NGUYỄN BÁ ĐÔ - ĐỖ MẠNH HÙNG
NGUYỄN VĂN TÚC

CÁC CÂU CHUYỆN TOÁN HỌC

TẬP BA

KHẲNG ĐỊNH trong PHỦ ĐỊNH

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

$\frac{51}{GD-01}$ 82/328-01

Mã số : 8H664M1

LỜI NÓI ĐẦU

Biên soạn bộ sách này các tác giả không có ý định và cũng không thể mô tả một cách hoàn chỉnh và liền mạch từng vấn đề của toán học, đó là nhiệm vụ của sách giáo khoa. Mục đích của bộ sách này chỉ là khêu gợi sự say mê của bạn đọc, để từ đó tìm hiểu thêm về toán học. Trong quá trình từ *dạy* đến *học*, từ *học* đến *hiểu*, từ *hiểu* đến *dùng* và từ *dùng* đến *sáng tạo* đòi hỏi mỗi người phải tìm tòi, năng động. Sách giáo khoa chỉ cung cấp những điều cốt yếu, do vậy để hiểu đầy đủ hơn và sâu sắc hơn từng vấn đề, cần đọc những sách bổ trợ.

Bộ sách này gồm 6 tập:

- Tất nhiên trong ngẫu nhiên
- Cái đã biết trong cái chưa biết
- Khẳng định trong phủ định
- Hữu hạn trong vô hạn
- Đại lượng không đổi trong đại lượng biến đổi
- Hình tượng trong trừu tượng.

Các tập sách này độc lập với nhau, kể các câu chuyện lý thú về xác suất, phương trình, logic, giới hạn, hàm số, biểu đồ, ...

Sách phục vụ học sinh, giáo viên phổ thông và những người yêu thích toán.

Tập Ba này mang tên "***Khẳng định trong phủ định***", gồm những câu chuyển bổ ích, để bạn đọc hiểu thêm ý nghĩa sâu sắc của ***logic***.

Nhân đây các tác giả xin cảm ơn Giáo sư, Tiến sĩ khoa học toán học ***Nguyễn Duy Tiến*** đã cho những ý kiến bổ ích để hoàn chỉnh bản thảo, kỹ sư ***Vũ Bội Tuyền*** và cử nhân ***Hoàng Thăng*** đã giúp đỡ chúng tôi trong quá trình chuẩn bị bản thảo cho tập sách này.

CÁC TÁC GIẢ

1. Bắt đầu từ "Cuộc chiến giữa người và máy"

Tại một nhà hát chật ních người ở London, khán giả đang chăm chú theo dõi giáo sư ảo thuật biểu diễn tiết mục "Trí nhớ kỳ lạ", bỗng nhiên một tiếng nổ làm giáo sư ngã vật xuống. Nhân lúc mọi người đang nhốn nháo thì hung thủ đã bỏ trốn. Hôm sau, trên trang đầu của một tờ báo đã đăng vụ ám sát rợn người đó, một tờ báo khác cũng đăng nổi bật tin: "Hiện tại Tapuletin có hơn một nghìn máy tính bị hỏng, còn các nơi khác trên thế giới đã xảy ra hiện tượng nhiều máy tính ngừng hoạt động. Các nhà khoa học chưa lý giải được hiện tượng này, họ nói những máy tính đó không bị hỏng, thế mà không chịu làm việc"... "Đến nay tổng số máy tính ngừng hoạt động trên toàn thế giới đã lên tới hơn 25 000 chiếc"... "Cục trưởng Cục Hàng không vũ trụ của Mỹ chỉ rõ: Đây là vấn đề cực kỳ nghiêm trọng, nếu hiện tượng này cứ tiếp tục thì kế hoạch hàng không vũ trụ của chúng tôi sẽ bị vỡ, vì công việc của chúng tôi gắn liền với máy tính",...

Trên đây là tình tiết đầu tiên ghi chép, khám phá "bộ óc vạn năng" của cuốn tiểu thuyết khoa học viễn tưởng của nhà văn L.G. Alecxander người Anh.

"Bộ óc vạn năng" là cách gọi để ca ngợi giáo sư ảo thuật Masteman. Ông có trí nhớ thật kinh ngạc. Hôm đó ông đang biểu diễn tiết mục đặc sắc "Trí nhớ kỳ lạ" thì một người lạ mặt lên sân khấu đưa cho ông mảnh giấy viết một dãy các con số mà bốn chữ số đầu là 4967. Khi ông đang xem mảnh giấy thì người lạ mặt bắn vào ông.

Tình tiết tiếp sau của câu chuyện là Cục Hành động của Anh cử nhân viên điệp báo tài ba Kasti đột nhập lên hòn đảo Tolifos trên biển Aiclin. Trên đảo có chiếc máy tính "DOT" rất to, nó có thể phát tin tức đến các nơi trên thế giới. Bản thân "DOT" làm việc độc lập, do vậy khi trên toàn thế giới có hàng chục nghìn máy tính ngừng hoạt động thì nó vẫn làm việc bình thường. Khi cục trưởng giao nhiệm vụ cho Kasti, cục trưởng đưa cho ông ta một mảnh giấy, yêu cầu Kasti học thuộc lòng chữ và số trên đó:

"CDS 4967 543 287 043 789 076 *543*".

Từ đó về sau, tình tiết của tiểu thuyết đạt đến đỉnh cao, khiến người đọc say mê. Sau khi Kasti lên đảo thì gặp nhiều gian nan, nguy hiểm, mấy lần thoát chết. Cuối cùng nhờ lòng dũng cảm và trí thông minh của mình mà Kasti đã tìm được điều bí mật trên đảo Tolifos.

Trước đây năm năm có hai kỹ sư điện tử tài ba: Hatepek từ Mỹ và Smith từ Anh, nhận nhiệm vụ đến đảo Toliflos xây dựng “DOT”. Smith chủ trì công tác thiết kế “DOT” nhưng sau ba năm, vì có sự bất hòa với Hatepek nên Smith đã rời khỏi đảo và “mai danh ẩn tích” ở một nơi nào đó. Từ đó Hatepek quản lý công việc toàn đảo, nhưng ông ta là người ham quyền lực, muốn làm bá chủ máy tính trên toàn thế giới. Do vậy, thông qua “DOT”, ông ta đã tạo ra hiện tượng máy tính ngừng hoạt động để khống chế toàn cầu, hòng làm thế giới lâm vào khủng hoảng, phải theo sự điều khiển của ông ta.

Cũng chính lúc này, qua mấy năm vận hành, “DOT” đã thể hiện được uy lực của mình và tự coi mình là “nguyên thủ”. Nó bắt đầu có những âm mưu đen tối.

Nhưng Smith cũng nắm được số liệu phá hủy của “DOT”, vì vậy Hatepek đã cử người mưu sát Smit.

Smit chính là giáo sư ảo thuật Masteman, nên khi được tin Masteman đã chết vì bị ám sát, Hatepek cho rằng có thể “ăn ngon ngủ yên” được rồi. Không ngờ trước lúc chết, Smit đã nhận được tin số lượng lớn máy tính trên thế giới đã ngừng hoạt động.

Ông biết rằng đó là do âm mưu của Hatepek và dự đoán rằng loài người sẽ phải chịu một hậu quả hết sức nghiêm trọng. Sự thôi thúc lương tri đã khiến Smit cung cấp số liệu phá máy tính cho Cục Hành động trước khi ông chết hai ngày.

Lại nói về Kasti, sau khi lên được đảo Toliflos thì bị "DOT" phát biện, nhưng "DOT" lại tính toán rằng nếu để Hatepek trên đảo thì mình bị uy hiếp, chi bằng thay người khác. Vì vậy, mấy lần Kasti bị Hatepek mưu sát nhưng đều được "DOT" cứu thoát.

Khi Hatepek chết, Kasti đã giả vờ phục tùng "DOT" để chờ thời cơ vào được phòng điều khiển bấm hệ thống phát lệnh (CDS) và dãy số 4967 543 287 043 789 076 543. Cuối cùng thời cơ thuận lợi đã đến, Kasti đã thực hiện được nhiệm vụ của mình và toàn bộ máy tính trên thế giới lại hoạt động bình thường.

Trong câu chuyện trên, tác giả đã mô tả "Cuộc chiến giữa người máy" thật gay go và ác liệt, có cả súng nổ và đổ máu, nhưng cuối cùng máy tính đã thất bại. Điều này là hiển nhiên, vì dù máy móc có hiện đại đến đâu đi nữa thì cũng đều do con người sáng tạo ra, con người khống chế nó.

Tuy nhiên, khi đọc câu chuyện trên có bạn sẽ đặt ra các câu hỏi:

Trí tuệ của nhân loại có phải đã không theo kịp với sự phát triển của máy tính? Từ nay về sau, có còn xảy ra "Cuộc chiến giữa người và máy" mang tính toàn cầu nữa hay không? Có thể một ngày nào đó, con người sẽ phải làm "nô lệ" cho máy tính không?...

Muốn trả lời được các câu hỏi này, chúng ta cần phải bắt đầu từ tư duy và suy luận của con người. Chúng ta sẽ lần lượt xem xét các vấn đề này ở các mục sau.

2. Logic mệnh đề

Logic học là một khoa học đã có từ trước Công nguyên, được hình thành để nghiên cứu, tổng kết và hệ thống hóa các phương pháp suy nghĩ (tư duy) của con người. Người có công đầu trong việc xây dựng logic học là nhà toán học Aristotle (384 - 322 trước Công nguyên) người Hy Lạp cổ đại. Ông đã tổng kết các thuyết logic riêng biệt, rời rạc thành một hệ thống và gọi là "logic hình thức". Sau Aristotle người ta tiếp tục nghiên cứu và phát triển "logic hình thức". Cho đến thế kỷ XVII, nhà toán học Gottfried Wilhelm Leibniz (1.7.1646 - 4.11.1716) người Đức đã đề xuất những tư tưởng nhằm hoàn thiện và đổi mới "logic hình thức". Nhưng mãi tới nửa cuối thế kỷ XIX, đầu thế kỷ XX, do công lao của George Boole (2.11.1815 - 8.12.1864, người Anh), Gottlob Frege (8.11.1848 - 26.7.1925) và nhiều nhà toán học khác, tư tưởng và ý đồ của G. W. Leibniz mới được thực hiện. Từ đó, logic học (logic hình thức) đã đạt tới trình độ chặt chẽ và có tính hình thức cao do sử dụng được ngôn ngữ của các ký hiệu và sử dụng được các phương pháp của toán học. Đồng thời, ở trình độ này, "logic hình thức" được mang tên gọi mới là "logic toán". "Logic mệnh đề" (còn gọi là "đại số logic"

G.W.Leibniz

G. Boole

hoặc "đại số Boole các mệnh đề") là phần đầu tiên và cũng là phần cơ sở của "logic toán". Một trong những nội dung chủ yếu của cuốn sách này là nghiên cứu một số câu chuyện có liên quan đến "logic mệnh đề" và các ứng dụng của nó.

Trong sách và trong cuộc sống, chúng ta thường gặp những câu diễn đạt một ý niệm về một tính chất nào đó của sự vật, hiện tượng, hoặc về một quan hệ nào đó giữa các sự vật, hiện tượng. Trong những câu đó, có những câu nhờ tính khách quan của chúng, người ta có thể khẳng định được chúng là đúng hay sai. Chẳng hạn như:

1. "9 không chia hết cho 2"

2. "Phương trình $2x + 3 = 0$ có hai nghiệm".

Rõ ràng câu thứ nhất là đúng, câu thứ hai sai.

Tuy nhiên, có những câu có thể đúng với những người này nhưng lại sai với người khác, tùy thuộc vào cảm xúc, nhận thức của mỗi người. Ngoài ra, còn những câu nghi vấn, cảm thán là những câu không khẳng định được đúng hay sai.

Trong logic học, chúng ta chỉ quan tâm đến những câu mà tính đúng hoặc sai của chúng phải được khẳng định rõ ràng, và không quan tâm đến ý nghĩa, nội dung của câu đó. Câu như vậy được gọi là mệnh đề.

Mệnh đề (còn được gọi là "phán đoán") là câu biểu thị một nội dung mà ta có thể khẳng định là đúng hay sai một cách rõ ràng. Mỗi mệnh đề đều là hoặc đúng, hoặc sai. Không có mệnh đề nào có thể vừa đúng, vừa sai. Mệnh đề đúng (sai) còn được gọi là mệnh đề chân thực (không chân thực).

Người ta quy ước gán cho mệnh đề đúng giá trị 1, gán cho mệnh đề sai giá trị 0. Các giá trị 1 hoặc 0 được gọi là "giá trị chân lý" hay là "giá trị logic", hay gọn hơn là "giá trị" trong phép tính mệnh đề.

Người ta thường phân các mệnh đề thành các mệnh đề đơn giản và các mệnh đề phức tạp. *Mệnh đề đơn giản* (*còn được gọi là "mệnh đề sơ cấp*") là mệnh đề không thể chia nhỏ thành các mệnh đề khác. *Mệnh đề phức tạp (phức hợp)* là mệnh đề chứa nhiều hơn một mệnh đề đơn giản.

Người ta thường dùng các ký hiệu: p, q, r, ..., A, B, C, ... để chỉ các mệnh đề. Chẳng hạn như:

p = "6 chia hết cho 3"

q = "Mọi quả chanh đều chua"

r = "Chạch đẻ ngọn đa"...

Khi mệnh đề p có giá trị chân lý là 1, ta viết p = 1. Khi mệnh đề q có giá trị chân lý là 0, ta viết q = 0.

Mệnh đề và quan hệ giữa các mệnh đề là đối tượng nghiên cứu của "logic mệnh đề". Người sáng lập ra "logic mệnh đề" là G.Boole. Một trong những nhiệm vụ chủ yếu của "logic mệnh đề" là đặt cơ sở ban đầu cho việc nghiên cứu bản chất của các phép suy luận toán học và xác lập các tiêu chuẩn về sự đúng đắn của các suy luận đó. Các kết quả nghiên cứu của "logic mệnh đề" đã góp phần xác lập được các quy luật logic, các quy tắc suy luận, mà tư duy của con người bắt buộc phải tuân theo, nếu muốn có sản phẩm tư duy chính xác. Chúng (các quy luật logic, các quy tắc suy luận) là cơ sở của mọi hoạt động tư duy, mọi nghiên cứu trong tất cả các ngành khoa học khác nhau.

Nhờ các phép liên kết logic (các phép toán trên các mệnh đề), có thể tạo lập được các mệnh đề mới từ các mệnh đề đã có. "Logic mệnh đề" nghiên cứu các phép liên kết logic sau đây:

a) Phép phủ định

Phủ định của mệnh đề p, ký hiệu $\overline{p}$ hoặc $\rceil p$, đọc là "không phải p", là một mệnh đề đúng khi p sai và sai khi p đúng.

Bảng giá trị chân lý của phép phủ định là bảng 2-1.

Ví dụ, nếu p = "3 nhỏ hơn 0" thì $\overline{p}$ = "3 không nhỏ hơn 0".

Trong ví dụ này, p = 0, $\overline{p}$ = 1.

Bảng 2-1

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

b) Phép tuyển (tổng logic)

Tuyển của hai mệnh đề p, q là mệnh đề mới, ký hiệu là $p \vee q$ (hoặc là p + q), đọc là "p hoặc q", được tạo thành khi trong câu có hai mệnh đề p, q nối với nhau bằng liên từ "hoặc".

Mệnh đề tuyển $p \vee q$ sai khi cả hai mệnh đề p, q đều sai và đúng trong các trường hợp còn lại. Bảng giá trị chân lý của phép tuyển là bảng 2-2.

Bảng 2-2

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

c) Phép hội (tích logic)

Hội của hai mệnh đề p, q là mệnh đề mới, ký hiệu là $p \wedge q$ (hoặc là p . q), đọc là "p và q", được tạo thành bằng cách ghép hai mệnh đề p, q đã có bằng liên từ "và". Mệnh đề hội $p \wedge q$ đúng khi cả hai mệnh đề p, q đều đúng và sai trong các trường hợp còn lại. Bảng giá trị chân lý của phép hội là bảng 2-3.

Bảng 2-3

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

d) Phép kéo theo

Mệnh đề kéo theo là một mệnh đề phức tạp được tạo thành do ta ghép hai mệnh đề p, q bởi các liên từ "nếu ... thì ..." (hay bởi các liên từ khác cùng loại) để được mệnh đề "nếu p thì q", ký hiệu $p \rightarrow q$. (Thay cho cách viết "nếu *p thì q*", còn có thể viết là "p kéo theo q" hoặc là "p suy ra q").

Mệnh đề kéo theo $p \rightarrow q$ sai khi p đúng và q sai, đúng trong các trường hợp còn lại. Bảng giá trị chân lý của phép kéo theo là bảng 2-4.

Bảng 2-4

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Trong mệnh đề $p \rightarrow q$, mệnh đề p được gọi là giả thiết (hay còn gọi là điều kiện đủ để có q), mệnh đề q được gọi là kết luận (hay còn gọi là điều kiện cần để có p).

Ví dụ. Cho p = "Bầu trời có gió";

q = "Diều bay được trong không trung".

Khi đó ta có $p \rightarrow q$ là mệnh đề: "Nếu bầu trời có gió thì diều bay được trong không trung".

Bảng 2-5

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

e) Phép tương đương

Mệnh đề tương đương là mệnh đề được tạo thành khi ghép hai mệnh đề p, q theo mẫu "p khi và chỉ khi q" hoặc "p nếu và chỉ nếu q", ký hiệu $p \leftrightarrow q$. Mệnh đề tương đương $p \leftrightarrow q$ đúng khi cả hai mệnh đề p, q đều đúng hoặc đều sai, và sai trong các trường hợp còn lại. Bảng giá trị chân lý của phép tương đương là bảng 2-5.

Nếu mệnh đề tương đương $q \leftrightarrow q$ có giá trị chân lý bằng 1 thì ta nói "p tương đương (tương đương logic) với q", và ký hiệu là $p \equiv q$.

f) Phép không tương đương

Mệnh đề không tương đương được tạo thành khi ghép hai mệnh đề p, q theo mẫu: "hoặc p, hoặc q", ký hiệu $p \nleftrightarrow q$. Mệnh đề không tương đương $p \nleftrightarrow q$ sai khi cả hai mệnh đề p, q đều đúng hoặc đều sai, và đúng trong các trường hợp còn lại. Bảng giá trị chân lý của phép không tương đương là bảng 2-6.

Bảng 2-6

p	q	$p \nleftrightarrow q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Nếu mệnh đề không tương đương $p \nleftrightarrow q$ có giá trị chân lý bằng 1 thì ta nói "p không tương đương (không tương đương logic) với q", ký hiệu $p \not\equiv q$.

Các phép liên kết logic có các tính chất cơ bản sau đây:

1. $A \vee B \equiv B \vee A$
2. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
3. $A \vee A \equiv A$
4. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
5. $A \wedge B \equiv B \wedge A$
6. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$
7. $A \wedge A \equiv A$
8. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

Dưới đây ta xem rằng: 1 biểu thị cho mệnh đề luôn luôn đúng, 0 biểu thị cho mệnh đề luôn luôn sai:

9. $A \vee \overline{A} \equiv 1$

10. $A \vee 1 \equiv 1$

11. $A \vee 0 \equiv A$

12. $A \wedge \overline{A} \equiv 0$

13. $A \wedge 1 \equiv A$

14. $A \wedge 0 \equiv 0$

15. $A \rightarrow B \equiv \overline{A} \vee B$

16. $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$

17. $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$

18. $\overline{\overline{A}} \equiv \overline{\left(\overline{A}\right)} \equiv A.$

Chú ý. Khi sử dụng các ký hiệu "+" thay cho $\vee$ và "." thay cho $\wedge$, trong đó ký hiệu "." không bắt buộc phải viết ra, có thể viết các tính chất ở trên dưới dạng sau đây:

1. $A + B \equiv B + A$

2. $A + (B + C) \equiv (A + B) + C$

. . . .

5. $A\,B \equiv B\,A$

6. $A\,(B\,C) \equiv (A\,B)\,C$

. . . .

16. $\overline{A + B} \equiv \overline{A}\ \overline{B}$

17. $\overline{AB} \equiv \overline{A} + \overline{B}$

18. $\overline{\overline{A}} \equiv \overline{\left(\overline{A}\right)} \equiv A.$

Sử dụng các phép liên kết logic, khi xuất phát từ các mệnh đề đơn giản, ta sẽ thành lập được các mệnh đề phức tạp, rồi từ các mệnh đề phức tạp này ta lại thành lập các mệnh đề phức tạp hơn, v.v... Các mệnh đề được thành lập như vậy và cả các mệnh đề đơn giản ban đầu đều được gọi là *công thức của logic mệnh đề.*

Suy đến cùng thì mỗi một mệnh đề bất kỳ đều được tạo thành từ một số hữu hạn các mệnh đề đơn giản.

Trong các mệnh đề, có các mệnh đề luôn luôn nhận giá trị chân lý bằng 1, không phụ thuộc vào giá trị chân lý của các mệnh đề đơn giản tạo thành nó. Các mệnh đề như vậy được gọi là các "mệnh đề hằng đúng" (còn gọi là "công thức hằng đúng"). "Mệnh đề hằng sai" (công thức hằng sai) được định nghĩa tương tự.

Ví dụ. Các mệnh đề sau đây là mệnh đề hằng đúng:

1. $A \to A$

A	A	$A \to A$
1	1	1
0	0	1

2. $\overline{A\,\overline{A}}$

A	$\overline{A}$	$A\overline{A}$	$\overline{A\,\overline{A}}$
1	0	0	1
0	1	0	1

3. $A \vee \overline{A}$

A	$\overline{A}$	$A \vee \overline{A}$
1	0	1
0	1	1

Các "công thức hằng đúng" biểu thị các quy luật logic. Việc nghiên cứu các công thức hằng đúng (các quy luật logic) là một trong những nội dung chủ yếu của "logic mệnh đề".

Các quy luật logic là rất nhiều, trong đó có ba quy luật cơ bản là: luật đồng nhất, luật không mâu thuẫn, luật bài trung. Có thể trình bày tóm tắt về các quy luật này như sau:

Luật đồng nhất yêu cầu rằng trong khi suy nghĩ, khảo sát về một đối tượng nào đó thì tư tưởng phải luôn luôn xác định trong phạm vi của đối tượng đó, không được thay đổi, lẫn lộn với đối tượng khác. "Công *thức hằng đúng*" *biểu thị luật đồng* nhất là: $A \rightarrow A$.

Luật không mâu thuẫn có nội dung là: hai mệnh đề phủ định lẫn nhau A và $\overline{A}$, không thể đồng thời cùng đúng (trong cùng một thời gian, cùng một điều kiện, trong một quan hệ nhất định nào đó). "Công thức hằng đúng" biểu thị luật không mâu thuẫn là: $A\ \overline{A}$.

Luật bài trung có nội dung là: hai mệnh đề phủ định lẫn nhau A và $\overline{A}$, không thể đồng thời cùng sai (trong cùng một thời gian, cùng một điều kiện, trong một quan hệ nhất định nào đó). "Công thức hằng đúng" biểu thị luật bài trung là: $A \vee \overline{A}$.

Ngoài ba quy luật logic cơ bản kể trên, còn nhiều quy luật logic quan trọng khác, ví dụ như các quy luật được biểu thị bởi các "công thức hằng đúng" sau đây:

- $(X \rightarrow Y) \quad X \rightarrow Y$
- $(X \rightarrow Y) \quad \overline{Y} \rightarrow \overline{X}$
- $(X \rightarrow Y) \quad (Y \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow Z)$.

Các quy luật logic là cơ sở để xác lập các quy tắc suy luận. Trong các mục tiếp theo sau đây, chúng ta sẽ tìm được những câu chuyện bổ ích và lý thú có liên quan đến các quy tắc suy luận, liên quan đến "logic mệnh đề " và các ứng dụng của nó.

Bây giờ chúng ta sẽ sử dụng "logic mệnh đề" để giải bài toán "Ai là kẻ có tội" - một bài toán suy luật logic. Bài toán đó như sau:

Cho biết rằng, xảy ra ba điều sau đây:

1. Nếu A vô tội thì B và C đều vô tội.

2. Trong hai người B và C, nhất định phải có người vô tội.

3. A vô tội hoặc B có tội.

Hãy tìm xem ai là kẻ có tội?

Giải: Gọi p là mệnh đề "A có tội"

q là mệnh đề "B có tội"

r là mệnh đề "C có tội".

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} \overline{p} \to qr = 1, \text{ nghĩa là } p + qr = 1 \\ \overline{q} + \overline{r} = 1 \\ \overline{p} + q = 1. \end{cases}$$

Do đó, ta có:

$$(p + qr)(\overline{q} + \overline{r})(\overline{p} + q) = 1$$

$$p\overline{q}\,\overline{p} + p\overline{q}q + p\overline{r}\,\overline{p} + p\overline{r}q + qr\overline{q}\,\overline{p} +$$

$$+ qr\overline{q}q + qr\overline{r}\,\overline{p} + qr\overline{r}q = 1. \qquad (2\text{-}1)$$

Vì $x.\overline{x} = 0$, nên vế trái của (2-1) bằng $p\overline{r}q$, do đó ta có :

$p\overline{r}q = 1$, suy ra : $p = 1$, $\overline{r} = 1$, $\overline{q} = 1$.

Vậy A và B đều có tội, còn C là người không có tội.

3. Khi con người suy nghĩ, bộ não vận hành như thế nào?

Suy nghĩ bắt đầu từ các tiền đề. Có thể tưởng tượng rằng, đầu tiên trong não lóe lên một loạt sự kiện và kết luận có quan hệ với đối tượng tư duy. Những sự kiện và kết luận này hình thành trong não một loạt phán đoán. Về mặt logic, những phán đoán đó là các mệnh đề tạo thành các tiền đề cho suy nghĩ (tư duy). Ví dụ, chúng ta *suy nghĩ* như thế nào về việc phải đảm bảo an toàn cho hành khách và nhân viên trên máy bay đang trong tình trạng nguy hiểm? Thoạt đầu, các mệnh đề có thể hiện ra trong não như sau:

Mệnh đề 1: Vật thể rơi từ cao xuống thấp thì tốc độ rơi tăng dần

Mệnh đề 2: Người rơi xuống đất với tốc độ lớn sẽ bị tử vong

Mệnh đề 3: Trong không trung thì vải rơi chậm hơn người.

. . . .

Các mệnh đề như vậy chính là các tiền đề của suy nghĩ, của suy luận. Dựa theo các tiền đề đó, có thể tạo ra những sản phẩm suy luận hợp logic. Đầu thế kỷ XX nhà toán học Henry Jules Poincaré (1854-1912) người Pháp đã viết: "Trong logic nếu không xuất phát từ một cái gì đó thì không thể chứng minh được một cái gì cả và trong chứng minh thì điều kết luận được rút ra từ những điều đã biết".

Suy nghĩ được diễn ra theo những quy tắc. Như trên đã nói, suy nghĩ thường bắt đầu từ các tiền đề (các mệnh đề đã có). Đồng thời dựa vào các tiền đề đó, suy nghĩ rút ra các mệnh đề mới. Quá trình suy nghĩ như vậy được gọi là suy luận.

Suy luận là quá trình suy nghĩ để từ một hay nhiều mệnh đề đã có, rút ra mệnh đề mới. Các mệnh đề đã có gọi là các tiền đề của suy luận. Mệnh đề mới được rút ra gọi là kết luận của suy luận.

Có thể phân chia các suy luận thành hai loại:

1. Suy luận diễn dịch (còn gọi là suy diễn)

2. Suy luận *quy nạp*.

Trong cuốn sách này chúng ta sẽ lần lượt đề cập đến cả hai loại suy luận đó.

Suy diễn được sử dụng nhiều trong các chứng minh của toán học và của nhiều ngành khoa học chính xác khác. Đồng thời trong các chứng minh đó, suy diễn luôn được thực hiện theo các quy tắc xác định. Có nhiều quy tắc suy diễn khác nhau. Việc tuân theo các quy tắc đó đảm bảo rằng, nếu phép suy diễn xuất phát từ các tiền đề đúng, thì kết luận của nó sẽ là mệnh đề đúng. Sau đây chúng ta sẽ tìm hiểu các quy tắc suy diễn quan trọng nhất và thường gặp nhất trong các chứng minh của toán học. Chúng ta bắt đầu công việc lý thú này từ việc nghiên cứu các suy luật của chàng lười.

Người ta kể câu chuyện sau đây;

Một chàng lười có một chum gạo, một hôm anh ta nằm trên chiếc chiếu cạnh chum gạo và bắt đầu suy nghĩ mung lung: "Ta sẽ bán chum gạo này và dùng tất cả số tiền bán gạo mua gà con. Những con gà con lớn lên sẽ đẻ nhiều trứng, sau đó đem trứng và gà bán đi để mua nhiều lợn con. Khi lợn lớn sẽ đẻ nhiều lợn con, lúc đó đem bán lợn để mua một số trâu, rồi sẽ có nhiều trâu nghé. Nếu bán trâu đi, ta sẽ có tiền mua mảnh đất, có đất ta sẽ trồng lúa, trồng mía,... Sau khi thu hoạch mùa màng ta lại bán để mua thêm nhiều đất, lại trồng trọt vài năm thì có thể đủ tiền xây được một ngôi nhà đẹp. Có nhà rồi, ta sẽ cưới một cô vợ xinh đẹp nhất trần đời,... Lúc đó thì ta giàu có và sung sướng biết bao!".

Chàng lười phấn khởi, khua chân múa tay, chẳng may đá đổ chum gạo, chum vỡ, gạo đổ ra tung tóe vào cát bẩn. Vừa lúc đó một đàn gà của nhà hàng xóm chạy tới ăn sạch gạo. Thế là, gà, lợn, trâu, đất, ngôi nhà đẹp và cô vợ xinh - tất cả ước mơ bỗng tan thành mây khói, chỉ còn lại chàng lười với cái chum vỡ.

Câu chuyện này cho mọi người thấy rằng: chỉ nghĩ thôi thì chưa đủ, điều quan trọng là phải bắt tay vào thực hiện, như người ta thường nói "Đi nghìn dặn nhờ đôi chân trước nhất". Kết cục của câu chuyện thì đáng buồn cười, nhưng phương pháp suy luận của chàng lười thì lại đáng xem xét.

Sau đây chúng ta sẽ nghiên cứu phương pháp suy luận của chàng lười: Trước hết anh ta bắt đầu từ hai tiền đề:

1. "Nếu có gạo thì bán gạo để mua gà". Nói một cách đơn giản là "Nếu có gạo thì có gà".

2. "Có một chum gạo".

Rồi từ hai tiền đề đó dẫn đến kết luận "Có gà". Trong suy luận kể trên của chàng lười, người ta gọi tiền đề "Nếu có gạo thì có gà" là tiền đề lớn, và gọi tiền đề "Có một chum gạo" là tiền đề nhỏ. Như vậy, suy luận kể trên của chàng lười là:

[Tiền đề lớn] : "Nếu có gạo thì có gà"
[Tiền đề nhỏ] : "Có một chum gạo"

[Kết luận]: "Có gà"

Suy luận tiếp theo của chàng lười là:

[Tiền đề lớn] : "Nếu có gà thì có trứng"
[Tiền đề nhỏ] : "Có gà"

[Kết luận] : "Có trứng"

Suy luận tiếp theo của chàng lười là:

[Tiền đề lớn] : "Nếu có gà và có trứng thì có lợn"
[Tiền đề nhỏ] : "Có gà và có trứng"

[Kết luận] : "Có lợn"

Suy luận tiếp theo của chàng lười là:

[Tiền đề lớn]: "Nếu có lợn thì có trâu"

[Tiền đề nhỏ] "Có lợn"

[Kết luận]: "Có trâu"

Suy luận tiếp theo của chàng lười là:

[Tiền đề lớn]: "Nếu có trâu thì có đất và hoa màu"

[Tiền đề nhỏ] "Có trâu"

[Kết luận]: "Có đất và hoa màu".

Suy luận tiếp theo của chàng lười là:

[Tiền đề lớn]: "Nếu có đất và hoa màu thì có nhà đẹp"

[Tiền đề nhỏ] "Có đất và hoa màu"

[Kết luận]: "Có nhà đẹp"

Suy luận tiếp theo của chàng lười là:

[Tiền đề lớn]: "Nếu có nhà đẹp thì có vợ"

[Tiền đề nhỏ] "Có nhà đẹp"

[Kết luận]: "Có vợ"

. . . .

Trong các suy luận kể trên của chàng lười, có một cấu trúc logic chung là:

[Tiền đề lớn]: "$p \to q$"

[Tiền đề nhỏ] : "p"

[Kết luận]: "q"

(Đồng thời, nếu hai tiền đề $p \to q$, q là các mệnh đề có giá trị chân lý bằng 1 thì kết luận q cũng có giá trị chân lý bằng 1).

Như vậy, ở đây chàng lười đã sử dụng phép suy luận, mà trong phép suy luận đó, kết luận được rút ra từ hai tiền đề. Những phép suy luận như vậy được gọi là *phép "tam đoạn luận"*.

Có nhiều kiểu "tam đoạn luận" khác nhau với những cấu trúc logic khác nhau.

"Tam đoạn luận" có cấu trúc logic vừa nêu ở trên còn được gọi là quy tắc "modus ponens". Quy tắc này là một quy tắc suy diễn rất quan trọng, trong nhiều hệ thống logic và toán học hiện đại, nó được xem là một quy tắc suy diễn cơ bản nhất. Sau đây là một ví dụ:

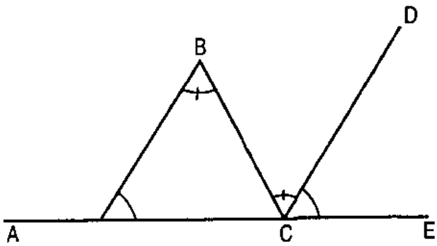
Hãy chứng minh định lý:

"Tổng (số đo) ba góc trong của một tam giác bằng 180^0".

Giả thiết: Cho tam giác ABC (hình 3-1).

