DIỄN ĐÀN GIÁO VIÊN TOÁN

LÝ THUYẾT CƠ BẢN

TOÁN 11

NGUYỄN BẢO VƯƠNG

DIỄN ĐÀN GIÁO VIÊN TOÁN

Lý thuyết cơ bản

TOÁN 11

NGƯỜI TỔNG HỢP: NGUYỄN BẢO VƯƠNG

Năm học: 2018 - 2019

Mục lục

Chương 1. Lượng giác

Vấn đề 1. Các hàm số lượng giác

I). TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ:

1). Hàm số chẵn, hàm số lẻ:

- Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D gọi là hàm số chẵn nếu: với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.
- Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D gọi là hàm số lẻ nếu: với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.
Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

2). Hàm số đơn điệu:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $(a;b) \subset \mathbb{R}$.

- Hàm số $y = f(x)$ gọi là đồng biến (hay hàm số tăng) trên $(a;b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ có $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số $y = f(x)$ gọi là nghịch biến (hay hàm số giảm) trên $(a;b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ có $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

3). Hàm số tuần hoàn:

Hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D, được gọi là hàm số tuần hoàn nếu có số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D$ ta có $(x+T) \in D$ và $(x-T) \in D$ và $f(x+T) = f(x)$.

Nếu có số dương T nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên thì T gọi là chu kì của hàm tuần hoàn f.

II). HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC:

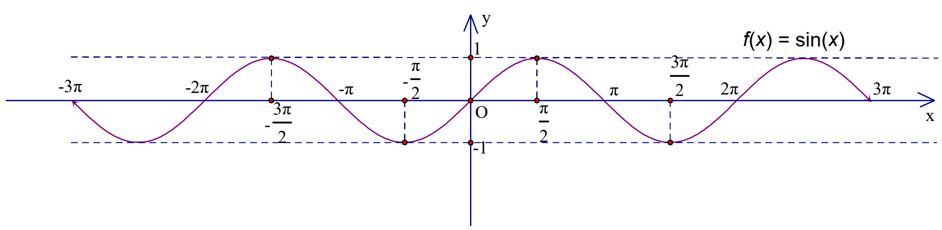
1). Hàm số sin: $y = \sin x$

Tính chất:
Tập xác định $\mathbb{R}$.
Tập giá trị: $[-1;1]$,có nghĩa là $-1 \le \sin x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Hàm số tuần hoàn với chu kì 2π, có nghĩa $\sin(x + k2\pi) = \sin x$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

$y = \sin x$ là hàm số lẻ, đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O là tâm đối xứng (Hình 1).



Hình 1.

Một số giá trị đặc biệt:

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

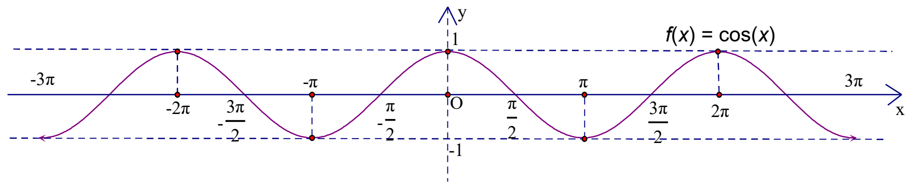
2). Hàm số côsin: $y = \cos x$

Tính chất:
Tập xác định $\mathbb{R}$.
Tập giá trị: $[-1;1]$,có nghĩa là $-1 \le \cos x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Hàm số tuần hoàn với chu kì 2π, có nghĩa $\cos(x + k2\pi) = \cos x$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\pi+k2\pi;k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(k2\pi;\pi+k2\pi\right), k\in\mathbb{Z}$.

$y=\cos x$ là hàm số chẵn, đồ thị hàm số nhận Oy làm trục đối xứng (Hình 2).



Hình 2.

Một số giá trị đặc biệt:

$\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

$\cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

$\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

3). Hàm số tang: $y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

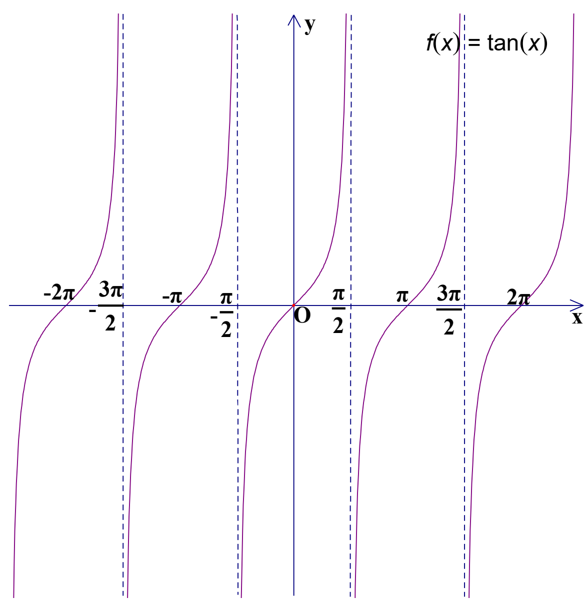
Tập xác định: $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$

Tập giá trị là R.

Hàm số tuần hoàn với chu kì π, có nghĩa $\tan\left(x+k\pi\right)=\tan x,(k\in\mathbb{Z})$.

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right),\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

$y=\tan x$ là hàm số lẻ, đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng và nhận mỗi đường thẳng $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ làm đường tiệm cận.(Hình 3)



Hình 3.

Một số giá trị đặc biệt :

$\tan x=0\Leftrightarrow x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$

$\tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

$\tan x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

4). Hàm số cotang: $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

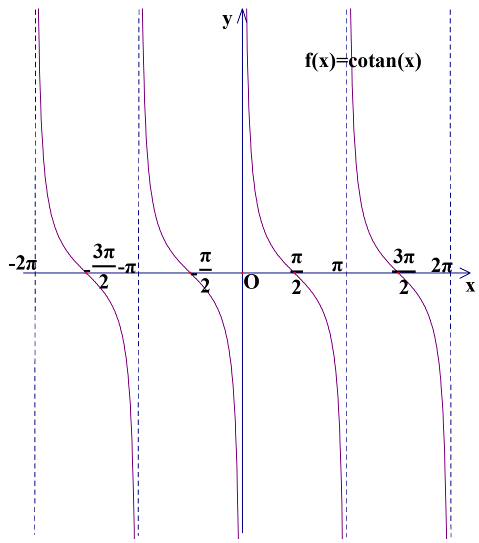
Tập giá trị: $\mathbb{R}$.

Tính chất:

Hàm số tuần hoàn với chu kì π, có nghĩa $\cot(x + k\pi) = \cot x, (k \in \mathbb{Z})$.

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

$y = \cot x$ là hàm số lẻ, đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng và nhận mỗi đường thẳng $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ làm đường tiệm cận (Hình 4).



Hình 4

Một số giá trị đặc biệt :

$\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

ÔN TẬP: CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

HỆ THỨC CƠ BẢN

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ **2.** $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ **3.** $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

4. $\tan x.\cot x = 1$ **5.** $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ **6.** $1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

Điều kiện tồn tại:

- tanx là $(x \neq \pi/2 + k\pi, k \in Z)$ • cotx là $(x \neq k\pi, k \in Z)$
- sinx là $-1 \leq \sin x \leq 1$ • cosx là $-1 \leq \cos x \leq 1$

chú ý:

- $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ • $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

CÔNG THỨC CỘNG

7. $\cos(a + b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$ **8.** $\cos(a - b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$

9. $\sin(a + b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$ **10.** $\sin(a - b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b$

11. $\tan(a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$ **12.** $\tan(a - b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a.\tan b}$

13. $\cot(a+b)=\dfrac{\cot a.\cot b-1}{\cot a+\cot b}$ **14.** $\cot(a-b)=\dfrac{\cot a\cot b+1}{\cot a-\cot b}$

CÔNG THỨC NHÂN

NHÂN ĐÔI

15. $\sin 2a=2\sin a.\cos a$ **16.** $\cos 2a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a=\cos^2 a-\sin^2 a$

17. $\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

NHÂN BA

18. $\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a$ **19.** $\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a$ **20.** $\tan 3a=\dfrac{3\tan a-\tan^3 a}{1-3\tan^2 a}$

HẠ BẬC

21. $\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$ $\Rightarrow 1-\cos 2a=2\sin^2 a$

22. $\cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2}$ $\Rightarrow 1+\cos 2a=2\cos^2 a$

23. $\sin^3 a=\dfrac{3\sin a-\sin 3a}{4}$

24. $\cos^3 a=\dfrac{3\cos a+\cos 3a}{4}$

GÓC CHIA ĐÔI: với $t=\tan\dfrac{x}{2}$

25. $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$ **26.** $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ **27.** $\tan x=\dfrac{2t}{1-t^2}$

TỔNG THÀNH TÍCH

28. $\cos a+\cos b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$ **29.** $\cos a-\cos b=-2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$

30. $\sin a+\sin b=2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$ **31.** $\sin a-\sin b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$

32. $\tan a+\tan b=\dfrac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}$ **33.** $\tan a-\tan b=\dfrac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}$

34. $\cot a+\cot b=\dfrac{\sin(a+b)}{\sin a\sin b}$ **35.** $\cot a-\cot b=\dfrac{-\sin(a-b)}{\sin a\sin b}$

TÍCH THÀNH TỔNG

36. $\cos a\cos b=\dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]$

37. $\sin a\sin b=\dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$

38. $\sin a\cos b=\dfrac{1}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right]$

CUNG LIÊN KẾT

Góc đối nhau	Góc bù nhau	Góc phụ nhau
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$	$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha$

Góc hơn kém π	Góc hơn kém $\frac{\pi}{2}$
$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$
$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$
$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha$
$\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha$

Vấn đề 2. Phương trình lượng giác cơ bản

∘ $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{array}\right., (k \in Z)$ ∘ $\cos u = \cos v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{array}\right., (k \in Z)$

∘ $\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi, (k \in Z)$ ∘ $\cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi, (k \in Z)$

CÁC TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT:

∘ $\cos u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in Z)$ ∘ $\sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi, (k \in Z)$

∘ $\cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi (k \in Z)$ ∘ $\sin u = 1 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in Z)$

∘ $\cos u = -1 \Leftrightarrow u = \pi + k2\pi (k \in Z)$ ∘ $\sin u = -1 \Leftrightarrow u = \frac{-\pi}{2} + k2\pi, (k \in Z)$

Vấn đề 3. Phương trình bậc hai theo một hàm số lượng giác

∘ $a\sin^2 u + b\sin u + c = 0 (a \neq 0)$. Đặt $t = \sin u$,điều kiện $-1 \le t \le 1$

∘ $a\cos^2 u + b\cos u + c = 0 (a \neq 0)$. Đặt $t = \cos u$,điều kiện $-1 \le t \le 1$

∘ $a\tan^2 u + b\tan u + c = 0 (a = 0)$. Đặt $t = \tan u$, điều kiện $\cos u \neq 0$

∘ $a\cot^2 u + b\cot u + c = 0 (a \neq 0)$. Đặt $t = \cot u$,điều kiện $\sin u \neq 0$

Vấn đề 4. Phương trình bậc nhất theo sin, cos

1)PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT:

DẠNG: $\begin{cases} \circ\ a\sin u + b\cos u = c \\ \circ\ a\sin u - b\cos u = c \\ \circ\ a\cos u - b\sin u = c \end{cases}$

Điều kiện để phương trình có nghiệm là : $a^2 + b^2 \ge c^2$

Giả sử giải phương trình: $a\sin u + b\cos u = c\ (*)$

Cách giải chia hai vế của (*) cho $\sqrt{a^2+b^2}$

Ta được : $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin u + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos u = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Đặt $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi \Rightarrow \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$.

$\Leftrightarrow \sin u.\cos\varphi + \sin\varphi.\cos u = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\Leftrightarrow \sin(u+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (**)

Đặt $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha$.

(**) $\Leftrightarrow \sin(u+\varphi) = \sin\alpha$. Giải phương trình cơ bản.

Vấn đề 5. Phương trình thuần nhất đối với sin, cos

$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d\,(1)$

Cách giải.Xét 2 trường hợp :

- **Trường hợp 1 :Xét** $\cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \pm 1$ **.Thay vào (1) xem thoả hay không thoả.Kết luận**
- **Trường hợp 2:Xét** $\cos x \ne 0$. **Chia hai vế của (1) cho** $\cos^2 x$ **,rồi đưa về phương trình bậc hai theo** $\tan x$ **,giải bình thường.**

$(1) \Leftrightarrow (a-d)\tan^2 x + b\tan x + c - d = 0.$

Vấn đề 6. Phương trình đối xứng đối với sin, cos

PHƯƠNG TRÌNH DẠNG : $a(\sin x \pm \cos x) + b\sin x\cos x + c = 0\,(1)$

Cách giải.Đặt :

$t = \sin x + \cos x \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}\left(-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}\right)$ $t = \sin x - \cos x \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{1-t^2}{2}\left(-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}\right)$

$t = \cos x - \sin x \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{1-t^2}{2}\left(-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}\right)$

Thay vào (1) rồi giải phuong trình bậc 2 theo t.

Chương 2. Tổ hợp – xác suất

Vấn đề 1. Hai quy tắc đếm cơ bản

1 . Quy tắc cộng:

Giả sử một công việc có thể được thực hiện theo phương án A hoặc phương án B. Có n cách thực hiện phương án A và m cách thực hiện phương án B. Khi đó công việc có thể được thực hiện bởi $n+m$ cách.

Quy tắc cộng cho công việc với nhiều phương án :

Giả sử một công việc có thể được thực hiện theo một trong k phương án $A_1, A_2, ..., A_k$. Có n_1 cách thực hiện phương án A_1 , n_2 cách thực hiện phương án A_2 , … và n_k cách thực hiện phương án A_k . Khi đó công việc có thể được thực hiện bởi $n_1 + n_2 + ... + n_k$ cách.

2 . Quy tắc nhân:

Giả sử một công việc nào đó bao gồm hai công đoạn A và B. Công đoạn A có thể làm theo n cách. Với mỗi cách thực hiện công đoạn A thì công đoạn B có thể làm theo m cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo nm cách.

Quy tắc nhân cho công việc với nhiều công đoạn :

Giả sử một công việc nào đó bao gồm k công đoạn $A_1, A_2, ..., A_k$. Công đoạn A_1 có thể thực hiện theo n_1 cách, công đoạn A_2 có thể thực hiện theo n_2 cách, … và công đoạn A_k có thể thực hiện theo n_k cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo $n_1 n_2 ... n_k$ cách.

