BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❄ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

NĂM THỨ 35 - RA HÀNG THÁNG
Số 4 (250)
1998

MAPLE VÀ SỐ NGUYÊN TỐ

- DÙNG CÁI "ẢO" ĐỂ ĐẾM CÁI "THẬT"
- Nghiệm duy nhất là... EM !

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Trụ sở tòa soạn :
25 Hàn Thuyên, Hà Nội ĐT : 8.262477
231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh ĐT: 8.356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
LÊ THỐNG NHẤT
Trình bày : NGUYỄN THỊ OANH

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ SỐ HỮU TỈ - SỐ VÔ TỈ

NGUYỄN NGỌC BÌNH PHƯƠNG
(TP. Hồ Chí Minh)

Chúng ta đã biết :

Định lí. *Nếu a là số nguyên dương không chính phương thì $\sqrt{a}$ là số vô tỉ.*

Tổng quát. Nếu a là số nguyên dương không là lũy thừa bậc n của bất kì số nguyên dương nào thì $\sqrt[n]{a}$ là số vô tỉ ($n \in \mathbf{Z}$; $n \geq 2$)

Sau đây là một số bài toán áp dụng.

Bài 1. Chứng minh rằng số $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ là số vô tỉ.

Giải. Giả sử a là số hữu tỉ, ta có
$$a^2 = 5 + 2\sqrt{6}$$
$\Rightarrow \sqrt{6} = \dfrac{a^2 - 5}{2}$ là số hữu tỉ (vô lí)

Vậy $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ là số vô tỉ (đpcm).

Bài 2. *Cho $\sqrt{n}$ là nghiệm của phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ với $a, b, c \in \mathbf{Q}$, n là số tự nhiên không chính phương. Tìm các nghiệm còn lại.*

Giải. Ta có $n\sqrt{n} + na + b\sqrt{n} + c = 0$

$\Leftrightarrow (n+b)\sqrt{n} + na + c = 0$

Nếu $n+b \neq 0$ thì $\sqrt{n} = \dfrac{-(na+c)}{n+b} \in \mathbf{Q}$ (vô lí)

Vậy $n+b = 0$ và $na + c = 0 \Rightarrow b = -n$ và $c = -na$.

Thế các giá trị của b và c vào phương trình, ta được

$x^3 + ax^2 - nx - na = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - n)(x + a) = -0$

Từ đó ta thấy ngoài nghiệm $x = \sqrt{n}$, phương trình còn có các nghiệm $x = -\sqrt{n}$, $x = -a$ với $a \in \mathbf{Q}$.

Bài 3. *Giả sử cho hai thùng đựng nước với dung tích lớn tùy ý và hai cái gáo có dung tích lần lượt là $\sqrt{2}$ lít và $2 - \sqrt{2}$ lít. Hỏi có thể dùng hai cái gáo đó để chuyển 1 lít nước từ thùng này sang thùng kia được hay không? Tại sao?* (Đề thi tuyển vào lớp 10 trường ĐHSP Hà Nội, 1995).

Giải. Giả sử có thể dùng gáo 1 (dung tích $\sqrt{2}$) và gáo 2 (dung tích $2 - \sqrt{2}$) để chuyển được 1 lít nước từ bình A sang bình B bằng cách đong m gáo 1 và n gáo 2 với $m, n \in \mathbf{Z}$ ($m > 0$ nếu đong từ A sang B và $m < 0$ nếu đong từ B sang A; tương tự đối với n). Khi đó $m\sqrt{2} + n(2-\sqrt{2}) = 1 \Leftrightarrow (m - n)\sqrt{2} + 2n - 1 = 0$

Nếu $m \neq n$ thì $\sqrt{2} = \dfrac{2n - 1}{n - m} \in \mathbf{Q}$ (vô lí)

Vậy $m = n = \dfrac{1}{2}$ (mâu thuẫn với $m, n \in \mathbf{Z}$).

Kết luận: không thể dùng hai cái gáo đó để chuyển 1 lít nước từ thùng này sang thùng kia.

Bài 4. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n phương trình sau đây không có nghiệm hữu tỉ: $(x + y\sqrt{3})^n = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$* (Vô địch toán Liên Xô, 1987)

Giải. Với $n = 1$, giả sử $\exists x, y \in \mathbf{Q}$ thỏa mãn

$x + y\sqrt{3} = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$

$\Rightarrow (x + y\sqrt{3})^2 = 1 + \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x^2 + 3y^2 - 1 = (1 - 2xy)\sqrt{3}$

Nếu $1 - 2xy \neq 0$ thì $\sqrt{3} = \dfrac{x^2 + 3y^2 - 1}{1 - 2xy} \in \mathbf{Q}$ (vô lí)

Vậy $1 - 2xy = 0$ và $x^2 + 3y^2 - 1 = 0$

Rút y từ $1 - 2xy = 0$ thế vào $x^2 + 3y^2 - 1$ ta được $4x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

Phương trình này vô nghiệm nên $\overline{\exists} x, y \in \mathbf{Q}$ thỏa $x + y\sqrt{3} = \sqrt{1+\sqrt{3}}$.

Nếu $x, y \in \mathbf{Q}$ thì $(x + y\sqrt{3})^n = x_1 + y_1\sqrt{3}$ với $x_1, y_1 \in \mathbf{Q}$

(Dễ dàng chứng minh được bằng cách khai triển nhị thức Newton)

Do đó nếu $\exists n \in \mathbf{N}$ và x, y $\in \mathbf{Q}$ sao cho $(x + y\sqrt{3})^n = \sqrt{1+\sqrt{3}}$ thì $\exists x_1, y_1 \in \mathbf{Q}$ sao cho $x_1 + y_1\sqrt{3} = \sqrt{1+\sqrt{3}}$ Đây là điều mà ta đã chứng minh là không thể xảy ra.

Bài 5. *Chứng minh rằng $\sqrt[3]{2}$ không thể biểu diễn được ở dạng $p + q\sqrt{r}$ trong đó p, q, $r \in \mathbf{Q}$, $r > 0$*

Giải. Giả sử $\exists p, q, r \in \mathbf{Q}, r > 0$ thỏa $p + q\sqrt{r} = \sqrt[3]{2}$

Ta có $p^3 + 3p^2q\sqrt{r} + 3pq^2r + q^3r\sqrt{r} = 2$

$\Leftrightarrow (3p^2q + q^3r)\sqrt{r} = 2 - p^3 - 3pq^2r$.

• Nếu $3p^2q + q^3r \neq 0$ thì

$$\sqrt{r} = \frac{2-p^3-3pq^2r}{3p^2q + q^3r} \in \mathbf{Q} \text{ (vô lí)}$$

• Nếu $3p^2q + q^3r = 0$

$$\Rightarrow q(3p^2 + q^2r) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = -0 \\ p = q = 0 \end{array}\right.$$

Rõ ràng không thể xảy ra $p = q = 0$. Nếu $q = 0$ thì $\sqrt[3]{2} = p \in \mathbf{Q}$ (vô lí)

Vậy $\overline{\exists}\, p, q, r \in \mathbf{Q}, r > 0$ thỏa $p + q\sqrt{2} = \sqrt[3]{2}$. (đpcm)

BÀI TẬP TỰ GIẢI.

1. Chứng minh rằng các số $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$; $b = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ đều là các số vô tỉ.

2. Biết phương trình $x^2 + ax + b = 0$ với $a, b \in \mathbf{Q}$ có một nghiệm là $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. Tìm các cặp số (a, b).

3. Giải phương trình $\sqrt{2\sqrt{3}-3} = \sqrt{x\sqrt{3}} - \sqrt{y\sqrt{3}}$ với nghiệm hữu tỉ (vô địch toán Anh, 1970).

4. Cho $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ và m, n là các số nguyên dương không chính phương. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để $a + b\sqrt{m} = c + d\sqrt{n}$ là $a = c$ và $b\sqrt{m} = d\sqrt{n}$

5. Cho a, b là hai số hữu tỉ khác không và n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng số $x = a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1}$ là số vô tỉ.

6. Cho $a, b, c \in \mathbf{Q}$ thỏa

$$a.\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c = 0.$$

Chứng minh rằng $a = b = c = 0$.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN VÀ LỜI GIẢI

Bài số 4

Problem. Let *A, B, C* be three points on the plane which does not lie on a line. How many lines are equidistant from *A, B, C*?

Solution. Let *L* be a line equidistant from *A, B, C*. If *A, B, C* were on the same side of *L*, they would lie on a line parallel to *L* contradicting the hypothesis. Therefore, we may assume that *A* and *B* lie on one side of *L* and *C* is on the other side of *L*. Then *L* is parallel to the line *AB* and passes through the midpoint of the perpendicular *CP* from *C* to the line *AB*. Conversely, every line satisfying these conditions is equidistant from *A, B, C*. Therefore, there are three lines equidistant from *A, B, C* separating each of the points from the other two points.

Từ mới:

point:	điểm
plane:	mặt phẳng
lie:	nằm (động từ)
line:	đường thẳng
equidistant:	có cùng khoảng cách (tính từ)
same:	cùng
parallel to:	song song với
contradict:	mâu thuẫn (động từ)
hypothesis:	giả thiết
other:	khác
pass:	đi qua
midpoint:	trung điểm
perpendicular:	đoạn thẳng vuông góc
conversely:	đảo lại
separate:	chia cắt, tách (động từ)

NGÔ VIỆT TRUNG

GIẢI BÀI KỲ TRƯỚC

Bài T1/246: *Cho một tam giác có số đo 3 cạnh là x, y, z nguyên thỏa mãn:*

$$2x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 4xy + 2xz - 20 = 0 \quad (*)$$

Chứng minh đó là tam giác đều.

Lời giải. (của bạn *Mai Nguyên Dũng*, $9A_1$, THCS Chu Văn An, thành phố Thái Nguyên).

Từ (*) dễ dàng có y ⋮ 2. Đặt $y = 2y_1$ với $y_1 \in N^*$ thay vào (*) ta có :

$$x^2 + 6y_1^2 + z^2 - 4xy_1 + xz - 10 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 + xz + z^2 \,\vdots\, 2.$$

Nếu trong 2 số x và y ít nhất có một số lẻ thì $x^2 + xz + y^2$ là số lẻ nên không thỏa mãn. Do đó x, z là số chẵn. Vì x, y, z là các cạnh của một tam giác nên $x \geq 2$; $y \geq 2$; $z \geq 2$.

Do đó : $2x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 4xy + 2xz$
$= 2(x-y)^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz$
$\geq 0 + 4 + 8 + 8 = 20.$

Vậy (*) thỏa mãn $\Leftrightarrow x = y = z = 2$.

Tam giác là tam giác đều

Nhận xét. 1) Ngoài cách giải trên, nhiều bạn đã viết (*) về dạng $(x-y+z)^2 + (x-y)^2 + (y+z)^2 = 20$.

Chỉ có bạn *Huỳnh Công Thành*, 9_1, trường Nguyễn Du, Q1, TP Hồ Chí Minh và Lê Minh Châu, 8A1, Nguyễn Trường Tộ, Hà Nội đã chứng minh 20 chỉ có 1 dạng phân tích thành tổng bình phương của 3 số nguyên là $20 = 0^2 + 2^2 + 4^2$, còn các bạn khác đều coi là "hiển nhiên". Từ đó, vì $x-y+z > 0$; $y+z > 0$ nên $x-y = 0$ và đi đến kết quả.

2) Một số bạn sử dụng tính chất của tam thức bậc hai có nghiệm để đánh giá ẩn cũng dẫn tới kết quả. Tuy nhiên, nhiều bạn lí luận quá dài dòng.

3) Có bạn sai lầm khi xét $z = 4$ dẫn đến $(x-2y)^2 + (x+4)^2 = y^2 + 4$ đã lí luận là chỉ có 2 trường hợp $(x-2y)^2 = y^2$; $(x+4)^2 = 4$ hoặc $(x-2y)^2 = 4$; $(x+4)^2 = y^2$ (?)

4) Các bạn có lời giải tốt là: **Hải Dương:** *Lê Trung Dũng*, 9B, THCS Chu Văn An; *Lê Minh Đức*, 8A, THCS Lê Quý Đôn; *Vũ Thành Long*, 8A, THCS Nguyễn Trãi; *Phạm Tiến Toàn*, $9A_1$, *Lê Thanh Nghị*, Gia Lộc; **Thanh Hóa:** *Lê Kim Phượng*, 9C, THCS Năng khiếu; **Quảng Ninh:** *Phạm Lâm Quý*, 9A, Trọng điểm Uông Bí; **Lạng Sơn:** *Hàn Thế Anh*, 9A, năng khiếu Lạng Giang; **Khánh Hòa:** *Trần Trung Duy*, 8^{14}, THCS Thái Nguyên, Nha Trang, *Phùng Thế Vũ*, 9_3, Phan Chu Trinh, Diên Khánh; **Hà Nội:** *Đào Hải Long*, $8A_1$, THCS Cầu Diễn, Từ Liêm; *Nguyễn Thành Trung*, 9M, Marie Curie, Thanh Xuân; *Nguyễn Hoài Anh*, 8A và *Lê Thị Bích Hạnh*, 9A, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy; **Nam Định:** *Trần Đức Thịnh*, $9A_6$, Trần Đăng Ninh; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Thị Hoài Vũ*, 9^3, Lê Lợi; **Nghệ An:** *Đặng Văn Cường*, 9A, Đô Lương; *Trần Hồng Phương*, 9a, Năng khiếu Nam Đàn; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Văn Phúc, Nguyễn Thị Hồng Phượng*, 8A, THCS Vĩnh Tường, *Đỗ Duy Cương*, 9B, Lập Thạch; **Bắc Ninh:** *Vũ Giáp Gianh*, 9A, trường Lê Văn Thịnh, Gia Lương; **Quy Nhơn:** *Trần Đăng Khoa*, 8A, Quốc học Quy Nhơn; **Quảng Nam:** *Huỳnh Minh Việt*, 9A, trường Nguyễn Hiền, Điện Bàn; **Quảng Bình:** *Ngô Việt Dũng*, 8B, THCS Hải Đình; **Trà Vinh:** *Đoàn Hữu Trung*, 6_6, Nguyễn Đang, Càng Long...

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T2/246: *Giải phương trình*

$$x + 3(2-3x^2)^2 = 2$$

Lời giải: *Cách 1.* của *Vương Tấn Lợi*, 8_4, THCS Tam Phước, Long Thành, Đồng Nai.

$$x + 3(2 - 3x^2)^2 = 2 \quad (1)$$

Đặt $y = 2 - 3x^2$ (1) trở thành

$$x + 3y^2 = 2 \quad (2)$$

Vậy (1) tương đương với hệ

$$\begin{cases} x = 2 - 3y^2 & (3) \\ y = 2 - 3x^2 & (4) \end{cases}$$

Trừ từng vế (3) cho (4) ta có

$x - y = -3(y^2 - x^2)$

$\Leftrightarrow (x - y)(1 - 3x - 3y) = 0$

- Với $x - y = 0$ hay $x = y$ thì từ (2) ta có:

$$3x^2 + x - 2 = 0 \quad (5)$$

Giải (5) ta được $x_1 = -1$ và $x_2 = \dfrac{2}{3}$

- Với $1 - 3x - 3y = 0$ hay $y = \dfrac{1-3x}{3}$ thì từ (2) ta có:

$$9x^2 - 3x - 5 = 0 \quad (6)$$

Giải (6) ta được $x_{3,4} = \dfrac{1 \pm \sqrt{21}}{6}$

Vậy phương trình có 4 nghiệm là

$$x_1 = -1, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = \frac{1+\sqrt{21}}{6}, x_4 = \frac{1-\sqrt{21}}{6}$$

Cách 2: của *Đào Duy Bình*, 7A, Dương Minh Châu, Tây Ninh.

$$x + 3(2 - 3x^2)^2 = 2$$

$\Leftrightarrow 27x^4 - 36x^2 + x + 10 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(27x^3 - 27x^2 - 9x + 10) = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(3x-2)(9x^2 - 3x - 5) = 0$

- Với $x + 1 = 0$ thì $x = -1$

- Với $3x - 2 = 0$ thì $x = \dfrac{2}{3}$

- Với $9x^2 - 3x - 5 = 0$ thì ta có

$$x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{6}$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm là:

$$x_1 = -1, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = \frac{1+\sqrt{21}}{6}, x_4 = \frac{1-\sqrt{21}}{6}$$

Nhận xét. 1. Có 9 bạn lớp 7, 125 bạn lớp 8, 204 bạn lớp 9 trong tổng số 390 lời giải có lời giải tốt.

2. Hai bạn: *Nguyễn Thị Thanh Thủy*, 6A4, THCS Phả Lại, Chí Linh, **Hải Dương**; *Lương Minh Khoa*, 6A, THCS Lý Tự Trọng, thị xã Bắc Giang, **Bắc Giang** có lời giải tốt theo cách 1.