Kết luận:

$$A + B + C = 180^0$$



Hình 3-1

Chứng minh: Chứng minh được thực hiện nhờ một dãy những "tam đoạn luận" sau đây:

[Tiền đề lớn]: Nếu cho một điểm ở ngoài một đường thẳng thì qua điểm đã cho dựng được duy nhất một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

[Tiền đề nhỏ]: Điểm C (đã cho) ở ngoài đường thẳng AB (đã cho)

[Kết luận]: Qua C dựng được duy nhất đường thẳng CD//AB

[Tiền đề lớn]: Nếu cắt hai đường thẳng song song bởi một cát tuyến thì các cặp góc đồng vị bằng nhau

[Tiền đề nhỏ]: Cát tuyến AC cắt hai đường thẳng song song là AB, CD (AB // CD)

[Kết luận]: Hai góc đồng vị bằng nhau : $\widehat{A} = \widehat{DCE}$.

[Tiền đề lớn]: nếu cắt hai đường thẳng song song bởi một cát tuyến thì các cặp góc so le trong bằng nhau

[Tiền đề nhỏ]: Cát tuyến AC cắt hai đường thẳng song song là AB, CD (AB//CD)

[Kết luận]: Hai góc so le trong bằng nhau: $\widehat{B} = \widehat{BCD}$.

[Tiền đề lớn]: Nếu một góc là góc bẹt thì số đo của nó bằng 180^0

[Tiền đề nhỏ]: $\widehat{C} + \widehat{BCD} + \widehat{DCE} = \widehat{ACE}$ (là góc bẹt)

[Kết luận] : $\widehat{C} + \widehat{BCD} + \widehat{DCE} = 180^0$

[Tiền đề lớn]: Nếu thay số hạng nào đó của một tổng bởi một lượng bằng nó thì giá trị của tổng không thay đổi.

[Tiền đề nhỏ]: Trong tổng $\widehat{C} + \widehat{BCD} + \widehat{CDE}$, thay $\widehat{BCD}$ bởi $\widehat{B} = \widehat{BCD}$ để được tổng $\widehat{C} + \widehat{B} = \widehat{DCE}$

[Kết luận]: $\widehat{C} + \widehat{B} + \widehat{DCE} = \widehat{C} + \widehat{BCD} + \widehat{DCE} = 180^0$

[Tiền đề lớn]: Nếu thay số hạng nào đó của một tổng bởi một lượng bằng nó thì giá trị của tổng không thay đổi.

[Tiền đề nhỏ]: Trong tổng $\widehat{C} + \widehat{B} + \widehat{DCE}$, thay $\widehat{DCE}$ bởi $\widehat{A} = \widehat{DCE}$ để được tổng $\widehat{C} + \widehat{B} + \widehat{A}$.

[Kết luận]: $\widehat{C} + \widehat{B} + \widehat{A} = \widehat{C} + \widehat{B} + \widehat{DCE} = 180^0$

Vậy $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^0$.

Bây giờ chúng ta hãy xem "trò chơi trí tuệ" mà cô giáo đã dùng để tìm hiểu năng lực suy luận phân tích của học sinh. Cô giáo lấy 5 chiếc mũ giống nhau cho bốn học sinh A, B, C, D xem

xem và nói: "Trong này có 2 chiếc màu trắng, 1 chiếc màu đỏ, 1 chiếc màu vàng và 1 chiếc màu xanh". Tiếp đó cô giáo cho bốn bạn lần lượt ngồi trên bốn bậc thang, rồi bảo họ nhắm mắt lại và đội cho mỗi bạn một chiếc mũ, cuối cùng bảo họ *mở mắt* ra và đoán xem mũ trên đầu mình đội màu gì?

Kết quả thật bất ngờ, tuy bạn ngồi ở sau có thể thấy màu của chiếc mũ đội trên đầu của bạn ngồi ở trước, nhưng A, B, C đều nói là không đoán ra. D ngồi trước tất cả nên không nhìn được màu mũ của ba bạn nhưng nó lại nói đã đoán được màu chiếc mũ nó đang đội. D làm thế nào để đoán được màu của chiếc mũ nó đang đội?

Có thể bạn đọc thông minh đã đoán ra đáp án của trò chơi này. Kỳ thực, sự phán đoán của D không khó, nó nghĩ như thế này: "A ngồi ở chỗ cao nhất, có thể nhìn được màu từng chiếc mũ của ba bạn ngồi phía trước, tại sao nó lại không đoán ra? Nếu nó nhìn thấy ba bạn đội 3 chiếc mũ có ba màu xanh, vàng và đỏ thì nó sẽ đoán được mũ mà nó đội nhất định là màu trắng. B là người thông minh, cách nghĩ của A đương nhiên là nó hiểu, vậy tại sao B lại nói không đoán được? Nhất định B nhìn thấy phía trước có bạn đội mũ màu trắng. Nếu không, thì từ câu trả lời của A và màu mũ của người khác, B sẽ đoán được màu mũ mà nó đội là màu trắng. Còn C, trí tuệ của nó không kém (so với B) nhưng tại sao nó không phán đoán được? Lý do là vì chính nó nhìn thấy mình (D) đội mũ màu trắng".

Như vậy là D đã khẳng định được màu mũ của mình, trong sự phủ định của mọi người. Trò chơi này có thể mở rộng ra nhiều người, chỉ cần số mũ lớn hơn số người là một và số màu mũ bằng số người, tức là có hai chiếc mũ cùng màu.

Trong trò chơi này, có thể phân tích cấu trúc logic của các phép suy luận của D như sau:

Khi nghĩ về câu trả lời của A, bạn D đã thực hiện phép suy luận sau đây (là một phép "tam đoạn luận"):

[Tiền đề lớn]: Nếu trước mặt A không ai đội mũ màu trắng thì A đoán ra (đoán ra A đội mũ màu trắng)

[Tiền đề nhỏ]: A không đoán ra

[Kết luận]: Trước mặt A có bạn đội mũ màu trắng.

Khi nghĩ về câu trả lời của B, bạn D đã suy luận như sau:

[Tiền đề lớn]: Nếu trước mặt B không có ai đội mũ màu trắng thì B đoán ra (đoán ra B đội mũ màu trắng)

[Tiền đề nhỏ]: B không đoán ra

[Kết luận]: Trước mắt B có bạn đội mũ màu trắng.

Khi nghĩ về câu trả lời của C, bạn D đã thực hiện phép suy luận như sau:

[Tiền đề lớn]: Nếu trước mặt C không ai đội mũ màu trắng thì C đoán ra (đoán ra C đội mũ màu trắng)

[Tiền đề nhỏ]: C không đoán ra

[Kết luận]: Trước mặt C có bạn đội mũ màu trắng (nghĩa là D đội mũ màu trắng).

Có thể nhận thấy rằng trong cả ba phép suy luận kể trên, D đều vận dụng phép "tam đoạn luận", mà cấu trúc logic của nó như sau:

[Tiền đề lớn]: $p \rightarrow q$

[Tiền đề nhỏ] : $\overline{q}$

[Kết luận] : $\overline{p}$

Phép "tam đoạn luận" này là một quy tắc suy diễn có tên là quy tắc "modus tollens".

Ngoài những "tam đoạn luận" kể trên, còn có nhiều kiểu "tam đoạn luận" khác, trong số đó có các "tam đoạn luận Aristotle" có từ thời cổ xưa. Chúng có 19 kiểu với các cấu trúc như sau (Trong các "tam đoạn luận" này, tiền đề chứa thành phần P được gọi là tiền đề lớn, tiền đề chứa thành phần S được gọi là tiền đề nhỏ):

1. Tất cả M là P
S là M
―――――
S là P

2. Tất cả M không là P
S là M
―――――
S không là P

3. Tất cả M là P
Một số S là M
―――――
Một số S là P

4. Tất cả M không là P
Một số S là M
―――――
Một số S không là P

5. Tất cả P không là M
S là M
―――――
S không là P

6. Tất cả P là M
S không là M
―――――
S không là P

7. Tất cả P không là M
Một số S là M
―――――
Một số S không là P

8. Tất cả P là M
Một số S không là M
―――――
Một số S không là P

9. Tất cả M là P
Tất cả M là P
―――――
Một số S là P

10. Tất cả M không là P
Tất cả M là P
―――――
Một số S không là P

11. Một số M là P
Tất cả M là S
―――――
Một số S là P

12. Tất cả M là P
Một số M là S
―――――
Một số S là P

13. Một số M không là P
Tất cả M là S

Một số S không là P

14. Tất cả M không là P
Một số M là S

Một số S không là P

15. Tất cả P không là M
Tất cả M là S

Một số S không là P

16. Tất cả P không là M
Một số M là S

Một số S không là P

17. Tất cả P là M
Tất cả M là S

Một số S là P

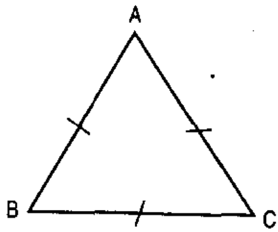
18. Một số P là M
Tất cả M là S

Một số S là P

19. Tất cả P là M
Tất cả M không là S

Tất cả S không là P.

Ví dụ. Chứng minh rằng tam giác đều có ba góc bằng nhau từng đôi một.



Hình 3-2

Giả thiết: Cho ΔABC có

$AB = AC = BC$ (hình 3-2).

Kết luận: $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$.

Chứng minh: Chứng minh được thực hiện nhờ một dãy các suy luận sau đây:

I. Tất cả các tam giác cân là tam giác có hai góc kề đáy bằng nhau.
Tam giác ABC là tam giác cân với đáy là BC ($AB = AC$)

Tam giác ABC có hai góc kề đáy bằng nhau: $\widehat{B} = \widehat{C}$.

II. Tất cả các tam giác cân là tam giác có hai góc kề đáy bằng nhau
Tam giác ABC là tam giác cân với đáy là AC ($BA = BC$)

Tam giác ABC có hai góc kề đáy bằng nhau: $\widehat{A} = \widehat{C}$.

III. Nếu hai đại lượng cùng bằng một đại lượng thứ ba thì bằng nhau

$\widehat{B}$ và $\widehat{A}$ cùng bằng $\widehat{C}$

$\widehat{B} = \widehat{A}$.

Từ đó ta có: $\begin{cases} \widehat{B} = \widehat{A} \\ \widehat{A} = \widehat{C} \\ \widehat{B} = \widehat{C} \end{cases}$

hay có thể viết là: $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$.

Dễ dàng nhận thấy rằng trong chứng minh ở trên, các "tam đoạn luận" (I) và (II) là các "tam đoạn luận Aristotle".

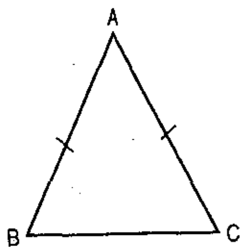
Trong các chứng minh khoa học và trong thực tiễn tư duy hàng ngày, các "tam đoạn luận" thường được thể hiện không phải dưới hình thức đầy đủ của chúng, mà dưới hình thức rút gọn. Cụ thể là một bộ phận nào đó của "tam đoạn luận" (một trong hai tiền đề hoặc kết luận) không được nêu ra một cách tường minh. Khi đó, để khảo sát các "tam đoạn luận" đó, phải dựng lại chúng ở dạng "tam đoạn luận" hoàn chỉnh.

Ví dụ 1. Xét phép suy luận sau đây:

"Vì ΔABC cân (AB = AC), nên $\widehat{B} = \widehat{C}$ (hình 3-3)".

Có thể nhận thấy rằng:

Suy luận vừa nêu là một "tam đoạn luận" rút gọn, trong đó tiền đề lớn đã được lược bỏ. Dạng hoàn chỉnh của "tam đoạn luận" này là:



Hình 3-3

[Tiền đề lớn]: Mọi tam giác cân (đều) là tam giác có hai góc kề đáy bằng nhau

[Tiền đề nhỏ]: Tam giác ABC cân với đáy là BC (AB = AC)

[Kết luận] : $\widehat{B} = \widehat{C}$.

Ví dụ 2. Một hôm nhà thơ thiên tài của nhân loại Johan Wolfgang von Göthe (Gớt, 28.8.1749 - 1832) người Đức gặp một nhà phê bình ở quãng đường hẹp. Nhà phê bình này vốn tính ngông nghênh, khi gặp J.W.von Göthe chẳng những không nhường đường, mà còn tỏ vẻ thông minh, vừa ngạo mạn bước, vừa nói to rằng: "Xưa nay ta chưa nhường đường cho kẻ ngốc bao giờ".

Trước tình thế bất ngờ đó J.W.von Göthe cười, cung kính né sang một bên đường, lễ phép đáp: "A, a! Tôi thì gần như ngược lại!". Kết quả là nhà phê bình ngạo mãn đã bị "bẽ mặt" và cụt hứng.

Ở câu chuyện này, dù là nhà phê bình hay là J.W.von Göthe, mỗi người chỉ nói một câu thật ngắn gọn nhưng châm biếm và hài hước.

Phép "tam đoạn luận" của nhà phê bình được dựng lại hoàn chỉnh là:

[Tiền đề lớn]: Nếu ta gặp kẻ ngốc thì không bao giờ ta nhường đường

[Tiền đề nhỏ]: Ta gặp J.W.von Göthe là kẻ ngốc (đã lược bỏ)

[Kết luận]: Ta không nhường đường (đã lược bỏ, nhưng được thể hiện ở hành động)

Có thể hiểu câu nói của J.W.von Göthe là: "Tôi chỉ nhường đường cho kẻ ngốc", điều đó có nghĩa là: "Nếu tôi nhường đường cho người nào, thì người đó là kẻ ngốc". Vì vậy, có thể dựng lại phép "tam đoạn luận" của J.W.von Göthe một cách hoàn chỉnh như sau:

[Tiền đề lớn]: Nếu tôi nhường đường cho người nào, thì người đó là kẻ ngốc

[Tiền đề nhỏ]: Tôi nhường đường cho nhà phê bình (đã lược bỏ, nhưng được thể hiện ở hành động)

[Kết luận]: Nhà phê bình là kẻ ngốc (đã lược bỏ).

4. Biểu đồ Venn và các suy luận. Các lượng từ

"Trực quan là tia sáng chiếu dọi nhận thức". Đây là câu nói nổi tiếng của nhà giáo dục học Sumulinxki. Trong toán học, trực quan thường giúp người ta lý giải những khái niệm, vấn đề trừu tượng.

Tập hợp là một khái niệm trừu tượng và là một trong những khái niệm cơ bản nhất của toán học. Trong bất kỳ một lĩnh vực toán học nào cũng gặp các tập hợp: các tập hợp số, các tập hợp điểm trong mặt phẳng, tập hợp nghiệm của một phương trình, ...

Trong chương trình toán học, từ bậc tiểu học, học sinh đã làm toán trên tập hợp các số tự nhiên, tập hợp các số thập phân, tập hợp các số hữu tỷ không âm.

Trong đời sống, thường gặp các tập hợp: tập hợp các học sinh trong một lớp học, tập hợp các lớp học trong một trường, tập hợp các đồ chơi trong một lớp mẫu giáo,...

Các tập hợp (thường được nói gọn hơn là tập) thường được diễn tả bởi các từ: nhóm, đàn, đội, chùm,...

Ta coi tập hợp được tạo thành bởi các cá thể (hay đối tượng). Các cá thể tạo thành tập hợp gọi là các phần tử của tập hợp. Chẳng hạn, khi nói tập hợp các chữ số trong hệ đếm thập phân thì ta hiểu là tập hợp gồm 10 phần tử là các chữ số từ 0, 1, 2...

đến 9; khi nói tập hợp nghiệm của phương trình (x – 2) (x – 3) = 0 thì ta hiểu các phần tử của tập hợp này là 2 và 3.

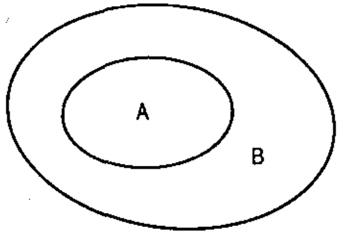
Một tập hợp thường được ký hiệu bởi các chữ in hoa X, Y, A, B, ... Phần tử của một tập hợp thường được ký hiệu bởi các chữ in thường x, y, a, b,...

Để chỉ a là một phần tử của tập hợp A, ta viết a ∈ A và đọc là "a thuộc A", hay "A chứa a". Ngược lại, nếu a không là phần tử của tập hợp A, ta viết a ∉ A và đọc là "a không thuộc A" hay "A không chứa a".

L.Euler

Cuối thế kỷ XIX, nhà toán học John Venn (1834 - 1923) người Anh đã dùng biểu đồ để biểu diễn cho tập hợp. Cụ thể là đã dùng những đường cong phẳng, kín để biểu diễn các tập hợp. Trong cách biểu diễn đó, các phần tử của tập hợp được biểu diễn bởi những điểm "ở bên trong" đường cong, những phần tử không thuộc tập hợp được biểu diễn bởi những điểm "ở bên ngoài" đường cong.

Thật ra, trước đó nhà toán học Leonhard Euler (15.4.1707 - 18.9.1783) người gốc Thụy Sĩ đã dùng các đường tròn để biểu diễn các tập hợp.



Hình 4-1

Dưới đây, chúng ta sẽ tìm những ví dụ về việc dùng biểu đồ Venn biểu diễn tập hợp.

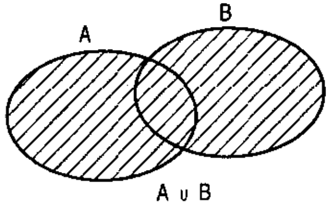
Cho hai tập hợp A và B. Tập hợp A được gọi là "tập con" của tập hợp

B nếu như mọi phần tử của tập hợp A đều thuộc tập hợp B. Ký hiệu: $A \subset B$.

Hình 4-1 là biểu đồ Venn minh họa cho $A \subset B$.

Hai tập hợp A và B được gọi là bằng nhau nếu như $A \subset B$ và $B \subset A$. Ký hiệu: $A = B$.

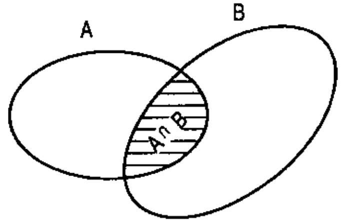
Hợp của hai tập hợp A và B đã cho là tập hợp các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập hợp này. Ký hiệu: $A \cup B$.



Hình 4-2

Hình 4-2 là biểu đồ Venn biểu diễn $A \cup B$.

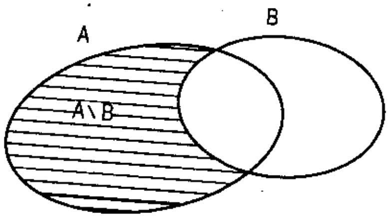
Giao của hai tập hợp A và B là tập hợp các phần tử đồng thời thuộc cả hai tập hợp này. Ký hiệu: $A \cap B$.



Hình 4-3

Hình 4-3 là biểu đồ Venn biểu diễn $A \cap B$.

Hiệu của hai tập hợp A và B (theo thứ tự này) là tập hợp các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B. Ký hiệu: $A \setminus B$.

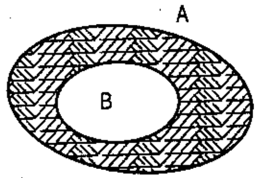


Hình 4-4

Hình 4-4 là biểu đồ Venn biểu diễn $A \setminus B$.

Nếu $B \subset A$ thì hiệu $A \setminus B$ được gọi là phần bù của B trong A.

Hình 4-5 là biểu đồ Venn biểu diễn phần bù của B trong A.



Hình 4-5

Ví dụ. Cho A và B là hai tập hợp các số sau đây:

A = {1, 2, 5, 7},

B = {2, 3, 5, 8, 9, 10}.

Khi đó ta có:

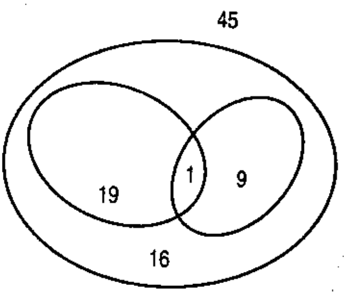
$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$.

$A \cap B = \{2, 5\}$

$A \setminus B = \{1, 7\}$

$B \setminus A = \{3, 8, 9, 10\}$.

Có thể sử dụng biểu đồ Venn để minh họa, kiểm tra các suy luận, hoặc để giải một số bài toán suy luận logic.



Hình 4-6

Ví dụ 1. Một lớp có 45 học sinh, trong đó 20 học sinh có anh, em; 10 học sinh có chị, em; 1 học sinh vừa có anh, em lại vừa có chị, em. Hỏi trong lớp này có bao nhiêu học sinh là con một?

Giải: Chỉ cần vẽ biểu đồ Venn (hình 4-6) là tìm được kết quả sau đây: Có 16 học sinh là con một.

Ví dụ 2. Hãy sử dụng biểu đồ Venn để minh họa cho "tam đoạn luận" sau đây:

[Tiền đề lớn]: Tất cả các bình phương của các số lẻ chia cho 8 đều dư 1.

[Tiền đề nhỏ]: a là số lẻ

[Kết luận]: a^2 chia cho 8 dư 1.

Cần chú ý rằng trong một "tam đoạn luận", tồn tại ba tập hợp, mỗi tập hợp đều xuất hiện hai lần (trong "tam đoạn luận" đó).

Trở lại ví dụ 2 đang xét, ta có:

Gọi tập hợp các bình phương của các số lẻ là E, tập hợp các số chia cho 8 dư 1 là M, tập hợp chỉ gồm một phần tử a^2 với a là số lẻ là B. Khi đó ta có:

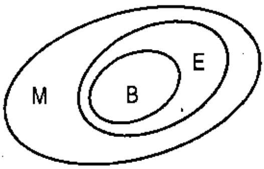
Tiền đề lớn xác định quan hệ:

$$E \subset M.$$

Tiền đề nhỏ xác định quan hệ:

$$B \subset E.$$

Các quan hệ này được biểu diễn bởi biểu đồ Venn như ở hình 4-7.



Hình 4-7

Theo biểu đồ Venn ta có: $B \subset M$, suy ra $a^2 \in M$, nghĩa là "a^2 là một số chia cho 8 dư 1". Đây chính là kết luận của "tam đoạn luận".

Những điều nêu trên cho thấy rằng, có thể dùng biểu đồ Venn để minh họa cho "tam đoạn luận".

Ví dụ 3. Sử dụng biểu đồ Venn, hãy xác định rõ kết luận của "tam đoạn luận" say đây:

[Tiền đề lớn]: Tất cả những người thích dạo phố đều có thành tích học tập không được tốt

[Tiền đề nhỏ] : Có một số nữ sinh thích dạo phố

[Kết luận]: ?

Giải: Gọi A là tập hợp: {Những người thích dạo phố}

B là tập hợp: {Những người có thành tích học tập không được tốt}

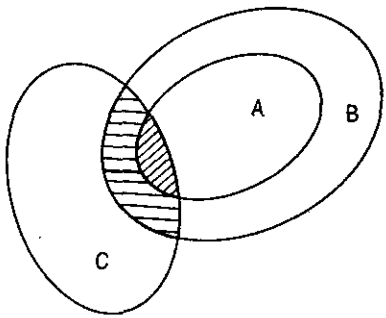
C là tập hợp: {Những nữ sinh}

Khi đó ta có:

Tiền đề lớn xác định quan hệ $A \subset B$.

Tiền đề nhỏ xác định quan hệ $A \cap C$ chứa nhiều hơn một phần tử.

Lập biểu đồ Venn biểu diễn cho các quan hệ này như ở hình 4-8.



Hình 4-8

Từ biểu đồ Venn, ta xác định được quan hệ giữa tập B và C là:

$B \cap C$ chứa nhiều hơn một phần tử. Nội dung của quan hệ này là "Có một số nữ sinh có thành tích học tập không được tốt".

Đây chính là kết luận (cần tìm) của "tam đoạn luận" được xét.

Ví dụ 4. Hãy sử dụng biểu đồ Venn để minh họa cho "tam đoạn luận" sau đây:

[Tiền đề lớn]: Tất cả những người ngủ sớm, dậy sớm đều khỏe mạnh

[Tiền đề nhỏ]: Một số trẻ em không khỏe mạnh

[Kết luận]: Một số trẻ em không ngủ sớm, dậy sớm.

Giải: Gọi A là tập hợp: {Những người ngủ sớm, dậy sớm}

B là tập hợp: {Những người khỏe mạnh}

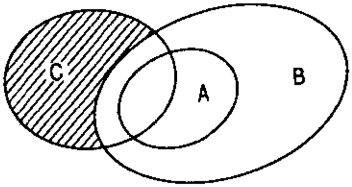
C là tập hợp: {Những trẻ em}.

Khi đó ta có:

Tiền đề lớn xác định quan hệ $A \subset B$.

Tiền đề nhỏ xác định quan hệ $C \setminus B$ chứa nhiều hơn một phần tử.

Lập biểu đồ Venn biểu diễn các quan hệ này như ở hình 4-9.



Hình 4-9

Dựa vào biểu đồ Venn, xác định được quan hệ giữa A và C là $C \setminus A$ chứa nhiều hơn một phần tử. Quan hệ này có nghĩa là "Một số học sinh không ngủ sớm, dậy sớm". Đây chính là kết luận của "tam đoạn luận" đã cho. (Hay nói cách khác, kết luận của "tam đoạn luận" đã cho được biểu diễn bởi quan hệ $C \setminus A$ chứa nhiều hơn một phần tử).

Ví dụ 5. Hãy xét xem "tam đoạn luận" sau đây là "đúng" hay "sai":

[Tiền đề lớn]: Tất cả các học sinh cần cù đều ham học.

[Tiền đề nhỏ]: Một số học sinh ham học có thị lực không tốt.

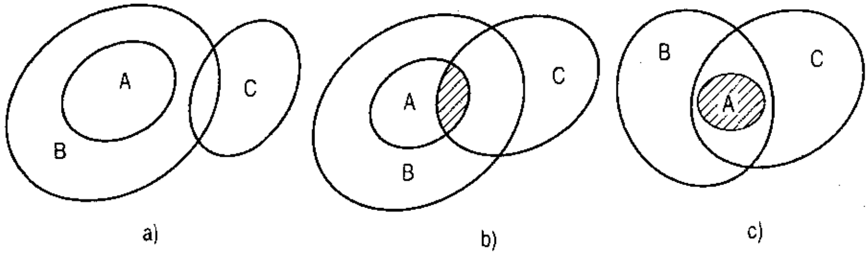
[Kết luận]: Một số học sinh cần cù có thị lực không tốt.

Giải: Gọi A là tập hợp: {Các học sinh cần cù}

B là tập hợp: {Các học sinh ham học}

C là tập hợp: {Các học sinh có thị lực không tốt}.

Khi đó ta có:



Hình 4-10

Tiền đề lớn xác định quan hệ $A \subset B$.

Tiền đề nhỏ xác định quan hệ $B \cap C$ chứa nhiều hơn một phần tử.

Lập biểu đồ Venn biểu diễn các quan hệ này như ở hình 4-10.

Dựa vào biểu đồ Venn, chúng ta nhận thấy rằng giữa A và C có thể xảy ra một trong ba trường hợp sau đây:

1. Trường hợp ở hình 4-10a: $A \cap C = \varnothing$, có nghĩa là "Tất cả học sinh cần cù đều có thị lực tốt".

2. Trường hợp ở hình 4-10b: $A \cap C \neq \varnothing$, có nghĩa là "Có học sinh cần cù có thị lực không tốt".

3. Trường hợp ở hình 4-10c: $A \subset C$, có nghĩa là "Tất cả học sinh cần cù đều có thị lực không tốt".

Những điều ở trên chứng tỏ rằng quan hệ giữa A và C không được xác định duy nhất; do đó từ các tiền đề đã có không thể rút ra kết luận gì.

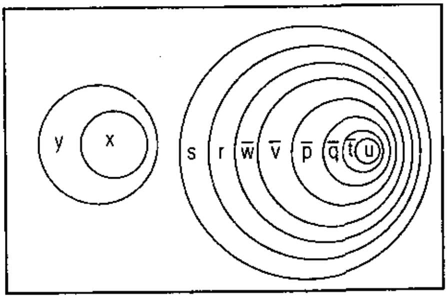
Từ đó suy ra rằng "tam đoạn luận" đã nêu ở trên là sai.

Chú ý: Có những quy tắc được quy định cho các "tam đoạn luận". Ở đây chúng tôi không giới thiệu các quy tắc đó. Tuy nhiên, ví dụ 5 cho thấy rằng: Có thể sử dụng biểu đồ Venn để kiểm tra xem "tam đoạn luận" đã được thực hiện là có "hợp quy tắc" hay không? (là đúng hay sai?).

Ví dụ 6. Cho biết rằng:

1. Những thư đề rõ ngày tháng đều viết giấy màu xanh lam

2. Thư của ông G đều mở đầu bằng "Thân yêu"



Hình 4-11

3. Thư viết bằng mực đen là thư do ông Z viết

4. Những thư tôi có thể đọc đều chưa cất

5. Với mọi thư viết bằng một mặt, không thư nào chưa đề ngày

6. Những thư chưa đánh dấu, đều dùng mực đen để viết

7. Những thư viết bằng giấy màu xanh lam đều bị cất

8. Những thư viết bằng giấy một mặt không thư nào đánh dấu.

9. Thư của ông Z đều không mở đầu bằng "Thân yêu".

Hãy chứng minh rằng tôi không thể đọc thư của ông G viết.

Chứng minh: Cho p = {Thư đề rõ ngày tháng}

q = {Thư bằng giấy màu xanh lam}

r = {Thư viết bằng mực đen}

s = {Thư ông Z viết}

t = {Thư đã bị cất}

u = {Thư tôi có thể đọc}

v = {Thư bằng giấy một mặt}

w = {Thư đánh dấu}

$x = \{$Thư ông G viết$\}$

$y = \{$Thư mở đầu bằng "Thân yêu"$\}$.

Căn cứ vào quan hệ từ 1 đến 9 ta có thể vẽ biểu đồ Venn như hình 4 - 11 (trong đó, nếu A là tập hợp các thư có tính chất đã cho nào đó thì $\overline{A}$ là tập hợp các thư không có tính chất đó).

Từ hình 4 - 11 ta có:

$$\underset{(3)}{s \supset r} \underset{(6)}{\supset} \overline{w} \underset{(8)}{\supset} \overline{v} \underset{(5)}{\supset} \overline{p}$$

$$p \underset{(1)}{\subset} q \underset{(7)}{\subset} t$$

$$\overline{t} \underset{(4)}{\supset} u$$

$$\overline{s} \underset{(9)}{\supset} y \underset{(2)}{\supset} x.$$

Vì $(\overline{t} \supset u) \leftrightarrow (t \subset \overline{u}),\ldots$, nên ta có : $\overline{u} \supset t$

$$t \supset q \supset p$$

$$p \supset v \supset w \supset \overline{r} \supset \overline{s}$$

$$\overline{s} \supset y \supset x.$$

Từ đó suy ra $\overline{u} \supset x$. Điều này chứng tỏ rằng: thư mà ông G viết thuộc loại "thư tôi không thể đọc".

Bây giờ chúng ta đề cập sơ lược về các lượng từ:

Các lượng từ là các từ sau đây:

- "Với mọi", ký hiệu là $\forall$, được gọi là "lượng từ khái quát".
- "Tồn tại", ký hiệu là $\exists$, được gọi là "lượng từ tồn tại".

(Ký hiệu $\forall$ là viết ngược của chữ A trong từ All của tiếng Anh, từ này có nghĩa là "tất cả". Ký hiệu $\exists$ là "đảo lại" của chữ E trong từ Exist của tiếng Anh, từ này có nghĩa là "tồn tại").

Chẳng hạn:

• "$\forall x \in R, x^2 \geq 0$" có nghĩa là "với mọi $x \in R$, ta đều có $x^2 \geq 0$".

"$\forall x, p(x)$" có nghĩa là "tất cả các phần tử x đều có tính chất p".

"$\forall x \in A, p(x)$" có nghĩa là "tất cả các phần tử của A đều có tính chất p".

• $\exists n \in N$, n là số nguyên tố" có nghĩa là "tồn tại số tự nhiên n là số nguyên tố".

"$\exists x, p(x)$" có nghĩa là "tồn tại phần tử x có tính chất p".

"$\exists x \in A, p(x)$" có nghĩa là "tồn tại ít nhất là một phần tử của tập hợp A có tính chất p".

Sau đây là một số tính chất của các lượng từ:

1. $\forall x\ [a(x) \wedge b(x)] \equiv \forall x\ a(x) \wedge \forall x\ b(x)$

2. $\exists x\ [a(x) \vee b(x)] \equiv \exists x\ a(x) \vee \exists x\ b(x)$

3. $\overline{\exists x\, p(x)} \equiv \forall x\ \overline{p(x)}$

4. $\overline{\forall x\, q(x)} \equiv \exists x\, \overline{q(x)}$.

Chú ý. Ngoài lượng từ khái quát và lượng từ tồn tại, người ta còn sử dụng ký hiệu sau đây:

"$\exists!$" có nghĩa là "chỉ tồn tại một" (tồn tại duy nhất).

5. Phương pháp tiên đề để xây dựng toán học

Phương pháp tiên đề sinh ra từ hình học, vì vậy chúng ta bắt đầu từ hình học.

Để xây dựng hình học thành một ngành toán học chặt chẽ về mặt logic (và trừu tượng), cần phải trình bày các sự kiện hình học thành một hệ thống suy diễn logic chặt chẽ, nghĩa là phải sắp xếp các sự kiện hình học sao cho: mỗi một khái niệm và mỗi một định lý đều được định nghĩa và chứng minh từ các khái niệm và các định lý đã có trước, khi sử dụng các quy tắc logic (các quy tắc định nghĩa khái niệm và các quy tắc suy diễn). Việc làm này đã gặp phải thực tế sau đây:

Ví dụ, xét định nghĩa: "Hình bình hành là *tứ giác* có hai *cặp cạnh song song*".

Rõ ràng rằng "hình bình hành" được định nghĩa thông qua các khái niệm "tứ giác", "hai đường thẳng song song". Các khái niệm này lại được định nghĩa thông qua các khái niệm khác. Đến lượt mình, các khái niệm khác lại được định nghĩa thông qua những khái niệm khác nữa,... Quá trình như vậy không thể tiếp tục mãi được, buộc ta phải lựa chọn và công nhận (không định nghĩa) một số khái niệm, làm cơ sở để định nghĩa các khái niệm khác. Các khái niệm như vậy được gọi là các *khái niệm cơ bản*.