Vấn đề 2. Hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp

1 . Hoán vị

Cho tập A có n $(n \geq 1)$ phần tử. Khi sắp xếp n phần tử này theo một thứ tự, ta được một hoán vị các phần tử của tập A (gọi tắt là một hoán vị của A).

Số các hoán vị của một tập hợp có n phần tử là

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)...1.$$

2 . Chỉnh hợp

Cho tập hợp A gồm n phần tử và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Khi lấy ra k phần tử của A và sắp xếp chúng theo một thứ tự, ta được một chỉnh hợp chập k của n phần tử của A (gọi tắt là một chỉnh hợp chập k của A).

Số các chỉnh hợp chập k của một tập hợp có n phần tử $1 \leq k \leq n$ là

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

3 . Tổ hợp

Cho tập A có n phần tử và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Mỗi tập con của A có k phần tử được được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử của A (gọi tắt là một tổ hợp chập k của A).

Số các tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử $(1 \leq k \leq n)$ là

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

4. Hai tính chất cơ bản của số C_n^k

Tính chất 1:

Cho số nguyên dương n và số nguyên k với $0 \leq k \leq n$. Khi đó $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Tính chất 2:

Cho các số nguyên n và k với $1 \leq k \leq n$. Khi đó $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

Vấn đề 3. Nhị thức newton

1). Công thức nhị thức Niu-ton

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^n b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \text{ (quy ước } a^0 = b^0 = 1) \ (*).$$

2). Nhận xét:

Công thức nhị thức Niu tơn (*) có :

* (n + 1) số hạng.
* Số hạng thứ k + 1 là $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$.
* Các hệ số của nhị thức có tính đối xứng theo tính chất $C_n^k = C_n^{n-k}$.
* Trong mỗi số hạng tổng số mũ của a và b luôn bằng n.

2). Tam giác Pa-xcan

Trên đây ta thấy muốn khai triển $(a+b)^n$ thành đa thức, ta cần biết $n+1$ số $C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^{n-1}, C_n^n$ có mặt trong công thức nhị thức Niu-tơn. Các số này có thể tính được bằng cách sử dụng bảng số sau đây :

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

....

Bảng số này do nhà toán học Pháp Pa-xcan thiết lập vào năm 1653 và được người ta gọi là tam giác Pa-xcan.

Tam giác Pa-xcan được thiết lập theo quy luật sau :

- Đỉnh được ghi số 1. Tiếp theo là hàng thứ nhất ghi hai số 1.
- Nếu biết hàng thứ n $(n \geq 1)$ thì hàng thứ $n+1$ tiếp theo được thiết lập bằng cách cộng hai số liên tiếp của hàng thứ n rồi viết kết quả xuống hàng dưới ở vị trí giữa hai số này. Sau đó viết số 1 ở đầu và cuối hàng.

Chú ý:

$x^m.x^n = x^{m+n}$, $\quad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$, $\quad x^m.y^m = (xy)^m$, $\quad \frac{x^m}{y^m} = \left(\frac{x}{y}\right)^m$,

$\left(x^m\right)^n = \left(x^n\right)^m = x^{m.n}$, $\frac{1}{x} = x^{-1}$, $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$ (với điều kiện x, y đều có nghĩa trong tất cả các công thức trên).

Vấn đề 4. Biến cố và xác suất của biến cố

1. Biến cố

Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là một thí nghiệm hay một hành động mà :

- Kết quả của nó không đoán trước được ;
- Có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó.

Phép thử thường được kí hiệu bởi chữ T.

Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử được gọi là không gian mẫu của phép thử và được kí hiệu bởi chữ Ω (đọc là ô-mê-ga)

Biến cố A liên quan đến phép thử T là biến cố mà việc xảy ra hay không xảy ra của A tùy thuộc vào kết quả của T.

Mỗi kết quả của phép thử T làm cho A xảy ra, được gọi là một kết quả thuận lợi cho A.

Tập hợp các kết quả thuận lợi cho A được kí hiệu là Ω_A . Khi đó người ta nói biến cố A được mô tả bởi tập Ω_A .

2. Xác suất của biến cố

Giả sử phép thử T có không gian mẫu Ω là một tập hữu hạn và các kết quả của T là đồng khả năng. Nếu A là một biến cố liên quan với phép thử T và Ω_A là một tập hợp các kết quả thuận lợi cho A thì xác suất của A là một số, kí hiệu là P(A), được xác định bởi công thức :

$$P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

Từ định nghĩa trên ta suy ra

- $0 \leq P(A) \leq 1$;
- $P(\Omega) = 1, P(\varnothing) = 0$.

Vấn đề 5. Các quy tắc tính xác suất

1. Quy tắc công xác suất

a. Biến cố hợp

Cho hai biến cố A và B. Biến cố "A hoặc B xảy ra", kí hiệu là $A \cup B$, được gọi là hợp của hai biến cố A và B.

Tổng quát :

Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$. Biến cố "Có ít nhất một trong các biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ xảy ra", kí hiệu là $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$, được gọi là hợp của k biến cố đó.

b. Biến cố xung khắc

Cho hai biến cố A và B. Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra.

Hai biến cố A và B là hai biến cố xung khắc nếu và chỉ nếu $\Omega_A \cap \Omega_B = \varnothing$.

c. Quy tắc cộng xác suất

Nếu hai biến cố A và B xung khắc thì xác suất để A hoặc B xảy ra là

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ đôi một xung khắc. Khi đó

$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k)$

d. Biến cố đối

Cho A là một biến cố. Khi đó biến cố "Không xảy ra A", kí hiệu là $\overline{A}$, được gọi là biến cố đối của A.

Cho biến cố A. Xác suất của biến cố đối $\overline{A}$ là $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

2. Quy tắc nhân xác suất

a. Biến cố giao

Cho hai biến cố A và B. Biến cố "Cả A và B cùng xảy ra", kí hiệu là AB, được gọi là giao của hai biến cố A và B.

Tổng quát :

Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$. Biến cố "Tất cả k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ đều xảy ra", kí hiệu là $A_1A_2...A_k$, được gọi là giao của k biến cố đó.

b. Biến cố độc lập

Hai biến cố A và B được gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

Tổng quát :

Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$; k biến cố này được gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của mỗi biến cố không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của các biến cố còn lại.

c. Quy tắc nhân xác suất

Nếu hai biến cố A và B độc lập với nhau thì

$P(AB) = P(A).P(B)$

Quy tắc nhân xác suất cho nhiều biến cố được phát biểu như sau:

$P(A_1A_2...A_k) = P(A_1)P(A_2)...P(A_k)$

Vấn đề 7. Khái niệm biến ngẫu nhiên rời rạc

1 . Khái niệm biến ngẫu nhiên rời rạc

Đại lượng X được gọi là một biến ngẫu nhiên rời rạc nếu nó nhận giá trị bằng số thuộc một tập hữu hạn nào đó và giá trị ấy là ngẫu nhiên, không dự đoán trước được.

2 . Phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc

Giả sử X là một biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Để hiểu rõ hơn về X, ta thường quan tâm tới xác suất để X nhận giá trị x_k tức là các số $P(X = x_k) = p_k$ với $k = 1, 2, ..., n$.

Các thông tin về X như vậy được trình bày dưới dạng bảng sau đây :

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Bảng 1

Bảng 1 được gọi là bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X. Người ta chứng minh được rằng trong bảng 1, tổng các số ở dòng thứ hai bằng $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

3 . Kì vọng

Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc với tập giá trị là $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Kì vọng của X, kí hiệu là $E(X)$, là một số được tính theo công thức

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

ở đó $p_i = P(X = x_i), \ (i = 1, 2, ..., n)$.

Ý nghĩa : E(X) là một số cho ta một ý niệm về độ lớn trung bình của X. Vì thế kì vọng E(X) còn được gọi là giá trị trung bình của X.

Nhận xét : Kì vọng của X không nhất thiết thuộc tập các giá trị của X.

4 . Phương sai và độ lệch chuẩn

a . Phương sai

Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc với tập giá trị là $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Phương sai của X, kí hiệu là V(X), là một số được tính theo công thức

$$V(X) = (x_1 - \mu)^2 p_1 + (x_2 - \mu)^2 p_2 + ... + (x_n - \mu)^2 p_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i$$

Ở đó $p_i = P(X = x_i) \ (i = 1, 2, ..., n)$ và $\mu = E(X)$.

Ý nghĩa: Phương sai là một số không âm. Nó cho ta một ý niệm về mức độ phân tán các giá trị của X xung quanh giá trị trung bình. Phương sai càng lớn thì độ phân tán này càng lớn.

b . Độ lệch chuẩn

Căn bậc hai của phương sai, kí hiệu là $\sigma(X)$, được gọi là độ lệch chuẩn của X, nghĩa là

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \ .$$

Chương 3. Dãy số, cấp số cộng, cấp số nhân

Vấn đề 1. Chứng minh quy nạp

Nguyên lý quy nạp toán học:

Giả sử $P(n)$ là một mệnh đề phụ thuộc vào số tự nhiên n. Nếu cả hai điều kiện (i) và (ii) dưới đây được thỏa mãn thì $P(n)$ đúng với mọi $n \ge m$ (m là số tự nhiên cho trước).

$(i) P(m)$ đúng.

(ii) Với mỗi số tự nhiên $k \ge m,$ nếu $P(k+1)$ đúng.

Phương pháp chứng minh dựa trên nguyên lý quy nạp toán học gọi là phương pháp quy nạp toán học(hay gọi tắt là phương pháp quy nạp).

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

PHƯƠNG PHÁP

Để chứng minh một mệnh đề $P(n)$ phụ thuộc vào số tự nhiên n đúng với mọi $n \ge m$ (m là số tự nhiên cho trước), ta thực hiện theo hai bước sau:

Bước 1: Chứng minh rằng $P(n)$ đúng khi $n = m$.

Bước 2: Với k là một số tự nhiên tùy ý, $k \ge m$. Giả sử $P(n)$ đúng khi $n = k$, ta sẽ chứng minh $P(n)$ cũng đúng khi $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, ta kết luận rằng $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \ge m$.

Vấn đề 2. Dãy số

1). Dãy số: Một hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương N* được gọi là một dãy số vô hạn (hay gọi tắt là là dãy số). Mỗi giá trị của hàm số u được gọi là một số hạng của dãy số, $u(1)$ được gọi là số hạng thứ nhất (hay số hạng đầu), $u(2)$ được gọi là số hạng thứ hai… Người ta thường kí hiệu các giá trị $u(1), u(2)$ …tương ứng bởi $u_1, u_2, …$

2).Người ta thường kí hiệu dãy số $u = u(n)$ bởi (u_n) và gọi u_n là số hạng tổng quát của dãy số đó. Người ta cũng thường viết dãy số (u_n) dưới dạng khai triển: $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ Chú ý: Người ta cũng gọi một hàm số u xác định trên tập hợp gồm m số nguyên dương đầu tiên(m tùy ý thuộc N*) là một dãy số. Rõ ràng, dãy số trong trường hợp này chỉ có hữu hạn số hạng (m số hạng: $u_1, u_2, ..., u_m$). Vì thế, người ta còn gọi nó là dãy số hữu hạn, u_1 gọi là số hạng đầu và u_m gọi là số hạng cuối.

3). Các cách cho một dãy số:

Cách 1: Cho dãy số bởi công thức của số hạng tổng quát.

Ví dụ: Cho dãy (u_n) với $u_n = 2n^2 - 3n + 2$

Cách 2: Cho dãy số bởi hệ thức truy hồi (hay quy nạp):

- Cho số hạng thứ nhất u_1 (hoặc một vài số hạng đầu).
- Với $n \geq 2$, cho một công thức tính u_n nếu biết u_{n-1} (hoặc vài số hạng đứng ngay trước nó).

Ví dụ: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3 \end{cases} \quad \forall n \geq 1.$

Cách 3: Diễn đạt bằng lời cách xác định mỗi số hạng của dãy số.

Ví dụ: Cho đường tròn (O) bán kính R. Cho dãy (u_n) với u_n là độ dài cung tròn có số đo là $\frac{2\pi}{n}$ của đường tròn (O).

4). Dãy số tăng: (u_n) là dãy số tăng $\Leftrightarrow \forall n \in N^*, u_n < u_{n+1}.$

5). Dãy số giảm: (u_n) là dãy số giảm $\Leftrightarrow \forall n \in N^*, u_n > u_{n+1}.$

6). Dãy số tăng và dãy số giảm được gọi chung là dãy số đơn điệu . Tính chất tăng, giảm của một dãy số được gọi chung là tính chất đơn điệu của dãy số đó.

7). Dãy số bị chặn trên: (u_n) được gọi là dãy số bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $\forall n \in N^*, u_n \leq M$.

8). Dãy số bị chặn dưới: (u_n) được gọi là dãy số bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $\forall n \in N^*, u_n \geq m$.

9). Dãy số bị chặn: (u_n) được gọi là dãy số bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới. Nghĩa là tồn tại một số M và một số m sao cho $\forall n \in N^*, m \leq u_n \leq M$

Vấn đề 3. Cấp số cộng

1. Cấp số cộng là một dãy số (vô hạn hay hữu hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó và một số d không đổi, nghĩa là:

(u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow \forall n \geq 2, u_n = u_{n-1} + d$

Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

2.Định lý 1: Nếu (u_n) là một cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$

Hệ quả: Ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số cộng $\Leftrightarrow a + c = 2b$.

1). Định lý 2: Nếu một cấp số cộng có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức sau: $u_n = u_1 + (n-1)d$

2). Định lý 3: Giả sử (u_n) là một cấp số cộng có công sai d.

Gọi $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + ... + u_n$

(S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng). Ta có :

$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$.

Vấn đề 4. Cấp số nhân

1). Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn) mà trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó và một số q không đổi, nghĩa là:

(u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow \forall n \geq 2, u_n = u_{n-1}.q$

Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.

2). Định lý 1: Nếu (u_n) là một cấp số nhân thì kể từ số hạng thứ hai, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số nhân hữu hạn) bằng tích của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là: $u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1} (k \geq 2)$.

Hệ quả: Nếu a, b, c là ba số khác 0, thì "ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số nhân khi và chỉ khi $b^2 = ac$".

3). Định lý 2: Nếu một cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội $q \neq 0$ thì số hạng tổng quát u_n của nó được tính bởi công thức: $u_n = u_1.q^{n-1}$.

