD cùng tiếp xúc với một đường tròn tâm I bán kính r. Đặt $d = OI$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(d+R)^2}+\frac{1}{(d-R)^2}=\frac{1}{r^2}$$

NGUYỄN HỒNG QUÂN
(GV THPT Hồng Ngự 2, Đồng Tháp)

Bài T12/329. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$, $AC = BD$, $BC = AD$. Gọi φ_1, φ_2, φ_3 lần lượt là số đo nhị diện có cạnh là BC, CA, AB của tứ diện đó. Chứng minh rằng

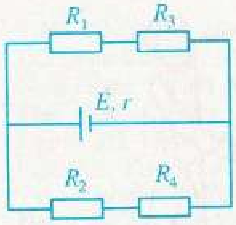
$$\cos\frac{\varphi_1}{2}.\cos\frac{\varphi_2}{2}.\cos\frac{\varphi_3}{2}=\frac{\sqrt{\cos A.\cos B.\cos C}}{\sin A.\sin B.\sin C}$$

trong đó kí hiệu A, B, C là các góc của ΔABC.

HỒ QUANG VINH
(Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/329. Cho mạch điện như hình vẽ : Nguồn điện có $E = 18$V ; $r = 6\Omega$. Các điện trở



$R_1 = 2\Omega$; $R_2 = 1\Omega$. Bỏ qua điện trở dây nối và khóa K. Biết rằng khi K mở và K đóng thì công suất tiêu thụ ở mạch ngoài đều bằng $P = 12$W. Tìm các điện trở R_3 và R_4.

NGUYỄN MINH TUẤN
(GV THPT Yên Thành 2, Yên Thành, Nghệ An)

Bài L2/329. Một khối khí có $M = 29$g/mol đựng trong một bình hình hộp chữ nhật với áp suất $p = 1$atm và thể tích $V = 5$ lít. Đáy dưới A của bình có nhiệt độ $T = 300$K, đáy trên B có nhiệt độ $T_B = 350K$ và nhiệt độ của khí được duy trì tăng đều đặn từ đáy A tới đáy B. Hãy tính khối lượng m của khối khí ; cho biết $R = 0{,}082$lit.atm/K.

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/329. (for 6th grade). Let p and q be two primes satisfying $p > q > 3$ and $p - q = 2$. Prove that $p+q$ is divisible by 12.

T2/329. (for 7th grade).

Find the greatest value of the expression

$$P = (a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4$$

where a, b,c are real numbers not less than 1 and not greater than 2.

T3/329. Prove that the following sum (of 1999 terms)

$s = 1^{100} - 2^{100} + 3^{100} - 4^{100} + ... + n^{100} - (n+1)^{100} + ... - 1998^{100} + 1999^{100}$

is divisible by 201899.

T4/329. Solve the equation

$$x = (2004+\sqrt{x})(1-\sqrt{1-\sqrt{x}})^2$$

T5/329. Prove that

$$\frac{a}{a+\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{b+\sqrt{(b+c)(b+a)}}+$$
$$+\frac{c}{c+\sqrt{(c+a)(c+b)}}\le 1$$

where a, b, c are positive real numbers.

T6/329. Let $MNPQ$ be a quadrilateral inscribed in a circle and let E be the point of intersection of MP and NQ. Let K be a point on the segment ME (K distinct from M, E). The tangent at E to the circumcircle of triangle NEK cuts the lines QM and QP respectively at F and G. Prove that $\dfrac{EG}{EF}=\dfrac{KP}{KM}$

T7/329. Consider the triangles ABC with given perimeter $a+b+c = k$ (const), $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Find the greatest value of the expression

$$T=\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{2a+b+c}+\frac{ac}{a+2b+c}$$

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/329. Let a, b be two real numbers distinct from 0. Consider the sequence of numbers (u_n) ($n = 0, 1, 2, ...$) defined by :

$u_0 = 0$, $u_1 = 1$,

$u_{n+2} = au_{n+1} - bu_n$ for all $n = 2, 3, ...$

Prove that if there exist four consecutive terms of the sequence that are integers then all terms of the sequence are intergers.

T9/329. Find all values of the parameter p so that the roots x_1, x_2, x_3 of the equation $x^3 - 3x^2 - px - 1 = 0$ satisfy the conditions

$$\frac{1}{2005}<\frac{1}{(x_1-1)^3}+\frac{1}{(x_2-1)^3}+\frac{1}{(x_3-1)^3}<\frac{1}{2004}.$$

(Xem tiếp trang 9)

Bài T1/325. (Lớp 6).

Chứng tỏ rằng tổng

$$A=\frac{2004}{2003^2+1}+\frac{2004}{2003^2+2}+...+\frac{2004}{2003^2+n}+...$$
$$+\frac{2004}{2003^2+2003}\ \textit{(2003 số hạng)}$$

không phải là số nguyên dương

Lời giải. Trước hết ta giải bài toán tổng quát : "Chứng minh rằng tổng (n số hạng, $n>1$)

$$A=\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+1}{n^2+2}+...+\frac{n+1}{n^2+n}$$

không phải là số nguyên dương".

Ta có

$$A<\frac{n+1}{n^2}+\frac{n+1}{n^2}+...+\frac{n+1}{n^2}\ (n \text{ số hạng})$$

$$=\frac{n+1}{n^2}.n=1+\frac{1}{n}<2.$$

Mặt khác

$$A>\frac{n+1}{n^2+n}+\frac{n+1}{n^2+n}+...+\frac{n+1}{n^2+n}\ (n \text{ số hạng})$$

$$=\frac{n+1}{n^2+n}.n=1.$$

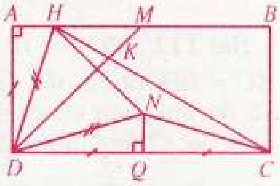
Do đó $1<A<2$. Vậy A không phải là số nguyên dương. Với $n=2003$ thì ta có bài toán đã cho.

Nhận xét. Đây là bài toán dễ nên hầu hết các bạn đều giải đúng. Các bạn có lời giải ngắn gọn là : **Bắc Ninh:** *Đỗ Vũ Thạch*, 5A, Tiểu học Đông Thọ, Yên Phong ; **Vĩnh Phúc :** *Kim Đình Sơn*, 6D, THCS Liên Bảo, Vĩnh Yên ; **Nam Định:** *Triệu Mạnh Duy*, 6A4, THCS Trần Đăng Ninh ; **Nghệ An :** *Đặng Thị Cẩm Nhung*, 6A, THCS Nghi Hương, Cửa Lò ; **Quảng Ngãi:** *Võ Nguyễn Việt Phương*, *Lương Thị Yến Ánh*, 6C, THCS Huỳnh Thúc Kháng, Nghĩa Hành ; **TP. Hồ Chí Minh:** *Tăng Bửu Vinh*, 6/1, THCS Chu Văn An, Q. 11.

TRẦN HỮU NAM

Bài T2/325. (Lớp 7). *Cho hình chữ nhật ABCD với AB = 2AD, M là trung điểm của đoạn AB. Trên cạnh AB lấy điểm H sao cho $\widehat{ADH}=15^o$. Hai đường thẳng CH và DM cắt nhau tại K. Hãy so sánh độ dài các đoạn thẳng DH và DK.*

Lời giải. Trên nửa mặt phẳng chứa C, bờ là đường thẳng DH, dựng tam giác đều DHN. Gọi Q là trung điểm cạnh DC, ta có (h. 1).



Hình 1

$$\begin{cases}AD=DQ=QC\\ \widehat{ADH}=\widehat{QDN}=15^o\\ DH=DN(\Delta DHN \text{ đều})\end{cases}$$

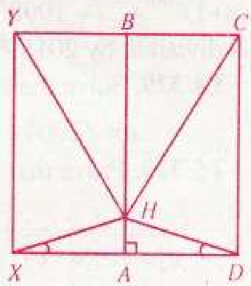
$\Rightarrow \Delta ADH=\Delta QDN$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{NQD}=\widehat{HAD}=90^o \Rightarrow \widehat{NQC}=90^o$. $\Rightarrow \Delta NQD=\Delta NQC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{NCQ}=\widehat{NDQ}=15^o \Rightarrow \widehat{DNC}=180^o-(15^o+15^o)=150^o$.

Từ đó, $\widehat{HNC}=360^o-(60^o+150^o)=150^o$, suy ra $\Delta HNC=\Delta DNC$ (c.g.c) $\Rightarrow CH=CD$, tức là ΔCHD cân tại C, mà $\widehat{HDC}=90^o-15^o=75^o$ nên $\widehat{DHC}=75^o$ (1)

Do tam giác ADM vuông cân tại A nên $\widehat{ADM}=45^o$, suy ra $\widehat{HDM}=45^o-15^o=30^o$ (2). Xét tam giác DHK, từ (1) và (2) suy ra $\widehat{HKD}=75^o$ (3).

Từ (1) và (3) suy ra ΔDHK cân tại D, tức là $DH=DK$.

Nhận xét. 1. Đây là bài toán rất cơ bản, được giải bằng phương pháp "vẽ thêm hình phụ". Nếu để ý, các bạn sẽ thấy nó chính là bài toán quen thuộc : "Cho hình vuông $XYCD$. Bên trong hình vuông lấy điểm H sao cho $\widehat{HXD}=\widehat{HDX}=15^o$. Chứng minh ΔYHC là tam giác đều" (h. 2).



Hình 2

Bài toán được rất đông bạn tham gia giải, hầu hết đều cho lời giải đúng. Một số bạn dùng khái niệm "đường trung bình của tam giác", không có trong chương trình Toán 7.

2. Các bạn sau đây có lời giải đúng và ngắn gọn :

Hà Tây : *Cấn Mạnh Hùng*, *Nguyễn Trung Nghĩa*, 7C, THCS Thạch Thất, Thạch Thất, *Trần Thị Thùy Trang*, *Trần Ngọc Thúy*, 7B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng

Hòa ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Cao Tuấn, Lê Thành Trung, Đinh Thế Tiến*, 7B, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa, *Trịnh Văn Thao*, 7A, THCS Định Bình, Yên Định ; **Nghệ An :** *Ngô Trần Dũng*, 7B, THCS Hồ Xuân Hương, Cầu Giát, Quỳnh Lưu ; **Hải Phòng :** *Vũ Hồng Anh*, THCS Trần Phú, Lê Trân ; **Phú Yên:** *Nguyễn Thị Minh Hằng*, 7C, THCS Bùi Thị Xuân, Xuân Lộc, Sông Cầu ; **Khánh Hòa :** *Võ Thái Thông*, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh ; **Thừa Thiên – Huế:** *Nguyễn Nữ Nhật Minh*, 7/2, THCS Hùng Vương, Tp. Huế ; **Quảng Ngãi:** *Lê Văn Phương*, 7E, *Lê Tiến Hảo*, 7B, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành ; **Bình Định:** *Tào Nguyễn Quang Khang*, 7A1, *Đào Minh Thuận*, 7A2, THCS Ngô Mây, Phù Cát, *Bùi Bảo Khang*, 7A1, THCS số 2, An Nhơn ; **Gia Lai:** *Dương Thị Thu Thảo*, 7/4, THCS Nguyễn Du, Pleiku.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/325. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x^3(2+3y)=1 \\ x(y^3-2)=3. \end{cases} \quad (1)$$

Lời giải. (Của nhiều bạn)

Nhận xét : nếu (x, y) là một nghiệm của hệ phương trình (HPT) (1) thì $x \neq 0$ và nếu đặt $z = \dfrac{1}{x}$ thì HPT (1) tương đương với HPT sau

$$\begin{cases} z^3 = 3y+2 \\ y^3 = 3z+2 \end{cases} \quad (2)$$

Chú ý $u^3 - 3u - 2 = (u^3 - u) - (2u + 2)$
$= (u + 1)(u(u - 1) - 2) = (u + 1)(u^2 - u - 2)$
$= (u + 1)((u^2 + u) - (2u + 2))$
$= (u + 1)^2(u - 2)$

Do đó nếu (y, z) là một nghiệm của HPT (2) thỏa mãn $y = z$ thì hoặc $y = z = -1$ hoặc $y = z = 2$.

