https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

8 2013
Số 434

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 50
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

CHÚC MỪNG ĐOÀN VIỆT NAM TẠI KÌ THI OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ LẦN THỨ 54

KÌ THI OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ

LẦN THỨ 54 - NĂM 2013

NGUYỄN KHẮC MINH

(Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD, Bộ Giáo dục và Đào tạo)

1. ĐÔI NÉT TỔNG QUAN

Kì thi Olympic Toán học Quốc tế lần thứ 54 năm 2013 (IMO 2013) được tổ chức từ ngày 18/7 đến ngày 28/7/2013, tại thành phố Santa Marta - một thành phố nằm trên bờ biển Caribe – thuộc nước Cộng hòa Colombia. Tham dự có 528 học sinh thuộc 97 quốc gia và vùng lãnh thổ trên toàn thế giới. Đoàn Việt Nam gồm 6 học sinh: *Đinh Lê Công* (lớp 12, THPT chuyên Đại học Vinh), *Võ Anh Đức* (lớp 12, THPT chuyên Hà Tĩnh), *Phạm Tuấn Huy* (lớp 11, PTNK - ĐHQG TP. Hồ Chí Minh), *Hoàng Đỗ Kiên* (lớp 12, THPT chuyên Vĩnh Phúc), *Trần Đăng Phúc* (lớp 12, THPT chuyên KHTN - ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội) và *Cấn Trần Thành Trung* (lớp 12, PTNK - ĐHQG TP. Hồ Chí Minh). Đoàn do TS. *Lê Bá Khánh Trình* (ĐHKHTN - ĐHQG TP. Hồ Chí Minh) làm Trưởng đoàn và TS. *Lê Anh Vinh* (ĐH Giáo dục - ĐHQG Hà Nội) làm Phó Trưởng đoàn; người viết bài này tham gia Đoàn với tư cách Quan sát viên A (Quan sát viên đi cùng Trưởng đoàn).

Lễ Khai mạc được tổ chức tại phòng tập thể thao của một trường đại học; tới dự Lễ có Bà Bộ trưởng Bộ Giáo dục Colombia. Lễ Bế mạc được tổ chức ngoài trời, trên khoảng sân trước Nhà tưởng niệm Simon Bolivar - một vị anh hùng dân tộc của Khu vực Nam Mỹ trong Vườn Thực vật của Thành phố Santa Marta; tại buổi Lễ có phát băng ghi hình lời chúc mừng của Tổng thống Colombia.

2. ĐỀ THI

Đề thi IMO 2013 được tổ chức soạn thảo tại TP. Barranquilla, nằm cách TP. Santa Marta khoảng 100km. Các Trưởng đoàn bàn thảo kĩ về cấu trúc đề, trước khi tuyển chọn các bài toán cho đề thi. Hội đồng Quốc tế đã biểu quyết thông qua đề nghị của Ngài *Geof Smith*, Trưởng đoàn Anh và đồng thời là thành viên Ban Tư vấn các kì IMO (IMOAB). Về cấu trúc của đề thi IMO 2013: Bốn bài toán với số thứ tự 1, 2, 4, 5 của đề thi phải thuộc đủ 4 phân môn Đại số, Tổ hợp, Hình học và Số học (trong đó có 2 bài ở mức độ dễ và 2 bài ở mức độ trung bình). Căn cứ 4 bài toán đã được chọn, đề xuất và biểu quyết chọn ra một cặp bài khó với số thứ tự 3, 6 cho đề thi. Dưới đây là Đề thi IMO 2013 (bản Tiếng Việt).

NGÀY THI THỨ NHẤT (23/7/2013)

Bài 1. Chứng minh rằng với hai số nguyên dương k và n tùy ý, luôn tồn tại k số nguyên dương $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (không nhất thiết đôi một khác nhau) sao cho

$$1+\frac{2^k-1}{n}=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{m_k}\right).$$

Bài 2. Một tập hợp gồm đúng 4027 điểm trên mặt phẳng được gọi là tập *Colombian* nếu không có ba điểm nào trong các điểm đó thẳng hàng, đồng thời có 2013 điểm được tô màu đỏ và 2014 điểm còn lại được tô màu xanh. Mặt phẳng được phân chia thành các miền khi ta kẻ một số đường thẳng. Một cách kẻ một số đường thẳng được gọi là *cách kẻ tốt* đối với tập *Colombia* cho trước nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn

1) Không có đường thẳng nào đi qua dù chỉ một điểm thuộc tập hợp đó;

2) Không miền nào chứa cả điểm màu đỏ và điểm màu xanh.

Tìm số k nhỏ nhất sao cho với tập *Colombia* tùy ý gồm đúng 4027 điểm, tồn tại một cách kẻ k đường thẳng là *cách kẻ tốt*.

Bài 3. Đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC tiếp xúc cạnh BC tại điểm A_1. Điểm B_1 trên CA và điểm C_1 trên AB được định

NGUYỄN THÁY-VN

nghĩa một cách tương tự, bằng cách xét đường tròn bàng tiếp góc B và góc C, tương ứng. Giả sử tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác vuông.

Đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC là đường tròn tiếp xúc với đoạn thẳng BC, phần kéo dài về phía B của cạnh AB và phần kéo dài về phía C của cạnh AC. Các đường tròn bàng tiếp góc B và góc C được định nghĩa một cách tương tự.

NGÀY THI THỨ HAI (24/7/2013)

Bài 4. Cho tam giác nhọn ABC với trực tâm H. Cho W là một điểm tùy ý trên cạnh BC, khác với các điểm B và C. Các điểm M và N tương ứng là chân các đường cao hạ từ B và C. Kí hiệu ω_1 là đường tròn ngoại tiếp tam giác BWN, và gọi X là điểm trên ω_1 sao cho WX là đường kính của ω_1. Tương tự, kí hiệu ω_2 là đường tròn ngoại tiếp tam giác CWM và gọi Y là điểm trên ω_2 sao cho WY là đường kính của ω_2. Chứng minh rằng các điểm X, Y và H thẳng hàng.

Bài 5. Kí hiệu $\mathbb{Q}_{>0}$ là tập hợp các số hữu tỉ dương. Cho $f:\mathbb{Q}_{>0}\to\mathbb{R}$ là hàm số thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) Với mọi $x,y\in\mathbb{Q}_{>0}$, ta có $f(x)f(y)\geq f(xy)$;

(ii) Với mọi $x,y\in\mathbb{Q}_{>0}$, ta có $f(x+y)\geq f(x)+f(y)$;

(iii) Tồn tại số hữu tỉ $a>1$ sao cho $f(a)=a$.

Chứng minh rằng $f(x)=x$ với mọi $x\in\mathbb{Q}_{>0}$.

Bài 6. Cho số nguyên dương n và lấy $n+1$ điểm nằm cách đều nhau trên đường tròn đó. Xét tất cả các cách ghi các số $0, 1, \ldots, n$ lên các điểm đã lấy sao cho trong mỗi cách ghi, tại mỗi điểm được ghi một số và mỗi số được ghi đúng một lần. Hai cách ghi được coi là như nhau nếu cách ghi này có thể nhận được từ cách ghi kia nhờ một phép quay quanh tâm đường tròn. Một cách ghi được gọi là *đẹp* nếu với bốn số tùy ý $a<b<c<d$ mà $a+d=b+c$, dây cung nối hai điểm được ghi a và d không cắt dây cung nối hai điểm được ghi b và c.

Kí hiệu M là số các cách ghi đẹp và kí hiệu N là số các cặp có thứ tự (x, y) các số tự nhiên thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x+y\leq n$ và ƯCLN$(x, y)=1$. Chứng minh rằng $M=N+1$.

3. KẾT QUẢ

Căn cứ kết quả chấm thi và Quy chế IMO 2013, Hội đồng Quốc tế đã biểu quyết thông qua ngưỡng điểm cho các loại Huy chương như sau:

- Huy chương Vàng (HCV): Từ 31 đến 42 điểm;
- Huy chương Bạc (HCB): Từ 24 đến 30 điểm;
- Huy chương Đồng (HCĐ): Từ 15 đến 23 điểm.

Theo đó, tại IMO 2013 có 278 thí sinh được trao Huy chương, gồm 45 thí sinh được trao HCV, 92 thí sinh được trao HCB và 141 thí sinh được trao HCĐ. Sau đây là kết quả các thí sinh của Đoàn Việt Nam

STT	Họ và Tên	Điểm thi							HC
		B1	B2	B3	B4	B5	B6	Tổng	
1	*Đinh Lê Công*	7	7	2	7	7	0	30	Bạc
2	*Võ Anh Đức*	7	4	7	7	7	2	34	Vàng
3	*Phạm Tuấn Huy*	7	7	5	7	7	0	33	Vàng
4	*Hoàng Đỗ Kiên*	7	0	3	7	7	0	24	Bạc
5	*Trần Đăng Phúc*	7	5	0	7	7	2	28	Bạc
6	*Cấn Trần Thành Trung*	7	7	3	7	6	1	31	Vàng

Với tổng điểm 180, Đoàn *Việt Nam* đứng thứ 7 trong Bảng tổng sắp không chính thức của IMO 2013, sau các Đoàn: *Trung Quốc* (208 điểm), *Hàn Quốc* (204 điểm), *Hoa Kỳ* (190 điểm), *CHLB Nga* (187 điểm), *CHDCND Triều Tiên* (184 điểm) và *Singapore* (182 điểm). Xét theo số HCV, Đoàn *Việt Nam* đứng ở vị trí thứ 5, sau các Đoàn: *Trung Quốc* (5 HCV), *Hàn Quốc* (5 HCV), *Hoa Kỳ* (4 HCV) và *CHLB Nga* (4 HCV).

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

THIẾT LẬP CÁC BẤT ĐẲNG THỨC TỪ CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC VÀ ÁP DỤNG

CHU TUẤN
(GV THCS Nguyễn Thượng Hiền, Hà Nội)

Bài viết này chúng tôi xin trình bày một số bất đẳng thức (BĐT) được thiết lập từ các hằng đẳng thức đáng nhớ trong SGK Toán 8, với các bước biến đổi tự nhiên, nhuần nhuyễn và ngắn gọn.

Thu được các hệ quả (HQ) là các BĐT dạng $(A(x))^2+m\ge m, \forall A(x)$. Các HQ này có vai trò là các BĐT trung gian làm công cụ để sáng tạo và chứng minh nhiều BĐT khác nhau.

I. THIẾT LẬP CÁC BẤT ĐẲNG THỨC TỪ CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC

1) *Từ các hằng đẳng thức* $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ và $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, ta có các hệ quả

HQ 1. $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab\ge 2ab.$

HQ 2. $2(a^2+b^2)=(a+b)^2+(a-b)^2\ge(a+b)^2.$

HQ 3. $4ab=(a+b)^2-(a-b)^2\le(a+b)^2.$

HQ 4. $m(a^2+b^2)+nab=\frac{2m+n}{4}(a+b)^2+\frac{2m-n}{4}(a-b)^2.$

Biến đổi vế trái bằng cách áp dụng HQ 2 và HQ 3 ta được

$$\text{VT}=\frac{m}{2}(a+b)^2+\frac{m}{2}(a-b)^2+\frac{n}{4}(a+b)^2-\frac{n}{4}(a-b)^2$$
$$=\frac{2m+n}{4}(a+b)^2+\frac{2m-n}{4}(a-b)^2=\text{VP}.$$

HQ 5. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2\ge(ax+by)^2.$

HQ 6. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}+\frac{4}{a+b}\ge\frac{4}{a+b}$, với mọi $a>0, b>0$.

HQ 7. $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=\frac{(bx-ay)^2}{ab(a+b)}+\frac{(x+y)^2}{a+b}\ge\frac{(x+y)^2}{a+b}$, với mọi $a>0, b>0$.

HQ 8. $a^3+b^3=(a+b)(a-b)^2+ab(a+b)\ge ab(a+b)$, với mọi $a\ge 0,\ b\ge 0$.

2. *Từ các hằng đẳng thức* $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ và $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$, thu được

HQ 9. $a^2+b^2+c^2=\frac{1}{2}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)+(ab+bc+ca)\ge ab+bc+ca.$

HQ 10. $3(a^2+b^2+c^2)=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+(a+b+c)^2\ge(a+b+c)^2.$

HQ11. $(a+b+c)^2=\frac{1}{2}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)+3(ab+bc+ca)\ge 3(ab+bc+ca).$

HQ 12. $(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c).$

HQ 13. $a^3+b^3+c^3=\frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)+3abc\ge 3abc$, với mọi $a\ge 0,\ b\ge 0,\ c\ge 0$.

HQ 14. $(a+b+c)(ab+bc+ca)=9abc+a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\ge 9abc, \forall a\ge 0, b\ge 0, c\ge 0.$

HQ 15. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ca}\right)+\frac{9}{a+b+c}\ge\frac{9}{a+b+c}, \forall a\ge 0, b\ge 0, c\ge 0.$

HQ 16. Với $a>0,\ b>0,\ c>0$ ta có

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=\frac{(ay-bx)^2}{ab(a+b+c)}+\frac{(bz-cy)^2}{bc(a+b+c)}$$

$$+\frac{(cx-az)^2}{ca(a+b+c)}+\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}\ge\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}.$$

II. ÁP DỤNG CÁC HỆ QUẢ TRÊN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

★Thí dụ 1. *Chứng minh các bất đẳng thức*

a) $x^4+y^4+z^2\ge 2\sqrt{2}xyz, \forall x>0,\ y>0,\ z>0.$

b) $\dfrac{x^2}{y-1}+\dfrac{y^2}{x-1}\ge 8, \forall x>1,\ y>1.$

Lời giải. a) Áp dụng HQ 1, ta có

$$\text{VT}=(x^2-y^2)^2+\left(\sqrt{2}xy-z\right)^2+2\sqrt{2}xyz\ge 2\sqrt{2}xyz.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\sqrt{2}x^2=\sqrt{2}y^2=z.$

b) Áp dụng HQ 3, ta có

$$\text{VT}=\frac{((x-1)+1)^2}{y-1}+\frac{((y-1)+1)^2}{x-1}$$

$$\ge 4\left(\frac{x-1}{y-1}+\frac{y-1}{x-1}\right)\ge 8 \text{ (do HQ 1).}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=2.$ ❐

★Thí dụ 2. *Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

Lời giải. Áp dụng HQ 2, ta có

$$\left(\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}\right)^2\le 2(a+b-c+b+c-a)=4b$$

suy ra $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}\le 2\sqrt{b}.$ Tương tự

$$\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le 2\sqrt{c};$$

$$\sqrt{c+a-b}+\sqrt{a+b-c}\le 2\sqrt{a}.$$

Cộng theo vế các BĐT trên ta được đpcm. đẳng thức xảy ra khi $a=b=c.$ ❐

★Thí dụ 3. *Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c, d ta có*

$$\frac{a+c}{a+b}+\frac{b+d}{b+c}+\frac{c+a}{c+d}+\frac{d+b}{d+a}\ge 4.$$

Lời giải. Biến đổi

$$\text{VT}=(a+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+d}\right)+(b+d)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a}\right).$$

Áp dụng HQ 6, ta được

$$\text{VT}\ge 4\left(\frac{a+c}{a+b+c+d}+\frac{b+d}{a+b+c+d}\right)=4.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=d.$ ❐

★Thí dụ 4. *Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b ta có*

$$\sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}\ge\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

Lời giải. Biến đổi kết luận bằng cách nhân hai vế với $\sqrt[3]{ab}$ được $\sqrt[3]{2(a+b)^2}\ge\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}.$

Đặt $\sqrt[3]{a}=x, \sqrt[3]{b}=y$, $(x>0, y>0)$. BĐT trên trở thành $2(x^3+y^3)^2\ge(x^2+y^2)^3$. Áp dụng HQ 7, ta có

$$x^3+y^3=\frac{(x^2)^2}{x}+\frac{(y^2)^2}{y}\ge\frac{(x^2+y^2)^2}{x+y}$$

$$\Rightarrow 2(x^3+y^3)^2\ge(x^2+y^2)^3\frac{2(x^2+y^2)}{(x+y)^2}.$$

Áp dụng HQ 2, ta được

$$2(x^2+y^2)\ge(x+y)^2\Rightarrow\frac{2(x^2+y^2)}{(x+y)^2}\ge 1.$$

Suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra khi $a=b.$ ❐

★Thí dụ 5. *Chứng minh rằng*

$$a^3+b^3+c^3\ge a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b},$$

trong đó a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $abc=2$.

Lời giải. Áp dụng HQ 8, ta có

$a^3+b^3\ge ab(a+b);\ b^3+c^3\ge bc(b+c);$

$c^3+a^3\ge ca(c+a).$

Cộng theo vế các BĐT trên được

$$a^3+b^3+c^3\ge\frac{1}{2}\left(a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\right)\quad(1)$$

Áp dụng HQ 10 vào vế phải của (1), ta có

$$\frac{1}{2}\left(a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\right)$$

$$\geq \frac{1}{6}\left(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}\right)^2 \quad (2)$$

Áp dụng HQ 13 vào vế phải của (2) thu được

$$a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{abc\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq 3\sqrt[3]{2\sqrt{8abc}} = 6 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\sqrt[3]{2}$. □

★ Thí dụ 6. *Chứng minh rằng*

$$xyz \geq 3(x+y+z),$$

trong đó x, y, z là các số dương thỏa mãn điều kiện $xyz \geq xy+yz+zx$.