4). Định lý 3: Giả sử (u_n) là một cấp số nhân có công bội q. Gọi $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + ... + u_n$ (S_n là tổng cuản số hạng đầu tiên của cấp số nhân). Ta có:

- Nếu q=1 thì $S_n = nu_1$.
- Nếu $q \neq 1$ thì $S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}$

Chương 4. Giới hạn dãy số, giới hạn hàm số

Vấn đề 1. Giới hạn dãy số

1). ĐỊNH NGHĨA:

ĐỊNH NGHĨA 1: Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 nếu với mỗi số dương nhỏ tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đó. Khi đó ta viết $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ hay $\lim(u_n) = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$. Bằng cách sử dụng các kí hiệu toán học, định nghĩa trên có thể viết như sau:

$\lim u_n = 0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : n > n_0 \Rightarrow |u_n| < \varepsilon)$.

Một số giới hạn đặc biệt:

a). Dãy số (u_n) có giới hạn là 0 $\Leftrightarrow$ dãy số $(|u_n|)$ có giới hạn là 0.

b). $\lim 0 = 0$.

c). $\lim \frac{1}{n^k} = 0, (k > 0)$.

d). Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

ĐỊNH NGHĨA 2: Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là số thực a nếu $\lim(u_n - a) = 0$. Khi đó ta viết $\lim u_n = a$ hay $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ hay $u_n \to a$ khi $n \to +\infty$. Dãy số có giới hạn là số a hữu hạn gọi là dãy số có giới hạn hữu hạn.

Nhận xét:

a). $\lim u_n = a \Leftrightarrow |u_n - a|$ nhỏ bao nhiêu cũng được với n đủ lớn.

b). Không phải mọi dãy số đều có giới hạn hữu hạn.

Một số giới hạn đặc biệt:

a). $\lim c = c$ (c là hằng số).

b). Nếu $\lim u_n = a$ thì $\lim |u_n| = |a|$.

c). Nếu $u_n \geq 0, (\forall n)$ thì $a > 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

2). ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN :

Định lí 1 : Với hai dãy số (u_n) và (v_n), nếu $|u_n| < v_n, (\forall n)$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

Định lí 2 :

a). Giả sử $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ và c là hằng số. Khi đó ta có :

- $\lim(u_n + v_n) = a + b$
- $\lim(u_n - v_n) = a - b$
- $\lim(u_n . v_n) = a.b$
- $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}, (b \neq 0)$
- $\lim(c.u_n) = c.a$.

b). Cho ba dãy số $(u_n),(v_n)$ và (w_n). Nếu $u_n \le v_n \le w_n, (\forall n)$ và $\lim u_n = \lim w_n = a, (a \in \mathbb{R})$ thì $\lim v_n = a$ (gọi định lí kẹp).

c). Điều kiện để một dãy số tăng hoặc dãy số giảm có giới hạn hữu hạn:

Một dãy số tăng và bị chặn trên thì có giới hạn hữu hạn.

Một dãy số giảm và bị chặn dưới thì có giới hạn hữu hạn.

3). TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN:

Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và thỏa $|q| < 1$. Khi đó tổng $S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$ được gọi là tổng vô hạn của cấp số nhân và $S = \lim S_n = \lim \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{u_1}{1-q}$.

4). GIỚI HẠN VÔ CỰC:

a). Dãy số có giới hạn $+\infty$: Dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi và chỉ khi với mỗi số dương tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số dương đó. Ta viết $\lim(u_n) = +\infty$ hoặc $\lim u_n = +\infty$ hoặc $u_n \to +\infty$.

Ví dụ: $\lim n = +\infty, \lim \sqrt{n} = +\infty, \lim \sqrt[3]{n} = +\infty, \lim n^{\alpha} = +\infty, (\alpha > 0)$.

b). Dãy số có giới hạn $-\infty$: Dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi và chỉ khi với mỗi số âm tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều nhỏ hơn số âm đó. Ta viết $\lim(u_n) = -\infty$ hoặc $\lim u_n = -\infty$ hoặc $u_n \to -\infty$.

Chú ý:

- $\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = +\infty$.
- Các dãy số có giới hạn $+\infty$ hoặc $-\infty$ được gọi chung là các dãy số có giới hạn vô cực hay dần đến vô cực.
- Nếu $\lim|u_n| = +\infty$ thì $\lim \frac{1}{u_n} = 0$.

Vấn đề 2. Giới hạn hàm số

1). Giới hạn của hàm số tại một điểm:

a). Giới hạn hữu hạn: Giả sử $(a;b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và f là một hàm số xác định trên tập hợp $(a;b)\backslash\{x_0\}$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong tập hợp $(a;b)\backslash\{x_0\}$ mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$. Khi đó ta viết: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

Nhận xét:

- Nếu $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$, trong đó c là hằng số thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} c = c$.
- Nếu $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

b). Giới hạn vô cực: Giả sử $(a;b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và f là một hàm số xác định trên tập hợp $(a;b)\backslash\{x_0\}$.

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) trog tập hợp $(a;b)\backslash\{x_0\}$ mà $\lim x_n=x_0$ ta đều có $\lim f(x)=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) trog tập hợp $(a;b)\backslash\{x_0\}$ mà $\lim x_n=x_0$ ta đều có $\lim f(x)=-\infty$.

2). Giới hạn của hàm số tại vô cực:

Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là số thực L khi x dần tới $+\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(a;+\infty)$ mà $\lim x_n=+\infty$ ta đều có $\lim f(x_n)=L$. Khi đó ta viết: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ hoặc $f(x)\to L$ khi $x\to+\infty$.

Các giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ được định nghĩa hoàn toàn tương tự.

Nhận xét:

Áp dụng định nghĩa giới hạn của hàm số, có thể chứng minh được rằng: Với mọi số nguyên dương k, ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=+\infty \quad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^k}=0 \quad \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^k}=0$

3). Một số định lí về giới hạn hữu hạn:

Định lí 1: Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M$ (với L, M $\in\mathbb{R}$).Khi đó:

- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=L+M$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]=L-M$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]=L.M$
- Nếu $M\neq 0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M}$

Hệ quả:

- Nếu c là một hằng số thì $\lim\limits_{x\to x_0}\left[c.f(x)\right]=c.L$.
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left(a.x^k\right)=ax_0^k$ (a hằng số và $k\in\mathbb{Z}^+$).

Định lí 2: Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$. Khi đó:

- $\lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=\left|L\right|$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{L}$
- Nếu $f(x)\geq 0$ với mọi $x\in J\backslash\{x_0\}$, trong đó J là một khoảng nào đó chứa x_0, thì $L\geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$.

Chú ý:

Định lí 1 và định lí 2 vẫn đúng khi thay $x\to x_0$ bởi $x\to+\infty$ hoặc $x\to-\infty$.

Định lí 3: (Định lí kẹp về giới hạn hàm số): giả sử J là một khoảng chứa x_0 và f, g, h là ba hàm số xác định trên tập hợp $J\backslash\{x_0\}$. Nếu $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ với mọi $x\in J\backslash\{x_0\}$ và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=L$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L$.

Chú ý: Định lí 3 vẫn đúng khi thay $x\to x_0$ bởi $x\to+\infty$ (trong các trường hợp này thay tập hợp $J\backslash\{x_0\}$ bằng khoảng $(a;+\infty)$) hoặc $x\to-\infty$ (trong các trường hợp này thay tập hợp $J\backslash\{x_0\}$ bằng khoảng $(-\infty;a)$).

Định lí 4: Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=+\infty$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$.

4). Một vài quy tắc tìm giới hạn vô cực:

Qui tắc 1: Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L$ (với $L\neq 0$) thì $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]$ được cho bởi bảng sau:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	Dấu của L	$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]$
$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$-\infty$

$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

Quy tắc 2: Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L,(L\neq 0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ và $g(x)>0$ hoặc $g(x)<0$ với mọi $x\in(a;b)\backslash\{x_0\}$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ được cho bởi bảng sau:

Dấu của L	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$
$+$	$+$	$+\infty$
$+$	$-$	$-\infty$
$-$	$+$	$-\infty$
$-$	$-$	$+\infty$

5). Các dạng vô định:

Các dạng vô định trường gặp: $\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty},0.\infty,\infty-\infty$.

6). Giới hạn một bên:

a). Giới hạn hữu hạn:

$*$ Giới hạn bên phải: Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(x_0;b),(x_0\in\mathbb{R})$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn bên phải là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(x_0;b)$ mà $\lim x_n=x_0$, ta đều có $\lim f(x_n)=L$. Khi đó ta viết:

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$ hoặc $f(x)\to L$ khi $x\to x_0^+$.

$*$ Giới hạn bên trái: Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a;x_0),(x_0\in\mathbb{R})$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn bên trái là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(a;x_0)$ mà $\lim x_n=x_0$, ta đều có $\lim f(x_n)=L$. Khi đó ta viết:

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$ hoặc $f(x)\to L$ khi $x\to x_0^-$.

Định lí 5: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$

$*$ Giới hạn vô cực:

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$ được phát biểu tương tự như các định nghĩa ở phần giới hạn hữu hạn.

Định lí 5 vẫn đúng với giới hạn vô cực.

Các định lí về giới hạn hữu hạn và các quy tắc tìm giới hạn vô cực vẫn đúng trong trường hợp $x\to x_0^+$ hay $x\to x_0^-$.

Vấn đề 3. Giới hạn 1 bên

1.Giới hạn hữu hạn

a. Định nghĩa 1

Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(x_0;b),(x_0\in R)$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn bên phải là số thực L khi dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0)nếu với mọi dãy số bất kì (x_n) những số thuộc khoảng $(x_0;b)$ mà $\lim x_n=x_0$, ta đều có $\lim f(x_n)=L.$ Khi đó ta viết

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$ hoặc $f(x)\to L$ khi $x\to {x_0}^+$.

b. Định nghĩa 2

Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a;x_0),(x_0 \in R)$. Ta nói rằng hàm số có giới hạn bên trái là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy bất kì (x_n) những số thuộc khoảng $(a;x_0)$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$. Khi đó ta viết

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0^-$.

Chú ý:

1). Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ thì hàm số f có giới hạn bên phải và giới hạn bên trái tại điểm x_0 . Và $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$.

2). Ngược lại, nếu $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$ thì hàm số f có giới hạn tại điểm x_0 và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.

3). Các định lí 1 và 2 ở bài trước vẫn đúng khi thay $x \to x_0$ bởi $x \to x_0^-$ hoặc $x \to x_0^+$.

2. Giới hạn vô cực

1.Các định nghĩa $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ được phát biểu tương tự như định nghĩa 1 và định nghĩa 2.

2. Các chú ý 1 và 2 vẫn đúng nếu thay L bởi $+\infty$ hoặc $-\infty$.

Vấn đề 4. Tính liên tục

1. Hàm số liên tục tại 1 điểm:

Định nghĩa: Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$. Hàm số $y = f(x)$ gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Hàm số không liên tục tại điểm x_0 gọi là gián đoạn tại x_0.

2. Hàm số liên tục trên một khoảng, trên một đoạn

Định nghĩa: Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a;b)$.Ta nói rằng hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

Hàm số $y = f(x)$ gọi là liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

Nhận xét:

a). Nếu hai hàm số f và g liên tục tại điểm x_0 thì các hàm số $f \pm g, fg, cf$ (c là một hằng số) đều liên tục tại điểm x_0.

b). Hàm đa thức và hàm số phân thức hữu tỉ liên tục trên tập xác định của chúng.

3. Tính chất của hàm số liên tục:

Định lí 2 (định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục)

Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ .Nếu $f(a) \neq f(b)$ thì với mỗi số thực M nằm giữa $f(a), f(b)$, tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ sao cho $f(c) = M$.

Ý nghĩa hình học của định lí

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và M là một số thực nằm giữa $f(a), f(b)$ thì đường thẳng $y = M$ cắt đồ thị của hàm số $y = f(x)$ tại ít nhất một điểm có hoành độ $c \in (a;b)$.

Hệ quả

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Ý nghĩa hình học của hệ quả

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành ít nhất tại một điểm có hoành độ $c \in (a;b)$.

Chương 5. Đạo hàm

Vấn đề 1. Đạo hàm

1). Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$. Giới hạn hữu hạn nếu có của tỉ số $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ khi $x \to x_0$ được gọi là đạo hàm của hàm số đã cho tại x_0, kí hiệu $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$. Như vậy ta có

$f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Nhận xét:

Nếu đặt $x - x_0 = \Delta x$ và $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ thì ta có $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Trong đó Δx được gọi là số gia của biến số tại x_0 và Δy gọi là số gia của hàm số ứng với số gia Δx tại x_0.

Nếu hàm số f(x) có đạo hàm tại điểm x_0 thì f(x) liên tục tại x_0. Tuy nhiên điều ngược lại chưa chắc đúng.

2). Cho đường cong (C), điểm M_0 cố định thuộc (C) và $M \in (C)$. Gọi k_M là hệ số góc của cát tuyến M_0M. Giả sử tồn tại giới hạn hữu hạn $k_0 = \lim\limits_{x_M \to x_0} k_M$. Khi đó đường thẳng M_0T qua M_0 có hệ số góc k_0 được gọi là tiếp tuyến của (C) tại M_0. Điểm M_0 gọi là ***tiếp điểm.***

3). Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại đó tại điểm $M_0(x_0;f(x_0))$.

Hệ quả:

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ có phương trình: $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$.

4). Khí hiệu D là một khoảng hay là hợp của những khoảng nào đó. Nếu hàm số f(x) có đạo hàm tại tại mọi điểm $x_0 \in D$ thì ta nói hàm số có đạo hàm trên D. Khi đó đạo hàm của hàm số f(x) tại điểm x tùy ý của D được kí hiệu y' hay $f'(x)$. Ta nói y' hay $f'(x)$ là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ trên tập D.

Vấn đề 2. Các quy tắc tính đạo hàm

1). Định lý 1: Cho các hàm số $u = u(x), v = v(x)$ có đạo hàm trên (a;b) thì tổng và hiệu của chúng cũng có đạo hàm trên khoảng (a;b) và

$(u+v)' = u'+v'$; $(u-v)' = u'-v'$

Chú ý: Định lý 1 có thể mở rộng cho tổng hay hiệu của hữu hạn các hàm số.

2). Định lý 2: Cho các hàm số $u = u(x), v = v(x)$ có đạo hàm trên (a;b) thì tích của chúng cũng có đạo hàm trên khoảng (a;b) và $(u.v)' = u'v + uv'$.

Đặc biệt : $(a.u)' = a.u'$ (a là hằng số),

Chú ý: Định lý 2 có thể mở rộng cho tích của hữu hạn các hàm số. Chẳng hạn:

$(u.v.w)' = u'vw + uv'w + uvw'$

3). Định lý 3: Cho các hàm số $u = u(x), v = v(x)$ có đạo hàm trên (a;b) và $v(x) \neq 0$ trên (a;b) thì thương $\frac{u}{v}$ cũng có đạo hàm trên khoảng (a;b) và

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Hệ quả: $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}(v \neq 0)$.