TỐ NGUYÊN

Bài T3/246. *Cho số thực a thỏa mãn :*

$$a^5 - a^3 + a - 2 = 0 \ (1).$$

Chứng minh rằng:

$$\frac{a^{16}+a^{12}+7a^8+12a^4+12}{a^{12}+7a^8+7a^4+12} < \sqrt[3]{4}$$

Lời giải. Từ (1) suy ra $a \neq 0$ và $a^7 - a^5 + a^3 = 2a^2$ hay $a^7 - (a^5 - a^3 + a) + a = 2a^2$ và do đó $a^7 + a = 2(a^2+1)$. Chia hai vế cho a, được:

$a^6 + 1 = 2\left(a + \dfrac{1}{a}\right)$, suy ra $a > 0$ và $a \neq 1$, vậy là

$a^6 + 1 > 4$ hay $a^6 > 3$ (2).

Mặt khác, chia hai vế của (1) cho a^3 rồi chuyển vế được: $\dfrac{2}{a^3} + 1 = a^2 + \dfrac{1}{a^2} > 2$ (vì $a \neq 1$), suy ra

$a^3 < 2$ hay $a^6 < 4$ (3).

Từ (2) và (3), ta có $(a^6-3)(a^6-4) < 0$, tức là $a^{12} - 7a^6 + 12 < 0$. Hơn nữa, ta lại có $a^4 - a^2 + 1 = (a^2-0,5)^2 + 0,75 > 0$ nên $(a^{12}-7a^6+12)(a^4-a^2+1) < 0$, suy ra:

$a^{16} - 7a^{10} + 12a^4 - a^{14} + 7a^8 - 12a^2 - 7a^6 + 12 < 0$.

Chuyển vế rồi đặt a^2 làm nhân tử chung ở vế phải, được:

$a^{16} + a^{12} + 7a^8 + 12a^4 + 12 <$

$< a^2(a^{12} + 7a^8 + 7a^4 + 12)$.

Kết hợp với (3), suy ra:

$$\frac{a^{16}+a^{12}+7a^8+12a^4+12}{a^{12}+7a^8+7a^4+12} < a^2 < \sqrt[3]{4} \text{ (đpcm)}$$

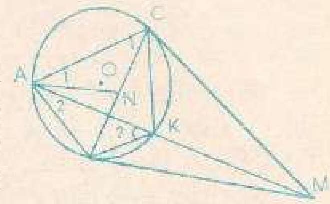
Nhận xét. Có 43 bài giải, tất cả đều giải đúng và tương tự như lời giải trên. Lời giải tốt gồm có: **Hà Bắc:** *Nguyễn Quý Hiên*, 9A2, THCS Trọng điểm Thuận Thành; **Thừa Thiên-Huế:** *Nguyễn Trung Hòa*, 9I, PTCS Nguyễn Tri Diểu; **Hải Dương:** *Vũ Thành Long*, 8A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách; **Hải Phòng:** *Nguyễn Quý Hà*, 9T, PTCS Chu Văn An; **Bắc Ninh:** *Lê Sơn Tùng*, 9A, Năng khiếu Gia Lương; **Bạc Liêu:** *Lương Thế Nhân*, 9A, PTTH chuyên Bạc Liêu.

DẶNG VIỄN

Bài T4/246. *Qua đỉnh B và C của tam giác ABC vẽ tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC, chúng cắt nhau tại M. Gọi N là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng* $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$

Lời giải.

• Nếu $\hat{A} < 90^\circ$



Gọi giao điểm của AM với đường tròn (O) ngoại tiếp ABC là K. Tứ giác $ABKC$ nội tiếp nên theo định lí Ptôlêmê ta có:

$AB.KC + BK.AC = AK.BC = 2NC.AK$ (1)

(Vì N là trung điểm BC).

Mặt khác $\Delta MCK \sim \Delta MAC$ và $\Delta MBK \sim \Delta MAB$

Suy ra $\dfrac{CK}{CA} = \dfrac{BK}{AB} = \dfrac{CM}{AM} = \dfrac{BM}{AM}$

(do $MB = MC$) $\Leftrightarrow AB.CK = AC.BK$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $AC.BK = NC.AK$ hay $\dfrac{AC}{AK} = \dfrac{NC}{BK}$ Mà $\hat{C}_1 = \hat{K}_2 \Rightarrow \Delta ACN \sim \Delta AKB$ (cgc)

Vậy $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ hay $\widehat{CAN} = \widehat{BAM}$

• Nếu $\hat{A} = 90^\circ$ thì điểm M không tồn tại

• Nếu $\hat{A} = 90^\circ$ thì $\widehat{BAM} \neq \widehat{CAN}$

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn: **Quảng Ninh:** *Đỗ Quang Khánh*, 7A2 Trọng điểm Uông Bí, *Lê Đức Thịnh*, 9A Trọng điểm Cẩm Phả; **Thái Nguyên:** *Mai Nguyên Dũng*, 9A1 Chu Văn An, *Tô Quang Công*, 9A1 Độc Lập; **Phú Thọ:** Bùi Thanh Hòa, 8B THCS Việt Trì, *Nguyễn Ngọc Thắng*, 9A1 Phong Châu; **Vĩnh Phúc:** *Vũ Hoàng Hiệp*, 8 NK Trần Phú, *Nguyễn Vũ Sơn*, 9B Yên Lạc, *Nguyễn Thị Hồng Phượng*, 8A, Vĩnh Tường; **Bắc Giang:** *Dương Mạnh Hồng*, 9A, THCS Thị trấn Hiệp Hòa; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Đăng Quý*, 9A, trọng điểm Thuận Thành; **Hải Dương:** *Phạm Tiến Toàn*, 9A1, Lê Thanh Nghị, Gia Lộc, *Hoàng Thị Nguyệt Ánh*, 9A, Nguyễn Trãi, *Lê Thị La*, 9A Nguyễn Trãi; **Hưng Yên:** *Nguyễn Văn Du*, 9A Phạm Huy Thông, Ân Thi; **Hải Phòng:** *Triệu Tuấn Đạt*, 8T, Chu Văn An; **Hà Nội:** *Đỗ* Trường Giang, A THCS Đông Anh, *Nguyễn Đức Giang*, 8A Lê Quý Đôn, Quận Cầu Giấy, *Nguyễn Hải Đăng*, 9D, Hà Nội Amsterdam, *Trần Minh Quân*, 9H Trưng Vương; **Nam Định:** *Nguyễn Khánh An*, 9A6, *Trần Đức Thịnh*, 9A6, Trần Đăng Ninh, *Phùng Văn Huân*, 9A1, Giao Thủy, *Cao Lê Duẩn*, CLC Giao Thủy, *Hoàng Tuấn*, 9A1 Lê Quý Đôn, Ý Yên, *Trần Đức Hiệu*, 9I, Hàn Thuyên, *Trần Hoài Sơn*, 9B THCS Hải Hậu; **Thanh Hóa:** *Vũ Văn Hưng*, 8T Bỉm Sơn, *Hà Xuân Giáp*, 8C THCS Lê Quý Đôn, *Bùi Ngọc Hân*, 8C NKTP, *Nguyễn Lê Minh*, 9B Hậu Lộc, *Lê Kim Phương*, 9C, NKTP, *Nguyễn Văn Trung*, 9B, Hậu Lộc; **Nghệ An:** *Vũ Ngọc Dũng*, 9B Đặng Thai Mai, *Nguyễn Như Phong*, 7A Hưng Đông, *Bùi Tăng Ngọc*, 9A, THCS Đô Lương; **Quảng Bình:** *Ngô Việt Dũng*, 8B THCS Hải Đình; **Thừa Thiên - Huế:** *Nguyễn Trung Hòa*, 9^1 Nguyễn Chí Diểu, TP Huế; **Quảng Ngãi:** *Phạm Tuấn Anh*, 9A chuyên Lê Khiết; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Thành Tân*, 93 PTTH Phan Chu Trinh, Diên Khánh; **Đắclắc:** *Tạ Quốc Hưng*, 9C chuyên Nguyễn Du, Buôn Mê Thuột; **Bạc Liêu:** *Lương Thế Nhân*, 9A, chuyên Bạc Liêu; **Cà Mau:** *Phạm Chí Thanh*, 9A THCS Đầm Dơi.

VŨ KIM THỦY

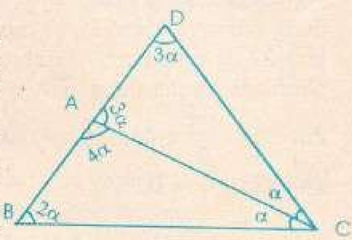
Bài T5/246. *Cho tam giác ABC. Biết rằng* $\hat{A} = 2\hat{B} = 4\hat{C}$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{AC}$$

Lời giải *1.* (của bạn *Hà Quang Đạt*, 8_5 - Trần Hưng Đạo - Quảng Ngãi)

Đặt $\hat{C} = \alpha$, Dễ thấy: $7\alpha = 180^0$.

Gọi D là giao điểm của AB với đường trung trực của BC (h.1). Ta thấy: ΔBCD cân tại D, ΔCDA cân tại $C \Rightarrow DB = DC = AC \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{DB}$ (1).



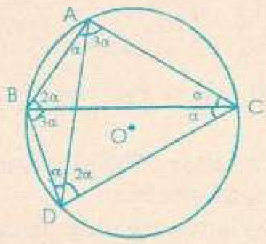
h.1

Lại có CA là đường phân giác của ΔBCD nên: $\frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC} \Rightarrow \frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DB}$ (2) (vì $DB = DC$).

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta có:

$\frac{AB}{AC} + \frac{AB}{BC} = 1 \Rightarrow \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC} = \frac{1}{AB}$ (dpcm).

2. (của bạn *Hán Thị Bình*, 8A1, THCS Phong Châu - Phú Thọ) Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Trên cung BC (không chứa A) lấy D sao cho: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{DB}$ (h.2). Đặt $\hat{C} = \alpha$.



h.2

Ta có:

ΔACD cân tại A (vì $ADC = ACD = 2\alpha) \Rightarrow AD = AC$ (1)

ΔCBD cân tại C (vì $BDC = DBC = 3\alpha) \Rightarrow BC = DC$ (2)

Áp dụng định lí Ptôlêmê cho tứ giác $ABCD$. Ta có:

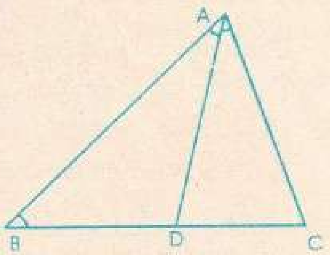
$BC.AD = AB.CD + AC.BD$ (3)

Từ (1); (2); (3) suy ra:

$BC.AC = AB.BC + AC.AB$

$\Rightarrow \frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC}$ (dpcm)

3. (của bạn *Nguyễn Hoài Anh*, 8A, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy, Hà Nội).



h.3

Trước hết ta chứng minh một bổ đề.

Bổ đề: Cho ΔABC. Khi đó: $\hat{A} = 2\hat{B} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + bc$

Chứng minh: Kẻ phân giác AD (h.3). Theo tính chất của đường phân giác ta có:

$$\frac{DC}{DB} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{DC}{DB + DC} = \frac{b}{b+c} \Rightarrow \frac{DC}{BC} = \frac{b}{b+c}$$

$$\Rightarrow DC = \frac{ab}{b+c}$$

Vậy: $\hat{A} = 2\hat{B} \Leftrightarrow \Delta BCA \sim \Delta ACD$

$$\Leftrightarrow \frac{BC}{CA} = \frac{AC}{CD} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{\frac{ab}{b+c}} \Leftrightarrow a^2 = b(b+c)$$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + bc$

Bây giờ ta chứng minh bài toán:

Vì $\hat{A} = 2\hat{B} = 4\hat{C}$ nên theo bổ đề

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + bc & (1) \\ b^2 = c^2 + ca & (2) \end{cases}$$

Thế (2) và (1) ta có: $a^2 = c^2 + ca + bc \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{c+a+b}{a^2} = \frac{1}{a} + \frac{c+b}{a}.$$

Từ (1) $\Rightarrow a^2 = b(b+c) \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{b+c}{a^2}$

Vậy: $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (đpcm).

Nhận xét. 1) Bài này có khoảng 200 bạn tham gia giải, trên đây là ba hướng giải cơ bản.

2) Có một số bạn giải bằng phương pháp lượng giác. Lời giải như vậy không được chấp nhận. Vì đề toán này dành cho học sinh THCS.

3) Có một bạn (xin giấu tên) đã cho một lời giải quá "ngây thơ":

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{AC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin 25^o 43'} = \frac{1}{\sin 105^o 51'} + \frac{1}{\sin 51^o 26'}$$

$\Leftrightarrow 2{,}3 = 1{,}025 + 1{,}275...$

4) Có một vài bạn đặt vấn đề: Phải chăng ta có mệnh đề hai chiều sau:

$$\hat{A} = 2\hat{B} = 4\hat{C} \Leftrightarrow \frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC}.$$

Chiều ngược lại không đúng, chẳng hạn ΔABC có $AC = BC = 2$ và $AB = 1$.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T6/246. *Cho hai biểu thức*

$$M = \frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_3+x_4} + \frac{x_3}{x_4+x_5} + ... + \frac{x_{n-1}}{x_n+x_1} + \frac{x_n}{x_1+x_2}$$

$$N = \frac{x_1}{x_n+x_2} + \frac{x_2}{x_1+x_3} + \frac{x_3}{x_2+x_4} + ... + \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}+x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1}+x_1}$$

trong đó $x_1, x_2, ..., x_n$ là những số thực dương. Chứng minh rằng trong hai biểu thức trên có ít nhất một biểu thức không nhỏ hơn $\frac{n}{2}$.

Lời giải. (của bạn *Nguyễn Huy Khương*, 11 Toán, PTTH Nguyễn Trãi, Hải Dương).

Ta có

$$M + \frac{n}{2} = \left(\frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{1}{2}\right) + ... + \left(\frac{x_n}{x_1+x_2} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{(x_1+x_2)+(x_1+x_3)}{2(x_2+x_3)} + \frac{(x_2+x_3)+(x_2+x_4)}{2(x_3+x_4)} + ... +$$

$$... + \frac{(x_n+x_1)+(x_n+x_2)}{2(x_1+x_2)} \geq$$

$$\geq \sqrt{\frac{(x_1+x_2)(x_1+x_3)}{(x_2+x_3)^2}} + \sqrt{\frac{(x_2+x_3)(x_2+x_4)}{(x_3+x_4)^2}} + ... +$$

$$... + \sqrt{\frac{(x_n+x_1)(x_n+x_2)}{(x_1+x_2)^2}} \geq$$

$$\geq n \sqrt[2n]{\frac{(x_1+x_3)(x_2+x_4)...(x_n+x_2)}{(x_1+x_2)(x_2+x_3)...(x_n+x_1)}} = nA \quad (1)$$

Tương tự

$$N + \frac{n}{2} \geq n \sqrt[n]{\frac{(x_1+x_2)(x_2+x_3)...(x_n+x_1)}{(x_1+x_3)(x_2+x_4)...(x_n+x_2)}} = \frac{n}{A^2} \quad (2)$$

Nếu $A \geq 1$ thì từ (1) suy ra $M \geq \frac{n}{2}$

Nếu $A \leq 1$ thì từ (2) suy ra $N \geq \frac{n}{2}$

Nhận xét. 1) Bài này được nhiều bạn gửi lời giải đến đã có nhiều cách giải. Các bạn có lời giải tốt: *Mai Nguyên Dũng*, 9A1 Chu Văn An, TP **Thái Nguyên**; *Trương Yến Nhi*, 9A PTTH **Bạc Liêu**; *Lương Anh Hùng*, 11A, **Vũng Tàu**; *Đoàn Thái Sơn*, PTNK Trần Phú, **Hải Phòng**; *Nguyễn Hà Minh*, 10 Toán, ĐHQG **Tp Hồ Chí Minh**; *Trần Nguyên Thọ*, 10T, **Hà Tĩnh**; *Lê Văn Cường*, 11T, Lương Văn Tụy, **Ninh Bình**; *Đào Thị Mỹ Châu*, 10T, Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**; *Vũ Duy Tuấn*, 12A, PTTH Ngô Sĩ Liên, **Bắc Giang**; *Cao Thế Thụ*, 11A chuyên **Vĩnh Phúc**; *Huỳnh Công Phước*, 10CT Quốc học **Huế**; *Lê Minh Đức*, 12A1, chuyên **Yên Bái**, *Lương Ngọc Anh*, 10T Lương Văn Tụy, **Ninh Bình**; *Hà Khánh Toàn*, 12CT, Hoàng VănThụ, **Hòa Bình**;

2) Đầu thế kỉ 20 do gợi ý của bất đẳng thức : $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} > \frac{3}{2}$ đúng với ba số dương a, b, c tùy ý nhà toán học Nesbit đã đưa ra giả thiết: Phải chăng ta có $M \geq \frac{n}{2}$? Giả thuyết đó đã thu hút được sự quan tâm của nhiều người làm Toán sơ cấp. Người ta chứng minh được bất đẳng thức Nesbit đúng với mọi n lẻ ≤ 11 và mọi n chẵn ≥ 14 và với n lẻ ≥ 27 đã có phản ví dụ chứng tỏ là bất đẳng thức Nesbit là không đúng. Tuy nhiên ta đã chứng minh được $M > \frac{cn}{2}$ ở đó c là một hằng số bé hơn 1 nhưng khá gần 1 ($c \approx 0{,}989$).