Lời giải. Theo giả thiết và từ HQ 12, ta có

$$(xyz)^2 \geq (xy+yz+zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z)$$

suy ra $xyz \geq 3(x+y+z)$.

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=3$. □

★ Thí dụ 7. *Chứng minh rằng*

$$a^2+b^2+c^2 \geq \sqrt{3}abc,$$

trong đó a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c \geq abc$.

Lời giải. BĐT cần chứng minh tương đương với $(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3(abc)^2$.

Áp dụng các HQ 9, HQ 12 kết hợp với giả thiết, ta có

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

suy ra $(a^2+b^2+c^2)^2 \geq (ab+bc+ca)^2$

$$\geq 3abc(a+b+c) \geq 3(abc)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{3}$. □

★ Thí dụ 8. *Chứng minh rằng*

$$ab+bc+ca \geq 9(a+b+c),$$

trong đó a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=\sqrt{abc}$.

Lời giải. Áp dụng HQ 14, kết hợp với $a+b+c=\sqrt{abc}$, ta có

$$(ab+bc+ca)(a+b+c) \geq 9abc = 9(a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow ab+bc+ca \geq 9(a+b+c).$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{3}$. □

★ Thí dụ 9. *Chứng minh rằng*

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc} \leq 1,$$

trong đó a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$.

Lời giải. Biến đổi kết luận bằng cách thay hằng số 1 bằng $(a+b+c)^2$, ta được

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc} \leq (a+b+c)^2$$

$$= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow (ab+bc+ca)^2 \geq 3abc.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$. □

★ Thí dụ 10. *Chứng minh rằng*

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq xyz + \frac{3}{4}\left|(x-y)(y-z)(z-x)\right|,$$

$\forall x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0.$

Lời giải. Ta có

$$a^3+b^3+c^3 = \frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)+3abc$$

BĐT cần chứng minh trở thành

$$\frac{(x+y+z)\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right)}{6}$$

$$\geq \frac{3}{4}\left|(x-y)(y-z)(z-x)\right|.$$

Áp dụng HQ 13 cho hai bộ, mỗi bộ ba số dương ta có

$$2(x+y+z) = (x+y)+(y+z)+(z+x)$$

$$\geq |x-y|+|y-z|+|z-x|$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\left|(x-y)(y-z)(z-x)\right|} \quad (1)$$

và $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$

$$\geq 3\sqrt[3]{(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2} \quad (2)$$

Nhân theo vế của (1) với (2) thu được đpcm. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z$. □

MỘT CÁCH GIẢI KHÁC CHO CÂU 3 ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A - A1 NĂM 2013

CAO NGỌC TOẢN
(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên - Huế)

Trong đề thi tuyển sinh Đại học năm 2013 Khối A-A_1 có **Câu 3**:

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y \quad (1)\\ x^2+2x(y-1)+y^2-6y+1=0 \quad (2)\end{cases};(x,y\in\mathbb{R})$$

Đáp án Bộ Giáo dục và Đào tạo trong lời giải có sử dụng công cụ đạo hàm. Sau đây là hướng giải khác chỉ dùng kiến thức của THCS.

ĐK $x\ge 1$.

PT (2) $\Leftrightarrow 4y=(x+y-1)^2$ nên $y\ge 0$

PT (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x+1}-\sqrt{y^4+2}=\sqrt[4]{y^4}-\sqrt[4]{x-1}$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1-y^4-2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y^4+2}}=\frac{y^4-x+1}{(\sqrt{y^4}+\sqrt{x-1})(\sqrt[4]{y^2}+\sqrt[4]{x-1})}$$

$$\Leftrightarrow (y^4-x+1)\left(\frac{1}{(\sqrt{y^4}+\sqrt{x-1})(\sqrt[4]{y^4}+\sqrt[4]{x-1})}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y^4+2}}\right)=0 \Leftrightarrow x=y^4+1,$$

vì $\dfrac{1}{(\sqrt{y^4}+\sqrt{x-1})(\sqrt[4]{y^4}+\sqrt[4]{x-1})}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y^4+2}}>0.$

Thay $x=y^4+1$ vào $4y=(x+y-1)^2$ ta có

$$4y=(y^4+y)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0\\ y^7+2y^4+y=4 \quad (3)\end{array}\right.$$

* Nếu $0<y<1$ thì $y^7+2y^4+y<4 \Rightarrow$ PT (3) vô nghiệm.

* Nếu $y>1$ thì $y^7+2y^4+y>4 \Rightarrow$ PT (3) vô nghiệm.

Với $y=1$ là nghiệm duy nhất của PT (3).

Khi $y=0\Rightarrow x=1$; khi $y=1\Rightarrow x=2$. Vậy hệ PT có hai nghiệm $(x\,;y)$ là (1;0), (2;1). ❐

★ **Thí dụ 11.** *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P=\dfrac{1}{a^2(b+c)}+\dfrac{1}{b^2(c+a)}+\dfrac{1}{c^2(a+b)}$, *trong đó a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện* $abc=1$.

Lời giải. Thay hằng số 1 bằng $a^2b^2c^2$, ta được $P=\dfrac{(bc)^2}{b+c}+\dfrac{(ca)^2}{c+a}+\dfrac{(ab)^2}{a+b}$.

Áp dụng các HQ16, HQ 12 kết hợp với $abc=1$, ta được

$$P\ge\frac{(ab+bc+ca)^2}{2(a+b+c)}\ge\frac{3abc(a+b+c)}{2(a+b+c)}=\frac{3}{2};$$

$P=\dfrac{3}{2}$ khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Vậy $\min P=\dfrac{3}{2}$ đạt được tại $a=b=c=1$. ❐

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng

$$1+\frac{3}{a+b+c}\ge\frac{6}{ab+bc+ca},\forall a,b,c>0,\ abc=1.$$

2. Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương thì

$$a^3+b^3+c^3\ge a+b+c\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

3. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge a^2+b^2+c^2,\forall a,b,c>0;a+b+c=3.$$

4. Chứng minh rằng

$$\frac{27}{4}(x+y)(y+z)(z+x)\ge\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}\right)^2$$
$$\ge 6\sqrt{3},\forall x,y,z>0;xy+yz+zx=1.$$

5. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{2+4a}+\frac{1}{3+9b}+\frac{1}{6+36c}.$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN - ĐHQG HÀ NỘI
NĂM HỌC 2013-2014

VÒNG 1 *(Thời gian làm bài 120 phút)*
(Dùng cho mọi thí sinh thi vào trường THPT chuyên KHTN- ĐHQG Hà Nội)

Câu I. (3 *điểm*)

1) Giải phương trình $\sqrt{3x+1}+\sqrt{2-x}=3$.

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{2} \\ \dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}\left(x+\dfrac{1}{y}\right)=xy+\dfrac{1}{xy}. \end{cases}$$

Câu II. (3 *điểm*)

1) Với a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn đẳng thức $(a+b)(b+c)(c+a)=8abc$.

Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}=\frac{3}{4}+\frac{ab}{(a+b)(b+c)}+\frac{bc}{(b+c)(c+a)}+\frac{ca}{(c+a)(a+b)}.$$

2) Có bao nhiêu số nguyên dương có 5 chữ số $\overline{abcde}$ sao cho $\overline{abc}-(10d+e)$ chia hết cho 101?

Câu III. (3 *điểm*)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Đường phân giác của góc BAC cắt (O) tại điểm D khác A. Gọi M là trung điểm của AD và E là điểm đối xứng với D qua tâm O. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM cắt đoạn thẳng AC tại điểm F khác A. Chứng minh rằng

1) Tam giác BDM và tam giác BCF đồng dạng.

2) EF vuông góc với AC.

Câu IV. (1 *điểm*)

Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc+bcd+cda+dab=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=4(a^3+b^3+c^3)+9d^3.$$

VÒNG 2 *(Thời gian làm bài 150 phút)*
(Dùng cho thí sinh thi vào lớp chuyên Toán và lớp chuyên Tin)

Câu I. (3 *điểm*)

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3=1+y-x+xy \\ 7xy+y-x=7. \end{cases}$

2) Giải phương trình

$$x+3+\sqrt{1-x^2}=3\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}.$$

Câu II. (3 *điểm*)

1) Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn

$$5x^2+8y^2=20412.$$

2) Với x, y là các số thực thỏa mãn $x+y\le 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\sqrt{1+x^2y^2}.$$

Câu III. (3 *điểm*). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H. Gọi P là điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC (P khác B, C và H) và nằm trong tam giác ABC. PB cắt (O) tại M khác B, PC cắt (O) tại N khác C. BM cắt AC tại E, CN cắt AB tại F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AME và đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF cắt nhau tại Q khác A.

1) Chứng minh rằng ba điểm M, N, Q thẳng hàng.

2) Giả sử AP là phân giác góc MAN. Chứng minh rằng khi đó PQ đi qua trung điểm của BC.

Câu IV. (1 *điểm*). Giả sử dãy số thực có thứ tự $x_1\le x_2\le\ldots\le x_{192}$ thỏa mãn các điều kiện $x_1+x_2+\ldots+x_{192}=0$ và $|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_{192}|=2013$.

Chứng minh rằng $x_{192}-x_1\ge\dfrac{2013}{96}$.

NGUYỄN VŨ LƯƠNG - PHẠM VĂN HÙNG
(*GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội*) giới thiệu

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI

NĂM HỌC 2013-2014

(Đề thi đăng trên TH&TT số 433, tháng 7 năm 2013)

VÒNG 1

Câu 1. 1) $Q=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3\sqrt{a}(a\sqrt{a}+b\sqrt{b})}+\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{a-b}$

$$=\frac{3\sqrt{a}(a-\sqrt{ab}+b)}{3\sqrt{a}(a\sqrt{a}+b\sqrt{b})}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=0.$$

2) Từ $a+b+c=0\Rightarrow a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$

$\Rightarrow a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

$=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c))$.

Vì $a+b+c=0$ nên suy ra

$$a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

$\Rightarrow 2(a^4+b^4+c^4)=(a^2+b^2+c^2)^2$ (đpcm).

Câu 2. 1) PT hoành độ giao điểm của (d) và (P) là $x^2+mx-\dfrac{1}{2m^2}=0$ có $\Delta=m^2+\dfrac{2}{m^2}>0$, $\forall m\neq 0$, suy ra điều cần chứng minh.

2) Do $A(x_1;y_1), B(x_2,;y_2)\in(P)$ nên

$y_1^2+y_2^2=x_1^4+x_2^4=\left((x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right)^2-2x_1^2x_2^2$

$=m^4+\dfrac{1}{2m^4}+2\geq 2\sqrt{m^4.\dfrac{1}{2m^4}}+2=\sqrt{2}+2.$

Vậy $\min(y_1^2+y_2^2)=2+\sqrt{2}$ khi $m=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 3. Giả sử x_1 là nghiệm chung của hai PT $x^2+ax+1=0$ (1); $x^2+bx+c=0$ (2) (do $a\neq b$). x_2 là nghiệm chung của hai PT

$$x^2+x+a=0 \quad (3);\ x^2+cx+b=0 \quad (4)$$

Do $a\neq b$ tìm được $x_1=\dfrac{c-1}{a-b}, x_2=\dfrac{a-b}{c-1}\Rightarrow x_1x_2=1$.

Theo định lí Viète suy ra x_2 là nghiệm của phương trình (1).

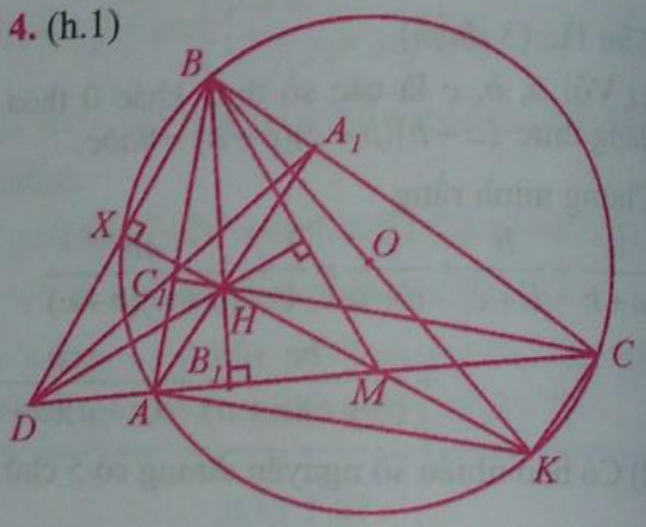
Do đó $\begin{cases}x_2^2+ax_2+1=0\\ x_2^2+x_2+a=0\end{cases}\Rightarrow(a-1)(x_2-1)=0.$

Nếu $a=1$, thay vào PT (1) được $x^2+x+1=0$, PT này vô nghiệm (loại).

Với $x_2=1$, thay vào các PT (3) và (4) ta được

$\begin{cases}2+a=0\\ 1+b+c=0\end{cases}\Rightarrow a+b+c=-3$ (đpcm).

Câu 4. (h.1)



Hình 1

1) Do $B, X, A, C\in(O)$ nên $DX.DB=DA.DC$.

Dễ thấy A_1, C_1, A, C thuộc đường tròn đường kính AC nên $DA.DC=DC_1.DA_1$.

Suy ra $DX.DB=DC_1.DA_1$.

2) Từ 1) suy ra X thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác BA_1C_1 đường kính BH nên $HX\perp XB$. Gọi $XH\cap(O)=K$ thì BK là đường kính của đường tròn (O) nên $KC\perp BC$, mà $AA_1\perp BC$ suy ra $KC//AA_1$. Tương tự $KA//CC_1$. Do đó tứ giác $CKAH$ là hình bình hành, suy ra M, H, K, X thẳng hàng. Vậy H là trực tâm của tam giác BDM, suy ra $DH\perp BM$.

Câu 5. Điều kiện $x\geq-2011, y\geq-2011, z\geq-2011$. Không giảm tổng quát giả sử $x=\max\{x,y,z\}$,

ta có

$$\sqrt{x+2013}-\sqrt{x+2012}+\sqrt{x+2012}-\sqrt{x+2011}$$
$$=\sqrt{y+2012}-\sqrt{y+2011}+\sqrt{z+2013}-\sqrt{z+2012}$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{x+2013}+\sqrt{x+2012}}+\frac{1}{\sqrt{x+2002}+\sqrt{z+2001}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{y+2012}+\sqrt{y+2011}}+\frac{1}{\sqrt{z+2013}+\sqrt{z+2012}}\quad(1)$$

Do $x\geq y, x\geq z$ nên VT(1) $\leq$ VP(1). Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z$.

VÒNG 2

Câu 1. 1) Từ i) và ii) suy ra

$abc(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)=a^3b^3c^3$.

Nếu $abc\neq 0$ thì suy ra

$(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ac+a^2)=a^2b^2c^2$ (1)

Lại có $(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ac+a^2)$ $\geq|ab|.|bc|.|ca|=a^2b^2c^2$, kết hợp với (1) suy ra $a=b=c$, do đó $8a^3=0\Leftrightarrow a=0\Rightarrow abc=0$, điều này mâu thuẫn với $abc\neq 0$. Vậy $abc=0$.

2) Từ giả thiết suy ra $1>\frac{2013}{b}+\frac{2014}{a}$

$$\Rightarrow a+b>2013+\frac{2013a}{b}+\frac{2014b}{a}+2014$$
$$\geq 2013+2\sqrt{\frac{2013a}{b}.\frac{2014b}{a}}+2014=(\sqrt{2013}+\sqrt{2014})^2.$$

Câu 2. • Với $x=0$ thì HPT vô nghiệm.

• Với $x\neq 0$, đặt $y=tx$ $(t\in\mathbb{Q})$ HPT trở thành

$$\begin{cases}x^2(1-2t^3)=1+4t\\ x^2(15t^2-19t+6)=1.\end{cases}$$

Suy ra

$$\frac{1+4t}{1-2t^3}=\frac{1}{15t^2-19t+6}\Leftrightarrow(2t-1)(31t^2-15t-5)=0$$

$\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$ (do $t\in\mathbb{Q}$). Do đó $x=\pm 2\Rightarrow y=\pm 1$.

Vậy $(x;y)=(2;1);(x;y)=(-2;1)$.

Câu 3. Kí hiệu p_n là số nguyên tố thứ n. Giả sử tồn tại $m\in\mathbb{N}^*$ mà $S_{m-1}=k^2; S_m=l^2; k,l\in\mathbb{N}^*$.

Vì $S_2=5, S_3=10, S_4=17$ nên $m>4$.

Ta có $p_m=S_m-S_{m-1}=(l-k)(l+k)$.