Lại nhận xét với $y \neq z$ ta có

$(z^3 - 3y - 2) - (y^3 - 3z - 2) = (z^3 - y^3) + (3z - 3y) = (z - y)(z^2 + yz + y^2 + 3) \neq 0$ vì

$$z^2 + zy + y^2 + 3 = \left(z + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 3 > 0$$

Như vậy HPT (2) chỉ có hai nghiệm $y = z = -1$ và $y = z = 2$.

Tức là HPT (1) chỉ có hai nghiệm $x = -1$, $y = -1$ và $x = \dfrac{1}{2}$, $y = 2$.

Nhận xét. Đây là bài toán dạng cơ bản, quen thuộc với nhiều học sinh. Hầu hết (trong hơn 100 bạn gửi tới tòa soạn) giải theo cách trên. Các bạn sau có lời giải tốt :

Hà Tây : *Đinh Hoàng Long*, 7A, THCS Tế Tiêu, Mỹ Đức ; **Hải Dương :** *Bùi Văn Nam*, 6A, THCS Tân Phong, Ninh Giang ; **Thái bình :** *Đinh Thị Thắm*, 6A, THCS Thái Phương, Hưng Hà ; **Thanh Hóa :** *Trịnh Quang Thanh*, 7B, THCS Hàm Rồng ; **Nghệ An :** *Đặng Công Việt*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; **Quảng Trị :** *Nguyễn Lâm Tùng*, 7B, THCS Ba Lòng, Đa Krông ; **Đắk Lắk:** *Võ Văn Tuấn*, THCS Buôn Hồ, Krông Buk ; **Pleiku :** *Dương Thị Thu Thảo*, 7^4, THCS Nguyễn Du, Pleiku, Gia Lai.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T4/325. *Giả sử x, y là các số thực dương thỏa mãn $x+y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $A = \dfrac{1}{x^3+y^3} + \dfrac{1}{xy}$

Lời giải. Ta có $1 = (x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = x^3 + y^3 + 3xy$. Do đó :

$$P = \frac{1}{x^3+y^3} + \frac{1}{xy} = \frac{x^3+y^3+3xy}{x^3+y^3} + \frac{x^3+y^3+3xy}{xy}$$

$$= 4 + \frac{3xy}{x^3+y^3} + \frac{x^3+y^3}{xy}.$$

Theo BĐT Cô–si, ta có

$$P \geq 4 + 2\sqrt{\frac{3xy}{x^3+y^3} \cdot \frac{x^3+y^3}{xy}} = 4 + 2\sqrt{3}$$

Có đẳng thức $P = 4 + 2\sqrt{3}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x^3+y^3=\sqrt{3}xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ (x+y)^3-3xy(x+y)=\sqrt{3}xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

Vậy x, y là hai nghiệm của phương trình

$$t^2 - t + \frac{3-\sqrt{3}}{6} = 0$$

Suy ra

$$x = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}\right), \; y = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}\right)$$

hoặc $x = \dfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}}\right)$, $y = \dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}}\right)$

Kết luận : Giá trị nhỏ nhất của biểu thức là $4+2\sqrt{3}$, đạt được khi (x, y) nhận một trong hai giá trị đã nêu trên.

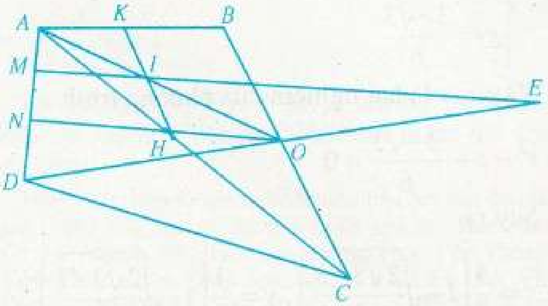
Nhận xét. Lời giải của bài toán này khá đa dạng, một số em học sinh sử dụng kiến thức về hàm số của cấp THPT để giải, một số sử dụng tam thức bậc hai nên lời giải hơi dài. Tiếc rằng còn một vài thiếu sót : chưa chỉ ra giá trị x, y mà biểu thức đạt giá trị nhỏ nhất ; giải phương trình sai đáp số ; quên địa chỉ lớp, trường, viết chưa sạch... Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Dương Công Định, 9/1, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, TX. Vĩnh Long, **Vĩnh Long** ; *Lê Quang Huy*, 9/6, THCS Nguyễn An Ninh, TP. Vũng Tàu, **Bà Rịa – Vũng Tàu** ; *Võ Thái Thông*, 8/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Ranh, **Khánh Hòa** ; *Võ Anh Trí*, 9, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi** ; *Thân Ngọc Thức*, 9A, THCS Nguyên Hồng, Tân Yên, **Bắc Giang**, *Nguyễn Trung Hiếu*, 9Em THCS Đặng Thai Mai,Vinh, **Nghệ An** ; *Nguyễn Hoàng Anh*, 7H, THCS Trần Mai Ninh, Tp. **Thanh Hóa** ; *Trần Văn Tuấn*, 9A, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mĩ, **Hưng Yên** ; *Nguyễn Đức Quang*, 9A, THCS Ngô Gia Tự, **Hải Dương** ; *Nguyễn Thị Thủy*, 7C, THCS Hùng Dũng, Hưng Hà, **Thái Bình** ; *Trịnh Trọng Thành*, 9A3, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ, **Hà Tây** ; *Dương Thu Hiền*, 9A3, THCS Hạ Hòa, Hạ Hòa, **Phú Thọ** ; *Phạm Duy Tùng*, 9A8, THCS Ngọc Lâm, Long Biên, **Hà Nội** ; *Phạm Duy Hiệp*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, **Nam Định** ; *Tôn Thất Nhật Trường*, 9A5, THCS Phan Chu Trinh, Buôn Mê Thuột, **Đắk Lắk.**

PHAN DOÃN THOẠI

Bài T5/325. *Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi O là trung điểm của cạnh BC và E là điểm đối xứng của D qua O. Một điểm M di động trên cạnh AD, đường thẳng EM cắt OA tại I. Từ I kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB và AC lần lượt tại K và H. Chứng minh rằng biểu thức* $\frac{AB}{AK}+\frac{AC}{AH}-\frac{AD}{AM}$ *có giá trị không đổi.*

Lời giải. Trên MD lấy N là trung điểm. Nối O với N ta có $ON//MI$. Áp dụng định lí Talét ta có:



$$\frac{AB}{AK}=\frac{AO}{AI}\ ;\ \frac{AC}{AH}=\frac{AO}{AI}\ ;\ \frac{AN}{AM}=\frac{AO}{AI}.$$

Nên $\frac{AB}{AK}+\frac{AC}{AH}=\frac{2AO}{AI}=\frac{2AN}{AM}$

Từ đó $\frac{AB}{AK}+\frac{AC}{AH}-\frac{AD}{AM}=\frac{2AN-AD}{AM}=$

$=\frac{2AN-AN-ND}{AM}=\frac{AN-ND}{AM}=$

$=\frac{AN-NM}{AM}=\frac{AM}{AM}=1$ (Biểu thức nói trong bài chỉ có ý nghĩa khi $M \neq A$, $M \neq D$).

Nhận xét. 1. Số đông các bạn phải dùng định lí Mênêlauýt.

2. Nhiều bạn phát hiện ra điểm O có thể là tùy ý trên đoạn BC. Đề bài ra thừa dữ kiện.

3. Một số bạn đề xuất các bài toán tổng quát hơn.

4. Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Phú Thọ : *Nguyễn Văn Quỳnh*, 9A, THCS Tam Sơn, Cẩm Khê, *Đào Đức Trung*, 8A3, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, *Dương Thu Hiền, 9A3, THCS Hạ Hòa* ; **Vĩnh Phúc :** *Ngô Thị Bích Phượng*, 8A, THCS Yên Lạc, *Đỗ Hoàng Tùng*, 8E, THCS Vĩnh Yên, *Nguyễn Hải Long*, 9A, THCS Yên Lạc ; **Hải Dương :** *Nguyễn Đức Anh Quang, Nguyễn Đức Minh Quang*, 9A, *Hoàng Tiến Đạt*, 8A, THCS Ngô Gia Tự, Hải Dương, *Vũ Thị Quỳnh Hoa*, 9C, THCS Cù Văn An, Chí Linh, *Trương Ngọc Sơn*, 9D, THCS Minh Tân, Kinh Môn; **Hà Tây:** *Trần Ngọc Thúy*, 7B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa ; **Hà Nội:** *Tô Việt Anh*, 9A, *Nguyễn Thị Hồng Thắm*, 8A, THCS Nguyễn Trường Tộ, Q. Đống Đa ; **Thái Bình:** *Uông Sĩ Phong*, 8B, THCS Thái Nguyên, Thái Thụy ; **Hà Nam :** *Nguyễn Thị Thu Hằng*, 9B, THCS Nguyễn Hữu Tiến, Duy Tiên ; **Nam Định :** *Trần Thế Anh* và *Phạm Tiến Duật*, 9B, THCS Trần Huy Liệu, Vụ Bản ; **Thanh Hóa :** *La Tiến Nam*, 9A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, *Trịnh Văn Vương*, 9B, THCS Điện Biên, *Trịnh Văn Thao*, 7A, THCS Định Bình, Yên Định, **Nghệ An :** *Nguyễn Trung Hiếu*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP Vinh; **Quảng Trị:** *Nguyễn Kim Tiến*, 9B, THCS Hải Vĩnh, Hải Lăng; **Bình Định:** *Lý Viễn Trường*, 9A4, THCS Ngô Mây, Phù Cát ; **Khánh Hòa :** *Võ Thái Thông*, 8/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh ; **Đắc Lắk :** *Vương Tấn Đạt*, 9A5, THCS Ngô Quyền, thị trấn Eah'leo, **Tp. HCM :** *Trần Duy Minh Tâm*, 9/1, THCS Hồng Bàng, P.12, Q. 5 ; **Bạc Liêu:** *Trần Mỹ Linh*, 8/4, THCS Trần Huỳnh, TX Bạc Liêu ; **Đồng Tháp:** *Trần Bình Ngọc*, 9A1, THPT TX Cao Lãnh.

VŨ KIM THỦY

Bài T6/325. *Cho $a > 1$, tìm tất cả bộ ba số thực (x, y, z) sao cho $|y| \geq 1$ thỏa mãn phương trình*

$$\log_a^2(xy)+\log_a(x^3y^3+xyz)^2+\frac{8+\sqrt{4z-y^2}}{2}=0$$

Lời giải. Điều kiện : $xy > 0$, $x^3y^3 + xyz \neq 0$, $4z-y^2 \geq 0$ hay $xy > 0$, $xy(x^2y^2 + z) \neq 0$, $4z-y^2 \geq 0$.

Do $|y| \geq 1$ nên từ điều kiện $4z - y^2 \geq 0$ suy ra $z \geq \frac{1}{4}$ và vì vậy $xy(x^2y^2 + z) \neq 0$ do $xy > 0$.

Suy ra $x^2y^2+z \geq x^2y^2+\frac{1}{4} \geq xy$.