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/246. *Chứng minh rằng phương trình:*

$$x^3 + y^3 = (x+y)^2 + (xy)^2$$

không có nghiệm nguyên dương.

Lời giải. Với $a, b \in \mathbf{N}^*$ ta kí hiệu (a, b) là USCLN của a và b. Giả sử phương đã cho có nghiệm nguyên dương (x, y). Khi đó ta có:

$$x^3 + y^3 = (x+y)^2 + (xy)^2 \quad (1)$$

Đặt $(x, y) = d$, ta có $x = dx_1$, $y = dy_1$ với $x_1, y_1 \in \mathbf{N}^*$ và $(x_1, y_1) = 1$. Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow d(x_1^3 + y_1^3) = (x_1+y_1)^2 + (x_1y_1)^2 \; (2).$$

Với lưu ý, rằng $(x_1^3+y_1^3) \vdots (x_1+y_1)$, từ (2) ta được:

$$(x_1y_1^2) \vdots (x_1+y_1) \qquad (3)$$

Từ $(x_1, y_1) = 1$ suy ra $(x_1y_1, x_1 + y_1) = 1$. Kết hợp với (3) ta được $x_1y_1 \vdots (x_1+y_1)$ và do đó $x_1+y_1 = 1$, mâu thuẫn với $x_1, y_1 \in \mathbf{N}^*$.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên dương.

Nhận xét. Trong tổng số 180 lời giải, mà TS. nhận được, có tới 66 lời giải sai.

2) Dưới đây là các thiếu sót về kiến thức cơ bản mà các bạn đã mắc phải:

- *Từ $a^2 \vdots b$ suy ra $a \vdots b$* (Từ $36 \vdots 4$ suy ra $6 \vdots 4$?!)
- *Từ $ab \vdots c$ và $(a, b) = 1$ suy ra $a \vdots c$ hoặc $b \vdots c$.* (Các bạn nghĩ sao nếu $a = 14$, $b = 15$ và $c = 6$?)
- *Từ $ab = cd$ suy ra $a \vdots c$ hoặc $b \vdots d$* (Bạn hãy lấy $a = 6$, $b = 35$, $c = 14$ và $d = 15$!).
- *Từ $a^2 + b^2 = c^2d^2$ suy ra $a = c$ và $b = d$ (Chắc bạn đồng ý rằng $2^2 + 9^2 = 6^2 + 7^2$?)*
- *Từ a^2b là số chính phương* và $b \in Q\ \mathbf{Z}$ suy ra b là số chính phương (?!).
- *Nếu đa thức $P(x)$ có nghiệm nguyên dương thì đa thức $P'(x)$ cũng có nghiệm nguyên dương* (?!)
- *Từ $a \vdots b$ suy ra $(a, b) > 1$.* (Bạn nghĩ sao, nếu $b = 1$?
- *Từ $ab \vdots c$ và $c \vdots a$ suy ra $ab = c$* (Lẽ nào, từ $3 \times 6 \vdots 9$ và $9 \vdots 3$ ta có $3 \times 6 = 9$?!)
- *Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, có nghiệm nguyên thì $-\dfrac{b}{a} \in \mathbf{Z}$.* (Bạn cần phân biệt "phương trình có nghiệm nguyên" với "phương trình" có tất cả các nghiệm là các số nguyên" !)
- *Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, có $\Delta(\Delta')$ là số chính phương thì phương trình đó có nghiệm nguyên ?!*, v.v...

3) Các bạn có lời giải tốt hơn cả: **Đắc lắc:** *Nguyễn Văn Lý* (11A PT cấp 2-3 Ngô Gia Tự - huyện Eakal); *Nguyễn Tuấn Anh, Lê Anh Dũng* ($11T_1$, 12CT PTTH Nguyễn Du). **Vĩnh Long:** *Ninh Hồng Phúc* (12T PTTH Nguyễn Bỉnh Khiêm). **Đồng Nai:** *Hà Minh Ngọc*, (11CT PTTH Lương Thế Vinh - Biên Hòa). **Quảng Ngãi:** *Phạm Tuấn Anh* (9A Trường chuyên Lê Khiết). **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Văn Giáp, Nguyễn Ngọc Du, Nguyễn Văn Cát*, (11 Lam Sơn). **Ninh Bình:** *Trần Đức Thịnh* (9a6 THCS Trần Đăng Ninh, *Nguyễn Trọng Kiên, Vũ Việt Tài* (10 PTTH Lê Hồng Phong). **Thái Bình:** *Đặng Ngọc Tuấn* (10 PTTH chuyên). **Hải Phòng:** *Trần Văn Hà, Đặng Anh Tuấn* (10, 11 PTNK Trần Phú). **Hải Dương:** *Nguyễn Quỳnh Hoa* (9T PT Nguyễn Trãi). **Bắc Giang**: *Đào Thị Chi* (7B THCS Song Khê, Yên Dũng); *Phùng Đức Dũng, Đặng Hoàng Việt Hà, Nguyễn Tiến Mạnh, Vũ Duy Tuấn* (11A, 12A PTNK Ngô Sĩ Liên). **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hoàng Anh, Nguyễn Duy Tân, Cao Thế Thụ* (11A PTTH chuyên). **ĐHSP Vinh:** *Phan Công Đức* (10 khối PTCT-Tin). **ĐHQGHN:** *Nguyễn Thị Minh Thoa* (10A khối PT chuyên Hóa - ĐHKHTN); *Trần Tất Đạt, Lê Minh Hải, Nguyễn Trung Lập, Lưu Minh Ngọc* (10 Khối PTCT - Tin ĐHKHTN).

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T8/246 *Tìm tất cả các hàm số f: $(0, +\infty) \to (0, +\infty)$ thỏa mãn $f(x^{1964}) = f^{1996}(x)$ $\forall x$ (1)*

Lời giải. (của đa số các bạn)

Đặt $f(e^x) = g(x)$; $g: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$. Khi đó

$$f(x^{1964}) = g(1964 \ln x)$$
$$f^{1996}(x) = g^{1996}(\ln x).$$

Vậy (1) có dạng: $g(1964 \ln x) = g^{1996}(\ln x)$ $\forall x > 1$ hay $g(1964t) = g^{1996}(t)$ $\forall t > 0$ (2)

Đặt $\ln g(t) = h(t)$; h: $(0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$. Khi đó

$$g(1964t) = e^{h(1964t)}$$
$$g^{1996}(t) = e^{1996h(t)}$$

Vậy (2) có dạng:

$$h(1964t) = 1996h(t)\ \forall t > 0 \qquad (3)$$

Đặt $h(t) = q(t).t^{\log_{1964}1996}$. Khi đó (3) có dạng

$$q(1964t) = q(t)\ \forall t > 0$$

Vậy ta có:

$$f(x) = e^{(\ln x)^{\log_{164}1996}.q(x)}$$

trong đó: q: $(0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ là một hàm tuần hoàn nhân tính tùy ý chu kì 1964.

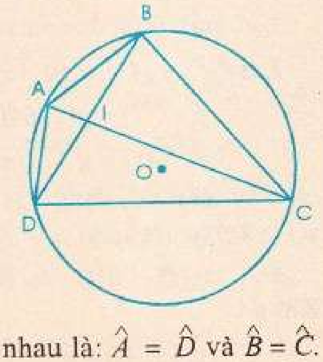
Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Hà Nội:** *Cung Thái Sơn* (ĐHKHTN), *Nguyễn Thanh Tùng* (ĐHKHTN), *Nguyễn Đức Mạnh*, Cổ Loa; **Đồng Nai:** *Nguyễn Trần Ngọc Dung*, Long Khánh; **Hải Phòng:** *Đoàn Thái Sơn*, Trần Phú, *Trường Duy Lợi*, Trần Phú; **Đắclắc:** *Nguyễn Tuấn Anh*, Nguyễn Du, *Lê Anh Dũng*, Nguyễn Du; **Nghệ An:** *Nguyễn Thái Thọ*, Phan Bội Châu, *Trần Nam Dũng*, Phan Bội Châu, *Lê Hồng Hà*, ĐH Vinh; **Hà Tây:** *Nguyễn Mạnh Hà*, Nguyễn Huệ; **Ninh Bình:** *Nguyễn Thanh Sơn*, Lương Văn Tụy; **Hải Dương:** *Hoàng Xuân Quý*, Nguyễn Trãi, *Vũ Văn*

Tâm, Nguyễn Trãi, *Phạm Văn Hải*, Nguyễn Trãi, *Trần Đức nghĩa*, Nguyễn Trãi, *Nguyễn Văn Luật*, Nguyễn Trãi, *Phùng Thế Tuấn*, Nguyễn Trãi; **Thanh Hóa:** *Lê Duy Diễn*, Lam Sơn, *Nguyễn Khuyến Lân*, Lam Sơn; **Tp Hồ Chí Minh:** *Lê Quang Nẩm*: (ĐHQG); **Bắc Giang:** *Vũ Duy Tuấn*, Ngô Sĩ Liên, *Phạm Việt Ngọc*, Ngô Sĩ Liên, *Đặng Hoàng Việt Hà*, Ngô Sĩ Liên, *Nguyễn Tiến Mạnh*, Ngô Sĩ Liên; **Nam Định:** *Nguyễn Trọng Liên*, Lê Hồng Phong.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/246. *Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong một đường tròn. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I. Chứng minh rằng:*

$$\frac{AB}{CD}+\frac{CD}{AB}+\frac{BC}{AD}+\frac{AD}{BC}\le\frac{IA}{IC}+\frac{IC}{IA}+\frac{IB}{ID}+\frac{ID}{IB}$$



Lời giải. (Dựa theo *Vũ Duy Tuấn*, 12A PTTHNK Ngô Sĩ Liên, Bắc Giang). Trong các tam giác *ABI, DCI* ta có các cặp góc nội tiếp cùng chắn một cung nên bằng nhau là: $\hat{A}=\hat{D}$ và $\hat{B}=\hat{C}$. Do đó $\Delta ABI \sim \Delta DIC$, suy ra $\frac{AB}{CD}=\frac{AI}{DI}=\frac{IB}{IC}$, tức là $\frac{AB}{CD}=$

$$=\sqrt{\frac{AI}{DI}\cdot\frac{IB}{IC}}=\sqrt{\frac{IA}{IC}\cdot\frac{IB}{ID}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{IA}{IC}+\frac{IB}{ID}\right)\ (1).$$

Một cách tương tự, ta cũng có:

$$\frac{CD}{AB}\le\frac{1}{2}\left(\frac{IC}{IA}+\frac{ID}{IB}\right)\qquad(2)$$

$$\frac{BC}{AD}\le\frac{1}{2}\left(\frac{IB}{ID}+\frac{IC}{IA}\right)\qquad(3)$$

$$\frac{AD}{BC}\le\frac{1}{2}\left(\frac{IA}{IC}+\frac{ID}{IB}\right)\qquad(4)$$

Cộng (1), (2), (3), (4) vế với vế, suy ra đpcm, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $IA = IB = IC = ID$ hay là *ABCD* là hình chữ nhật.

Nhận xét. Có 287 bài giải trong đó chỉ có một bài giải sai. Ngoài cách giải trên, phần lớn các bạn đều dựa vào các tam giác đồng dạng như trên nhưng tiến hành các biến đổi đại số dài dòng hơn. Ngoài ra, một số bạn còn dùng các công thức tính diện tích khác nhau, tính chất sin của hai góc bù nhau là bằng nhau để có: $BI : ID = S(BAC) : S(DAC) = BA.BC:DA.DC$ rồi áp dụng định lí Cauchy để chứng minh tiếp. Lời giải tốt gồm có:

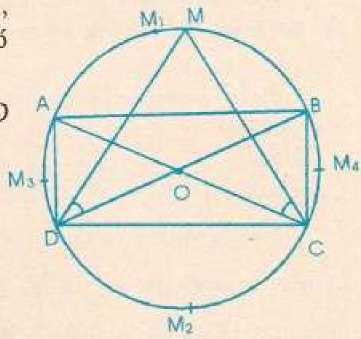
Bắc Giang: *Vũ Duy Tuấn*, 12B PTTHNK Ngô Sĩ Liên); **Đà Nẵng:** *Nguyễn Tấn Phong*, 12A_1 PTTH Hoàng Hoa Thám, *Lê Đại Dương*, 10A_1 PTTH Lê Quý Đôn; **Hà Nội:** *Đinh Hữu Toàn*, 10A Toán ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội); **Nghệ An:** Chu Việt Tuấn, 10A_1 PTTH Phan Bội Châu; **Thanh Hóa:** *Lê Duy Diễn*, 12T PTTH Lam Sơn tp Thanh Hóa; **Vũng Tầu:** *Lương Anh Hùng*, 11A_1 chuyên ban Vũng Tầu; **Bắc Ninh:** *Lê Sơn Tùng* (9A NK Gia Lương)

ĐẶNG VIỄN

Bài T10/246. *Cho hình chữ nhật ABCD nội tiếp đường tròn tâm O, có độ dài các cạnh là $AB = a$; $BC = b$. Điểm M chuyển động trên đường tròn. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $S = MA + MB + MC + MD$*

Lời giải.

(của bạn *Trương Quang Trị*, 12A_1, THCB Sơn Tịnh I, Quảng Ngãi, có sửa đổi).



Đặt $AC = BD = 2R$. Giả sử $M \in \overset{\frown}{AB}$ (h.1).

Đặt $\varphi = \text{sđ}\overset{\frown}{AB}$;

$\alpha = \text{sđ}\overset{\frown}{AM}$;

$\beta = \text{sđ}\overset{\frown}{BM}$.

Ta có: $\alpha+\beta=\varphi$.

Ta có: $MA + MB + MC + MC$

$$\begin{aligned}&= (MA+MC) + (MB+MD)\\ &= 2R(\sin\alpha+\cos\alpha) + 2R(\sin\beta+\cos\beta)\\ &= 2\sqrt{2}R\left(\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= 4\sqrt{2}R\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos(\alpha-\beta)\\ &= 4\sqrt{2}R\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

Vậy:

$(MA+MB+MC+MD)\min \Leftrightarrow \cos(\alpha-\beta)\min$

$$\Leftrightarrow |\alpha-\beta|\max \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}M\equiv A\\ M\equiv B\end{array}\right.$$

$(MA+MB+MC+MD)\max \Leftrightarrow \cos(\alpha-\beta)\max$

$\Leftrightarrow |\alpha-\beta|\min \Leftrightarrow \alpha = \beta \Leftrightarrow M$ trùng trung điểm M_1 của cung $\widehat{AB}$. Xét tiếp các trường hợp: $M \in \widehat{DC}$; $M \in \widehat{AD}$; $M \in \widehat{AB}$.

Ta rút ra kết luận: $(MA+MB+MC+MD)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \in \{A, B, C, D\}$ và giá trị nhỏ nhất đó bằng: $a + b + \sqrt{a^2+b^2}$

Gọi M_2, M_3, M_4 là trung điểm của các cung $\widehat{CD}, \widehat{AD}, \widehat{BC}$. Ta thấy:

$$M_1A + M_1B + M_1C + M_1D =$$
$$= M_2A + M_2B + M_2C + M_2D$$
$$= 4\sqrt{2}R\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 4R\sqrt{2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$$
$$= 4R\sqrt{1 + \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)} = 4R\sqrt{1 + \sin\varphi}$$
$$= 4R\sqrt{1 + \frac{a}{2R}}$$
$$= 2\sqrt{4R^2 + a.2R}$$
$$= 2\sqrt{a^2 + b^2 + a\sqrt{a^2+b^2}}$$

Tương tự như vậy ta có:

$$M_3A + M_3B + M_3C + M_3D =$$
$$= M_4A + M_4B + MB + M_4C$$
$$= 2\sqrt{a^2+b^2 + b\sqrt{a^2 + b^2}}$$

• Nếu $a > b$ thì

$$2\sqrt{a^2+b^2 + a\sqrt{a^2 + b^2}} > 2\sqrt{a^2+b^2 + b\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Vậy:

Và giá trị lớn nhất đó bằng

$$2\sqrt{a^2+b^2 + a\sqrt{a^2 + b^2}}$$

• Nếu $b > a$ thì

$$2\sqrt{a^2+b^2 + b\sqrt{a^2 + b^2}} > 2\sqrt{a^2+b^2 + a\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Vậy: $(ME+MB+MC+MD)$ lớn nhất

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M = M_3 \\ M = M_4 \end{array}\right.$ và giá trị lớn nhất đó bằng $2\sqrt{a^2+b^2 + b\sqrt{a^2 + b^2}}$

• Nếu $a = b$ thì

$$2\sqrt{a^2+b^2 + a\sqrt{a^2 + b^2}} = 2\sqrt{a^2+b^2 + b\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Vậy : $(MA + MB + MC + MD)$ lớn nhất

$\Leftrightarrow$ và giá trị lớn nhất đó bằng

$$2\sqrt{a^2+b^2 + a\sqrt{a^2 + b^2}} = 2\sqrt{a^2+b^2 + b\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Nhận xét. 1) Để toán này chưa rõ ràng, cần phải hỏi như sau: Tính giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của tổng $(MA + MB + MC + MD)$ theo a, b. Chỉ có một số ít bạn nhận thấy yêu cầu này.