Suy ra $\begin{cases}l-k=1\\ l+k=p_m.\end{cases}$

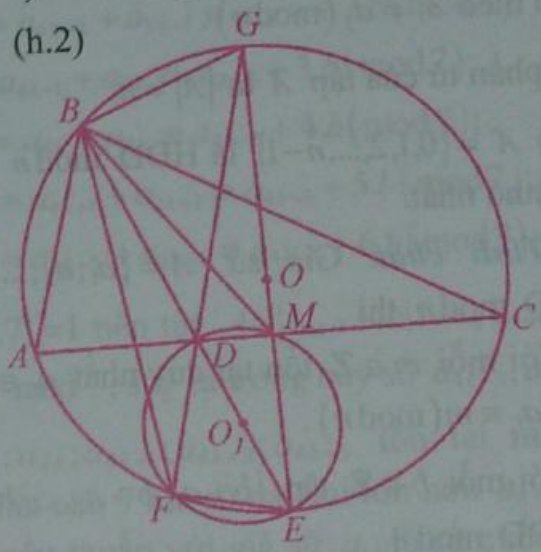
Do đó $p_m=2l-1=2\sqrt{S_m}-1\Rightarrow S_m=\left(\frac{p_m+1}{2}\right)^2$ (1)

Do $m>4$ nên $S_m\leq(1+3+5+7+...+p_m)+2-1-9$

$$=1^2-0^2+2^2-1^1+3^2-2^2+...+\left(\left(\frac{p_m+1}{2}\right)^2-\left(\frac{p_m-1}{2}\right)^2\right)-8$$

$=\left(\frac{p_m+1}{2}\right)^2-8<\left(\frac{p_m+1}{2}\right)^2$. Mâu thuẫn với (1).

Câu 4. (h.2)



Hình 2

1) Gọi $G=DF\cap(O)$ thì GE là đường kính của (O). Ta có $\overset{\frown}{EA}=\overset{\frown}{EC}$, gọi M là trung điểm của AC suy ra G, M, O, E thẳng hàng. Do đó $\widehat{GBE}=90^o$, mà $\widehat{GMD}=90^o$ nên tứ giác $BDMG$ nội tiếp đường tròn đường kính GD. Ta có $\widehat{MBD}=\widehat{DGM}=\widehat{FGE}=\widehat{FBE}$. Suy ra BF và BM đối xứng nhau qua BD.

2) Khi $\widehat{ABC}=90^o, \widehat{BAC}=60^o$ thì $AB=R$, $BC=R\sqrt{3}, AC=2R$. Theo tính chất phân giác

$$\frac{DA}{DC}=\frac{AB}{BC}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow DC=\sqrt{3}DA.$$

(*Xem tiếp trang 13*)

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

SỬ DỤNG HỆ THẶNG DƯ ĐỂ GIẢI TOÁN

NGUYỄN DUY LIÊN
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

I. HỆ THẶNG DƯ ĐẦY ĐỦ

1. *Định nghĩa.* *Cho tập $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ gồm n số nguyên. Giả sử r_i, $0\le r_i\le n-1$ là số dư khi chia a_i cho r_i với i = 1, 2, ... Nếu tập số dư $\{r_1,r_2,...,r_n\}$ trùng với $\{0, 1, ..., n-1\}$ thì ta nói A là một hệ thặng đầy đủ (gọi tắt là HĐĐ) mod n.*

Dễ thấy trong một HĐĐ mod n A với $i\ne j$ kéo theo $a_i\ne a_j(\bmod n)$.

Số phần tử của tập A là $|A|=n$.

Tập $A^*=\{0,1,2,...,n-1\}$ là HĐĐ mod n không âm nhỏ nhất.

2. *Tính chất.* Giả sử $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ là HĐĐ mod n thì

1) Với mỗi $m\in\mathbb{Z}$ tồn tại duy nhất $a_i\in A$ sao cho $a_i\equiv m(\bmod n)$.

2) Với mỗi $b\in\mathbb{Z}$ tập $\{b+a_1, b+a_2,..., b+a_n\}$ là HĐĐ mod n.

3) Với mỗi $c\in\mathbb{Z}$, $c\ne 0$, $(c,n)=1$, tập $\{ca_1,ca_2,...,ca_n\}$ là HĐĐ mod n.

4) Với mỗi cặp số nguyên b, c với $(c, n) = 1$, $c\ne 0$ thì tập $\{a_1c+b,a_2c+b,...,a_nc+b\}$ là HĐĐ mod n.

II. SỬ DỤNG HỆ THẶNG DƯ ĐỂ GIẢI TOÁN VỀ ĐA THỨC, DÃY NGUYÊN

★**Thí dụ 1.** *Cho số nguyên dương n và số nguyên tố p lớn hơn n +1. Chứng minh rằng đa thức $P(x)=1+\frac{x}{n+1}+\frac{x^2}{2n+1}+\cdots+\frac{x^p}{pn+1}$ không có nghiệm nguyên.*

Lời giải. Ta có $P(x)=0$

$$\Leftrightarrow a_px^p+a_{p-1}x^{p-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0=0 \quad (1)$$

trong đó các hệ số có dạng

$a_0=(n+1)(2n+1)...(pn+1)$ gồm p thừa số,

$a_i=(n+1)...((i-1)n+1)((i+1)n+1)...(pn+1)\in\mathbb{Z}$ $(i=0,1,2,...,p)$. Từ $(p,n)=1$ suy ra tập $A=\{n+1,2n+1,...,pn+1\}$ là HĐĐ mod p nên tồn tại duy nhất k, $k\in\{1,2,...,p\}$ sao cho $kn+1\equiv 0(\bmod p)$, hơn nữa $k\ne 1; 0<kn+1<p^2$ suy ra $kn+1$ không chia hết cho p^2.

Tương ứng với số k đó có hệ số a_k không chia hết cho p đồng thời p hệ số còn lại $a_0,a_1,...,a_{k-1}, a_{k+1},...,a_p$ đều chia hết cho p nhưng không chia hết cho p^2 (2).

Giả sử PT (1) có nghiệm nguyên $x=c$. Khi đó $a_pc^p+a_{p-1}c^{p-1}+\cdots+a_2c^2+a_1c+a_0=0$.

Theo (2) thì $a_i\vdots p, \forall i\in\{1,2,...,p\}, i\ne k, 2\le k\le p-1$.

Suy ra $a_kc^k\vdots p$, mà a_k không chia hết cho p nên $c^k\vdots p\Rightarrow c\vdots p\Rightarrow a_ic^i\vdots p^2\left(\forall i\in\{2,3,..p\}\right)$ và $a_1c\vdots p^2$. Vì $a_1\vdots p$, $c\vdots p$ nên $a_0\vdots p^2$, mâu thuẫn với (2). Vậy điều giả sử là sai, tức là PT (1) không có nghiệm nguyên, hay $P(x)$ không có nghiêm nguyên (đpcm). ❐

★**Thí dụ 2.** *Cho đa thức*

$$P(x)=x^3-11x^2-87x+m$$

trong đó $m\in\mathbb{Z}$. Chứng minh rằng với mọi m đều tồn tại số nguyên n sao cho $P(n)\vdots 191$.

Lời giải. Trước hết ta chứng minh

Bổ đề. Cho p là số nguyên tố $p\equiv 2(\bmod 3)$ và $x,y\in\mathbb{Z}$, sao cho $x^3\equiv y^3(\bmod p)$. Khi đó $x\equiv y(\bmod p)$. Thật vậy

NGƯỜI THẦY.VN

Nếu $x \equiv 0 \pmod p$ thì $y^3 \equiv 0 \pmod p$

$\Rightarrow y \equiv 0 \pmod p$. Do đó $x \equiv y \pmod p$.

Nếu x không chia hết cho p thì y không chia hết cho p. Do $p \equiv 2 \pmod 3$ nên $p=3k+2 (k \in \mathbb{N})$. Theo định lí Fermat nhỏ $x^{p-1} = x^{3k+1} \equiv 1 \pmod p, y^{p-1} = y^{3k+1} \equiv 1 \pmod p$

$\Rightarrow x^{3k+1} \equiv y^{3k+1} \pmod p$. Theo giả thiết $x^3 \equiv y^3 \pmod p \Rightarrow x^{3k} \equiv y^{3k} \pmod p$.

Vậy $y^{3k+1} \equiv x.x^{3k} \equiv x.y^{3k} \pmod p$

$\Leftrightarrow x \equiv y \pmod p$ (do $(y,p)=1$).

Bổ đề được chứng minh

Trở lại bài toán. Ta có

$$P(n) = n^3 - 11n^2 - 87n + m.$$

Ta sẽ chứng minh nếu $P(n_1) \equiv P(n_2) \pmod{191}$ với $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ thì $n_1 \equiv n_2 \pmod{191}$.

Thật vậy, giả sử $P(n_1) \equiv P(n_2) \pmod{191}$

$\Leftrightarrow 27P(n_1) \equiv 27P(n_2) \pmod{191}$

(do (27, 191) = 1)

$\Leftrightarrow (3n_1 - 11)^3 - 18.191n_1 + 11^3 + 27m$

$\equiv (3n_2 - 11)^3 - 18.191n_2 + 11^3 + 27m \pmod{191}$

$\Leftrightarrow (3n_1 - 11)^3 \equiv (3n_2 - 11)^3 \pmod{191}$. Từ bổ đề suy ra $3n_1 - 11 \equiv 3n_2 - 11 \pmod{191} \Leftrightarrow n_1 \equiv n_2 \pmod{191}$.

Tập $A = \{1, 2, ..., 191\}$ là HĐĐ mod191 thoả mãn $\forall n_1, n_2 \in A$ và $n_1 \neq n_2$ thì

$$P(n_1) \not\equiv P(n_2) \pmod{191}.$$

Do đó tập $B = \{P(1), P(2), ..., P(191)\}$ là HĐĐ mod 191.

Từ đó suy ra tồn tại $n \in A$ sao cho $P(n) \equiv 0 \pmod{191} \Leftrightarrow P(n) \vdots 191$. Vậy với mọi số nguyên m đều tồn tại số nguyên n sao cho $P(n) \vdots 191$ (đpcm). ❐

★ Thí dụ 3. *Cho dãy số (a_n) được xác định bởi $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{\left[\frac{n}{2}\right]}$ với $\forall n = 2, 3, ...$*

Chứng minh rằng dãy số (a_n) chứa vô hạn số nguyên chia hết cho 7.

Lời giải. Giả sử chỉ có hữu hạn số trong dãy (a_n) chia hết cho 7 và a_k là số cuối cùng của dãy chia hết cho 7. Từ công thức xác định của dãy ta có

$$a_{2k} = a_{2k-1} + a_k; a_{2k+1} = a_{2k} + a_k$$

do $a_k \vdots 7$ nên $a_{2k-1} \equiv a_{2k} \equiv a_{2k+1} \equiv b \pmod 7$, $b \not\equiv 0 \pmod 7$ $(b \in \mathbb{Z})$.

Mặt khác $a_{4k-3} = a_{4k-3} + 0.b$;

$a_{4k-2} = a_{4k-3} + a_{2k-1} \equiv a_{4k-3} + 1.b \pmod 7$;

$a_{4k-1} = a_{4k-2} + a_{2k-1} \equiv a_{4k-3} + 2.b \pmod 7$;

$a_{4k} = a_{4k-1} + a_{2k} \equiv a_{4k-3} + 3.b \pmod 7$;

$a_{4k+1} = a_{4k} + a_{2k} \equiv a_{4k-3} + 4.b \pmod 7$;

$a_{4k+2} = a_{4k+1} + a_{2k+1} \equiv a_{4k-3} + 5.b \pmod 7$;

$a_{4k+3} = a_{4k+2} + a_{2k+1} \equiv a_{4k-3} + 6.b \pmod 7$;

Do $(b,7) = 1$ nên tập $A = \{a_{4k-3} + ib \mid i = 0, 1, ..., 6\}$ là HĐĐ mod 7, suy ra trong bảy số $a_{4k-3}; a_{4k-2}; a_{4k-1}; a_{4k}; a_{4k+1}; a_{4k+2}; a_{4k+3}$ tồn tại một số chia hết cho 7 mà số này lại lớn hơn a_k. Điều này mâu thuẫn với giả sử a_k là số cuối cùng của dãy chia hết cho 7. Do giả sử sai nên ta có đpcm. ❐

III. SỬ DỤNG HỆ THẶNG DƯ ĐỂ GIẢI TOÁN VỀ CHIA HẾT

★ Thí dụ 4. *Cho n, k là các số nguyên dương thoả mãn điều kiện n không chia hết cho 3 và $k \geq n$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương v sao cho $v \vdots n$ và $S(v) = k$ (trong đó $S(v)$ là tổng các chữ số của số nguyên dương v trong biểu diễn thập phân).*

Lời giải. Đặt $n = 2^\alpha.5^\beta.n_1$ với $n_1 \in \mathbb{N}^*, (n_1, 10) = 1$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Do $(n, 3) = 1 \Leftrightarrow (n_1, 9) = 1$ nên

tập $A=\{k, k+9, k+9.2,..., k+9.(n_1-1)\}$ là HĐĐ mod n_1.

Suy ra tồn tại $t\in\{0,1,2,...,n_1-1\}$ sao cho $k+9t\equiv 0(\bmod n_1)$. Vì $(n_1,10)=1$ nên tồn tại $m\in\mathbb{N}^*$ sao cho $\underbrace{111...11}_{m \text{ chữ số}}\vdots n_1 \Leftrightarrow 10^m-1\vdots n_1$ $\Leftrightarrow 10^m\equiv 1(\bmod n_1)$.

Xét số $u=\underbrace{10^{(k-1)m+1}+10^{(k-2)m+1}+\cdots+10^{(k-t)m+1}}_{t \text{ số hạng}}$

$+\underbrace{10^{(k-t-1)m}+\cdots+10^m+1}_{(k-t) \text{ số hạng}}$.

Ta có $10^{im}\equiv 1(\bmod n_1)$, $\forall i\in\mathbb{N}^*$ suy ra

$u\equiv 10t+k-t\equiv 9t+k(\bmod n_1)$ và

$$S(u)=t+k-t=k.$$

Chọn số $v=10^{\alpha+\beta}.u$ thì $v\vdots n$ và $S(v)=S(u)=k$ thoả mãn yêu cầu. ❐

★Thí dụ 5. *Cho n là số nguyên dương lẻ lớn hơn 1 và hai tập hợp $A=\{k\in\mathbb{N}^*\mid kn+1\in M\}$ và $B=\{j\in\mathbb{N}^*\mid jn\in M\}$.*

Chứng minh rằng $n\in\wp$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} k\ge n-2,\ \forall k\in A \\ j\ge n,\ \forall j\in B \end{cases}$$

trong đó kí hiệu M là tập số chính phương, $\wp$ là tập số nguyên tố.

Lời giải. • Ta có với $n\in\wp$ thì

$kn+1=x^2(x\in\mathbb{N}^*)\Leftrightarrow(x+1)(x-1)=kn\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x+1)\vdots n\\(x-1)\vdots n\end{array}\right.$

(do $n\in\wp$) $\Rightarrow x\ge n-1$.

Vậy $kn=(x+1)(x-1)\ge n(n-2)\Rightarrow k\ge n-2$.

$jn=y^2\Rightarrow y^2\vdots n\Rightarrow y\vdots n$ (do $n\in\wp$) $\Rightarrow y\ge n$.

Vậy $jn=y^2\ge n^2\Rightarrow j\ge n$.

• Đảo lại, với $k\ge n-2$, $\forall k\in A$ và $j\ge n$, $\forall j\in B$ ta sẽ chứng minh $n\in\wp$.

Thật vậy, giả sử n là hợp số thì $n\ge 4$.

Trường hợp 1. $n=p^\alpha$, $\alpha>1$

- Nếu α chẵn, chọn $j=1<n$ mà $jn=p^\alpha\in M$ (vô lí).

- Nếu α lẻ, $\alpha=2t+1(t\in\mathbb{N}^*)$ chọn $j=p<n$ mà $jn=(p^{t+1})^2\in M$ (vô lí).

Trường hợp 2. $n=pq$ với $p,q\in\mathbb{N}^*$, $(p,q)=1$ và $2\le p<q$.

Ta chứng minh tồn tại $1\le k<n-2$ $(k\in\mathbb{N})$ mà $kn+1\in M$.

Xét tập $D=\{xq+2\mid x=0,1,...,p-1\}$ là HĐĐ mod p thì tồn tại $x\in\{0,1,2,...,p-1\}$ sao cho $xq+2\equiv 0(\bmod p)$

$\Rightarrow xq+2=mp$ với $m\in\mathbb{N}^*$, $m\ge 2$.

Chọn $k=mx\le m(p-1)\le xq\le(p-1)q<n-2$.

Ta có $kn+1=mx\cdot n+1=mp\cdot xq+1=xq(xq+2)+1$ $=(xq+1)^2\in M$ (vô lí).

Từ hai trường hợp ta thấy điều giả sử là sai. Vậy $n\in\wp$. ❐

★Thí dụ 6. *Cho các số nguyên không âm $a_1<a_2<\cdots<a_{101}<5050$. Chứng minh rằng tồn tại bốn số nguyên phân biệt a_k,a_h,a_m,a_n thoả mãn $(a_k+a_h-a_m-a_n)\vdots 5050$.*

Lời giải. Xét các tổng $a_i+a_j(1\le i<j\le 101)$, có tất cả $C_{101}^2=5050$ tổng như vậy.