Từ đây suy ra

$$\log_a^2(xy)+\log_a(x^3y^3+xyz)^2+\frac{8+\sqrt{4z-y^2}}{2}$$

$$\geq \log_a^2(xy)+\log_a(xy)^4+\frac{8}{2}$$

$$\geq \log_a^2(xy)+4\log_a(xy)+4=\left[\log_a(xy)+2\right]^2\geq 0.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} z=1/4 \\ y=\pm 1 \\ xy=1/2 \\ \log_a(xy)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1/4 \\ y=1 \\ x=1/2 \\ a=\sqrt{2} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} z=1/4 \\ y=-1 \\ x=-1/2 \\ a=\sqrt{2} \end{cases}$$

Kết luận :

Với $a \neq \sqrt{2}$, bài toán vô nghiệm,

Với $a=\sqrt{2}$, bài toán có cặp nghiệm

$$\begin{cases} z=1/4 \\ y=1 \\ x=1/2 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} z=1/4 \\ y=-1 \\ x=-1/2 \end{cases}$$

Nhận xét. 1. Qua cách giải của các bạn, ta có thể phát biểu lại bài toán dưới dạng sau :

Tìm tất cả bộ bốn số thực (x, y, z, u) với $u > 1$ và $|y| \geq 1$ thỏa mãn hệ thức sau :

$$\log_u^2(xy)+\log_u(x^3y^3+xyz)^2+\frac{8+\sqrt{4z-y^2}}{2}=0$$

2. Đây là một bài toán loại dễ nên có số lượng lớn các bài giải gửi tới tòa soạn. Tuy nhiên việc kiểm tra điều kiện có nghĩa cũng như việc chứng minh các phép biến đổi là tương đương thì lại không được chú ý, dẫn đến sai sót.

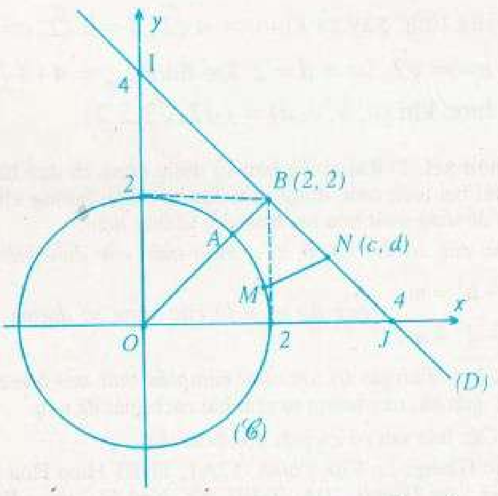
Những bạn sau đây có lời giải tốt :

An Giang : *Trần Trọng Quốc Trưởng*, 12T, THPT chuyên ; **Bắc Giang :** *Hoàng Minh Tuấn*, 10A, *Thân Ngọc Thành* và *Nguyễn Thanh Tùng*, 11A, *Nguyễn Tuyết Mai*, 12A, THPT chuyên ; **Bắc Ninh :** *Ngô Văn Mạnh*, 12T, THPT chuyên ; **Bạc Liêu :** *Tạ Phú Hà Minh*, 12T, THPT chuyên ; **Bình Định:** *Lê Bá Khanh*, 12T, *Trần Đa Khoa* và *Nguyễn Phúc*, 11T, THPT chuyên ; **Đắk Lắk:** *Ngô Thùy Dương*, 10CT, THPT chuyên ; **Đà Nẵng:** *Đỗ Quốc Khánh*, *Thái Thanh Hải*, 12A1, *Nguyễn Tuấn Hoàng*, 11/2, *Phạm Thanh Sơn*, *Phan Minh Tiến*, 11/1, THPT chuyên ; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Minh Trí*, 10T, THPT Sa Đéc ; **Hà Tây :** *Lê Tiến*, 11B20, THPT Sơn Tây, THPT chuyên ; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Đăng Hoàng*, 12T, *Hoàng Minh Đức*, 11T, THPT chuyên ; **Hải Dương :** *Nguyễn Anh Tuấn*, 11T, *Nguyễn Duy Trung*, 12T, THPT chuyên *Phạm Văn Thuấn*, 11A7, THPT Phúc Thành ; **Hải Phòng :** *Phạm Khánh Toàn*, 12T, THPT chuyên ; **Hà Nội :** *Nguyễn Trường Giang*, 10A1, ĐHKHTN, *Nguyễn Hữu Kiên*, 10A1, ĐHSP, *Huỳnh Trung Anh*, 11T1, Amsterdam, *Trịnh Minh Sơn*, 12D2, THPT Chu Văn An ; **Thừa Thiên – Huế :** *Nguyễn Hoài Ân*, 12T, THPT Quốc học Huế ; **Hưng Yên:** *Vũ Thanh Xuân*, 10T, THPT chuyên ; **Nam Định :** *Nguyễn Đăng Phái*, 12T, THPT chuyên ; **Nghệ An :** *Nguyễn Ngọc Cường*, 12A2, THPT chuyên Phan Bội Châu *Lê Đăng Dũng*, 10A2, THPT chuyên ĐH Vinh ; **Phú Thọ :** *Nguyễn Thế Tùng*, 12A1, *Triệu Ngọc Anh*, 12T, THPT chuyên ; **Phú Yên:** *Nguyễn Quốc Hưng*, 10A3, t Duy Tân, *Nguyễn Quỳnh Huy*, 10T, THPT chuyên ; **Quảng Nam:** *Nguyễn Đình Duy*, 12/1, THPT chuyên ; **Quảng Ninh:** *Bùi Ngọc Duy*, 10A1, THPT Uông Bí ; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thị Hương*, *Phạm Viết Huy*, *Lương Bá Vinh*, 11T THPT chuyên ; **Quảng Trị:** *Nguyễn Hữu Ninh*, 10T, *Lê Tiến Triển*, 11T, *Nguyễn Lan Hà Phương*, 12T THPT chuyên ; **Thái Bình:** *Nguyễn Văn Chuyên*, 11T, THPT chuyên, *Đỗ Duy Giáp*, 11A1, THPT Tây Tiền Hải ; **Thanh Hóa :** *Lê Quang Nhật*, 10K, THPT chuyên Lam Sơn ; **TP Hồ Chí Minh:** *Huỳnh Nam*, 12T, ĐHQG TPHCM, *Cao Văn Tân*, 12A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, *Nguyễn Tuấn Tú*, 10CT, *Nguyễn Khắc Long*, 11CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong ; **Vĩnh Phúc :** *Lê Công Truyền*, *Nguyễn Thọ Khiêm*, *Vũ Văn Quang*, 10A1, *Đỗ Việt Kiên*, *Nguyễn Ngọc Sơn*, 11A1, THPT chuyên ;**Yên Bái :** *Trần Mạnh Cường*, 12T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T7/325. *Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn các điều kiện $a^2+b^2=4$ và $c+d=4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $ac+bd+cd$*

Lời giải. • ***Cách 1.*** Trên mặt phẳng tọa độ



Oxy xét điểm $M(a, b)$ thỏa mãn $a^2+b^2=4$ thì M thuộc đường tròn $(\mathscr{C})$ tâm O, bán kính $R=2$. Xét điểm $N(c, d)$ thỏa mãn $c+d=4$ thì N thuộc đường thẳng (D) có phương trình $x+y=4$ (D).

Ta có : $MN=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$

$=\sqrt{a^2+b^2+(c+d)^2-2ac-2bd-2cd}$

$=\sqrt{20-2(ac+bd+cd)}$

Đường thẳng (D) cắt Ox, Oy lần lượt tại $J(4, 0)$ và $I(0, 4)$. Dựng $OB \perp IJ$, OB cắt $(\mathscr{C})$ tại

A thì thấy $OB = 2\sqrt{2} \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}-2$. Do $MN \geq AB$ với $\forall M \in (\mathscr{C})$, $\forall N \in (D)$ nên

$$\sqrt{20-2(ac+bd+cd)} \geq 2\sqrt{2}-2.$$

$\Rightarrow ac+bd+cd \leq 4+4\sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv A$ và $N \equiv B$ hay $(a, b) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$; $(c, d) = (2, 2)$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $ac+bd+cd$ là $4+4\sqrt{2}$ khi $a = b = \sqrt{2}$ và $c = d = 2$.

• *Cách 2.* (Của bạn *Bùi Hữu Đức*, 11A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**)

Đặt $P = ac+bd+cd$, ta có

$$ac \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}a^2+\frac{c^2}{\sqrt{2}}\right) ; bd \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}.b^2+\frac{d^2}{\sqrt{2}}\right)$$

Suy ra $P \leq \frac{1}{\sqrt{2}}(a^2+b^2)+\frac{(c^2+d^2)}{2\sqrt{2}}+cd$

$$= 2\sqrt{2}+\frac{(c+d)^2}{2\sqrt{2}}+cd\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\leq (2\sqrt{2}+4\sqrt{2})+\frac{(c+d)^2}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4+4\sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $c = a\sqrt{2}, d = b\sqrt{2}, c=d$ nên $a=b=\sqrt{2}$; $c = d = 2$. Do đó $P_{\max} = 4+4\sqrt{2}$ đạt được khi $(a, b, c, d) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2, 2)$.

Nhận xét. 1) Rất nhiều bạn sử dụng công cụ đạo hàm để giải bài toán trên, đồng thời đưa ra nhiều hướng khác nhau để tổng quát hóa bài toán đó. Chẳng hạn :

Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn các điều kiện : $\begin{cases} a^2+b^2=m \\ c^2+d^2=n \end{cases}$, *trong đó m, n là các hằng số dương và* $n > \sqrt{2m}$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức ac+bd+cd.* Cách giải bài này tương tự như hai cách giải đã nêu.

2) Các bạn sau có lời giải gọn hơn cả :

Bắc Giang: *La Văn Thịnh*, 12A1, THPT Hiệp Hòa II, *Hoàng Văn Thanh*, 10A, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; **Bắc Ninh :** *Dương Thị Thanh Phương*, 12B,THPT chuyên Bắc Ninh ; **Phú Thọ :** *Nguyễn Quang Huy*, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì, *Nguyễn Tiến Thanh*,9C, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông ; **Vĩnh Phúc :** *Hà Đình Thiệu*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Hà Nội :** *Nguyễn Trường Giang*, *Vũ Thị Thu Hường*, 10A1 Toán, *Nguyễn Tiến Hoàng*, 11B Lý, ĐHKHTN – ĐHQG, *Nguyễn Tư Diễn*, 10A1, *Đỗ TiếnĐăng*, 10A2, *Nguyễn Hồng Nhung*, 11A2, PTCT–Tin, ĐHSP Hà Nội, *Nguyễn Thu Hằng*, 10T1, THPT Hà Nội – Amsterdam ; **Hà Tây :** *Dư Anh Hùng*, 10T, THPT chuyên Hưng Yên ; **Thanh Hóa :** *Lê Quang Nhật*, 10K1, *Lưu Xuân Thế*,11T, *Nguyễn Trọng Hòa*, 12T,THPT Lam Sơn ; **Nghệ An :** *Lê Ngọc Thạch*, *Trịnh Văn Nam*, 10A1, *Cao Xuân Sáng*, 10A2, THPT Phan Bội Châu, *Nguyễn Lê Phước*, 10A2, *Nguyễn Đức Tùng*, 11A1, PTCT–Tin, ĐH Vinh, *Võ Quang Vinh*, 8D, THCS Thái Hòa II, Nghĩa Đàn ; **Quảng Bình:** *Trương Phúc Thoại*, 11T, THPT chuyên Quảng Bình ; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Tường Huân*, 10/1, *Nguyễn Tiến Lâm*, 11A1, *Thái Thanh Hải*, 12A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Quốc Việt*, 10T, THPT chuyên Lê Khiết ; **Phú Yên :** *Nguyễn Quốc Hưng*, 10A3, THPT DL Duy Tân, TX Tuy Hòa ; **Bến Tre :** *Nguyễn Thanh Cường*, 11E, THPT Lộc Thuận, Bình Đại; **TP Hồ Chí Minh:** *Cao Hoàng Tân*, 12A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Q. 1.

HỒ QUANG VINH

Bài T8/325. *Giả sử các đường tròn $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ cùng tiếp xúc trong với đường tròn $\mathscr{C}$ lần lượt tại A_1, A_2, A_3 và đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. B_1, B_2, B_3 là tiếp điểm của $\mathscr{C}_2$ và $\mathscr{C}_3$, của $\mathscr{C}_3$ và $\mathscr{C}_1$, của $\mathscr{C}_1$ và $\mathscr{C}_2$ theo thứ tự. Chứng minh rằng A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 đồng quy.*

Lời giải. *Cách 1.* (Của bạn *Nguyễn Thu Hằng*, 10T1, THPT Hà Nội - Amsterdam, **Hà Nội**)

Giả sử các tiếp tuyến với (O) tại A_1, A_2 cắt nhau tại S. Các tiếp tuyến với (O_3) tại B_1, B_2 cắt nhau tại T.