Chúng ta hình thành và định nghĩa các khái niệm hình học nhằm nghiên cứu các tính chất của chúng. Các tính chất được phát biểu và chứng minh thành các định lý.

Quá trình chứng minh các định lý cũng gặp phải một thực tế tương tự như ở quá trình định nghĩa các khái niệm. Điều đó buộc ta phải lựa chọn và công nhận (không chứng minh) một số mệnh đề hình học, dùng làm cơ sở để chứng minh các mệnh đề hình học khác. Những mệnh đề hình học như vậy được gọi là các *tiên đề*. Cùng với ý nghĩa vừa nêu ở trên của các tiên đề, cần ghi nhớ thêm rằng các tiên đề phát biểu rõ ràng những tính chất của các khái niệm cơ bản, mô tả các khái niệm cơ bản.

Như vậy, ở đây đã hình thành một phương pháp đặc biệt để xây dựng hình học: *phương pháp tiên đề*.

Nội dung của phương pháp tiên đề:

1. Trước hết xây dựng một hệ tiên đề gồm :

- Các khái niệm cơ bản
- Các tiên đề.

Ở đây cần chú ý rằng, để có thể "làm việc được" với hệ tiên đề đã xây dựng, hệ tiên đề đó phải được xây dựng sao cho thỏa mãn được ba điều kiện sau đây:

a) Phi mâu thuẫn

b) Độc lập

c) Đầy đủ.

2. Sau đó, từ hệ tiên đề đã được xây dựng, thực hiện định nghĩa tất cả các khái niệm và chứng minh tất cả các định lý, khi sử dụng các quy tắc logic.

Chú ý. Sau khi nảy sinh và phát triển từ hình học, phương pháp tiên đề đã nhanh chóng được vận dụng cho các ngành toán học và khoa học khác. Ngày nay, phương pháp tiên đề đã được sử dụng để xây dựng nhiều lý thuyết khoa học hiện đại.

Ngược dòng lịch sử, có thể thấy rằng phương pháp tiên đề đã xuất hiện lần đầu tiên trong hình học ở thế kỷ III trước Công nguyên. Cách đây hơn 2200 năm, Euclid (330 - 275 trước Công nguyên) người Hy lạp nhưng sống chủ yếu ở Ai Cập cổ đại đã tổng hợp những tri thức hình học cơ bản của người Hy Lạp thời bấy giờ và trình bày chúng thành một hệ thống suy diễn logic tương đối chặt chẽ, khi dựa trện một số tiên đề mà

Euclid

ông đã lựa chọn. Với điều này, Euclid là người đầu tiên trong lịch sử đã sử dụng phương pháp tiên đề để xây dựng hình học thành một khoa học suy diễn. Euclid đã trình bày tất cả những điều đó trong bộ sách "Nguyên lý" (cơ sở) nổi tiếng của mình. Bộ sách này gồm 13 quyển với các nội dung như sau: hình học, một số yếu tố của số học, một số vấn đề cơ bản của việc giải bài toán đại số bằng phương pháp hình học,... Nhìn chung, "Nguyên lý" là bộ sách đã tổng hợp được những cơ sở của toán học đương thời. Trong "Nguyên lý", Eulid đã phân chia các tiên đề thành "định đề" và "tiên đề". Không thấy Euclid nói rõ định đề và tiên đề khác nhau như thế nào. Ngày nay người ta gọi tất cả chúng là tiên đề.

Euclid được coi là một trong ba nhà bác học vĩ đại của nhân loại ở thế kỷ III trước Công nguyên. Ba nhà bác học đó là: Euclid; Archimedes (287 - 212 trước Công nguyên); Apollonius (262 - 200 trước Công nguyên).

Nhận lời mời của vua Claudius Ptolemaeus Đệ nhất, Euclid đã đến Alexandri và thành lập ở đó một học viện toán học. Euclid là người dịu dàng, khiêm tốn, nhưng rất khảng khái và có tính độc lập cao. Tương truyền rằng có một lần, khi C. Ptolemaeus Đệ nhất hỏi Euclid: "Có con đường nào khác, ngắn hơn, để đi vào hình học không?", nhà bác học vĩ đại đã trả lời: "Không! Không có con đường riêng nào dành cho Hoàng gia cả".

Archimedes

Tác phẩm "Nguyên lý" của Euclid được xem là một bản thuyết trình khoa học mẫu mực trong suốt hơn 2200 năm, và đã được Issac Newton (25.12.1643 - 20.3.1727) người Anh noi theo trong tác phẩm "Cơ sở toán học của triết học tự nhiên" của mình. Trong lịch sử phương Tây, "Nguyên lý" của Euclid chiếm hàng thứ hai về số lần tái bản, chỉ thua Kinh Thánh. Hơn 2200 năm qua, rất nhiều nhà toán học trên thế giới đều phải học bộ sách này, như là bước đầu cần thiết để nắm được hình học. Phần lớn chương trình hình học ở trường phổ thông trên thế giới, cho đến những năm gần đây, thực ra cũng chỉ là sao lại "Nguyên lý" của Euclid.

I.Newton

Người ta đã phát hiện ra một vài thiếu sót của hệ tiên đề của Eulclid để xây dựng hình học. Trải qua nhiều thế kỷ, nhiều nhà toán học đã cố gắng khắc phụcnhững thiếu sót đó, nhưng cho mãi đến thế kỷ XIX nhà toán học David Hilbert (23.1.1862 - 14.2.1943) người Đức mới căn bản khắc phục được hết các thiếu sót của Euclid với tác phẩm "Cơ sở của hình học" ra đời năm 1899, và được giải thưởng quốc tế Lobachevskii năm 1903.

D.Hilbert

6. Sai lầm của giáo sư A. M. Legendre

Ở tác phẩm "Nguyên lý" nổi tiếng của Euclid, trong số các định đề và tiên đề để xây dựng hình học (hình học Euclid cổ điển), có định đề V. Nó có nội dung như sau:

"Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng khác tạo thành hai góc trong cùng phía có tổng bé hơn hai góc vuông thì khi kéo dài vô hạn hai đường thẳng này, chúng sẽ cắt nhau về phía hai góc đó".

Định đề V của Euclid tương đương với mỗi mệnh đề trong các mệnh đề sau đây:

• "Qua một điểm ở ngoài một đường thẳng có nhiều nhất là một đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước". (Ngày nay ta gọi mệnh đề này là tiên đề Euclid hay là tiên đề về các đường thẳng song song).

• "Hai đường thẳng song song bị cắt bởi một cát tuyến tạo nên hai góc đồng vị bằng nhau (hoặc hai góc so le trong bằng nhau hoặc hai góc trong cùng phía bù nhau)".

• "Tổng ba góc trong của một tam giác bằng hai góc vuông (180^0)".

• "Tất cả các đường thẳng vuông góc với một cạnh của góc nhọn đều cắt cạnh còn lại của góc đó".

• "Có những tam giác có diện tích lớn tùy ý".

• "Có những tam giác đồng dạng và không bằng nhau".

• "Qua một điểm ở trong một góc lồi bao giờ cũng dựng được một đường thẳng cắt cả hai cạnh của góc đó".

• "Tập hợp các điểm nằm về một phía của một đường thẳng đã cho và cách đều đường thẳng đó là một đường thẳng".

Như đã nói ở trên, hệ tiên đề của Euclid có một vài thiếu sót. Trong quá trình nghiên cứu để phát hiện và khắc phục những thiếu sót của hệ tiên đề này, nhiều nhà toán học đã nghi ngờ rằng định đề V của Euclid là thừa, nghĩa là có thể chứng minh được định đề V, khi dựa vào các định đề và các tiên đề khác. Có điều nghi ngờ này vì hai nguyên nhân sau đây: một là vì nội dung khá phức tạp của nó (người ta thường quen nghĩ rằng một định đề hoặc tiên đề thì phải đơn giản), hai là vì Euclid mãi đến mệnh đề 29 mới sử dụng đến định đề V, trong lúc các định đề khác thì được dùng ngay (Do đó người ta nghi rằng chính Euclid cũng đã tìm cách chứng minh định đề đó nhưng mãi không được, buộc lòng đến mệnh đề 29 phải công nhận nó). Vì mối nghi ngờ này mà trong suốt hơn 2200 năm, nhiều nhà toán học đã tìm cách chứng minh định đề V nhưng đã không chứng minh được. Nhiều chứng minh tưởng đã thành công, nhưng khi phân tích kỹ thì hóa ra là sa vào vòng luẩn quẩn, vì trong đó đã dùng *trực giác công nhận* một mệnh đề tương đương với định đề V, để chứng minh định đề V.

A.M.Legendre

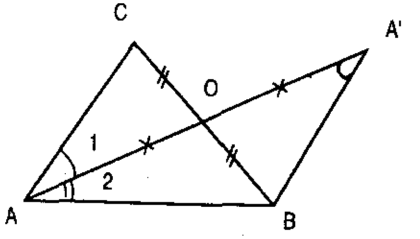
Nhà toán học Adrien Marie Legendre (18.9.1752 - 10.1.1833) người Pháp trong những lần xuất bản khác nhau của tác phẩm "Khái niệm về hình học" của mình, đã đưa ra những cách khác nhau để chứng minh định đề V. Tuy nhiên, tất cả những cách chứng minh đó đều bị mắc sai lầm.

Trong lần xuất bản thứ 3 của tác phẩm "Khái niệm về hình học" của mình (vào năm 1800), A. M. Legendre đã đưa ra cách chứng minh sau đây: Vì định đề V tương đương với mệnh đề "Tổng ba góc trong của một tam giác bằng 180^0", nên để chứng minh định đề V, A.M. Legendre đã tìm cách chứng minh "Tổng ba góc trong của một tam giác bằng 180^0" như sau:

Đầu tiên chứng minh rằng "tổng ba góc trong của một tam giác không thể lớn hơn 180^0".

Giả sử có tam giác ABC mà tổng ba góc trong của nó lớn hơn 180^0: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^0 + p$, với $p > 0$.

Lấy trung điểm O của cạnh BC và kéo dài đoạn AO đến A' sao cho AO = OA' (hình 6-1), ta có: $\Delta AOB = \Delta A'OC \rightarrow \widehat{A'} = \widehat{A}_1$, do đó $\widehat{A'} + \widehat{A}_2 = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \widehat{A}$. Vì vậy, trong hai góc $\widehat{A'}$ và $\widehat{A}_2$ phải có ít nhất là một góc không lớn hơn nửa góc $\widehat{A}$, giả sử đó là góc $\widehat{A}_2$ ($\widehat{A}_2 \leq \dfrac{\widehat{A}}{2}$).



Hình 6-1

Tóm lại, từ tam giác ABC, ta đã dựng được một tam giác mới trong đó có một góc không lớn hơn nửa góc $\widehat{A}$. Từ tam giác mới, ta lại áp dụng cách dựng vừa nêu trên để có được một tam giác thứ ba, trong đó có một góc không lớn hơn nửa góc $\widehat{A}_2$, tức là không lớn hơn $\dfrac{1}{4}$ góc $\widehat{A}$. Cứ thế tiếp tục đến tam giác thứ n thì sẽ được một tam giác có một góc không lớn hơn $\dfrac{\widehat{A}}{2^{n-1}}$. Khi chọn n khá lớn, ta có thể làm cho góc đó nhỏ hơn p. Đồng thời, dễ dàng chứng minh được rằng tổng các góc trong của n tam giác nói trên đều bằng nhau và bằng $180^0 + p$ (sử dụng các tam giác bằng nhau để chứng minh điều này). Như vậy, trong tam giác thứ n, ta có một góc trong nhỏ hơn p, do đó tổng hai góc còn lại phải lớn hơn 180^0. *Điều này là không thể được*, vì tổng hai góc trong của một tam giác không thể lớn hơn 180^0. Có thể chứng minh điều vừa được phát biểu như sau: Ví dụ xét ngay tam giác ABC, giả sử trong tam giác đó có $\widehat{B} + \widehat{C} > 180^0$, lại dựng điểm A' như ở trên, dựa vào các tam giác bằng nhau ta chứng minh được: $\widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{ACA'} > 180^0$, do đó điểm A' sẽ nằm khác phía với điểm O đối với đường thẳng AC, điều này vô lý vì đoạn OA' là kéo dài của đoạn AO. Suy ra không thể có trường hợp $\widehat{B} + \widehat{C} > 180^0$. Cách chứng minh vừa nêu là áp dụng được cho hai góc trong bất kỳ của tam giác bất kỳ.

Từ những kết quả đã thu được suy ra rằng: "Tổng ba góc trong của một tam giác không thể lớn hơn 180^0".

Chú ý: Trong chứng minh ở trên có hai điều cần chú ý sau đây:

• A.M. Legendre đã sử dụng "phương pháp chứng minh bằng phản chứng". Bạn đọc có thể tìm hiểu phương pháp chứng minh này ở mục 8: "Phương pháp chứng minh "thay đổi quanh co"".

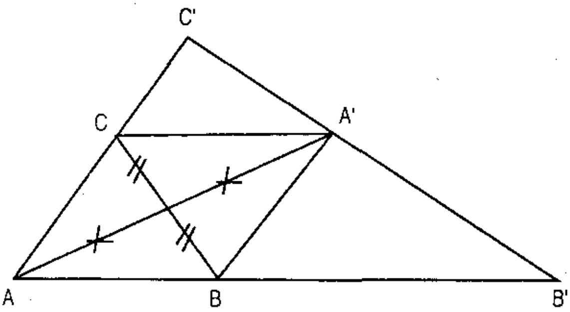
• Ở đây, A.M. Legendre theo quan điểm: Hai tia chung gốc tạo thành hai góc, nếu một góc nhỏ hơn 180^0 thì góc kia lớn hơn 180^0, và tổng của hai góc này bằng 360^0. Do đó một góc có thể có số đo từ 0^0 đến 360^0. Đồng thời, góc có số đo nhỏ hơn 180^0 là "góc lồi", góc có số đo lớn hơn 180^0 là "góc lõm".

Tiếp theo chứng minh rằng *"Nếu tổng ba góc trong của một tam giác nào đó bằng 180^0 thì tổng ba góc trong của bất cứ một tam giác nào cũng bằng 180^0"*.

Trong chứng minh mệnh đề này, A.M. Legendre đã không phạm sai lầm nào và đã không dựa vào định đề V của Euclid.

Từ kết quả vừa nêu suy ra rằng: "Nếu tổng ba góc trong của một tam giác nào đó mà nhỏ hơn 180^0 thì tổng ba góc trong của một tam giác bất kỳ cũng nhỏ hơn 180^0". (6-1).

Có thể chứng minh mệnh đề (6-1) như sau: Giả sử có tam giác ABC mà $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 180^0$ (6-2). Xét tam giác MNP bất kì khác ta có: Theo kết quả đã chứng minh ở trên, ta có: $\widehat{M} + \widehat{N} + \widehat{P} \le 180^0$. Tiếp tục, giả sử $\widehat{M} + \widehat{N} + \widehat{P} = 180^0$ thì theo kết quả đã chứng minh ở trên, suy ra $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^0$, điều này là mâu thuẫn với (6-2). Suy ra rằng nếu đã có (6-2) thì không thể có $\widehat{M} + \widehat{N} + \widehat{P} = 180^0$, vậy thì phải có $\widehat{M} + \widehat{N} + \widehat{P} < 180^0$. Những điều vừa thu được chứng tỏ rằng ta đã chứng minh được mệnh đề (6-1).



Hình 6-2

(Chú ý rằng trong chứng minh vừa nêu ở trên, đã sử dụng phương pháp chứng minh bằng phản chứng).

Sau đó chứng minh rằng "Tổng ba góc trong của một tam giác không thể nhỏ hơn 180^0".

Giả sử có tam giác ABC mà tổng ba góc trong của nó nhỏ hơn 180^0:

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^0 - p$, với $p > 0$ (6-3), ta có:

Dựng điểm A' như ở hình 6-1 và qua A' dựng một đường thẳng cắt cả hai cạnh của góc BAC ở $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ (hình 6-2). Dễ dàng chứng minh được rằng $\Delta BCA' = \Delta CBA$, nên tổng ba góc trong của tam giác BCA' cũng bằng $180^0 - p$. Từ (6-3) và do các kết quả đã có ở trên, suy ra rằng $\Delta BB'A'$ và $\Delta A'C'C$ cũng có tổng ba góc trong nhỏ hơn 180^0.

Giả sử $\Delta BB'A'$ có : $\widehat{B} + \widehat{B} + \widehat{A} = 180^0 - q$, với $q > 0$;

$\Delta A'C'C$ có : $\widehat{A'} + \widehat{C'} + \widehat{C} = 180^0 - r$, với $r > 0$.

Đem tổng các góc trong của bốn tam giác ABC, BCA', BB'A', CC'A' cộng lại với nhau rồi trừ đi các góc ở ba đỉnh B, C, A' (Tại mỗi đỉnh này ta có ba góc mà tổng là một góc bẹt), ta sẽ được tổng ba góc trong của tam giác AB'C' bằng:

$$(180^0 - p) + (180^0 - p) + (180^0 - p) + (180^0 - r) - (3 \times 180^0)$$

$$= 180^0 - 2p - (q + r) < 180^0 - 2p.$$

Như vậy, từ ΔABC có tổng ba góc trong bằng $180^0 - p$, ta đã dựng được ΔAB'C' có tổng ba góc trong nhỏ hơn $180^0 - 2p$. Lại áp dụng cách dựng trên vào tam giác AB'C' thì sẽ được một tam giác thứ ba có tổng ba góc trong nhỏ hơn $180^0 - 4p$. Cứ thế tiếp tục đến tam giác thứ n thì tổng ba góc trong của tam giác đó nhỏ hơn $180^0 - 2^{n-1}.\,p$. Lấy n khá lớn, ta sẽ có tổng ba góc trong của tam giác đó là một số âm. Điều này là vô lý. Từ những kết quả đã thu được suy ra rằng: Tổng ba góc trong của một tam giác không thể nhỏ hơn 180^0.

(Chú ý rằng trong chứng minh vừa nêu ở trên, đã sử dụng phương pháp chứng minh bằng phản chứng).

Từ các kết quả đã thu được ở trên suy ra rằng: Tổng ba góc trong của một tam giác phải bằng 180^0.

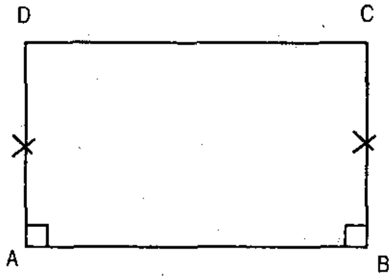
Trên đây là "chứng minh" của A.M.Legendre. Chứng minh này đã công bố trong cuốn "Khái niệm về hình học" của ông, in năm 1794 và được coi là thay cho bộ "Nguyên lý" của Euclid. Cuốn sách này được dịch ra nhiều thứ tiếng và ở Mỹ đã tái bản đến lần 33.

Tuy vậy khi khảo sát "chứng minh" đã giới thiệu ở trên của A.M.Legendre, người ta nhận thấy rằng tất cả lý luận của ông đều đúng, trừ câu "qua A' dựng một đường thẳng cắt cả hai cạnh của góc BAC ở B' và C' " là bị sa vào vòng luẩn quẩn[1], vì người ta đã chứng minh được rằng nếu không dựa vào định đề V thì

---

[1] Về sau, chính A.M.Legendre cũng đã chỉ ra chỗ sai của mình.

không thể chứng minh được mệnh đề: "Qua một điểm nằm trong một góc lồi bao giờ cũng dựng được một đường thẳng cắt cả hai cạnh của góc đó". Những điều này chứng tỏ rằng A.M.Legendre đã dựa vào trực giác mà công nhận một hệ quả của định đề V để chứng minh định đề V. Đây chính là sai lầm của A.M.Legendre.



Hình 6-3

Sau đây là một vài sai lầm khác:

Một công trình nghiên cứu khác về định đề V của Euclid là của Girolamo Saccheri (1667 - 1733), một thầy tu dòng Jesuit và là giáo sư toán học ở Trường đại học Pavia. Ông cho in công trình này vào năm 1733, trong đó, do làm một phép tính sai, nên ông đã tưởng nhầm là mình đã chứng minh được rằng: "Nếu tứ giác ABCD (hình 6-3) có $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$ là hai góc vuông và AD = BC thì $\widehat{D}$ và $\widehat{C}$ cũng là hai góc vuông". Từ đó G.Saccheri tưởng nhầm rằng mình đã chứng minh được định đề V (Mệnh đề vừa được phát biểu ở trên là tương đương với định đề V. Do đó, nếu chứng minh được mệnh đề này thì có nghĩa là chứng minh được định đề V).

Năm 1766, Johann Henrick Lambert (26.8.1728 - 25.9.1777, người Đức, sinh ở Thụy Sĩ) đã viết một công trình tương tự công trình của G. Saccheri. Nhưng công trình này đã không được công bố cho đến khi ông qua đời. J. H. Lambert đã


J.H.Lambert

nghiên cứu một tứ giác có ba góc vuông, góc còn lại sẽ rơi vào một trong ba trường hợp: nhọn, vuông hoặc tù (ứng với các trường hợp này, tổng ba góc của tam giác lần lượt sẽ là nhỏ hơn, bằng hoặc lớn hơn hai góc vuông. Do đó, ba trường hợp này sẽ tương ứng tương đương với ba khả năng: "Qua một điểm cho trước có thể dựng được nhiều hơn một đường thẳng, hoặc đúng một đường thẳng, hoặc không một đường thẳng nào song song với một đường thẳng cho trước không đi qua điểm đã cho ở trên"). J.H.Lambert đã dễ dàng bác bỏ được trường hợp "tù", nhưng với trường hợp "nhọn" thì ông không làm thế nào để bác bỏ được. Và ông nhận thấy rằng mọi cố gắng để chứng minh định đề V của Euclid sẽ không đi đến kết quả. J.H.Lambert viết: "Có thể đưa vấn đề chứng minh định đề V của Euclid đến chỗ chỉ còn tý xíu nữa là xong. Nhưng đem phân tích kỹ thì tất cả vấn đề lại là ở tý xíu đó".

7. Hình học phi Euclid

Truyện kể rằng, vào năm 1823 Farkas Bolyai (1775 - 1858) đã viết thư cho người con trai là János Bolyai (15.12.1802 - 27.1.1860) người Hungari rằng: "Con đừng đi vào con đường mà bố đã đi, đừng nhảy vào "hang không đáy" đã nuốt hết trí tuệ, tinh lực và tâm huyết của bố". Đây là lời khuyên từ đáy lòng, từ trách nhiệm của người bố đã suốt cả cuộc đời nghiên cứu định đề V của Euclid, mà không thành công. Khi biết con mình yêu thích nghiên cứu "lý thuyết các đường song song", thì F. Bolyai đã rất sợ hãi và đã viết cho con mình (trong một bức thư khác) như sau: "Con sẽ không thể nào chiến thắng được lý thuyết các đường song song bằng con đường ấy. Bố đã đi đến cuối con đường ấy và đã lạc vào một đêm đen dày đặc, một tia sáng của ngọn nến cũng không có và đã chôn vùi ở đó bao niềm hạnh phúc của đời mình. Khi lao vào các học thuyết cô quạnh về các đường song song, con sẽ chẳng còn gì cả. Con hãy lẩn tránh nó như lẩn tránh những dục vọng thấp hèn; nó sẽ làm hao mòn sức lực của con, cướp đi sự an nhàn, quấy đảo sự yên tĩnh và sẽ giết chết những niềm vui của cuộc sống. Bóng tối mịt mùng sẽ nuốt chửng cả những chòi tháp khổng lồ và sẽ chẳng có lóe sáng trên Trái Đất tối tăm; chẳng bao giờ con người có thể đạt tới một sự thực hoàn mĩ ngay chính trong hình học. Chúa Trời hãy cứu vớt con khỏi những ham mê con ôm ấp...". Nhưng F.Bolyai không ngờ rằng câu nói của chính ông trước đây đã làm J.Bolyai bị thu hút vào vấn đề này. (Câu nói đó có nội dung như sau: "Ai chứng minh được tiên đề về các đường thẳng song song, người đó sẽ sáng ngời như một viên kim cương to bằng Trái Đất"). Và chàng J.Bolyai trẻ tuổi đã không vì những lời cảnh báo của bố mình mà lùi bước. Tránh các thất bại của những người đi trước, J.Bolyai đã đi theo con đường riêng của mình. Ông đã không tìm cách chứng minh định đề V của Euclid, mà đã xét nó như là một tiên đề độc lập. Và khi phủ định định đề V của Euclid, J.Bolyai đã xây dựng được một hệ thống hình học mới (mà về sau được gọi là hình học phi Euclid, hay còn được gọi là hình học Labachevskii). Các kết quả về hình học này của ông cũng phong phú và những chứng minh của ông rất hoàn thiện.

J.Bolyai là một nhà toán học thiên tài, nhưng bị đố kị, chê bai và bị cả những điều đơm đặt về ông. Cuộc sống của J. Bolyai luôn bị bọn quý tộc chèn ép, bao vây cả về tinh thần lẫn vật chất. Người bố chính là một nhà toán học đầy tâm huyết và rất thương con. Nhưng từ bài học sai lầm được rút ra từ chính cuộc đời nghiên cứu toán học của mình, F. Bolyai đã vô tình trở thành vật cản của con trên con đường tìm tòi, sáng tạo.

Năm 1831, J. Bolyai đã công bố công trình của mình dưới dạng phụ lục ở cuối một cuốn sách của bố mình. Phụ lục trình bày "Học thuyết tuyệt đối đúng về không gian". F.Bolyai đã viết thư cho Carl Friedrick Gauss, (30.4.1777 - 23.2.1855) đề nghị C.F.Gauss cho nhận xét về công trình nghiên cứu của J. Bolyai. Trong thư trả lời, C.F. Gauss đã nói rằng ông không thể ngợi khen công trình đó, vì như thế tức là tự khen mình. Ông nói rằng *tư tưởng của J. Bolyai trong* "phụ lục" chính là tư tưởng của ông trong nhiều năm trước đây. Sau đó C.F.Gauss đã viết thư cho Goling với ý cho rằng nhà toán học trẻ tuổi J. Bolyai là một thiên tài.

C.F.Gauss

Phải nói rằng những lời đánh giá trên đây của nhà toán học lỗi lạc C.F.Gauss là hoàn toàn chân thực. Thật vậy, từ năm 1824, trong thư gửi cho người bạn là Tolinos, C.F.Gauss đã viết: "Tổng ba góc trong của một tam giác phẳng phải nhỏ hơn 180^0, giả định này sẽ dẫn đến những đặc thù khác hoàn toàn với hình học của chúng ta. Tôi phát triển nó và thu được những kết quả hoàn toàn khiến ta hài lòng". Và bức thư nổi tiếng mà C.F.Gaus đã gửi Frants Adonf Taurinus (15.11.1794 - 13.2.1874) cũng chứng tỏ rằng: C.F.Gauss đã nắm được các ý niệm quan trọng của hình học phi Euclid. Nhưng đó chỉ mới là những đoạn rời rạc, những phát kiến, mặc dù đã rất sâu sắc. Tuy nhiên, lúc bấy giờ C.F.Gauss đã không công bố những kết quả nghiên cứu này của mình.

Thư trả lời của C.F.Gauss đã làm cho J.Bolyai có những hiểu lầm lớn. J.Bolyai nghĩ rằng C.F.Gauss đã dùng uy danh của mình để cướp đi quyền phát minh về hệ thống hình học mới của ông. Vì thế, J.Bolyai rất đau lòng đã thề rằng sẽ vứt bỏ mọi nghiên cứu toán học. Tháng 10 - 1848, J.Bolyai đã được bố mình gửi cho luận văn: "Nghiên cứu hình học về lý thuyết các đường song song" của N.I.Labachevskii, xuất bản bằng tiếng Đức năm 1840, tại Beclin. J.Boyai đã rất ngạc nhiên, vì thấy rằng N.I.Lobachevskii cũng đã đi đến những kết quả giống như của mình. Và J. Bolyai cũng rất khâm phục tài năng của N. I. Lobachevskii.

Lobachevskii

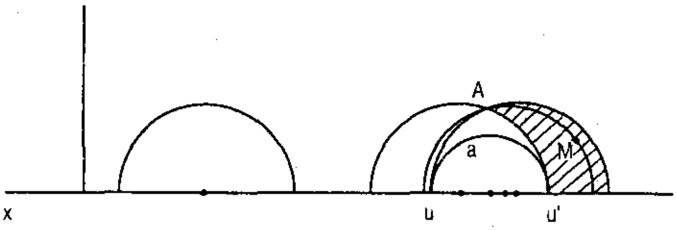
Cùng thời với J.Bolyai, ở Cadan (thủ đô của nước Cộng hòa tự trị Tacta thuộc Liên bang Nga), đã xuất hiện một ngôi sao sáng, đó là nhà toán học thiên tài Nicolai Ivanovich Lobachevskii (1.12.1792-24.2.1856). N.I.Lobachevskii đã từng là giáo sư xuất sắc, hiệu trưởng của Trường đại học Tổng hợp Cadan. Ông đã tìm cách chứng minh rằng từ các định đề và tiên đề khác của hình học Euclid cổ điển, không thể suy ra được định đề V. Để chứng minh điều đó, ông đã giữ nguyên các định đề và tiên đề khác (của hình học Euclid cổ điển) và thay thế định đề V bằng một tiên đề khác phủ định của tiên đề Euclid (tương đương với định đề V), và do đó cũng là phủ định của định đề V. Ngày nay, tiên đề này được gọi là tiên đề Lobachevskii. Tiên đề này có nội dung như sau: "Trong mặt phẳng, qua một điểm không nằm trên một đường thẳng cho trước, có ít nhất là hai đường thẳng không cắt đường thẳng đã cho". Rồi từ đó N.I.Lobachevskii đã xây dựng nên một thứ hình học mới không có mâu thuẫn. Những kết quả của hình học mới này "trái mắt", trái với những trực quan hàng ngày của chúng ta, trái với hình học Euclid quen thuộc. Điều này được thể hiện ở nội dung của tiên đề Lobachevskii, hoặc ví dụ như ở định lý: "Tổng ba góc trong của một tam giác nhỏ hơn hai góc vuông".

Ngày 11-2-1826 N.I.Lobachevskii đã đọc một bản luận văn trên diễn đàn vật lý - số học của Trường đại học Tổng hợp Cadan, để công bố kết quả nghiên cứu của mình về hình học phi Euclid. Sau đó, công trình nghiên cứu về hình học phi Euclid của N.I.Lobachevskii với tiêu đề "Về các cơ sở hình học", đã được đăng ở tờ "Thông báo Cadan" xuất bản năm 1829. Còn công trình của J.Bolyai về hình học phi Euclid được công bố vào năm 1931 (độc lập với N.I.Lobachevskii). Ngày nay, chúng ta gọi hình học phi Euclid (do N.I.Lobachevskii và J.Bolyai đã độc lập với nhau và đồng thời tìm ra) là hình học Lobachevskii hoặc hình học Lobachevskii - Bolyai. Ngày 11.2.1826 được thế giới gọi là ngày ra đời của môn hình học này.

Trong thời đại của N.I.Lobachevskii, hầu như không ai hiểu được tư tưởng của ông. Và nhiều người đã chế nhạo ông. Nhưng N.I.Lobachevskii đã dũng cảm và tin tưởng phát triển hình học mới của mình. Ông đã kiên trì nghiên cứu và công bố công trình nghiên cứu của mình càng ngày càng chi tiết hơn, đầy đủ hơn. Một năm trước khi qua đời, N.I. Lobachevskii đã bị mù. Khi đó ông còn đọc cho học trò của mình chép một công trình sáng tạo mới mang tên là "Hình học phẳng", trong đó ông đã chỉ rõ hình học Euclid chỉ là trường học giới hạn của hình học phi Euclid của ông. N.I.Lobachevskii đã gửi công trình cuối cùng này cho Trường đại học Tổng hợp Cadan - nơi cả cuộc đời sáng tạo của ông đã trôi qua ở đó.

Ngày 24 - 2 - 1856, N.I.Lobachevskii đã qua đời. Vài chục năm sau người ta mới công nhận toàn bộ những tư tưởng của ông.

Công trình nghiên cứu của N.I.Lobachevskii và J.Bolyai về hình học phi Euclid là một thành tựu vĩ đại của khoa học, đã mở ra một kỷ nguyên mới trong sự phát triển của toán học, của vật lý và của nhiều ngành khoa học khác có liên quan.



Hình 7-1

Vào năm 1882, nhà toán học H.J.Poincaré đã xây dựng được một mô hình (gọi là mô hình Poincaré) của hình học Lobachevskii phẳng, khi sử dụng các "vật liệu" lấy từ hình học Euclid phẳng. Để giúp bạn đọc có thể hình dung được phần nào về các kết quả của hình học Lobachevskii phẳng, xin được giới thiệu sơ lược về mô hình này như sau (hình 7-1):

Trong mặt phẳng Euclid, lấy một đường thẳng x nằm ngang chia mặt phẳng ra làm hai miền, mà ta gọi là "nửa trên" và 'nửa dưới". Ta có các quy ước sau đây về các khái niệm cơ bản của hình học Lobachevskii phẳng: "Điểm" là điểm (Euclid) thông thường thuộc "nửa trên" và không thuộc x.

"Đường thẳng" là nửa đường tròn thông thường thuộc "nửa trên" và có tâm thuộc x, hoặc là tia thông thường thuộc "nửa trên", có gốc thuộc x và vuông góc với x (Để tiện cho việc phát triển sau này, ta coi các tia đó như là nửa đường tròn có bán kính lớn vô cùng, có tâm thuộc x).

Tiếp tục, trong mô hình này, được xác định rõ ý nghĩa của các khái niệm cơ bản khác, mà cụ thể là của các tương quan cơ bản sau đây: "thuộc", "ở giữa", "bằng nhau" (còn gọi là "toàn đẳng"), trong đó "thuộc" và "ở giữa" được hiểu như thông thường.