2) Đây không phải bài toán khó, nhưng khó thể hiện, nói chung các bạn chưa có kĩ thuật thể hiện bài giải.

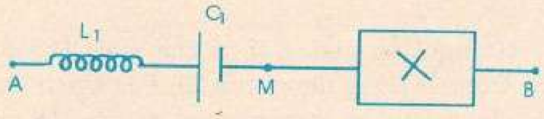
3) Có không ít bạn giải sai trường hợp lớn nhất: $(MA + MB + MC + MD)$ lớn nhất $\Leftrightarrow M \in \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$. Một sự ngộ nhận đáng tiếc! Có ba bạn kết luận không có giá trị lớn nhất cũng như nhỏ nhất.

4) Có 180 bạn tham gia giải bài này. Các bạn sau có lời giải tốt: *Đào Thị Mỹ Châu*, 10 toán, chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**; *Lê Đình Bình*, 12 toán - chuyên Nguyễn Du, Buôn Mê Thuột, **Đắclắc**; *Vũ Tuấn Anh*, năng khiếu **Thái Nguyên**; *Trần Bá Đôn*, 11 Toán, ĐHKH **Huế**; *Nguyễn Thái Thọ*, 12 toán, Phan Bội Châu, Vinh, **Nghệ An**...

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/246 *Cho đoạn mạch vẽ sơ đồ như hình vẽ cho biết* $L_1 = \frac{2}{\pi}$ *(H),* $C_1 = \frac{10^{-4}}{\pi}$ *(F). Hiệu điện thế xoay chiều giữa hai đầuA và B là* $u = 120\sqrt{2}\sin 100\pi t$ *(V).*

Còn cường độ dòng điện chạy trong mạch $i = 1,2\sqrt{2}\sin 100\pi t$ *(A). X là đoạn mạch gồm hai trong ba phần tử R, L hoặc C mắc nối tiếp hoặc song song. Hãy xác định cấu tạo của đoạn mạch X.*



Hướng dẫn giải. Dùng phương pháp giản đồ véto. Trước hết nhận xét rằng, theo đề bài thì u và i cùng pha.

+ Xét trường hợp X gồm 2 phần tử mắc nối tiếp: Công suất của mạch $P = UI\cos\varphi = UI = I^2R \to R = \frac{U}{I} = 100\pi$. Vậy đoạn mạch có R. Từ điều kiện tg$\varphi = 0$, suy ra trường hợp R nt L bị loại (vì $Z_1 = Z_{C_1} - Z_{L_1} < 0$!) và chỉ còn R nt C. Khi đó $Z_C = Z_{L_1} - Z_{C_1} = 100\Omega$, suy ra

$$C = C_1 = \frac{10^{-4}}{\pi}F.$$

+ Xét trường hợp X gồm 2 phần tử mắc song song. Vì $P = UI \neq 0$ nên trong mạch phải có R. Như vậy có thể $R//L$ hoặc $R//C$. Với

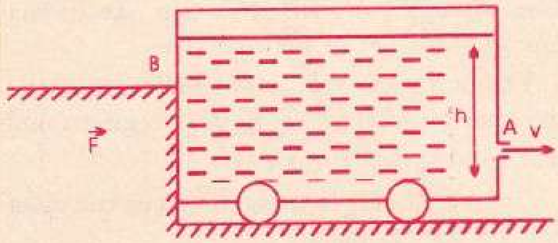
$R//L$ thì u không thể cùng pha với i. Vì vậy chỉ có thể xét $R//C$. Vẽ giản đồ véctơ suy ra $Z_C = R = 200\Omega$ và $C = \frac{10^{-4}}{2\pi}F$.

Nhận xét. Các em có lời giải đầy đủ (có phân tích, lập luận rõ ràng): *Nguyễn Thảo Huyền*, 12A, PTTH Tiên Lữ, **Hưng Yên**; *Nguyễn Trung Hậu*, $12A_1$, THCB Ứng Hòa A, **Hà Tây**; *Nguyễn Quang Tùng*, 12A PTNK Hóa; ĐHKHTN (ĐHQGHN), *Trịnh Thị Quyên*, $12A_1$, PTTH Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Bảo, **Hải Phòng**; *Võ Như Phương*, 12TT, trường Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**; *Nguyễn Trung Thành*, $12A_1$, PTTH Hà Huy Tập, Vinh, **Nghệ An**; *Bùi Văn Thành*, $12A_3$, PTTH chuyên **Yên Bái**; *Nguyễn Trọng Trần Hòa*, 12 Lí, PTTH năng khiếu, **Quảng Bình**; *Trần Tú Anh*, 12 Lí, PTTH Hàn Thuyên, **Bắc Ninh**; *Đoàn Hữu Thu*, 12 Lí, trường Lương Văn Chánh, **Phú Yên**; *Lê Đức Thuận*, 11B10, PTTH Bỉm Sơn, **Thanh Hóa**; *Đặng Hồng Nhung*, 11H, PTTH Bắc Kiến Xương, Thái Bình.

MAI ANH

Bài L2/246. *Một xe chở nước, chứa đầy nước, có thể lăn không ma sát trên một mặt phẳng nằm ngang như hình vẽ. Nước có khối lượng riêng là D. Nếu một tia nước nằm ngang, có tiết diện là a chảy qua lỗ A với vận tốc* $v = \sqrt{2gh}$ *thì ngoại lực F tác dụng vào thành B của xe phải bằng bao nhiêu.*

Hướng dẫn giải. Coi xe chở nước là một hệ. Gọi $\vec{p}$ là động lượng của hệ, $\vec{F}$ là ngoại lực tác dụng vào hệ theo phương ngang. Ta có $\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ chiếu lên trục Ox nằm ngang: $F = \frac{\Delta p_x}{\Delta t}$ (1) trong đó Δp_x là độ biến thiên động lượng của hệ gây ra bởi lượng nước chảy ra khỏi lỗ A trong thời gian Δt:



$\Delta p_x = mU_x = DVv$ (2). Thay $V = av\Delta t$ vào (2) ta được $\Delta p_x = aDv^2\Delta t$. Từ (1) suy ra $F = aDv^2 = aD.2gh = 2aDgh$.

Chú ý. Có thể giải bài toán bằng cách áp dụng định luật Bécnuli.

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và lập luận chặt chẽ: *Hoàng Văn Hậu*, 11B2, PTTH chuyên **Tuyên Quang**; *Chu Mạnh Hoàng*, 12A, PTTH Nghĩa Đàn, **Nghệ An**;, *Vũ Thành Mạnh*, 10 Lí, TH chuyên **Thái Bình**; *Trần Anh Tuấn*, $12A_2$, PTTH Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**; *Vũ Đình Ngọc*, 11/2, PTTH năng khiếu, **Quảng Bình**; *Lê Thanh Bình*, 11 Lí, PTTH Lương Văn Tụy, **Ninh Bình**; *Võ Như Phương*, 12TT, trường Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**; *Nguyễn Ngọc Tuấn*, 11F chuyên Lí, PTTH chuyên Hùng Vương, Việt Trì, **Phú Thọ**; *Phạm Doanh Tuyên*, 11A, PTTH chuyên **Vĩnh Phúc**; *Phạm Quốc Anh*, $10A_3$, PTTH Phan Bội Châu, **Nghệ An**; *Hoàng Tuấn Vinh*, 11F, PTTH Lam Sơn, **Thanh Hóa**; *Nguyễn Tuấn Hiệp*, 11A1, PTTH **Hưng Yên**; *Nguyễn Quang Tùng*, 12 Hóa, ĐHKHTN **Hà Nội**; *Nguyễn Trung Dũng*, 10 Lí, PTTH Lê Hồng Phong, **Nam Định**; *Trần Mai Sơn Hà*, 12 CL, PTTH năng khiếu, **Quảng Bình**; *Đặng Trần Trí*, 10CL, PTTH Lê Hồng Phong TP Hồ Chí Minh; *Nguyễn Thái Hà*, $12A_1$, PTTH chuyên **Yên Bái**; *Nguyễn Huỳnh Chiến*, 12A, Quốc học **Huế**; *Đinh Văn Trung*, 10 Lí I, chuyên Nguyễn Du, **Đắclắc**; *Nguyễn Anh Tuấn*, $11A_1$, PTTH Lê Quý Đôn, **Long An**.

MAI ANH

THÔNG BÁO

• Các bạn tham gia cuộc thi giải Toán - Lý lưu ý : Không viết chung các lời giải khác nhau của các bài khác nhau vào cùng 1 tờ giấy. Nhiều lời giải có thể cho chung vào trong 1 phong bì để gửi về Tòa soạn (25 Hàn Thuyên, Hà Nội). Ở từng lời giải cần ghi rõ họ tên, lớp, trường, huyện, tỉnh, thành phố !

• Đặt mua tạp chí tại các Bưu Điện hoặc các Công ty Sách và Thiết bị trường học

TH & TT

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/250. Tìm tất cả các cặp số (x, y) với $x > 1, y > 1$ sao cho $3x + 1$ chia hết cho y đồng thời $3y + 1$ chia hết cho x.

ĐẶNG HÙNG THẮNG
(Hà Nội)

Bài T2/250. Chứng minh rằng : tồn tại đa thức với các hệ số nguyên sao cho giá trị của đa thức này và giá trị của phân thức :

$$P = \frac{5t^2}{t^6 + t^5 - t^3 - 5t^2 - 4t + 1}$$

tại các nghiệm của phương trình $t^8 - 4t^4 + 1 = 0$ là bằng nhau.

NGUYỄN NGỌC KHOA
(Quảng Ngãi)

Bài T3/250. Xét tất cả các tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ sao cho $a < b$ và $f(x) \geq 0$ với mọi x. Hỏi rằng biểu thức $\frac{a+b+c}{b-a}$ có thể nhận giá trị bé nhất bằng bao nhiêu?

NGUYỄN ĐỄ
(Hải Phòng)

Bài T4/250. Cho hai điểm cố định B và C. Một điểm A di động trên một trong hai nửa mặt phẳng bờ BC sao cho A, B, C không thẳng hàng. Dựng hai tam giác vuông cân ADB và AEC với $DA = DB$, $EA = EC$ sao cho điểm D nằm khác phía điểm C đối với đường thẳng AB và điểm E nằm khác phía điểm B đối với đường thẳng AC. Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh rằng đường thẳng AM luôn luôn đi qua một điểm cố định.

TRẦN ĐỨC THỊNH
(Quảng Ngãi)

Bài T5/250. Cho tam giác ABC với $a > b > c$ nội tiếp đường tròn (O). Đặt x, y, z tương ứng là các khoảng cách từ một điểm M thuộc (O) đến các cạnh BC, CB, BA. Tìm vị trí của M sao cho biểu thức:

$$S = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$$ đạt giá trị bé nhất có thể được.

TRẦN HANH
(Hà Nam)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/250. Cho số nguyên dương m. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn đồng thời các điều kiện :

$$|a| \leq m, |b| \leq m \text{ và } 0 < a + b\sqrt{2} \leq \frac{1+\sqrt{2}}{m+2}.$$

PHẠM NGỌC QUANG
(Thanh Hóa)

Bài T7/250. Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{2} + \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$
$$\geq 2 - \frac{1}{2}\,\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}.$$

TRẦN NAM DŨNG
(Tp Hồ Chí Minh)

Bài T8/.250. Tìm tất cả các đa thức với hệ số thực $f(x)$ mà $\cos f(x)$, $x \in R$ là hàm số tuần hoàn.

NGUYỄN MINH ĐỨC
(Hà Nội)

Bài T9/250. Giả sử tam giác ABC thỏa mãn điều kiện: $\text{cotg}A$, $\text{cotg}B$, $\text{cotg}C$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng. Chứng minh $\widehat{GAC} = \widehat{GBA}$, trong đó G là trọng tâm tam giác ABC.

LÊ QUỐC HÁN
(Nghệ An)

Bài T10/250. Hai tứ diện $ABCD$ và $A'B'C'D'$ sắp đặt ở trong không gian sao cho:

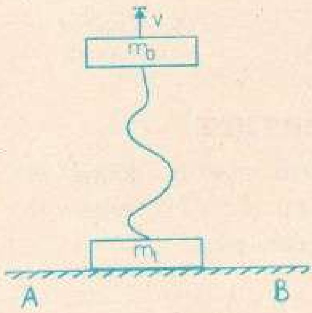
$$AB'^2 + BC'^2 + CD'^2 + DA'^2 =$$
$$= A'B^2 + B'C^2 + C'D^2 + D'A^2$$

Chứng minh rằng nếu các mặt phẳng $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ lần lượt đi qua A, B, C, D và vuông góc với các đường thẳng $A'B', B'C', C'D', D'A'$ mà đồng quy thì các mặt phẳng $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ lần lượt đi qua A', B', C', D' và vuông góc với các đường thẳng AB, BC, CD, DA cũng đồng quy.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT
(Hà Nội)

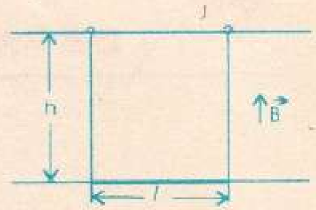
CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/250: Hai trọng vật được nối với nhau bằng một dây cáp không dãn, dài l. Tại thời điểm ban đầu trọng vật m_0 được ném từ mặt phẳng AB với vận tốc đầu $\vec{v_o}$ hướng thẳng đứng lên trên (Hình vẽ). Hỏi độ cao cực đại h và m_0 có thể đạt tới. Giả sử rằng cáp có khối lượng không đáng kể và không bị đứt.



TÔ GIANG
(Hà Nội)

Bài L2/250: Thanh dẫn (có chiều dài l và khối lượng m) được treo bằng hai thanh cứng (có chiều dài h và khối lượng không đáng kể), có thể quay tự do xung quanh một trục, nằm ngang (Hình vẽ). Khung nói trên nằm trong từ trường đều có véctơ cảm ứng từ hướng thẳng đứng lên trên. Người ta cho một dòng điện I_0 chạy qua khung trong một thời gian rất ngắn τ. Hãy xác định độ lệch cực đại của khung khỏi mặt phẳng thẳng đứng.



NGUYỄN QUANG HỌC
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/250. Find all pairs of numbers (x, y) with $x > 1$, $y > 1$ such that $3x+1$ is divisible by y and simultaneously, $3y+1$ is divisible by x.

T2/250. Prove that there exists a polynomial with integer coefficients such that its value at every root t of the equation $t^8 - 4t^4 + 1 = 0$ is equal to $P(t) = \dfrac{5t^2}{t^6+t^5-t^3-5t^2-4t+1}$

T3/250. Consider all trinomials of second degree $f(x) = ax^2 + bx + c$ such that $a < b$ and $f(x) \geq 0$ for all x. What is the least value of the expression $\dfrac{a+b+c}{b-a}$?

T4/250. Let be given two fixed points B and C. A point A moves on a semi-plane with boundary BC such that A, B, C are not collinear. Let ADB and AEC be isosceles right triangles such that $DA = DB$, $EA = EC$ and D and C are on different sides of the line AB, E and B are on different sides of the line AC. Let M be the midpoint of the DE. Prove that the line AM passes through a fixed point.

T5/250. Let be given a triangle ABC, with sides $a > b > c$, inscribed in a circle (O). Let x, y, z be respectively the distances from a point M on (O) to the lines containing the sides BC, CA, AB. Find the position of M such that the expression $S = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z}$ attains its least value.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/250. m is a given positive integer. Prove that there exits integers a, b satisfying simultaneously the conditions:

$$|a| \leq m,\ |b| \leq m \text{ and } 0 < a + b\sqrt{2} \leq \frac{1+\sqrt{2}}{m+\sqrt{2}}$$

T7/250. Let be given three positive real number a, b, c. Prove the inequalities

$$\frac{1}{2} + \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq$$
$$\geq 2 - \frac{1}{2}\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}.$$

T8/250. Find all polynomials with real coefficients $f(x)$ such that $\cos f(x)$ $(x \in \mathbf{R})$ is a periodic function.

T9/250. Suppose that the triangle ABC satisfies the condition that cotg$A$, cotg$B$, cotg$C$ (in this order) form an arithmetic progression. Prove that $GAC = GBA$, where G is the center of gravity of the triangle ABC.

T10/250. Two tetrahedra $ABCD$ and $A'B'C'D'$ are in a position in space such that:

$$AB'^2 + BC'^2 + CD'^2 + DA'^2 =$$
$$= A'B^2 + B'C^2 + C'D^2 + D'A^2.$$

Prove that if the planes α, β, γ, δ passing respectively through A, B, C, D and perpendicular respectively to the lines $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$ are concurrent then the planes α', β', γ', δ' passing respectively through A', B', C', D' and perpendicular respectively to the lines AB, BC, CD, DA are also concurrent.