• Giả sử không tồn tại bốn số k,h,m,n với $k<h, m<n, \{k,h\}\ne\{m,n\}$ sao cho

$$a_k+a_h\equiv a_m+a_n(\bmod 5050)$$

thì $S=\{a_i+a_j\mid 1\le i<j\le 101\}$ là HĐĐ mod 5050. Từ đó

$$\sum_{1\le i<j\le 101}(a_i+a_j)\equiv 0+1+2+\cdots+5049$$

$$\equiv 12748725\ (\bmod 5050)$$

$\Rightarrow \sum_{1\le i<j\le 101}(a_i+a_j)$ là một số lẻ (1)

Mặt khác $\sum_{1\le i<j\le 101}(a_i+a_j)=100(a_1+a_2+\cdots+a_{101})$

là một số chẵn (2)

Ta thấy (1) và (2) mâu thuẫn. Vậy tồn tại hai tổng a_k+a_h và a_m+a_n với $k<h, m<n$, $\{k,h\}\neq\{m,n\}$ sao cho $a_k+a_h\equiv a_m+a_n \pmod{5050}$ lúc đó k,h,m,n phải là bốn số phân biệt và bốn số a_k, a_h, a_m, a_n thoả mãn điều kiện $(a_k+a_h-a_m-a_n)\vdots 5050$. □

★**Thí dụ 7.** *Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, tồn tại số tự nhiên gồm n chữ số đều lẻ và nó chia hết cho 5^n.*

Lời giải. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

• Với $n=1$ thì tồn tại $a_1=5\vdots 5^1$, vậy mệnh đề đúng với $n=1$.

• Giả sử mệnh đề đúng với n tức là có $\overline{a_1a_2...a_n}=5^n.a$ với a_i là chữ số lẻ, $\forall i=1,2,...,n$ và $a\in\mathbb{Z}^+$ Ta cần chứng minh mệnh đề đúng với $n+1$.

Xét năm số $\overline{1a_1a_2...a_n}=5^n(1.2^n+a)$

$\overline{3a_1a_2...a_n}=5^n(3.2^n+a)$; $\overline{5a_1a_2...a_n}=5^n(5.2^n+a)$;

$\overline{7a_1a_2...a_n}=5^n(7.2^n+a)$; $\overline{9a_1a_2...a_n}=5^n(9.2^n+a)$.

Do $B=\{1,3,5,7,9\}$ là HĐĐ mod 5 nên

$B^*=\{1.2^n+a, 3.2^n+a, 5.2^n+a, 7.2^n+a, 9.2^n+a\}$

cũng là HĐĐ mod 5. Suy ra tồn tại một số duy nhất trong B^* chia hết cho 5. Dẫn đến trong năm số $\overline{1a_1a_2...a_n}$, $\overline{3a_1a_2...a_n}$, $\overline{5a_1a_2...a_n}$, $\overline{7a_1a_2...a_n}$, $\overline{9a_1a_2...a_n}$, có duy nhất một số chia hết cho 5^{n+1} mà số này gồm $n+1$ chữ số lẻ, tức là mệnh đề đúng với $n+1$.

Theo nguyên lí quy nạp mệnh đề đúng với mọi n.

Vậy với mọi số nguyên dương n, tồn tại số tự nhiên gồm n chữ số đều lẻ và nó chia hết cho 5^n. □

(Kì sau đăng tiếp)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI ... *(Tiếp trang 9)*

Kết hợp với $DA+DC=2R$ suy ra $DA=(\sqrt{3}-1)R$; $DM=R-DA=(2-\sqrt{3})R$;

$DE=\sqrt{ME^2+MD^2}=2\sqrt{2-\sqrt{3}}R$.

Vậy bán kính đường tròn (O_1) bằng $\sqrt{2-\sqrt{3}}R$.

Câu 5. Giả sử a, b, c là các số nguyên tố và là độ dài các cạnh của tam giác ABC.

Đặt P, S thứ tự là chu vi, diện tích của tam giác ABC. Ta có

$$16S^2=P(P-2a)(P-2b)(P-2c) \quad (1)$$

Giả sử S là số tự nhiên. Từ (1) suy ra $P=a+b+c$ là số chẵn.

• Nếu a, b, c cùng chẵn thì $a=b=c=2$, suy ra $S=\sqrt{3}$ (loại).

• Nếu a, b, c có một số chẵn và hai số lẻ, giả sử a chẵn thì $a=2$.

Nếu $b\neq c$ thì $|b-c|\ge 2=a$, vô lí.

Nếu $b=c$ thì $S^2=b^2-1\Rightarrow(b-S)(b+S)=1$ (2)

Đẳng thức (2) không xảy ra vì b, S là các số tự nhiên.

Câu 6. Giả sử tồn tại số nguyên dương n thỏa mãn đề bài, ta luôn có tổng các số dư trong phép chia n cho a_1, a_2, ..., a_{11} không thể vượt quá $407-11=396$; cho các số $4a_1, 4a_2, ..., 4a_{11}$ không vượt quá $4.407-11=1617$. Suy ra tổng các số dư trong phép chia n cho các số a_1, a_2, ..., a_{11}, $4a_1, 4a_2, ..., 4a_{11}$ không thể vượt quá $396+1617=2013$. Kết hợp với giả thiết tổng các số dư bằng 2012, suy ra khi chia n cho 22 số trên thì có 21 phép chia có số dư lớn nhất và một phép chia có số dư nhỏ hơn số chia 2 đơn vị.

Do đó tồn tại k sao cho a_k, $4a_k$ thỏa mãn điều kiện trên. Khi đó một trong hai số $n+1$; $n+2$ chia hết cho a_k, số còn lại chia hết cho $4a_k$. Suy ra ƯCLN $(n+1;n+2)\ge a_k\ge 2$, điều này không đúng. Vậy không tồn tại n thỏa mãn đề ra.

NGUYỄN THANH HỒNG

(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Toán học & Đời sống

DÃY FIBONACCI TRONG THỊ TRƯỜNG CHỨNG KHOÁN

LÊ HỒ QUÝ
(GV THPT Duy Tân, Kon Tum)

Dãy Fibonacci (f_n) được viết dưới dạng khai triển 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,... có tính chất $f_0=f_1=0$, $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$ với mọi $n\geq 2$. Tỉ số $\varphi=\frac{f_{n+1}}{f_n}\approx 1,618\ (n\geq 8)$ thường được gọi là tỉ lệ vàng. Ứng dụng của dãy Fibonacci trong toán học được đề cập khá nhiều trong các giáo trình về dãy số. Bài viết này, xin giới thiệu một số ứng dụng của dãy Fibonacci trong thị trường chứng khoán.

Khi sử dụng phân tích kĩ thuật, "tỉ lệ vàng" thường được diễn giải theo ba giá trị phần trăm: 38.2%, 50% và 61,8%. Nhiều tỉ lệ khác có thể được sử dụng khi cần thiết, như 23,6%, 161,8%, 261,8%, 423%, ...

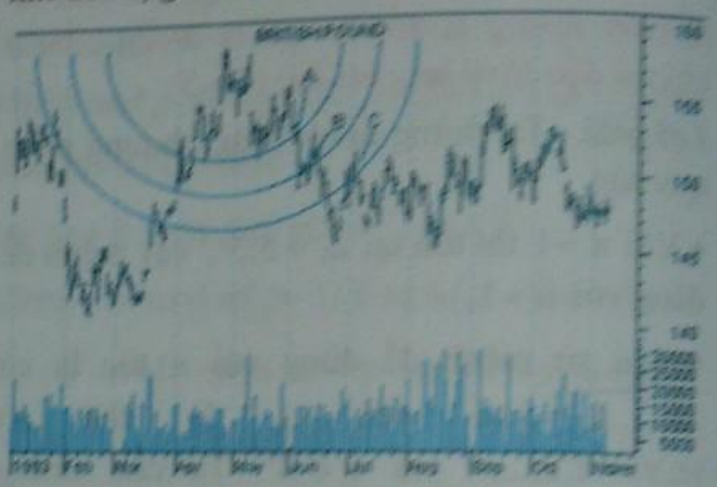
Các tỉ lệ trên đều được rút ra từ dãy Fibonacci (f_n), bằng cách

- $f_1:f_2=1:2=50\%$
- $f_{n+1}:f_n\approx 0,618=61,8\%$
- $f_{n+2}:f_n\approx 0,382=38,2\%$
- $f_{n+3}:f_n\approx 0,236=23,6\%$
- $f_n:f_{n+1}\approx 1,618=161,8\%$
- $f_n:f_{n+2}\approx 2,618=261,8\%$
- $f_n:f_{n+3}\approx 4,236=423,6\%$.

Có bốn phương pháp chính trong việc áp dụng dãy Fibonacci trong tài chính: Arcs, Retracements, Fans và Time Zones.

Fibonacci Arcs (FA - Fibonacci hình cung) được thiết lập như sau: Đầu tiên, đường xu hướng được vẽ nối hai điểm có mức giá cao nhất và thấp nhất của giai đoạn phân tích. Sau đó, vẽ ba nửa đường tròn đồng tâm, với tâm là điểm có mức giá cao nhất và cắt đường xu hướng tại các mức Fibonacci 38,2%, 50,0%, 61,8%.

FA dùng để dự đoán mức hỗ trợ và kháng cự khi đồ thị giá tiếp cận với đường cong.



Hình 1

Lưu ý rằng, đồ thị giá cắt đường FA tại điểm nào còn tùy thuộc vào kích cỡ của đồ thị, nói cách khác đường FA được vẽ lên đồ thị nên nó có mối tương quan với kích cỡ cân đối của đồ thị trên màn hình máy vi tính hoặc trên giấy.

Đồ thị giá của Đồng Bảng Anh (h.1) mô tả cách mà đường FA tìm ra các điểm hỗ trợ và kháng cự (điểm A, B, C).

Fibonacci Fans (FF - Fibonacci hình quạt) được thiết lập như sau: Đường xu hướng được vẽ đi qua hai điểm giá cao nhất và thấp nhất của giai đoạn phân tích. Sau đó, một đường thẳng đứng "vô hình" sẽ được vẽ qua điểm giá cao nhất. Tiếp theo đó, ba đường chéo sẽ được vẽ từ điểm giá thấp nhất cắt đường thẳng đứng "vô hình" tại ba mức 38,2%, 50,0%, 61,8%. Đồ thị (h.2) của Công ty Texaco cho thấy các ngưỡng hỗ trợ/kháng cự trên đường FF.

Ta có thể thấy khi đồ thị giá gặp đường FF cao nhất (điểm A), đồ thị giá không thể vượt qua đường FF trong nhiều ngày. Khi giá

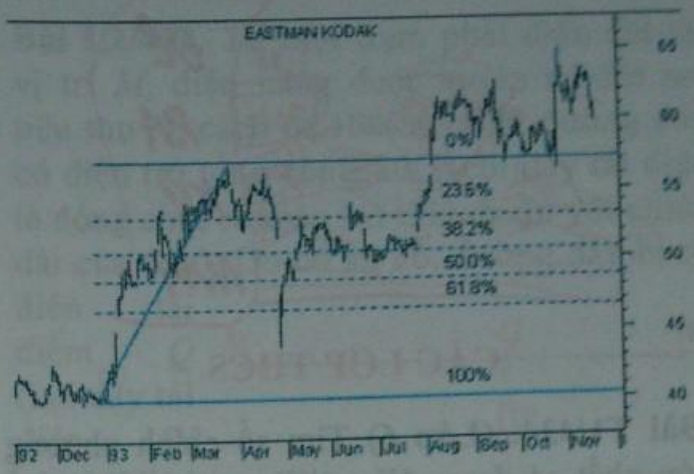
vừa vượt qua đường FF, nó liền rớt nhanh chóng đến điểm đáy trên đường FF thứ ba (điểm B và C) trước khi tìm được mức hỗ trợ. Cũng lưu ý rằng, khi giá di chuyển qua điểm đáy (điểm C), nó tăng một mạch tới điểm cao nhất (điểm D) trên đường FF thứ nhất và cũng là điểm kháng cự, sau đó rơi xuống điểm giữa trên đường FF thứ hai (điểm E) trước khi đổi chiều đi lên.

Hình 2

Một kĩ thuật phổ biến là Fibonacci hình cung và Fibonacci hình quạt thường được vẽ trên cùng một đồ thị, theo dõi cả hai đường FA, FF rồi dự đoán mức hỗ trợ và kháng cự tại điểm giao nhau của hai đường này.

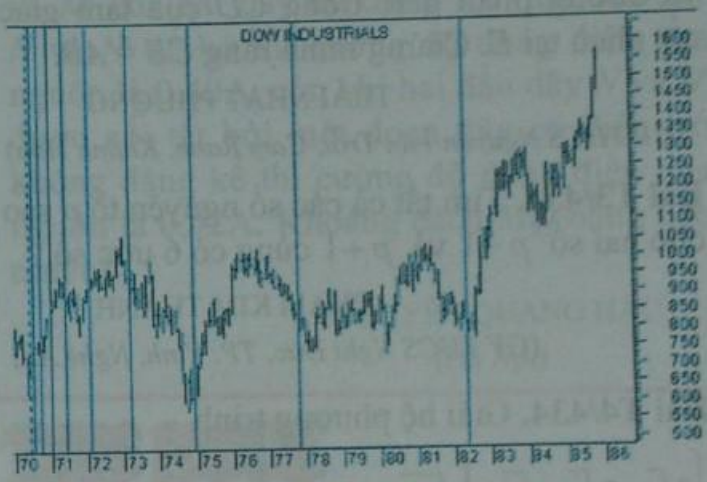
Fibonacci Retracements (FR - Fibonacci thoái lui) Đầu tiên, đường xu hướng được xác định bằng cách vẽ đường thẳng đi qua hai điểm giá cao nhất và thấp nhất của đồ thị giá trong giai đoạn phân tích. Sau đó, chín đường nằm ngang được vẽ lên cắt đường xu hướng tại các mức Fibonacci 0.0%, 23.6%, 38.2%, 50%, 61.8%, 100%, 161.8%, 261.8%, và 423.6% tương ứng với chiều cao tính từ điểm giá cao nhất đến thấp nhất (một số đường có thể không được vẽ ra khi nằm ngoài quy mô phân tích của đồ thị).

Sau khi tăng hoặc giảm mạnh giá thường quay trở về các mức trước đó, lặp lại phần lớn (cũng có khi là toàn bộ) xu hướng ban đầu. Khi giá đảo chiều, các mức hỗ trợ hoặc kháng cự mới nằm trên hoặc gần đường FR (xem đồ thị (h.3) mức hỗ trợ và kháng cự xuất hiện tại đường Fibonacci 23,6% và 38,2%).



Hình 3

Fibonacci Time Zones bao gồm một loạt các đường thẳng đứng sắp xếp theo trật tự của dãy Fibonacci 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... Những thay đổi lớn của giá thường nằm gần hoặc trên các đường thẳng đứng này (h.4).



Hình 4

Các kết quả nghiên cứu về Fibonacci này không có ý định làm kim chỉ nam cho việc xác định thời gian xâm nhập hoặc rút khỏi thị trường. Tuy nhiên, nó có thể hữu ích trong việc xác định vùng hỗ trợ và kháng cự. Đa phần các nhà đầu tư sử dụng kết hợp cả bốn phương pháp Fibonacci này để có thể đưa ra các mức dự đoán chính xác hơn. Một nhà phân tích có thể chỉ sử dụng Fibonacci Arcs và các điểm giao tại vùng hỗ trợ hoặc kháng cự. Nhiều người khác kết hợp các nghiên cứu về Fibonacci với các dạng thức phân tích kĩ thuật khác như "lí thuyết sóng Elliot" để dự đoán mức độ đảo ngược xu hướng sau mỗi bước sóng khác nhau.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/434. (Lớp 6) Tìm số chính phương lớn nhất có dạng $4^{27}+4^{1020}+4^{x}$, với x là số tự nhiên.

ĐỖ THỊ HƯỜNG

(GV THCS Thanh Tâm, Thanh Liêm, Hà Nam)

Bài T2/434. (Lớp 7) Cho tam giác ABC vuông tại A và $\widehat{ABC}=54^{\circ}$. Đường trung tuyến AM và đường phân giác trong CD của tam giác cắt nhau tại E. Chứng minh rằng $CE=AB$.

THÁI NHẬT PHƯỢNG

(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài T3/434. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho hai số $p-1$ và $p+1$ cùng có 6 ước số.

PHẠM KIM THÀNH

(GV THCS Nghi Đức, TP. Vinh, Nghệ An)

Bài T4/434. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}3\sqrt{x}+2\sqrt{y}+\sqrt{z}=\dfrac{1}{6}\sqrt{xyz}\\ 6\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+3\sqrt{xz}=108+18\sqrt{x+4}+12\sqrt{y+9}+6\sqrt{z+36}\end{cases}$$

BÙI ĐÌNH THÂN

(GV THCS Lương Thế Vinh, Thái Bình)

Bài T5/434. Cho đường tròn (O). Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn, kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Đường trung tuyến BM của tam giác ABC cắt (O) ở D, tia AD cắt (O) ở E. Chứng minh rằng $BE \parallel AC$.