Người ta đã kiểm nghiệm tất cả các tiên đề của hình học Lobachevskii đối với mô hình nêu trên, và thấy rằng mô hình này đã thỏa mãn tất cả các tiên đề đó. Trong đó, tiên đề Lobachevskii đã được nghiệm đúng như sau:

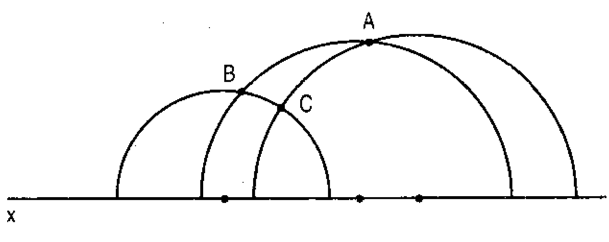
Ký hiệu (L) là Lobachevskii.

Cho trước đường thẳng (L) a và điểm (L) A $\notin$ a. Xét trường hợp xảy ra như ở hình 7-1 (những trường hợp khác, bạn đọc tự xét lấy). Khi đó ta có:

Hai nửa đường tròn thông thường qua A, có tâm thuộc x và "tiếp xúc" với a (theo nghĩa thông thường) theo thứ tự tại u và u' chính là hai đường thẳng (L) Au và Au' qua A và không có điểm chung với a. Cần chú ý rằng u và u' không phải là điểm (L), nên Au và Au' đều không có điểm chung với a. Hai đường thẳng (L) Au và Au' được gọi là hai đường thẳng song song với đường thẳng (L) a.

Những đường thẳng (L) đi qua A và một điểm (L) bất kỳ nằm trong "miền gạch gạch" là những đường thẳng (L) qua A mà không có điểm chung với a (các đường thẳng (L) này được gọi là các đường thẳng phân kỳ với a).

Rõ ràng rằng tiên đề Lobachevskii đã được nghiệm đúng.



Hình 7-2

Chú ý:

1. Thêm vào những điều ở trên, ta có định lý sau đây của hình học Lobachevskii: "Tổng ba góc trong của một tam giác nhỏ hơn hai góc vuông" là tương ứng với định lý dưới đây của hình học Euclid: "Nếu một tam giác cong có ba cạnh là ba cung tròn thuộc ba đường tròn có tâm thẳng hàng thì tổng ba góc trong của tam giác đó nhỏ hơn hai góc vuông" (xem hình 7-2).

2. Việc xây dựng thành công mô hình Poincaré của hình học Lobachevskii đã chứng minh được rằng:

a) Hình học Lobachevskii là phi mâu thuẫn (vì đã biết hình học Euclid là phi mâu thuẫn).

b) Từ các tiên đề khác của hình học Euclid không thể suy ra được tiên đề Euclid (và do đó không suy ra được định đề V của Euclid).

Hình học Lobachevskii không phải là hình học phi Euclid duy nhất. Hình học Riemann nghĩa hẹp của Georg Friedrich Bernhard Riemann (17.9.1826 - 20.7.1866) người Đức cũng là hình học phi Euclid. Hình học Riemann nghĩa hẹp khác cả hình học Euclid lẫn hình học Lobachevskii. Chẳng hạn như, trong hình học Riemann nghĩa hẹp, ta có:

1. Bất cứ hai đường thẳng nào, cùng thuộc một mặt phẳng thì cũng cùng thuộc một điểm. Do đó trong hình học Riemann nghĩa hẹp, không có khái niệm "hai đường thẳng song song".

2. Tổng ba góc trong của một tam giác lớn hơn 180^0.

Để có được hệ tiên đề của hình học Riemann nghĩa hẹp, phải thay đổi hệ tiên đề của hình học Euclid nhiều hơn là những thay đổi mà N.I.Lobachevskii đã thực hiện (để có được hình học Lobachevskii). Vì vậy, hệ tiên đề của hình học Riemann nghĩa hẹp là khác khá nhiều so với hệ tiên đề của hình học Euclid và hệ tiên đề của hình học Lobachevskii.

Hình học Riemann nghĩa hẹp là trường hợp đặc biệt của hình học Riemann nghĩa rộng.

G.F.B.Riemann

Ngoài các hình học: hình học Euclid, hình học Lobachevskii, hình học Riemann, còn hình học nào nữa không?

Ngoài các hình học vừa nêu, còn nhiều hình học khác, trong đó có hình học fractal. Thuật ngữ fractal do nhà toán học Benoit Mandtelbrot (sinh ngày 20.11.1924) người Pháp gốc Ba Lan, đề nghị từ những năm 1970. Tuy mới ra đời nhưng hình học này đã phát triển nhanh chóng, gắn liền với đồ họa vi tính, có nhiều ứng dụng trong phân tích và tổng hợp hình, trong việc xây dựng mô hình của các quá trình địa lý, quá trình sinh học (hoạt động của tim người, phát triển của cây trồng, v.v...).

8. Phương pháp chứng minh "thay đổi quanh co"

Ở phương Tây, khi người ta tuyên truyền một sản phẩm nào đó, ví dụ quảng cáo kem bôi mặt hiệu "Mỹ Dung", ngoài việc nói rõ thứ kem này có "chất lượng tốt, giá rẻ", rồi làm cho con người "thanh xuân mãi mãi",... cuối cùng thế nào cũng nói thêm câu: "Kem bôi mặt hiệu "Mỹ Dung" người nào thích đẹp ai ai cũng mua". Nghe ra có vẻ chỉ là mấy câu khen thông thường, nhưng hiệu quả thực tế của nó thì thật lớn! Điều kỳ diệu là ở đâu?

Vấn đề là ở chỗ: câu cuối cùng tương đương với mệnh đề "Bạn không mua kem bôi mặt này thì bạn chính là người không thích đẹp". Mà thích đẹp vốn là thiên tính của con người, có lẽ nào bạn chịu mất đi cái thiên tính đó? Nếu là người thích đẹp thì bạn phải mua kem bôi mặt hiệu "Mỹ Dung"!

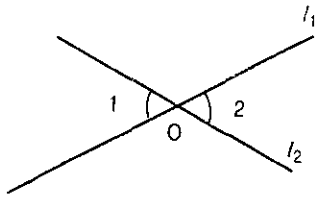
Qua nghệ thuật quảng cáo kem bôi mặt hiệu "Mỹ Dung" ta thấy rằng, mục đích của quảng cáo đã đạt được thông qua việc thay đổi khéo léo mệnh đề. Có điều là, muốn làm rõ điều bí hiểm trong đó thì phải bàn từ tính đúng hoặc sai của các mệnh đề sau đây:

Trong quá trình học hình học ở trường trung học phổ thông, hẳn là các bạn đã được làm quen với bốn hình thức sau đây của các mệnh đề:

[Mệnh đề thuận]: $p \to q$; [mệnh đề phản]: $\overline{p} \to \overline{q}$

[Mệnh đề đảo]: $q \to p$; [mệnh đề phản đảo]: $\overline{q} \to p$ (còn gọi là [mệnh đề đảo phản]).

Để thấy được mối liên hệ nội tại giữa bốn hình thức kể trên của các mệnh đề, chúng ta hãy phân tích các câu sau đây:

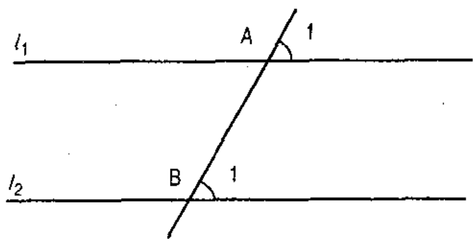


Hình 8-1

1. Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau (hình 8-1).

2. Nếu $x^2 - 4 = 0$ thì $x = 2$.

3. Nếu hai đường thẳng song song (bị cắt bởi một cát tuyến) thì hai góc đồng vị bằng nhau (hình 8-2).



Hình 8-2

4. Nếu là đêm thì nhất định có trăng.

Tóm tắt thành phần của các mệnh đề có được từ bốn câu này như trong bảng 8-1.

Bảng 8-1

Thứ tự của câu	p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$
1	$\widehat{O}_1$ và $\widehat{O}_2$ là hai góc đối đỉnh	$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$	$\widehat{O}_1$ và $\widehat{O}_2$ không phải là hai góc đối đỉnh	$\widehat{O}_1 \neq \widehat{O}_2$
2	$x^2 - 4 = 0$	$x = 2$	$x^2 - 4 \neq 0$	$x \neq 2$
3	$l_1 // l_2$	$\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$	l_1 không song song với l_2	$\widehat{A}_1 \neq \widehat{B}_1$
4	Là đêm	Có trăng	Không phải đêm	Không có trăng

Giá trị chân lý của bốn mệnh đề theo bốn hình thức kể trên, tương ứng với từng câu đã cho được ghi ở bảng 8-2.

Bảng 8-2

Thứ tự của câu	Mệnh đề thuận $p \to q$	Mệnh đề đảo $q \to p$	Mệnh đề phản $\overline{p} \to \overline{q}$	Mệnh đề phản đảo $\overline{q} \to \overline{p}$
1	1	0	0	1
2	0	1	1	0
3	1	1	1	1
4	0	0	0	0

Từ bảng 8-2 dễ dàng nhận thấy rằng:

1. Mệnh đề thuận tương đương với mệnh đề phản đảo.
2. Mệnh đề đảo tương đương với mệnh đề phản.

Tính chất tương đương của các cặp mệnh đề kể trên là quy luật có tính phổ biến, nghĩa là ta có kết quả tổng quát sau đây:

1. Mệnh đề thuận: A → B tương đương với mệnh đề phản đảo: $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$.

2. Mệnh đề đảo: B → A tương đương với mệnh đề phản: $\overline{A} \rightarrow \overline{B}$ (trong đó A, B là các mệnh đề bất kỳ).

Bạn đọc tự chứng minh kết quả này.

Trở lại nghệ thuật quảng cáo nói ở trên, có thể thấy rằng người ta đã vận dụng sự thay thế tương đương các mệnh đề, khích cho khách hàng có hiệu ứng tâm lý muốn mua hàng.

Trong toán học, sự thay thế tương đương các mệnh đề được dùng để chứng minh một số vấn đề khó chứng minh trực tiếp. Sau đây là một ví dụ:

Bảng 8-3

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Nhà toán học Eratosthenes (275 - 194 trước Công nguyên) người Hy Lạp cổ đại đã đưa ra một phương pháp lập bảng số nguyên tố[1]. Phương pháp này giống như chiếc sàng, loại bỏ những cái không cần thiết, lưu giữ lại những cái cần thiết. Cách làm cụ thể như sau: sắp xếp các số tự nhiên từ 2 đến N theo thứ tự 2, 3, 4, 5,... N. Lưu lại số 2 đầu tiên, xóa đi tất cả các số là bội số của

1. Số nguyên tố đã học ở lớp 6: là số tự nhiên lớn hơn 1 mà chỉ có hai ước số là 1 và chính nó. Số 2 là số nguyên tố nhỏ nhất và là số nguyên tố chẵn duy nhất. Số nguyên tố được nhà toán học nổi tiếng Euclid phát hiện từ thế kỷ III trước Công nguyên.

2. Sau số 2, số không bị xóa đầu tiên là số 3, lưu lại số 3, xóa đi tất cả các số là bội số của 3. Sau số 3, số không bị xóa đầu tiên là số 5, lưu lại số 5, xóa đi tất cả các số là bội số của 5,... Cứ thế tiếp tục làm cho tới khi nào không xóa được nữa thì thôi. Còn lại là số nguyên tố nhỏ hơn hoặc bằng N. Trong bảng 8-3, khi N = 64 thì có cả thảy 18 số nguyên tố. Đây là phương pháp đầu tiên để tìm các số nguyên tố.

Có thể có người không để ý đến phương pháp này, đó là một sai lầm lớn. Bao nhiêu thế kỷ trôi qua, vô số những nhà toán học ưu tú đã từng tốn công tìm biểu thức giải tích của số nguyên tố nhưng đến nay vẫn chưa thành công. Nếu có được biểu thức của số nguyên tố thì việc tìm các số nguyên tố sẽ không có gì khó khăn lắm. Nhưng bảng số nguyên tố dưới số một tỷ (N = 1 tỉ) mà loài người có được ngày nay đều do áp dụng phương pháp sàng của Eratosthenes, có điều là đã có chút cải tiến.

Điều đáng kinh ngạc là năm 1934 học sinh Sundaram người Ấn Độ đã đưa ra phương pháp sàng khác với phương pháp của Eratosthenes. Trước tiên Sundaram liệt kê ra một bảng có các số như nhau trên các hàng và các cột cùng thứ tự (bảng 8-4).

Bảng 8-4

4	7	10	13	16	19	22	...
7	12	17	22	27	32	37	...
10	17	24	31	38	45	52	...
13	22	31	40	49	58	67	...
16	27	38	49	60	71	82	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Các số này được chọn bằng cách lần lượt thực hiện các bước sau đây:

1. Viết số 4 vào góc phía trên bên trái.

2. Các số tiếp theo của hàng 1 (và cột 1) lần lượt là số liền trước cộng thêm 3.

3. Các số tiếp theo của hàng 2 (và cột 2) lần lượt là số liền trước cộng thêm 5.

4. Các số tiếp theo của hàng 3 (và cột 3) lần lượt là số liền trước cộng thêm 7.

. . . .

Sau đó, Sundaram chỉ rõ rằng: Nếu N có trong bảng 8 - 4 thì 2N + 1 là hợp số (số tự nhiên khác 1 mà không phải là số nguyên tố). Nếu N không có trong bảng 8-4 thì 2N + 1 là số nguyên tố.

Sau đây là chứng minh của Sundaram: Trước hết viết ra số đầu tiên của hàng n:

$$4 + (n - 1) \times 3 = 3n + 1.$$

Chú ý rằng hàng đó là cấp số cộng có "công sai" là 2n+1, cho nên số thứ m của hàng n là:

$$(3n+1) + (m - 1) \times (2n+1) = (2m+1)n + m.$$

Bây giờ đặt N là số thứ m của hàng thứ n, ta có:

$$N = (2m+1)n + m.$$

Vậy: $2N + 1 = 2[(2m + 1)n + m] + 1 = (2m + 1) \times (2n + 1)$. Từ đó suy ra rằng: Nếu N là số có trong bảng 8-4, thì số 2N + 1 là hợp số.

Tiếp tục, cần chứng minh rằng: "Nếu N không có trong bảng 8-4 thì 2N +1 là số nguyên tố". (8-1)

Chứng minh trực tiếp mệnh đề (8-1) thì tương đối khó. Sẽ dễ hơn, nếu tìm cách chứng minh mệnh đề phản đảo của mệnh đề này, nghĩa là tìm cách chứng minh rằng: "Nếu 2N + 1 không phải là số nguyên tố thì N nhất định có trong bảng 8-4". (8-2)

Chứng minh mệnh đề (8-2) như sau: Nếu 2N + 1 không phải là số nguyên tố thì $2N + 1 = x \times y$ (với x, y là số tự nhiên). Vì

$2N + 1$ là số lẻ, nên x, y đều là số lẻ. Đặt $x = 2n + 1$; $y = 2m + 1$, ta có:

$$2N + 1 = (2n + 1) \times (2m + 1) = 2n\,(2m + 1) + (2m + 1)$$
$$= 2\,[(2m+1)\,n + m] + 1.$$

Do đó: $N = (2m+1)\,n + m$.

Suy ra N là số thứ m của hàng n trong bảng 8-4.

Bởi vậy, mệnh đề (8-2) đã được chứng minh là đúng. Suy ra (8-1) cũng đúng.

Tổng hợp những điều đã thu được ở trên, có thể kết luận rằng chúng ta đã chứng minh được phương pháp sàng lọc của Sundaram.

Ví dụ. 18 không có trong bảng 8-4, nên $2 \times 18 + 1 = 37$ là số nguyên tố. Ngược lại, 71 có trong bảng 8-4, nên $2 \times 71 + 1 = 143$ là hợp số. Có thể kiểm tra kết quả này nhờ đẳng thức $143 = 11 \times 13$.

Bây giờ bạn đọc hãy xem phương pháp chứng minh bằng phản chứng.

Trong toán học, có khi để chứng minh mệnh đề p là đúng, ta xuất phát từ mệnh đề phủ định $\overline{p}$. Qua một dãy các suy luận, cuối cùng *dẫn đến mệnh đề mâu thuẫn với mệnh đề Y, tức là dẫn đến* $\overline{Y}$, *với Y là mệnh đề đã biết là đúng.* Và từ đó rút ra kết luận rằng $\overline{p}$ là sai, nghĩa là p là mệnh đề đúng. Phương pháp chứng minh như vậy được gọi là phương pháp chứng minh bằng phản chứng.

Phương pháp chứng minh bằng phản chứng bao gồm ba bước sau đây:

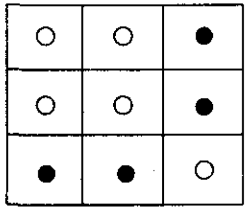
1. Phủ định mệnh đề p cần chứng minh, tức là giả sử có $\overline{p}$.

2. Quy sai, tức là từ $\overline{p}$ suy ra mệnh đề mâu thuẫn với mệnh đề Y: $\overline{p} \rightarrow \overline{Y}$, với Y là mệnh đề đã biết là đúng.

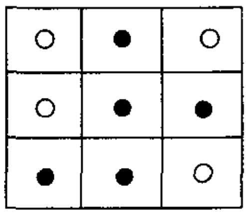
3. Kết luận rằng mệnh đề $\overline{p}$ là sai, tức là mệnh đề p là mệnh đề đúng.

Phương pháp chứng minh bằng phản chứng thường dùng để chứng minh những mệnh đề nói về tính duy nhất, tính vô lý, tính vô hạn,... những mệnh đề chứa những từ như "ít nhất...", "không đều...", "không thể...", "không phải...", "không có...".

Sau đây chúng ta sẽ khảo sát "trò chơi đổi màu". Đây là trò chơi lý thú và thuận lợi cho việc tập vận dụng phương pháp chứng minh bằng phản chứng.



Hình 8-3



Hình 8-4

Trong một hình vuông có $3 \times 3 = 9$ ô, xếp đủ 9 quân cờ hai màu trắng - đen như ở hình 8-3. Ở mỗi lần chơi, người chơi phải thay đổi cả 3 quân cờ trong một hàng hoặc trong một cột (trắng đổi thành đen, đen đổi thành trắng).

Hỏi có thể "đổi màu" một số lần hữu hạn, để chuyển "tình trạng" như ở hình 8-3 về "tình trạng" như ở hình 8-4 được không?

Bạn đọc thông minh thì qua vài lần thất bại, nhất định sẽ đoán được kết luận là phủ định. Chỉ có điều, muốn chứng minh nó thì phải suy luận (xem giải đáp ở mục 19: "Suy luận ngược hướng của "trò chơi trí tuệ"").

9. Suy luận ngược hướng của "trò chơi trí tuệ"

"Trò chơi trí tuệ" không những có thể rèn luyện tư duy và năng lực suy luận logic của con người, mà còn điều chỉnh và là liều thuốc sống vui vẻ, có ích cho việc rèn luyện tư tưởng, tình cảm. Song trí tuệ là vấn đề muôn màu muôn vẻ, có nhiều đặc điểm riêng. Có khi, diện mạo của trí tuệ phức tạp, khiến người ta không biết bắt đầu từ đâu, nhưng khi đã khám phá được rồi thì vận dụng nó lại dễ dàng; có khi xem qua thì bình thường, không có gì là lạ, nhưng khi suy nghĩ kỹ thì lại như "mê cung", không có đường thoát.

Cái khó của "trò chơi trí tuệ" là "trò diễn ai ai cũng biết, cái tài chẳng ai giống ai", nhưng không phải là không có những quy luật.

Bây giờ chúng ta sẽ bàn về phương pháp suy luận ngược hướng qua các "trò chơi trí tuệ" trong các ví dụ sau đây:

Ví dụ 1. Thầy giáo muốn biết ba học sinh tâm đắc của mình, ai thông minh hơn nên đã dùng phương pháp sau đây:

Thầy chuẩn bị 5 chiếc mũ, trong đó 4 chiếc màu trắng, 1 chiếc màu đen. Thầy đưa số mũ cho ba học sinh xem rồi bảo họ nhắm mắt lại và thầy đội mũ lên đầu họ. Thầy đã đội cho họ 3 chiếc mũ cùng màu, còn 2 chiếc mũ khác màu thì cất đi. Thầy bảo họ mở mắt ra và đoán xem đầu mình đội chiếc mũ màu gì. Ba học sinh nhìn nhau và đều do dự chốc lát, sau đó dường như đồng thời cũng đoán rằng mũ trên đầu mình màu trắng. Vậy ba học sinh đã suy luận thế nào để đoán được như vậy?

Cả ba học sinh đều dùng phương pháp suy luận ngược hướng như sau:

Tại sao cả ba học sinh đều cùng do dự chốc lát? Điều này chỉ có thể giải thích rằng, vì họ đều không nhìn thấy chiếc mũ đen. Trong chốc lát do dự, ba học sinh thông minh đều ý thức ngay được điều đó. Lúc này A nghĩ: "Trên đầu mình nếu là mũ màu đen thì B và C sẽ đoán là trên đầu họ đều đội mũ màu trắng, bởi vì mũ màu đen không thể có hai người cùng đội, mà B và C đều do dự có nghĩa là ta (A) đang đội mũ màu trắng!". B và C cũng nghĩ cũng như A. Cho nên cả ba người gần như đồng thời cùng đoán ra màu mũ của mình đang đội.

Trò chơi đoán màu mũ cũng có thể mở rộng ra phạm vi đông người. Bạn đọc chắc hẳn sẽ đoán ra được điều kiện ràng buộc của trò chơi này.

Ví dụ 2. Cho biết:

A nói: B nói dối hoặc C nói dối

B nói: A nói dối

C nói: A và B đều nói dối

Hỏi ai nói dối, ai nói thật?

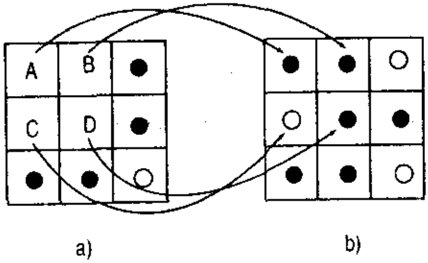
Ba người đều trách người khác nói dối, song xem xét kỹ thì nội dung và hình thức mà mỗi người trách có khác nhau. B trách A nói dối. Đây là câu mấu chốt, bởi vì nếu nói rằng lời B là thật thì A là kẻ nói dối. Nếu như B là kẻ nói dối thì lời của A là thật. Do đó A và B không thể đồng thời nói dối, không thể đồng thời nói thật. Nhưng C lại trách A và B đều nói dối. Điều này nói rõ C vốn là kẻ nói dối. Do C là kẻ nói dối, nên phải có A hoặc B là không nói dối (tức là nói thật). Từ đó, ta có:

1. Nếu A nói thật thì B nói dối. Như vậy, ở trường hợp này ta có: A nói thật, còn B và C đều nói dối.

2. Nếu B nói thật thì A nói dối. Như vậy, ở trường hợp này ta có: B nói thật, còn A và C có nói dối.

Tóm lại, trong câu chuyện này ta có: chỉ có một người nói thật (hoặc A, hoặc B). Có hai người nói dối (trong đó C luôn luôn là người nói dối).

Ví dụ 3. Chúng ta trở lại "trò chơi đổi màu" ở mục 8 và tìm lời giải đáp cho trò chơi này như sau:



Hình 9-1

Giả sử thông qua một số lần đổi màu, đã đổi được từ hình 9-1a thành hình 9-1b.

Ta gọi số lần đổi màu của ba quân cờ theo hàng thứ 1 là m_1, m_1 và m_1 và theo hàng thứ 2 là m_2, m_2 và m_2 (hình 9-1a), tương tự theo cột thứ 1 là n_1, n_1 và n_1, theo cột thứ 2 là n_2, n_2, n_2,... (hình 9-1b). Ta có :

Quân cờ A qua $m_1 + n_1$ lần đổi màu từ trắng sang đen; quân cờ B qua $m_1 + n_2$ lần đổi màu từ trắng sang đen; quân cờ C qua $m_2 + n_1$ lần đổi màu để giữ nguyên trắng, quân cờ D qua $m_2 + n_2$ lần đổi màu từ trắng sang đen.

Tổng số lần cả bốn quân cờ A, B, C, D đã đổi:

$$T = (m_1 + n_1) + (m_1 + n_2) + (m_2 + n_1) + (m_2 + n_2) =$$

$$= 2(m_1 + m_2 + n_1 + n_2). \qquad (9\text{-}1)$$

Từ (9-1) thấy rằng, T phải là số chẵn.

Từ hình 9-1 dễ dàng nhận ra rằng, tổng số lần đổi màu của bốn quân cờ A, B, C, D là số lẻ, bởi vì thao tác của số lần chẵn không thể biến bốn quân cờ trắng thành 1 trắng và 3 đen được. Mâu thuẫn này chứng tỏ sự đổi màu như trên là không thể có được!

Ví dụ 4. Bốn người A, B, C và D cùng bàn về người cao - thấp.

A nói: Tôi cao nhất

B nói: Tôi không thể là thấp nhất

C nói: Tôi không cao bằng A nhưng cũng không phải là thấp nhất

D nói: Thế thì tôi thấp nhất rồi!

Để xác định ai đúng ai sai, họ đã tiến hành đo tại chỗ, kết quả là chỉ có một người nói sai. Như vậy thực tế cao - thấp của từng người như thế nào?

Khi sử dụng phương pháp suy luận ngược hướng ta giải như sau:

Nếu D nói sai thì những người khác nói đúng, từ đó suy ra không có ai là người thấp nhất. Đây là điều vô lý. Suy ra *D là người nói đúng*. Từ đó ta có *B cũng nói đúng*. A không có khả năng nói đúng, vì nếu A nói đúng thì C đồng thời cũng nói đúng, và do đó cả bốn người đều nói đúng, điều này mâu thuẫn với sự thật là có một người nói sai. Từ đó suy ra *A nói sai*, nên C nói đúng (vì chỉ có một người nói sai). Từ trên ta có:

D thấp nhất

C không cao bằng A nhưng cao hơn D

A không cao nhất nên A phải thứ hai

Người còn lại là B phải là người cao nhất.

Bởi vậy ta có: B cao nhất, A cao thứ hai, C cao thứ ba và D thấp nhất.

Ví dụ 5. Để bạn đọc có cơ hội rèn luyện năng lực suy luận ngược hướng, ví dụ sau đây sẽ là hữu ích :

A, B, C là ba học sinh đồng thời cùng thi tiêu chuẩn hóa học sinh. Có 10 đề thi là đề sửa sai, mỗi đề 10 điểm. Nếu đề đúng thì dùng dấu "✓", nếu sai thì dùng dấu "x". Đáp án của ba học sinh đó như bảng 9-1. Sau khi công bố kết quả, cả ba học sinh đều đạt 70 điểm. Hỏi đáp án chính xác như thế nào?

Bảng 9-1

Học sinh \ Đề thi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	x	x	✓	✓	x	x	✓	x	✓	x
B	✓	x	✓	x	✓	✓	x	x	x	x
C	✓	✓	✓	x	x	✓	✓	✓	✓	✓

Trả lời: Các đề thi 1, 3, 6, 7 và 9 đúng.

10. Khéo giải loại toán logic khó

Trong những thành tựu của quá trình giải các bài toán logic, nhất là những bài toán khó, có thể gặp hai loại: loại do "may" và loại do "tài". Trong cái "may" thấy cái "tài". Trong cái "tài"có điều lý thú. Tụ hội "tài" và "may" làm một thì gọi là "song tuyệt". Tuy nhiên, để có được "song tuyệt" thì cần phải rèn luyện. Sau đây là một số bài toán logic khó và lý thú, để giúp bạn đọc rèn luyện kỹ năng giải loại toán này.

Câu chuyện về người lái đò, con sói, con dê và bó cải xuất hiện từ xa xưa: người lái đò muốn chở sói, dê và bó cải qua sông nhưng người lái đò chỉ có thể chở một trong ba thứ: sói, dê hoặc cải. Điều rắc rối nhất là, phải đề phòng khi không có người thì sói sẽ ăn thịt dê hoặc dê ăn mất cải. Hỏi người lái đò đã làm cách nào?

Bí quyết qua sông là chở dê qua bờ bên kia trước...

Ngày nay đã có rất nhiều chuyện tương tự câu chuyện qua sông ở trên, trong đó có câu chuyện sau đây:

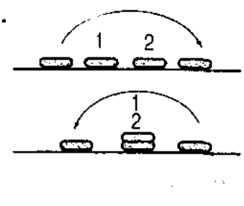
Có 3 người và 3 con hổ đều muốn vượt sông. Nếu dùng thuyền chở thì chỉ có thể chở được hoặc 2 người hoặc 2 hổ hoặc 1 người và 1 hổ. Trong 3 người và 3 hổ chỉ có 1 người biết chèo thuyền và 1 hổ biết lội sông, còn lại chỉ là khách. Một vấn đề cần tránh là nếu số hổ nhiều hơn số người thì người sẽ gặp nguy hiểm. Vậy phải qua sông theo cách nào?

Các chuyện qua sông này là một bài toán hay để rèn luyện tư duy. Người mới tập giải loại toán này có thể bỏ điều kiện 1 người biết chèo thuyền và 1 hổ biết lội sông, mà coi là tất cả người và hổ đều biết chèo thuyền và lội sông thì vấn đề sẽ đơn giản hơn nhiều. Việc thêm vào điều kiện đó chỉ là tăng thêm độ khó và lý thú hơn mà thôi. Tin rằng câu chuyện này sẽ còn hấp dẫn bạn trong những phút rảnh rỗi.

Sau đây là một bài toán qua sông khác:

Ba người đàn ông và ba người đàn bà cần qua sông nhưng chỉ có một chiếc thuyền và mỗi lần chỉ qua được hai người. Cả *ba người đàn ông và một người đàn bà biết chèo thuyền.* Đàn bà yêu cầu là không được để đàn bà ở lại hoặc đã sang sông có số lượng nhiều hơn đàn ông. Nhờ bạn đọc chỉ giúp là họ phải qua sông theo cách nào?

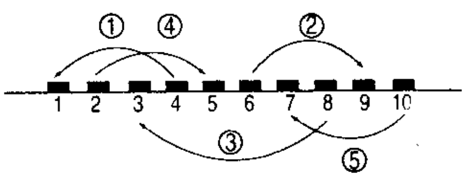
Dưới đây là một vấn đề khác, *tuy đơn giản nhưng lý thú,* đó là "nhảy cách". "Nhảy cách" bắt nguồn từ Ấn Độ cổ đại nhưng mỗi nơi nêu ra có khác nhau chút ít. Trên bàn bày 10 quân cờ theo một đường thẳng. Mỗi lần di chuyển một quân cờ cách qua hai quân cờ kế tiếp và chồng lên



Hình 10-1

quân cờ thứ 3 (hình 10-1). Hỏi phải di chuyển như thế nào để có thể thành 5 chồng, mỗi chồng ba quân cờ?

Thoảng qua thấy không khó, nhưng thực tế thì không dễ chút nào. Đáp án như ở hình 10-2, thứ tự di chuyển theo các mũi tên...



Hình 10-2

Khi tập giải loại toán logic, chúng ta hãy bắt đầu từ việc "đoán bóng". Đây dường như là việc giản đơn nhất trong suy luận logic.

Có ba cái túi, mỗi túi đựng hai quả bóng, lần lượt là "trắng + trắng", "trắng + hồng" và "hồng + hồng" nhưng ngoài túi lại dán nhãn sai màu bóng trong túi. Có thể từ một túi nào đó lấy ra chỉ một quả bóng mà đoán được cái túi đựng loại bóng màu nào hay không?

Để làm rõ loại bóng trong túi, ta lập bảng 10-1, trong đó dùng m và n để biểu thị cột và hàng, T - màu trắng, H - màu hồng, "1" là có, "0" là không.

Bảng 10-1

Thực tế / Nhãn	T + T	T + H	H + H
T + T			1
T + H	1		0
H + H	0	1	

Vì các nhãn đều dán sai nên các phần gạch biểu thị quan hệ "không đồng nhất". Từ quan hệ đối xứng, bạn đọc có thể đoán được là phải lấy quả bóng ở túi có dán nhãn "trắng + hồng". Giả sử quả bóng lấy ra là màu trắng, suy ra túi đựng hai quả bóng cùng màu trắng, tức là ở ô [m, n] = [1, 2] = "1". Từ đó:

[1, 3] = "0"

[3, 2] = "0".

Từ [1, 3] = "0" ⇒ [2, 3] = "1".

Từ [3, 2] = "0" ⇒ [3, 1] = "1".

Như vậy túi có nhãn "trắng + trắng" có bóng "hồng + hồng", túi có nhãn "hồng + hồng" có bóng "trắng + hồng".

Bảng 10-2

Nhãn \ Thực tế	T + T	T + H	H + H
T + T		1	0
T + H	0		1
H + H	1		

Nếu quả bóng lấy ra là màu hồng, thì túi đựng hai quả bóng cùng màu hồng, tức là ở ô [m, n] = [3, 2] = "1" (bảng 10-2).

Từ đó:

[1, 2] = "0"

[3, 1] = "0".

Từ [1, 2] = "0" ⇒ [1, 3] = "1".

Từ [3, 1] = "0" ⇒ [2, 1] = "1".

Như vậy túi có nhãn "trắng + trắng" có bóng "trắng + hồng", túi có nhãn "hồng + hồng" có bóng "trắng + trắng".

Tương tự bài toán vừa nêu là bài toán sau đây:

Ba nghệ sĩ rủ nhau đi uống cà phê. Người đội mũ trắng nhận xét: "Ba chiếc mũ mà chúng ta đội có màu giống tên từng người nhưng lại không ai đội mũ có màu giống tên mình cả". Nghệ sĩ Hoàng hưởng ứng: "Anh nói đúng". Bạn hãy cho biết từng người đội mũ màu gì?

Ta lập bảng 10-3. Theo đầu bài, người đội mũ màu trắng chỉ có thể là Điều hoặc Hoàng. Nhưng người đội mũ màu trắng không thể là Hoàng, vì anh ta hưởng ứng lời người đội mũ trắng. Vậy Điều đội mũ màu trắng. Từ bảng 10-3 ta thấy:

Bảng 10-3

Tên nghệ sĩ / Màu mũ	Bạch	Điều	Hoàng
Trắng		1	0
Đỏ	0		1
Vàng	1	0	

Do [2, 1] = "1" ⇒ [2, 3] = "0".

Do [2, 3] = "0" ⇒ [1, 3] = "1".