Giả sử A_1A_2 theo thứ tự lại cắt các đường tròn (O_1), (O_2) tại M, N. Ta có (xem hình vẽ)

$$\begin{cases} \widehat{SA_1A_2} = \widehat{SA_2A_1} = \widehat{A_1B_2M} = \widehat{A_2B_1N} = \alpha \\ \widehat{TB_1B_2} = \widehat{TB_2B_1} = \beta \\ \widehat{MA_1B_2} = \widehat{MB_2T} = \gamma \\ \widehat{NA_2B_1} = \widehat{NB_1T} = \delta \end{cases}$$

Ta thấy :

$$\begin{cases} \widehat{A_2A_1B_2} + \widehat{A_2B_1B_2} = \gamma+(\alpha+\delta+\beta) = \alpha+\beta+\gamma+\delta \\ \widehat{A_1A_2B_1} + \widehat{A_1B_2B_1} = \delta+(\alpha+\gamma+\beta\_) = \alpha+\beta+\gamma+\delta \end{cases}$$

Suy ra : $\widehat{A_2A_1B_2} + \widehat{A_2B_1B_2} = \widehat{A_1A_2B_1} + \widehat{A_1B_2B_1}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $A_1A_2B_1B_2$ nội tiếp

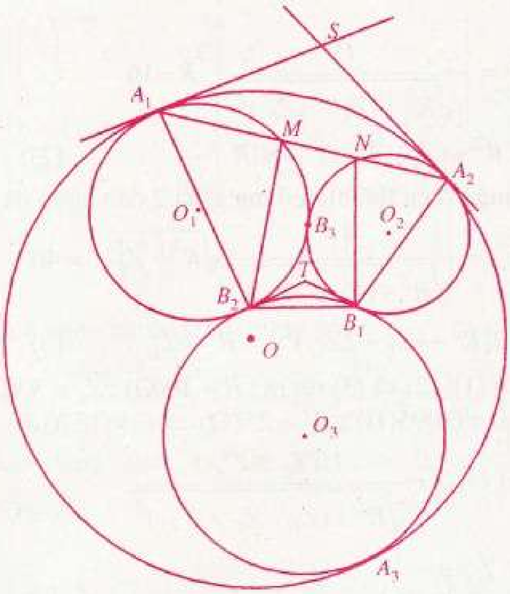
Tương tự như vậy : Các tứ giác $A_2A_3B_2B_3$, $A_3A_1B_3B_1$ cũng nội tiếp.

Ta thấy : A_1B_1 là trục đẳng phương của các đường tròn $(A_3A_1B_3B_1)$, $(A_1A_2B_1B_2)$

A_2B_2 là trục đẳng phương của các đường tròn $(A_1A_2B_1B_2)$, $(A_2A_3B_2B_3)$.

A_3B_3 là trục đẳng phương của các đường tròn $(A_2A_3B_2B_3)$, $(A_3A_1B_3B_1)$.

Từ đó với chú ý rằng A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 không thể đôi một song song, ta có : A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 đồng quy.



Nhận xét. Nếu các tiếp tuyến với (O) tại A_1, A_2 hoặc các tiếp tuyến với (O_3) tại B_1, B_2 song song thì hoàn toàn tương tự, ta vẫn có tứ giác $A_1A_2B_1B_2$ nội tiếp.

Cách 2. (Của bạn *Phan Việt Thành*, 10T, THPT chuyên Lương Văn Chánh, **Phú Yên**)

Gọi M là điểm thỏa mãn điều kiện

$$-\frac{1}{R}\overrightarrow{OM}+\frac{1}{R_1}\overrightarrow{O_1M}+\frac{1}{R_2}\overrightarrow{O_2M}+\frac{1}{R_3}\overrightarrow{O_3M}=\vec{0}\quad(1)$$

Chú ý rằng :

$$\begin{cases}-\frac{1}{R}\overrightarrow{A_1O}+\frac{1}{R_1}\overrightarrow{A_1O_1}=\vec{0}\\ \frac{1}{R_2}\overrightarrow{B_1O_2}+\frac{1}{R_3}\overrightarrow{B_1O_3}=\vec{0}\end{cases}\quad(2)$$

Từ (1), (2) suy ra :

$$\left(-\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)\overrightarrow{A_1M}+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)\overrightarrow{B_1M}=\vec{0}$$

$\Rightarrow A_1B_1$ đi qua M.

Tương tự A_2B_2, A_3B_3 cũng đi qua M.Vậy A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 đồng quy tại M.

Nhận xét. 1) Có 43 bạn tham gia giải và tất cả đều giải đúng.

2) Ngoài hai lời giải trên có rất nhiều bạn dùng phép nghịch đảo tâm A_1, phương tích bất kì và cũng cho lời giải ngắn gọn.

3) Bạn *Bùi Quang Huy*, 10T, THPT chuyên Hưng Yên còn cho một lời giải đúng bằng định lí Xê–va và tích ngoài.

4) Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Hòa Bình:** *Lưu Như Hòa*, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ ; **Thừa Thiên –Huế:** *Trần Ngọc Hải*, 10T, THPT Quốc học Huế ; **Đồng Nai:** *Lê Bá Khiết*, 11T, THPT chuyên Lương Thế Vinh ; **Hà Nam :** *Kiều Thùy Linh*, 11A1, THPT chuyên Hà Nam ; **Quảng Ngãi:** *Phạm Tấn Đạo*, 11T, THPT Lê Khiết ; **Vĩnh Phúc :** *Bùi Hữu Đức*, 11A1,THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Đà Nẵng :** *Dương Đạt Nguyên*, 12A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Nghệ An :** *Nguyễn Lê Phước*, 10A2, khối PTCT, ĐH Vinh ; **Hà Nội :** *Nguyễn Hoàng Hải*, 10A1, khối PTCT–Tin, ĐHSP Hà Nội.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/325. *Một bình kín hình trụ đặt thẳng đứng được ngăn đôi bằng một pittông có trọng lượng P. Mỗi nửa bình chứa m gam không khí ở cùng nhiệt độ. Cho biết khi khí trong bình có nhiệt độ T_1 = 300K thì tỉ số n giữa thể tích của khí ở phía trên pittông và thể tích khí ở phía dưới pittông có trị số là $n_1=\frac{V_t}{V_d}=4$. Hỏi khi tỉ số đó là $n_2=\frac{V'_t}{V'_d}=3$ thì nhiệt độ của khí trong bình là bao nhiêu ?*

Lời giải. Ta có : $V_t+V_d = V'_t+V'_d \Rightarrow V_t\left(1+\frac{1}{n_1}\right)=V'_t\left(1+\frac{1}{n_2}\right)$ (1). Vì mỗi nửa bình cùng chứa m gam không khí và ở cùng nhiệt độ T_1 nên : $p_tV_t = p_dV_d \Rightarrow n_1p_t = p_d$. Tương tự ở nhiệt độ T_2 ta cũng có : $n_2p'_t = p'_d$. Khi pittông nằm cân bằng thì : $p_d-p_t = p'_d-p'_t = \frac{P}{S} \Rightarrow$ $(n_1-1)p_t=(n_2-1)p'_t$ (2). Ngoài ra đối với khí ở bình trên ta có : $\frac{p_t.V_t}{T_1}=\frac{p'_t.V'_t}{T_2}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) tìm được :

$$T_2=\frac{n_1-\frac{1}{n_1}}{n_2-\frac{1}{n_2}}T\approx 422(K).$$

Nhận xét. Các bạn có lời giải và đáp số đúng (làm tròn đến 3 chữ số có nghĩa) :

Vĩnh Phúc : *Lê Sơn*, 12A3, *Trần Trung Đức, Bùi Anh Quân*, 11A3, *Nguyễn Thọ Khiêm*, 11A10, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Phú Thọ :** *Phạm Đăng Hải*, 11C, THPT Hùng Vương ; **Hà Nội :** *Bùi Phi Anh*, 11 Lí, THPT Hà Nội – Amsterdam ; **Thái Nguyên :** *Ngô Thu Hà*, 10K15 Lí, THPT chuyên Thái Nguyên ; **Đà Nẵng :** *Nguyễn Phan Định*, 12/2, THPT Phan Chu Trinh ; **Vĩnh Long:**

Trương Huỳnh Quốc Khánh, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm ; **Quảng Ngãi :** *Nguyễn Thị Thanh Thủy*, 10A2, THPT Sơn Tịnh I ; **Nghệ An :** *Phạm Bá Sơn*, A3K32, *Nguyễn Quang Thành*, A3 K31, THPT Phan Bội Châu, *Nguyễn Văn Hải*, 12G, THPT Nghĩa Đàn ; **Hải Dương :** *Nguyễn Việt Anh*, 11 Lí, THPT Nguyễn Trãi, *Lê Quang Vinh*, 12A1, THPT Nam Sách ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Tuấn Dương*, 11T, THPT Lam Sơn, *Nguyễn Thị Trang*, 12A4, THPT Hậu Lộc II, *Trương Quốc Phú*, 11A1, THPT Hậu Lộc I ; **Quảng Bình :** *Lê Anh Tuấn*, 12 Lí, THPT chuyên Quảng Bình.

MAI ANH

Bài L2/325. *Cho mạch điện như hình vẽ. Biết $U_{AB} = 40\sin 100\pi t$ (V) và không đổi. Tụ điện C_2 có điện dung thay đổi được. Bỏ qua điện trở dây nối và khóa K.*

a) Khi $C_2 = C_1 = C$ thì thấy khi K mở và khi K đóng hiệu điện thế hiệu dụng giữa M và B không đổi. Khi K mở, công suất tiêu thụ trên đoạn mạch là P = 16W và hiệu điện thế hiệu dụng ở hai đầu cuộn dây là $U_d = 40V$. Tính R, L, C.

b) Khi K mở, điều chỉnh $C_2 = C'$ để hiệu điện thế hiệu dụng giữa hai điểm M và B đạt cực đại. Tính C' và giá trị hiệu điện thế cực đại đó.

Lời giải. a) Khi *K* mở và khi *K* đóng U_{MB} không đổi, nên :

$$\frac{UZ_c}{\sqrt{R^2+(Z_L-Z_C)^2}} = \frac{U.2Z_c}{\sqrt{R^2+(Z_l-2Z_C)^2}}$$

$$\Rightarrow Z_C = \frac{3R^2+3Z_L^2}{4Z_L} \qquad (1)$$

Khi *K* mở, công suất tiêu thụ là

$$P = \left[\frac{U}{\sqrt{R^2+(Z_L-2Z_C)^2}}\right]^2 R = 16$$

$$\Rightarrow R^2+(Z_L-2Z_C)^2 = 50R \qquad (2)$$

và hiệu điện thế hiệu dụng giữa 2 đầu cuộn dây:

$$U_d = \frac{U}{\sqrt{R^2+(Z_L-2Z_C)^2}}\sqrt{R^2+Z_L^2} = 40$$

$$\Rightarrow 2[R^2+(Z_L-2Z_C)^2] = R^2+Z_L^2 \qquad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) rút ra : $R = 10(\Omega)$; $Z_L = 30(\Omega)$ $\Rightarrow L = 0{,}095(\text{H})$; $Z_c = 25(\Omega) \Rightarrow C = 127(\mu\text{F})$.

b) $$U_{MB} = \frac{U(Z_C+Z'_C)}{\sqrt{R^2+(Z_L-Z_C-Z'_C)^2}}$$

với $Z'_c = \dfrac{1}{\omega C'}$.

U_{MB} đạt max khi $Z'_c = \dfrac{35}{3}(\Omega) \Rightarrow C' = 382(\mu\text{F})$. Khi đó $U_{AB\max} = 89{,}4$ (V).