4). Cho hai hàm số $y=f(u)$ và $u=g(x)$. Ta gọi hàm số $y=F(x)=f[g(x)]$ là hàm số hợp của hai hàm số $u=g(x)$ và $y=f(u)$. Tập xác định của hàm số $f[g(x)]$ là tập hợp tất cả các giá trị của x làm cho biểu thức $f[g(x)]$ có nghĩa.

5). Định lý 4: Nếu hàm số $u=u(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 và hàm số $y=f(u)$ có đạo hàm tại điểm $u_0=u(x_0)$ thì hàm số hợp $y=F(x)=f[u(x)]$ cũng có đạo hàm tại điểm x_0 và $F'(x_0)=f'(u_0).u(x_0)$ hay $y'_x=y'_u.u'_x$.

Hệ quả: $(u^n)'=n.u^{n-1}.u'(n\in N \text{ và } n\ge 2)$; $(\sqrt{u})'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}.u'$

QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

Giả sử $u=u(x), v=v(x), w=w(x)$ là các hàm số có đạo hàm, khi đó:

1). $(u + u - w)' = u' + v' - w'$; **2).** $(uv)' = u'v + v'u$; **3)** $(k.u)' = k.u'$ $(k\in R)$

4). $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$ **5).** $\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2}$.

BẢNG ĐẠO HÀM CỦA CÁC HÀM SỐ SƠ CẤP CƠ BẢN

Đạo hàm của hàm số sơ cấp cơ bản	**Đạo hàm của hàm số hợp (u = u(x))**
$(C)'=0$	
$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1},(\alpha\in\mathbb{R},x>0)$ $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x>0)$ $(\dfrac{1}{x})'=-\dfrac{1}{x^2}(x\ne 0)$ $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)'=-\dfrac{n}{x^{n+1}},(x\ne 0)$	$(u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1}u',(\alpha\in\mathbb{R},u>0)$ $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ $(u>0)$ $(\dfrac{1}{u})'=-\dfrac{u'}{u^2}$ $(u\ne 0)$ $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)'=-\dfrac{n}{u^{n+1}}.u',(u\ne 0)$
$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$ $(x\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z)$ $(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-(1+\cot^2 x)$ $(x\ne k\pi,\ k\in Z)$.	$(\sin u)' = \cos u.u'$ $(\cos u)' = -\sin u.u'$ $(\tan u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}=(1+\tan^2 u)u'$ $(u\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z)$ $(\cot u)'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}=-(1+\cot^2 u)u'$ $(u\ne k\pi,\ k\in Z)$.

MỘT SỐ CÔNG THỨC TÍNH ĐẠO HÀM NHANH

- $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
- $\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}\right)'=\dfrac{adx^2+2aex+be-dc}{(dx+e)^2}$
- $\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}\right)'=\dfrac{(ae-bd)x^2+2(af-dc)x+bf-ec}{(dx^2+ex+f)^2}$

Vấn đề 3. Đạo hàm cấp cao

Vi phân

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0. Gọi Δx là số gia của biến số tại x_0. Ta gọi tích $f'(x_0).\Delta x$ là vi phân của hàm số f(x) tại điểm x_0 ứng với số gia Δx. Kí hiệu $df(x_0)=f'(x_0).\Delta x$.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x. Ta gọi tích $f'(x).\Delta x$ là vi phân của hàm số f(x) tại điểm x ứng với số gia Δx (gọi tắt là vi phân của f tại điểm x). Kí hiệu $df(x)=f'(x).\Delta x$. Nếu chọn hàm số $y=x$ thì ta có $dy=dx=1.\Delta x=\Delta x$. Vì vậy ta thường kí hiệu $\Delta x=dx$ và $dy=f'(x)dx$.

Công thức tính gần đúng nhờ vi phân là: $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0).\Delta x$

Đạo hàm cấp cao

1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $f'(x)$ còn gọi là đạo hàm cấp 1 của hàm số $f(x)$. Nếu hàm số $f'(x)$ có đạo hàm thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm cấp 2 của hàm số $f(x)$, kí hiệu là y'' hay $f''(x)$. Đạo hàm của đạo hàm cấp 2 được gọi là đạo hàm cấp 3 của hàm số $f(x)$, kí hiệu là y''' hay f'''(x). Tương tự, ta gọi đạo hàm của đạo hàm cấp $(n-1)$ là đạo hàm cấp n của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $y^{(n)}$ hay $f^{(n)}(x)$, tức là ta có:

$y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'(n\in N, n>1)$.

2.Đạo hàm cấp 2 của hàm số f(t) là gia tốc tức thời của chuyển động s=f(t) tại thời điểm t.

Vấn đề 4. Phương trình tiếp tuyến

I – Kiến thức cần nhớ

— Phương trình tiếp tuyến của $(C): y=f(x)$ **tại** điểm $M(x_o;y_o)$ có dạng:

$\Delta: \boxed{y=k(x-x_o)+y_o}$ Với $k=y'(x_o)$ là hệ số góc tiếp tuyến.

↓ ↓ ↓

① ② ③

⟶ ***Để viết phương trình tiếp tuyến ta***

— Điều kiện cần và đủ để hai đường $(C_1): y=f(x)$ và $(C_2): y=g(x)$ ***tiếp xúc nhau*** ⇔ hệ $\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f'(x)=g'(x) \end{cases}$ có nghiệm

(nhớ: "hàm = hàm, đạo = đạo")

II – Các dạng toán viết phương trình tiếp tuyến thường gặp

① Viết PTTT Δ của $(C): y=f(x)$, biết Δ có hệ số góc k cho trước

— Gọi $M(x_o;y_o)$ là tiếp điểm. Tính $y'\Rightarrow y'(x_o)$.

— Do phương trình tiếp tuyến Δ có hệ số góc k $\Rightarrow y'(x_o)=k$ (i)

— Giải (i) tìm được $x_o \longrightarrow y_o=f(x_o) \longrightarrow \Delta: y=k(x-x_o)+y_o$.

✍ **Lưu ý**. Hệ số góc $k=y'(x_o)$ của tiếp tuyến Δ thường cho gián tiếp như sau:

— Phương trình tiếp tuyến $\Delta // d: y=ax+b \Rightarrow k=a$.

— Phương trình tiếp tuyến $\Delta \perp d: y=ax+b \Rightarrow k=-\frac{1}{a}$.

— Phương trình tiếp tuyến Δ tạo với trục hoành góc $\alpha \Rightarrow |k|=\tan\alpha$.

— Phương trình tiếp tuyến Δ tạo với $d: y=ax+b$ góc $\alpha \Rightarrow \left|\frac{k-a}{1+k.a}\right|=\tan\alpha$

② Viết PTTT Δ của $(C): y=f(x)$, biết Δ đi qua (kẻ từ) điểm $A(x_A;y_A)$

— Gọi $M(x_o;y_o)$ là tiếp điểm. Tính $y_o=f(x_o)$ và $k=y'(x_o)$ theo x_o.

— Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M(x_o;y_o)$ là $\Delta: y=k(x-x_o)+y_o$.

— Do $A(x_A;y_A)\in\Delta \Rightarrow y_A=k(x_A-x_o)+y_o$ (i)

— Giải phương trình $(i) \longrightarrow x_o \longrightarrow y_o$ và $k \longrightarrow$ phương trình Δ.

③ Viết PTTT Δ của $(C): y=f(x)$, biết Δ cắt hai trục tọa độ tại A và B sao cho tam giác OAB vuông cân hoặc có diện tích S cho trước

— Gọi $M(x_o;y_o)$ là tiếp điểm và tính hệ số góc $k=y'(x_o)$ theo x_o.

— Đề cho $\left[\begin{array}{ll}\Delta OAB \text{ vuông cân } \Leftrightarrow \Delta \text{ tạo với Ox một góc } 45^0 \text{ và } O \notin \Delta & (i) \\ S_{\Delta OAB} = S \Leftrightarrow OA.OB = 2S & (ii)\end{array}\right.$

— Giải (i) hoặc $(ii) \longrightarrow x_o \longrightarrow y_o; k \longrightarrow$ phương trình tiếp tuyến Δ.

④ **Tìm những điểm trên đường thẳng** $d: ax + by + c = 0$ **mà từ đó vẽ được** $1, 2, 3, \ldots, n$ **tiếp tuyến với đồ thị hàm số** $(C): y = f(x)$

— Gọi $M(x_M; y_M) \in d: ax + by + c = 0$ (sao cho có một biến x_M trong M)

— PTTT Δ qua M và có hệ số góc k có dạng $\Delta: y = k(x - x_M) + y_M$.

— Áp dụng điều kiện tiếp xúc: $\begin{cases} f(x) = k(x - x_M) + y_M & (i) \\ f'(x) = k & (ii) \end{cases}$

— Thế k từ (ii) vào (i), được: $f(x) = f'(x).(x - x_M) + y_M \quad (iii)$

— Số tiếp tuyến của (C) vẽ từ $M =$ số nghiệm x của (iii).

⑤ **Tìm những điểm** $M(x_M; y_M)$ **mà từ đó vẽ được hai tiếp tuyến với đồ thị hàm số** $(C): y = f(x)$ **và hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau**

— PTTT Δ qua M và có hệ số góc k có dạng $\Delta: y = k(x - x_M) + y_M$.

— Áp dụng điều kiện tiếp xúc: $\begin{cases} f(x) = k(x - x_M) + y_M & (i) \\ f'(x) = k & (ii) \end{cases}$

— Thế k từ (ii) vào (i), được: $f(x) = f'(x).(x - x_M) + y_M \quad (iii)$

— Qua M vẽ được hai tiếp tuyến với $(C) \Leftrightarrow (iii)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

— Hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau $\Leftrightarrow k_1.k_2 = -1 \Leftrightarrow y'(x_1).y'(x_2) = -1$.

✍ **Lưu ý**.

— Qua M vẽ được hai tiếp tuyến với (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía với trục hoành thì $\begin{cases} (iii): \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \\ f(x_1).f(x_2) < 0. \end{cases}$

— Đối với bài toán tìm điểm $M \in (C): y = f(x)$ sao cho tại đó tiếp tuyến song song hoặc vuông góc với đường thẳng d cho trước, ta chỉ cần gọi $M(x_o; y_o)$ và Δ là tiếp tuyến với $k = f'(x_o)$. Rồi áp dụng $k = f'(x_o) = k_d$ nếu cho song song và $f'(x_o).k_d = -1$ nếu cho vuông góc $\Rightarrow x_o \Rightarrow y_o \Rightarrow M(x_o; y_o)$.

PHẦN 4. HÌNH HỌC

Chương 1. Phép biến hình

Vấn đề 1. Phép biến hình

I) ĐỊNH NGHĨA:

Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M của mặt phẳng với một điểm xác định duy nhất M’ của mặt phẳng đó được gọi là phép biến hình trong mặt phẳng.

Ta thường kí hiệu phép biến hình là F và viết $F(M) = M'$ hay $M' = F(M)$, khi đó điểm M’ được gọi là ảnh của điểm M qua phép biến hình F.

Nếu H là một hình nào đó trong mặt phẳng thì ta kí hiệu H’ = F(H) là tập các điểm $M' = F(M)$, với mọi điểm M thuộc H. Khi đó ta nói F biến hình H thành hình H’, hay hình H’ là ảnh của hình H qua phép biến hình F.

Để chứng minh hình H’ là ảnh của hình H qua phép biến hình F ta có thể chứng minh: Với điểm M tùy ý

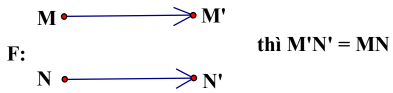
$$M \in H \Leftrightarrow M' = F(M) \in H'$$

Phép biến hình biến mỗi điểm M của mặt phẳng thành chính nó được gọi là phép đồng nhất.

II) PHÉP DỜI HÌNH

1) ĐỊNH NGHĨA:

Phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì.



2) CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.
b) Biến đường thẳng thành đường thẳng.
c) Biến tia thành tia.
d) Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho.
e) Biến tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.
f) Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính với đường tròn ban đầu.
g) Biến góc thành góc bằng góc ban đầu.

B) PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

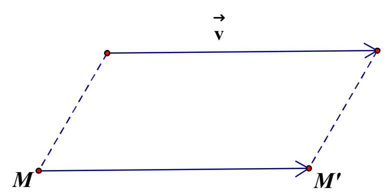
1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét các phép biến hình sau đây:

A) Phép biến hình F_1 biến mỗi điểm M(x;y) thành điểm M'(y;-x).
B) Phép biến hình F_2 biến mỗi điểm M(x;y) thành điểm M'(2x;y).
Trong 2 phép biến hình trên, phép nào là phép dời hình?

Vấn đề 2. Phép tịnh tiến

I) ĐỊNH NGHĨA

Trong mặt phẳng cho véctơ $\vec{v}$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ được gọi là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.



Phép tịnh tiến theo vec tơ $\vec{v}$ thường được kí hiệu $T_{\vec{v}}$.

Như vậy $M' = T_{\vec{v}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

Nhận xét. Phép tịnh tiến theo vec tơ – không chính là phép đồng nhất.

II) BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA PHÉP TỊNH TIẾN:

Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(x;y)$, $\vec{v} = (a;b)$. Gọi $M'(x';y') = T_{\vec{v}}(M)$.

Khi đó $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

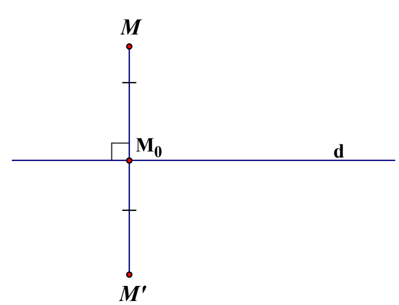
III) TÍNH CHẤT CỦA PHÉP TỊNH TIẾN

Phép tịnh tiến
1) Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
2) Biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho.
3) Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho.
4) Biến một tam giác thành một tam giác bằng tam giác đã cho.
5) Biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

Vấn đề 3. Phép đối xứng trục

I) ĐỊNH NGHĨA

Cho đường thẳng d. Phép biến hình biến mỗi điểm M thuộc d thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc d thành điểm M' sao cho d là đường trung trực của đoạn thẳng MM' được gọi là *phép đối xứng qua đường thẳng d* hay *phép đối xứng trục d*.