Vậy Bạch đội mũ màu vàng.

Do [3, 1] = "0" ⇒ [3, 2] = "1".

Vậy Hoàng đội mũ đỏ.

Do bảng có m cột và n hàng nên phải xử lý m×n loại quan hệ nhân tố. Tuy vậy trong việc phân tích loại toán logic khó lập bảng để biểu thị suy luận là phương pháp có hiệu quả. Điều cần chú ý là, mỗi cột hoặc mỗi hàng chỉ có một dấu "1" tồn tại, vì vậy khi trong cột hoặc trong hàng đã có số "1" thì các ô còn lại đều là số "0".

Trong nhiều trường hợp thì số "1" khó xác định, lúc đó chúng ta làm ngược lại, tức là xác định số "0" trước, để thu hẹp phạm vi. Đây dường như là một bí quyết của việc giải loại toán logic khó.

Sau đây là một ví dụ:

Thầy Lương vừa đưa bốn học sinh An, Bình, Cương và Dung đi thi học sinh giỏi về, mọi người đến thăm hỏi. Thầy trả lời: "Các em đều đạt giải!" và đề nghị mọi người thử đoán xem.

Hòa nhanh nhảu nói luôn:

- Theo em thì An, Bình đạt giải nhì, còn Cương, Dung đạt giải khuyến khích.

Kiên lắc đầu, nói:

- Không phải! An, Cương, Dung đều đạt giải nhất, chỉ có Bình đạt giải ba.

Linh thì cho là chỉ có Bình đạt giải nhất, còn ba bạn An, Cương, Dung đều đạt giải ba.

Minh lại cho rằng, chỉ có Cương và Dung đạt giải nhì, còn An và Bình đều đạt giải khuyến khích, không ai đạt giải đặc biệt cả.

Nghe các bạn đoán xong, thầy mỉm cười và nói: "Các em đoán sai cả rồi! Tất cả các ý đều sai!"

Hãy cho biết từng học sinh đã đạt giải nào?

Ta lập bảng 10-4.

Bảng 10-4

Tên học sinh / Giải thưởng	An	Bình	Cương	Dung
Đặc biệt				
Nhất	0	0	0	0
Nhì	0	0	0	0
Ba	0	0	0	0
Khuyến khích	0	0	0	0

Theo lời thầy Lương "Tất cả các ý đều sai", ta có:

Từ lời của Hòa thì:

[1, 3] = "0"

[2, 3] = "0"

[3, 5] = "0"

[4, 5] = "0".

Từ lời của Kiên:

[1, 2] = "0"

[3, 2] = "0"

[4, 2] = "0"

[2, 4] = "0".

Từ lời của Linh:

[2, 2] = "0"

[1, 4] = "0"

[3, 4] = "0"

[4, 4] = "0".

Từ lời của Minh:

[3, 3] = "0"

[4, 3] = "0"

[1, 5] = "0"

[2, 5] = "0".

Do vậy cả bốn bạn đều đạt giải đặc biệt.

Với những bài toán suy luận phức tạp, đôi khi cần đến hai hoặc nhiều bảng, để biểu thị các mối quan hệ giữa các nhân tố.

Có ba học sinh A, B, C thuộc ba khối 9, 8, 7 đều ghi tên tham gia thi ba môn: đánh cầu, nhảy xa và chạy. Biết rằng mỗi khối học sinh thi một môn và :

1. A không thuộc khối 9
2. Bạn thuộc khối 9 không đăng ký đánh cầu
3. Bạn thuộc khối 8 tham gia nhảy xa
4. B không thuộc khối 8, cũng không ghi tên chạy.

Hỏi mỗi học sinh thuộc khối nào và ghi tên thi môn gì?

Rõ ràng rằng có thể biểu thị các quan hệ giữa các nhân tố bằng hai bảng 10-5 và 10-6.

Bảng 10-5

Học sinh \ Khối	9	8	7
A	0	1	0
B	0	0	1
C	1		

Bảng 10-6

Khối \ Môn thi	Đánh cầu	Nhảy xa	Chạy
9	0	0	1
8	0	1	
7	1		

Từ những điều đã biết, ta có:

- Theo bảng 10-5:

[1, 1] = "0" (do 1)
[2, 2] = "0" (do 4)

- Theo bảng 10-6:

[1, 1] = "0" (do 2)
[2, 2] = "1" (do 3)

Từ bảng 10-6:

[2,2] = "1" ⇒ [1, 2] = "0"
[2, 1] = "0"

Vậy: [1, 3] = "1"
[3, 1] = "1"

Như vậy bạn thi chạy thuộc khối 9.

Do vậy trong bảng 10-5:

[3, 2] = "1"
[1, 2] = "0"
[3, 1] = "0".

Ta có:

[1, 3] = "1"
[2, 1] = "1".

Như vậy: A thuộc khối 8, ghi tên nhảy xa

B thuộc khối 7, ghi tên đánh cầu

C thuộc khối 9, ghi tên chạy.

Có một loại toán logic khó, nội dung chỉ là những phán đoán gồm hai mệnh đề đơn giản có tính đúng hoặc sai.

Bốn học sinh dự đoán thành tích thi của họ như sau:

D: Xem ra tôi thứ 1, A thứ 2

C: Không thể như vậy, D chỉ thứ 2, tôi thứ 3

B: Tôi chắc thứ 2, C cuối cùng

A: Thế thì chờ xem!

Kết quả thi cho thấy B, C, D chỉ đoán đúng một nửa. Hỏi thực tế thứ bậc của bốn học sinh như thế nào?

Chẳng cần giải thích thêm, bạn đọc cũng có thể điền được các ký hiệu vào bảng 10-7.

Bảng 10-7

Học sinh \ Thứ bậc	1	2	3	4
A	0	0	0	1
B	0	1	0	
C	0	0	1	0
D	1	0	0	0

• Giả sử D đoán đúng nửa đầu, tức là D thứ 1 và A không phải thứ 2.

Từ đó ta có:

[1,1] = "0"

[1,2] = "0"

[1,3] = "0" [1,4] = "1"

[2,4] = "0" [2,1] = "0"

[3,4] = "0"

[4,4] = "0".

[1,4] = "1"

[2,1] = "0"

Từ dự đoán của C thấy C thứ 3, vì D không phải thứ 2 (sai), nên:

[2,3] = "0"

[3,3] = "1"

[4,3] = "0"

[3,1] = "0"

[3,2] = "0".

Từ bảng 10-7 thấy A thứ 4, như vậy B phải là thứ 2. Vậy ở trường hợp này, thứ bậc của học sinh là D, B, C, A.

• Giả sử D đoán đúng nửa sau, tức là A thứ 2 và D không là thứ 1: Bạn đọc tự xét.

Có thể thấy rằng, nhiều bài toán logic khó đều giải bằng phương pháp lập bảng. Nhưng đây không phải là "phương pháp vạn năng". Qua mục này chúng tôi chỉ muốn giúp bạn đọc nắm vững được phương pháp đó. Để vận dụng phương pháp lập bảng thành thạo và nhanh thì phải rèn luyện. Sau đây là một số đề toán logic khó để bạn đọc luyện tập.

1. Ba bạn Anh, Bá, Cảnh đạt giải nhất, nhì, ba trong kỳ thi toán giỏi của tỉnh. Biết rằng:

• Không có học sinh trường chuyên nào đạt giải cao hơn Anh.

• Nếu Anh đạt giải thấp hơn một bạn nào đó thì Anh không phải là học sinh trường chuyên.

• Chỉ có một bạn học trường chuyên.

• Nếu Bá hoặc Cảnh đạt giải nhì thì Cảnh đạt giải cao hơn bạn quê ở thị xã.

Hỏi từng bạn đạt giải như thế nào?

Bạn nào không học trường chuyên và bạn nào quê ở thị xã?

2. Thầy Long dẫn bốn học sinh đi thi chạy. Kết quả có ba bạn đạt giải: nhất, nhì và ba. Khi được hỏi các bạn đã trả lời:

Kha: Mình đạt giải nhì hoặc ba

Liêm: Mình đã đạt giải

Minh: Mình đạt giải nhất

Nam: Mình không đạt giải.

Nghe xong thầy Long mỉm cười và nói: "Có một bạn nói đùa". Bạn hãy cho biết bạn nào đã nói đùa và bạn nào không đạt giải?

Gợi ý: Giả sử Kha nói đùa thì ba bạn đã nói thật và Kha, Minh cùng đạt giải nhất. Như vậy là vô lý (vì theo giả thiết thì không có giải nào mà hai bạn cùng đạt). Vậy Kha nói thật.

Nếu Liêm nói đùa thì Liêm là người không đạt giải và như vậy là vô lý (vì Nam cũng không đạt giải). Vậy Liêm nói thật.

Nếu Nam nói đùa thì Nam cũng đạt giải và như vậy cũng vô lý (vì cả bốn bạn đều đạt giải).

Do đó chỉ có thể là Minh đã nói đùa và Nam là người không đạt giải.

3. Bốn bạn có tên và họ lý thú: tên của A là họ của B, tên của B là họ của C, tên của C là họ của D, tên của D là họ của A. Biết rằng, tên là Hồ không phải họ Nguyễn, tên của bạn họ Lê là họ của một bạn khác, tên bạn này là họ của bạn tên là Trần. Hỏi tên và họ của từng bạn?

Trả lời: Nguyễn Trần, Trần Lê, Lê Hồ và Hồ Nguyễn (xem bảng 10-8).

4. Thầy giáo lấy ra bốn túi nhỏ, đưa cho bốn bạn A, B, C, D

mỗi bạn một túi. Túi nào cũng đựng 3 quả bóng nhưng không cùng màu và nhãn ở ngoài túi không đúng với màu các quả bóng đựng trong túi. Thầy yêu cầu từng bạn lấy 2 quả bóng trong túi của mình ra và đoán màu quả bóng còn trong túi.

Bảng 10-8

Họ \ Tên	Nguyễn	Trần	Lê	Hồ
Nguyễn		+		
Trần			+	
Lê				+
Hồ	+			

A lấy ra 2 quả bóng màu hồng và xem nhãn dán ngoài túi đã đoán ra màu quả bóng còn lại.

B lấy ra 1 quả bóng màu hồng và 1 quả bóng màu trắng, xem nhãn cũng đoán được màu quả bóng còn lại.

C lấy ra 2 quả bóng màu trắng, nghĩ một lúc vẫn chưa đoán được màu quả bóng còn lại.

D tuy chưa lấy bóng ra đã nói: "Tôi đã biết màu của 3 quả bóng trong túi của tôi rồi!".

Hỏi D đã đoán như thế nào và túi của D có 3 quả bóng màu gì?

Trả lời: Túi của D có 2 quả bóng màu trắng, 1 quả bóng màu hồng.

5. Trong một hội thảo khoa học quốc tế, bốn đại biểu nói chuyện bằng bốn thứ tiếng: Anh, Pháp, Nga, Trung. Mỗi đại biểu chỉ biết hai thứ tiếng và có ba đại biểu biết cùng một thứ tiếng. Cho biết:

1. A biết tiếng Nga, D không biết tiếng Nga.

2. B, C, D không biết cùng một thứ tiếng.

3. Không có đại biểu nào biết cả tiếng Nga và tiếng Pháp.

4. B không biết tiếng Anh nhưng có thể làm phiên dịch cho A và C.

Hỏi B, C, D biết tiếng gì?

Gợi ý: Xem bảng 10-9.

Bảng 10-9

Đại biểu \ Tiếng	Trung	Anh	Nga	Pháp
A	1		1	
B	1			1
C		1		1
D	1	1		

6. Năm bạn học năm lớp khác nhau: lớp 6, lớp 7, lớp 8, lớp chuyên và lớp thực nghiệm. Một hôm họ gặp nhau và hỏi thăm như sau:

A chỉ quen hai bạn

Có ba bạn quen bạn học lớp 7

B lần đầu quen bạn học lớp 8

Bạn học trường chuyên quen C

Ba bạn học lớp 6, lớp 8 và lớp chuyên là bạn cùng học ở tiểu học.

D quen một bạn, E không quen một bạn.

Hỏi từng người học ở lớp nào?

Trả lời: A học lớp 8

B học lớp 7

C học lớp 6

D học lớp thực nghiệm

E học lớp chuyên.

7. Có bạn làm một việc tốt. Thầy hỏi đến 5 bạn nhưng các bạn đều không ai nhận. Các bạn đã trả lời:

A: B và C làm

D: E và G làm

E: G và B làm

C: A và B làm

B: D và E làm.

Điều tra thấy rằng, không bạn nào nói đúng hoàn toàn và có một bạn nói sai hoàn toàn. Hỏi ai đã làm việc tốt đó?

Trả lời: D và B.

8. Trong hội nghị cháu ngoan Bác Hồ, có nhà báo hỏi quê của năm bạn và được trả lời:

Ân: Quê tôi ở Lâm Đồng, còn Dũng ở Nghệ An

Bắc: Tôi cũng ở Lâm Đồng, còn Châu ở Bắc Ninh

Châu: Tôi cũng ở Lâm Đồng, còn Dũng ở Hải Dương

Dũng: Tôi ở Nghệ An, còn Hải ở Khánh Hòa

Hải: Tôi ở Khánh Hòa, còn Ân ở Hải Dương.

Trong câu trả lời của từng bạn có ít nhất một phần đúng. Hỏi quê mỗi bạn?

Trả lời: Ân quê Lâm Đồng

Bắc quê Nghệ An

Châu quê Bắc Ninh

Dũng quê Hải Dương

Hải quê Khánh Hòa.

9. Năm người thợ: sơn, hàn, tiện, điện, mộc có tên là các nghề này nhưng không trùng với nghề của mình. Mỗi người cho mượn và mượn của người khác một cuốn sách: bác thợ sơn mượn sách của bác Sơn. Nghề của bác Sơn trùng với tên của người có sách cho bác mượn. Bác thợ tiện không phải tên Mộc. Bác Mộc

và bác thợ sơn là hai người cùng phố. Bạn hãy cho biết bác thợ tiện và bác thợ sơn tên gì?

Trả lời: Bác thợ tiện tên Điện

Bác thợ sơn tên Hàn.

11. Phép thử: trụ cột của kinh nghiệm và niềm tin

Chính kinh nghiệm đã tạo ra căn cứ cho niềm tin. Thử nghiệm vừa là trụ cột của kinh nghiệm và niềm tin, vừa là cơ sở để cải biến không ngừng những kinh nghiệm và niềm tin của nhân loại. Trong cuốn sách nổi tiếng "Toán học và những suy luận có lý", nhà toán học George Polya (13.12.1887 - 1985) người Mỹ đã đề ra các sơ đồ sau đây của suy luận có lý - những suy luận có liên quan trực tiếp với phép thử và kinh nghiệm:

A → B	A → B
B không đáng tin	B đáng tin
A không đáng tin	A càng đáng tin.

Các sơ đồ của G.Polya cho chúng ta biết rằng: muốn đánh đổ một kết luận, chỉ cần nêu ra một phản ví dụ là đủ. Đồng thời cũng cho chúng ta cách thức để làm tăng niềm tin.

Ví dụ: Viện sĩ Viện Hàn lâm khoa học Peterbua Christian Goldbach (18.3.1690 - 20.11.1764, người Đức sống ở Nga) sau khi tiến hành hàng loạt phép thử đã phát hiện ra một hiện tượng lý thú là: Các số lẻ lớn hơn 5 đều có thể biểu thị bằng tổng của ba số nguyên tố. Ông tin rằng: điều này có thể tin cậy được bằng cách thực hiện các phép thử. Nhưng bản thân ông không chứng minh được. Ngày 7-6-1742 Ch.Goldbach hào hứng đưa những dự đoán của mình viết thư cầu cứu L.Euler. L.Euler đã phát hiện ra điều mấu chốt sau đây để giải bài toán: "Phải chứng minh bất cứ một số nguyên dương chẵn nào lớn hơn 2 đều có thể biểu thị bằng tổng của hai số nguyên tố". L.Euler đã tỉ mỉ xem xét dãy số sau đây:

4 = 2 + 2

6 = 3 + 3

8 = 3 + 5

10 = 3 + 7 = 5 + 5

12 = 3 + 9 = 5 + 7

14 = 3 + 11 = 5 + 9 = 7 + 7

16 = 3 + 13 = 5 + 11 = 7 + 9

18 = 3 + 15 = 5 + 13 = 7 + 11 = 9 + 9

20 = 3 + 17 = 5 + 15 = 7 + 13 = 9 + 11

22 = 3 + 19 = 5 + 17 = 7 + 15 = 9 + 13 = 11 + 11

. . . .

100 = 3 + 97, ...

Mỗi lần kéo dài dãy số khi chứng minh, L.Euler càng tăng thêm độ tin cậy vào kết luận của mình và cuối cùng ông đã tin chắc rằng đây là một chân lý. Ngày 30 - 6 - 1742 L.Euler viết thư trả lời Ch.Goldbach, trong đó ông chỉ ra rằng:

"Các số nguyên chẵn lớn hơn 2 đều là tổng của hai số nguyên tố. Tuy tôi còn chưa chứng minh được điều này, nhưng tôi tin rằng đây là một định lý hoàn toàn chính xác, không còn nghi ngờ gì nữa".

Chính những tình tiết vừa nêu ở trên đã dẫn đến bài toán Goldbach - Euler. Bài toán này được nêu ra như sau: "Chứng minh rằng, mọi số lẻ bắt đầu từ số 5 đều có thể biểu thị dưới dạng tổng của ba số nguyên tố, còn mọi số chẵn bắt đầu từ số 4 đều có thể biểu thị dưới dạng tổng của hai số nguyên tố".

Đó chính là sự dự đoán nổi tiếng thế giới của Ch.Goldbach và L.Euler.

Hơn hai thế kỷ qua, rất nhiều nhà toán học ưu tú đã nghiên cứu dự đoán của Ch.Goldbach và L.Euler, và đã thu được nhiều kết quả.

Năm 1937, nhà toán học, viện sĩ Liên Xô Ivan Matueevits Vinogradov (14.9.1891 - 20.3.1983) đã chứng minh được rằng, với những số lẻ đủ lớn thì có thể biểu thị bằng tổng của ba số nguyên tố. Đây chính là nội dung của định lý Vinogradov. Nói cách khác, tồn tại một số C (hằng số Vinogradov) sao cho mọi số lẻ n lớn hơn C đều được biểu thị bằng tổng của ba số nguyên tố. Như vậy định lý Vinogradov đã giải quyết được lời giải trong trường hợp số lẻ của bài toán Goldbach - Euler, còn trường hợp số chẵn thì vẫn chưa có lời giải triệt để.

Năm 1938, nhà toán học Hoa La Canh (12.11.1910 - 12.6.1985) người Trung Quốc đã chứng minh được rằng, hầu như các số chẵn đều có thể biểu thị thành tổng của một số nguyên tố và dãy số nguyên tố khác:

$$P_1 + P_2^k.$$

Năm 1920, nhà toán học, giáo sư Pulang (người Na Uy) đã tìm ra hướng mới. Ông dùng cách sàng lọc loại trừ cổ xưa để chứng minh rằng: "Bất cứ một số chẵn nào cũng đều có thể biểu thị bằng tổng của tích 9 số nguyên tố với tích 9 số nguyên tố khác và gọi là (9+ 9). Từ đó những người đi theo hướng này đã thu được các kết quả rực rỡ, trong hơn 40 năm đã đột phá liên tiếp với các chứng minh sau đây:

- Năm 1924, các nhà toán học Đức đã chứng minh được (7 + 7).

- Năm 1932, các nhà toán học Anh đã chứng minh được (6 + 6).

- Các năm 1938 - 1956, các nhà toán học Liên Xô đã chứng minh được (5 + 5), (4 + 4), (3 + 3).

- Năm 1957, nhà toán học Vương Nguyên người Trung Quốc đã chứng minh được (2 + 3).

- Năm 1962, nhà toán học Phan Thừa Động người Trung Quốc đã chứng minh được (1+5).

- Cùng năm 1962 Phan Thừa Động cộng tác với Vương Nguyên đã chứng minh được (1+4).

- Tháng 5-1966, nhà toán học Trần Cảnh Nhuận người Trung Quốc đã chứng minh được (1+2), chứng minh này đã làm chấn động dư luận trong và ngoài nước, từng được gọi là "lay động những quả núi!".

Mặt khác, những bảng biểu thị số chẵn kiểu Euler (1+1) đã nghiệm chứng tới 130 triệu số mà vẫn chưa phát hiện trường hợp sai.

Theo sơ đồ suy luận có lý của G.Polya, có thể nói rằng: Những thực tế và thành tựu kể trên khiến cho dự đoán của L.Euler và Ch.Goldbach ngày càng đáng tin. Hiện nay chỉ còn một bước nữa là tới đích nhưng đây là một bước khó khăn nhất. Ai có thể lấy được "viên ngọc sáng trên vương miện". Người đời đang trông chờ!

12. Bước tới chân lý

Các suy luận chia thành suy luận diễn dịch (còn gọi là suy diễn) và suy luận quy nạp. Các suy luận quy nạp chia thành quy nạp không hoàn toàn và quy nạp hoàn toàn. Nói chung, suy diễn là công cụ để thực hiện các chứng minh suy diễn, để khẳng định một chân lý; còn quy nạp, mà đặc biệt là quy nạp không hoàn toàn lại cung cấp cho chúng ta phương tiện hữu hiệu để dự đoán, để bước tới chân lý.

Vào cuối thế kỷ XVII, nhà toán học G. W.von Leibniz trong khi nghiên cứu phương pháp tạo thành số tự nhiên n thì phát hiện ra rằng tổng số P(n) của các phương pháp là lập thành các nhóm như sau:

$$\left.\begin{aligned} 2 &= 2 \\ 2 &= 1 + 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow P(2) = 2$$

$$\left.\begin{aligned} 3 &= 3 \\ 3 &= 2 + 1 \\ 3 &= 1 + 1 + 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow P(3) = 3$$

$$\left.\begin{aligned} 4 &= 4 \\ 4 &= 3 + 1 \\ 4 &= 2 + 2 \\ 4 &= 1 + 1 + 2 \\ 4 &= 1 + 1 + 1 + 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow P(4) = 5$$

Cũng bằng cách suy luận này thì P(5) = 7, P(6) = 11. Các giá trị này gần như các số nguyên tố đầu tiên. Thế là G.W.von Leibniz cảm thấy rằng, tựa hồ như ông đã đạt được kết luận sau đây: "P(n) là số nguyên tố thứ n -1". Tuy vậy khi ông kiểm nghiệm đối với P(7) thì lại thấy P(7) bằng 15 (không bằng nguyên tố thứ sáu là 13). Từ đó ông đã phủ định dự đoán (vừa kể ở trên) của mình. Nhưng ông lại có đánh giá như sau: "Suy luận nói trên là một ví dụ cực hay về phương pháp quy nạp không hoàn toàn".

Quy nạp không hoàn toàn là quá trình rút ra kết luận, mà kết luận đó nói rằng tất cả các phần tử của tập hợp đang xét là có tính chất P, trên cơ sở đã khảo sát và biết rằng một số (mà không phải là tất cả) các phần tử của tập hợp đó có tính chất P. Kết luận của quy nạp không hoàn toàn có thể đúng, có thể sai. Phép quy nạp không hoàn toàn không phải là phép chứng minh.

Năm 1840, nhà toán học Pierre de Fermat (1601 - 1665) người Pháp đã khảo sát 5 trường hợp đầu tiên của số $2^{2^n} + 1$ là :

$$n = 0 \quad \text{thì } 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3$$

$$n = 1 \quad \text{thì } 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$$

$$n = 2 \quad \text{thì } 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$$

$$n = 3 \quad \text{thì } 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$$

$$n = 4 \quad \text{thì } 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65\,537.$$

Dựa vào 5 trường hợp ở trên, P.de Fermat đã nêu lên giả thuyết rằng: "Tất cả các số có dạng $2^{2^k} + 1$ đều là số nguyên tố". Như vậy, ở đây P.de Fermat đã thực hiện một phép quy nạp không hoàn toàn.

Đến năm 1732, L.Euler (lúc đó mới 25 tuổi) đã chỉ ra rằng:

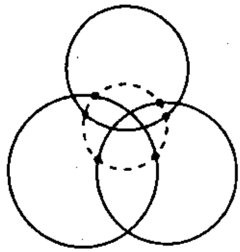
Khi n = 5 thì $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$

$= 641 \times 6\,700\,417$ (không phải là số nguyên tố).

Như vậy, giả thuyết của P.de Fermat là sai.

Bây giờ ta xét câu hỏi: n đường tròn chia tờ giấy thành bao nhiêu phần?

Vẽ một đường tròn trên giấy, thì có thể chia tờ giấy thành 2 phần, vẽ hai đường tròn thì nhiều nhất có thể chia tờ giấy thành 4 phần, vẽ ba đường tròn thì nhiều nhất có thể chia tờ giấy thành 8 phần, ... (hình 12-1).



Hình 12-1

Dựa vào 3 trường hợp đã xét (với n = 1, 2, 3), có bạn dự đoán rằng trong trường hợp tổng quát, n đường tròn chia tờ giấy thành nhiều nhất là $n^2 - n + 2$ phần.

Kết quả này có đúng hay không?

Muốn khẳng định là đúng hay không thì phải có chứng minh bổ sung.

Quy nạp hoàn toàn là quá trình rút ra kết luận, mà kết luận đó nói rằng tất cả các phần tử của tập hợp đang xét là có tính chất P, trên cơ sở đã chứng minh được rằng mỗi một phần tử của tập hợp đang xét là có tính chất P (điều này đòi hỏi rằng số phần tử của tập đang xét phải là hữu hạn). Kết luận của phép quy nạp hoàn toàn là chân thực (là đúng). Phép quy nạp hoàn toàn là một phép chứng minh.

Ví dụ. Chứng minh rằng nếu n là số tự nhiên chẵn sao cho $4 \le n \le 20$, thì có thể biểu diễn n dưới dạng tổng của hai số nguyên tố.

Chứng minh: Ta có: $4 = 2 + 2$

$6 = 3 + 3$

$$8 = 5 + 3$$

$$10 = 7 + 3$$

$$12 = 7 + 5$$

$$14 = 7 + 7$$

$$16 = 11 + 5$$

$$18 = 11 + 7$$

$$20 = 13 + 7.$$

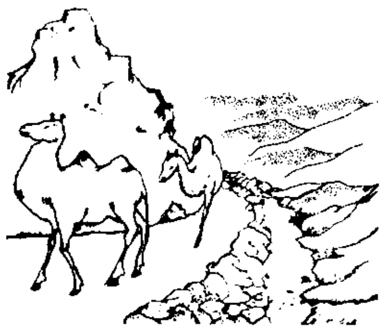
Từ 9 đẳng thức trên, ta kết luận rằng: "Các số tự nhiên chẵn từ 4 đến 20 đều có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của hai số nguyên tố".

Chứng minh ở trên là chứng minh bằng phương pháp quy nạp hoàn toàn.

Bạn đọc đã biết nhà toán học D.Hilbert là một trong những nhà toán học vĩ đại nhất của thế kỷ XX. Năm 1900, Đại hội toán học quốc tế họp ở Paris (Pháp). Lúc đó D. Hilbert mới 38 tuổi nhưng với tầm nhìn sâu rộng ông đã nêu ra 23 vấn đề cần "công phá", trong đó hầu hết là các bài toán liên quan tới nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học: số luận, lý thuyết tập hợp, lý thuyết hàm, lý thuyết nhóm, tôpô,... Từ đó, những bài toán D.Hilbert nêu ra đã trở thành mục tiêu của các nhà toán học. Các nhà toán học tài ba, đặc biệt là các nhà toán học trẻ đã nhiệt tình đón nhận, lao vào giải quyết các bài toán này một cách say sưa với sự tự tin cao độ. Tới nay đã có 21 bài được giải quyết trọn vẹn, đồng thời cũng là 21 giải thưởng Fields (một kiểu giải thưởng Nobel cho toán học, 4 năm xét một lần) trong đó có "Bài toán 4 màu" (sẽ nói ở mục 14: "Kỳ tích chưa từng có trong lịch sử toán học") và "Bài toán Goldbach (đã nói ở mục 11: "Phép thử: trụ cột của kinh nghiệm và niềm tin". Hiện còn 2 bài: về việc xây dựng những không gian của những siêu hộp liên hợp (bài 18) và bài toán biên tổng quát (bài 20) chưa ai giải được.

13. Phương pháp quy nạp toán học

Có một họa sĩ nhận dạy ba học trò. Một hôm, họa sĩ muốn kiểm tra trình độ hiểu biết của các học trò về sự huyền diệu của hội họa, ông gọi ba học trò đến và bảo họ hãy dùng ít nét bút nhất để vẽ được nhiều lạc đà nhất.



Người thứ nhất vẽ một đàn lạc đà dày đặc trên trang giấy, người thứ hai tiết kiệm nét bút nên chỉ vẽ toàn đầu lạc đà, người thứ ba vẽ hai quả núi có một con lạc đà từ hẻm núi đi ra và sau đó là nửa trước của con lạc đã tiếp theo.

Khi ba bức tranh vẽ xong và được đưa lên để đánh giá kết quả, bức tranh của người thứ ba được coi là "tuyệt tác".

Bức tranh của người thứ ba chỉ có một con lạc đà và nửa trước của con lạc đà kế tiếp, vì sao lại thắng hai bức tranh kia? Nguyên nhân là ở chỗ: bức tranh của người thứ nhất tuy vẽ cả đàn lạc đà nhưng lại là có giới hạn; bức tranh của người thứ hai tuy đơn giản hơn, thay vì vẽ cả con lạc đà chỉ vẽ đầu lạc đà, nhưng cũng chẳng thay đổi được bản chất hữu hạn; bức tranh của người thứ ba thì khác hẳn, sau con lạc đà đi trước là nửa trước của con lạc đà thứ hai khiến người ta nghĩ tới còn nhiều con lạc đà đi tiếp từ trong núi ra, tựa hồ như không đếm xuể.

Cái lý trong câu chuyện kể trên được đưa vào toán học, đó chính là: muốn chứng minh một mệnh đề có liên quan tới số tự nhiên thì nhất định phải qua hai bước:

1. Chứng minh rằng khi số tự nhiên $n = n_0$ thì mệnh đề là đúng.

2. Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$ (với $k \geq n_0$) (điều giả sử này thường được gọi là giả thiết quy nạp). Sau đó sử dụng giả thiết quy nạp mà chứng minh rằng: khi $n = k + 1$, mệnh đề cũng đúng.

Sau khi đã hoàn thành hai bước nêu ở trên thì có thể kết luận rằng mệnh đề được xét là đúng với tất cả các số tự nhiên $n \geq n_0$. Đó chính là nội dung của *phương pháp quy nạp toán học*. Bước 1 kể trên là tương tự như một con lạc đà trong câu chuyện đã nêu. Bước 2 là tương tự như nội dung được ngầm thể hiện trong câu chuyện đã nêu là: Nếu có một con lạc đà sau nó, tất phải có một con lạc đà khác tiếp theo. Như vậy, có con lạc đà thứ nhất, liền có con lạc đà thứ hai, có con lạc đà thứ hai thì có con lạc đà thứ ba, ... cứ như vậy đến vô cùng.

Giả sử có người nói dóc rằng: "Tôi có thể lên Thiên Đường nếu có bậc thang hướng tới Thiên Đường, chỉ cần tôi bước lên bậc thang đầu tiên và sau khi lên đến một bậc thang nào đó, nếu còn sức lực thì sẽ bước lên bậc thang tiếp theo". Nhà toán học sẽ tâm đắc với cách nói này, bởi vì phương pháp quy nạp toán học tạo ra các bậc thang để bước tới chân lý.

Hai bước của phương pháp quy nạp toán học là không thể thiếu. Không có bước 2 thì sẽ thành quy nạp không hoàn toàn.

Nhưng bước 1 cũng nhất thiết phải có, bởi vì nếu không có bước 1 thì bước 2 chỉ có tính giả định, do đó sẽ thiếu cơ sở để rút ra kết luận.

Sau đây là một ví dụ (của G. Polya) nói về vận dụng sai "phương pháp quy nạp toán học".

G. Polya đã "chứng minh" rằng: "Bất cứ một số n con gái nào cũng đều có những đôi mắt cùng màu sắc". Ông lập luận như sau:

"Đối với n = 1 mệnh đề trên rõ ràng là đúng. Còn lại chỉ cần chuyển từ n sang n + 1. Ví dụ chuyển từ 3 đến 4: Tôi giới thiệu với bạn bốn cô gái A, B, C, D. Giả sử rằng A, B, C (n = 3) đều có ba đôi mắt cùng màu sắc. Tương tự, giả sử B, C, D (n = 3) cũng có ba đôi mắt cùng màu sắc. Do vậy mắt của bốn cô gái A, B, C, D ắt phải cùng màu sắc. Để thấy rõ điều này, bạn hãy xem sơ đồ sau đây:

$$A,\quad B,\quad C,\quad D\ .$$

Chuyển từ 4 đến 5 cũng như vậy, không có gì khó khăn,..."

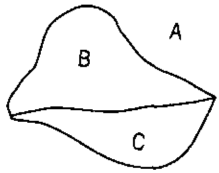
Như vậy G.Polya quả đã chứng minh được rằng đôi mắt của tất cả các cô gái là có màu sắc giống nhau. Song điều này trái với thực tế, vì các cô gái Đông Nam Á mắt màu đen, các cô gái châu Âu thì hầu hết có mắt màu xanh! Vậy sai trong "chứng minh" của G.Polya là ở đâu? Giáo sư Polya giải thích rằng vấn đề là ở chỗ: Bước chuyển từ n = 1 sang n = 2 là không đúng.

Bây giờ ta sẽ sử dụng "phương pháp quy nạp toán học" để chứng minh công thức Descartes - Euler .

Trên bản đồ địa lý của một vùng không có đảo, gọi f là số quốc gia, d là số đỉnh (mỗi đỉnh chung cho ít nhất là 3 quốc gia), c là số đường biên giới nối 2 đỉnh. Khi đó ta luôn luôn có:

$$d + f = c + 2. \qquad (13\text{-}1)$$

R.Descartes đã phát biểu công thức (13-1) lần đầu tiên vào năm 1635. Về sau L.Euler đã độc lập công bố công thức này vào năm 1752. Do đó (13-1) thường được gọi là công thức Descartes - Euler.