DÀNH CHO CÁC BẠN CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC

Một phương pháp giải một số phương trình bậc bốn

MỘT PHƯƠNG PHÁP GIẢI MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN

TRẦN XUÂN BANG
(*Trường PTTH Năng khiếu Quảng Bình*)

Ta quan tâm đến các phương trình đa thức bậc bốn (gọi tắt là phương trình bậc bốn) chuyển về được phương trình trùng phương. Không phải phương trình bậc bốn nào cũng có thể chuyển được về phương trình trùng phương.

Mệnh đề 1. *Phương trình bậc bốn $f(x) = 0$ có thể đưa được về phương trình trùng phương khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ có trục đối xứng cùng phương với trục tung.*

Chứng minh:

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có trục đối xứng $x = x_0$ khi và chỉ khi qua phép biến đổi: $\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = Y \end{cases}$ hàm số $y = f(x)$ trở thành $Y = f(x_0 + x)$ là một hàm số chẵn, khi và chỉ khi phương trình $f(x_0 + x) = 0$ là phương trình trùng phương.

Áp dụng

Mệnh đề 1 cùng với chứng minh mệnh đề 1 cho phép ta khẳng định một phương trình có thể chuyển được phương trình trùng phương hay không và phép đặt ẩn phụ để chuyển về phương trình trùng phương là gì.

Thí dụ 1: Giải phương trình:

$$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 1 = 0$$

Giải: Đặt $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 1$ (1)

Giả sử $x = x_0$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số (1). Qua phép biến đổi $\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = Y \end{cases}$

Ta có: $Y = (x_0+X)^4 - 4(x_0+X)^3 - 2(x_0+X)^2 + 12(x_0 + X) - 1$

$\Leftrightarrow Y = x_0^4 + 4x_0^3X + 6x_0^2X^2 + 4x_0X^3 + X^4 - 4x_0^3 - 12x_0^2X - 12x_0X^2 - 4X^3 - 2x_0^2 - 4x_0X - 2X^2 + 12x_0 + 12X - 1$

Y là một hàm số chẵn của X $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 4x_0 - 4 = 0 \quad (2) \\ 4x_0^3 - 12x_0^2 - 4x_0 + 12 = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Từ (2) suy ra $x_0 = 1$ thỏa mãn (3)

Vậy hàm số (1) có trục đối xứng $x = 1$.

Phép đặt ẩn phụ để đưa phương trình đã cho về phương trình trùng phương là: $x = 1 + X$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} X^4 - 8X^2 + 6 = 0 \\ x = 1 + X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 = 4 \pm \sqrt{10} \\ x = 1 + X \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{4 \pm \sqrt{10}}$$

Thí dụ 2: Giải phương trình:

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 2 = 0$$

Giải. Bằng cách đã làm ở thí dụ 1, ta thấy hàm số:

$y = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 2$

có trục đối xứng $x = -1$.

Vậy, phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} X^4 - 2X^2 - 1 = 0 \\ x = -1 + X \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{1 + \sqrt{2}}$$

Mệnh đề 2: *Nếu phương trình bậc bốn $f(x) = 0$ có bốn nghiệm dạng:*

$$x_0-d,\ x_0-b,\ x_0+b,\ x_0+d \qquad (4)$$

thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có trục đối xứng là $x = x_0$

Chứng minh.

Vì phương trình bậc bốn $f(x) = 0$ có bốn nghiệm dạng (4) nên $f(x)$ phải có dạng:

$f(x) = a[x - (x_0-d)][x - (x_0-b)][x - (x_0+b)][x - (x_0+d)]$ trong đó $a \neq 0$.

Đặt $x = x_0 + X$, $f(x)$ trở thành:

$f(x_0+X) = a(X^2-d^2)(X^2-b^2)$ là một hàm số chẵn của X. Suy ra đồ thị hàm số $y = f(x)$ có trục đối xứng $x = x_0$.

Áp dụng Cấp số cộng là một trường hợp đặc biệt của dãy (4). Vì vậy, có thể dùng điều kiện cần "có trục đối xứng" của mệnh đề 2 để tìm điều kiện một phương trình bậc bốn có nghiệm lập thành một cấp số cộng

Thí dụ 1. Tìm a để phương trình:

$$x^4 + 4ax^3 - 2x^2 - 12ax = 0 \qquad (5)$$

có 4 nghiệm lập thành một cấp số cộng.

Giải.

**Điều kiện cần:*

Đặt $y = x^4 + 4ax^3 - 2x^2 - 12a$ (6)

Theo mệnh đề 2, điều kiện cần để phương trình (5) có 4 nghiệm lập thành một cấp số cộng là đồ thị hàm số (6) phải có trục đối xứng.

Giả sử $x = x_0$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số (6). Qua phép biến đổi $\begin{cases} x = x_o + X \\ y = Y \end{cases}$ hàm số (6) trở thành:

$Y = (x_o^4 + 4ax_o^3 - 2x_o^2 - 12ax_o) +$

$+ (4x_o^3 + 12ax_o^2 - 4x_o - 12a)X$

$+ (6x_o^2 + 12ax_o - 2)X + 4(x_o + a)X^3 + X^4$

Y là hàm số chẵn của $X \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 4x_o + 4a = 0 \\ 4x_o^3 + 12ax_o^2 - 4x_o - 12a = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o = -a \\ a = 0,\ a = -1,\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = \pm 1 \end{array}\right.$

** Điều kiện đủ*

i) $a = 0 \Rightarrow x_o = 0 \Rightarrow Y = X^4 - 2X^2$

$y = 0 \Leftrightarrow X^4 - 2X^2 = 0 \Leftrightarrow X = 0, X = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{2}$. Không thỏa

ii) $a = -1 \Rightarrow x_o = 1 \Rightarrow Y = X^4 - 8X^2 + 7$

$\Leftrightarrow x = 0, x = 2, x = 1 \pm \sqrt{7}$;

Không thỏa

iii) $a = 1 \Rightarrow x_o = -1 \Rightarrow Y = X^4 - 8X^2 + 7$

$y = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = -2; x = -1 \pm \sqrt{7}$ không thỏa.

Vậy: Không có a thỏa điều kiện bài toán.

Thí dụ 2. Tìm m để phương trình:

$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 2mx = 0 \qquad (7)$$

có 4 nghiệm lập thành một cấp số cộng.

Giải. Điều kiện cần:

Đặt $y = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2mx$ (8)

Phương trình có 4 nghiệm lập thành cấp số cộng thì đồ thị (8) có trục đối xứng $x = x_o$. Qua phép biến đổi $\begin{cases} x = x_o + X \\ y = Y \end{cases}$

Hàm số (7) trở thành:

$Y = (x_o^4 - 2x_o^3 - x_o^2 + 2mx_o) +$

$+ (4x_o^3 - 6x_o^2 - 2x_o + 2m)X +$

$+ (6x_o^2 - 6x_o - 1)X^2 + (4x_o - 2)X^3 + X^4$

Ta phải có:

$\begin{cases} 4x_o - 2 = 0 \\ 4x_o^3 - 6x_o^2 - 2x_o + 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = \dfrac{1}{2} \\ m = 1 \end{cases}$

** Điều kiện đủ:* Với $m = 1$ thì phương trình (7) trở thành

$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 0$$

Dễ dàng thấy bốn nghiệm: -1, 0, 1, 2 lập thành một cấp số cộng.

Vậy: $m = 1$ thỏa điều kiện bài toán.

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 9 TỈNH HẢI DƯƠNG
NĂM HỌC 1997 - 1998

Thời gian làm bài : 150 phút

Câu I. 1) Giải và biện luận phương trình:

$\dfrac{2m(m^2-1)}{x^2-m^2} + \dfrac{m-1}{m-x} = \dfrac{3m+1}{x+m}$ (trong đó x là ẩn, m là tham số)

2) Tìm các số tự nhiên a, b, c thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} a^3 = b^3 + c^3 + 3abc \\ a^2 = 2(b + c) \end{cases}$$

Câu II. Cho a, b là hai số dương.

1) Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^4 + b^2} + \frac{b}{b^4 + a^2} \le \frac{1}{ab}$$

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b}$$

Câu III. 1) Cho tứ giác lồi $ABCD$, biết góc $BAC = 30^\circ$, $ADB = 50^\circ$, $DCA = 40^\circ$, $CBD = 60^\circ$ và góc $ABC + ADC > 180^\circ$. Tính các góc của tứ giác $ABCD$.

2) Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Một góc 45° quay xunh quanh đỉnh A và nằm bên trong hình vuông cắt cạnh BC, CD lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh rằng:

$(BM + DN).a + BM.DN = a^2$

b) Đường thẳng AM cắt đường thẳng CD tại E. Chứng minh:

$$\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{a^2}$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN TRƯỜNG ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN NĂM 1997

Thời gian làm bài : 180 phút

PHẦN A *(Bắt buộc đối với tất cả các thí sinh)*

Câu I. Cho hàm số

$$y = (2 - x^2)^2 \qquad (1)$$

1. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số (1).

2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị của hàm số (1) biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm A(0, 4).

Câu II. Giải hệ phương trình.

$$\begin{cases} \sqrt{x+y-1} = 1 \\ \sqrt{x-y+2} = 2y-2 \end{cases}$$

Câu III. Tìm nghiệm của phương trình :

$$\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = -\sqrt{2}$$

thỏa mãn điều kiện $\frac{2}{5}\pi < x < \frac{6}{7}\pi$

Câu IV. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$f(x) = |x^3 + 3x^2 - 72x + 90|$ trên đoạn $[-5, 5]$,

PHẦN B *(Thí sinh tự chọn một trong 2 câu* V_a hoặc V_b*)*

Câu V_a *(Dành cho thí sinh trung học chưa phân ban).*

1. Tính tích phân

$$\int_0^1 x^5(1-x^3)^6\,dx$$

2. Cho hình chóp tam giác đều $SABC$ có đường cao $SO = 1$ và đáy ABC có cạnh bằng $2\sqrt{6}$. Điểm M, N là trung điểm của cạnh AC, AB tương ứng. Tính thể tích hình chóp $SAMN$ và bán kính hình cầu nội tiếp hình chóp đó.

Câu V_b *(Dành cho thí sinh trung học phân ban)*

1. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển Niutơn của $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{12}$.

2. Cho hai đường thẳng có phương trình là:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{3}$$

và $x = t - 1$; $y = -t$; $z = 3t-2$.

Hãy chứng tỏ hai đường thẳng đã cho nằm trên cùng một mặt phẳng và hãy lập phương trình của mặt phẳng đó.

ĐÁP ÁN

Câu I.

1. Khảo sát, vẽ đồ thị (1,5 điểm)

+ Miền xác định: $(-\infty, +\infty)$

+ Chiều biến thiên:

$y' = 4x^3 - 8x$; $y' = 0$

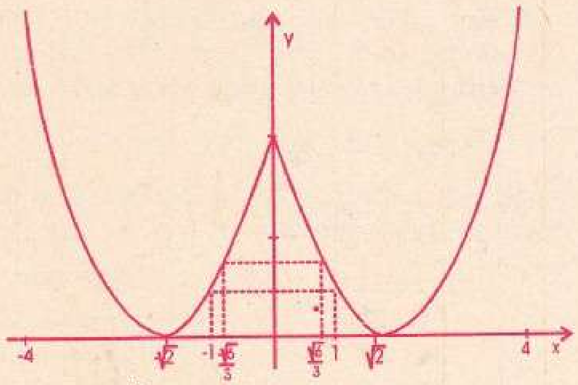
$\Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = \sqrt{2}, x_3 = -\sqrt{2}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$y_{CT} = 0$	↗	$y_{CĐ} = 4$	↘	$y_{CT} = 0$	↗	$+\infty$

+ Điểm uốn: $y'' = 12x^2 - 8$; $y'' = 0 \Leftrightarrow$ $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ Với $x < -\frac{\sqrt{6}}{3}$ hoặc $x > \frac{\sqrt{6}}{3}$ có $y'' > 0 \Rightarrow$ đường cong lõm. Với $-\frac{\sqrt{6}}{3} < x < \frac{\sqrt{6}}{3}$ có $y'' < 0$ $\Rightarrow$ đường cong lồi

Đồ thị có 2 điểm uốn: $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{16}{9}\right)$ và $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{16}{9}\right)$.

+ Đồ thị: Cho $x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow y = 0$; $x = \pm 2$ $\Rightarrow y = 2$; $x = \pm 1 \Rightarrow y = 1$.



2. (1 điểm)

Phương trình đường thẳng đi qua A (0, 4) có hệ số góc bằng k là: $y = kx + 4$.

Hoành độ tiếp điểm của đường thẳng này và đồ thị hàm số (1) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4 - 4x^2 + 4 = kx + 4 & (a) \\ 4x^3 - 8x = k & (b) \end{cases}$$

Thay k từ (b) vào (a) ta có:

$x^4 - 4x^2 = x(4x^3 - 8x) \Leftrightarrow x^2(4 - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ x_3 = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = 0 \\ k_2 = -\dfrac{16}{9}\sqrt{3} \\ k_3 = \dfrac{16}{9}\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy ta có 3 tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) đi qua A là:

$(T_1) : y = 4$

$(T_2) : y = -\dfrac{16}{9}\sqrt{3}x + 4$

$(T_3) : y = \dfrac{16\sqrt{3}}{9}x + 4.$

Câu II. (1,5 điểm) Từ hệ đã cho suy ra

$$\begin{cases} x + y - 1 = 1 \\ x - y + 2 = 4y^2 - 8y + 4 \end{cases}$$

Từ phương trình đầu có $x = 2 - y$ thay vào phương trình thứ 2 có:

$$2y^2 - 3y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2 \\ y_2 = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Thử lại ta thấy $x = 2$, $y = 0$ không thỏa mãn hệ đã cho.

Vậy: Nghiệm của hệ đã cho là: $x = \dfrac{1}{2}, y = \dfrac{3}{2}$

Câu III. (1,5 điểm)

Phương trình $\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = -\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sin\dfrac{\pi}{6}\cos 7x - \cos\dfrac{\pi}{6}\sin 7x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - 7x\right) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{6} - 7x = -\dfrac{\pi}{4} - 2k\pi \\ \dfrac{\pi}{6} - 7x = -\dfrac{3\pi}{4} - 2n\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{84} + \dfrac{2k\pi}{7} \\ x = \dfrac{11\pi}{84} + \dfrac{2n\pi}{7} \end{array}\right. (k, n \in \mathbf{Z})$$

Ta có

- $\dfrac{4}{10}\pi < x < \dfrac{6}{7}\pi \Leftrightarrow \dfrac{4}{10}\pi < \dfrac{5\pi}{85} + \dfrac{2k\pi}{7} < \dfrac{6}{7}\pi$

$\Leftrightarrow \dfrac{7}{5} - \dfrac{5}{24} < k < 3 - \dfrac{5}{24}$, mà $k \in \mathbf{Z}$ nên $k = 2$.

Do đó nghiệm $x_1 = \dfrac{5\pi}{84} + \dfrac{4\pi}{7} = \dfrac{53\pi}{84}$

- $\dfrac{4}{10}\pi < x < \dfrac{6}{7}\pi$

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{10}\pi < \dfrac{11\pi}{84} + \dfrac{2n\pi}{7} < \dfrac{6}{7}\pi$

$\Leftrightarrow \dfrac{7}{5} - \dfrac{11}{24} < n < 3 - \dfrac{11}{24}$

mà $n \in \mathbf{Z}$ nên $n = 1$ hoặc $n = 2$. Với $n = 1$ ta có nghiệm $x_2 = \dfrac{11\pi}{84} + \dfrac{2\pi}{7} = \dfrac{35\pi}{84}$. Với $n = 2$ ta có nghiệm $x_3 = \dfrac{11\pi}{84} + \dfrac{4\pi}{7} = \dfrac{59\pi}{84}$. Vậy bài toán có 3 nghiệm.

$$x_1 = \frac{53\pi}{84}; x_2 = \frac{35\pi}{84}; x_3 = \frac{59\pi}{84}$$

Câu IV. (1,5 điểm)

Xét hàm số : $g(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$ liên tục trên [-5, 5] và $g'(x) = 3x^2 + 6x - 72$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 4, x_2 = -6.$

Ta thấy $x_2 = -6$ không thuộc [-5, 5]. Tính $g(-5) = 400; g(5) = -70; g(4) = -86$

Do đó $\max\limits_{x \in [-5,5]} g(x) = 400; \min\limits_{x \in [-5,5]} g(x) = -86$

Như vậy giá trị lớn nhất của $f(x) = |g(x)|$ trên [-5, 5] là:

$$\max_{x \in [-5,5]} g(x) = \max\left(\max_{x \in [-5,5]} g(x), \left|\min_{x \in [-5,5]} g(x)\right|\right) = 400$$

Câu Va. (1,5 điểm)

1. Tính $I = \int\limits_0^1 x^5(1 - x^3)^6\, dx$

$= \int\limits_0^1 x^2[1-(1-x^3)]\,(1-x^3)^6 dx$

$= \int\limits_0^1 x^2(1-x^3)^6 dx - \int\limits_0^1 x^2(1-x^3)^7 dx =$

$= -\dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 (1-x^3)^6\, d(1-x^3) - \dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 (1-x^3)^7\, d(1-x^3)$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}(1-x^3)^7\Big|_0^1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}(1-x^3)^8\Big|_0^1 =$$

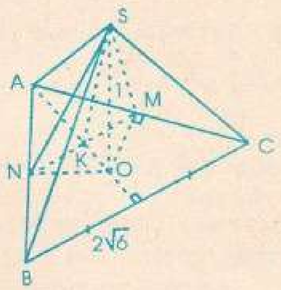
$$= \frac{3}{504} = \frac{1}{168}$$

2. (1,5 điểm) Do ΔABC đều, M và N và điểm giữa của AC và AB nên $AM = AN = \frac{AB}{2} = \sqrt{6}$.

$$dt(AMN) = \frac{1}{2}AM.AN.\sin 60^o = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $V_{SAMN} = \frac{1}{3}dt(AMN).SO = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{3}\,.\,1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

* Giả sử O_1 là tâm hình cầu nội tiếp hình chóp $SAMN$ và r là bán kính hình cầu thì r chính là độ dài đường cao các hình chóp đỉnh O_1 và đáy là các mặt của tứ diện $SAMN$.