Phép đối xứng qua trục d thường được kí hiệu là $Đ_d$. Như vậy $M' = Đ_d(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M'} = -\overrightarrow{M_0M}$, với M_0 là hình chiếu vuông góc của M trên d.

II) BIỂU THỨC TỌA ĐỘ

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, với mỗi điểm $M(x;y)$ gọi $M'(x';y') = Đ_d(M)$

1) Nếu chọn d là trục Ox, thì: $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

2) Nếu chọn d là trục Oy, thì: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

III) TÍNH CHẤT

Phép đối xứng trục

1) Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
2) Biến một đường thẳng thành đường thẳng.
3) Biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho.
4). Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.
5). Biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

IV) TRỤC ĐỐI XỨNG CỦA MỘT HÌNH

Định nghĩa: Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình H nếu phép đối xứng trục $Đ_d$ biến H thành chính nó, tức là $H = Đ_d(H)$.

Chú ý: Một hình có thể không có trục đối xứng, cũng có thể có một hay nhiều trục đối xứng.

Vấn đề 4. Phép đối xứng tâm

I) ĐỊNH NGHĨA

Cho điểm I. Phép biến hình biến điểm I thành chính nó, biến mỗi điểm M khác I thành điểm M' sao cho I trung điểm của đoạn thẳng MM' được gọi là phép đối xứng tâm I.

Phép đối xứng tâm I thường được kí hiệu $Đ_I$

Từ định nghĩa ta suy ra:

1) $M' = Đ_I(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$. Từ đó suy ra:

Nếu $M \equiv I$ thì $M' \equiv I$

Nếu $M \neq I$ thì $M' = Đ_I(M) \Leftrightarrow I$ là trung điểm của MM'.

2) Điểm I được gọi là tâm đối xứng của hình H nếu phép đối xứng tâm I biến hình H thành chính nó. Khi đó H được gọi là hình có tâm đối xứng.

II) BIỂU THỨC TỌA ĐỘ

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $I(x_0;y_0)$, gọi $M(x;y)$ và $M'(x';y')$ là ảnh của M qua phép đối xứng tâm I. Khi đó: $\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$

III) CÁC TÍNH CHẤT

Phép đối xứng tâm

1) Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
2) Biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho.
3) Biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho.
4) Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.
5) Biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

Vấn đề 5. Phép quay

I) ĐỊNH NGHĨA

Cho điểm O và góc lượng giác α. Phép biến hình biến O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho $OM' = OM$ và góc lượng giác $(OM;OM')$ bằng α được gọi là phép quay tâm O góc quay α.

Điểm O được gọi là tâm quay, α được gọi là góc quay.

Phép quay tâm O góc α thường được kí hiệu là $Q_{(O;\alpha)}$.

Nhận xét:

Phép quay tâm O góc quay $\alpha = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$, chính là phép đối xứng tâm O.

Phép quay tâm O góc quay $\alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, chính là phép đồng nhất.

II) TÍNH CHẤT

Phép quay

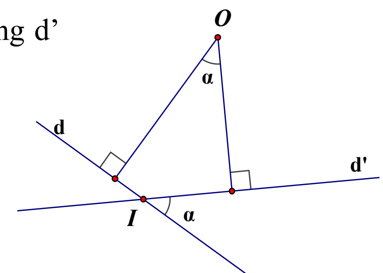
1) Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
2) Biến một đường thẳng thành một đường thẳng.
3) Biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho.
4) Biến một tam giác thành một tam giác bằng tam giác đã cho.
5) Biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

Chú ý:

Giả sử phép quay tâm I góc quay α biến đường thẳng d thành đường thẳng d' (hình 2). Khi đó:

Nếu $0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$ thì góc giữa d và d' bằng α.

Nếu $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ thì góc giữa d và d' bằng $\pi - \alpha$.



hình 2

Vấn đề 6. Khái niệm về phép dời hình, hai hình bằng nhau

I) ĐỊNH NGHĨA

Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có phép dời hình biến hình này thành hình kia.

II) TÍNH CHẤT

Nếu hình H_1 bằng hình H_2 và hình H_2 bằng hình H_3 thì hình H_1 bằng hình H_3

Vấn đề 7. Phép vị tự

I) ĐỊNH NGHĨA

Cho điểm O cố định và một số thực k không đổi, $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M', sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O tỉ số k và kí hiệu là $V_{(O,k)}$ (O được gọi là tâm vị tự).

Nhận xét:

Phép vị tự biến tâm vị tự thành chính nó.

Phép vị tự tỉ số $k = 1$ chính là phép đồng nhất.

Phép vị tự tâm I tỉ số $k = -1$ chính là phép đối xứng qua tâm I.

$M' = V_{(I;k)}(M) \Leftrightarrow M = V_{\left(I;\frac{1}{k}\right)}(M')$

II) CÁC TÍNH CHẤT

1) Định lí 1: Nếu phép vị tự tâm I tỉ số k biến hai điểm M và N lần lượt thành hai điểm M' và N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k|MN$.

2) Định lí 2: Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.

Từ các định lí trên ta có các hệ quả sau:

3) Hệ quả

Phép vị tự tỉ số k:

a) Biến đường thẳng không qua tâm vị tự thành đường thẳng song song với đường thẳng đã ch.

b) Biến đường thẳng qua tâm vị tự thành chính nó.

c) Biến tia thành tia.

d) Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với $|k|$.

e) Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là $|k|$.

f) Biến góc bằng góc ban đầu.

Chú ý:

Qua phép $V_{(O;k)}$ đường thẳng d biến thành chính nó khi và chỉ khi đường thẳng d qua tâm vị tự O.

III) ẢNH CỦA ĐƯỜNG TRÒN QUA PHÉP VỊ TỰ

Định lí 3: Phép vị tự tỉ số k biến một đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $|k|R$.

Chú ý: Nếu phép vị tự tâm O tỉ số k biến đường tròn $(I;R)$ thành đường tròn $(I';R')$ thì $|k| = \frac{R'}{R} \Leftrightarrow k = \pm\frac{R'}{R}$ và $\overrightarrow{OI'} = \overrightarrow{OI}$.

IV) TÂM VỊ TỰ CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Với hai đường tròn bất kì luôn có một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia. Tâm của phép vị tự này được gọi là tâm vị tự của hai đường tròn.

Nếu tỉ số vị tự $k > 0$ thì tâm vị tự đó gọi là tâm vị tự ngoài, nếu tỉ số vị tự $k < 0$ thì tâm vị tự đó gọi là tâm vị tự trong.

Hai đường tròn có bán kính bằng nhau và khác tâm thì chỉ có một tâm vị tự trong, đó chính là trung điểm của đoạn nối tâm.

Hai đường tròn có bán kính khác nhau thì có một tâm vị tự ngoài và một tâm vị tự trong.

Đường tròn (C) biến thành chính nó khi và chỉ khi đường tròn (C) có tâm là tâm vị tự và tỉ số vị tự $k = \pm 1$.

Vấn đề 8. Phép đồng dạng

I) ĐỊNH NGHĨA

Phép biến hình F gọi là phép đồng dạng tỉ số k $(k > 0)$ nếu với hai điểm bất kì M, N và ảnh M', N' tương ứng của chúng, ta luôn có $M'N' = kMN$.

Nhận xét:

Phép dời hình cũng là phép đồng dạng với tỉ số $k = 1$.

Phép vị tự tỉ số k cũng là phép đồng dạng với tỉ số $|k|$.

Nếu thực hiện liên tiếp phép đồng dạng tỉ số k và phép đồng dạng tỉ số p thì ta được phép đồng dạng tỉ số pk.

II) CÁC TÍNH CHẤT

1) Định lí: Mọi phép đồng dạng tỉ số k đều là hợp thành của một phép vị tự tỉ số k và một phép dời hình.

2) Hệ quả

Phép đồng dạng tỉ số k

a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng (và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó).

b) Biến đường thẳng thành đường thẳng.

c) Biến tia thành tia.

d) Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với k.

e) Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là k.

f) Biến đường tròn thành đường tròn có bán kính là Kr.

g) Biến góc thành góc bằng nó.

Chú ý:

Phép dời hình nói chung không có tính chất biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hay trùng với nó.

Phép đồng dạng là hợp thành của phép vị tự và phép dời hình, nên phép đồng dạng nói chung không có tính chất biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hay trùng với nó.

III) HAI HÌNH ĐỒNG DẠNG

Định nghĩa: Hai hình được gọi là đồng dạng với nhau nếu có phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

Chương 2. Quan hệ song song

Vấn đề 1. Đại cương hình học không gian

Bước đầu tiên làm quen với Hình học không gian, các bạn các bạn phải nhớ kỹ các khái niệm và những tính chất sau sau:

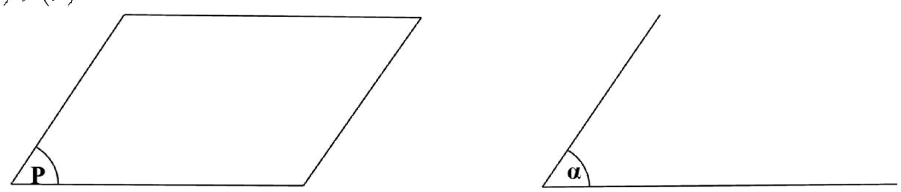
I. KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

1. Mặt phẳng:

Mặt bảng, mặt bàn, mặt nước hồ yên lặng, mặt sàn nhà,... cho ta hình ảnh một phần của mặt phẳng. Mặt phẳng không có bề dày và không có giới hạn.

Để biểu diễn mặt phẳng ta thường dùng hình bình hành hay một miền góc và ghi tên của mặt phẳng đó vào một góc của hình biểu diễn (như hình 1) .

Để kí hiệu mặt phẳng , ta thường dùng chữ cái in hoa hoặc chữ cái Hi Lạp đặt trong dấu ( ). Ví dụ: mặt phẳng (P), mặt phẳng (Q), mặt phẳng (α) , mặt phẳng (β) hoặc viết tắt là mp(P), mp(Q), mp(α) , mp(β) , hoặc (P), (Q), (α) , (β) .

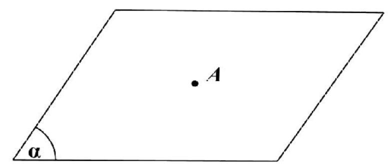


Hình 1

2. Điểm thuộc mặt phẳng:

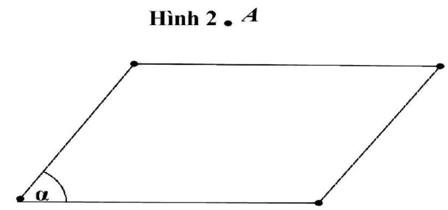
Cho điểm A và mặt phẳng (α) .

Khi điểm A thuộc mặt phẳng (α) , ta nói A nằm trên (α) hay mặt phẳng (α) chứa A, hay mặt phẳng (α) đi qua điểm A và kí hiệu $A \in (\alpha)$, được biểu diễn ở hình 2 .



Hình 2

Khi điểm A không thuộc mặt phẳng (α) ta nói điểm A nằm ngoài mặt phẳng (α) hay mặt phẳng (α) không chứa điểm A và kí hiệu là $A \notin (\alpha)$, được biểu diễn ở hình 3 .

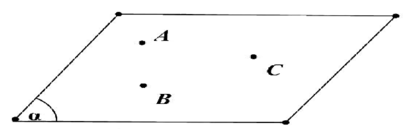


Hình 3

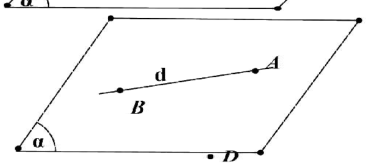
II. CÁC TÍNH CHẤT ĐƯỢC THỪA NHẬN

__Tính chất 1:__ Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

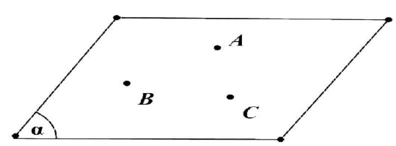
__Tính chất 2:__ Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.



__Tính chất 3:__ Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

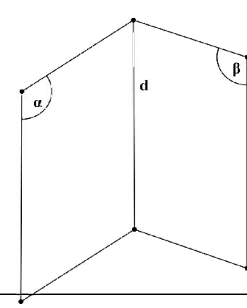


__Tính chất 4:__ Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng .



__Tính chất 5:__ Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa .

Từ tính chất này suy ra: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng sẽ có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy. Đường thẳng chung là duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó . Đường thẳng chung đó được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng.



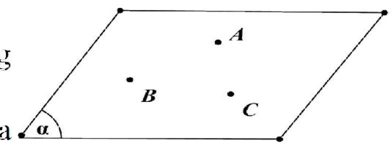
<u>Ví dụ:</u> Đường thẳng chung d của hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) được gọi là GIAO TUYẾN của hai mặt phẳng (α) và (β) và kí hiệu là $d=(\alpha)\cap(\beta)$.

Tính chất 6: Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

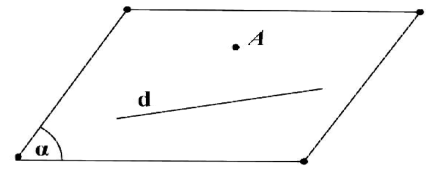
III. CÁCH XÁC ĐỊNH MỘT MẶT PHẲNG

Có ba cách xác định một mặt phẳng:

– Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.



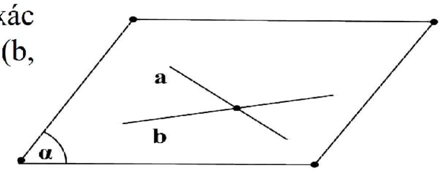
– Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.



– Cho đường thẳng d và điểm A không thuộc d. Khi đó điểm A và đường thẳng d xác định một mặt phẳng, kí hiệu là mp (A , d), hoặc mp (d, A) hay (d, A) .

Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau:

Cho hai đường thẳng cắt nhau a và b . Khi đó hai đường thẳng a và b xác định một mặt phẳng và kí hiệu là mp(a, b) hay (a , b) , hoặc mp (b , a) hay (b, a).