Hình 13-1

Bằng "phương pháp quy nạp toán học" (quy nạp theo số đường biên giới), chúng ta chứng minh công thức (13-1) như sau:

1. Với c = 3 (ta cũng viết $c_3 = 3$) (hình 13-1),

ta có: $f_3 = 3, d_3 = 2, c_3 = 3$.

Từ đó, rõ ràng rằng:

$$d + f = c + 2$$

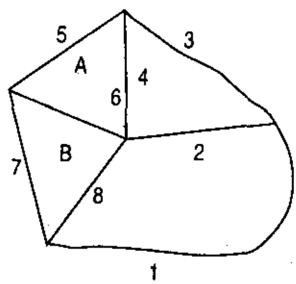
Vậy (13-1) đúng với $c_3 = 3$.

2. Giả sử (13-1) đúng với $c_k = k$, $k \geq 3$, ta có:

$$d_k + f_k = c_k + 2. \qquad (13\text{-}2)$$

(Giả thiết quy nạp).

Khi $c_{k+1} = k+1$, nếu ta bỏ đi một đường biên giới (ví dụ đường 6 ở hình 13-2) thì từ bản đồ có số đường biên giới bằng $c_{k+1} = k + 1$, sau khi bỏ một đường biên giới sẽ biến thành bản đồ có số đường biên giới bằng $c_k = k$ và như vậy là bị bớt một quốc gia. (Trên hình 13-2, hai quốc gia A và B bị bỏ đường



Hình 13-2

biên giới 6 nên nhập thành một quốc gia). Nhưng số đỉnh vẫn không thay đổi. Do đó ta có:

$$d_{k+1} = d_k \text{ , } f_{k+1} = f_k + 1 \text{ , } c_{k+1} = c_k + 1.$$

Suy ra:

$$d_{k+1} + f_{k+1} - c_{k+1} = d_k + f_k - c_k = 2,$$

hay $$d_{k+1} + f_{k+1} = c_{k+1} + 2.$$

Điều này chứng tỏ rằng (13-1) cũng đúng với $c_{k+1} = k + 1$.

Qua trên ta rút ra rằng công thức Descartes-Euler (13-1) là đúng với mọi $c \geq 3$ (với c là số đường biên giới của bản đồ).

Từ những điều vừa nêu ở trên ta có thể nhận thấy rằng: Phương pháp quy nạp toán học không phải là quy nạp không hoàn toàn, cũng không phải là quy nạp hoàn toàn.

Theo G.Polya thì "Quy nạp toán học" là một tên gọi rất không đạt của một phương pháp chứng minh. Và theo ông thì trong một vài trường hợp, "Quy nạp toán học" có quan hệ "hợp tác" với "Quy nạp không hoàn toàn", như sau:

"Quy nạp toán học" là một phương pháp chứng minh, phương pháp này thường có ích để chứng minh các mệnh đề toán học, mà các mệnh đề đó đã được tìm ra nhờ một quá trình quy nạp không hoàn toàn nào đó.

14. Kỳ tích chưa từng có trong lịch sử toán học

Kinh nghiệm của các nhà vẽ bản đồ thì chỉ cần 4 màu là có thể tô màu các quốc gia thỏa mãn điều kiện là hai quốc gia có đường biên giới chung được tô bằng hai màu khác nhau. Vấn đề này đầu tiên được nhà toán học August Ferdinand Möbius (17.11.1790 - 26.9.1868) người Đức nêu ra năm 1840.

Tháng 10 - 1852, Francis Guthrie người Anh cũng nêu lại vấn đề này. Ông cảm thấy có cái gì đó huyền bí, thế là ông viết thư cho người anh là Fedlech để hỏi. Fedlech tương đối hiểu sâu về toán học nhưng đã vắt óc suy nghĩ vẫn không tìm ra được lời giải, đành cầu cứu đến thầy của mình là giáo sư toán học nổi tiếng Augustus de Morgan (27.6.1806 - 18.3.1871) người Anh, A.de Morgan rất hứng thú về vấn đề này. Ông suy nghĩ trăn trở suốt mấy ngày đêm nhưng không chứng minh được. Ông liền viết thư cho bạn thân là nhà toán học nổi tiếng William Rowan Hamilton (4.8.1805 - 2.9.1865) người Anh để tham khảo ý kiến.

Trong thư A.de Morgan hy vọng rằng W.R.Hamilton hoặc chứng minh được "Nếu một tấm bản đồ yêu cầu tô các màu khác nhau ở hai quốc gia có chung đường biên giới thì chỉ cần dùng 4 màu là đủ" hoặc đưa ra được kết luận là phải dùng 5 màu hoặc hơn. Nhưng cả hai điều đó, với trí tuệ siêu phàm như W.R.Hamilton và đưa hết tâm huyết trong suốt 13 năm, cho đến lúc qua đời vẫn chưa thực hiện được.

W.R. Hamilton

Sau khi W.R.Hamilton mất 13 năm nữa, tức là năm 1878, nhà toán học Arthur Cayley (16.8.1821 - 26.1.1895) người Anh, trong một hội nghị toán học hàng năm đã đưa vấn đề này thành "Bài toán 4 màu". Vào năm sau đó, năm 1879, trong số tạp chí đầu tiên của Hội địa lý hoàng gia Anh, người ta đã công khai trưng cầu lời giải về "Bài toán 4 màu". Từ đó "Bài toán 4 màu" không chân mà đi tới khắp "ngõ chợ vùng quê" và trở thành một đề tài nóng hổi.

A.Cayley

Cùng năm phát ra cái tin trưng cầu lời giải đó, nhà toán học kiêm luật sư A. B. Kempe (6.7.1849 - 21.4.1922) người Anh đã thông báo "Bài toán 4 màu" đã được giải quyết và năm 1880 ông đăng bài "Tô bản đồ bằng 4 màu như thế nào?".Trên tạp chí "Tự nhiên". Điều này khiến cho dư luận một thời bàn cãi, sau đó đã lắng xuống dần và không ai nhắc đến vấn đề này nữa.

Bỗng đến năm 1890, P. J. Hiut đã chỉ ra những sai lầm trong chứng minh của A.B.Kempe. Từ đó vấn đề tưởng đã lắng xuống, lãng quên lại sôi động lên. Nhờ nghiên cứu phương pháp chứng minh của A.B.Kempe mà P.J.Hiut đã chứng minh được là "dùng 5 màu thì có thể phân biệt các quốc gia có đường biên giới chung trên bản đồ". Điều này quả thực là sự đột phá quan trọng đầu tiên, khi tiến vào "Bài toán 4 màu".

Thực ra P.J.Hiut chứng minh "định lý 5 màu" không khó lắm.

Sau đây là chứng minh của ông:

Bước 1. Gọi f_2 là số quốc gia mà biên giới chỉ có 2 đỉnh

f_3 là số quốc gia mà biên giới có 3 đỉnh

. . . .

Vậy tổng số quốc gia là:

$$f = f_2 + f_2 + f_4 + \ldots\ldots \qquad (14\text{-}1)$$

Bởi vì f_2 là số quốc gia mà biên giới chỉ có 2 đỉnh, như vậy có 2 đường biên giới. Từ đó mà số quốc gia này có tổng cộng $2f_2$ đường biên giới.

Cũng suy luận như vậy, f_3 là số quốc gia có 3 đường biên giới...

Mỗi đường biên giới đều nối liền hai quốc gia, do đó tổng số biên giới c thỏa mãn biểu thức:

$$2c = 2f_2 + 3f_3 + 4f_4 + \ldots \qquad (14\text{-}2)$$

Vì rằng mỗi đỉnh của bản đồ chung cho ít nhất là 3 quốc gia (chung cho ít nhất là 3 đường biên giới), nên đối với số đỉnh d, ta có bất đẳng thức:

$$3d \le 2f_2 + 3f_3 + 4f_4 + \ldots \qquad (14\text{-}3)$$

Từ (14-2) và (14-3) ta rút ra:

$$3d \le 2c. \qquad (14\text{-}4)$$

Từ (14-4) và (13-1) ta rút ra:

$$6f \ge 2c + 12. \qquad (14\text{-}5)$$

Từ(14-1), (14-3) và (14-5) ta rút ra:

$$6(f_2 + f_3 + f_4 + \ldots) \ge (2f_2 + 3f_3 + 4f_4 + \ldots) + 12,$$

nghĩa là :

$$4f_2 + 3f_3 + 2f_4 + f_5 \ge 12 + f_7 + 2f_8 + \ldots \qquad (14\text{-}6)$$

Do vế phải của (14-6) lớn hơn 12, nên vế trái phải có ít nhất là một số hạng lớn hơn 0. Như vậy, A.B.Kempe đã rút ra một nhận xét quan trọng rằng:

"Trên mỗi bản đồ (có mỗi đỉnh đều chung cho ít nhất là 3 quốc gia), có ít nhất là một quốc gia có số đường biên giới không quá 5".

Bước 2. Sử dụng phượng pháp quy nạp toán học để chứng minh rằng: "Dùng 5 màu là đủ để phân biệt các quốc gia có đường biên giới chung trên bản đồ". (14-7)

Chứng minh đó như sau:

Khi số quốc gia $f = 2$; $f = 3$ mệnh đề (14-7) rõ ràng là đúng.

Giả sử mệnh đề (14-7) đúng với $f \le k$, $k \ge 3$, nghĩa là "dùng 5 màu là đủ để phân biệt các quốc gia có đường biên giới chung trên một bản đồ với số quốc gia không nhiều hơn k" (giả thiết quy nạp).

Xét bản đồ G có số quốc gia bằng f = k + 1, ta có: Trên bản đồ đó có ít nhất một quốc gia có số đường biên giới không quá 5. Giả sử đó là quốc gia A.

Ta xóa bỏ một đường biên giới của quốc gia A, nhập quốc gia đó với quốc gia có chung đường biên giới vừa bị bỏ. Khi đó ta có một bản đồ G' chỉ có k quốc gia. Do đó mệnh đề (14-7) đúng với G'.

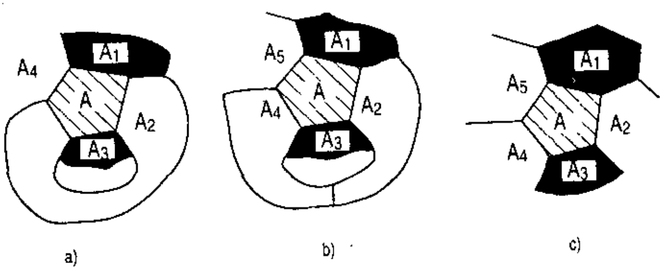
Sau khi tô G' với số màu không quá 5. Ta tìm cách tô A bằng một màu khác với màu của các quốc gia kề nó. Có thể xảy ra một trong ba trường hợp sau đây:

1. Số quốc gia có chung biên giới với A không quá 4.

2. Số quốc gia có chung biên giới với A là 5 và số màu dùng để tô 5 nước đó là không quá 4 màu.

3. Số quốc gia có chung biên giới với A là 5 và 5 quốc gia đó đã được tô bằng 5 màu.

Việc giải quyết hai trường hợp 1 và 2 là đơn giản. Ta xét trường hợp 3. Trong trường hợp này ta có:



Hình 14-1

Quốc gia A và khu vực liền kề với quốc gia A không ngoài ba trường hợp ở hình 14-1: hình 14-1a khi có một quốc gia có hai đường biên giới với A; hình 14-1b khi hai quốc gia cùng biên giới với A và có ít nhất là một quốc gia xen vào giữa nhưng hai quốc gia này có chung biên giới; hình 14-1c là trường hợp thường thấy, có 5 quốc gia cùng biên giới với A và không xảy ra trường hợp như hình 14-1b.

Dễ dàng thấy được rằng, dù là trường hợp nào trong ba trường hợp nêu trên thì kề với quốc gia A vẫn thường có hai quốc gia không liền nhau (A_1, A_3).

Bây giờ ta bỏ đường biên giới giữa A với A_1 và A_3 thì bản đồ mới sẽ có k - 1 quốc gia, do đó bản đồ mới có thể dùng 5 màu để tô. Khi tô màu thì ba quốc gia A, A_1, A_3 tô màu 1, còn ba quốc gia A_2, A_4, A_5 theo thứ tự tô 3 màu 2, 3, 4, sau đó thêm hai đường biên giới đã bỏ giữa A và A_1, A và A_3 để trở lại dạng bản đồ cũ và tô A màu 5. Vậy bản đồ đã được tô theo 5 màu.

Như vậy, ta đã chứng minh được rằng mệnh đề (14-7) đúng với $f = k + 1$.

P.J.Hiut đã chứng minh "Định lý 5 màu" như thế đấy.

Có nhiều nhà toán học coi nhẹ "Bài toán 4 màu", trong đó giáo sư Hermann Minkowski (22.6.1864 - 12.1.1909) người Đức là trường hợp điển hình nhất. (Ông chính là thầy giáo của Albert Einstein (14.3.1879 - 18.4.1955).

H.Minkowski cho rằng, sở dĩ chưa giải quyết được "Bài toán 4 màu" chính là vì các nhà toán học trên thế giới chưa rảnh rang để đi sâu nghiên cứu bài toán này.

Có một lần, H.Minkowski đang giảng bài, tự nhiên ông nêu ra vấn đề này, rồi nhân đà hứng thú mà suy diễn tựa hồ như có sẵn trong đầu, ông viết dày đặc cả bảng nhưng "Bài toán 4 màu" vẫn chưa được giải quyết. Lần khác, sau khi bước vào lớp, ông lại tiếp tục suy luận với đầy lòng tin. Nhưng kết quả là vẫn chưa giải quyết được bài toán này. Cứ thế, nỗi dày vò kéo dài mấy tuần liền và đã khiến giáo sư kiệt sức. Một hôm, ông bước vào lớp, mệt mỏi nhìn vào tấm bảng vẫn còn sót lại hai chữ "chứng minh" và lập tức ông tỉnh lại, xấu hổ thừa nhận rằng: "Thượng đế đang trách ta, ta không làm gì được Bài toán 4 màu".

Trí tuệ của nhân loại lại đứng trước một sự thách đố. Các nhà toán học lại tập trung sức lực để nghiên cứu, nhằm giải quyết "Bài toán 4 màu".

Năm 1922 có người đã giải quyết được "Bài toán 4 màu" với số quốc gia $f \leq 25$, năm 1938 với $f = 32$, năm 1969 với $f = 45$. Như vậy, qua 47 năm, số quốc gia chỉ đẩy thêm được 20. Quả thực là con đường này đầy gai góc khiến người ta phát sợ. Khó khăn chủ yếu là khả năng tạo hình quá nhiều, đòi hỏi suy luận logic tới 200 triệu lần thì sức người làm sao có thể thực hiện được!

Chính nhờ sự xuất hiện máy tính điện tử nên "Bài toán 4 màu" có hy vọng giải quyết được. Tuy nhiên, đầu những năm 1970 đã có máy tính điện tử rồi nhưng vẫn phải tính liên tục sau 11 năm rưỡi mới đạt được mục tiêu. Các nhà toán học đã hợp tác với nhau, không ngừng cải tiến phương pháp để giảm số lần suy luận và nâng cao tốc độ tính toán của máy tính.

Tháng 9 - 1976, ba nhà toán học dạy ở Trường đại học Ilinoi (Mỹ): K. Appel, W. Haken, J,Koch đã dùng ba máy tính có tốc độ tính toán 4 triệu phép tính trong 1 giây và tính trong 1200 giờ liền, cuối cùng đã hoàn thành việc giải quyết "Bài toán 4 màu".

Tin điện truyền nhanh chấn động toàn cầu, một đề toán khó trong lịch sử toán học, với sự hợp tác của con người và máy tính đã giải quyết thành công. Đây quả là kỳ tích chưa từng có trong lịch sử toán học. Để kỷ niệm thời khắc có tính chất lịch sử của thành công này, hôm tuyên bố giải được "Bài toán 4 màu", bưu cục của Trường đại học Ilinoi đã đóng dấu có chữ: "Four Cloro Suffice" (Bốn màu kết thúc).

Từ khi "Bài toán 4 màu" được nêu ra đến khi nó được giải quyết đã trải qua 136 năm với sự làm việc của nhiều thế hệ các nhà toán học, đồng thời phải dựa vào sự tính toán của máy tính cực mạnh. Thế nhưng, đến nay vẫn còn nhiều nhà toán học vẫn đang tìm kiếm chứng minh bằng cách tính toán trên giấy.

15. Tính toán của "Người ngoài hành tinh"

Trong bầu trời mênh mông, có "Người ngoài hành tinh" không?

Trong vũ trụ có phải chỉ có loài người mới có bộ óc trí tuệ? Câu trả lời của các nhà khoa học về câu hỏi "Người ngoài hành tinh" ra sao: Chúng ta đang tìm kiếm!

Dường như ngôn ngữ toán học có tính phổ biến! Tựa hồ các nhà toán học đều suy nghĩ rằng: Nếu một ngày nào đó "Người ngoài hành tinh" có liên lạc được với chúng ta, họ có hiểu ngôn ngữ toán học của chúng ta không?

Muốn trả lời câu hỏi này, chúng ta hãy bắt đầu từ cách ghi con số từ thời Cổ Đại.

Các bản bằng đất sét tìm thấy ở Suse và Uruk (nay là Warka thuộc Irăc) hoặc muộn hơn nhiều, ở Nippur (Babilon, 2200 - 1350 trước Công nguyên) cho thấy: hệ đếm đã được ghi chép lại vào thiên niên kỷ III trước Công nguyên.

Như vậy hệ đếm Babilon có thể là hệ đếm xuất hiện sớm nhất. Đây là hệ đếm 60, có ưu điểm là có khá nhiều ước số: 2, 3, 4, 5, 10, 12, 15, 20, 30 nên khi làm phép chia ta thu được số chẵn, do vậy nó có nhiều sức sống. Ngày nay khi người ta thực hiện các phép tính về góc và thời gian thì vẫn dùng hệ đếm này.

Thời Cổ Đại, một số dân tộc dùng hệ đếm 5, vì họ chỉ dùng một tay để đếm.

Người Maia đã dùng hệ đếm 20, vì họ dùng tất cả các ngón tay và ngón chân. Ở Đan Mạch hiện vẫn còn dùng hệ đếm này.

Ngoài ra, trong đo lường người ta còn dùng hệ đếm 8, 12, 16, 21 (trong máy thu hình), ...

Vào thế kỷ V trước Công nguyên, người Hy Lạp đã dùng chữ cái để thay số. Đối với các số hàng nghìn, người ta dùng dấu phẩy trước chữ cái (ví dụ, a có giá trị là 1 thì, a có giá trị là 1000).

Các hệ đếm vừa nêu đều không tồn tại số 0 (zero).

Hệ đếm Babilon được hoàn thiện vào thế kỷ IV trước Công nguyên bởi sự xuất hiện của số 0 (ở đầu một con số, hoặc ở giữa, nhưng không bao giờ ở cuối) trong các văn bản toán học. Số 0 bắt nguồn từ từ synya, có nghĩa là "không có gì" trong tiếng Phạn, trở thành sifr trong tiếng Arập và được Léonardo Fibonacci (1174 - 1250) người Italia Latinh hóa thành zephirum và được gọi là số 0 vào năm 1491 trong một thảo luận ở Florence.

Vào thế kỷ V ở Ấn Độ đã xuất hiện hệ đếm thập phân, sử dụng 10 chữ số từ 0 đến 9 như ngày nay.

Thời Ai Cập cổ đại người ta đã viết các số như sau: đối với mỗi số của một hàng đơn vị nào đó họ dùng một ký hiệu cố định ghi lại nhiều lần, ví dụ số 2532 viết là:

Ở đây số được ghi ký hiệu tương đương với 10 số ghi ký hiệu, số ghi ký hiệu lại tương đương với 10 số ghi ký hiệu ,... Từ phải sang trái các loại ký hiệu "cứ 10 số lại tăng lên một nấc", tức là "cứ đến số 10 lại tăng lên một nấc".

Nhân loại coi những thứ đã quen thấy ấy như là thứ "có sẵn như thế". Trẻ con từ nhỏ đã học toán theo cách nghĩ "cứ đến số 10 lại tăng lên một nấc" rồi lớn dần lên vẫn nghĩ như thế, ít ai nghi ngờ mà tìm ra xuất xứ của nó.

Kỳ thực hệ đếm thập phân bắt nguồn từ cách tính mười ngón tay từ rất xa xưa. Chữ số được ghi như bảng 15-1.

Bảng 15-1

Chữ số	Cách ghi									
Arập (Ấn Độ)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
La Mã	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Trung Quốc cổ đại	I	II	III	IIII	IIIII	T	𝍦	𝍧	𝍨	-O
Ấn Độ cổ đại	I	Ͱ	Ͱ	Ͱ	ɟ	ч	V	Λ	9	10

Ngày nay, khi chúng ta viết số 2532 thực tế là chúng ta đã sử dụng phép "cứ đến số 10 lại tăng lên một nấc", tức là:

$$2532 = 2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 2.$$

Có thể tưởng tượng rằng, giả sử bắt đầu từ sự hỗn độn, trong quá trình tiến hóa hàng triệu năm trước mà loài người sinh ra nhiều tay chân thì cách ghi số của chúng ta ngày nay hẳn không phải như đã nói ở trên.

Bây giờ chúng ta thử mở rộng tưởng tượng phong phú này sang những sinh vật có trí tuệ trong không gian bao la. Thiết tưởng rằng "Người ngoài hành tinh" liên lạc với chúng ta là những người chỉ có đôi tay trần trụi như nắm đấm. Vậy họ phải dùng phép tính số "cứ đến số 2 lại tăng lên một nấc".

Trên bàn để một tá bút chì, học sinh trên Trái Đất chúng ta sẽ viết một cách đúng đắn số bút chì là 12. Giả sử có ai đó viết thành 1100 thì người ta cho rằng viết sai. Song đây lại là số một tá mà "Người ngoài hành tinh" sử dụng theo hệ đếm nhị phân (cứ đến số 2 lại tăng lên một nấc). Ta dùng dấu hiệu (2) để biểu thị hệ đếm này cho khỏi nhầm lẫn với các hệ đếm khác.

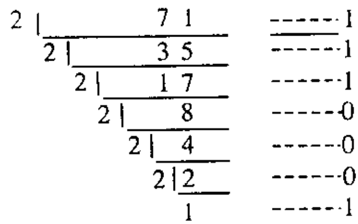
Ví dụ:

$$1100_{(2)} = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 = 8 + 4 = 12 \quad (15\text{-}1)$$

$$10101_{(2)} = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 =$$

$$= 16 + 4 + 1 = 21. \quad (15\text{-}2)$$

Vế phải của (15-1) và (15-2), trên thực tế là cách làm sao cho phép "cứ đến số 2 lại tăng lên một nấc" lại trở thành hệ đếm thập phân (cứ đến số 10 lại tăng lên một nấc). Nhưng làm sao để hệ đếm thập phân thành hệ đếm nhị phân? Sau đây là cách làm có hiệu quả.



Hình 15-1

Chẳng hạn, muốn viết số 71 theo hệ đếm nhị phân, ta lấy 71 chia cho 2, được thương là 35, viết 35 dưới 71, số dư 1 viết vào cột bên phải. Lấy thương chia tiếp cho 2 như trên, nếu chia hết cũng viết số 0 vào cột bên phải. Lặp lại quá trình trên cho tới khi thương bằng 1. Số 1 cũng viết sang cột bên phải (hình 15-1).

Từ cột bên phải ta viết ngược lên được một dãy số và đó là cách biểu thị số 71 theo hệ đếm nhị phân:

$$71 = 1000111_{(2)}.$$

Bạn đọc rất dễ dàng đối chiếu hai hệ đếm (bảng 15-2).

Bảng 15-2

Hệ đếm thập phân	Hệ đếm nhị phân	Hệ đếm thập phân	Hệ đếm nhị phân
1	1	9	1001
2	10	10	1010
3	11	11	1011
4	100	12	1100
5	101	13	1101
6	110	14	1110
7	111	15	1111
8	1000	16	10000

Ưu điểm lớn nhất của hệ đếm nhị phân là mỗi đơn vị số chỉ có hai trạng thái 0 và 1, điều này khiến chúng ta có thể thông qua phương pháp giản đơn, như trắng và đen, hư và thực, phụ và chính, chấm và gạch, nhỏ và to, tối và sáng, ... để biểu thị. Sau đây là mấy cách biểu thị số 71 dùng hệ đếm nhị phân (bảng 15-3).

Bảng 15-3

Biểu thị bằng	Biểu thị số 71 theo hệ đếm nhị phân						
0 và 1	1	0	0	0	1	1	1
Trắng và đen	•	o	o	o	•	•	•
Hư và thực	–	...	...	...	–	–	–
Phụ và chính	+	–	–	–	+	+	+
Chấm và gạch	–	.	.	.	–	–	–
Nhỏ và to	O	o	o	o	O	O	O

Đương nhiên hệ đếm nhị phân cũng có nhược điểm, chẳng hạn như cùng biểu thị số 71 thì hệ đếm nhị phân sẽ phải dùng một dãy số dài hơn khi dùng hệ đếm thập phân. Có trường hợp hệ đếm thập phân lại tỏ ra rất phức tạp, *nhưng nếu dùng hệ đếm* nhị phân thì lại rất đơn giản.

Sau đây là câu chuyện truyền thuyết cổ lý thú thể hiện sinh động nhận xét này:

Chuyện rằng, nhà vua Shehan nước Ấn Độ cổ đại định trọng thưởng cho người phát minh ra cờ tướng là tể tướng Sisapandayier. Vị tể tướng thông minh này thỉnh cầu quốc vương rằng: "Tâu bệ hạ, xin người thưởng cho thần số thóc như sau: từ ô thứ nhất của bàn cờ là 1 hạt thóc, ô thứ hai 2 hạt, ô thứ ba 4 hạt, tức là ô sau gấp đôi ô trước, bệ hạ cho bày thóc lên đủ 64 ô trên bàn cờ là đủ ân thưởng cho kẻ tôi tớ này rồi".

Nhà vua khẳng khái hứa thưởng cho tể tướng theo yêu cầu. Vua cảm thấy lời thỉnh cầu của tể tướng có phần quá ít ỏi.

Công việc tính toán bắt đầu, quốc vương nhanh chóng phát hiện ra rằng, lời hứa của mình không có cách gì thực hiện được, bởi vì số thóc tính ra là:

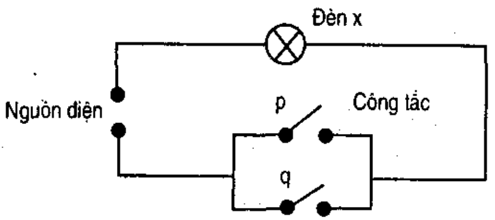
$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{63} = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 =$$

$$= 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615. \text{ (hạt)}$$

Đây là số dài tới 20 chữ số, tương đương với sản lượng thóc của cả thế giới sản xuất trong 630 năm hoặc sản lượng lúa mì sản xuất trong gần 2000 năm như năm 1999.

Kết cục của truyền thuyết này chắc bạn đọc cũng suy đoán được là nhà vua không thể đủ thóc thưởng cho tể tướng. Có điều là nếu dùng hệ đếm nhị phân để biểu thị số thóc này thì chỉ dùng 64 chữ số 1 và hình thức lại rất giản đơn:

$$\underbrace{1\ \ 1\ \ 1\ \ \ldots\ldots\ldots\ 1\ \ 1\ \ 1_{(2)}}_{\text{64 chữ số 1}}$$



Hình 15-2

Hệ đếm nhị phân còn có lợi ở chỗ dễ thể hiện các số, ví dụ số 9 theo hệ đếm thập phân, được viết là 1001 theo hệ đếm nhị phân và chỉ cần 4 bóng đèn thể hiện bằng "sáng, tắt, tắt, sáng" là được. Như vậy là nhờ có hệ đếm nhị phân mà các số có thể biểu diễn được bởi dãy bóng đèn điện (hoặc bóng điện tử).

Đồng thời, với hệ đếm nhị phân thì các phép toán logic (các phép toán liên kết mệnh đề) lại đơn giản lạ lùng.

Nếu mạch điện được mắc hai công tắc p và q song song như hình 15-2, ta có:

- Khi p và q cùng tắt (mở, như hình vẽ), ứng với trường hợp hai mệnh đề p và q đều sai, lúc đó mạch không có điện (đèn x không sáng):

$$x = p + q = 0 + 0 = 0.$$

- Khi p bật (đóng) và q tắt thì dòng điện chạy qua p, đèn x sáng, tức là:

$$x = p + q = 1 + 0 = 1.$$

- Tương tự, khi p tắt và q bật thì dòng điện chạy qua q, đèn x sáng, tức là:

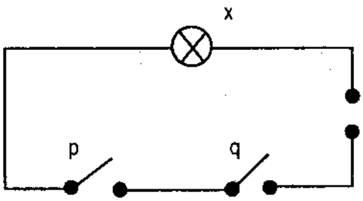
$$x = p + q = 0 + 1 = 1.$$

- Khi cả p và q đều bật thì dòng điện chạy qua cả p và q, đèn x sáng, tức là:

$$x = p + q = 1 + 1 = 1.$$

Mạch điện mắc như ở hình 15-2 ứng với phép tuyển (tổng logic, bảng 2-2).

Nếu mạch điện được mắc hai công tắc p và q nối tiếp như hình 15-3 ta có trường hợp ứng với phép hội (tích logic, bảng 2-3).



Hình 15-3

Tương tự đối với phép trừ, phép chia và các phép tính khác. Với các phép tính có nhiều số hạng, ta chỉ cần ghép các mạch điện đơn giản ở trên lại.

Nhờ dòng điện truyền trong dây dẫn với vận tốc xấp xỉ với vận tốc ánh sáng (gần 300 000 km/s) nên các mạch logic làm việc rất nhanh.

Quy luật các phép toán logic mệnh đề vừa nêu ở trên có thể quy nạp làm 8 chữ: "cách thức như cũ, hệ đếm nhị phân". Có điều là, đối với phép trừ, nếu gặp số 0 bên trái (phía trên) và số 1 bên phải (phía dưới) thì phải mượn số 1 bên trái số 0 mà trừ (xem bảng 15-4 và ví dụ 2 dưới đây). Sau đây là một số ví dụ (bên phải là đối chiếu theo hệ đếm thập phân):

Bảng 15-4

p – q = x		
p	q	x
1	1	0
1	0	1
1 0	1	1
0	0	0

Ví dụ 1. $1101_{(2)} + 110_{(2)} = ?$

$$\begin{array}{r} 1101 \\ +\ \ 110 \\ \hline 10011 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ +\ 6 \\ \hline 19 \end{array}$$

Ví dụ 2. $10101_{(2)} - 1010_{(2)} = ?$

$$\begin{array}{r} 10101 \\ -\ 1010 \\ \hline 1011 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 21 \\ -\ 10 \\ \hline 11 \end{array}$$

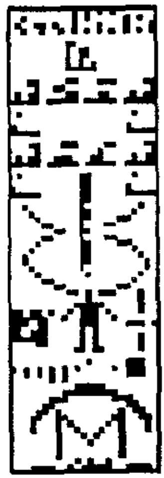
Ví dụ 3. $10111_{(2)} \times 101_{(2)} = ?$

$$\begin{array}{r} 10111 \\ \times\ \ 101 \\ \hline 10111 \\ 00000\ \ \\ 10111\ \ \ \ \\ \hline 1110011 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 23 \\ \times\ 5 \\ \hline 115 \end{array}$$

Ví dụ 4. $110111_{(2)} : 101_{(2)} = ?$

$$\begin{array}{r|l} 110111 & 101 \\ \cline{2-2} -\ 101\ \ \ \ & 1011 \\ \cline{1-1} 00111\ \ & \\ -\ 101\ \ & \\ \cline{1-1} 0101 & \\ -\ 101 & \\ \cline{1-1} 000 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 55 & 5 \\ \cline{2-2} -\ 5\ \ & 11 \\ \cline{1-1} 05 & \\ 5 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Cứ phỏng theo các ví dụ ở trên, bạn đọc có thể soạn ra được rất nhiều bài tập.



Hình 15-4

Trở lại với "Người ngoài hành tinh". Ở trên ta đã từng nghĩ rằng "Người ngoài hành tinh" tay không có ngón. Đương nhiên có thể họ có "ba đầu sáu tay" hoặc tay họ có bốn ngón, tám ngón, nên tính toán của họ theo quy luật của hệ đếm tứ phân hoặc hệ đếm bát phân,... Nhưng dù sao, chỉ cần "Người ngoài hành tinh" có bộ óc phát triển thì họ không thể không hiểu hệ đếm nhị phân đơn giản.

Trên cơ sở những nhận thức đã nói ở trên, ngày 16-11-1974, các nhân viên công tác tại Đài thiên văn Ruik (Đức) và Đài thiên văn Aleixipho (Mỹ) đã phóng tên lửa có tính tượng trưng lên bầu trời để giới thiệu Trái Đất cho "Người ngoài hành tinh" chưa biết. Tín hiệu phát lên những đám sao hình cầu thuộc chòm sao Tiên Nữ Múa M_{13}. Chòm sao này cách xa Trái Đất chừng 25 000 năm ánh sáng.

Dùng hệ đếm nhị phân với 1679 tín hiệu đen trắng và phát xung trong 3 phút để miêu tả tri thức Trái Đất (hình 15-4).

Ở hình 15-4, từ dưới lên trên các ký hiệu lần lượt là: kính viễn vọng Airayxipo, bản đồ sơ lược của các hành tinh hệ Mặt Trời, hình con người, ...

Để bạn đọc thấy rõ hơn, nhóm ký hiệu trên cùng ở hình 15-4 đã được phóng to như hình 15-5. Bạn đọc có thể dùng một cái thước, lấy cạnh thước đặt đúng mũi tên 1 thì bạn sẽ phát hiện thấy một điều kỳ lạ: đầu trên mép thước là số bậc hệ đếm nhị phân, được biểu thị bằng các ô đen và trắng 1, 2, 3, ... 10, chỉ có điều là vị trí cao 8, 9, 10 đã lấy xuống đặt vào bên trái. Hàm ý của nhóm tín hiệu này là ngôn ngữ số học của giải tích số hệ đếm nhị phân mà chúng ta vẫn sử dụng. Đây là nội dung có liên quan đến hóa học và sinh vật: 5 loại nguyên tố tạo thành sự sống trên Trái Đất, số thứ tự nguyên tử của hidro, cacbon, nitơ, oxi và phốt pho, theo thứ tự từ trái sang phải là: 1, 6, 7, 8 và 15.