PHẠM TUẤN KHẢI

(Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/434. Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2-(b-c)^2}+\sqrt{b^2-(c-a)^2}+\sqrt{c^2-(a-b)^2}$$
$$\le \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\le a+b+c.$$

TRẦN TUẤN ANH

(ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

Bài T7/434. Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC. Các tiếp tuyến của (O) song song với các cạnh của tam giác, cắt các cạnh của tam giác ABC tại 6 điểm M, N, P, Q, R và S ($M, S\in AB$; $N, P\in AC$; $Q, R\in BC$). Gọi l_1, l_2, l_3 lần lượt là độ dài các đường phân giác trong xuất phát từ các đỉnh A, B, C của các tam giác AMN, BSR, CPQ.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{l_1^2}+\dfrac{1}{l_2^2}+\dfrac{1}{l_3^2}\ge\dfrac{81}{p^2}$ với p là nửa chu vi tam giác ABC.

CAO HẢI VÂN

(GV THPT Nguyễn Chí Thanh, Pleiku, Gia Lai)

Bài T8/434. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện $\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{3}$. Giải phương trình

$$x^2+x-\cos A-\frac{1}{4}\cos(B-C)=0.$$

NGUYỄN BÁ ĐANG

(Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/434. Tìm tất cả các số thực x sao cho

$$\left\{\frac{x^2+1}{x^2+x+1}\right\}=\frac{1}{2},$$

trong đó kí hiệu $\{a\}$ là phần lẻ của a, tức là $\{a\}=a-[a]$.

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T10/434. Cho dãy số (x_n) được xác định bởi

$$x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n}+\frac{2}{x_n^2}+\frac{3}{x_n^3}+\ldots+\frac{2011}{x_n^{2011}}+\frac{2012}{x_n^{2012}},$$
$(n\in\mathbb{N}^*)$.

với $x_1>0$ cho trước. Tìm các số α để dãy (nx_n^{α}) có giới hạn và giới hạn là một số khác không.

NGUYỄN NGỌC TIẾN

(GV Trường Cao đẳng Nghề Bình Thuận)

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(xf(y)+3y^2)+f(3xy+y)=f(3y^2+x)+4xy-x+y$$

với mọi $x,y\in\mathbb{R}$.

TRẦN VĂN THƯƠNG

(GV THPT Phú Mỹ, Tân Thành, Bà Rịa- Vũng Tàu)

Bài T12/434. Cho tứ diện $ABCD$ với trọng tâm G. Các điểm X, Y, Z, T theo thứ tự thuộc các mặt (BCD), (CDA), (DAB), (ABC) sao cho XY, YZ, ZT, TX theo thứ tự song song với GA, GB, GC, GD. Tính tỉ số thể tích của các khối tứ diện $ABCD$ và $XYZT$.

NGUYỄN MINH HÀ

(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

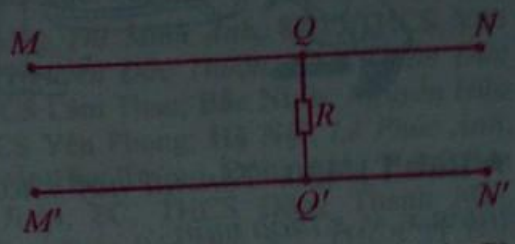
CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/434. Hai hòn đá được ném từ cùng một điểm trên một ngọn tháp cao với cùng góc ném α so với phương ngang (ném chếch lên trên) và cùng vận tốc ban đầu v_0 nhưng ném cách nhau một khoảng thời gian Δt. Xác định khoảng cách nhỏ nhất giữa hai hòn đá và thời điểm đạt khoảng cách đó. Bỏ qua sức cản của không khí.

NGUYỄN NHẬT MINH

(Hà nội)

Bài L2/434. Từ một trạm phát điện tại vị trí M, điện năng được truyền tải đến nơi tiêu thụ N, cách M 180km. Biết đường dây có điện trở tổng cộng 80Ω (coi dây tải điện là đồng chất có điện trở tỉ lệ thuận với chiều dài của dây). Do có sự cố, đường dây bị rò điện tại điểm Q (hai dây tải điện MN và $M'N'$ bị nối tắt bởi một vật có điện trở với giá trị xác định R).



Để xác định vị trí Q trước tiên người ta ngắt đường dây khỏi máy phát và tải tiêu thụ sau đó dùng nguồn điện không đổi 12V, điện trở trong không đáng kể, nối vào hai đầu M và M' của hai dây tải điện. Khi hai đầu dây N và N' để hở thì cường độ dòng điện qua nguồn là 0,40A, còn khi hai đầu dây N và N' được nối tắt bởi một đoạn dây có điện trở không đáng kể thì cường độ dòng điện qua nguồn là 0,42A. Khoảng cách MQ bằng bao nhiêu?

NGUYỄN QUANG HẬU

(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/434. (For 6th grade) Find the largest possible perfect square of the form $4^{27}+4^{1020}+4^x$, where x is a natural number.

T2/434. (For 7th grade) Let ABC be a right triangle with right angle at vertex A and $\widehat{ABC}=54^\circ$. The median AM meets the internal angle-bisector CD at E. Prove that $CE=AB$.

T3/434. Find all prime numbers p such that $p-1$ and $p+1$ each has exactly 6 divisors.

T4/434. Solve the system of equations

$$\begin{cases}3\sqrt{x}+2\sqrt{y}+\sqrt{z}=\dfrac{1}{6}\sqrt{xyz}\\ 6\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+3\sqrt{xz}=108+18\sqrt{x+4}+12\sqrt{y+9}+6\sqrt{z+36}\end{cases}$$

T5/434. Let AB and AC be the tangent lines to a circle (O) through an external point A (B and C are the points of tangency). The median BM of triangle ABC intersects (O) at D, the ray AD meets (O) at E. Prove that $BE \parallel AC$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/434. Given that a, b, c are the sides of a triangle, prove the inequality

$$\sqrt{a^2-(b-c)^2}+\sqrt{b^2-(c-a)^2}+\sqrt{c^2-(a-b)^2}$$
$$\le\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\le a+b+c.$$

T7/434. The circle (O) is inscribed in a triangle ABC. The tangents to (O) which are parallel to the sides of the triangle are drawn,

(Xem tiếp trang 26)

★**Bài T1/430.** *Tồn tại hay không các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn*

$$5x^2+2016^{y+1}=2017^z\ ?$$

Lời giải. Xét tích các số dạng $3k + r$ với r bằng 0, 1, 2 ta thấy

$$T=(3k+r)(3h+s)=3(3kh+ks+hr)+rs.$$

• Nếu $r = s = 0$ thì $T = 3m$.

• Nếu $r = s = 1$ hoặc $r = s = 2$ thì $T = 3n + 1$ với k, h, r, s, m, n đều là các số nguyên.

Từ giả thiết $5x^2 + 2016^{y+1} = 2017^z$ có

$$2016^{y+1}=2016.2016^y=3m$$

$$2017^z=(3k+1)^z=3n+1.$$

Do đó $5x^2$ phải có dạng $3k + 1$ (1)

Theo chú ý trên thì x^2 có dạng $3m$ hoặc $3n + 1$ nên $5x^2$ có dạng $3k$ hoặc $3k + 2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra không tồn tại các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn đề bài. ❐

➢**Nhận xét.** 1) Có thể giải tương tự bằng cách xét các số dạng $8k + r$ với chú ý rằng số x phải lẻ và x^2 có dạng $8k + 1$.

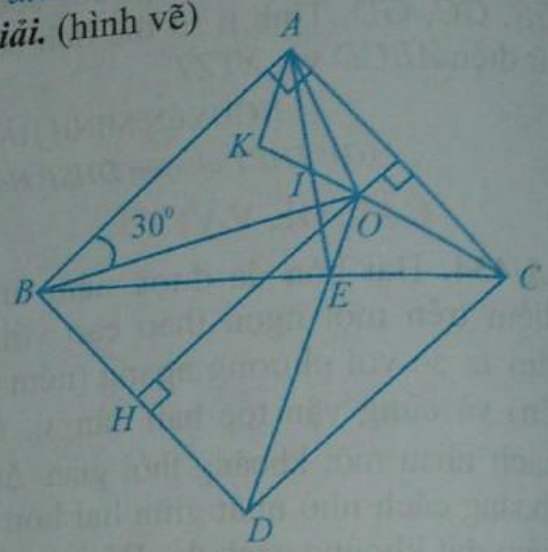
2) Các bạn sau có lời giải đúng, trình bày gọn:

Phú Thọ: *Nguyễn Dương Hoàng Anh, Lê Nguyễn Quỳnh Trang*, 6C, THCS Văn Lang, Việt Trì, *Nguyễn Hoàng Phi, Đỗ Trí Tuệ*, 6A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc**: *Nguyễn Thị Hương, Nguyễn Kim Đức*, 6A5, THCS Yên Lạc, *Nguyễn Khánh Linh, Nguyễn Thành Vinh, Đỗ Minh Trung*, 6A1, THCS & THPT Hai Bà Trưng, Phúc Yên; **Hà Nội**: *Tạ Lê Ngọc Sáng*, 6E, THPT chuyên Hà Nội-Amsterdam; **Nam Định**: *Nguyễn Hùng Sơn*, 8A, THCS [illegible]; **Nghệ An**: *Trần Lê Hiệp, Nguyễn Văn Toàn, Nguyễn Thị Ngọc, Vương Trần Lực, Nguyễn Thị Như Quỳnh B*, 6A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

VIỆT HẢI

★**Bài T2/430.** *Cho tam giác ABC vuông tại A. Điểm O nằm trong tam giác ABC sao cho* $\widehat{ABO}=30^o$ *và OA = OC. Điểm E thuộc cạnh BC sao cho* $\widehat{EOB}=60^o$. *Tính các góc của tam giác ABC, biết rằng đường thẳng CO đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AE.*

Lời giải. (hình vẽ)



Từ A kẻ đường thẳng song song với OE cắt CO tại K. Trên tia OE lấy điểm D sao cho $OD = OB$. Vì $\widehat{BOD}=2\widehat{ABO}=60^o$ nên tam giác BOD đều. Do đó $\widehat{OBD}=60^o \Rightarrow \widehat{ABD}=90^o$ $\Rightarrow AC // BD$. Kẻ đường trung trực của AC cắt BD tại H thì $\widehat{HOB}=\widehat{OBA}=30^o$ (so le trong) suy ra OH cũng là đường trung trực của BD. Vì $OH // AB$ nên $CD // AB$ và $AC = BD = OB$ (1)

Xét ΔACK và ΔOBE, có $AC = OB$ (theo (1)); $\widehat{CAK}=\widehat{ODB}=\widehat{BOE}=60^o$; $AK = OE$ (vì $\Delta AKI = \Delta EOI$), suy ra

$$\Delta ACK=\Delta OBE\ (\text{c.g.c})\Rightarrow \widehat{AKC}=\widehat{OEB} \quad (2)$$

Lại có $\widehat{AKC}=\widehat{KOE}$ (so le trong) (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\widehat{CEO}=\widehat{COE}$, nên tam giác

CÔNG TY RUNSYSTEM, BCĐ PHONG TRÀO THI ĐUA "XÂY DỰNG TRƯỜNG HỌC THÂN THIỆN, HỌC SINH TÍCH CỰC" VÀ TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Phối hợp tổ chức trao thưởng thường xuyên cho học sinh được nêu tên trên tạp chí

• Nếu $AB > OB$ thì $\widehat{AOB} > \widehat{OAB}$

$\Rightarrow \widehat{AOB} > \dfrac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$.

Do đó $\widehat{BAO} < 75^\circ$ (vì $\widehat{BAO} < 180^\circ - 30^\circ - 75^\circ$) (4)

Lại có $AB > OB = AC \Rightarrow \widehat{ABC} < 45^\circ$, mà $\widehat{ABO} = 30^\circ$ nên $\widehat{OBE} < 15^\circ$.

Nhưng $\widehat{OAC} = \widehat{OCA} = \widehat{KCA} = \widehat{EBO} \Rightarrow \widehat{OAC} < 15^\circ$ dẫn đến $\widehat{BAO} > 75^\circ$ (5)

Từ (4) và (5) ta gặp điều vô lí.

• Nếu $AB < OB$ chứng minh tương tự ta cũng gặp điều vô lí. Vậy $AB = OB = AC$. Do đó tam giác ABC vuông cân tại A.□

➢**Nhận xét.** Bài toán này tương đối khó, cần phải vẽ thêm nhiều đường phụ. Các bạn có thể liên hệ đến bài toán: *Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Điểm O nằm trong tam giác sao cho $\widehat{ABO} = 30^\circ$ và OA = OC. Điểm E thuộc cạnh BC sao cho $\widehat{EOB} = 60^\circ$. Chứng minh đường thẳng CO đi qua trung điểm của AE.*

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài T3/430. *Tìm các số tự nhiên x, y sao cho*

$$5^x = y^4 + 4y + 1 \quad (1)$$

Lời giải. Do $x, y \in \mathbb{N}$ nên 5^x lẻ $\Rightarrow y^4 + 4y + 1$ lẻ, suy ra y chẵn $\Rightarrow y^4 \vdots 8$, $4y \vdots 8$.

Từ đó $y^4 + 4y + 1 \equiv 1 \pmod 8$, hay

$$5^x \equiv 1 \pmod 8 \quad (2)$$

Nếu x lẻ, đặt $x = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, thì

$$5^x = 25^k.5 \equiv 5 \pmod 8,$$

mâu thuẫn với (2).

Vậy x chẵn. Đặt $x = 2k$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow 5^x = (5^k)^2$ là số chính phương $\Rightarrow y^4 + 4y + 1$ là số chính phương.

• Nếu $y > 2$, ta có $(y^2)^2 < y^4 + 4y + 1 < y^4 + 2y^2 + 1 = (y^2 + 1)^2 \Rightarrow y^4 + 4y + 1$ không là số chính phương. Trường hợp này bị loại.

• Nếu $y = 2$, thay vào PT (1) ta có $5^x = 25 \Leftrightarrow x = 2$.

• Nếu $y = 1$, thay vào PT (1) ta có $5^x = 6$, phương trình này không có nghiệm nguyên.

• Nếu $y = 0$, thay vào PT (1) ta có $5^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy PT (1) có các nghiệm $(x ; y)$ là $(0; 0)$ và $(2 ; 2)$.□

➢**Nhận xét.** Đa số các bạn đều giải đúng bài này, cách giải cũng tương tự như ở trên. Một số bạn giải sai và lập luận không chặt chẽ. Các bạn có lời giải tốt là:

Vĩnh Phúc: *Hoàng Thị Minh Anh*, 8A1, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ**: *Nguyễn Đức Thuận*, 8A3, *Quản Đức Mạnh*, 8A1, THCS Lâm Thao; **Bắc Ninh**: *Nguyễn Hữu Nghĩa*, 9A, THCS Yên Phong; **Hà Nội**: *Lê Phúc Anh*, 8B, THCS Nguyễn Huy Tưởng, Đông Anh; **Nghệ An**: *Phạm Quang Toàn*, 8C, THCS Đặng Thanh Mai, TP.Vinh; **Bến Tre**: *Trần Bảo Duy*, 8/3, THCS TP.Bến Tre; **TP. Hồ Chí Minh**: *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T4/430. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x + \sqrt{y-2} + \sqrt{4-z} = y^2 - 5z + 11 \\ y + \sqrt{z-2} + \sqrt{4-x} = z^2 - 5x + 11 \\ z + \sqrt{x-2} + \sqrt{4-y} = x^2 - 5y + 11. \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $x, y, z \in [2 ; 4]$.

Cách 1. Nhân vào hai vế của mỗi phương trình với 2, rồi cộng theo vế ta nhận được

$$2x + 2y + 2z + 2\sqrt{x-2} + 2\sqrt{y-2} + 2\sqrt{z-2}$$
$$+ 2\sqrt{4-x} + 2\sqrt{4-y} + 2\sqrt{4-z}$$
$$= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 10x - 10y - 10z + 66$$
$$\Leftrightarrow 2(x-3)^2 + 2(y-3)^2 + 2(z-3)^2 + (\sqrt{x-2} - 1)^2$$
$$+ (\sqrt{y-2} - 1)^2 + (\sqrt{z-2} - 1)^2 + (\sqrt{4-x} - 1)^2$$
$$+ (\sqrt{4-y} - 1)^2 + (\sqrt{4-z} - 1)^2 = 0 \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = y - 3 = z - 3 = 0 \\ \sqrt{x-2} - 1 = \sqrt{y-2} - 1 = \sqrt{z-2} - 1 = 0 \\ \sqrt{4-x} - 1 = \sqrt{4-y} - 1 = \sqrt{4-z} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = 3. \end{cases}$$

Hệ PT có nghiệm duy nhất $(x; y; z) = (3; 3; 3)$.

Cách 2. Cộng theo vế các PT trong hệ ta được

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} + \sqrt{y-2} + \sqrt{4-y} + \sqrt{z-2} + \sqrt{4-z}$$
$$= x^2 - 6x + 11 + y^2 - 6y + 11 + z^2 - 6z + 11 \quad (2)$$

Áp dụng BĐT $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$, đẳng thức xảy ra khi $a = b$, ta có

$$(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x})^2 \le 2(x-2+4-x) = 4$$

$\Rightarrow \sqrt{x-2}+\sqrt{4-x} \le 2.$

Đẳng thức xảy ra khi $x-2 = 4-x \Leftrightarrow x = 3.$

Tương tự, ta cũng có $\sqrt{y-2}+\sqrt{y-4} \le 2;$

$\sqrt{z-2}+\sqrt{4-z} \le 2.$

Do vậy vế trái của PT (2) không vượt quá $2.3 = 6$.