HÌNH CHÓP VÀ TỨ DIỆN

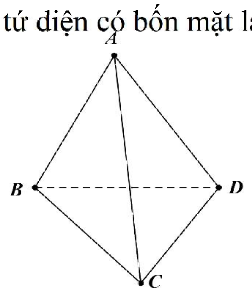
1. Khái niệm:

Trong mặt phẳng (α) cho đa giác lồi $A_1A_2A_3...A_n$. Lấy một điểm S không thuộc mặt phẳng (α). Lần lượt nối điểm S với các đỉnh $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ ta được n tam giác SA_1A_2, $SA_2A_3, ..., SA_nA_1$. Hình gồm đa giác $A_1A_2A_3...A_n$ và n tam giác SA_1A_2, SA_2A_3 ,..., SA_nA_1 được gọi là *hình chóp*, kí hiệu là $S.A_1A_2A_3...A_n$. Ta gọi S là *đỉnh của hình chóp*, còn đa giác $A_1A_2A_3...A_n$ là *mặt đáy của hình chóp*, các tam giác SA_1A_2, SA_2A_3, …, SA_nA_1 được gọi là *các mặt bên của hình chóp*, các đoạn thẳng SA_1, SA_2, $SA_3, ..., SA_n$ được gọi là *các cạnh bên của hình chóp* .

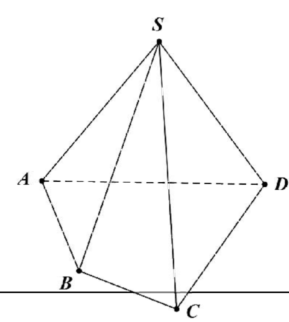
Ta gọi hình chóp có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác,..., lần lượt là *hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác , ...*

Cho bốn điểm A , B , C , D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD và BCD gọi là *hình tứ diện* (hay ngắn gọn gọi là *tứ diện*) và được kí hiệu là ABCD. Các điểm A, B, C, D gọi là các *đỉnh của tứ diện*. Các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, CA, BD gọi là các *cạnh của tứ diện* . Hai cạnh không đi qua một đỉnh gọi là *hai cạnh đối diện của tứ diện*. Các tam giác ABC, ACD, ABD, BCD gọi là *các mặt của tứ diện* . Đỉnh không nằm trên mặt gọi là *đỉnh đối diện của mặt đó* .

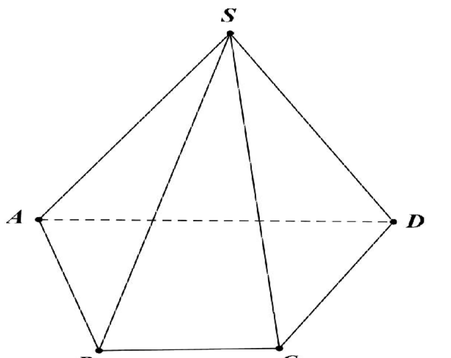
Hình tứ diện có bốn mặt là *các tam giác đều* gọi là hình ***tứ diện đều*** .



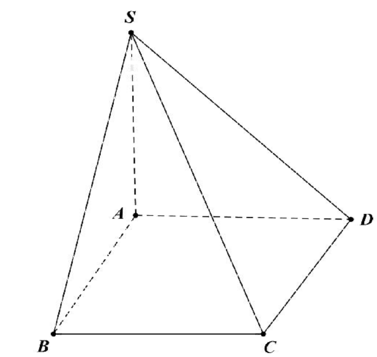
Hình chóp tam giác (tứ diện)



Hình chóp tứ giác



Hình chóp tứ giác có đáy là hình thang



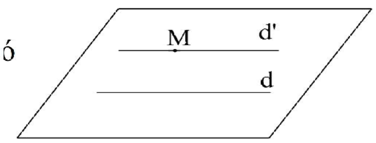
Hình chóp tứ giác có đáy là hình bình hành

Vấn đề 2. Hai đường thẳng chéo nhau và hai đường thẳng song song

Tính chất:

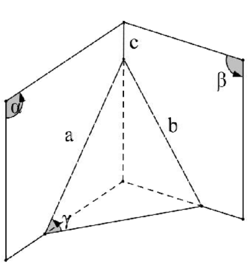
Định lí 1:

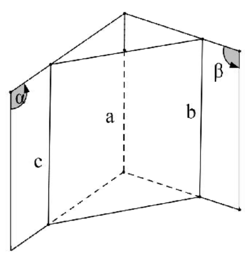
Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.



Định lí 2:

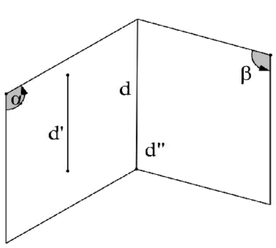
Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.

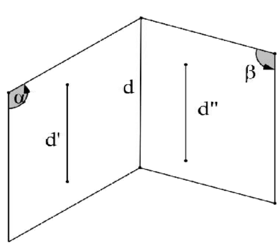


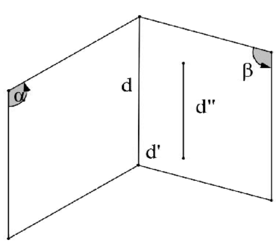


Hệ quả:

Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

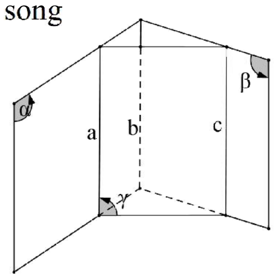




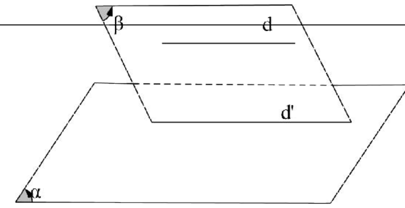


Định lí 3:

Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

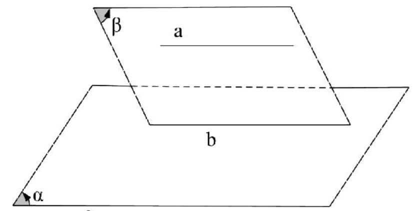


Vấn đề 3. Đường thẳng và mặt phẳng song song



Định lí 1:

Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d' nằm trong (α) thì d song song với (α) .

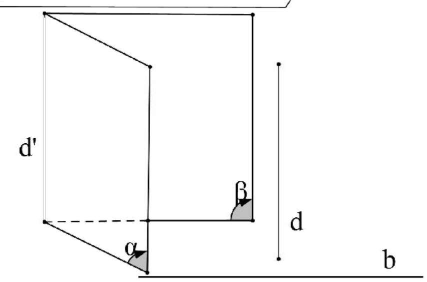


Định lí 2:

Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) . Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a .

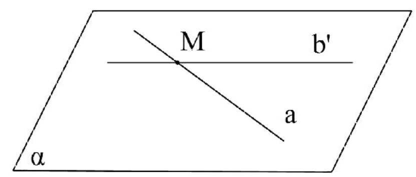
Hệ quả:

Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.



Định lí 3:

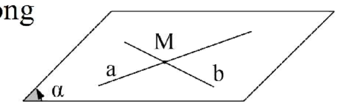
Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.



Vấn đề 4. Hai mặt phẳng song song

Định lí 1:

Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a,b và a,b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β) .

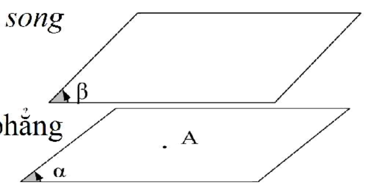


Phương pháp chứng minh hai mặt phẳng song song:

Ta phải chứng minh có hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng này lần lượt song song với mặt phẳng kia.

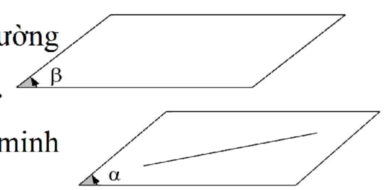
Định lí 2:

Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.



Hệ quả:

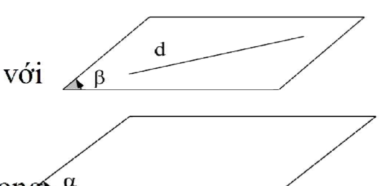
Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì trong (α) có một đường thẳng song song với d và qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α) .



Phương pháp chứng minh đường thẳng d song song với (α) : Ta phải chứng minh d thuộc (β) và (β) // $(\alpha) \Rightarrow d$ // (α) .

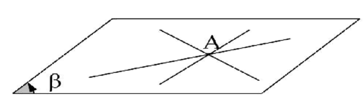
Hệ quả 2:

Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.



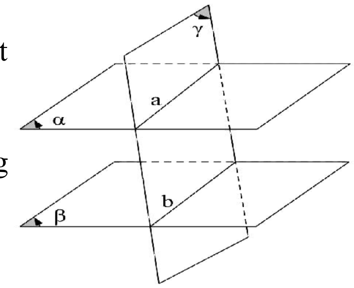
Hệ quả 3:

Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α) . Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằm trong mặt phẳng đi qua A và song song với (α) .



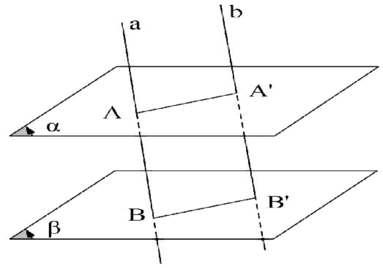
Định lí 3:

Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.



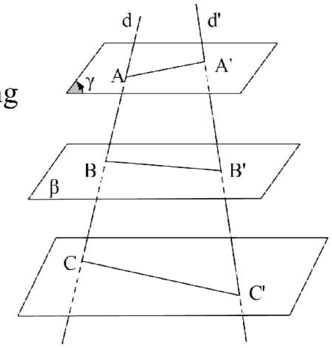
Hệ quả:

Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.



Định lí Ta-lét:

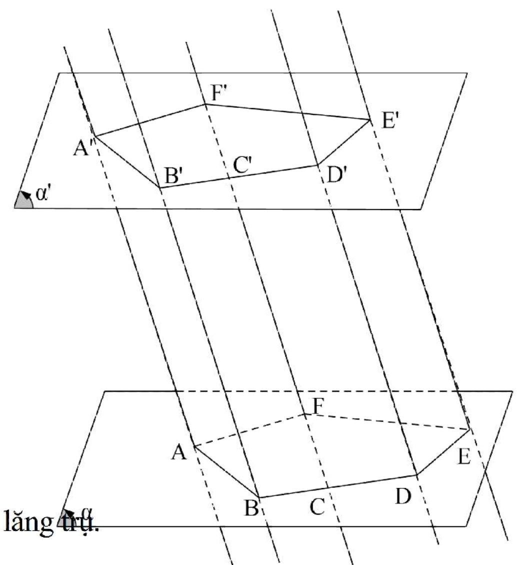
Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.



Hình lăng trụ và hình hộp.

Cho hai mặt phẳng song song (α) và (α'). Trên (α) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$.

Qua các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta vẽ các đường thẳng song song với nhau và cắt (α') lần lượt tại $A_1', A_2', ..., A_n'$.



Hình gồm hai đa giác $A_1A_2...A_n$, $A_1'A_2'...A_n'$ và các hình bình hành $A_1A_1'A_2'A_2$, $A_2A_2'A_3'A_3, ...,$ $A_nA_n'A_1'A_1$ được gọi là hình lăng trụ và được kí hiệu là $A_1A_2...A_n.A_1'A_2'...A_n'$.

Hai đa giác $A_1A_2...A_n$ và $A_1'A_2'...A_n'$ được gọi là hai mặt đáy của hình lăng trụ.

Các đoạn thẳng $A_1A_1', A_2A_2', ..., A_nA_n'$ được gọi là các cạnh bên của hình lăng trụ.

Các hình bình hành $A_1A_1'A_2'A_2, A_2A_2'A_3'A_3, ..., A_nA_n'A_1'A_1$ được gọi là các mặt bên của hình lăng trụ.

Các đỉnh của hai đa giác được gọi là các đỉnh của hình lăng trụ.

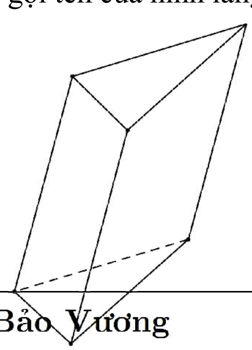
Nhận xét:

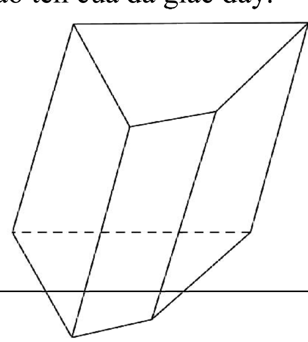
Các cạnh bên của hình lăng trụ bằng nhau và song song với nhau.

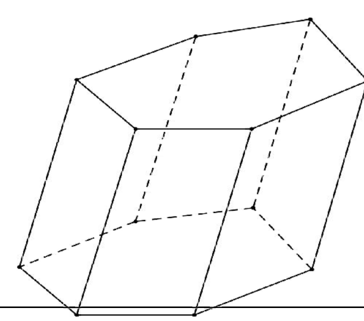
Các mặt bên của hình lăng trụ là hình bình hành.

Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

Người ta gọi tên của hình lăng trụ dựa vào tên của đa giác đáy.







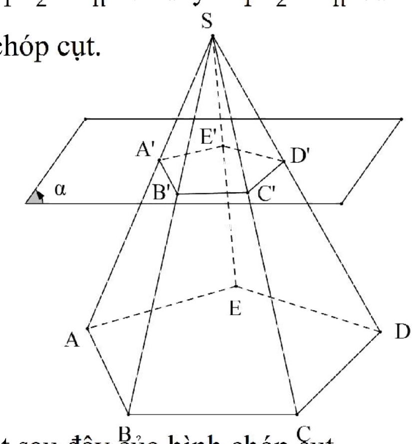
Hình lăng trụ lục giác

Hình lăng trụ tam giác

Hình lăng trụ tứ giác

Hình chóp cụt

Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$, một mặt phẳng (P) không qua đỉnh, song song với mặt phẳng đáy của hình chóp cắt các cạnh $SA_1, SA_2, SA_3, ..., SA_n$ lần lượt tại $A_1', A_2', ...A_n'$. Hình tạo bởi thiết diện $A_1'A_2'...A_n'$ và đáy $A_1A_2...A_n$ của hình chóp cùng với các tứ giác $A_1'A_2'A_2A_1, A_2'A_3'A_3A_2, ..., A_n'A_1'A_1A_n$ gọi là hình chóp cụt.



Đáy của hình chóp gọi là đáy lớn của hình chóp cụt, còn thiết diện $A_1'A_2'...A_n'$ gọi là đáy nhỏ của hình chóp cụt.

Các tứ giác $A_1'A_2'A_2A_1$, $A_2'A_3'A_3A_2, ...,$ $A_n'A_1'A_1A_n$ gọi là các mặt bên của hình chóp cụt. Các đoạn thẳng A_1A_1', A_2A_2', A_nA_n' gọi là các cạnh bên của hình chóp cụt.