Hình 15-5

Khi phát tín hiệu lên chòm sao M_{13} cần sử dụng năng lượng phát xạ gấp nghìn vạn lần ánh sáng Mặt Trời. Trong vòng 3 phút, Trái Đất là ngôi sao sáng nhất của hệ ngân hà.

Chỉ mong rằng hệ đếm nhị phân giúp cho "Người ngoài hành tinh" hiểu được loài người trên Trái Đất hiện thời!

16. Nguyên lý khoa học của ma thuật "đoán họ"

Trong thực tế, có nhiều hiện tượng nếu chỉ quan sát bên ngoài thì rất khó biết rõ bản chất bên trong. Các câu chuyện sau đây sẽ phần nào thể hiện điều này:

Tính nhẩm là việc làm nhiều người hứng thú. Chúng ta hãy xem xét trường hợp sau đây:

Có hai số đều gồm hai chữ số và có cùng hàng chục, còn hàng đơn vị thì bù nhau thành 10. Tích của hai số này có thể viết ngay được. Ví dụ:

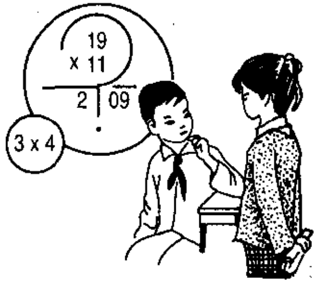
$$19 \times 11 = 209;$$

$$97 \times 93 = 9021.$$

Cách tính nhẩm là: lấy số hàng chục (giống nhau) nhân với số đó cộng 1 sẽ được phần đầu của kết quả:

$$1 \times (1 + 1) = 2$$

$$9 \times (9 + 1) = 90$$



Tích của hàng đơn vị của hai số là hai số cuối của kết quả:

$$9 \times 1 = 09$$

$$7 \times 3 = 21.$$

Sau đây là một loại phép nhân đặc biệt:

Ví dụ, bạn muốn tìm tích của 29×17. Trước tiên lấy số 29 chia 2, được 14, viết 14 dưới số 29. Lại lấy số 14 chia 2, được 7, viết 7 dưới 14... Cứ thế chia 2 cho đến khi còn 1, như cột 1 của bảng 16-1.

Đối với số 17 thì lại làm ngược lại, nhân với 2 và viết kết quả lần lượt ở dưới, như cột 2 của bảng 16-1.

Bảng 16-1

29	17
14	34
7	68
3	136
1	272

Tiếp theo ta gạch bỏ số chẵn ở cột 1 của bảng 16-1 và tương ứng gạch bỏ cả số cùng hàng ở cột 2. Cuối cùng, cộng các số còn lại ở cột 2 sẽ được kết quả 493, tức là $29 \times 17 = 493$ (xem bảng 16-2).

Bảng 16-2

29	17
~~14~~	~~34~~
7	68
3	136
1	272

Σ 493

Điều kỳ diệu này do đâu mà có?

Ta đã đưa 29 về dạng hệ đếm nhị phân (cột 1 bảng 16-1). Từ dưới lên tính chẵn - lẻ của dãy số là: lẻ, lẻ, lẻ, chẵn và lẻ. Coi lẻ là 1, chẵn là 0, ta có: 11101. Đây chính là hình thức của hệ đếm nhị phân.

Dãy số ở cột 2 bảng 16-1 có thể viết:

$$17 \times 2^0, \quad 17 \times 2^1, \quad 17 \times 2^2, \quad 17 \times 2^3, \quad 17 \times 2^4.$$

Sau khi gạch bỏ số chẵn ở cột 1 và số cùng hàng ở cột 2 bảng 16-2, ta có:

$$\begin{aligned} 493 &= 17 \times 2^4 + 17 \times 2^3 + 17 \times 2^2 + 17 \times 2^0 \\ &= 17 \times (2^4 + 2^3 + 2^2 + 1) \\ &= 17 \times 1\,1\,1\,0\,1_{(2)} = 17 \times 29. \end{aligned}$$

Có một trò chơi gọi là "đoán số" mà hình thức của nó cùng chung nguyên lý như cách tính nhẩm ở trên.

Lấy 5 tờ giấy hình chữ nhật như con bài tú-lơ-khơ, trên đó viết các số sau đây:

Tờ I : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31.

Tờ II: 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 22, 23, 26, 27, 30, 31.

Tờ III: 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 28, 29, 30, 31.

Tờ IV: 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31.

Tờ V: 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, và chuyển thành dạng :

	1	
3	5	7
9	11	13
15	17	19
21	23	25
27	29	31

(I)

	2	
3	6	7
10	11	14
15	18	19
22	23	26
27	30	31

(II)

	4	
5	6	7
12	13	14
15	20	21
22	23	28
29	30	31

(III)

	8	
9	10	11
12	13	14
15	24	25
26	27	28
29	30	31

(IV)

	16	
17	18	19
20	21	22
23	24	25
26	27	28
29	30	31

(V)

Bây giờ bạn có thể bắt đầu trò chơi: bạn yêu cầu người chơi nhớ kỹ một số từ 1 đến 31, rồi đưa 5 tờ giấy ở trên cho người đó, yêu cầu lấy ra các tờ giấy có số mà người đó đã chọn. Bạn chỉ cần cộng các số hàng trên cùng của các tờ giấy mà người đó vừa lấy ra, đó chính là số mà người chơi chọn. Ví dụ, số mà người chơi chọn là 21. Người đó lấy ra ba tờ giấy (I), (III) và (V) có số 21. Số ở hàng trên cùng của ba tờ giấy này là 1, 4 và 16. Vậy số mà người chơi chọn là:

$$1 + 4 + 16 = 21.$$

Trò chơi này có vẻ thần kỳ nhưng thật ra là rất đơn giản, chịu khó quan sát một chút sẽ biết: dòng trên cùng của các tờ giấy viết theo hệ đếm nhị phân:

$$0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1_{(2)} = 1$$

$$0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 0_{(2)} = 2$$

$$0\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0_{(2)} = 4$$

$$0\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0_{(2)} = 8$$

$$1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0_{(2)} = 16$$

Nếu một số nào đó xuất hiện ở các tờ giấy (I) (III) và (V) mà không xuất hiện ở các tờ giấy (II) và (IV) thì số đó phải là:

$$1\,0\,1\,0\,1_{(2)} = 16 + 0 + 4 + 0 + 1 = 21.$$

Tương tự trò chơi "đoán số" là cách "đoán ngày trong tháng". Ta có bảng số ghi các số chỉ ngày trong tháng (bảng 16-3). Bạn chọn một ngày nào đó và cộng các số của hàng đầu tiên trong bảng 16-3 của các cột có ngày được chọn, sẽ tìm được con số chỉ ngày đã chọn. Ví dụ, bạn chọn ngày 25. Như vậy các cột 1, 4 và 5 có số 25. Ta có:

$$1 + 8 + 16 = 25.$$

Bảng 16-3

1	2	4	8	16
3	3	5	9	17
5	6	6	10	18
7	7	7	11	19
9	10	12	12	20
11	11	13	13	21
13	14	14	14	22
15	15	15	15	23
17	18	20	24	24
19	19	21	25	25
21	22	22	26	26
23	23	23	27	27
25	26	28	28	28
27	27	29	29	29
29	30	30	30	30
31	31	31	31	31

Nếu bạn đọc muốn biến thành trò chơi "đoán ngày trong tháng" thì chỉ cần làm hai bảng 16-3 (giống nhau): bạn một bảng, người chơi một bảng. Bạn chỉ cần yêu cầu người chơi nói các cột nào trong bảng 16-3 có ngày chọn, bạn thực hiện như trên sẽ đoán được.

Trò chơi "đoán số" cũng có thể biến thành trò chơi "đoán họ".

Lấy sáu tờ giấy hình chữ nhật như trò chơi "đoán số": tờ thứ nhất viết 32 họ thường gặp (hình 16-1), năm tờ giấy còn lại vẽ các vòng tròn rồi đục lỗ như hình 16-2.

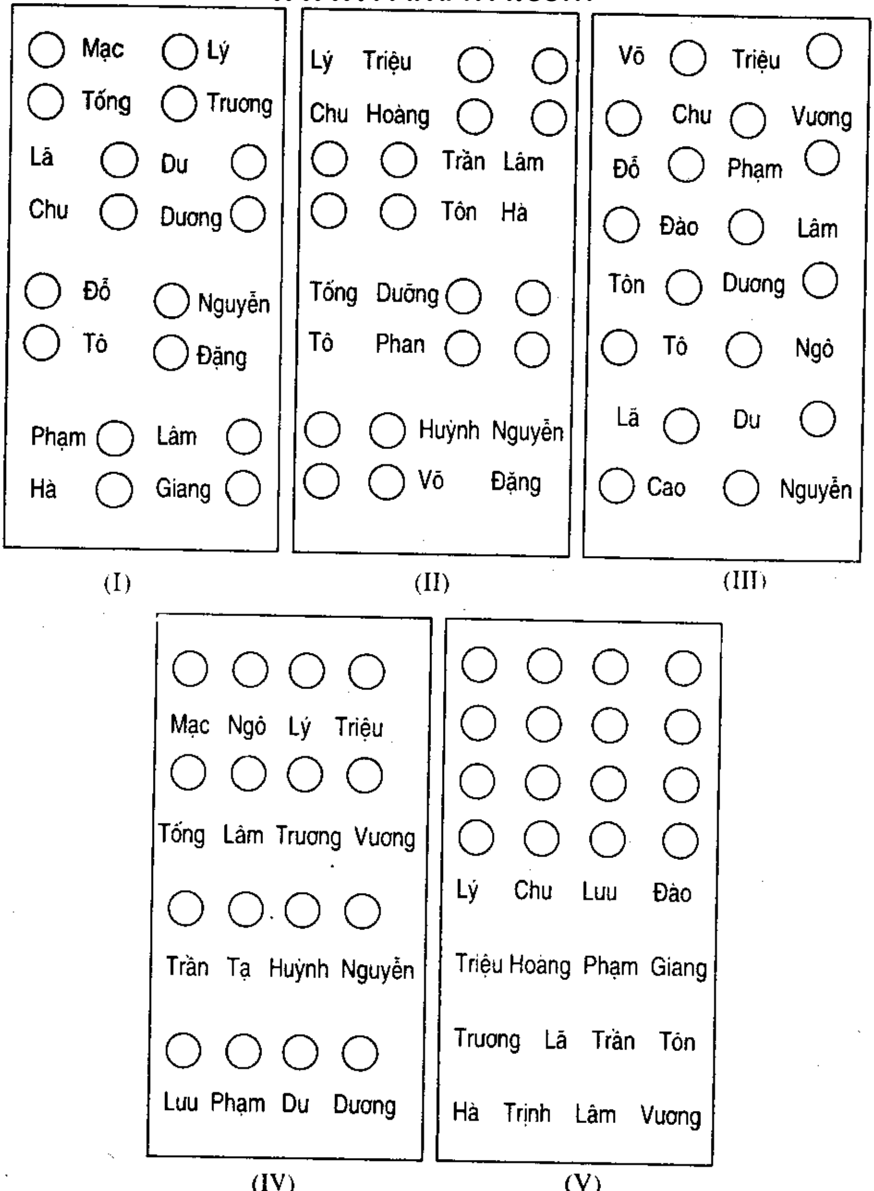
Trương	Vương	Lý	Triệu
Lã	Trịnh	Chu	Hoàng
Trần	Lâm	Lưu	Phạm
Tôn	Hà	Đào	Giang
Mạc	Ngô	Tống	Dương
Đỗ	Hồ	Tô	Phan
Huỳnh	Nguyễn	Tạ	Dư
Võ	Đặng	Cao	Lương

Hình 16-1

Khi bắt đầu chơi (làm ảo thuật), bạn yêu cầu người chơi chọn các tờ giấy ở hình 16-2 có họ của mình ra, nếu không có thì các tờ giấy đó lật sấp lại. Xếp các tờ giấy có họ để ngửa lên, các tờ giấy không có họ để sấp vào chồng khít lên nhau. Khi đó sẽ có một lỗ tròn xuyên suốt cả năm tờ giấy. Lỗ tròn này tương ứng với vị trí ghi họ ở tờ giấy(hình 16-1) đặt dưới cùng.

Ví dụ, người chơi có họ Chu, như vậy các tờ (I), (II), (III) và (V) để ngửa, chỉ tờ IV để sấp. Sau khi sắp các tờ giấy đó chồng khít lên nhau ta thấy lỗ tròn xuyên suốt ứng với họ Chu ở tờ giấy hình 16 - 1 ở dưới cùng.

Đây là một trò ảo thuật lý thú, bạn hãy thực hiện như hướng dẫn, bạn sẽ làm người xem kinh ngạc.


Mạc Lý
Tống Trương
Lã Du
Chu Dương
Đỗ Nguyễn
Tô Đặng
Phạm Lâm
Hà Giang
(I)
Lý Triệu
Chu Hoàng
Trần Lâm
Tôn Hà
Tống Dưỡng
Tô Phan
Huỳnh Nguyễn
Võ Đặng
(II)
Võ Triệu
Chu Vương
Đỗ Phạm
Đào Lâm
Tôn Dương
Tô Ngô
Lã Du
Cao Nguyễn
(III)
Mạc Ngô Lý Triệu
Tống Lâm Trương Vương
Trần Tạ Huỳnh Nguyễn
Lưu Phạm Du Dương
(IV)
Lý Chu Lưu Đào
Triệu Hoàng Phạm Giang
Trương Lã Trần Tôn
Hà Trịnh Lâm Vương
(V)

Hình 16-2

17. Bí mật quyết thắng của "trò chơi que diêm"

Sức hấp dẫn của các trò chơi đối sách mà nhiều người thích là ở chỗ hai bên đều có cơ hội giành phần thắng. Ai cũng đều có thể vận dụng trí tuệ của mình để tìm sách lược giành thắng lợi, đều mong mình có suy luận cao hơn đối phương. Nếu hai bên đã biết đối sách của nhau thì bí mật, bất ngờ sẽ không còn nữa và trò chơi trở nên kém hấp dẫn.

Hứng thú của các nhà toán học lại hoàn toàn khác, họ gắng sức suy luận để làm rõ sách lược giành phần thắng trong trò chơi hoặc khả năng giành phần thắng bao nhiêu. Bởi vì họ cho rằng, những phương pháp toán học có được do việc nghiên cứu mô hình đối sách còn quan trọng hơn nhiều so với sự ăn thua trong đối sách. Có điều là, dù các nhà toán học đã có những kết luận chính xác thì chưa chắc người đời đã biết hết, nên người ta vẫn vui vẻ chơi.

Năm 1912, nhà toán học Ernst Zermelo (1871 - 1953) người Đức đã nghiên cứu đối sách trong cờ vây[1] và đã chứng minh rằng, trong các cách đối phó nhất định có một cách chẳng cần biết đối phương hành động như thế nào vẫn có thể giành phần thắng hoặc hòa cờ, song vẫn không hề ảnh hưởng đến hứng thú của người chơi cờ và những cuộc đấu cờ trên thế giới vẫn liên tiếp được tổ chức.

E.Zermelo

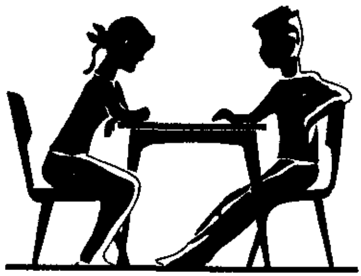
Có một trò chơi dùng các que diêm rất lý thú, các nhà toán

---

(1) Ở Việt Nam, cờ vây sắp thành môn thi đấu chính thức tại các giải quốc gia. Cờ vây có 20 × 20 ô vuông với 300 quân, khi chơi đặt từng quân một để vây nhau.

học đã nghiên cứu rõ ràng, nhưng tới nay nó vẫn rất hấp dẫn với nhiều thanh - thiếu niên và trở thành trò giải trí ngoài giờ học, những lúc rảnh rỗi. Trò chơi này bắt nguồn từ Trung Quốc và khoảng thế kỷ I đã truyền sang châu Âu, được đặt tên là "Nim", còn gọi là "trò chơi hai người Trung Quốc".

Cách chơi như sau: Có mấy đống que diêm, số que diêm trong mỗi đống là tùy ý. Bây giờ hai người A và B thay nhau lấy các que diêm, đến lượt thì phải lấy và mỗi người chỉ được lấy một số que diêm trong một đống nào đó, có thể lấy cả đống đó, nhưng không được lấy sang đống khác, tức là không được lấy một lần trong cả hai đống. Quy ước rằng ai lấy hết que diêm cuối cùng là người đó thắng.



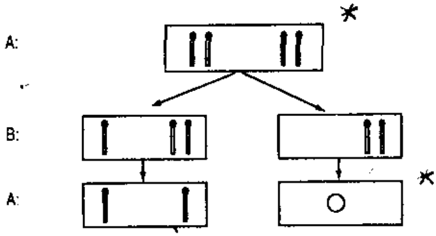
Các nhà toán học đã hoàn toàn nắm vững bí quyết giành phần thắng của trò chơi "Nim" này. Để bạn đọc hiểu được bí quyết giành phần thắng, chúng ta hãy lấy vị trí giành phần thắng trong trò chơi mà suy xét. Ta dùng ký hiệu p, q, r, s, t, ... để biểu thị trạng thái que diêm trong đối sách.

Chẳng hạn như (2, 2) biểu thị là có hai đống que diêm, mỗi đống có 2 que diêm; (1, 2, 3) biểu thị là có ba đống que diêm và thứ tự mỗi đống có 1, 2, 3 que diêm.

Rõ ràng là (1,1)* là vị trí giành phần thắng, điều này có thể chứng minh trực tiếp.

(2,2)* cũng là vị trí giành phần thắng. Nếu A sau khi lấy còn (2,2) thì dù cho B có ứng phó thế nào chăng nữa, A vẫn thắng (hình 17-1).

Cũng như vậy, (1, 2, 3)* cũng là vị trí giành phần thắng. Nếu A sau khi lấy còn (1, 2, 3) thì B có thể lấy các dạng như sau:



Hình 17.1

1. B lấy 1 ở đống thứ 1, còn (2, 3)
   A lấy 1 ở đống thứ 3, còn (2, 2)*, thắng.
2. B lấy 1 ở đống thứ 3, còn (1, 2, 2)
   A lấy 1 ở đống thứ 1, còn (2, 2)*, thắng.
3. B lấy 1 ở đống thứ 2, còn (1, 2, 3)*
   A lấy 3 ở đống thứ 3, còn (1, 1)*, thắng.
4. B lấy 2 ở đống thứ 2, còn (1,3)
   A lấy 2 ở đống thứ 3, còn (1, 1)*, thắng.
5. B lấy 2 ở đống thứ 3, còn (1, 2, 1)
   A lấy 2 ở đống thứ 2, còn (1, 1)*, thắng.
6. B lấy 3 ở đồng thứ 3, còn (1,2)
   A lấy 1 ở đống thứ 2, còn (1,1)*, thắng.

Tiếp tục phân tích như vậy thì có thể biết là (n, n)* đến (1,2n, 2n + 1)* đều là những vị trí giành phần thắng.

Vậy nói chung, ở vị trí nào mới giành phần thắng? Quá trình tìm câu trả lời đương nhiên là rất vất vả, song bạn đọc không phải tìm theo con đường quanh co như vậy, các nhà toán học đã chứng minh cho ta cách giành phần thắng.

Ta viết số que diêm của mỗi đống thành hàng theo quy tắc của hệ đếm nhị phân. Có bao nhiêu đống que diêm thì có bấy nhiêu số hiệu hệ đếm nhị phân.

Ví dụ (2,2) ; (1,2,3) ; (3,6,7) ; (4,5,6,7) có thể viết tương ứng thành:

1	0
1	0
Chẵn	Chẵn

	1
1	0
1	1
Chẵn	Chẵn

	1	1
1	1	0
1	1	1
Chẵn	Lẻ	Chẵn

1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1
Chẵn	Chẵn	Chẵn

Viết số que diêm trong các đống theo hàng (ngang), cộng các cột (dọc) và viết kết quả theo chẵn hoặc lẻ (chẵn: số lượng số 1 chẵn, lẻ: số lượng số 1 lẻ).

Nếu được kết quả toàn chẵn thì trạng thái tương ứng của các đống diêm được gọi là trạng thái chính xác. Các nhà toán học cho ta biết rằng, trạng thái chính xác là vị trí giành phần thắng, trạng thái không chính xác là vị trí thua.

18. Máy tính điện tử làm được những gì?

Bàn tính là tổ tiên của máy tính. Sự phát minh ra bàn tính là niềm tự hào của loài người. Bàn tính được người Babilon phát minh từ khoảng 3000 năm trước Công nguyên. Bàn tính đầu tiên là một tấm bảng gỗ được rải cát mịn, trên đó các con số được viết lên, nên có tên là abaque (bụi), về sau có dạng "bàn tính gảy" như ngày nay.

Bàn tính gảy xuất phát từ ý tưởng khi người tù trưởng dùng cành cây xuyên qua các đốt xương sống thú vật phơi khô để đếm số thú săn được và số người cần được chia thức ăn. Bàn tính gảy là những que tre hoặc gỗ (về sau là sắt) xuyên qua các hòn bi và đóng thành khung. Bàn tính gảy cho phép thực hiện được các phép cộng, trừ, nhân khá nhanh, làm được cả chia và khai căn bậc 2. Tất nhiên nó chỉ thích hợp với các tính toán đơn giản và có khối lượng nhỏ.

B.Pascal

Có tới mấy nghìn năm bàn tính đã từng là công cụ tính toán tiên tiến, song mỗi lần gạt con tính để tính toán thì đều do bộ não của người làm tính chỉ huy.

Năm 1642, (lúc 19 tuổi) nhà toán học Blaise Pascal (19.6.1623 - 19.8.1662) người Pháp đã phát minh ra *máy tính số học* đầu tiên, đó là chiếc máy tính mang tên Pascalin. Phát minh này chưa phải là phát minh quan trọng nhất của ông nhưng có ý nghĩa mở đầu cho một loạt máy tính mà người ta thường gọi là *máy tính cơ điện*.

Phát minh của B.Pascal là món quà của một người con hiếu thảo, muốn đỡ công sức cho người bố khi kiểm tra sổ sách thu thuế. Chiếc máy này gồm hàng loạt các bánh răng cưa liên kết mà thành, hoạt động theo nguyên lý như công-tơ-met của xe máy, ôtô và thực hiện được các phép tính cộng trừ. Hiện còn 5 máy tính loại này đang được trưng bày tại Bảo tàng Nghệ thuật và nghề nghiệp Paris và vài nước khác.

Cũng trong thời gian này, W. Shickard người Đức cũng chế tạo được máy tính số học, gọi là đồng hồ tính toán. Máy tính này thực hiện được các phép tính số học và khai căn.

Năm 1667 nhà toán học G.W.von Leibniz đã cải tiến chiếc máy tính Pascalin để có thể thực hiện được các phép tính số học.

Năm 1671, G.W.von Leibniz và năm 1673 Samuel Morland (1625 - 1695, người Anh) đã phát minh ra *máy tính số học cải tiến* (trong đó có công của Pafnutinvovits Chebyshev (16.5.1821 - 8.12.1894). Ngày nay loại này tính này được sử dụng rộng rãi dưới dạng quay tay hoặc có nút bấm.

Máy tính tương tự được chế tạo vào đầu thế kỷ XIX, làm việc trên nguyên tắc của von kế và ampe kế, sử dụng các toán tử hoạt động tương tự với các đại lượng cần mô hình hóa. Sự tương tự sử dụng là tương tự điện.

Năm 1820, Thomas de Colmur, mặc dầu không biết đến công trình của G.W.von Leibniz, đã biến một loại máy tính của G.W.von Leibniz thành một loại khác có thể làm được các phép tính số học. Đây chính là nguyên mẫu của hầu hết các máy tính thương mại được chế tạo trước năm 1875 và nhiều máy khác.

Nhược điểm của các loại máy tính cơ điện là không chuyển tiếp được từ phép tính này sang phép tính khác một cách tự động, mà phải do người sử dụng tác động.

Sacle Babet người Anh đã áp dụng nguyên tắc "bìa đục lỗ" ở máy dệt tự động điều khiến bằng số[1], do nhà công nghiệp I. M. Jacquard (1752 - 1834) người Pháp phát minh năm 1804 để nghiên cứu *máy tính tự động* và năm 1822 mô hình chiếc máy này đã được thực hiện, nó có thể làm được 60 phép tính số học với những số có 50 chữ số trong 1 giây. Hiện chiếc máy này đang được trưng bày tại Bảo tàng Khoa học London (Anh).

Năm 1812 nhà toán học Charles Babbage (1792 - 1871) người Anh đã nghĩ đến việc làm ra chiếc máy tính để giúp cho việc tính toán. Ông đã khước từ hàm giáo sư Lucas ở Cambridge để dồn sức vào việc này và bỏ ra hết tài sản riêng để làm chiếc *máy tính sai phân* nhưng vì kinh phí hạn hẹp nên phải dừng lại để

Ch.Babbage

(1) Loại máy dệt này trước đây có ở Nhà máy Dệt Nam Định.

làm chiếc *máy tính phân tích* có thể tự động thực hiện các phép tính số học. Chiếc máy tính này cũng không được hoàn tất do lúc đó chưa có các công cụ chính xác cần thiết. Như vậy, sau gần 60 năm dồn hết sức lực và tiền của để thực hiện mơ ước nhưng cuối cùng ông phải chết trong nỗi thất vọng!

Năm 1875, Frank Stephen Baldwin (1838 - 1925) người Mỹ đã được cấp bằng phát minh cho chiếc *máy tính thực hành* đầu tiên có thể thực hiện được các phép tính số học và năm 1878, Willgodt Theophile Odhmer người Thụy Điển cũng đã nhận được bằng phát minh của Mỹ về chiếc máy rất giống với chiếc máy của F.S.Baldwin.

Máy tính chạy điện do nhà thống kê H. Hollerith (1860 - 1929) người Mỹ đã kết hợp hệ thống bìa đục lỗ ở máy dệt tự động "Jacquard" và các phát minh điện tử để chế tạo ra và được dùng vào việc tính toán điều tra dân số năm 1890. Chính ông là người đã tham gia lập ra Hãng tính toán lập bảng và ghi chép vào năm 1911, tiền thân của Hãng máy tính IBM.

Năm 1937, Alan Mathison Turing (1912 - 1954) người Hungari sống ở Anh đã cho ra đời *máy tính Turing ảo*, đó là tiền đề cho máy tính cơ học sau này. Ông là nhà toán học thứ hai được Times bầu chọn trong 100 nhân vật có ảnh hưởng nhất cho sự phát triển nhân loại ở thế kỷ XX (sau Kurt Gödel (28.4.1906 - 14.1.1978). Tuy vậy, ông đã tự kết liễu đời mình mà không ai biết vì lý do gì.

A.M.Turing

Máy tính nhị phân đầu tiên được nhà toán học G. R. Stibitz chế tạo năm 1939 với tên là máy tính rơle mẫu 1 hoặc máy tính số phức tạp. Đây là một thiết bị logic mà các dữ liệu đầu ra biểu thị tổng của các dữ liệu đầu vào. Trong máy tính này đã sử dụng những rơle điện hoạt động theo kiểu "tất cả" hoặc "không có gì", tức là sử dụng hai số 0 và 1.

Máy tính điện cơ đầu tiên ra đời năm 1943 tại Anh và được gọi là Colossus. Máy tính này được A.M.Turing khởi xướng, có thể xử lý được 5000 ký tự trong 1 giây và được quân đồng minh dùng để giải mật mã của Đức trong Chiến tranh thế giới lần thứ II.

Máy tính có chương trình ghi sẵn đầu tiên được H. H. Aiken người Mỹ chế tạo năm 1944 theo nguyên lý của Ch.Babbage đưa ra năm 1835, đó là chiếc máy tính liên doanh giữa Trường đại học Harvard và Hãng máy tính IBM theo hợp đồng của Bộ Hải quân Mỹ, gọi là máy tính Harvard Mark 1 hoặc máy tính điều khiển tuần tự tự động IBM (ASCC).

Máy tính điện tử vạn năng đầu tiên được J. W. Mauchli và J.P. Eckert người Mỹ giới thiệu năm 1946 với tên gọi ENIAC do yêu cầu cấp thiết của quốc phòng và sau đó phát triển để giải quyết các bài toán về năng lượng nguyên tử và tính toán quỹ đạo các thiên thể. Đây cũng là hậu sinh của máy tính phân tích của Ch. Babbage. Các máy tính này hiện còn được lưu giữ ở Washington D.C.

Máy tính IBM đầu tiên được John von Newmann (3.12.1903 - 8.2.1957) người Mỹ đưa ra ngày 24-1-1948, đó là IBM SSEC chiếm diện tích 170m^2, nặng tới 30 tấn, làm việc theo nguyên lý của Ch.Babbage đưa ra năm 1835, có khả năng thực hiện được phép cộng với 3500 số có 14 chữ số trong 1 giây. Máy tính này còn gọi là máy tính "tuần tự" hay

J.von.Newmann

máy tính Newmann có chương trình ghi sẵn (được lưu trong bộ nhớ và do đó có thể dễ dàng sửa chữa hoặc thực hiện lại) và tiến trình thực hiện tuần tự (một thiết bị "trung tâm" duy nhất lần lượt thực hiện các phép toán nhưng mỗi lần chỉ một phép tính).

Cray I là siêu máy tính thương mại đầu tiên, ra đời năm 1976 dưới sự chỉ đạo của S. Cray, bao gồm 0,2 triệu mạch tích hợp, có thể thực hiện 150 triệu phép tính trong 1 giây.

Cray X - MP là siêu máy tính ra đời năm 1982, do S. Cheng người Đài Loan di cư sang Mỹ thiết kế, bán được nhiều nhất.

Siêu máy tính Cyber 205 của Hãng CDC đã vượt các siêu máy tính Cray, với 700 triệu phép tính trong 1 giây, nhưng sau đó, năm 1986, Cray 2 đã được cải tiến và nâng lên 1,6 tỷ phép tính trong 1 giây. Sau đó 1 năm, năm 1987, ETA 10 (cũng của Hãng CDC), với 10 tỷ phép tính trong 1 giây. Đến năm 1993 lại ra đời siêu máy tính với 100 tỷ phép tính trong 1 giây. Ủy ban Năng lượng nguyên tử Pháp đã trang bị máy tính Compaq với 1000 tỷ phép tính trong 1 giây.

Đầu năm 1988, Hãng Cray cho ra đời siêu máy tính Cray Y - MP tuy khả năng chỉ thực hiện được 2 tỷ phép tính trong 1 giây nhưng cho phép thực hiện các mô phỏng phức tạp trong ba chiều nên đã làm các nhà sinh học, khí tượng học, hóa chất,... quan tâm.

Ngày nay máy tính đã làm được rất nhiều việc, kể cả giúp cho thầy thuốc khám và chữa bệnh, biết đọc sách và chứng minh được hàng trăm định lý in trong các sách toán cao cấp, làm thơ, viết nhạc, viết kịch, chơi cờ,...

Máy tính Deev Blue của Hãng máy tính IBM với 50 tỷ phép tính trong 1 giây, đã từng đánh thắng (giữa năm 1998) nhà vô địch cờ vua thế giới Garri Caxparov người Nga.

Brutus I là máy tính có thể tự viết những câu chuyện dài tới 500 từ tiếng Anh. Đây là công trình nghiên cứu trong hơn

10 năm của Bringsjord và David Ferracci ở Trung tâm nghiên cứu Watson của Hãng máy tính IBM. Họ đã đặt tên cho "nhà văn máy tính" này theo tên của Marcus Brutus - kẻ đã phản bội và giết hại nhà độc tài Julins Caesar người La Mã năm 44 trước Công nguyên. Bringsjoird đã cài đặt cho máy tính các khái niệm bịa truyện dưới hình thức toán học. Đây là chiếc máy tính bịa truyện tiên tiến nhất thế giới hiện nay, nó còn được mệnh danh là "Silicon Hemingway"[1]. Máy tính này làm việc trên nguyên tắc của trí thông minh nhân tạo, suy luận logic, toán học, cấu trúc truyện, văn xuôi sáng tác và cấu trúc ngữ pháp.

Cuối tháng 12-1999, Hãng máy tính IBM đã tuyên bố chế tạo siêu máy tính Blue Gene (B.G) với 1 triệu tỷ phép tính trong 1 giây.

Mới đây, Cozwile (chuyên gia công nghệ thông tin) đã tiên đoán: "Trong 50 năm tới, máy tính sẽ thông minh hơn người, đó là sự kết hợp giữa não người vào "não điện", sẽ tạo ra trí tuệ siêu cấp, siêu thông minh". Tuy vậy, khả năng chế tạo thành công một bộ não nhân tạo còn phụ thuộc vào lời giải của một bài toán lớn đang đặt ra cho các chuyên gia thần kinh: Bộ não con người mã hóa thông tin như thế nào?

Đối với máy tính, ngoài việc phấn đấu để tăng khả năng tính toán, còn nhiều hướng được quan tâm, ví dụ dễ khai thác, giá thành hạ, kích thước gọn,... Ngoài cấu trúc song song đang được sử dụng thịnh hành, người ta đang nghiên cứu những cấu trúc mới, chủ yếu là làm cho máy hợp với trí tuệ nhân tạo.

Chiếc máy tính điện tử dùng đa mạch quy mô lớn, hàng triệu linh kiện và hàng triệu bộ nhớ cao tốc được chế tạo sau này có kích thước như bao diêm. Bộ nhớ của máy tính điện tử hiện

(1) Ernest Hemingway (21.7.1899 - 2.7.1961) là nhà văn nổi tiếng người Mỹ, được giải thưởng Nobel văn học năm 1954.

đại là mô hình từ, các thông tin được lưu giữ trong băng từ hoặc đĩa từ. Khi một điểm nào đó được từ hóa thì ghi số 1, điểm chưa từ hóa thì ghi số 0. Như vậy hệ đếm nhị phân đã trở thành ngôn ngữ lý tưởng của máy tính.