Nhận xét. Các bạn cólời giải và đáp số đúng :

Vĩnh Phúc : *Phạm Tiến Thành*, *Nguyễn Ngọc Sơn*, 11A1, *Nguyễn Thị Phương Dung*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Đà Nẵng :** *Nguyễn Phan Định*, 12/2, THPT Phan Chu Trinh ; **Phú Thọ:** *Nguyễn Quang Định*, 11K2, THPT chuyên Hùng Vương ; **Bắc Ninh :** *Trần Văn Hòa*, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh ; **Bắc Giang :** *Dương Trung Hiếu*, 11B, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; **Đăk Lăk:** *Nguyễn Thành Nội*, 11T, THPT Nguyễn Du ; **Vĩnh Long :** *Trương Huỳnh Quốc Khánh*, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Thị Trang*, 12A4, THPT Hậu Lộc II , *Trương Quốc Phú*, 11A1, THPT Hậu Lộc I ; **Nam Định :** *Nguyễn Đăng Phái*, 12TII, THPT Lê Hồng Phong, *Nguyễn Văn Đình*, 12I, THPT Giao Thủy A ; **Quảng Ngãi :** *Lê Hà Kiệt*, 11A2, THPT Đức Phổ I ; **Đồng Tháp :** *Thái Phan*, 12T, THPT Thị xã Sa Đéc ; **Hưng Yên :** *Phạm Quốc Việt*, 12 Lí, THPT chuyên Hưng Yên ; **Tiền Giang :** *Trần Thị Mỹ Phương*, 12 Lí, THPT chuyên Tiền Giang, Mỹ Tho.

MAI ANH

CUỘC THI KỈ NIỆM 40 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Bài T9/THCS. *Tìm tất cả các số nguyên dương x, y sao cho $A = x^2y^4 - y^3 + 1$ là số chính phương.*

Lời giải. 1) Nếu $y = 1$ thì $A = x^2$ là số chính phương với số nguyên dương x tùy ý.

2) Xét $y > 1$. Giả sử A là số chính phương thì $4x^2A$ cũng là số chính phương. Ta có :

$$4x^2(x^2y^4 - y^3 + 1) = a^2 \qquad (1)$$

với $a > 0$. Đặt $k = x^2$

$(1) \Rightarrow (2ky^2 - y)^2 + 4k - y^2 = a^2$

$\Leftrightarrow 4k - y^2 = (a - 2ky^2 + y)(a + 2ky^2 - y)$ (2)

Nếu $4k - y^2 \neq 0$ thì từ (2) suy ra

$$|4k - y^2| \geq 2ky^2 + a - y \qquad (3)$$

Nhưng ta có (do $y > 1$ và $k \geq 1$)

$2ky^2 + a - y > 4k - y^2 \Leftrightarrow 2k(y^2 - 2) > -(y^2 - y + a)$ đúng

và $2ky^2 + a - y > y^2 - 4k \Leftrightarrow y(2ky - y - 1) + a + 4k > 0$ đúng nên (3) không xảy ra.

Vậy ta phải có $4k = y^2 \Leftrightarrow 4x^2 = y^2 \Leftrightarrow y = 2x$.

Thử lại với $y = 2x$ thì $A = (4x^3 - 1)^2$

Kết luận : Với $y = 1$, $x \in N^*$ hoặc $y = 2x$, $x \in N^*$ ta có A là số chính phương.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T10/THCS. *Dãy số $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ được xác định theo công thức*

$$\begin{cases} x_n = 1 \text{ khi } [(n+1)\sqrt{2004}] - [n\sqrt{2004}] \text{ là một số lẻ} \\ x_n = 0 \text{ khi } [(n+1)\sqrt{2004}] - [n\sqrt{2004}] \text{ là một số chẵn} \end{cases}$$

với mỗi $n = 1, 2, 3, ...$

trong đó $[x]$ kí hiệu số nguyên lớn nhất không lớn hơn x. Tính tổng (41 số hạng)

$$S = x_{1964} + x_{1965} + ... + x_{2004}$$

Lời giải. Ta kí hiệu $y_n = [(n+1)\sqrt{2004}] - [n\sqrt{2004}]$ với $n = 1, 2, 3, ...$

Vì $44^2 < 2004 < 45^2$ nên $[\sqrt{2004}] = 44$.

Đặt $\sqrt{2004} = 44 + \alpha$ với α là số vô tỉ thỏa mãn $0 < \alpha < 1$.

Ta được $y_n = [(n+1)(44+\alpha)] - [n(44+\alpha)]$ $= 44 + [(n+1)\alpha] - [n\alpha]$.

Vì $(n+1)\alpha - n\alpha = \alpha$ là số vô tỉ thỏa mãn $0 < \alpha < 1$ nên $[(n+1)\alpha] - [n\alpha]$ chỉ có thể nhận giá trị bằng 0 hoặc 1.

Khi $[(n+1)\alpha] - [n\alpha] = 1$ ta có y_n là số lẻ nên $x_n = 1$.

Khi $[(n+1)\alpha] - [n\alpha] = 0$ ta có y_n là số chẵn nên $x_n = 0$.

Vậy $x_n = [(n+1)\alpha] - [n\alpha]$ với $n = 1, 2, 3, ...$

Ta được
$$x_{1964} = [1965\alpha] - [1964\alpha]$$
$$x_{1965} = [1966\alpha] - [1965\alpha]$$
$$...$$
$$x_{2004} = [2005\alpha] - [2004\alpha]$$

Cộng theo vế các hệ thức trên và rút gọn, ta được :

$$S = x_{1964} + x_{1965} + ... + x_{2004} = [2005\alpha] - [1964\alpha]$$

Do đó

$$S = \left\lfloor 2005(\sqrt{2004} - 44) \right\rfloor - \left\lfloor 1964(\sqrt{2004} - 44) \right\rfloor$$
$$= \left\lfloor 2005\sqrt{2004} \right\rfloor - \left\lfloor 1964\sqrt{2004} \right\rfloor - (2005 - 1964).44$$
$$= 89755 - 87920 - 1804$$

Ta được $S = 31$.

Nhận xét. Có thể giải bài toán bằng cách khác theo trình tự các bước sau :

- Chứng minh y_n chỉ nhận giá trị 44 hoặc 45.
- Nếu $y_n = 44$ thì $x_n = 0$; nếu $y_n = 45$ thì $x_n = 1$. Ta được $x_n = y_n - 44$.
- $y_{1964} + y_{1965} + ... + y_{2004} = \left\lfloor 2005\sqrt{2004} \right\rfloor \left\lfloor 1964\sqrt{2004} \right\rfloor$ $= 1835$
- Giả sử p, q lần lượt là số số hạng trong vế trái của hệ thức trên bằng 44,45. Ta có hệ $\begin{cases} p + q = 41 \\ 44p + 45q = 1835 \end{cases}$
- Giải hệ trên, ta được $p = 10$, $q = 31$. Vậy $S = 31$.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T9/THPT. *Cho trước số tự nhiên n và số nguyên tố p. Hỏi có tất cả bao nhiêu bộ p số tự nhiên (không kể thứ tự) đôi một khác nhau $(a_o, a_1, ..., a_{p-1})$ thỏa mãn :*

a) $1 \le a_i \le n$ với mọi $i = 0, 1, ..., p-1$.

b) $[a_o, a_1, ..., a_{p-1}] = p \min\{a_o, a_1, ..., a_{p-1}\}$, trong đó $[a_o, a_1, ..., a_{p-1}]$ kí hiệu bội số chung nhỏ nhất của các số $a_o, a_1, ..., a_{p-1}$.

Lời giải. Giả sử bộ số $(a_o, a_1, ..., a_{p-1})$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vì không kể thứ tự nên có thể giả sử $1 \le a_o < a_1 ... < a_{p-1} \le n$ (1)

Lúc đó $a_o = \min\{a_o, a_1, ..., a_{p-1}\}$. Từ yêu cầu bài toán

$[a_o, a_1, ..., a_{p-1}] = p.a_o$ suy ra

$$pa_o = a_1.t_1 = a_2.t_2 = ... = a_{p-1}.t_{p-1} \qquad (2)$$

trong đó $t_1, t_2, ..., t_{p-1}$ là các số nguyên dương và $1 \le t_{p-1} < t_{p-2} < ... < t_2 < t_1 < p$ do (1).

Từ 1 đến $p-1$ chỉ có $p-1$ số nguyên dương nên $t_{p-1} = 1$, $t_{p-2} = 2$, ..., $t_{p-i} = i$, ..., $t_2 = p-2$, $t_1 = p-1$. Thay vào (2) được $pa_o = a_1(p-1)$ $= a_2(p-2) = ... = a_i(p-i) = ... = a_{p-2}.2 = a_{p-1}$ (3).

Từ đó a_{p-1} chia hết cho $[1, 2, ..., p-1, p] = m$ (4). Ngược lại, với mỗi số a_{p-1} thỏa mãn (4) thì xác định được bộ số $(a_o, a_1, ..., a_{p-1})$ thỏa mãn (3) nên đúng với yêu cầu bài toán.

Số các số a_{p-1} sao cho $1 \le a_{p-1} \le n$ và chia hết cho $m = [1, 2, ..., p]$ bằng $\left[\frac{n}{m}\right] = \left[\frac{n}{[1,2,...,p]}\right]$, trong đó $[x]$ là kí hiệu phần nguyên của x.

Nhận xét. 1) Một số bạn giải theo cách trên có nhận xét : không yêu cầu p là số nguyên tố. Khi p là số nguyên tố có thể giải bằng cách từ (3) suy ra pa_0 chia hết cho [1, 2, ..., p–1] nên a_0 chia hết cho [1. 2... p–1] và số các số nguyên dương $a_o \le \frac{n}{p}$ mà chia hết cho [1, 2, ..., p–1] bằng

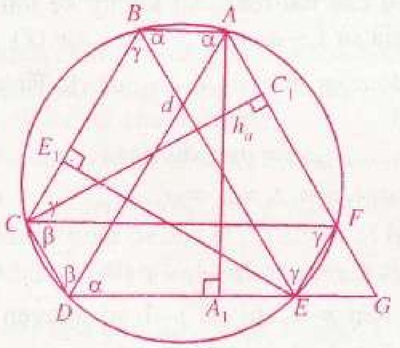
$$\left[\frac{\frac{n}{p}}{[1,2,...,p-1]}\right]=\left[\frac{n}{p.[1,2,...,p-1]}\right]=\left[\frac{n}{[1,2,...,p-1,p]}\right]$$

2) Một số bạn lập luận sai khi từ a_{p-1} chia hết cho mỗi số 1, 2, ..., p suy ra a_{p-1} chia hết cho p!

VIỆT HẢI

Bài T10/THPT. *Xét một lục giác lồi ABCDEF nội tiếp một đường tròn và có các cạnh đối diện song song. Chứng minh rằng tổng độ dài các cạnh đối diện của lục giác đó bằng nhau khi và chỉ khi khoảng cách giữa các cặp cạnh đối diện của nó bằng nhau.*

Lời giải 1. Trước hết, từ ba hình thang cân nội tiếp $ABDE$, $BCEF$ và $CDFA$, ta được : $AD = BE = CF$ (= d) tức là các đường chéo chính của lục giác bằng nhau.



Gọi G là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABEG$ (hình vẽ), theo giả thiết $AB//DE$, E thuộc DG ta được $AB + DE = EG + DE = GD$; đồng thời cũng có $AG = BE = AD$ (= d) và tam giác ADG cân ở A. Gọi $h_a = AA_1$, h_b, h_c lần lượt là khoảng cách giữa hai đường thẳng song song AB và DE, CD và AF, EF và BC. Mặt khác, ta đặt : $AB + DE = DG = 2a$, $CD + FA = 2b$ và $EF + BC = 2c$. Thế thì $DA_1 = A_1G = a$ và trong tam giác ADA_1 vuông ở A_1, ta có : $DA_1^2 + AA_1^2 = AD^2$, hay là : $a^2 + h_a^2 = d^2$. Chứng minh tương tự, ta được các hệ thức :

$$a^2+h_a^2=b^2+h_b^2=c^2+h_c^2\ (=d^2) \qquad (1)$$

Từ các hệ thức (1) suy ra : $a = b = c \Leftrightarrow h_a = h_b = h_c$; ta được đpcm.