Ta có: $V_{SAMN} =$

$$= \frac{1}{3}r[dt(AMN) + dt(ASM) + dt(ASN) + dt(SMN)]\ (*)$$

Do hình chóp $SABC$ đều nên chân đường cao O trùng với tâm đường tròn nội tiếp ΔABC suy ra: $OM \perp AC$, $ON \perp AB$ và $OS \perp (ABC) \Rightarrow SM \perp AC$, $SN \perp AB \Rightarrow SM = SN$.

Xét Δ vuông AOM có: $OM = AM.\mathrm{tg}30^o = \sqrt{2}$ $\Rightarrow OM = ON = \sqrt{2}$

Xét Δ vuông SOM có:

$$SM = \sqrt{OM^2 + SO^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow dt(ASM) = \frac{1}{2}AM.SN = \frac{1}{2}\sqrt{6}\,.\,\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

Tương tự $dt(ASN) = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

Giả sử K là điểm giữa MN thì $SK \perp MN$ (do ΔSMN cân)

Xét Δ vuông SKM có:

$$SK = SM^2 - KM^2 = \sqrt{3 - \frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Do đó $dt(SMN) = \frac{1}{2}MN.SK = \frac{1}{2}\sqrt{6}\,.\,\frac{1}{2}\sqrt{6} = \frac{3}{2}$

Thay vào đẳng thức (*) ta có:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}r\left(\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

Câu Vb

1. (1,5 điểm) Khai triển

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^n = C_{12}^0 x^{12} + C_{12}^1 x^{11}\frac{1}{x} + C_{12}^2 x^{10}\cdot\frac{1}{x^2} + \dots$$

$$+ C_{12}^k x^{12-k}\cdot\frac{1}{x^k} + \dots + C_{12}^{11}x\cdot\frac{1}{x^{11}} + C_{12}^{12}\cdot\frac{1}{x^{12}}$$

Số hạng thứ $(k+1)$ trong khai triển là:

$$C_{12}^k x^{12-k}\cdot\frac{1}{x^k} = C_{12}^k\cdot x^{12-2k}$$

Số hạng này không phụ thuộc x khi $12-2k = 0 \Leftrightarrow k = 6$. Vậy số hạng thứ 7 của khai triển không phụ thuộc x và có giá trị bằng:

$$C_{12}^6 = \frac{12!}{6!6!} = \frac{7.8.9.10.12}{1.2.3.4.5.6} = 924.$$

2. (1,5 điểm) Rõ ràng hai đường thẳng không song song. Để tìm giao điểm ta hãy giải hệ

$$\begin{cases} -2a + 1 = t - 1 \\ a - 2 = -t \\ 3a + 4 = 3t - 2 \end{cases} \Rightarrow a = 0, t = 2$$

$\Rightarrow x = 1, y = -2, z = 4$

Vậy giao điểm của hai đường thẳng là $A(1,-2,4)$ nghĩa là hai đường thẳng nằm trên một mặt phẳng.

Giả sử $\vec{n} = (A, B, C)$ là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng vuông góc với cả 2 đường thẳng đã cho thì ta có hệ;

$$\begin{cases} -2A + B + 3C = 0 \\ A - B + 3C = 0 \end{cases}$$

Cho $A = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{6}, B = \frac{3}{2}$.

Vậy phương trình mặt phẳng chứa 2 đường thẳng đã cho là:

$$1(x-1) + \frac{3}{2}(y+2) + \frac{1}{6}(z-4) = 0$$

hay $6x + 9y + z + 8 = 0$

VUI

TẠI SAO LẠI ..."BỐN CHÚNG TA..." ?

Câu chuyện dưới đây lược trích một tác phẩm của nhà văn N.N.A

"An đố Nghi:

- Có hai vợ chồng trẻ cùng đi chơi với đứa con còn rất nhỏ. Bỗng đứa con thốt lên :"Bốn chúng ta vui nhỉ !" Cậu thử đoán xem, tại sao đứa bé lại nói vậy ?"

Bạn đọc cũng thử giải thích xem sao? Xin các bạn tham khảo một cách giải thích ở cuối một trangtrong số tạp chí này cho vui

LÊ THANH
(8B1, THCS Ngô Quyền - Hải Phòng)

Về cách tính TÍCH PHÂN $\int_0^1 \arccos x dx$

TRẦN LƯƠNG CÔNG KHANH
(Chuyên viên Sở GDvĐT Bình Thuận)

Sách Giải tích 12 (không chuyên ban) của NXB Giáo dục, phần bài tập cuối chương IV có bài 4.26b: Tính tích phân $I = \int_0^1 \arccos x dx$. Sách Giải bài tập của NXB Giáo dục hướng dẫn giải bằng phương pháp tích phân từng phần: Đặt $u = \arccos x$, $dv = dx$ và đưa I về dạng: $I = x\arccos x\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$. Vì sách giáo khoa chỉ định nghĩa phân tích xác định cho những hàm liên tục trên một đoạn và hàm số $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ không liên tục trên [0, 1] nên cách giải trên không phù hợp với lí thuyết đã trình bày (dù hàm số $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ khả tích Rieman trên [0, 1] do chỉ gián đoạn tại một điểm). Chúng tôi đề nghị cách giải khác như sau: Đặt $x = \cos t$, $t \in [0, \pi/2]] \Rightarrow dx = -\sin t\, dt$

Nếu $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

Nếu $x = 1 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow \quad I = \int_{\pi/2}^{0} -t\sin t dt = \int_0^{\pi/2} t\sin t dt$

Đặt $\begin{cases} u = t \\ dv = \sin t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = -\cos t \end{cases}$

$$I = -t\cos t\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos t dt = \sin t\Big]_0^{\pi/2} = 1$$

Ta cũng có chú ý tương tự đối với bài 4.26d, tính $J = \int_3^5 \sqrt{x^2 - 9dx}$. Sách giải tích 12 hướng dẫn dùng tích phần từng phần và $J = x\sqrt{x^2-9}\Big]_3^5 - \int_3^5 \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}} dx$. Tích phân sau cũng không phù hợp với định nghĩa. Với tích phân J, có lẽ nên đổi biến số bằng cách đặt $\sqrt{x^2-9} = x - t$.

Qua báo Toán học và Tuổi trẻ, chúng tôi cũng mong Phòng Trung học phổ thông của các Sở Giáo dục và Đào tạo chỉ đạo bằng văn bản để ngăn ngừa việc học sinh sử dụng cách giải không phù hợp đối với những bài toán trên đây và tương tự.

****

LỜI GIẢI GỌN ĐẸP CHO MỘT BÀI TOÁN RẮC RỐI

PHAN THANH QUANG

Tương tự như khái niệm "phần nhiều nguyên của số a ta có khái niệm "số tự nhiên gần số a nhất" kí hiệu là $]a[$.

Ví dụ $]3[= 3$; $]3,2[= 3$; $]3,6[= 4$.

Để dễ hình dung ta hãy biểu diễn số a trên trục số. $]a[$ là số mà điểm biểu diễn là "điểm số tự nhiên" gần điểm a nhất".

Ta quy ước $]1.5[= 2$. Tương tự $\left]\frac{5}{2}\right[= 3$ v.v... Dễ chứng minh mệnh đề sau đây:

Mệnh đề. Cho số $a \in \mathbb{N}$. Thế thì $\sqrt{a}$ chỉ có thể là số tự nhiên hoặc là số vô tỉ, chứ không thể là một phân số thực sự dạng $\frac{m}{n}$, trong đó $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ và $n \neq 1$, và $m \in \mathbb{N}, m \neq 0$.

Với định nghĩa và mệnh đề đã nói trên, ta hãy giải bài toán thú vị sau đây:

Bài toán: Gọi a_n là số tự nhiên gần số $\sqrt{n}$ nhất.

Hãy tìm tổng $S = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_{1980}}$.

Ta có nhận xét:

$a_1 =]\sqrt{1}[= 1$; $\quad a_2 =]\sqrt{2}[= 1$ (hai số 1)

$a_3 =]\sqrt{3}[= 2$; $\quad a_4 =]\sqrt{4}[= 2$

$a_5 =]\sqrt{5}[= 2$; $\quad a_6 =]\sqrt{6}[= 2$ (bốn số 2)

$a_7 =]\sqrt{7}[= 3$; $\quad a_8 =]\sqrt{8}[= 3$

$a_9 =]\sqrt{9}[= 3$; $\quad a_{10} =]\sqrt{10}[= 3$

$a_{11} =]\sqrt{11}[= 3$; $\quad a_{12} =]\sqrt{12}[= 3$ (sáu số 3)

Tương tự như vậy ta có tám số 4, mười số 5, ..., $2k$ số k. Để chứng minh một cách chặt chẽ nhận xét trên ta phải chứng minh mệnh đề:

Với mọi số tự nhiên k, bất phương trình ẩn x sa đây có đúng 2k nghiệm nguyên $k - \frac{1}{2} < \sqrt{x} < k + \frac{1}{2}$ $\qquad$ (1)

Thật vậy $(1) \Leftrightarrow k^2 - k + \frac{1}{4} < x < k^2 + k + \frac{1}{4}$ Bất phương trình này có đúng $2k$ nghiệm nguyên là $k^2 - k + 1$; $k^2 - k + 12$; $k^2 - k + 3, ..., k^2 + k$.

Đó là điều phải chứng minh.

Bây giờ ta có thể dễ dàng tính tổng phải tìm.

$$S = \frac{1}{]\sqrt{1}[} + \frac{1}{]\sqrt{2}[} + ... + \frac{1}{]\sqrt{190}[} =$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + ... + \left(\underbrace{\frac{1}{44} + ... + \frac{1}{44}}_{88 \text{ lần}}\right)$$

Vì tổng các số trong mỗi ngoặc đơn ( ) đều bằng 2 nên $S = 88$.

Bài toán mới đọc thấy có vẻ rắc rối, không ngờ lời giải lại gọn và đẹp như vậy.

Dùng cái "ẢO" để đếm cái "THẬT"

(MỞ RỘNG MỘT BÀI TOÁN KHÓ CỦA IMO)

ĐẶNG HÙNG THẮNG
(Hà Nội)

I. MỞ ĐẦU. Theo thông lệ, bài toán số 6 trong các kì thi Toán Quốc tế (IMO) là bài toán hóc búa nhất. Trong cuộc thi IMO36 năm 1995 tại Canada, bài toán số 6 (do Ba Lan đề nghị) có một nội dung như sau.

Cho p là một số nguyên tố lẻ. Tìm số các tập con A của tập hợp {1, 2, . .., 2p} có tính chất sau

i) A chứa đúng p phần tử

ii) Tổng tất cả các phần tử của A chia hết cho p

Đội tuyển Việt Nam đó chỉ có bạn *Ngô Đắc Tuấn* giải được trọn vẹn bài này. (Nhân đây cũng lưu ý các bạn về thành tích của Tuấn: Hai lần Huy chương vàng IMO năm 1995, 1996), huy chương vàng cuộc thi Toán Châu Á - Thái Bình Dương (1996) và hai lần giải nhất toán quốc gia). Tạp chí THTT số 2(224)/1996 đã đăng lời giải của bạn Tuấn. Lời giải này khá dài và phức tạp. Đáp án của Hội đồng cho một lời giải ngắn gọn và đẹp đẽ hơn. Nó chứa đựng một ý tưởng quan trọng của Toán học hiện đại (phân lớp theo quan hệ tương đương).

II. ĐÁP ÁN CỦA HỘI ĐỒNG IMO (có sửa chữa)

Kí hiệu $S(A)$ là tổng các phần tử của A, $|A|$ là số các phần tử của A, $\overline{x}$ là dư khi chia x cho p $(0 \le \overline{x} \le p-1)$ và

$H = \{A \subset \{1, 2..., 2p\} : |A| = p\}$

Xét hai tập $B = \{1, 2..., p\}$ và $C = \{p+1, ..., 2p\}$

Ta có $S(B) \equiv S(C) \equiv 0 \pmod p$.

Bỏ tập B và C khỏi H, ta phân các tập còn lại của H thành các lớp theo quy tắc sau:

Hai tập A và A' thuộc về cùng một lớp nếu:

i) $A \cap C = A' \cap C$

ii) Tồn tại $1 \le m \le p-1$ sao cho: với mọi $x \in A$ $\exists x' \in A'$ để $x + m \equiv x' \pmod p$

Ta thấy rằng nếu A và A' cùng ở một lớp thì $S(A) \not\equiv S(A') \pmod p$. Thật vậy nếu trái lại thì

$$\sum_{x' \in A \cap B} x' \equiv \sum_{x \in A \cap B} x \equiv \sum_{x \in A \cap B} (x+m) \pmod p$$

Suy ra $m|A \cap B| \vdots p$. Mâu thuẫn

Thành thử mỗi lớp chứa không quá p tập hợp. Mặt khác với mỗi tập A, các tập $A_m = (A \cap C) \cup \{\overline{x+m}\}_{x \in A \cap B}$

$(m = 1, 2..., p-1)$ rõ ràng là cùng lớp với A. Vậy mỗi lớp chứa đúng p tập hợp và trong mỗi lớp chỉ có đúng một tập A mà $S(A) \vdots p$. Từ đó suy ra số tập hợp A cần tìm là

$$2 + \frac{C_{2p}^{p} - 2}{p}$$

III. BÀI TOÁN TỔNG QUÁT

Thay $2p$ bởi một số nguyên dương $n > p$ ta có bài toán tổng quát sau đây:

Cho p là một số nguyên tố lẻ, $n \in \mathbb{N}^*$ $(n > p)$. *Tìm số các tập con A của tập {1, 2..., n} có tính chất sau:*

i) *A chứa đúng p phần tử*

ii) *Tổng các phần tử của A chia hết cho p*

Cả cách giải của bạn Tuấn lẫn đáp án của Hội đồng dường như rất khó suy rộng để tấn công bài toán tổng quát này. Sau nhiều ngày suy nghĩ tôi đã may mắn tìm được lời giải của nó với công cụ số phức.

Xét đa thức:

$$P(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + ... + x + 1 \qquad (1)$$

Đa thức này có $p-1$ nghiệm phức phân biệt.

Gọi α là một nghiệm bất kì của $P(x)$.

Chú ý rằng $\alpha, \alpha^2, ..., \alpha^{p-1}$ là $p-1$ nghiệm phân biệt của $P(x)$ và $\alpha^p = 1$. Do đó

$$x^p - 1 = \prod_{i=1}^{p} (x - \alpha^i)$$

Xét đa thức $Q(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha^i)$ và gọi

$$H = \{A \subset \{1, ..., n\} : |A| = p\}.$$

Giả sử $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$.

Dễ thấy $a_{n-p} = -\sum_{A \in H} \alpha^{S(A)}$

Vì rằng nếu $S(A) \equiv i \pmod p$ thì $\alpha^{S(A)} = \lambda^i$

nên $a_{n-p} = -\sum_{i=0}^{p-1} n_i\alpha^i$ (2)

Ở đó n_i là số các tập $A \in$ H mà $S(A) \equiv i \pmod p$.