Mặt khác $x^2-6x+11 = (x-3)^2+2 \ge 2$, đẳng thức xảy ra khi $x = 3$.

Tương tự $y^2-6y+11 \ge 2;\ z^2-6z+11 \ge 2.$

Do vậy vế phải của PT (2) không nhỏ hơn $2.3 = 6$

Do đó PT (1) $\Leftrightarrow x = y = z = 3$ (thỏa mãn điều kiện).□

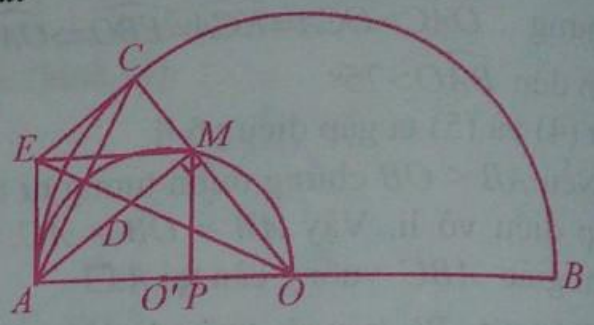
➢**Nhận xét.** Bài này rất nhiều bạn tham gia và đều cho lời giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt, trình bày sáng sủa:

Phú Thọ: *Nguyễn Đức Thuận*, 8A3, THCS Lâm Thao, *Nguyễn Thúy Quỳnh*, 8A2, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, *Đặng Duy Anh*, 9B, THCS Phong Châu; **Hà Nam**: *Hoàng Đức Mạnh*, 9A, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; **Bắc Ninh**: *Nguyễn Hữu Nghĩa, Nguyễn Thị Huân, Nguyễn Thị Mừng, Nguyễn Quang Minh*, 9A, THCS Yên Phong; **Hòa Bình**: *Nguyễn Thị Thu Hương*, 9A5, THCS Hữu Nghị; **Thanh Hóa**: *Lê Quang Dũng*, 8D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Nghệ An**: *Dương Đức Mạnh*, 7A1, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Ngô Thị Trà, Phạm Thị Quỳnh Trang*, 9A, THCS Hòa Hiếu II, TX Thái Hòa, *Trần Ngọc Thắng*, 9A1, THCS Hải Hòa, TX Cửa Lò; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Thị Khánh Linh, Phạm Hoàng*, 9B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, *Nguyễn Thị Trà*, 9D, THCS Liên Hương, Vũ Quang; **Quảng Ngãi**: *Đỗ Thị Kim Lê, Võ Trần Thùy Hương*, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, *Trần Thị Mỹ Ninh*, 9A, *Lê Công Phát*, 9C, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Phú Yên**: *Nguyễn Trần Hậu*, 9C, THCS Trần Quốc Toản, TP.Tuy Hòa; **Sóc Trăng**: *Huỳnh Hữu Phương*, 9A7, THCS Huỳnh Hữu Nghĩa, Mỹ Tú; **Bến Tre**: *Trần Bảo Duy*, 8^3, THCS TP.Bến Tre; **Đồng Nai**: *Nguyễn Nam Bình*, 9/3, THCS Phước Thái, Long Thành; **Quảng Nam**: *Lê Phước Định*, 8/1, THCS Kim Đồng, TP.Hội An; **TP.Hồ Chí Minh**: *Nguyễn Bảo Trân*, 8T1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★**Bài T5/430.** *Cho đoạn thẳng AB = 2a có trung điểm là O. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ nửa đường tròn tâm O đường kính AB và nửa đường tròn tâm O' đường kính AO. Điểm M chuyển động trên nửa đường tròn (O') khác A và O. Tia OM cắt nửa đường tròn (O) tại C. Gọi D là giao điểm thứ hai của CA với nửa đường tròn (O'). Gọi E là giao điểm của tiếp tuyến tại C của nửa đường tròn (O) với tia OD. Hãy xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn (O') sao cho ME song song với AB.*

Lời giải



Tam giác AOC cân tại O và có $OD \perp AC$ nên OD là tia phân giác góc $\widehat{AOC}$, suy ra $\widehat{AOE} = \widehat{EOM}$ (1)

Giả sử $ME // AB$ thì $\widehat{AOE} = \widehat{OEM}$ (so le trong) (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{EOM} = \widehat{OEM}$, nên tam giác EMO cân tại M, suy ra $ME = MO$.

Xét hai tam giác OEC và OEA có OE chung, $\widehat{EOA} = \widehat{EOC}$, $OA = OC$ nên $\Delta OEC = \Delta OEA$ (c.g.c). Suy ra $\widehat{OAE} = \widehat{OCE} = 90^o$, nên $EA \perp AO$.

Kẻ $MP \perp AB$, dễ thấy tứ giác $EMPA$ là hình chữ nhật, suy ra $AP = EM = MO = x$ $(x > 0)$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AMO ta có

$$OM^2 = OP.PA \Leftrightarrow x^2 = a(a-x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + ax - a^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a \text{ (vì } x > 0).$$

Vậy để $ME // AB$ thì M nằm trên nửa đường tròn (O') sao cho $MO = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$. □

➢**Nhận xét.** Có ít bạn tham gia giải bài toán trên. Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nam: *Hoàng Đức Mạnh*, 9A, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; **Thanh Hoá**: *Nguyễn Hữu Hoàng*, 8B, THCS Trần Phú, Nông Cống; **Nghệ An**: *Trần Quang Huy*, 9B, THCS Lê Lợi, TP. Vinh; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Thị Trà*, 9D, THCS Liên Hương, Vũ Quang; **Quảng Ngãi**: *Võ Công Phát*, 9C, *Trần Thị Mỹ Ninh*, 9A, THCS Nghĩa Mỹ,

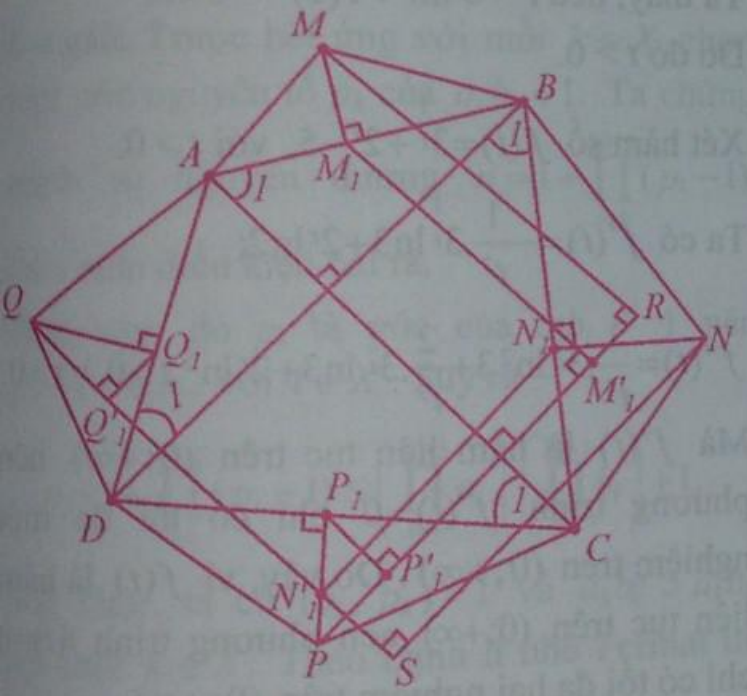
NGUYỄN THANH HỒNG

★**Bài T6/430.** *Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo AC, BD bằng nhau và vuông góc với nhau. Về phía ngoài tứ giác ta dựng các tam giác AMB, BNC, CPD, DQA đồng dạng cùng hướng với nhau. Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là trung điểm của MN, NP, PQ, QM. Chứng minh rằng tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ là hình vuông.*

Lời giải. Bổ đề. *Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo AC, BD bằng nhau và vuông góc với nhau. Các điểm X, Y, Z, T lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho* $\frac{AX}{AB} = \frac{BY}{BC} = \frac{CZ}{CD} = \frac{DT}{DA}$. *Khi đó XZ = YT và XZ ⊥ YT.*

Bổ đề này khá quen thuộc. Bạn đọc có thể sử dụng phép quay vectơ với góc quay 90° để chứng minh rằng $R_{90^\circ}(\overrightarrow{XZ}) = \overrightarrow{YT}$).

Trở lại bài **T6/430.**



Ta sẽ chứng minh $MP \perp NQ$ và $MP = NQ$. Thật vậy, dựng $QS \parallel AC$; $NS \parallel BD$; $PR \parallel BD$; $MR \parallel AC$; $MM_1 \perp AB$; $NN_1 \perp BC$; $PP_1 \perp CD$; $QQ_1 \perp AD$; $M_1M'_1 \perp PR$; $P_1P'_1 \perp PR$; $N_1N'_1 \perp QS$; $Q_1Q'_1 \perp QS$ (hình vẽ). Từ giả thiết bài toán có

$$\frac{MM_1}{AB} = \frac{NN_1}{BC} = \frac{PP_1}{CD} = \frac{QQ_1}{DA} = k \qquad (1)$$

và $$\frac{AM_1}{AB} = \frac{BN_1}{BC} = \frac{CP_1}{CD} = \frac{DQ_1}{DA} \qquad (2)$$

Từ (2), theo Bổ đề trên thì $M_1P_1 = N_1Q_1$, suy ra $M'_1P'_1 = N'_1Q'_1$.

Tiếp theo, ta chứng minh

$$PP'_1 + M'_1R = QQ'_1 + N'_1S.$$

Thật vậy, ta có

$$PP'_1 = PP_1.\cos\widehat{C_1};\ M'_1R = MM_1.\cos\widehat{A_1}.$$

Từ (1) ta thấy

$$PP'_1 + M'_1R = k(CD.\cos\widehat{C_1} + AB.\cos\widehat{A_1}) = k.AC.$$

Tương tự có

$$QQ'_1 + N'_1S = k(DA.\cos\widehat{D_1} + BC.\cos\widehat{B_1}) = k.BD,$$

do $AC = BD$ nên $RP = QS$. Tương tự $MR = SN$.

Ta thấy $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{RP}$ (3)

Quay các vectơ vế phải của đẳng thức (3) một góc 90° thì khi đó $\overrightarrow{MR} \mapsto \overrightarrow{NS}$ và $\overrightarrow{RP} \mapsto \overrightarrow{SQ}$, suy ra $\overrightarrow{MP} \mapsto \overrightarrow{QN}$, hay $\overrightarrow{QN}$ là ảnh của $\overrightarrow{MP}$ qua phép quay vectơ với góc quay 90° nói trên. Vậy nên $MP \perp QN$ và $MP = QN$.

Từ đó dễ dàng thấy tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ là một hình vuông (đpcm).❐

➢**Nhận xét.** 1) Hầu hết các lời giải các bạn gửi các về đều sử dụng tính chất của phép quay vectơ để giải bài toán này.

2) Số lời giải gửi về Tòa soạn không nhiều. Các bạn sau có lời giải tốt:

Hòa Bình: *Lê Đức Việt*, 11CT, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Hưng Yên**: *Nguyễn Trung Hiếu*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nam Định**: *Vũ Tuấn Anh*, 11 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình**: *Trịnh Thị Thùy Dương, Nguyễn Hải Linh Chi*, 11 Toán 1, THPT chuyên Thái Bình; **Nghệ An**: *Phan Xuân Đức*, 11C4, THPT Nam Đàn 2, Nam Đàn; **Long An**: *Chu Thị Thu Hiền*, 11T, THPT chuyên Long An.

HỒ QUANG VINH

★**Bài T7/430.** *Hãy tìm công thức tính số các số tự nhiên chia hết cho 3, mỗi số gồm 2013 chữ số lấy từ tập hợp $X = \{3;5;7;9\}$.*

Lời giải. Vì tập hợp X có 4 phần tử khác không nên từ các chữ số của X ta viết được 4^n số tự nhiên, mỗi số gồm n chữ số.

Gọi S_n là số các số tự nhiên chia hết cho 3, mỗi số gồm n chữ số lấy từ tập hợp X.

Dễ thấy $S_1 = 2$.

Gọi P_n là số các số tự nhiên không chia hết cho 3, mỗi số gồm n chữ số lấy từ tập hợp X. Ta có $S_n + P_n = 4^n$ $(n = 1,2,3...)$.

Ta tính S_{n+1} như sau:

Giả sử A là số tự nhiên bất kì gồm n chữ số lấy từ tập hợp X, có các trường hợp sau :

Nếu A chia hết cho 3 thì ta viết thêm chữ số 3 hoặc chữ số 9 vào bên phải của A để được một số chia hết cho 3, gồm $n+1$ chữ số lấy từ tập hợp X.

Nếu A chia cho 3 dư 1 thì ta viết thêm chữ số 5 vào bên phải của A để được một số chia hết cho 3, gồm $n+1$ chữ số lấy từ tập hợp X.

Nếu A chia cho 3 dư 2 thì ta viết thêm chữ số 7 vào bên phải của A để được một số chia hết cho 3, gồm $n+1$ chữ số lấy từ tập hợp X.

Do đó $S_{n+1} = 2S_n + P_n$ thay $S_n + P_n = 4^n$, ta được $S_{n+1} - S_n = 4^n$ $(n = 1,2,3...)$.

Ta có

$$S_n = (S_n - S_{n-1}) + (S_{n-1} - S_{n-2}) + ... + (S_2 - S_1) + 2$$
$$= 4^{n-1} + 4^{n-2} + ... + 4 + 2 = \frac{4^n + 2}{3}.$$

Vậy số phải tính là $S_{2013} = \dfrac{4^{2013} + 2}{3}$.□

➢**Nhận xét.** 1) Điều mấu chốt của bài toán là tìm được hệ thức $S_{n+1} - S_n = 4^n$ $(n = 1,2,3...)$.

Nhiều bạn đã chứng minh rằng $\begin{cases} S_{n+1} = 2S_n + P_n \\ P_{n+1} = 2S_n + 3P_n \end{cases}$, từ đó suy ra $S_{n+1} = 5S_n - 4S_{n-1}$. Làm như vậy thì lời giải sẽ dài và phức tạp.

Một số bạn sử dụng số phức để giải bài toán bằng cách: Xét đa thức là khai triển của $G(x) = (x^3 + x^5 + x^7 + x^9)^n$; có S_n bằng tổng các hệ số của các số hạng là lũy thừa của x với số mũ chia hết cho 3; giả sử ω là số thỏa mãn $1 + \omega + \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega^3 = 1$; chứng minh rằng $3S_n = G(1) + G(\omega) + G(\omega^2)$; từ đó suy ra kết quả bài toán. Cách giải này độc đáo nhưng không dễ hiểu với số đông bạn đọc.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hưng Yên: *Nguyễn Trung Hiếu*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình**: *Nguyễn Hải Linh Chi*, *Trịnh Thị Thùy Dương*, 11 Toán 1, THPT chuyên Thái Bình; **Thái Nguyên**: *Phạm Thanh Bình*, 11A1, THPT Lương Phú, Phú Bình; **Nghệ An**: *Trịnh Văn Cương*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Thị Thùy Linh*, 10A1, THPT Hương Khê; **Quảng Trị**: *Trần Đức Anh*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Gia Lai**: *Trần Nguyên Try*, 11C3, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Pleiku; **Long An**: *Chu Thị Thu Hiền*, 11T, THPT chuyên Long An; **Tiền Giang**: *Nguyễn Minh Thành*, 10 Toán, THPT chuyên Tiền Giang.

NGUYỄN ANH DŨNG

★**Bài T8/430.** *Giải phương trình*

$$\log_2 x = \log_{5-x} 3.$$

Lời giải. Điều kiện $x \in (0;5)$ và $x \neq 4$. Đặt $t = \log_2 x$.

Nhận thấy $x = 1$ không là nghiệm của phương trình, nên $t \neq 0$.

Ta có $x = 2^t$ và $\log_{5-x} 3 = t \Leftrightarrow \log_3(5-x) = \dfrac{1}{t}$

$$\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{t}} = 5 - x \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{t}} + 2^t - 5 = 0 \qquad (1)$$

Ta thấy, nếu $t < 0$ thì VT(1) $< -3 < 0$.

Do đó $t > 0$.

Xét hàm số $f(t) = 3^{\frac{1}{t}} + 2^t - 5$, với $t > 0$.

Ta có $f'(t) = -\dfrac{1}{t^2}.3^{\frac{1}{t}}\ln 3 + 2^t \ln 2$;

$$f''(t) = \frac{1}{t^4}.3^{\frac{1}{t}}.\ln^2 3 + \frac{2}{t^3}.3^{\frac{1}{t}}.\ln 3 + 2^t \ln^2 2 > 0, \forall t > 0.$$

Mà $f'(t)$ là hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ nên phương trình $f'(t) = 0$ chỉ có tối đa một nghiệm trên $(0;+\infty)$. Do vậy, vì $f(t)$ là hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ nên phương trình $f(t) = 0$ chỉ có tối đa hai nghiệm trên $(0;+\infty)$.