Lời giải 2. Cũng đưa vào các kí hiệu a, b, c và h_a, h_b, h_c như lời giải 1. Ta xét thêm các đường chéo của hình thang cân nội tiếp $ABDE$, $BCEF$ và $CDFA$, trong đó độ lớn các góc nhọn giữa cạnh và đường chéo của các hình thang này theo thứ tự là α, β, γ như đã ghi trên hình vẽ. Để ý rằng $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Thế thì từ tam giác ADA_1 vuông ở A_1, ta có : $\frac{h_a}{\sin\alpha} = \frac{-a}{\cos\alpha} = d$. Chứng minh tương tự, ta được :

$$\frac{a}{\cos\alpha}=\frac{b}{\cos\beta}=\frac{c}{\cos\gamma}=\frac{h_a}{\sin\alpha}=\frac{h_b}{\sin\beta}=\frac{h_c}{\sin\gamma}$$
$(= d = 2p)$ (2)

Vì α, β, γ đều là các góc nhọn, nên từ các hệ thức (2) ta suy ra :

$$a=b=c \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma\ (=60^\circ) \Leftrightarrow d_a=d_b=d_c.$$

Nhận xét. 1) Cả hai lời giải trình bày trên đây chỉ đòi hỏi sử dụng kiến thức thuộc SGK Hình học bậc THCS. Đối chiếu hai lời giải, ta thấy lời giải 1 mang tính chất *định tính*, và ngắn gọn nhất, nhưng chưa chỉ ra được cách dựng lục giác lồi nội tiếp. Còn lời giải 2, mang tính chất *định lượng*, tuy sử dụng một chút kiến thức về lượng giác (hàm số sin và cosin của góc nhọn) thuộc SGK Hình học 8, nhưng với lời giải này có thể dễ dàng chỉ ra cách dựng một lục giác lồi nội tiếp theo yêu cầu đề toán.

2) Ngoài ra, sử dụng kiến thức H.H.10 chúng ta còn bổ sung thêm vào lời giải tính chất sau đây của lục giác nội tiếp có các tính chất đặc trưng như đã nêu trong bài toán. Đó là tính chất : Tồn tại một tam giác $\mathcal{T}(h_a, h_b, h_c)$ có độ dài các cạnh bằng h_a, h_b, h_c và có các góc bằng α, β, γ tương ứng đối diện với các cạnh ấy, đồng thời tam giác $\mathcal{T}(h_a, h_b, h_c)$ này nội tiếp một đường tròn đường kính d. Tính chất này còn có thể được chứng minh bằng cách sử dụng véctơ. Thật vậy, ta có : $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}$

Tương tự $\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{EE_1}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}$.

Cộng theo từng vế ba đẳng thức vectơ trên có

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{EE_1}=\vec{0} \qquad (3)$$

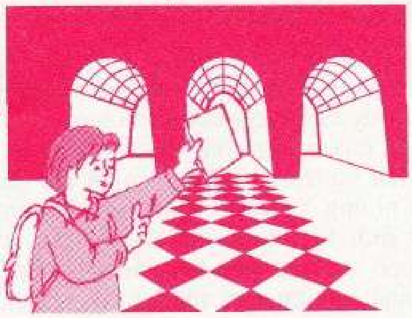
Mặt khác có $\widehat{DAA_1}=\widehat{GAA_1}=\frac{\beta}{2}$. Góc nhọn giữa AA_1 và CC_1 bằng $90^\circ - \widehat{GAA_1} = 90^o - \widehat{DAA_1} = \widehat{ADA_1} = \alpha$. Tương tự góc nhọn giữa CC_1 và EE_1 bằng β, góc nhọn giữa AA_1 và EE_1 bằng γ, nên tổng ba góc nhọn đó bằng $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$ (4)

Từ (3), (4) suy ra tính chất vừa nêu trên.

3) Một số bạn nhận xét đúng rằng : *Nếu một lục giác lồi nội tiếp một đường tròn đã có hai cặp cạnh đối diện song song thì cặp cạnh đối diện còn lại cũng song song.*

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

GIỚI THIỆU VỀ TOÁN HỌC CAO CẤP



PHÁC THẢO VỀ TOÁN HỌC CHO THẾ KỶ 21

Sự nghiên cứu tính cân đối trong cấu trúc thế giới vẫn là trung tâm của toán học. Trong quá khứ, những sơ đồ đối xứng thường được khám phá ra một cách bất ngờ và có những ứng dụng thực tế quan trọng. Nhưng chúng ta cần có những ý tưởng triệt để mới, những nhà khoa học kiểu mới, bao gồm nhiều bộ môn và cả các ngành trung gian. Bởi lẽ, vũ trụ dường như chứa nhiều cấu trúc đến nỗi sẽ phải sáng tạo cho mỗi cấu trúc đó một mô hình toán học khác.

MISHA GROMOV
(Giáo sư ĐH New York, Hoa Kỳ)

Sau đây là một số nhận xét ngắn gọn về các phương hướng có thể có cho toán học trong những thập niên tới.

1. Trước tiên Toán học cổ điển đã từng nghiên cứu tính hài hòa cấu trúc. Điều đó bắt đầu từ khi các nhà hình học cổ Hy Lạp nhận thức rằng không gian liên tục ba chiều của chúng ta có hai nhóm đối xứng đáng chú ý là *nhóm những phép tịnh tiến* và *nhóm những phép quay*. Chính hai nhóm đó thấm vào các tính chất chủ yếu của thế giới vật chất của chúng ta. Trong cuộc sống hằng ngày, chẳng hạn khi chúng ta đi, chúng ta không nghĩ gì đến sự đối xứng. Điều đó phần nào do tính không giao hoán của nhóm những phép quay mà thường khó hiểu thấu được. Sau đó, người ta khám phá ra những phép có tính đối xứng (thông thường không giao hoán) ngày càng sâu hơn. Như là *nhóm Lorentz - Poincaré về tương đối :* nhóm những biến đổi lưu giữ tại một điểm cấu trúc không gian - thời gian tuyến tính. Như là *nhóm dung tích*(1) những hạt cơ bản: các nhà vật lí biết liên kết một tập hợp những phép đối xứng cho mọi hạt cơ bản.

Những mô hình toán học đồng dạng cũng xuất hiện nhưng ở mức độ ít cơ bản hơn, ví dụ trong sự phân loại các tinh thể, và những vật tựa như tinh thể mới đây trong những hình tự đồng dạng (những đối tượng của fractal), trong lí thuyết những hệ thống động, đặc biệt cơ học thống kê hoặc trong *tính độc đạo*(2) *của những phương trình vi phân.*

Sự nghiên cứu những phép đối xứng, nói khác đi sự nghiên cứu những tính hài hòa trong cấu trúc thế giới vẫn là trung tâm của toán học thuần túy (và của vật lí học). Điều đó thường xảy ra một cách bất ngờ, một số sơ đồ đối xứng mà các nhà toán học khám phá ra sẽ có những ứng dụng về lí thuyết cũng như về thực hành. Hiện tượng như vậy đã xuất hiện nhiều lần trong quá khứ. Dưới đây là ba ví dụ :

- *Hình học tích phân* là cơ sở để chế tạo những scanner (máy cắt lớp) và nói chung là những thiết bị hình ảnh y học.
- Những nghiên cứu lí thuyết về các số nguyên tố đã dẫn đến sự xây dựng những *mã sửa sai* rất kì diệu.
- *Lí thuyết biểu diễn những nhóm vô hạn chiều*(3) là cơ sở những mạng liên thông có tính liên kết cao.

---

(1) groupe de jauge : lí thuyết này giả định đặt chồng lên trên một hạt cơ bản, một không gian trừu tượng (gọi là không gian thớ) và thỏa mãn một điều kiện về tối thiểu (minimum).

(2) Tính độc đạo này chỉ những gì diễn ra khi trong một mặt phẳng phức (không gian phức bằng số), người ta xem xét sự biến thiên của nghiệm một phương trình khi đi trọn một vòng xung quanh 1 điểm .

(3) Trên địa cầu, xem xét tất cả những hàm hợp lẽ (tỉ trọng ôzôn, độ sâu các biển, độ cao mặt nước biển, ở một lúc nào đó, v.v...) Muốn nghiên cứu những hàm đó, tạo thành một không gian vô số chiều, cần phân tích (điển hình là trong sự báo trước các thủy triều) các hàm đó thành tổng (vô hạn) những hàm đơn giản là những chấn động cơ sở của địa cầu.

2. Phạm vi toán học đã mở rộng nhiều, chính nó trở thành đề tài của sự phân tích lôgic lẫn sự phân tích toán học. Điều đó dẫn đến sự sáng tạo ra *lôgic toán* rồi *tin học lí thuyết* (khoa học về cấu trúc và sự hoạt động của các máy điện toán). Đến nay tin học lí thuyết đạt tới sự chín muồi, thu hút những ý tưởng có từ toán học cổ điển nhưng cũng thừa hưởng những tiến bộ công nghệ của các máy điện toán (phần cứng). Điều đó dẫn đến sự đưa vào thực hành những angorit (thuật toán) mà lúc đầu chỉ được xác định về lí thuyết. *Hàm biến đổi Fourier*(4) là một ví dụ đặc biệt kì lạ về sự tác động của toán học thuần túy lên các phương pháp tính toán bằng số mà các kĩ sư sử dụng hàng ngày.

Những ý tưởng của tin học lí thuyết còn có tương tác với những lĩnh vực khác, như những dự án máy tính lượng tử, quan niệm những mô hình dựa trên ADN, sự hình thành những chủ đề quán xuyến của sinh học, động thái hoạt động của não con người, v.v... Trong vài thập niên nữa, tin học lí thuyết triển khai những ý tưởng có mức độ toán học sâu hơn nhiều, những ý tưởng sẽ dẫn tới những tiến bộ cơ bản trong sự tiến bộ công nghiệp của các máy điện toán, như sự đột phá đã chờ đợi từ lâu vào trí thông minh nhân tạo và khoa học về người máy.

3. Tồn tại một lớp rộng những vấn đề đặc biệt liên quan đến những khoa học thực nghiệm (sinh học, hóa học, địa vật lí học, y học...). Ở đây người ta đã xử lí một số rất lớn những dữ liệu, nhưng được cấu tạo một cách lỏng lẻo. Các toán học cổ điển, lí thuyết xác suất và toán học thống kê cho những kết quả tốt khi cấu trúc còn thiếu sót lớn. Ngược đời là sự thiếu tổ chức cấu trúc và những sự tương quan bộ phận dẫn đến một mức độ cao của sự đối xứng toàn bộ. Vì thế định luật Gauss, cho phép phân bố các xác suất, nảy sinh từ tổng các biến bấp bênh.

Nhưng thường chúng ta gặp những dữ liệu được cấu tạo trong những tình huống mà phép tính xác suất không được vận dụng. Như vậy, những sự hình thành khoáng vật học hoặc cả những hình ảnh của những mô sống mà một kính hiển vi cung cấp, ẩn giấu những sự tương quan chưa biết, nhưng phải tính đến (vì cái mà chúng ta tưởng là nhìn thấy không bao giờ được thể hiện bằng những hình ảnh thật, mà là kết quả của sự phân tán một số sóng : ánh sáng, siêu âm, sóng địa chấn...). Những ví dụ mang tính lí thuyết hơn của những cấu trúc đó xuất hiện trong *lí thuyết lọc thấm*(5) giải thích những tịnh tiến theo pha trong vật lí học, hoặc trong *chuyển động Brao* không có sự tự giao nhau (chẳng hạn trong những chuỗi dài phân tử có trong các dung môi).