Mặt khác, giả sử $n = kp + r$ $(0 \le r \le p-1)$

Khi đó

$$P(x) = \prod_{i=1}^{kp}(x-\alpha^i)\prod_{i=1}^{r}(x-\alpha^i)$$

$$= (x^p-1)^k\prod_{i=1}^{r}(x-\alpha^i) \quad (4)$$

Từ (4) rút ra $a_{n-p} = -k$

Thành thử $\sum_{i=0}^{p-1} n_i\alpha^i = k$ (5)

Xét đa thức $Q(x) = \sum_{i=1}^{p-1} n_i x^i + n_o - k$

Từ (5) suy ra α là nghiệm của Q. Vì $\deg P = \deg Q$ và α là một nghiệm bất kì của P nên P và Q chỉ sai khác nhau hằng số nhân. Vậy

$$n_{p-1} = n_{p-2} = \ldots = n_1 = n_o - k$$

Suy ra $n_o - k = \dfrac{\sum_{i=1}^{p-1} n_i + n_o - k}{p} = \dfrac{C_n^p - k}{p}$

Vậy đáp số của bài toán là $n_0 = k + \dfrac{C_n^p - k}{p}$

ở đó $k = \left[\dfrac{n}{p}\right]$

IV. KẾT LUẬN. Điều thú vị và lạ lùng ở đây là: Số phức, một sản phẩm tưởng tượng của trí tuệ con người, một sự "bịa đặt toán học", một vật "ảo", lại bất ngờ giúp ta giải được một bài toán khó, rất thật, mang bản chất tổ hợp + số học : đếm các đối tượng mang một tính chất nào đó.

Viết bài báo này, tôi mong muốn được chia xẻ với các bạn yêu toán niềm vui của tôi khi tìm được lời giải đẹp đẽ này. Khác với các thứ "ảo" khác, số phức ở đây thực là có ích.

Chúc các bạn tiếp tục khám phá thêm những vẻ kiều diễm và sự tinh tế của Toán học.

MAPLE VÀ SỐ NGUYÊN TỐ

(Tiếp trang 24)

... Số nguyên tố Fecma quan trọng vì nó liên quan đến bài toán dựng đa giác đều nội tiếp đường tròn.

Việc phân tích ra thừa số nguyên tố có thể trợ giúp chúng ta rất nhiều trong khi giải các bài tập liên quan đến số tự nhiên. Khi các số cần phân tích ra thừa số được cho bởi công thức thì ta có thể sử dụng cách *định nghĩa hàm số* để phân tích hàng loạt các số ra thừa số nguyên tố.

Thí dụ 5. Tam thức Euler $n^2 + n + 41$ nhận các giá trị nguyên tố khác nhau với $n = 0, 1, \ldots, 39$ và là hợp số khi $n = 40$.

Trước tiên ta định nghĩa hàm f bằng lệnh:

```
[ f:=n-n^2+n+41;
```

$f := n^2 + n + 41$

và phân tích $f(n)$ ra thừa số với mọi giá trị của n, thí dụ:

```
[> ifactor f(39));
```

(1601)

```
[ >ifactor(f(40));
```

$(41)^2$

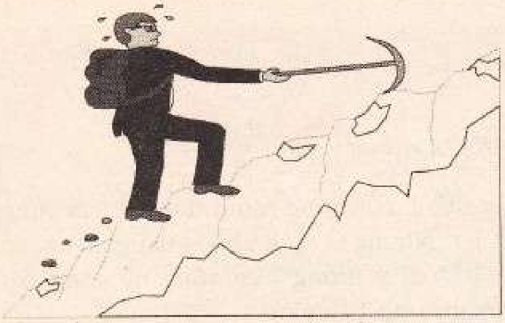
```
[ >ifactor (f(41));
```

(41) (43)

Bằng một lệnh ifactor(f(n)) như trên, máy sẽ cho kết quả: khi n thay đổi từ 0 đến 100 thì chỉ có 14 hợp số là: f(40), f(41), f(44), f(49), f(56), f(65), f(76), f(81), f(82), f(84), f(87), f(89), f(91), f(96), các $f(n)$ còn lại đều là số nguyên tố. Thật là một đa thức hiếm! Một "của hiếm" nữa là: đa thức $n^2 - 79n + 1601$ nhận các giá trị nguyên tố (không phải tất cả khác nhau) với $n = 0, 1 \ldots 79$ và là hợp số khi $n = 80$. Bạn hãy tự kiểm tra điều này.

Các ví dụ trên cho thấy: chỉ bằng một lệnh ifactor, và chỉ mất vài phút, bạn có thể kiểm tra được khá nhiều các giả thuyết hay về số nguyên tố. Nếu bạn kiên nhẫn hơn, chắc rằng bạn tìm thấy nhiều điều thú vị nữa. Chúc bạn thành công!

LTS: Nhắn bạn Nguyễn Đình Đông, 120 Trần Phú, Long Khánh, Đồng Nai và các bạn có nhu cầu được cung cấp chương trình MAPLE: Hãy liên hệ với các tác giả theo địa chỉ Viện Toán học Việt Nam, hộp thư 631, Bờ Hồ, Hà Nội.



TÌM HIỂU SÂU THÊM
TOÁN HỌC PHỔ THÔNG

Tính chất ĐẶC TRƯNG của VÉCTƠ KHÔNG và ỨNG DỤNG

PHẠM CÔNG MINH
(Hải Dương)

Trong tập hợp véctơ, có một phần tử đặc biệt: *véctơ không* $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$. Véctơ không có modun bằng 0 và có hướng tùy ý. Muốn chứng minh véctơ $\overrightarrow{AB}$ là véctơ không ta chỉ cần chứng minh véctơ $\overrightarrow{AB}$ thỏa mãn một trong các tính chất:

i) $|\overrightarrow{AB}|=0$

ii) $\overrightarrow{AB}$ có hai hướng phân biệt.

Đó là các tính chất đặc trưng của véctơ không.

Trong quá trình giải toán véctơ, lớp bài toán quy về chứng minh véctơ $\vec{v}=\vec{0}$ cũng khá phổ biến. Ở bài viết này tôi muốn khai thác tính chất đặc trưng của véctơ không để giải toán. Ta hãy bắt đầu xét một bài toán quen thuộc :

Bài toán 1. Cho ngũ giác đều $ABCDE$ có tâm O. Chứng minh:

$$\vec{v}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$$

Giải. *Cách 1.* Từ giả thiết $ABCDE$ đều nên OA là trục đối xứng của B và E, của D và C. Do đó:

$$m\,\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}$$
$$k\,\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$$

vậy $\vec{v}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=$
$=\overrightarrow{OA}\,(1+m+k)$

Chứng minh tương tự ta cũng được:

$$\vec{v}=\overrightarrow{OB}\,(1+m+k)$$

Do đó $\vec{v}$ cộng tuyến với hai véctơ không cộng tuyến, nên $\vec{v}=\vec{0}$

Cách 2: Vì $ABCD$ đều, nên:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=k\,\overrightarrow{OD}\ (\text{với } k<0)$$
$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=k\,\overrightarrow{OE}$$
$$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=k\,\overrightarrow{OA}$$
$$\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=k\,\overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OA}=k\,\overrightarrow{OC}$$

Cộng từng vế của các đẳng thức trên, ta có :

$$2\vec{v}=k\,\vec{v}$$

Để ý rằng $k<0$ nên $\vec{v}$ có hướng ngược với chính nó. Vậy $\vec{v}=\vec{0}$.

Cách 3. Từ giả thiết $ABCDE$ đều nên $AB\perp OD$ và $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=k\,\overrightarrow{OD}$

$$\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OC}=m\,\overrightarrow{OD}$$

Khi đó:

$\vec{v}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=$
$=k\,\overrightarrow{OD}+m\,\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OD}$
$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\,.\,\vec{v}=\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{OD}\,.\,(k+m+1)=0$

Chứng minh tương tự ta cũng có $\overrightarrow{BC}\,.\,\vec{v}=0$ mà $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ là hai véctơ không cộng tuyến, nên:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\,.\,\vec{v}=0\\ \overrightarrow{BC}\,.\,\vec{v}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\vec{v}\\ \overrightarrow{BC}\perp\vec{v}\end{cases}\Rightarrow\vec{v}=\vec{0}$$

Cách 4. Bây giờ ta suy nghĩ mạnh dạn hơn:

Từ giả thiết $ABCDE$ đều $\Rightarrow OA=OB=OC=OD=OE$ nên

$\overrightarrow{OA}\,.\,\vec{v}=OA^2+OA^2\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})+$
$+\ OA^2\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})+$
$+\,OA^2\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD})+\overrightarrow{OA}\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE})=$
$=OA^2\left(1+2\cos\dfrac{2\pi}{5}+2\cos\dfrac{4\pi}{5}\right)$

Chứng minh tương tự ta cũng có:

$$\overrightarrow{OB}\,.\,\vec{v}=OB^2.\left(1+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5}\right)$$

Do đó: $\overrightarrow{OA}\,.\,\vec{v}=\overrightarrow{OB}\,.\,\vec{v}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\,.\,\vec{v}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\perp\vec{v}$

Suy luận tương tự ta cũng có: $\overrightarrow{BC}\perp\vec{v}$. Mà A, B, C không thẳng hàng nên $\vec{v}=\vec{0}$.

Điều thú vị bất ngờ là ta tìm được một bài toán mới: Chứng minh:

$$*\ 1+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5}=0$$

$$*\ 4\cos^2\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{2\pi}{5}-1=0$$

$$*\ 4\sin^2\frac{\pi}{10}+2\sin\frac{\pi}{10}-1=0$$

$* \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$* \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

Rồi ta cũng có kết luận về các giá trị $\cos\frac{\pi}{10}$, $\sin\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{\pi}{5}$, $\sin\frac{3\pi}{10}$, $\cos\frac{3\pi}{10}$...

Cách 5. xét phép quay tâm O, góc quay $\frac{2\pi}{5}$.

Ta có

$$A \mapsto B$$
$$B \mapsto C$$
$$C \mapsto D$$
$$D \mapsto E$$
$$E \mapsto A$$

Như thế $Q_o^{\frac{2\pi}{5}}(\vec{v}) = \vec{v}$. Vậy $\vec{v}$ có hai hướng phân biệt nên $\vec{v} = \vec{0}$.

Rõ ràng với các ý tưởng trên ta có thể mở rộng lời giải cho đa giác đều $2n+1$ cạnh. Nhưng vấn đề đặt ra là: Khai thác tính chất đặc trưng của véctơ không để giải các dạng toán nào? Để sáng tỏ, ta hãy theo dõi một bài toán khác.

Bài toán 2. Cho ΔABC. Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh:

$$a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB} + c\,\overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

Giải. Đặt $\vec{v} = a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB} + c\,\overrightarrow{OC}$

Ta có:

$$\overrightarrow{OA}.\vec{v} = a.OA^2 + b.\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OA} + c.\overrightarrow{OC}\,\overrightarrow{OA}$$

$$= OA(a.OA + b.OB\cos(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) + c.OC\cos(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}))$$

$$= OA\left(a.OA + b.OB\cos\left(\pi - \frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) + c.OC\cos\left(\pi - \frac{A}{2} - \frac{C}{2}\right)\right)$$

$$= OA\left(a.OA - b.OB\cos\frac{A+B}{2} - c.OC\cos\frac{A+C}{2}\right)$$

$$= OA\left(aOA - bOB\sin\frac{C}{2} - cOC\sin\frac{B}{2}\right)$$

$$= 2R.OA\left(\sin A\frac{r}{\sin\frac{A}{2}} - \sin B\frac{r}{\sin\frac{B}{2}}\sin\frac{C}{2} - \sin C\frac{r}{\sin\frac{C}{2}}\sin\frac{B}{2}\right)$$

$$= 4R.OA.r\left(\cos\frac{A}{2} - \cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}\right)$$

$$= 4R.OA.r\left(\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{B+C}{2}\right) = 0$$

Vậy $\overrightarrow{OA} \perp \vec{v}$. Chứng minh tương tự ta cũng có $\overrightarrow{OB} \perp \vec{v}$. Nhưng O, A, B không thẳng hàng, do đó $\vec{v} = \vec{0}$. Với ý tưởng trên cũng dễ dàng đạt được lời giải của bài toán :

Gọi I là tâm đường tròn bàng tiếp góc ACB của ΔABC. Chứng minh $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} - c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Bài toán 3. Gọi K, E, F là hình chiếu vuông góc của trọng tâm G của ΔABC trên các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh $a^2\overrightarrow{GK} + b^2\overrightarrow{GE} + c^2\overrightarrow{GF} = \vec{0}$

Giải. Gọi AH, BM, CN là các đường cao của ΔABC. Áp dụng định lí Talét ta có:

$$a^2\overrightarrow{GK} + b^2\overrightarrow{GE} + c^2\overrightarrow{GF} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow a^2\overrightarrow{AH} + b^2\overrightarrow{BM} + c^2\overrightarrow{CN} = \vec{0}$$

Đặt $\vec{v} = a^2\overrightarrow{AH} + b^2\overrightarrow{BM} + c^2\overrightarrow{CN}$ Ta có:

$$\overrightarrow{AH}.\vec{v} = \overrightarrow{AH}(a^2\overrightarrow{AH} + b^2\overrightarrow{BM} + c^2\overrightarrow{CN}) =$$

$$= AH(a^2.AH + b^2.BM\cos(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BM}) + c^2.CN\cos(\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{AH}))$$

$$= AH.2R.2\text{dt}(ABC)(\sin A - \sin B\cos C - \sin C\cos B)$$

$$= AH.4R.\text{dt}(ABC)(\sin A - \sin(B+C)) = 0$$

Vậy $\overrightarrow{AH} \perp \vec{v}$. Chứng minh tương tự ta cũng có $\overrightarrow{BM} \perp \vec{v}$. Nhưng A, B, M không thẳng hàng nên $\vec{v} = \vec{0}$.

Bài toán 4: Cho M là một điểm tùy ý trong ΔABC. Chứng minh $\text{dt}(MBC)\overrightarrow{MA} + \text{dt}(MCA)\overrightarrow{MB} + \text{dt}(MAB)\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Giải. Kí hiệu các góc $\widehat{AMB} = M_3$, $\widehat{AMC} = M_2$, $\widehat{MBC} = M_1$

Đặt $\vec{v} = \text{dt}(MBC)\overrightarrow{MA} + \text{dt}(MCA)\overrightarrow{MB} + \text{dt}MAB\overrightarrow{MC}$.

Ta có: $\overrightarrow{MA}\,\vec{v} = \frac{1}{2}MA^2.MB.MC \times$

$$(\sin M_1 + \sin M_2\cos M_3 + \sin M_3\cos M_2)$$

$$= \frac{1}{2}MA^2.MB.MC(\sin M_1 + \sin(M_2+M_3))$$

$$= \frac{1}{2}MA^2.MB.MC(\sin M_1 + \sin(2\pi - M_1)) = 0$$

Vậy $\overrightarrow{MA} \perp \vec{v}$. Chứng minh tương tự ta cũng có $\overrightarrow{MB} \perp \vec{v}$. Nhưng A, B, M không thẳng hàng nên $\vec{v} = \vec{0}$.

Cũng bằng phương pháp này ta dễ dàng chứng minh được:

$$dt(NBC)\vec{NA} + dt(NCA)\vec{NB} - dt(NAB)\vec{NC} = \vec{0}$$

với N là điểm ở ngoài ΔABC và ở miền trong góc ACB.

Bài toán 5. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Chứng minh:

$$\sin 2A.\vec{OA} + \sin 2B.\vec{OB} + \sin 2C.\vec{OC} = \vec{0}$$

Giải. Đặt $\vec{v} = \sin 2A\vec{OA} + \sin 2B.\vec{OB} + \sin 2C.\vec{OC}$.

Ta có:

$$\vec{v}.\vec{OA} = R^2(\sin 2A + \sin 2B\cos(\vec{OA}, \vec{OB}) + \sin 2C\cos(\vec{OA}, \vec{OC}))$$

$$= R^2(\sin 2A + \sin 2B\cos 2C + \sin 2C\cos 2B)$$

$$= R^2(\sin 2A + \sin(2B+2C))$$

$$= R^2(\sin 2A + \sin 2(\pi - A)) = 0$$

Chú ý : Nếu ΔABC có một góc tù, bài toán vẫn đúng. Chứng minh tương tự ta cũng có $\vec{v}\vec{OB} = 0$. Nhưng A, B, O không thẳng hàng nên $\vec{v} = \vec{0}$.

Đến đây chúng ta đã rõ, việc sử dụng các tính chất đặc trưng của vec không để chứng minh đẳng thức véctơ $\vec{v} = \vec{0}$ là cố gắng chứng minh $\vec{v}$ có hai hướng phân biệt hoặc có modun bằng 0. Cái khó là tạo ra tình thế để $\vec{v}$ phải lộ rõ cái tính "ba phải" của nó. Điều thú vị bất ngờ là khi cái tính "ba phải" "thích chiều nào quay chiều đó" của véctơ $\vec{v}$ được khẳng định thì cả khối lượng công việc cần chứng minh đã được giải quyết xong . Bây giờ ta hãy xem thêm một tình huống nữa.

Bài toán 6. Cho ΔABC không vuông, H là trực tâm. Chứng minh:

$$\frac{a}{\cos A}\vec{HA} + \frac{b}{\cos B}\vec{HB} + \frac{c}{\cos C}\vec{HC} = \vec{0}$$

Giải.