Tùy theo đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác …, ta có hình chóp cụt tam giác,
hình chóp cụt tứ giác, hình chóp cụt ngũ giác.

Vì hình chóp cụt được cắt ra từ một hình chóp nên ta dễ dàng suy ra các tính chất sau đây của hình chóp cụt.

Tính chất:

- Hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và các tỉ số các cặp cạnh tương ứng bằng nhau.
- Các mặt bên là những hình thang.
- Các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại một điểm.

Chương 3. Quan hệ vuông góc

Vấn đề 1. Vecto trong không gian

I) CÁC ĐỊNH NGHĨA

1) Vectơ, giá và độ dài của vectơ

Vecto trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu là A điểm cuối là B. Vectơ còn được kí hiệu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{u}, \vec{v}, ...$

Giá của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó. Hai vec tơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau. Ngược lại hai vec tơ có giá cắt nhau được gọi là hai vec tơ không cùng phương. Hai vec tơ cùng phương có thể cùng hướng hoặc khác hướng.

Độ dài của vec tơ là độ dài của đoạn thẳng có hai đầu mút là điểm đầu và điểm cuối của vec tơ đó. Vectơ có độ dài bằng 1 được gọi là vectơ đơn vị. Ta kí hiệu độ dài vec tơ là $|\vec{a}|, |\vec{x}|, |\vec{u}|, |\overrightarrow{AB}|$. Như vậy $|\overrightarrow{AB}| = AB$.

2) Hai vec tơ bằng nhau, vec tơ – không

Hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng. Khi đó ta kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$.

Vectơ – không là một vec tơ đặc biệt có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, nghĩa là với mọi điểm A tùy ý ta có $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ và khi đó mọi đường thẳng đi qua điểm A đều chứa vectơ $\overrightarrow{AA}$. Do đó ta quy ước mọi vec tơ $\vec{0}$ đều bằng nhau, có độ dài bằng 0 và cùng phương, cùng hướng với mọi vec tơ. Do đó ta viết $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$ với mọi điểm A, B tùy ý.

II) PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ VECTƠ

1) Định nghĩa:

- Cho hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Trong không gian lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Véc tơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, đồng thời được kí hiệu $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$.
- Vec tơ $\vec{b}$ là vec tơ đối của $\vec{a}$ nếu $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ và $\vec{a}$, $\vec{b}$ ngược hướng nhau, kí hiệu $\vec{b} = -\vec{a}$.

- $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$

2) Tính chất

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (tính chất giao hoán).

$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ (tính chất kết hợp).

$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

$\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=-\vec{a}+\vec{a}=\vec{0}$

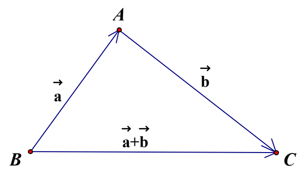
3) Các quy tắc cần nhớ khi tính toán

a) Quy tắc ba điểm

Với ba điểm A, B, C bất kì ta có:

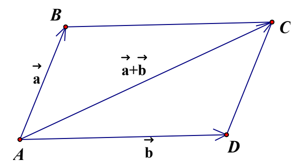
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$



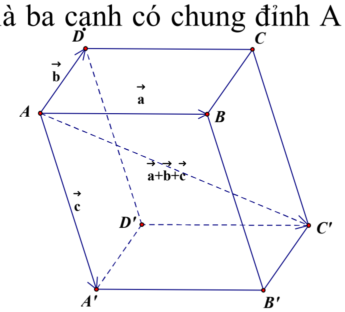
b) Quy tắc hình bình hành

Với ABCD là hình bình hành ta có: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$



c) Quy tắc hình hộp

Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' với AB, AD, AA' là ba cạnh có chung đỉnh A và AC' là đường chéo, ta có: $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$



d) Mở rộng quy tắc ba điểm

Cho n điểm $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ bất kì, ta có:

$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$.

III). PHÉP NHÂN VEC TƠ VỚI MỘT SỐ

1) Định nghĩa

Cho số $k\neq 0$ và vectơ $\vec{a}\neq\vec{0}$. Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ khi $k>0$, ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ khi $k<0$ và có độ dài bằng $|k|.\left|\vec{a}\right|$

2). Tính chất

Với mọi vec tơ $\vec{a},\vec{b}$ với mọi số m, n ta có:

$m\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=m\vec{a}+m\vec{b}$

$\left(m+n\right)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$

$m\left(n\vec{a}\right)=\left(mn\right)\vec{a}$

$1.\vec{a}=\vec{a}$; $\left(-1\right)\vec{a}=-\vec{a}$.

$0.\vec{a}=\vec{0}$; $k.\vec{0}=\vec{0}$.

IV). ĐIỀU KIỆN ĐỒNG PHẲNG CỦA BA VEC TƠ

1). Khái niệm về sự đồng phẳng của ba vec tơ trong không gian

Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đều khác $\vec{0}$ trong không gian. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Khi đó xảy ra hai trường hợp:

Trường hợp các đường thẳng OA, OB, OC không cùng nằm trong một mặt phẳng, ta nói ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng.

Trường hợp các đường thẳng OA, OB, OC cùng nằm trong một mặt phẳng, ta nói ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

2). Định nghĩa

Trong không gian ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

3). Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng:

Định lí 1: Trong không gian cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và một vectơ $\vec{c}$. Khi đó ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, ngoài ra cặp số m, n là duy nhất.

4). Phân tích (biểu thị) một vectơ theo ba vec tơ không đồng phẳng.

Định lí 2:

Cho $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng. Với mọi vectơ $\vec{x}$ trong không gian ta đều tìm được một bộ ba số m, n, p sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$. Ngoài ra bộ ba số m, n, p là duy nhất.

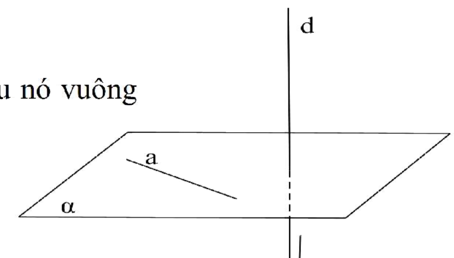
Cụ thể $\overrightarrow{OX} = \vec{x}, \overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ và $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$ với $\overrightarrow{OA'} = m\vec{a}, \overrightarrow{OB'} = n\vec{b}, \overrightarrow{OC'} = p\vec{c}$. Khi đó $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$

Vấn đề 2. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

I. <u>Định nghĩa</u>:

Một đường thẳng được gọi là vuông góc với một mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng đó:

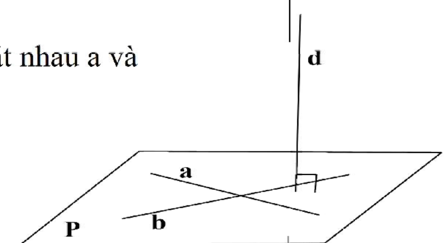
$d \perp mp(\alpha) \Leftrightarrow d \perp a, \forall a \subset (\alpha)$



II. <u>Các định lý:</u>

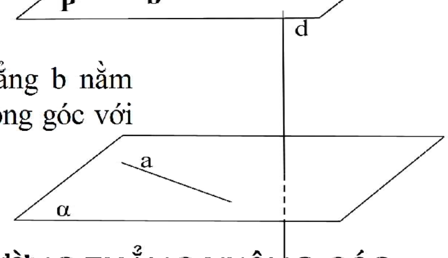
<u>Định lý 1</u>: Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mp(P) thì đường thẳng d vuông góc với mp(P):

$$\begin{cases} d \perp a, d \perp b \\ a, b \subset (P) \\ a, b \text{ cắt nhau} \end{cases} \Rightarrow d \perp (P)$$



<u>Định lý 2</u>: (Ba đường vuông góc)

Cho đường thẳng a không vuông góc với mp(P) và đường thẳng b nằm trong (P). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P).



PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Để chứng minh $a \perp b$ ta thường sử dụng những phương pháp chứng minh sau:

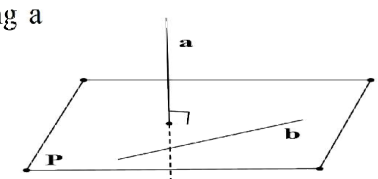
1. Sử dụng các phương pháp Hình học phẳng: Góc nội tiếp, Định lí Pitago đảo, . . .

3. Sử dụng phương pháp tích vô hướng của hai véctơ: nếu $\vec{a}.\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow a \perp b$ ($\vec{a}, \vec{b}$ là hai véctơ chỉ phương của hai đường thẳng a và b).

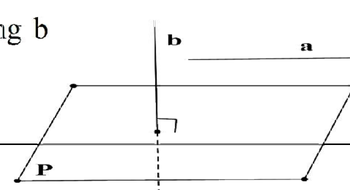
4. Sử dụng tính chất bắc cầu: $\begin{cases} c \perp b \\ c \,//\, a \end{cases} \Rightarrow a \perp b$

5. Tìm một mặt phẳng (P) chứa đường thẳng b. Chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P), thì $a \perp b$:

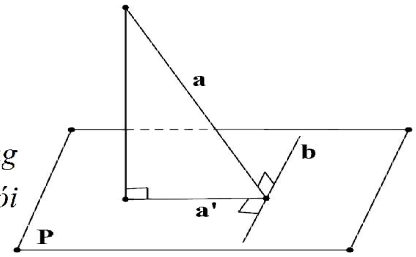
$$\begin{cases} a \perp (P) \\ b \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp b$$



6. Chứng minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (P), đường thẳng b vuông góc với mặt phẳng (P), thì suy ra $a \perp b$:



$\begin{cases} a\,//\,(P) \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp b$



7. Áp dụng định lí 3 đường vuông góc:

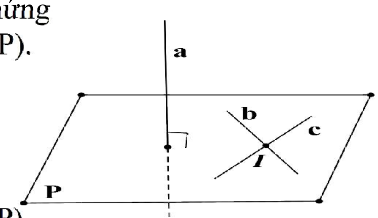
a' là hình chiếu vuông góc của a trên mặt phẳng (P) $, b \subset (P)$. *Đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b khi và chỉ khi b vuông góc với a'. Nói ngắn gọn b vuông góc với hình chiếu thì b vuông góc với đường xiên.*

ĐÂY LÀ PHƯƠNG PHÁP RẤT HAY SỬ DỤNG! Các bạn phải thành thạo phương pháp này.

PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

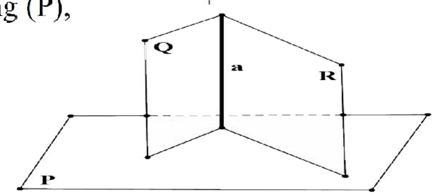
Để chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) ta thường sử dụng các phương pháp sau:

1). Muốn chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P). Ta phải chứng minh đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng (P).



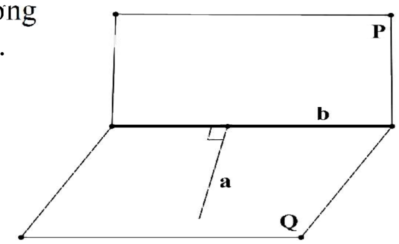
$\begin{cases} a \perp b \text{ vaø } a \perp c \\ b \cap c \neq I \\ b; c \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp (P)$

2). Hai mặt phẳng (Q) và (R) có giao tuyến a cùng vuông góc với mặt phẳng (P), thì a vuông góc với (P).



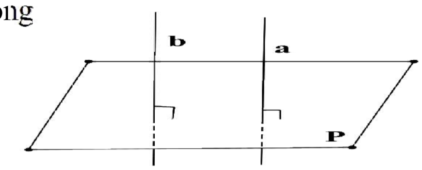
$\begin{cases} (Q) \perp (P) \\ (R) \perp (P) \\ (Q) \cap (R) = a \end{cases} \Rightarrow a \perp (P)$

3). Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến b. Một đường thẳng a thuộc mặt phẳng (Q) vuông góc với b, thì a vuông góc với mặt phẳng (P).



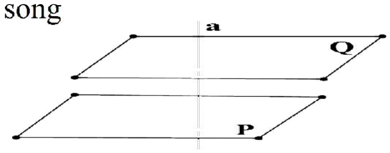
$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = b \\ a \subset (Q) \\ a \perp b \end{cases} \Rightarrow a \perp (P)$

4). Chứng minh đường thẳng b vuông góc với mặt phẳng (P) , đường thẳng a song song với b ,suy ra a vuông góc với (P).



$\begin{cases} a\,//\,b \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp (P)$

5). Chứng minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q), mặt phẳng (P) song song với (Q), nên a vuông góc với (P).



$\begin{cases} a \perp (Q) \\ (Q)\,//\,(P) \end{cases} \Rightarrow a \perp (P)$

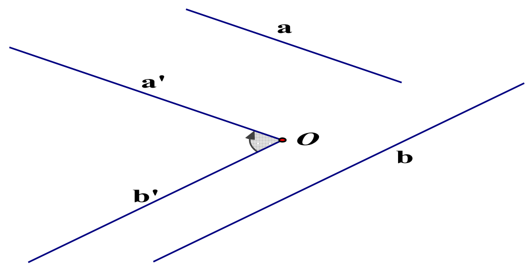
Hai trụ cột để giải toán của dạng này :

– Muốn chứng minh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P), ta phải chứng minh đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng (P).

– Khi đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) thì đường thẳng d vuông góc với **mọi đường** thuộc mặt phẳng (P).

Vấn đề 3. Góc giữa hai đường thẳng

• **Cách xác định góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b:** Chọn điểm O thích hợp, rồi kẻ hai đường thẳng đi qua điểm O: a'// a và b'// b.



• **Các phương pháp tính góc:**
+ Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác:

Định lí sin: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

Định lí cos: $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

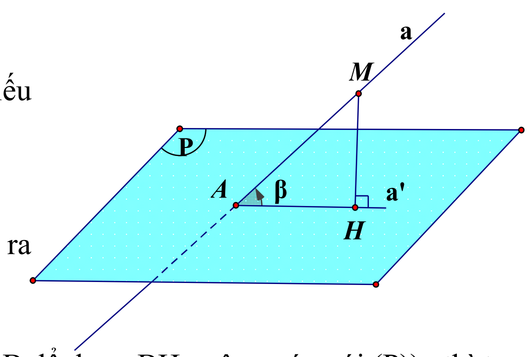
+ Tính góc theo vectơ chỉ phương: $\cos\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$

• **Chú ý.** + $0^0\le\varphi\le 90^0$

+ $AB\perp CD\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0.$

+ Nếu a và b song song hoặc trùng nhau thì $\varphi=0^0$ **.**

Vấn đề 4. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng



Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là góc giữa d và hình chiếu của nó trên mặt phẳng (P)

Gọi α là góc giữa d và mặt phẳng (P) thì $0^0\le\alpha\le 90^0$

Đầu tiên tìm giao điểm của d và (P) gọi là điểm A.