Những vấn đề như vậy, triển khai giữa đối xứng thuần túy và sự lộn xộn hoàn toàn, chờ đợi sự xuất hiện của ngành toán hoàn toàn mới. Để đạt được tiến bộ trong những vấn đề đó, chúng ta cần có những ý tưởng mới triệt để, những cách thức mới làm toán với những máy điện toán. Cần có một sự hợp tác gần gũi hơn nữa giữa các nhà nghiên cứu những bộ môn khác nhau, nhằm làm cho những lí thuyết và những dữ liệu thực nghiệm gặp nhau. Vì lẽ đó, một số phương hướng đã được nêu lên : sự phân tích những tín hiệu và những hình ảnh bằng sóng nhỏ, tức là những kĩ thuật nghịch đảo phân tán phụ thuộc bối cảnh này hay bối cảnh khác ; sự phân tích những cấp độ hình học, hoặc sự phân tích bằng tia X những phân tử lớn dưới dạng tinh thể. Tác động của những sự phát triển sắp tới đó sẽ rất lớn, cả về lí thuyết và trong công nghiệp. Một *angorit nghịch đảo phân tán*(6) hữu hiệu có khả năng cách mạng hóa những chẩn đoán y học, làm cho những máy siêu âm cũng có hiệu năng như sự phân tích bằng tia X quang hiện nay.

4. *Công suất của các máy điện toán* gần tới giới hạn lí thuyết, và làm cho chúng ta hướng về những vấn đề hiện thực hơn (do đó khó hơn). Chúng ta phải đối mặt với "sự rủi ro của chiều" (chiều của những không gian hình thế mà người ta nghiên cứu, 10^{25} cho cơ học thống kê), chặn ngang đường sự đưa vào có hiệu quả những dữ liệu bằng số, trong các khoa học thuần túy cũng như trong các khoa học của kĩ sư. Vì thế, chúng ta cần nâng cao hơn nhiều mức độ tinh vi trong kết cấu các máy điện toán và trong các chương trình đưa vào máy. Điều này cần nhờ đến những ý tưởng trình bày ở các phần 1 và 2.

5. *Phải làm tốt hơn việc giảng dạy và truyền bá những ý tưởng*. Khối lượng, độ sâu sắc và tính phức tạp về cấu trúc của toàn bộ các lĩnh vực toán học hiện nay dứt khoát buộc chúng ta phải tìm những tiếp cận mới để truyền thông những khám phá của một lĩnh vực cho những nhà nghiên cứu một lĩnh vực khác và cũng để ...

(4) Hàm Fourier này biến đổi, trong radio, một tín hiệu điều biến theo tần số thành tín hiệu điều biến theo biên độ, tức là tín hiệu hợp với tai người nghe.

(5) Lí thuyết này cho tìm những mô hình toán học để giải thích những tịnh tiến theo pha có trong những hiện tượng, kiểu như nước đông lại, sự từ hóa tự động của một

những người không phải nhà toán học có khả năng tiếp xúc nhiều hơn nữa với các ý tưởng toán học. Hiện nay, chúng ta, những nhà toán học biết ít về những gì diễn ra trong các khoa học, và đặc biệt những khoa học của các kĩ sư. Về phía họ, các nhà thực hành và các kĩ sư thường không biết những cơ hội mà những tiến bộ của toán học thuần túy dành cho họ. Sự mất cân bằng nguy hiểm đó phải bằng mọi giá chấn chỉnh lại, bằng cách một mặt cung cấp nhiều pkiến thức khoa học tự nhiên cho các nhà toán học, mặt khác cung cấp cho các nhà khoa học và kĩ sư tương lai những vấn đề trung tâm của toán học hiện nay. Điều đó đòi hỏi có những chương trình giảng dạy mới và sự nỗ lực rất lớn của các nhà toán học để trình bày cho một công chúng rộng hơn hiểu được những ý tưởng và những kĩ thuật cơ bản của toán học, đặc biệt những ngành toán học mới phát triển trong những thập niên gần đây. Do vậy, cần có một thế hệ mới những nhà toán học chuyên nghiệp, có thể kết nối giữa toán học thuần túy và các khoa học ứng dụng. Sự phong phú của những ý tưởng gặp nhau là quyết định cho sự sống còn của các khoa học cũng như của toán học.

6. Phải *tăng tài trợ cho nghiên cứu toán học*. Bởi lẽ khi chúng ta sử dụng sức mạnh của máy điện toán và tăng cường sự hợp tác với các khoa học và công nghiệp, chúng ta cần có nhiều phương tiện hơn để duy trì sự năng động đó. Điều quan trọng đối với chúng ta là làm sao cho xã hội hoàn toàn có ý thức về toàn bộ tiềm lực nghiên cứu toán học và về vai trò then chốt của toán học trong sự phát triển công nghiệp, cả ngắn hạn và trung hạn.

NGUYỄN VĂN THIÊM
phỏng dịch
(*theo La Recherche* 10.2001)

THI THƠ TOÀN T

Mải làm toán cả năm, nhìn lên tờ lịch đã thấy gần cuối năm rồi. Chả mấy lại đến Tết. Tết thì được quyền nghỉ làm toán và có thể vui đọc thơ, thi thơ như đã hẹn từ đầu năm. Các bạn hãy làm thơ gửi về để tòa soạn còn kịp chọn đăng vào số 1.2005. Chủ đề của lần thi này là **Tết ta toán tuổi trẻ thi thơ toàn t**. Sau đây là một bài ví dụ:

Thầy trò Toán Tuổi trẻ
Tết Ta thường thi Thơ
Từ Tết Tây thi thử
Thấy thích thú thảnh thơi
Thôi thì từ thơ Tàu
Thơ Triều Tiên, thơ Thái
Thử tới tận thơ Tây...
Toàn thử thơ thông thái
Thơ thầy thật trí tuệ
Thơ trò thì trẻ trung
Toàn thơ tình trong trắng
Thầy trò toán thẳng thắn
Thơ thấp thỏm trong tâm
Thấy thơ thêm tấn tiến
Thầy trù tính thả thơ
Tết ta toán Tuổi trẻ
Thi thơ Tết toàn "tê"
Tới tấp thư từ tới
Toán Tuổi trẻ thi thơ.

Các bạn cầm bút và bắt đầu vắt óc đi. Bài đừng dài quá 1 trang A4 nhé.

BÍNH NAM HÀ

GẤP HÌNH CHỮ NHẬT CÓ TỈ LỆ VÀNG

Bạn có tờ giấy hình chữ nhật $ABCD$ với $AD > AB$. Hãy bằng cách gấp giấy (ít lần gấp, không dùng dụng cụ đo vẽ) để tạo ra hình chữ nhật $ABEF$ có tỉ lệ vàng $\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$.

VĂN KHANH
(Hà Nội)

DANH SÁCH ĐỘC GIẢ THAM GIA SÁNG TÁC BIỂU TƯỢNG TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

CÁC BẠN GỬI HÌNH ĐẸP ĐƯỢC QUÀ TẶNG CỦA TÒA SOẠN

1. *Nguyễn Viết Dũng*, 12B, THPT Hoàng Mai, Quỳnh Lưu, **Nghệ An**

2. *Bùi Thanh Châm*, Lớp 12A4,THPT chuyên Hà Nam,Tỉnh **Hà Nam**

3. *Hoàng Huy Hưng*, 12A2,THPT Dương Xá, Gia Lâm, **Hà Nội**

4. *Nguyễn Thị Thanh Xuân*, NXB Giáo dục, **Hà Nội**

5. *Lương Bá Tín*, Số 6, ngõ 21, Đường Thành Thái, Phường Hàm Rồng, **Thanh Hóa**

6. *Nguyễn Trọng Quân*, Lớp 44C Đại học Thủy Lợi **Hà Nội**

7. *Phạm Khánh Toàn*, Số 4,ngõ 15,Vương Thừa Vũ,Thanh Xuân, **Hà Nội**

8. Trần Văn Tuấn, 12K3,THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hoá**

9. *Trần Ngọc Đức*, Lớp K47A2, Toán Tin, ĐHKHTN **Hà Nội**

10. *Nguyễn Ngọc Minh*, 50/2/1A,ấp Tân An, Tân Quy Tây, Sa Đéc, **Đồng Tháp**

11. *Trịnh Văn Vương*, 10T, THPT Lam Sơn, **Thanh Hóa**

12. *Lê Xuân Hòa*, Khu 10, Tiên Du, Phù Ninh, **Phú Thọ**

13. *Vũ Minh Quân*, 10F, THPT Chu Văn An, **Hà Nội**

14. *Nguyễn Ninh Anh*, 11A5,THPT Trung Giã, Sóc Sơn, **Hà Nội**

15. *Hoàng Mạnh Long*, 10A4,THPT Chu Văn An, **Lạng Sơn.**

CÁC BẠN KHÁC THAM GIA GỬI HÌNH VẼ

Vũ Mạnh Phong, 11C2, THPT Yên Định,**Thanh Hóa**, *Bùi Mai Thanh Loan*, Sv năm thứ nhất, HV CN BCVT Cơ sở 2, *Đoàn Trọng Minh*, Số nhà 2, ngõ 25, phố Mật Sơn 2, Đông Vệ, **Thanh Hóa**, *Đỗ Văn Chung*, 11A5, THPT Lê Lợi, Thọ Xuân,**Thanh Hóa**, *Nguyễn Anh Tuấn*, Gv THPT NK Ngô Sỹ Liên, **Bắc Giang**, *Nguyễn An Tuấn*, 10T, THPT chuyên Thăng Long, **Đà Lạt**, *Trần Anh Tuấn*, 9M, THCS Việt Nam-Angieri, Hà Đông, **Hà Tây**, *Nguyễn Tuấn Hưng*, THPT An Lão, **Hải Phòng**, *Cao Lam Sơn*, Gv THCS Hòa Thắng,Tuy Phước, **Bình Định**, *Nguyễn Viết Hải,* 11T1,THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**, *Nguyễn Ngọc Anh*, 10B1,THPT Yên Định II,Yên Định, **Thanh Hóa**, *Phạm Văn Thuận*, 12A2, THPT Sơn Tịnh I, Sơn Tịnh, **Quảng Ngãi,** *Hồ Quyết Thắng*, 10A5, THPT Nguyễn Xuân Ôn, Diễn Châu, **Nghệ An**, *Nguyễn Phương Loan,* 10A1,THPT Tứ Kỳ, **Hải Dương**, *Lương Thế Huân*, 160/1/22 Xô Viết Nghệ Tĩnh, Phường 21, Quận Bình Thạnh,**TP Hồ Chí Minh**, *Phạm Văn Thuận*, Chương trình Đào tạo CNTT,ĐHKHTN -ĐHQGHN **Hà Nội**, *Đỗ Ngọc Nhân*, 422 Quang Trung, TTr Phú Mỹ, **Bình Định**, *Dương Thành Trung*, 10A1,THPT Tống Văn Trân,Ý Yên, **Nam Định**, *Hoàng Thị Quỳnh Trang*, 10A5, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**, *Ngô Văn Đang*, Hòm thư 3NB-9402, Mường Lay, **Điện Biên**, Vũ Quốc Đạt, 12 Lý, THPT chuyên **Hưng Yên**, *Nguyễn Văn Hải*, 12G, THPT Nghĩa Đàn, **Nghệ An**, *Đỗ Xuân Chi*, 12A4,THPT Xuân Đỉnh, **Hà Nội**, *Nguyễn Tuấn Anh*, 11A10, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**, *Nguyễn Trọng Phú*, 12I, THPT BC Bố Trạch, **Quảng Ngãi**, *Nguyễn Thị Thanh Thủy*, 10A3, THPT Thái Phiên, Ngô Quyền, **Hải Phòng**, *Lê Văn Dũng*, Đội 6, Trung Chính, Nông Cống, **Thanh Hóa,** *Nguyễn Thanh Tùng*, 12A10, THPT Ngô Sỹ Liên, TX Bắc Giang, **Bắc Giang**, *Vũ Nam Phong*, 10E1,THPT Cẩm Phả, **Quảng Ninh**, *Phạm Thị Tuyết*, Đội 4, thôn Hà Hải, xã Hà Kỳ, Tứ Kỳ, **Hải Dương**, *Tô Văn Nhân*, Gv THPT Quỳnh Lưu, **Nghệ An**, *Trần Thị Hải*, 11A5 THPT Cam Lộ, **Quảng Trị**, *Hoàng Huy Hưng*, 12A2, THPT Dương Xá, Gia Lâm, **Hà Nội**, *Nguyễn Đức Thuận*, 11A3, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**, *Nguyễn Văn Kỳ*, Lớp K28,Toán Tin, ĐHSP Hà Nội 2, Nguyễn Thanh Minh, 9B, THCS Hải Thái, Gio Linh, **Quảng Trị**, *Trần Huyền Trang*, Lập Thành, Mỹ Bằng,Yên Sơn, **Tuyên Quang** ; *Nguyễn Thanh Nghĩa*, 21C, tổ14A, ngõ123, đườngTân Khương, Khương Thượng, Đống Đa, **Hà Nội**, *Trần Thị Thanh Loan*, 10A3,THPT Hoài Đức A, Hoài Đức, **Hà Tây**, *Nguyễn Mạnh Thành*, Lớp A3 K31,THPT chuyên Phan Bội Châu,**Nghệ An**, *Nguyễn Đức Lượng*, Gv THPT Lê Lai, Ngọc Lài, **Thanh Hóa**, *Hoàng Ngọc Quý*, Lớp 12A13 , THPT TTr Cẩm Xuyên,