Nhận thấy $t = 1$ và $t = \log_2 3$ là hai nghiệm của $f(t) = 0$ trên $(0;+\infty)$, do đó phương trình $f(t) = 0$ chỉ có hai nghiệm nói trên.

Suy ra, phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 2$ và $x = 3$.□

➢**Nhận xét.** Tòa soạn nhận được nhiều lời giải cho bài toán này và phần lớn các lời giải là đúng, đi theo các hướng tương tự như trên. Bạn *Nguyễn Văn Hải*, 11B,

+1 và $2n+1$) và giải phương trình $\log_n x = \log_{2n+1-x}(n+1)$.

uyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

oà Bình: *Hoàng Bảo Linh*, 10 Toán, THPT chuyên oàng Văn Thụ; **Thái Bình**: *Nguyễn Hải Linh Chi, rịnh Thị Thuỳ Dương*, 11T1, THPT chuyên Thái ình; **Thanh Hóa**: *Trần Trung Đức*, 10A6, THPT Đào uy Từ, TP. Thanh Hoá; **Nghệ An**: *Đặng Đình Lâm*, 0A1, THPT chuyên ĐH Vinh, *Nguyễn Tất Kiên, Đậu ồng Quân*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Tiền iang**: *Cao Huy Phong*, Lớp 10T, THPT chuyên Tiền iang; **Đồng Tháp**: *Nguyễn Thành Thi*, 11T, THPT huyên Nguyễn Quang Diêu, TX. Cao Lãnh.

TẠ NGỌC TRÍ

★Bài T9/430. *Cho 4026 số nguyên dương $a_1, a_2, \ldots, a_{2013}, b_1, b_2, \ldots, b_{2013}$ thỏa mãn $b_k > 1$ ới mọi k thuộc tập $X = \{1, 2, \ldots, 2013\}$. hứng minh rằng tồn tại số nguyên dương n hỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

) $n \le \left(\prod_{i=1}^{2013} a_i\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{2013} b_i\right) + 1$;

) $a_k b_k^n + 1$ *là hợp số với mỗi* $k \in X$.

ời giải. Trước hết ứng với mỗi $k \in X$, chọn một ước nguyên tố p_k của $a_k b_k + 1$. Ta chứng minh số nguyên dương $n = 1 + \prod_{i=1}^{2013}(p_i - 1)$ thỏa mãn điều kiện bài ra.

Thật vậy, do p_i là ước của $a_i b_i + 1$ nên $p_i - 1 \le a_i b_i$, với $i \in X$. Suy ra

$$n = 1 + \prod_{i=1}^{2013}(p_i - 1) \le \left(\prod_{i=1}^{2013} a_i\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{2013} b_i\right) + 1.$$

Mặt khác, ta có $(b_k, p_k) = 1$ và $a_k b_k^n > a_k b_k$ với mọi $k \in X$. Theo Định lí nhỏ Fermat thì

$$b_k^{p_k - 1} \equiv 1 \pmod{p_k} \Rightarrow b_k^{1 + \prod_{i=1}^{2013}(p_i - 1)} \equiv b_k \pmod{p_k}.$$

Vì thế nên

$$a_k b_k^n + 1 = a_k b_k^{1 + \prod_{i=1}^{2013}(p_i - 1)} + 1 \equiv a_k b_k + 1 \pmod{p_k}$$

$$\equiv 0 \pmod{p_k}$$

ức là $a_k b_k^n + 1$ là hợp số.□

Hà Nam: *Đinh Công Vinh*, 11T, THPT chuyên Biên Hòa; **Hà Nội**: *Phạm Công Sơn*, 10A1 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội.

NGUYỄN VĂN MẬU

★Bài T10/430. *Cho các số $a, b, c \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng*

$$a^3 + b^3 + c^3 + 4abc \le \frac{9}{32}.$$

Lời giải. Do $a \le \frac{1}{2} \Rightarrow \left(a - \frac{1}{4}\right)^2 \left(a - \frac{1}{2}\right) \le 0$.

Khai triển ra ta được $a^3 - a^2 + \frac{5}{16}a - \frac{1}{32} \le 0$

$$\Rightarrow a^3 \le a^2 - \frac{5}{16}a + \frac{1}{32} \qquad (1)$$

Tương tự $b^3 \le b^2 - \frac{5}{16}b + \frac{1}{32}$, $c^3 \le c^2 - \frac{5}{16}c + \frac{1}{32}$.

Bởi vậy $a^3 + b^3 + c^3 \le (a^2 + b^2 + c^2) - \frac{5}{16}(a + b + c)$

$$+ \frac{3}{32} = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{5}{16} + \frac{3}{32} = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{7}{32}$$

$$= (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) - \frac{7}{32}$$

$$= 1 - 2(ab + bc + ca) - \frac{7}{32} = \frac{25}{32} - 2(ab + bc + ca).$$

Do đó

$$a^3 + b^3 + c^3 + 4abc \le \frac{25}{32} - 2(ab + bc + ca) + 4abc$$

$$= \frac{25}{32} + \frac{1}{2}(2a - 1)(2b - 1)(2c - 1) - (a + b + c) + \frac{1}{2}$$

$$\le \frac{25}{32} - 1 + \frac{1}{2} = \frac{9}{32}.$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a, b, c \in \left\{\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right\}$ và trong a, b, c có một số bằng $\frac{1}{2}$, tức là $(a; b; c)$ là một hoán vị của các số $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$.□

➢**Nhận xét.** 1) Trong chứng minh ta không dùng đến giả thiết $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$. Khó khăn của bài toán là xác định "điểm rơi" $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$ để viết được bất đẳng thức (1).

2) Các bạn sau có lời giải gọn gàng như lời giải trên: **Hưng Yên**: *Nguyễn Trung Hiếu*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nam Định**: *Vũ Đức Tài*, 9A3, THCS Trần Đăng Ninh; **Thái Bình**: *Nguyễn Phương Nam*, 11T2, THPT chuyên Thái Bình; **Nghệ An**: *Nguyễn Tất Hải Ngọc*, 10T1, *Lê Phi Anh*, *Lê Thị Huyền Trang*, 10T2, THPT Đô Lương 1, *Phùng Thị Mây*, 10A3, THPT Đô Lương 3; **TP. Hồ Chí Minh**: *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★**Bài T11/429.** *Cho p là số nguyên tố sao cho* $p \equiv 1 \pmod 4$. *Hãy tính*

$$\sum_{k=1}^{p-1}\left(\left[\frac{2k^2}{p}\right]-2\left[\frac{k^2}{p}\right]\right).$$

trong đó $[a]$ *kí hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá a.*

Lời giải. (Theo bạn *Trần Thị Mỹ Linh*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**)

Dễ chứng minh được rằng

$$2\{x\}-\{2x\}=\begin{cases}0 \text{ nếu } \{x\}<\frac{1}{2}\\ 1 \text{ nếu } \{x\}\geq\frac{1}{2}\end{cases} \qquad (1)$$

ở đó $\{x\}=x-[x]$ là phần lẻ của số thực x.

Ta có $A=\sum_{k=1}^{p-1}\left(\left[\frac{2k^2}{p}\right]-2\left[\frac{k^2}{p}\right]\right)$

$$=\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{2k^2}{p}-\left\{\frac{2k^2}{p}\right\}-\frac{2k^2}{p}+2\left\{\frac{k^2}{p}\right\}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{p-1}\left(2\left\{\frac{k^2}{p}\right\}-\left\{\frac{2k^2}{p}\right\}\right).$$

Do (1) nên A bằng số các số $k \in \{1, 2, ..., p-1\}$ mà $k^2 \equiv i \pmod p$ với $i > \frac{p}{2}$.

Bổ đề. Với mọi $a \in \{1, 2, ..., p-1\}$ tồn tại $b \in \{1, 2, ..., p-1\}$ sao cho $a^2+b^2 \equiv 0 \pmod p$ $(b \neq a)$.

Thật vậy do $p \equiv 1 \pmod 4$ nên tồn tại $d \in \{1, 2, ..., p-1\}$ sao cho $d^2 \equiv -1 \pmod p$. Khi đó tồn tại $b \in \{1, 2, ..., p-1\}$ sao cho $b \equiv da \pmod p$.

Thành thử $a^2+b^2 \equiv a^2d^2a^2 = a^2(d^2+1) \equiv 0 \pmod p$.

Ta có $a \neq b$, vì nếu $a = b$ thì $a^2+b^2 = 2a^2 \equiv 0 \pmod p \Rightarrow a \equiv 0 \pmod p$, điều này vô lí. Bổ đề được chứng minh.

Như vậy tập $\{1, 2, ..., p-1\}$ được phân thành $\frac{p-1}{2}$ cặp $(a; b)$ với $a^2+b^2 \equiv 0 \pmod p$.

Trong mỗi cặp này rõ ràng luôn có duy nhất mỗi số $k \in \{a, b\}$ mà $k^2 \equiv i \pmod p$ với $i > \frac{p}{2}$. Thành thử $A = \frac{p-1}{2}$. □

➢**Nhận xét.** 1) Các bạn tham gia giải bài toán này đều có lời giải đúng. Một số bạn đã chứng minh lại kết quả quen biết: *Nếu* $p \equiv 1 \pmod 4$ *thì tồn tại* $d \in \mathbb{Z}$ *để* $d^2 \equiv -1 \pmod p$ bằng Định lí Wilson.

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Thái Bình: *Hoàng Trung Kiên*, *Trịnh Thị Thùy Dương*, 11 Toán 1, THPT chuyên Thái Bình; **Thái Nguyên**: *Nguyễn Văn Tuyến*, 11A11 K25, THPT Đồng Hỷ; **Hà Nội**: *Nguyễn Chí Tùng*, 11 Toán 1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Hòa Bình**: *Đặng Hữu Hiếu*, 12 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Hưng Yên**: *Nguyễn Trung Hiếu*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An**: *Nguyễn Văn Sơn*, *Lê Hồng Đức*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Quảng Trị**: *Trần Đức Anh*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★**Bài T12/430.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Điểm M không thuộc các đường thẳng BC, CA, AB và đường tròn (O); AM, BM, CM theo thứ tự cắt lại đường tròn (O) tại* A_1, B_1, C_1. *Các điểm* A_2, B_2, C_2 *theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MBC, MCA, MAB. Chứng minh rằng ba đường thẳng* A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 *đồng quy tại một điểm thuộc đường tròn (O).*

Lời giải. Gọi P là giao điểm thứ hai của A_1A_2 với đường tròn (O) (hình vẽ).

Ta có

$(A_1C, A_1B_1) \equiv (BC, BB_1) \pmod \pi$ (vì $B \in (A_1CB_1)$)

$\equiv (BC, BM) \pmod \pi$ (vì $M \in BB_1$)

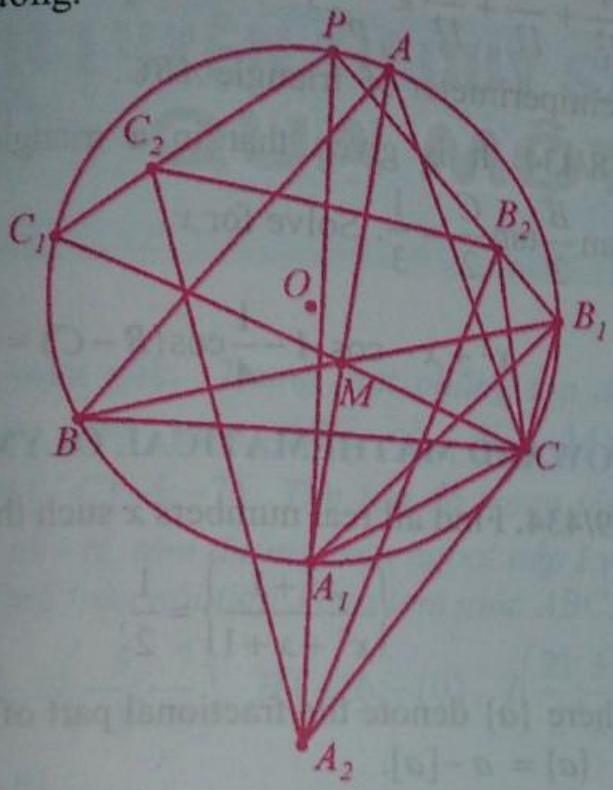
$\equiv \frac{1}{2}(\overline{A_2C}, \overline{A_2M}) \pmod \pi$ (vì $B \in (MBC)$ và A_2

$\equiv (A_2C, A_2B_2) (\bmod \pi)$ (vì $A_2C = A_2M; A_2B_2 \perp CM$).

Tương tự $(B_1C, B_1A_1) \equiv (B_2C, B_2A_2) (\bmod \pi)$.

Vậy các tam giác CA_1B_1 và CA_2B_2 đồng dạng cùng hướng.

Do đó các tam giác CA_1A_2, CB_1B_2 đồng dạng cùng hướng.



Từ đó, chú ý rằng $A_2 \in PA_1; P \in (CA_1B_1)$, suy ra $(PA_1, B_2B_1) \equiv (A_2A_1, B_2B_1) \equiv (CA_1, CB_1)$

$$\equiv (PA_1, PB_1) (\bmod \pi).$$

Điều đó có nghĩa là B_1B_2 đi qua P.

Tương tự C_1C_2 đi qua P.

Tóm lại A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy tại một điểm thuộc đường tròn (O) (điểm P).□

➢**Nhận xét.** Bài toán này không khó nhưng chỉ có năm bạn tham gia giải, trừ bạn *Trịnh Văn Cương*, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**, bốn bạn còn lại đã biết sử dụng góc định hướng để tránh tình trạng phép chứng minh phụ thuộc hình vẽ. Xin nêu tên cả bốn bạn:

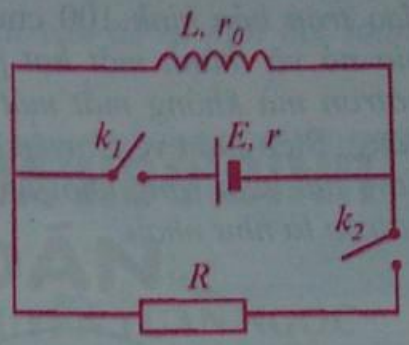
Thái Bình: *Trịnh Thị Thuỳ Dương, Nguyễn Hải Linh Chi*, 11T, THPT chuyên Thái Bình; **Nam Định**: *Vũ Tuấn Anh*, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hưng Yên**: *Nguyễn Trung Hiếu*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên.

NGUYỄN MINH HÀ

★**Bài L1/430.** *Cho mạch điện như hình vẽ: nguồn điện có suất điện động E, điện trở trong r, cuộn cảm có điện trở r_0 và độ tự cảm L, điện trở R.*

1) Lúc đầu k_1 mở, k_2 đóng. Tìm cường độ dòng điện qua nguồn, qua cuộn cảm và qua điện trở nếu ngay sau đó ta đóng k_1. Các dòng này bằng bao nhiêu khi mạch đã đạt trạng thái ổn định?

2) Lúc đầu k_1 và k_2 đều đóng. Nếu sau đó ta ngắt k_1. Tính điện lượng dịch chuyển qua cuộn dây khi mạch đã đạt trạng thái ổn định. Hãy chứng tỏ năng lượng từ trường của cuộn cảm đã chuyển hóa thành nhiệt trên các điện trở.



Lời giải. 1) Ngay sau khi đóng khóa k_1, dòng điện qua nguồn và R có cường độ

$I_E = I_R = \dfrac{E}{R+r} = \dfrac{E}{2R_0}$, còn dòng điện qua L bằng không do có hiện tượng tự cảm.

Khi mạch điện đã ổn định thì

$$I_E = \frac{2E}{3R_0};\ I_L = I_R = \frac{E}{3R_0}.$$

2) Điện lượng dịch chuyển qua cuộn dây trong thời gian rất nhỏ dt là d$q = i$.dt.

Theo định luật Ôm $i = \dfrac{e_{tc}}{R+r_0} = -\dfrac{L}{2R_0}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

Suy ra $\mathrm{d}q = -\dfrac{L}{2R_0}\mathrm{d}i$.

Điện lượng chuyển qua cuộn dây sau khi ngắt khóa k_1 là

$q = \int_{I_0}^{0} \mathrm{d}q = -\dfrac{L}{2R_0}\int_{I_0}^{0} \mathrm{d}i = \dfrac{LE}{6R_0^2}$ (với $I_0 = \dfrac{E}{3R_0}$ là cường độ dòng điện trước khi ngắt khóa k_1).

Nhiệt lượng tỏa ra trên R và r_0 trong thời gian rất nhỏ dt là

$$\mathrm{d}Q = i^2(R+r_0)\mathrm{d}t = i(R+r_0)\mathrm{d}q = -Li\mathrm{d}i.$$

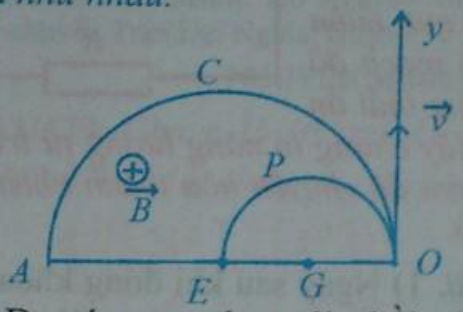
Nhiệt lượng tổng cộng tỏa ra trên R và r_0 sau khi ngắt khóa k_1 là $Q = \int_{I_0}^{0} \mathrm{d}Q = \dfrac{LI_0^2}{2}$.