Trên d chọn điểm B khác A , dựng BH vuông góc với (P) tại H. Suy ra AH là hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P).

Vậy góc giữa d và (P) là góc $\widehat{BAH}$.

Nếu khi xác định góc giữa d và (P) khó quá (không chọn được điểm B để dựng BH vuông góc với (P)) , thì ta sử dụng công thức sau đây . Gọi α là góc giữa d và (P) suy ra :

$$\sin\alpha=\frac{d\left(M,mp\left(P\right)\right)}{AM}.$$

Ta phải chọn điểm M trên d, mà có thể tính khoảng cách được đến mặt phẳng (P). Còn A là giao điểm của d và mặt phẳng (P).

Vấn đề 5. Hai mặt phẳng vuông góc

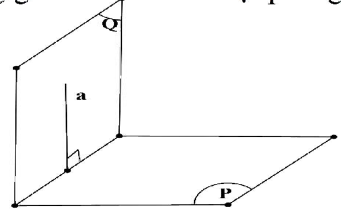
I. ĐỊNH NGHĨA

Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0.

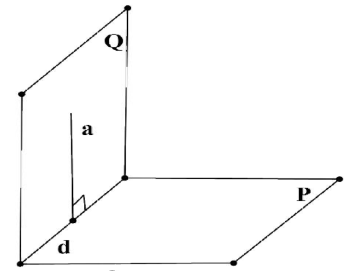
II. CÁC ĐỊNH LÝ VÀ HỆ QUẢ

Định lý 1: Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases}a\perp mp\left(P\right)\\ a\subset mp\left(Q\right)\end{cases}\Rightarrow mp\left(P\right)\perp mp\left(Q\right)$$

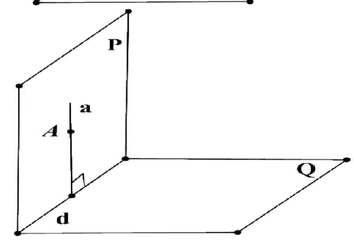


<u>*Hệ quả 1:*</u> Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong (Q), vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (P).



$$\begin{cases}(P)\perp(Q)\\(P)\cap(Q)=d\\a\subset(Q),\ a\perp d\end{cases}\Rightarrow a\perp(P)$$

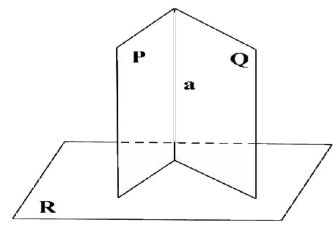
<u>*Hệ quả 2:*</u> Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là một điểm trong (P) thì đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P).



$$\begin{cases}(P)\perp(Q)\\A\in(P),A\in a\\a\perp(Q)\end{cases}\Rightarrow a\subset(P)$$

<u>Định lý 2:</u> Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

$$\begin{cases}(P)\cap(Q)=a\\(P)\perp(R)\\(Q)\perp(R)\end{cases}\Rightarrow a\perp(R)$$



HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG, HÌNH HỘP CHỮ NHẬT, HÌNH LẬP PHƯƠNG

<u>ĐỊNH NGHĨA:</u>

Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với các mặt đáy. Độ dài cạnh bên được gọi là chiều cao của hình lăng trụ đứng.

+ Hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... được gọi là *hình lăng trụ đứng tam giác, hình lăng trụ đứng tứ giác, hình lăng trụ đứng ngũ giác,...*

+ Hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều được gọi là hình lăng trụ đều. Ta có các loại lăng trụ đều như *hình lăng trụ tam giác đều , hình lăng trụ tứ giác đều , hình lăng trụ ngũ giác đều ...*

- Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành được gọi là *hình hộp đứng.*
- Hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật được gọi là *hình hộp chữ nhật.*
- Hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông và các mặt bên đều là hình vuông được gọi là *hình lập phương.*

HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

HÌNH CHÓP ĐỀU

Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu nó có đáy là một đa giác đều và có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.

<u>Nhận xét:</u>

+ Hình chóp đều có các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau. Các mặt bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.

+ Các cạnh bên của hình chóp đều tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.

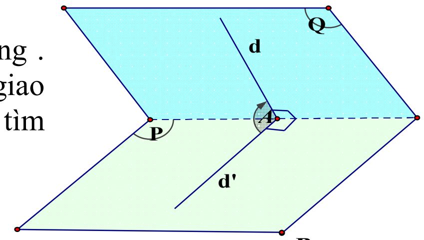
HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.

Vấn đề 6. Góc giữa hai mặt phẳng

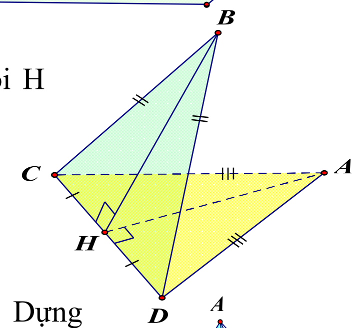
PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Để tìm góc giữa hai mặt phẳng , đầu tiên tìm giao tuyến của hai mặt phẳng . Sau đó tìm hai đường thẳng lần lượt thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm . Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng vừa tìm .

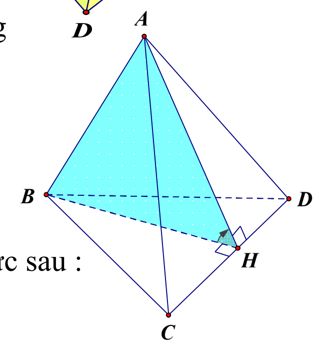


Những trường hợp đặc biệt đề hay ra :

Trường hợp 1 : Hai tam giác cân ACD và BCD có chung cạnh đáy CD . Gọi H trung điểm của CD , thì góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc $\widehat{AHB}$.



Trường hợp 2 : Hai tam giác ACD và BCD bằng nhau có chung cạnh CD . Dựng $AH \perp CD \Rightarrow BH \perp CD$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc $\widehat{AHB}$.



Trường hợp 3 : Khi xác định góc giữa hai mặt phẳng quá khó , ta nên sử dụng công thức sau :

$$\sin\varphi = \frac{d\left(A, mp(Q)\right)}{d\left(A, a\right)}$$

Với φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q). A là một điểm thuộc mặt phẳng (P) và a là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

Trường hợp 4 : Có thể tìm góc giữa hai mặt phẳng bằng công thức $S' = S.\cos\varphi$

Trường hợp 5 : Tìm hai đường thẳng d và d' lần lượt vuông góc với mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) . Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa d và d' .

Trường hợp 6 : CÁCH XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA MẶT PHẲNG BÊN VÀ MẶT PHẲNG ĐÁY

BƯỚC 1: XÁC DỊNH GIAO TUYẾN d của mặt bên và mặt đáy.

BƯỚC 2 : TỪ HÌNH CHIẾU VUÔNG GÓC CỦA ĐỈNH , DỰNG $AH \perp d$.

BƯỚC 3 : GÓC CẦN TÌM LÀ GÓC $\widehat{SHA}$.

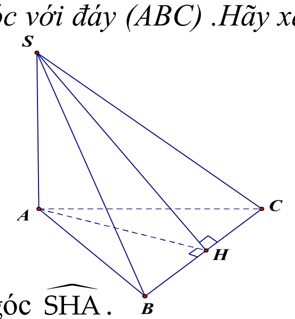
Với S là đỉnh , A là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

Ví dụ điển hình : *Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với đáy (ABC) .Hãy xác định góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy (ABC).*

Ta có BC là giao tuyến của mp(SBC) và (ABC).

Từ hình chiếu của đỉnh là điểm A , dựng $AH \perp BC$.

Vì $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH$.



Kết luận góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SHA}$.

Vấn đề 7. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

I). PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN :

❖ Bài toán tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng , là một dạng toán rất quan trọng trong chương vuông góc của lớp 11 và là một phần hay ra trong đề thi Đại Học .

Để giải quyết vấn đề này các bạn phải thành thạo hai công cụ sau và nó liên quan với nhau :

Bài toán 1 : Tính khoảng cách từ hình chiếu vuông góc của đỉnh đến một mặt bên

Phương pháp xác định khoảng cách từ hình chiếu của đỉnh đến một mặt phẳng bên.

BƯỚC 1: Xác định giao tuyến d

BƯỚC 2 : Từ hình chiếu vuông góc của đỉnh , DỰNG $AH \perp d$ ($H \in d$).

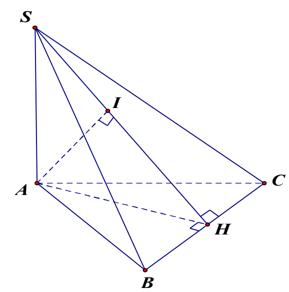
BƯỚC 3 : Dựng $AI \perp SH(I \in SH)$.Khoảng cách cần tìm là AI

Với S là đỉnh , A là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

Ba bước dựng ở trên là sử dụng tính chất : Hai mặt phẳng vuông góc với nhau , một đường thuộc mặt phẳng náy vuông góc với giao tuyến thì sẽ vuông vuông với mặt phẳng kia.

❖ ***Đây là bài toán cơ bản nhưng vô cùng quan trọng trong việc tính khoảng cách từ một đểm đến một mặt phẳng .Hầu như tính khoảng cách từ một điểm BẤT KỲ đến mặt phẳng bên đều thông qua điểm này dựa vào công thức của bài toán 2 .***

Ví dụ điển hình : *Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với đáy (ABC) .Hãy xác khoảng cách từ điểm A đến mặt bên (SBC).*



Ta có BC là giao tuyến của mp(SBC) và (ABC).

Từ hình chiếu của đỉnh là điểm A , dựng $AH \perp BC$ tại H. Dựng $AI \perp SH$ tại I

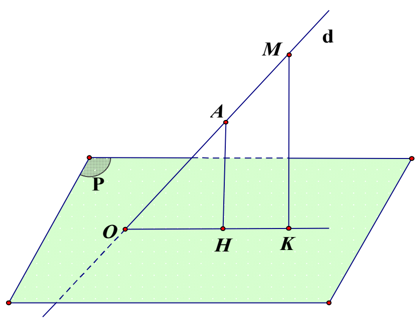
Vì $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow (SBC) \perp (SAH)$.

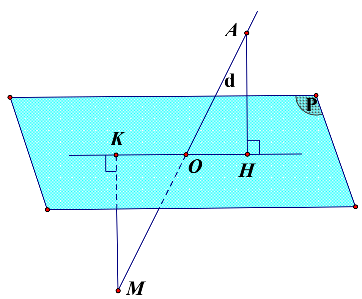
Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (SAH) theo giao tuyến SH có $AI \perp SH$

nên $AI \perp mp(SBC) \Rightarrow d(A, mp(SBC)) = AI$

Bài toán 2 : Tính khoảng cách từ một đểm bất kỳ đến một mặt phẳng

Thường sử dụng công thức sau :





Công thức tính tỉ lệ khoảng cách:	$\dfrac{d(M, mp(P))}{d(A, mp(P))} = \dfrac{MO}{AO}$

Ở công thức trên cần tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P).

Phương pháp phải tìm một đường thẳng d qua M và chứa một điểm A mà có thể tính khoảng cách đến mặt phẳng (P). KINH NGHIỆM thường điểm A là hình chiếu của đỉnh.

Vấn đề 8. Hai đường thẳng chéo nhau

1). Khái niệm :

Hai đường thẳng a và b không cùng thuộc một mặt phẳng (không có mặt phẳng nào chứa cả a và b) thì ta nói hai đường thẳng a và b chéo nhau .

2). Đường vuông góc chung của hai đường thẳng :

Nếu có đường thẳng d lần lượt vuông góc với cả hai đường thẳng a và b chéo nhau lần lượt tại M và N , thì đường thẳng d gọi là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b , còn độ dài đoạn MN gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

Có hai dạng toán chính của bài này là :

Dạng 1 : Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng cheo nhau

Dạng 2 : Xác định đường vuông góc chung và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau .

Chúng ta lần lượt xét các phương pháp giải cụ thể của hai dạng trên như sau :

DẠNG 1 :Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Phương pháp chung ta phải chuyển khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau về khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng hoặc khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng . Thường xảy ra những trường hợp sau đây :

1). Nếu đường thẳng a thuộc một mặt phẳng (P) , và đường thẳng b song song với mặt phẳng (P). Thì khoảng cách giữa a và b bằng khoảng cách từ đường thẳng b đến mặt phẳng (P) , CHỌN một điểm M thích hợp thuộc b sao có có thể tính khoảng cách dễ dàng đến mặt phẳng (P) . Khoảng cách từ M đến (P) là khoảng cách giữa hai đường a và b .

Chú ý : Nếu không tìm được một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia , thì ta phải dựng mặt phẳng (P) chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia .

2). Nếu đường thẳng a thuộc mặt phẳng (P) , đường thẳng b thuộc mặt phẳng (Q) .Mà hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau , thì khoảng cách giữa a và b bằng khoảng cách (P) và (Q) .

3). Cụ thể tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b, với a là cạnh bên còn b là một cạnh của đáy . Cách làm như sau :

Gọi I là giao điểm của đường thẳng a với mặt đáy. Từ I dựng đường thẳng Δ song song với b. Lúc đó b song song với mặt phẳng (P) chứa a và Δ. Chọn một điểm M trên b sao cho có thể tính khoảng cách đến mặt phẳng (P). Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng khoảng cách giữa a và b.

Vấn đề 9. Dựng thiết mặt phẳng (a) với khối chóp, biết (a) vuông góc với một đường thẳng d nao đó thuộc khối chóp

PHƯƠNG PHÁP GIẢI:

Bước 1: Tìm những đường thẳng thuộc khối chóp vuông góc với d.

Bước 2: Suy ra (α) song song với những đường thẳng vuông góc với d.

Bước 3: Tìm giao tuyến của (α) với các mặt của khối chóp. Sử dụng tính chất:

$$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (P) \\ (\alpha) \parallel \Delta \subset (P) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (P) = Mx \parallel \Delta$$

TÀI LIỆU ĐƯỢC TỔNG HỢP VÀ THAM KHẢO TỪ TÀI LIỆU CỦA THẦY LÊ VĂN ĐOÀN.
MÌNH CHỈ TỔNG HỢP, NÊN BẠN ĐỌC THAM KHẢO NHÉ