Trao đổi về bài MỘT BẤT ĐẲNG THỨC CÓ NHIỀU ỨNG DỤNG

(THTT SỐ 328 THÁNG 10.2004)

Bất đẳng thức nêu ở Ví dụ 3 không đúng khi $a = b = c > 1$. Nếu áp dụng đúng BĐT (2) trong bài báo nói trên thì mẫu số của phân số ở lời giải chưa đúng. Xin đề xuất BĐT sau coi là Ví dụ 7.

Ví dụ 7. *Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{b^2}{c^2+ca+a^2}+\frac{c^2}{a^2+ab+b^2}\geq 1$$

Lời giải. (Đặt vế trái của BĐT trên là T. Áp dụng BĐT (2) và (3) trong bài báo được

$$T \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2(b^2+bc+c^2)+b^2(c^2+ca+a^2)+c^2(a^2+ab+b^2)}$$

$$= \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+(ab)(bc)+(ca)(ab)+(bc)(ca)}$$

$$\geq \frac{a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}$$

$$\geq \frac{3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)} = 1.$$

Nếu kết hợp với $1 \geq \dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$ thì ta được $T \geq \dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$. BĐT cuối cùng này cũng có thể chứng minh được bằng cách áp dụng BĐT (1) và (3) trong bài báo trên.

KHỔNG CHÍ NGUYÊN
(Trường CĐSP Tuyên Quang)

Lời Tòa soạn.

Nhận xét trên là đúng. Trong Ví dụ 3 ở bài báo nói trên đã in thiếu giả thiết là các số dương *a, b, c không lớn hơn 1.* Lúc đó $a^2 \leq a$, $b^2 \leq b$, $c^2 \leq c$ và lời giải vẫn giữ nguyên.

Chú ý. Ở dòng 5 cột trái trang 14, mục Giải bài kì trước trong THTT số 328 (10.2004) xin sửa số $10^{10} = 1024$ thành $2^{10} = 1024$.

Cảm ơn bạn Khổng Chí Nguyện và thành thật xin lỗi bạn đọc cùng tác giả bài báo trên.

THTT

Hà Tĩnh, *Lê Viết Cường*, Khối 10, Bến Thủy,TP Vinh, **Nghệ An**, *Trần Nhật*, Lớp Toán Lý 29, CĐSP **Quảng Ngãi**, Phạm Văn Tiệp, 11A1,THPT Nam Sách, **Hải Dương**, *Nguyễn Quang Lộc*, 12A1,THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch,**Vĩnh Phúc**, *Nguyễn Duy Toản*, Hs THPT Nguyễn Mộng Sơn, Đông Sơn, **Thanh Hóa**, *Nguyễn Đăng Khoa*, G6B - Cư xá Lý Chiêu Hoàng, Phường 10, Quận 6 ,**TP Hồ Chí Minh**, *Phạm Văn Tiệp*, 11A1, THPT Nam Sách, **Hải Dương**, *Mai Trọng Khánh*, 11A1,THPT Nguyễn Công Trứ, Phường 11, Quận Gò Vấp, **TP Hồ Chí Minh**, *Đặng Nhất Lâm*, HS THPT Lương Văn Can, Tuy Hòa, **Phú Yên**, *Bùi Mai Thanh Loan*, Sv năm thứ 1, HV BCVT, cơ sở **TP Hồ Chí Minh**, *Đỗ Thanh Lâm*, 11T,THPT chuyên Sơn La, *Nguyễn Hồng Thái*, 11A2, THPT Nguyễn Xuân Ôn, Diễn Châu, **Nghệ An** ; *Trần Hải Đường*, xóm 10, xã NamTrung, Nam Đàn, **Nghệ An**; *Trần Thị Hải*, 11A5, THPT Cam Lộ, **Quảng Trị**, *Nguyễn Văn Xưởng*, 12A6, THPT Liên Hà, Đông Anh, **Hà Nội**, *Đỗ Thanh Tâm*, 11 Toán, THPT chuyên Sơn La, **Sơn La**.

Các biểu tượng đẹp của Tạp chí THTT đang chờ ý kiến của Hội đồng xét duyệt và sẽ được công bố sau.

THTT

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 329 (11-2004)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

ĐÓN ĐỌC THTT SỐ 330 (12/2004)

- Về một bất đẳng thức trong thi Toán quốc tế 2004.
- Đề thi tuyển sinh môn Toán vào trường THPT chuyên ngoại ngữ ĐH Ngoại ngữ ĐHQG Hà Nội năm 2004.
- Hướng dẫn giải đề thi Toán vào THPT chuyên ĐH Vinh 2004
- Một mô hình của Fractal cho THCS (tiếp theo)
- Vấn đề dân số và dãy Phi-bô-na-xi.

Mời các bạn đặt mua Tạp chí THTT cả quý, cả năm 2005 tại Bưu điện.
THTT

35 NĂM TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGOẠI NGỮ ĐHNN – ĐHQG HÀ NỘI

Trường THPT chuyên Ngoại ngữ thuộc trường Đại học Ngoại ngữ, Đại học Quốc gia Hà Nội (PTCNN) được thành lập từ năm 1969. Nằm trong khuôn viên của Trường Đại học Ngoại ngữ (quận Cầu Giấy), ngôi trường xinh xắn này hiện có hơn 1000 học sinh được tuyển chọn từ mọi miền đất nước. Trường có nhiệm vụ đào tạo học sinh giỏi ngoại ngữ và vững vàng các môn văn hóa cơ bản bậc phổ thông, là cơ sở tạo nguồn tài năng ngoại ngữ cho các trường Đại học và các ngành kinh tế xã hội nên có điều kiện rất thuận lợi khi thi vào đại học.

Trường có 75 cán bộ giáo viên do ThS. Nguyễn Thị Chi làm Hiệu trưởng. Đội ngũ giáo viên của trường ngày càng được chuẩn hóa; hiện có 3 tiến sĩ, 19 thạc sĩ, 3 giáo viên đang làm Nghiên cứu sinh và 14 giáo viên đang học Cao học. Riêng bộ môn toán có 2 tiến sĩ, 4 thạc sĩ, còn lại nhiều thầy cô đang học cao học.

Chỉ tiêu tuyển sinh của trường hàng năm là 380 (trong đó có 140 suất học bổng) cho chuyên 4 thứ tiếng : Anh, Nga, Pháp, Trung. Từ năm học 2005-2006 dự kiến sẽ có thêm môn chuyên tiếng Đức và tiếng Nhật. Học sinh cả nước đều có thể dự thi vào trường nếu tốt nghiệp THCS từ khá trở lên, hạnh kiểm các năm THCS từ khá trở lên, điểm trung bình môn ngoại ngữ năm lớp 9 từ 7.0 trở lên, không có dị tật bẩm sinh, phát âm đúng, rõ. Môn thi tuyển là Văn, Toán, Ngoại ngữ, điểm ngoại ngữ hệ số 2.

Qua 35 năm xây dựng và trưởng thành, trường PTCNN đã đào tạo hơn 6000 học sinh THPT. Tỉ lệ học sinh thi đỗ vào các trường Đại học mỗi năm từ 94% đến 98% trong đó có nhiều em đỗ Thủ khoa. Nhiều năm học sinh PTCNN đạt điểm thủ khoa thi tốt nghiệp THPT, trong đó có 2 em đạt điểm tối đa 60/60 điểm (em Võ Thị Quỳnh Anh năm 1998 và em Cấn Thị Thùy Linh năm 1999) và được nhận phần thưởng của Thủ tướng Chính phủ. Trường đã có 5 Huy chương vàng và 2 Huy chương bạc trong 7 lần tham dự kì thi. Olympic tiếng Nga tổ chức tại Mátxcơva. Kể từ khi Bộ GD&ĐT cho phép PTCNN dự thi HSG Quốc gia năm 1989, học sinh của trường đã đạt 316 giải (từ giải Nhất đến giải Khuyến khích) về 3 môn : tiếng Anh, tiếng Pháp và tiếng Nga. Học sinh của trường còn đoạt các giải cao trong các cuộc thi "Đường lên đỉnh Olympia", "Khám phá thế giới Computer" do VTV tổ chức; các cuộc thi giải Toán do Báo THTT tổ chức v.v... Học sinh từ các thế hệ của trường đã và đang công tác ở mọi ngành nghề và trên mọi lĩnh vực kinh tế xã hội, là cán bộ ngoại ngữ nòng cốt cho các trường Đại học, các ngành Ngoại giao, Ngoại thương, Quân đội, Công an, cho các cơ quan báo chí, phát thanh truyền hình trong cả nước.

ThS. Nguyễn Thị Chi
Hiệu trưởng

Trường THPT chuyên Ngoại ngữ còn có thành tích đáng tự hào về Nghiên cứu khoa học và tự bồi dưỡng. Giáo viên của trường đã hoàn thành 30 cuốn sách Tham khảo tiếng Anh xuất bản và phát hành trên toàn quốc kể từ năm 1997, góp phần quan trọng trong việc hướng dẫn nội dung giảng dạy cho các lớp chuyên tiếng Anh trong cả nước, phát huy vai trò trường Chuyên của Bộ GD và ĐT.

Với những thành tích đáng tự hào đó, nhà trường đã được nhận các phần thưởng : Huân chương Lao động Hạng Ba năm 1994, Huân chương Lao động hạng Nhì năm 1999, Huân chương Lao động Hạng Nhất năm 2004, 2 giáo viên được Nhà nước phong tặng danh hiệu Nhà giáo ưu tú, 1 giáo viên được tặng thưởng Huân chương Lao động Hạng Ba, 7 giáo viên được nhận Bằng khen của Thủ tướng chính phủ, 8 giáo viên được nhận Bằng khen của Bộ trưởng Bộ GD&ĐT.

Trong giai đoạn phát triển mới, nhà trường đang có nhiều dự định nhằm nâng cao hơn nữa chất lượng đào tạo, xứng đáng với niềm trông đợi của đông đảo học sinh và phụ huynh.

ISSN : 0866-8035 Chế bản tại Tòa soạn
Chỉ số : 12884 In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ Giá : 3500 đồng
Mã số : 8BT31M4 In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2004 Ba nghìn năm trăm đồng