Như vậy năng lượng từ trường đã chuyển hóa hết thành nhiệt tỏa ra trên R và r_0.□

➢**Nhận xét.** Bạn *Nguyễn Nhật Hãn*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi** có lời giải tốt.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★**Bài L2/430.** *Một hạt đơtêron chuyển động trong máy xyclôtron có từ trường B theo quỹ đạo tròn bán kính* 100 cm. *Do va chạm với bia nó vỡ thành một hạt prôton và một hạt nơtron mà không mất mát đáng kể về động năng. Biện luận về chuyển động tiếp theo của từng hạt. Coi rằng khối lượng của prôton và nơtron là như nhau.*



Lời giải. Do có sự va chạm đàn hồi nên ta áp dụng định luật bảo toàn động lượng và bảo toàn động năng. Gọi $\vec{v}$, m_D là vận tốc và khối lượng của đơtêron trước khi vỡ; m_p, $\vec{v}_1$ là khối lượng và vận tốc của prôton; m_n, $\vec{v}_2$ là khối lượng và vận tốc của nơtron.

Theo định luật bảo toàn động lượng ta có

$$m_D\vec{v} = m_p\vec{v}_1 + m_n\vec{v}_2 \Leftrightarrow 2uv = uv_1 + uv_2 \quad (1)$$

Theo định luật bảo toàn động năng ta có

$$\frac{1}{2}m_D v^2 = \frac{1}{2}m_p v_1^2 + \frac{1}{2}m_n v_2^2 \Leftrightarrow 2uv^2 = uv_1^2 + uv_2^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta suy ra $v_1 = v_2 = v$.

• Vì nơtron không mang điện nên khi chuyển động trong từ trường nó không chịu tác dụng của lực Lorentz, hạt nơtron vẫn chuyển động thẳng đều theo đường Oy tiếp xúc với quỹ đạo C tại O.

• Prôton mang điện dương nên chịu tác dụng của lực Lorentz, hạt prôton sẽ chuyển động tròn theo quỹ đạo P và cùng phía với đường tròn C đối với Oy với bán kính

$$r_p = \frac{m_p v}{|e|B} = \frac{1}{2}r_D = 50 \text{ (cm)}. \square$$

➢**Nhận xét.** Bạn *Nguyễn Nhật Hãn*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi** giải đúng. Tuy nhiên phần lập luận về quỹ đạo chuyển động của hạt nơtron và prôton cần chặt chẽ, rõ ràng hơn.

ĐẶNG THANH HẢI

they intersect these sides at points M, N, P, Q, R and S ($M, S \in AB$; $N, P \in AC$; $Q, R \in BC$). Let l_1, l_2, l_3, be the lengths of the internal angle-bisectors from A, B, C of triangles AMN, BSR and CPQ respectively. Prove that $\frac{1}{l_1^2}+\frac{1}{l_2^2}+\frac{1}{l_3^2} \geq \frac{81}{p^2}$, where p denotes the semiperimeter of triangle ABC.

T8/434. It is given that in a triangle ABC, $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$. Solve for x

$$x^2 + x - \cos A - \frac{1}{4}\cos(B - C) = 0.$$

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/434. Find all real numbers x such that

$$\left\{\frac{x^2+1}{x^2+x+1}\right\} = \frac{1}{2}$$

where $\{a\}$ denote the fractional part of a, that is $\{a\} = a - [a]$.

T10/434. Consider the sequence (x_n),

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} + \frac{2}{x_n^2} + \frac{3}{x_n^3} + \ldots + \frac{2011}{x_n^{2011}} + \frac{2012}{x_n^{2012}},$$

$(n \in \mathbb{N}^*)$.

where $x_1 > 0$ is given. Determine all values of α such that the sequence (nx_n^α) has a non-zero limit.

T11/434. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$f(xf(y)+3y^2)+f(3xy+y) = f(3y^2+x)+4xy-x+y$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$.

T12/434. Let G be the centroid of a tetrahedron $ABCD$. Points X, Y, Z, T are chosen on the faces (BCD), (CDA), (DAB), and (ABC) respectively such that XY, YZ, ZT, TX are parallel to GA, GB, GC and GD. Determine the volume ratio of the two tetrahedrons $ABCD$ and $XYZT$.

DẠY HỌC TOÁN

Thông thường đa số học sinh chúng ta chỉ biết giải quyết những "bài toán" mà người khác đặt ra cho mình, mà ít khi tự mình đặt ra những "vấn đề" khác tự giải quyết. Để tập dượt cho học sinh biết cách đặt "vấn đề" và rèn luyện tư duy sáng tạo, chúng tôi xin nêu cách đặt vấn đề từ một bài toán quen thuộc sau đây.

RÈN LUYỆN TƯ DUY SÁNG TẠO CỦA HỌC SINH QUA MỘT BÀI TOÁN

NGUYỄN TUẤN NGỌC
(GV THPT chuyên Tiền Giang)

Bài toán gốc. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;-14)$, $B(-2;14)$, $C(-5;-7)$. Tìm tọa độ trọng tâm G, trực tâm H, tâm đường tròn ngoại tiếp I và tâm đường tròn nội tiếp J của tam giác ABC.*

Đáp số. $G\left(-\frac{5}{3};-\frac{7}{3}\right)$, $H(-26;-10)$, $I\left(\frac{21}{2};\frac{3}{2}\right)$, $J(-2;-6)$.

Đây là một bài toán cơ bản đối với học sinh lớp 10, tuy nhiên nếu biết cách đặt vấn đề ta có thể tạo ra những bài toán từ dễ đến khó. Cụ thể như sau:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC và tọa độ của ba trong bảy điểm A, B, C, G, H, I, J (trong đó biết nhiều nhất tọa độ của hai đỉnh tam giác). Hãy tìm tọa độ của các đỉnh còn lại của tam giác.

Tùy vào trình độ học sinh mà ta lựa chọn ba điểm thích hợp. Đối với học sinh trung bình – khá, ta có thể lựa chọn các bộ ba điểm gồm hai đỉnh (*A*, *B*) và một tâm sau đây, hãy tìm tọa độ đỉnh *C*.

Bài 1. $A(2;-14)$, $B(-2;14)$, $G\left(-\frac{5}{3};-\frac{7}{3}\right)$.

Lời giải. Theo tính chất trọng tâm ta có

$$\begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B = -5 \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B = -7. \end{cases}$$

Vậy $C(-5;-7)$.❑

Bài 2. $A(2;-14)$, $B(-2;14)$, $H(-26;-10)$.

Lời giải. Đường thẳng *AC* qua *A*, có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{BH}=(-24;-24)$ nên PT

$AC: x+y+12=0$ (1)

Tương tự PT $BC: 7x-y+28=0$ (2)

Từ đó, tọa độ điểm *C* là nghiệm của HPT gồm (1) và (2). Tìm được $C(-5;-7)$.❑

Bài 3. $A(2;-14)$, $B(-2;14)$, $I\left(\frac{21}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải. Đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* với tâm $I\left(\frac{21}{2};\frac{3}{2}\right)$, bán kính $R=IA=\frac{25\sqrt{2}}{2}$

có PT là $\left(x-\frac{21}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{625}{2}$ (1)

Điểm *C* nằm trên đường tròn (*I*, *R*) nên tọa độ điểm *C* thỏa mãn PT (1). Và rõ ràng tất cả các điểm nằm trên đường tròn (*I*, *R*), trừ hai điểm *A* và *B*, đều thỏa mãn. Do đó bài toán có vô số nghiệm hình.❑

Bài 4. $A(2;-14)$, $B(-2;14)$, $J(-2;-6)$.

Lời giải

Cách 1. PT $AB: 7x+y=0$.

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác *ABC* là $r=d(J,AB)=2\sqrt{2}$.

Đường thẳng AC là tiếp tuyến thứ hai của đường tròn nội tiếp kẻ từ A (trừ AB)) nên PT $AC: x+y+12=0$.

Tương tự PT $BC: 7x-y+28=0$.

Từ đó, theo Bài 2 tọa độ điểm $C(-5;-7)$.

Cách 2. PT đường thẳng $AJ: 2x+y+10=0$. Gọi B' là điểm đối xứng với B qua AJ. Khi đó, $B'(-18;6)$. Đường thẳng AC qua hai điểm A và B' có PT $AC: x+y+12=0$.

Tương tự PT $BC: 7x-y+28=0$.

Từ đó tìm được $C(-5;-7)$.❑

Đối với học sinh khá, giỏi ta có thể lựa chọn các bộ ba điểm gồm một đỉnh A và hai tâm sau đây. Tìm tọa độ hai đỉnh B và C.

Bài 5. $A(2;-14)$, $H(-26;-10)$, $I\left(\frac{21}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Bài 6. $A(2;-14)$, $G\left(-\frac{5}{3};-\frac{7}{3}\right)$, $I\left(\frac{21}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Bài 7. $A(2;-14)$, $G\left(\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right)$, $H(-26;-10)$.

Ba bài toán này có lời giải tương tự nhau nhờ vào Bổ đề 1 sau đây.

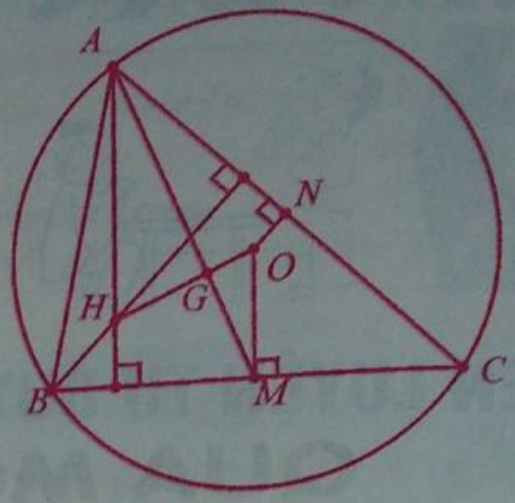
Bổ đề 1 (Đường thẳng Euler) (*Bài toán 3 – Sách giáo khoa Hình học 10 Nâng cao – trang 21 và bài toán 3 – Sách giáo khoa Hình học 11 Nâng cao – trang 28*).

Cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Khi đó O, G, H thẳng hàng và $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.

Chứng minh. (h.1) Ngoài hai cách chứng minh dựa vào biểu diễn vectơ và phép vị tự như trong sách giáo khoa, xin nêu thêm một cách chứng minh dựa vào tích vô hướng sau đây.

Đặt $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OH}=(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IH})$ $+(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC})=\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{OM}$.

Tương tự $\vec{u}=\overrightarrow{HB}+2\overrightarrow{ON}$, trong đó M, N lần lượt là trung điểm của BC và AC.



Hình 1

Vì $\overrightarrow{HA}\perp\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{HB}\perp\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{ON}\perp\overrightarrow{AC}$ nên $\vec{u}.\overrightarrow{BC}=\vec{u}.\overrightarrow{AC}=0$. Mà $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên $\vec{u}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$ (hệ thức trọng tâm).❑

Trở lại bài toán 5, 6, 7, do Bổ đề 1, nếu biết tọa độ của hai trong ba điểm I, G, H ta sẽ biết tọa độ của điểm còn lại. Do đó ta quy về giải quyết bài toán khi biết tọa độ của bốn điểm A, I, G, H.

Ta thấy, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với tâm $I\left(\frac{21}{2};\frac{3}{2}\right)$, bán kính $R=IA=\frac{25\sqrt{2}}{2}$ có phương trình $\left(x-\frac{21}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{625}{2}$ (1)

Gọi M là trung điểm của BC. Ta có $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$, từ đó $M\left(-\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right)$. Đường thẳng BC qua điểm M và nhận $\overrightarrow{AH}=(-28;4)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình $7x-y+28=0$.

Tọa độ hai điểm B và C là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}7x-y+28=0\\ \left(x-\frac{21}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{625}{2}\end{cases}$.

Giải HPT ta được $B(-2;14)$, $C(-5;-7)$ hoặc $B(-5;-7)$, $C(-2;14)$.❑

Nhận xét. Một bài toán trong Đề thi đại học khối D năm 2010 có nội dung tương tự như sau:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A(3; –7), trực tâm H(3; –1), tâm đường tròn ngoại tiếp I(–2; 0). Xác định tọa độ đỉnh C, biết rằng C có hoành độ dương.

Xem đáp án của Bộ Giáo dục và Đào tạo, ta thấy rõ ràng nếu chỉ dùng công cụ *giải tích* để giải quyết bài toán sẽ gặp khó khăn hơn khi không có sự trợ giúp của tính chất *hình học*. Điển hình hơn là Bài toán 8 sau.

Bài 8. *Cho* $A(2;-14)$, $I\left(\frac{21}{2};\frac{3}{2}\right)$, $J(-2;-6)$.

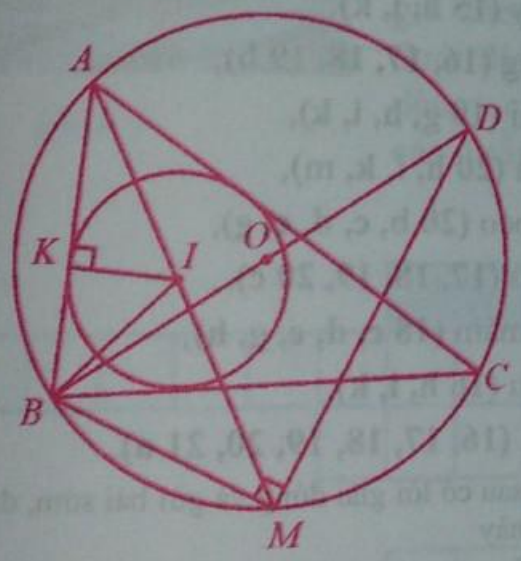
Xác định các tọa độ đỉnh B, C.

Để giải quyết Bài 8 ta cần kết quả sau

Bổ đề 2. (Hệ thức Euler) (*Bài tập 65 – Bài tập Hình học 10 Nâng cao – trang 48*).

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R) và ngoại tiếp đường tròn (I; r). Khi đó $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

Chứng minh. (h.2)



Hình 2

Gọi M là giao điểm thứ hai của AI với đường tròn $(O; R)$. Dễ thấy tam giác IBM cân tại M. Do đó $IM = BM$.

Gọi D là giao điểm thứ hai của BO với đường tròn $(O; R)$ và K là giao điểm của AB với $(I; r)$.

Ta có $\Delta AKI \backsim \Delta DMB$ nên $AI.\,MB = DB.\,KI$ $\Rightarrow AI.\,IM = 2Rr$.

Mà $\mathscr{P}_{I/(O)} = OI^2 - R^2 = \overline{IA}.\overline{IM} = -IA.IM = -2Rr$.

Từ đó $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

Bây giờ quay lại Bài 8, ta có $IJ = \frac{5\sqrt{34}}{2}$, $R = IA = \frac{25\sqrt{2}}{2}$. Theo Bổ đề 2 ta có

$$IJ^2 = R^2 - 2Rr \Rightarrow r = \frac{R^2 - IJ^2}{2R} = 2\sqrt{2}.$$

Từ đó đường thẳng AB và AC là hai tiếp tuyến với đường tròn $(J; r)$ kẻ từ A nên có phương trình là $AB: 7x + y = 0$ và $AC: x + y + 12 = 0$ hoặc $AB: x + y + 12 = 0$ và $AC: 7x + y = 0$.

Tọa độ điểm B và C lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB và AC với đường tròn $(I; R)$ có phương trình $\left(x - \frac{21}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{625}{2}$.

Từ đó ta tìm được $B(-2;14)$, $C(-5;-7)$ hoặc $B(-5;-7)$, $C(-2;14)$. ❑

Ta thấy, chỉ qua một bài toán đơn giản ban đầu, nhưng biết cách đặt vấn đề ta đã tạo ra hàng loạt bài toán từ đơn giản đến phức tạp và để giải được chúng đòi hỏi học sinh phải biết vận dụng kiến thức một cách linh hoạt và sáng tạo.

Cuối cùng, xin dành cho bạn đọc các bài toán khi cho các bộ ba điểm còn lại:

Bài 9. *Cho* $A(2;-14)$, $H(-26;-10)$, $J(-2;-6)$.

Tìm tọa độ các đỉnh B, C.

Bài 10. *Cho* $A(2;-14)$, $G\left(\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right)$, $J(-2;-6)$.

Tìm tọa độ các đỉnh B, C.

Bài 11. $J(-2;-6)$, $I\left(\frac{21}{2};\frac{3}{2}\right)$, $G\left(-\frac{5}{3};-\frac{7}{3}\right)$, $H(-26;-10)$. *Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.*

(do Bổ đề 1, nếu biết tọa độ của hai trong ba điểm I, G, H ta sẽ biết tọa độ của điểm còn lại. Do đó ta quy về giải quyết bài toán khi biết tọa độ của bốn điểm J, I, G, H).