Đặt $\vec{v} = \frac{a}{\cos A}\vec{HA} + \frac{b}{\cos B}\vec{HB} + \frac{c}{\cos C}\vec{HC}$

Bây giờ phải cố gắng chứng minh $\vec{v}$ có cái tính "ba phải". Ta thử chọn phương áng $\vec{v}\vec{BC}$ (để công việc đơn giản được chăng?).

$$\vec{v}\vec{BC} = \frac{b}{\cos B}\vec{HB}\,\vec{BC} + \frac{c}{\cos C}\vec{HC}\,\vec{BC} =$$

$$=2R.BC\left(\frac{\sin B}{\cos B}HB\cos(\vec{HB}, \vec{BC}) + \frac{\sin C}{\cos C}HC\cos(\vec{HC}, \vec{BC})\right)$$

$$=2R.BC\left(\frac{\sin B}{\cos B}HB(-\cos B_1) + \frac{\sin C}{\cos HC}\cos C_2\right)$$

$$=2R.BC\left(\frac{\sin B}{\cos B}HB(-\sin C) + \frac{\sin C}{\cos C}HC\sin B\right)$$

$$=2R.BC\sin C\sin B\left(\frac{HC}{\cos C} - \frac{HB}{\cos B}\right)$$

Vì ΔABC không vuông nên:

$$HB = \frac{HE}{\sin\widehat{HBC}} = \frac{HE}{\cos\widehat{HCB}}\; HC = \frac{HE}{\sin C_2} = \frac{HE}{\cos B}$$

Do đó $\frac{HC}{\cos C} - \frac{HB}{\cos B} = 0$

Vậy $\vec{v}.\vec{BC} = 0$. Lí luận tương tự ta cũng có kết luận $\vec{v}\vec{AC} = 0$. Mà A, B, C không thẳng hàng nên $\vec{v} = \vec{0}$. Ta cũng vui mừng nhận ra một kết luận mới:

$$\frac{HA}{\cos A} = \frac{HB}{\cos B} = \frac{HC}{\cos C} \qquad (*)$$

Ta cũng có thể chứng minh $\vec{v} = \vec{0}$ bằng cách đặt vấn đề $\vec{v}\vec{HA}$? Chắc là nhanh vì đã có kết luận (*). Thật vậy:

$$\vec{v}.\vec{HA} =$$

$$= HA\left(\frac{a}{\cos A}HA + \frac{b}{\cos B}HB\cos(\vec{HB}, \vec{HA}) + \frac{c}{\cos C}HC\cos(\vec{HC}, \vec{HA})\right) =$$

$$= HA.2R.k(\sin A - \sin B\cos C - \sin C\cos B)$$

$$= HA.2R.k(\sin A - \sin(B+C)) = 0$$

với $k = \frac{HA}{\cos A} = \frac{HB}{\cos B} = \frac{HC}{\cos C}$

Chứng minh tương tự ta cũng có $\vec{v}.\vec{HB} = \vec{0}$ mà H, B, A không thẳng hàng nên $\vec{v} = \vec{0}$.

Giải đáp "Tại sao lại bốn chúng ta"

Đứa con chưa biết đếm.

MAPLE và SỐ NGUYÊN TỐ

PHẠM HUY ĐIỂN - TẠ DUY PHƯỢNG
(Hà Nội)

Trong bài "MAPLE với toán học phổ thông" (Tạp chí THTT số 2 (248), 1998) chúng tôi đã giới thiệu với các bạn đôi nét về chương trình này. Trong bài viết này chúng tôi chỉ giới thiệu một trong những ứng dụng của MAPLE : *Kiểm tra một số giả thuyết về số nguyên tố*.

Ta biết rằng: bằng thuật toán Euclid có thể phân tích một số nguyên bất kì ra các thừa số nguyên tố, tức là viết được dưới dạng tích của các số nguyên tố. Tuy nhiên việc phân tích một số lớn ra thừa số nguyên tố (hoặc chứng tỏ nó là số nguyên tố) đòi hỏi khá nhiều thời gian, thậm chí là không thể thực hiện được nếu ta chỉ có bút và giấy, vì phải làm một số lớn phép tính chia. Với MAPLE, bạn chỉ cần một vài giây để làm việc đó bằng lệnh **ifactor**.

Thí dụ 1. Để phân tích 2 số 100000000000000001 và 100000000000000000001 bạn hãy vào chương trình Maple và dùng lệnh

|>ifactor (100000000000000001;

(11) (9090909090909091)

|>ifactor (100000000000000000001);

(73) (137) (1676321) (5964848081)

(dòng in nghiêng là kết quả).

Thí dụ này thú vị ở chỗ nó liên quan tới một câu hỏi được Giáo sư Lại Đức Thịnh nói đến trong báo THTT :"có bao nhiêu số nguyên tố dạng 10…01 với n chữ số 0?" Và Giáo sư cũng cho biết rằng hiện chưa có câu trả lời. Với MAPLE, bạn chỉ mất vài phút để có thể khẳng định rằng tất cả các số dạng trên với n từ 2 đến 44 đều là hợp số. Như vậy, trong 44 số đầu dạng trên chỉ có duy nhất một số nguyên tố là 101.

Thí dụ 2. Ta hãy cùng nhau kiểm tra giả thuyết: $A_n = p_2p_3\ldots p_n - 2$, trong đó p_k là số nguyên tố thứ k ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, …), là nguyên tố với mọi n. Giáo sư Lại Đức Thịnh viết rằng :"Bằng cách thử, ta thấy rằng các số A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 đều là số nguyên tố. Có lẽ thử với một vài giá trị nữa của n ta sẽ tìm được một hợp số. Tuy nhiên muốn kiểm tra A_8 cần làm 300 phép chia và kiểm tra A_9 cần 1300 phép chia, tức là mất *vài buổi làm tính* (Tuyển tập 30 năm tạp chí THTT, Nxb Giáo dục, 1997, trang 343). Với Maple ta sẽ được ngay điều tiên đoán của Giáo sư L.Đ. Thịnh mà chẳng tốn công sức gì. Thật vậy.

[>ifactor (3*5*7*11*13*17*19-2) ;

(4849843)

[>ifactor (3*5*7*11*13*17*19*23-2);

(111546433)

[> ifactor (3*5*7*11*13*17*19*23*29-2);

(43) (167) (450473)

Như vậy A_8, A_9 vẫn là số nguyên tố, nhưng A_{10} là hợp số. Hơn nữa, bạn hãy bỏ ra một vài phút để kiểm tra tiếp và sẽ thấy rằng trong 21 số đầu tiên (có dạng nói trên) thì $A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{11}, A_{13}, A_{16}, A_{20}$ là các số nguyên tố, còn lại là hợp số.

Thí dụ 3. Các số dạng 2^p-1, trong đó p là số nguyên tố được gọi là số Mersenne. Người ta đã tìm thấy khá nhiều số nguyên tố Mersenne: 2^2-1; 2^3-1; 2^5-1; 2^7-1; 2^{13}-1; 2^{17}-1; 2^{19}-1; 2^{31}-1; 2^{61} … Việc tìm ra số Mersenne được coi là rất khó trước đây. Các số Mersenne quan trọng ở chỗ nó liên quan mật thiết tới các vấn đề khác của số học như số hoàn chỉnh… Dùng MAPLE để thử với p = 521,607,1279,2203,2281 bạn sẽ được các số nguyên tố rất lớn thí dụ 2^{2281}-1 là một số nguyên tố gần với gần 7000 chữ số! Bạn hãy thử 2 ví dụ nhỏ:

[>ifactor (2^11-1);

(23) (89)

[>ifactor (2^521-1);

(68647976601306097149819007990813932172694353001433 4093 944634591855431833976560521225596406614545549772963113914808580371219879997166438125740282911150 51510

Thí dụ 4. Fecma khẳng định rằng: $2^{2^n} + 1$ là số nguyên tố với mọi n.Điều này đúng với n = 0, 1, 2, 3, 4. Tuy nhiên, năm 1732 Euler chỉ ra với n = 5 thì số Fecma là hợp số. Euler chắc cũng khá vất vả để tìm ra điều này, còn chúng ta thì chỉ cần chớp mắt một cái là thấy ngay

[>ifactor (2^(2^5)+1);

(641) (6700417)

Nhờ MAPLE ta còn biết với n = 6 thì số Fecma cũng là hợp số:

[ifactor (2^(2^6)+1) ;

(67280421310721) (274177)

(Xem tiếp trang 20)

MAN ĐỨC TÂN
(Trường phổ thông chuyên, tỉnh Gia Lai)

NGHIỆM DUY NHẤT LÀ... EM!

Đường tới tim em là đường định hướng
Dù uốn nhiều như đồ thị hàm sin
Anh mải mê tìm theo tọa độ trái tim
Bỗng lạc giữa khoảng tình em nơi đó...

Đôi mắt em chứa bao ẩn số!
Mà hàng mi nhẹ mở góc alpha...
Tóc em dài như dãy số đi xa
Môi hội tụ một nụ hoa bối rối ?

"Ôi! Anh ngốc !"... Yêu sao lời em nói!
Sinh nhật em, anh tặng trái "tròn xoay"
Đêm Nô-en, "hình chóp cụt" trên tay
Anh hóa cây thông, dâng trọn em, thổn thức...

Mãi mãi em ơi!
Phương trình cuộc đời dù chưa giải được
Nhưng anh tin rằng:
Nghiệm duy nhất là...
EM !

HÃY THAM GIA : TỪ ĐIỂN VUI

Có người nói :"Dân làm Toán hóm ra phết!". Nhìn đi, nhìn lại thấy cũng có vẻ đúng. Vậy thì tại sao chúng ta lại không xây dựng một cuốn từ điển vui về các thuật ngữ toán học nhỉ? Chẳng hạn "số nguyên tố: là những số thuộc dòng họ ích kỉ của những số nguyên dương". Đấy là nhìn vào định nghĩa "nghiêm chỉnh" của số nguyên tố với "tội danh": chỉ chia hết cho 1 và chính bản thân mình. Nhưng lại có thể nói :"Số nguyên tố là những viên gạch tốt để xây nên các số nguyên dương khác", bởi vì một số nguyên dương bất kì bao giờ cũng có thể viết dưới dạng tích các số nguyên tố!

Nào, các bạn hãy tham gia vào từ điển vui bằng cách gửi về các định nghĩa thật vui nhé! Bây giờ xin các bạn tham gia định nghĩa hai khái niệm :

1. Hình vuông
2. Phân số

Các bạn có thể "ra đề" cho mục này, nhưng lưu ý là phải kèm theo "đáp án vui" đấy.

LTN

Trả lời bạn đọc

Hỏi: Một số sách có ghi $0^0 = 0$, nhưng lại có sách viết 0^0 là không xác định. Vậy nên giải thích cho học sinh như thế nào ?

PHAN THANH HẢI
(Nghệ An)

Đáp: Rất thông cảm với nỗi "éo le" này của bạn vì sách hiện nay đôi khi "trống đánh xuôi, kèn thổi ngược". Khi định nghĩa $a^{\alpha} = 1$ thì phải có giả thiết $a \neq 0$ và khi nói đến $0^{\alpha} = 0$ thì phải có giả thiết $\alpha > 0$. Bạn cứ yên tâm khẳng định **0^0 là không có nghĩa**. Chúc bạn ... hài lòng !

Hỏi: Có sách của tác giả P.T.Q viết:

"Xét dãy số vô hạn: $a; -a; a; -a; \ldots$

Nếu các nhóm các số hạng theo kiểu:

$$S = (a - a) + (a - a) + \ldots \text{ thì } S = 0$$

Nếu nhóm các số hạng theo kiểu

$$S = a + (-a + a) + (-a + a) + \ldots \text{ thì } S = a$$

Nếu nhóm các số hạng theo kiểu

$S = a - (a - a + a - \ldots)$ thì $S = a - S$ nên $S = \dfrac{a}{2}$.

Vậy S có 3 giá trị $0, a, \dfrac{a}{2}$".

Như vậy $0 = a = \dfrac{a}{2}$ hay sao?

Thầy giáo em bảo: Làm gì viết được như thế ! Vậy em phải hiểu như thế nào?

NGUYỄN THANH TÙNG
($10A_1$, PTTHCB Trần Quốc Tuấn, Quảng Ngãi)

Đáp: Vấn đề này không nên để các em học sinh phổ thông phải băn khoăn đến mức nghi ngờ cả tác giả và thầy giáo của mình. Điều này chỉ được xem xét một cách thấu đáo ở lí thuyết chuỗi khi nói đến tính hội tụ và tính phân kì. Em có thể chờ được chứ ? Trả lời em... chỉ sợ làm em rối thêm.

Hỏi: Bài toán :"Cho hàm số $f : X \to Y$ được mô tả bởi bảng sau:

x	-3	-2	$-\frac{1}{2}$	0	1
$f(x)$	6	4	1	0	-2

a) Tìm tập xác định của hàm số.
b) Hàm số có thể được cho bởi công thức nào?
c) Vẽ đồ thị của hàm số f"

Giải đáp bài Trò Chơi THÁP BA MÀU

Chúng ta hãy di chuyển các đĩa tròn như sau:

	Cột A	Cột B	Cột C	Cột D
Ban đầu	987654321	0	0	0
Lần 1	98765432	1	0	0
Lần 2	9876543	1	2	0
Lần 3	987654	1	2	3
Lần 4	987654	0	2	31
Lần 5	98765	4	2	31
Lần 6	98765	42	0	31
Lần 7	9876	42	5	31
Lần 8	9876	421	5	3
Lần 9	9876	421	53	0
Lần 10	987	421	53	6
Lần 11	987	42	53	61
Lần 12	987	4	532	61
Lần 13	987	4	5321	6
Lần 14	987	0	5321	64
Lần 15	98	7	5321	64
Lần 16	98	74	5321	6
Lần 17	98	74	532	61
Lần 18	982	74	53	61
Lần 19	982	743	5	61
Lần 20	98	7432	5	61
Lần 21	98	74321	5	6
Lần 22	98	74321	0	65
Lần 23	9	74321	8	65
Lần 24	95	74321	8	6
Lần 25	95	74321	86	0
Lần 26	9	74321	865	0
Lần 27	0	74321	865	9
Lần 28	5	74321	86	9
Lần 29	5	74321	8	96
Lần 30	0	74321	85	96
Lần 31	1	7432	85	96
Lần 32	1	743	852	96
Lần 33	1	74	852	963
Lần 34	0	741	852	963

Ta thấy 741 của cột *B* màu đỏ
852 của cột *C* màu xanh
963 của cột *D* màu vàng
Bạn có thể mở rộng kết quả này không.

VÕ KIM HUỆ

CHIA ĐÔI ĐOẠN THẲNG

Chỉ bằng compa hãy xác định trung điểm của đoạn thẳng *AB* cho trước.

VŨ HOÀNG THÁI
(Hà Nội)

☞ ...Bài toán này đã làm cho chúng em tranh luận rất nhiều về lời giải. Chúng em xin gửi tất cả các lời giải đến tòa soạn và mong các cô chú giải đáp để chúng em yên tâm hơn.

Nhóm học sinh lớp 7
THCS Lê Quý Đôn - TP Hồ Chí Minh

Đáp: Tập xác định của f đã rõ ở trong bảng, đó là $X = \{-3; -2; -\frac{1}{2}; 0; 1\}$. Hàm số có thể cho bởi một một công thức $y = -2x$. Nếu cho bởi nhiều công thức thì đáp án sẽ rất phong phú như các em đã làm. Đồ thị của hàm số này chỉ là tập hợp gồm 5 điểm trên mặt phẳng chứ không thể là một đường thẳng. Chúc các em yên tâm và học giỏi.

Hỏi: Có thể mua các số tạp chí của những năm trước đây được không?

NGUYỄN VIẾT TRẦN DŨNG
(7/3 Kim Long, Huế)

Đáp: Tòa soạn thường xuyên được hỏi với nội dung trên qua điện thoại và thư. Rất cám ơn sự quan tâm, yêu thích tạp chí của các bạn. Tuy nhiên, các số tạp chí của những năm trước đều không còn để bán. Một số trường hợp đặc biệt, chỉ có thể giúp các bạn photocopy lại thôi! Ngoài ra, các bạn có thể tìm hiểu những nội dung bài vở của thời gian trước qua cuốn sách "Tuyển tập 30 năm Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ" đã phát hành từ tháng 7 năm 1997 và sắp tái bản.

NHẮN TIN.

■ Bạn Trần Nam Dũng (12CT, PTTH Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An): Ý kiến của bạn về lời giải bài toán 58 trong Tuyển tập rất tốt. Trong lần tái bản tới, lời giải sẽ được sửa chữa lại. Cám ơn bạn.

■ Bạn Nguyễn Văn Bằng (9B, THCS Nam An, Nam Trực, Nam Định): Hãy thử bình tĩnh khai triển $(1+a)(1+b)(1+c)$ cho thật đúng sẽ thấy câu trả lời.

■ Bạn Nguyễn Công Hoan (10A, PTTH Nguyễn Huệ, Hà Đông, Hà Tây): Nhận xét của bạn về lời giải của bạn Kiên trong bài T9/240 là rất đúng. Việc nhân từng vế của 2 bất đẳng thức dễ dẫn đến sai lầm khi có những vế nhân giá trị âm. Xin cám ơn.

L.T.N

ISSN : 0866 - 0835
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT52M8

Sắp chữ tại Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 1998

Giá : 3.000đ
Ba nghìn đồng