Tốc độ tính toán của máy tính đã được nói ở mục 14 "Kỳ tích chưa từng có trong lịch sử toán học". Tuy vậy, người ta vẫn liên tục nghiên cứu cải tiến máy tính để sử dụng ngày càng rộng rãi và tinh xảo hơn. Nó có thể ghi nhớ, tính toán, phán đoán, so sánh, thậm chí có thể phân biệt. Nhưng thực chất máy tính chỉ là mô phỏng sự suy nghĩ của bộ não con người, nó chỉ thực hiện theo sự sắp xếp của con người. Việc thử nghiệm bắt chước tư duy của con người thì máy tính hiện nay vẫn còn như đứa trẻ, muốn trở thành người lớn phải phấn đấu vất vả.

Các thế hệ máy tính được xác định theo loại linh kiện sử dụng:

- Thế hệ đầu tiên, ra đời ở Mỹ, dùng đèn điện tử chân không. Loại máy này xuất hiện từ năm 1946 đến năm 1954 (có tài liệu nói là đến năm 1958), có khối lượng lớn, tốn năng lượng, tốc độ tính toán khoảng 1000 phép tính trong 1 giây.

- Thế hệ thứ hai, dùng tranzito và mạch in, xuất hiện từ năm 1955 đến năm 1964.

- Thế hệ thứ ba, dùng mạch tích hợp (SI), xuất hiện từ năm 1965 đến năm 1975 (có tài liệu nói là đến năm 1977), cho phép giảm kích thước, giảm giá thành đáng kể, tốc độ tính toán khoảng 100 triệu phép tính trong 1 giây.

- Thế hệ thứ tư, dùng mạch tích hợp cỡ rất lớn (VLSI), xuất hiện sau năm 1975, cho phép cài đặt nhiều chức năng phức tạp trên một mạch nên giảm được kích thước đến mức rất nhỏ, tốc độ tính toán lên đến vài trăm triệu phép tính trong 1 giây, làm cho giá thành càng hạ, sử dụng rộng rãi hơn. Có tài liệu còn chia thế hệ này ra hai loại:

1987 - 1983, dùng mạch tích hợp cỡ lớn (ISI)

1984 - sau đó, dùng mạch tích hợp cỡ cực lớn (VLSI).

- Thế hệ thứ năm, dùng tấm quang (Mỹ) hoặc vi tấm (Nhật Bản) có khả năng tập trung những ưu điểm tốt nhất của kỹ thuật điện tử và quang tử, đó là máy tính quang tử, ra đời năm 1986.

Thế hệ thứ sáu, gọi là máy tính phân tử hay máy tính sinh học, dùng phân tử protien, được chế tạo bằng kỹ thuật sinh học, lấy các phân tử protein để chế tạo các tấm sinh học thay cho các tấm silic hiện đã đạt tới giới hạn cao nhất của lý thuyết. Do phân tử protein nhỏ hơn rất nhiều so với linh kiện điện tử lắp trên tấm silic nên mật độ tập trung linh kiện có thể đạt tới 10^{15} - 10^{18} linh kiện trên 1 cm^2.

Một câu hỏi thú vị được đặt ra là: Dùng máy tính có tốt không?

Tất nhiên là tốt rồi, nhất là khi khối lượng tính toán lớn hoặc là đơn thuần chỉ là tính toán... thì máy tính chính là trợ thủ đắc lực, vì nó tính nhanh, chính xác. Đối với những người bán hàng, người nội trợ,... chỉ cần máy tính cầm tay, ấn mấy cái là cho kết quả, thật là tiện lợi! Chính nhờ đó mà máy tính được người ta hoan nghênh và được sử dụng rộng rãi.

Tuy vậy, đối với học sinh phổ thông đang cần phát triển trí tuệ, cần luyện tập trí não thường xuyên thì việc dùng máy tính sẽ không tốt bằng dùng bàn tính hoặc tính nhẩm, tính bằng bút trên giấy. Bởi vì, khi dùng máy tính thì học sinh không phải động não, không học tập được gì về quá trình tính toán. Điều này thật nguy hiểm, vì sẽ tạo cho học sinh trở thành lười, thậm chí còn trở thành đần độn!

Cho nên, đối với học sinh trung học, trường hợp bất đắc dĩ mới dùng máy tính.

Về tốc độ tính toán của máy tính thì khỏi phải bàn, tuy vậy một số trường hợp thì tính bằng máy chưa chắc đã nhanh hơn, chẳng hạn khi tính:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{999\times 1000} \qquad (18\text{-}1)$$

thì nếu dùng máy tính sẽ tốn nhiều thời gian đưa số liệu vào, nếu tính bằng tay thì (18-1) có thể viết là:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{1000}=1-\frac{1}{1000}=0{,}999.$$

Cần lưu ý là, để giúp tính toán thuận lợi, bạn cần nhớ các công thức toán học quan trọng, bình phương các số và một số số quan trọng như: $\pi \approx 3{,}14159$;

$\sqrt{2} \approx 1{,}41421$ $\qquad$ $\sqrt{3} \approx 1{,}73205$

$\log 2 \approx 0{,}3010$

$\lg 3 \approx 0{,}4711,\ldots$

Dùng máy tính có thể chứng minh được các định lý hình học. Bởi vì, đối với việc chứng minh này thì không có một khuôn mẫu nào cả, mà đòi hỏi phải linh hoạt, tùy cơ ứng biến. Do vậy, người ta luôn nghĩ cách biến chứng minh hình học thành chứng minh một cách máy móc. Nhà toán học René Descartes (31.3.1596 - 11.1.1650) người Pháp đã phát minh ra phương pháp tọa độ, lập lên môn hình học giải tích như đã đề cập đến ở Tập Hai của bộ sách này. Đây là bước đột phá

R.Descartes

đầu tiên vào nguyện vọng này. Dùng phương pháp tọa độ ta có thể biến bài toán hình học thành bài toán đại số, nhưng còn vấn đề biến bài toán chứng minh hình học thành phép tính thì sao? Từ khi máy tính xuất hiện đến nay, các nhà toán học đã rất thích thú với ý tưởng "cơ giới hóa phương pháp chứng minh".

Năm 1977 giáo sư toán học nổi tiếng Ngô Văn Tuấn người Trung Quốc đã công bố công trình nghiên cứu về vấn đề này và được thế giới đánh giá cao, người ta gọi là "phương pháp Ngô" (Ngô pháp), được ông viết trong cuốn "Nguyên lý cơ bản của phương pháp chứng minh định lý hình học một cách máy móc" xuất bản năm 1984).

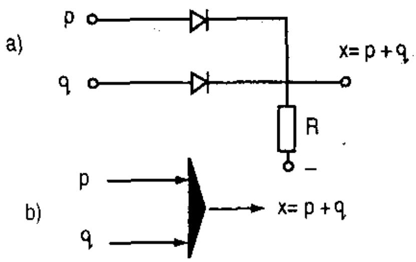
19. "Tế bào não" của "máy tư duy"

Khi người ta phát hiện ra các quy luật của tư duy và nhất là sau khi đã diễn đạt được các quy luật đó bằng những biểu thức toán học chính xác, các nhà toán học đã cộng tác với các nhà kỹ thuật thiết kế các "máy tư duy" thể hiện được các quá trình tư duy đó. Ra đời đầu tiên của loại máy này là các *máy thủy lực*, tức là các máy hoạt động dựa trên nguyên tắc sử dụng các chất lỏng (thủy). Máy thủy lực gồm các van bố trí theo trình tự nhất định, mỗi van thực hiện một trong hai trạng thái tắt (ứng với mệnh đề sai), bật (ứng với mệnh đề đúng).

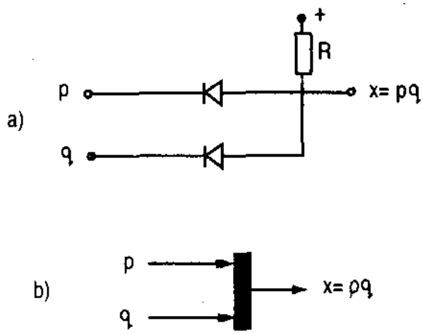
Nếu thay các van bằng các công tắc điện và thay các ống nối chất lỏng bằng dây dẫn điện thì sẽ được *máy điện*. Các mạch điện trong máy điện được gọi là các cấu kiện logic.

Trong mục 15 "Tính toán của người ngoài hành tinh" ta đã biết rằng có thể "cộng" (tổng logic), "nhân" (tích logic), phủ định,... các mệnh đề bằng các cấu kiện logic. Các cấu kiện logic chính là "tế bào não" của "máy tư duy". Có ba loại "tế bào não" cơ bản gọi là "cửa vào", "cửa lưu" và "cửa trống" cấu tạo từ các đèn bán dẫn.

Tương tự như hình 15-2 ta có sơ đồ "cửa vào" là cấu kiện logic có công năng tổng logic (phép tuyển) như hình 19-1. Hình 19-1a là sơ đồ đường điện "cửa vào" được tạo thành từ đèn hai cực đặt cùng chiều. Do đèn hai cực có đặc tính là dẫn điện một chiều nên khi được đặt cùng chiều (theo chiều mũi tên) và đầu vào đều là điện thế thấp (p = 0, q = 0) thì đầu ra mới có điện thế thấp, tức là x = p + q = 0.



Hình 19-1



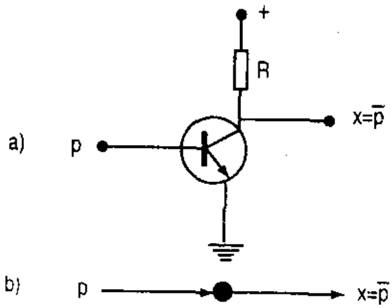
Hình 19-2

Hình 19-1b là sơ đồ công năng của "cửa vào".

Tương tự như hình 15-3 ta có sơ đồ "cửa lưu" là cấu kiện logic có công năng tích logic (phép hội) như hình 19-2. Hình 19-2a là sơ đồ đường điện "cửa lưu" được tạo thành từ đèn hai cực đặt ngược chiều. Từ kiến thức điện học ta biết rằng chỉ có đầu vào đều là điện thế cao (p = q = 1) thì điện trở R mới không giảm điện áp, do đó đầu ra mới giữ mức điện thế cao, tức là x = pq = 1.

Hình 19-2b là sơ đồ công năng của "cửa lưu".

"Cửa trống" là cấu kiện logic có công năng phủ định (phép phủ định). Hình 19-3a là sơ đồ đường điện "cửa trống" được tạo thành từ đèn ba cực, đầu vào p, đầu ra x. Nếu p = 1 thì x = 0; nếu p = 0 thì x = 1. Khi đầu vào không có điện thế, tức là p = 0 thì trong đèn ba cực không có điện chạy qua, thế là đầu ra có điện thế bằng điện cực tụ, tức là x = 1. Ngược lại, khi có điện thế cao, tức là p = 1, trong đèn ba cực có điện chạy qua, điện thế đầu ra giảm xuống, do đó x ngược dòng điện với p, ta có $x = \overline{p}$.



Hình 19-3

Hình 19-3b là sơ đồ công năng của "cửa trống".

Sau đây chúng ta xem "tế bào não" của "máy tư duy" phối hợp làm việc ra sao?

Ví dụ, với một phép tuyển đơn giản: đặt p và q là số cộng cho vào và số được cộng vào; x và y là kết quả đầu ra. Không còn nghi ngờ gì nữa, x và y đều biểu thị dạng cấu kiện logic của p và q. Trên thực tế chúng ta có (bảng 19-1):

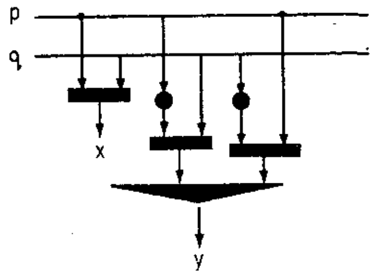
Bảng 19-1

p	q	x	y
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

$$\begin{cases} x = pq\,; \\ y = p\overline{q} + \overline{p}q. \end{cases}$$

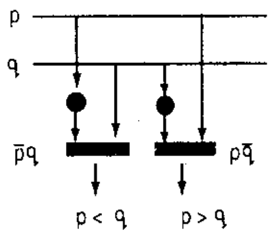
$$\begin{array}{c} p \\ +\ q \\ \hline x \Rightarrow y \end{array}$$

Cách tìm dạng cấu kiện logic vừa nêu có chút kỹ xảo, ở mục sau chúng ta sẽ bàn về điều này. Ở đây chúng ta giả định đã biết dạng cấu kiện logic.



Hình 19-4

Dựa vào dạng cấu kiện logic, chúng ta có thể vẽ được sơ đồ công năng (hình 19-4). Cách lắp đặt này thường gọi là "nửa phép tuyển".



Hình 19-5

Sau đây chúng ta xem "tế bào não" của "máy tư duy" đã phán đoán hai số "to", "nhỏ" ra sao?

Giả sử giá trị điện thế cao nhất của hai số của hệ đếm nhị phân là p và q. Từ sơ đồ công năng ở hình 19-5 bạn đọc dễ nhận ra là khi $\bar{p}q$ có tín hiệu vào thì $p < q$, khi $p\bar{q}$ có tính hiệu ra thì $p > q$.

Nếu hai đầu đều không có tín hiệu ra thì chuyển vào so sánh điện thế cao thứ hai.

Bạn đọc thử thiết kế lắp đặt một bộ có ba số cộng với nhau. Lắp đặt như vậy gọi là "phép tuyển hoàn toàn". Trong bộ phận tính toán của máy tính điện tử thì cách lắp đặt này được dùng rộng rãi. (*Gợi ý*: Chia làm hai lần sử dụng dạng logic và kết cấu của "nửa phép tuyển").

20. Đường điện bật - tắt với "lắp đặt tự động"

"Lắp đặt tự động" dường như là một cụm từ mà người đời rất mê. Lắp đặt tự động là một loại xử lý tín hiệu có khả năng tiếp thu, xử lý và tiếp tục đưa tín hiệu. Xét từ ý nghĩa này thì những "cấu kiện logic" của "cửa vào", "cửa lưu" và "cửa trống" bản thân nó vốn là một loại "lắp đặt tự động" giản đơn nhất. Bởi vì, nó có thể đưa tín hiệu chuyển vào, sau đó thay đổi theo những quy luật nhất định rồi chuyển ra.

Điều chúng ta quan tâm tới là, làm sao để thông qua giá trị logic của mệnh đề phức tạp mà thiết kế ra một loại "lắp đặt tự động" thực hiện nó. Sau đây là một ví dụ sinh động thường gặp:

Một ngôi nhà 2 tầng, cầu thang có lắp đèn chiếu sáng. Ở chân cầu thang lắp công tắc p, hành lang tầng 2 lắp công tắc q. Yêu cầu là bất cứ ấn công tắc nào cũng đều biến đổi trạng thái bật - tắt của đèn được. Giả sử lúc đầu công tắc p, q chưa tiếp nối, đèn chưa sáng, nay một người cần chiếu sáng để lên tầng 2, bật công tắc p thì đèn sáng. Lên tầng 2 rồi, để tiết kiệm điện, người đó tắt công tắc q để tắt đèn. Người khác lại muốn lên tầng 2, lại bật công tắc p và đèn lại sáng,... Hỏi nên thiết kế đường điện - công tắc thế nào để phù hợp với yêu cầu vừa nêu?

Gọi x là mệnh đề phức tạp gồm hai mệnh đề đơn giản p, q mà phù hợp với yêu cầu vừa nêu, ta dễ dàng liệt kê ra được bảng 20-1. Để thiết kế một loại lắp đặt khiến nó có thể thực hiện được các yêu cầu vừa nêu, trước hết ta hãy làm rõ mệnh đề phức tạp này. Căn cứ vào bảng giá trị logic của mệnh đề phức tạp, bằng một số kỹ xảo, ta có thể xác định được dạng "cấu kiện logic". Kỳ thực loại kỹ xảo này chẳng khó khăn lắm, nó có thể tóm tắt lại bằng bốn câu:

Viết ra tất cả tích

So sánh, cuối hàng 0.

Thay vào giá trị thật

Vứt bỏ tích bằng 1.

Câu đầu tiên nghĩa là, viết ra tích của tất cả mệnh đề đơn giản và dạng phủ định của chúng. Do mỗi mệnh đề đơn giản trong tích đều có hai trạng thái (mệnh đề gốc và mệnh đề phủ định), vì thế nếu số mệnh đề là n thì tích có tất cả 2^n số hạng.

Ví dụ, nếu có hai mệnh đề đơn giản p, q thì tích của nó có tất cả $2^2 = 4$ số hạng:

$$pq, p\overline{q}, \overline{p}q, \overline{p}\,\overline{q}.$$

Bảng 20-1

p	q	x
1	1	0*
1	0	1
0	1	1
0	0	0*

Câu thứ hai nghĩa là, trong các tích của các mệnh đề thì nên lấy hay bỏ tích nào. Mấu chốt là ở chỗ, "so sánh cuối hàng 0", là chỉ đầu ra của những hàng có số 0 ở cuối, như trong bảng giá trị logic có dấu * ở hàng 1 và hàng 4 trong bảng 20-1.

Tiếp theo, lần lượt đưa vào các số hạng (các tích) từng bộ các giá trị logic của các mệnh đề đơn giản có mặt ở mỗi hàng 0, rồi tính giá trị logic tương ứng của các số hạng. Nếu giá trị logic tính được của số hạng nào đó là 1 thì phải vứt bỏ số hạng đó đi, cộng (tuyển) các số hạng còn lại (có giá trị logic bằng 0) với nhau, ta được dạng "cấu kiện logic" x cần tìm.

Với ví dụ nêu trên, khi thay các giá trị logic của p, q ở hàng có dấu * trong bảng 20-1 vào các số hạng, ta có:

1. Khi $p = 0$, $q = 0$, $\overline{p}\,\overline{q} = 1$ thì vứt bỏ $\overline{p}\,\overline{q}$.

2. Khi $p = 1$, $q = 1$, $pq = 1$ cũng vứt bỏ pq.

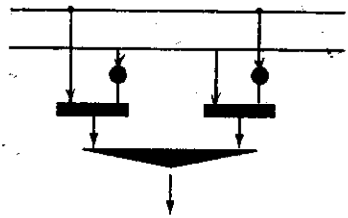
Như vậy trong bốn số hạng chỉ giữ lại $\overline{p}q$ và $p\overline{q}$, tức là ta được:

$$x = \overline{p}q + p\overline{q} . \quad (20\text{-}1)$$

Hình 20-1 là sơ đồ công năng trong ví dụ này.

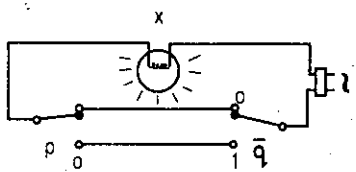
Hình 20-2 là sơ đồ đường điện - công tắc của "lắp đặt tự động" dạng này.

Từ mục 19 : "Tế bào não" của "máy tư duy" và phần đầu của mục này chúng ta biết được rằng, thiết kế "lắp đặt tự động" của mệnh đề phức tạp x, trên đại thể có thể chia ra năm bước sau đây:



$x = \overline{p}q + p\overline{q}$

Hình 20-1



Hình 20-2

1. Liệt kê bảng giá trị logic của mệnh đề phức tạp x

2. Xác định dạng logic và kết cấu của x

3. Giản hóa dạng logic của x

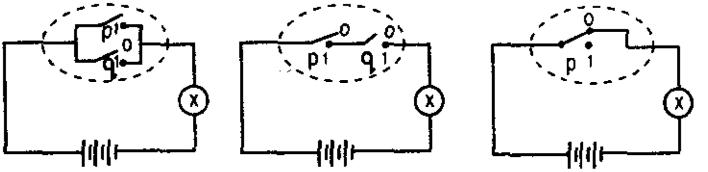
4. Vẽ sơ đồ công năng tương ứng

5. Chọn "cấu kiện logic" và xác định đường điện "lắp đặt tự động".

Việc bật và tắt công tắc có thể dùng để biểu thị mệnh đề, nhưng mệnh đề phức tạp có được thành lập hay không là do bóng đèn cho biết, đèn sáng biểu thị mệnh đề phức tạp được thành lập, đèn không sáng (tắt) biểu thị mệnh đề phức tạp không được thành lập.

Do đó, đôi khi đại số Boole các mệnh đề, còn gọi là "đại số công tắc" hay "đại số bật - tắt".

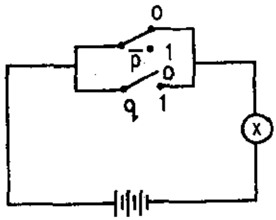
Sơ đồ đường điện "lắp đặt tự động" của "tế bào não" của máy tư duy như hình 20-3.



a) " Cửa vào" b) " Cửa lưu" c) " Cửa trống"

Hình 20-3

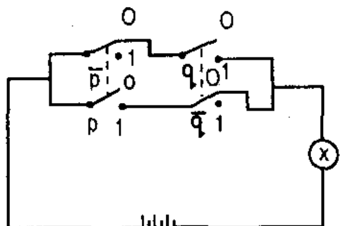
Tính chân thật của quan hệ $p \Rightarrow q$ (hay của $\overline{p} + q$) biểu thị "cửa trống" ($\overline{p}$) tuyển với q như hình 20-4.



Hình 20-4

Sử dụng sơ đồ ở hình 20-3 có thể căn cứ vào sơ đồ công năng để xác định đường điện "lắp đặt tự động" tương ứng. Với ví dụ đường điện - công tắc của đèn cầu thang nêu ở trên, ta có:

Số hạng đầu của vế phải (20-1) biểu thị *tích* logic $\overline{p}q$, tức là tích logic của "cửa trống" $\overline{p}$ và q. Tương tự như vậy với số hạng thứ hai, là *tích* logic của p và "cửa trống" $\overline{q}$. Do đó mệnh đề phức tạp x bao gồm cả hai trường hợp ở trên, thể hiện ở hình 21-5.



Hình 20-5

Hình 21-5 là sơ đồ đường điện - công tắc của đèn cầu thang trong ví dụ này.

Người tinh mắt có thể thấy được hình 20-5 và hình 20-2 thực tế là giống nhau (khoảng trống dây ở giữa công tắc chứng tỏ đồng thời thao tác).

Để bạn đọc tự thiết kế đường điện bật - tắt, chúng tôi nêu ra các câu hỏi tham khảo sau đây:

1. Thiết kế một thiết bị khống chế mực nước bể

2. Thiết kế một đường điện cho một đèn trong phòng với yêu cầu là chỗ cửa vào phòng, đầu hai giường đều có công tắc giật để ở cả ba vị trí đó đều có thể làm cho đèn này tắt - sáng

3. Thiết kế một thiết bị trọng tài ba người bỏ phiếu mà đa số đồng ý là được

4. Thiết kế một loại khóa điện bảo mật có ba nút bấm mà chỉ khi đồng thời ấn nút p, r thì khoá x mới mở, còn các tình huống khác sẽ có tiếng chuông báo động

5. Thiết kế một thiết bị tích logic có hai số theo hệ đếm nhị phân.

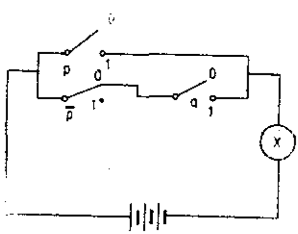
$$\begin{array}{r} P\ q \\ \times \quad r\ s \\ \hline x\ y\ z\ w \end{array}$$

Gợi ý:

1. Lắp các công tắc theo thứ tự mức nước cao rồi mức nước thấp q, p. Nước chưa đến mức thì có tín hiệu cho chảy và bơm x làm việc:

$$x = p + \overline{p}q.$$

Sơ đồ đường điện như hình 20-6.

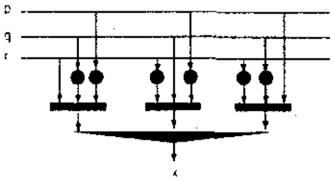


Hình 20-6

2. Lắp ba công tắc p, q, r thì:

$$x = \overline{p}\,\overline{q}\,r + \overline{p}\,q\,\overline{r} + \overline{p}\,\overline{q}\,r.$$

Hình 20 - 7 là sơ đồ công năng của đường điện này.



Hình 20-7

3. Đặt mệnh đề ba người bỏ phiếu là p, q, r thì:

$$x = pq + pr + qr.$$

4. Đặt y là mệnh đề phức tạp chuông báo động:

$$\begin{cases} x = p\overline{q}\,r \\ y = \overline{x} = \overline{p} + q + \overline{r}. \end{cases}$$

5.

$$\begin{cases} x = pqrs \\ y = p\overline{q}\,r + pr\overline{s} \\ z = \overline{p}\,qr + p\overline{q}\,s + p\overline{r}\,s + qr\overline{s} \\ w = qs. \end{cases}$$

21. Não người và "não điện"

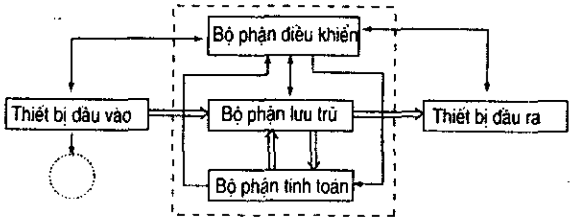
Sự phát minh ra máy tính điện tử là một trong những thành tự huy hoàng nhất của khoa học và kỹ thuật hiện đại. Máy tính điện tử không chỉ có khả năng tính toán phi thường và năng lực ghi nhớ siêu phàm, mà còn có thể bắt chước công năng tư duy của não người, cho nên nó có thể thay một phần lao động trí óc của con người, từ đó máy tính điện tử có tên gọi là "óc điện" hay "não điện". Nói chung máy tính điện tử gồm 5 bộ phận:

Ba bộ phận thuộc máy chính :

1. Bộ phận điều khiển
2. Bộ phận lưu trữ
3. Bộ phận tính toán

và hai bộ phân bên ngoài

4. Thiết bị đầu vào
5. Thiết bị đầu ra (hình 21-1).



Hình 21.1

Ngoài ra còn có bàn điều khiển.

Bộ phận điều khiển (còn gọi là *bộ xử lý trung tâm* hoặc *thiết bị trung tâm*) đóng vai trò "bộ não" của máy, nó là bộ phận chỉ huy mọi công việc của bốn bộ phận từ 2 đến 5. *Bộ phận lưu trữ* (còn gọi là *bộ nhớ* hoặc *bộ nhớ trung tâm*) để lưu trữ các chương trình, số liệu, kết quả trung gian, kết quả cuối cùng. *Bộ phận tính toán* (còn gọi là *bộ số học*) để thực hiện các phép tính. *Thiết bị đầu vào* (còn gọi là *bộ phận đưa thông tin vào máy* hoặc gọi tắt là *bộ nhập*) có bàn phím và phím từ. *Thiết bị đầu ra* (còn gọi là *bộ phận đưa thông tin ra ngoài*) có bàn hiển thị và máy chữ.

Hai phần chủ yếu để cấu thành một "cơ chế máy tính" là phần cứng và phần mềm.

Phần cứng chỉ toàn bộ máy tính, thiết bị để tạo nên phần "xương thịt" của máy tính. Sự phát triển của phần cứng được thể hiện bằng những thành tựu liên tiếp trên các mặt: thể tích máy, mức tiêu thụ điện, dung lượng bộ nhớ, tốc độ tính toán, công suất và giá thành của máy.

Phần mềm dựa trên sự kết hợp những tiên đề toán học logic, tập hợp phương tiện chương trình, đảm bảo cho máy hoạt động hiệu quả và cung cấp các dịch vụ tiện lợi để khai thác máy, tạo nên "phần hồn" của máy tính. Với những khả năng có được từ những cải thiện về phần cứng, phần mềm đã dựa vào những thông tin về cấu trúc thông tin và logic xử lý, trong đó có các ngôn ngữ, phương pháp luận, hệ điều hành.

Quá trình làm việc của máy tính tương tự như bàn tính. Mắt người và tai người tương tự như thiết bị đầu vào, những âm thanh và con số được nhập vào não. Thần kinh trung ương của não người chính là bộ phận điều khiển, nó chỉ huy tay gảy những con tính: bàn tính thì tương đương với bộ phận tính toán. Kết quả tính toán hoặc trực quan hiển thị hoặc dùng bút ghi lại hoặc đọc lên bằng miệng, tất cả những cái đó tương tự như bộ phận đầu ra. Những tư liệu và cách tính toán hoặc nhớ trong não hoặc dùng bút ghi lại. Bộ phận nhớ trong não và cuốn vở ghi thì tương tự như bộ phận lưu trữ.

Khi giải một bài toán thường có nhiều tình huống khác nhau, tùy theo một điều kiện nào đó được thực hiện hay không. Ví dụ bài toán tính lương cho cán bộ, nhân viên cơ quan, giả sử có hai loại: một loại là biên chế chính thức, một loại là hợp đồng tạm thời. Như vậy là có một phép suy luận logic, tức là dựa vào loại 1 hay loại 2 để quyết định tính toán theo một trong hai loại. Bài toán như trên gọi là bài toán rẽ nhánh. Nếu dùng máy tính cơ điện để tính thì đến chỗ thay đổi loại (rẽ nhánh) người tính nhất định phải xem cụ thể để quyết định theo cách nào, tức là cần sự hoạt động xen kẽ của người tính. Trái lại, nếu dùng máy tính điện tử thì việc chọn nhánh sẽ được giao cho máy và các quá trình tính toán được tự động hoá. Bộ phận tính toán của máy đã được trang bị những mạng điện để thực hiện các phép tính logic cần thiết. Ta chỉ còn phải lấy một chương trình có tính chất suy luận logic, trong đó bao gồm cả những lệnh thực hiện các phép tính và rẽ nhánh.

Máy tính điện tử có khả năng xử lý các văn bản nhưng đa số các bài toán kỹ thuật vẫn là tính toán trên các số.

Ba nhà khoa học Niuen, So và Xaimon đã lập ra những chương trình cho phép chứng minh định lý và chương trình vạn năng giải các bài toán. Phương pháp cho máy tính điện tử chứng minh định lý của Vương Hạo người Trung Quốc đã từng gây chấn động dư luận thế giới.

Chuyên gia nổi tiếng về máy tính Maccacti đã xây dựng được một hệ thống có khả năng sử dụng những suy luận có lý. Một số tác giả nghiên cứu cách suy luận của bộ não người để máy tính điện tử thực hiện chương trình theo mô hình đó. Một số tác giả khác lại cho máy tính điện tử tiến hành giải quyết các bài toán tương tự bằng các phương pháp riêng, không mô phỏng theo suy nghĩ của bộ não người.

Mặc dù xuất phát theo các phương pháp khác nhau như vậy nhưng người ta đã thu được các kết quả giống nhau.

Bộ phận điều khiển không phải là bộ não thông minh nên nó không thể ứng phó được một cách linh hoạt trước nội dung các bài toán khác nhau, mà chỉ là một cái máy chỉ huy việc thực hiện từng bước theo trình tự quy định do con người vạch ra.

Dựa vào bộ phận điều khiển, máy tính chỉ huy mọi công việc và điều chỉnh thông tin cả bộ máy. Nhưng rốt cuộc thì bộ phận điều khiển làm việc như thế nào? Vốn là nó phải dựa vào trình tự mà người ta đã lập ra: tính gì trước, tính gì sau? Cái gì so với cái gì? Gặp các tình huống nào thì xử lý ra sao?... Người ta đã đem những suy nghĩ trong não người và dùng thử ngôn ngữ máy tính có thể "lý giải" được ấy để biên soạn thành trình tự đầu vào máy, để máy có thể theo ý đồ của con người mà làm việc một cách chặt chẽ và chuẩn xác.

Mỗi loại máy tính có thứ ngôn ngữ "lý giải" riêng. Ví dụ, một loại máy tính sơ cấp và thông dụng trên thế giới có ngôn ngữ là ngôn ngữ cơ sở (BASIC). BASIC (Beginner's Allpurpose Symbolic Instruction Code) nghĩa là số hiệu chỉ lệnh các ký hiệu thông dụng cho người mới học (nó cũng có chút ý nghĩa là cơ sở, cơ bản).

Như trên đã nói, chương trình là một loại ngôn ngữ máy tính thể hiện các bước giải đề toán trong não người, do đó muốn soạn ra một chương trình (lập trình) trước hết hãy vạch ra "khung" các bước giải toán trong não người, sau đó mới theo yêu cầu của "khung" viết ra chương trình bằng ngôn ngữ máy tính.

Sau đây chúng ta hãy xem một ví dụ nổi tiếng trong toán học, đã có hơn 200 năm lịch sử:

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} - \ln n. \qquad (21\text{-}1)$$

Khi n rất lớn thì S_n tiến gần tới một hằng số C.

L.Euler đã phát hiện ra hằng số C này từ thế kỷ XVIII, do đó cũng gọi là hằng số Euler. Nhưng hằng số này là số hữu tỷ hay số vô tỷ? Câu hỏi thú vị này đã được loài người nghiên cứu hơn hai thế kỷ rồi mà tới nay vẫn là một sự thách thức!

Thế thì đại khái hằng số Euler là bao nhiêu? Chúng ta phải nhờ máy tính tính hộ. Giả sử n là 1000. Cách tính như sau:

$$S_n - S_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$$

$$- \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \ln(n-1)\right]$$

$$= \frac{1}{n} - \ln\frac{n}{n-1}$$

$$= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right). \qquad (21\text{-}2)$$

Từ (21-2) ta có:

$$S_n = S_{n-1} + \left[\frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]. \qquad (n \geq 2) \qquad (21\text{-}3)$$

Do đó ta được:

$$S_1 = 1 - \ln 1 = 1$$

$$S_2 = S_1 + \left[\frac{1}{2} + \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$S_3 = S_2 + \left[\frac{1}{3} + \ln\left(1 - \frac{1}{3}\right)\right]$$

. . . .

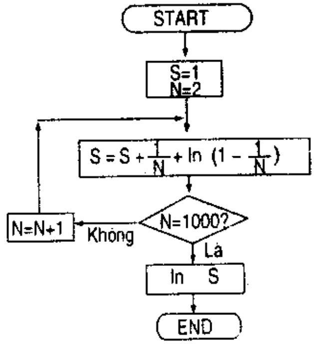
$$S_{1000} = S_{999} + \left[\frac{1}{1000} + \ln\left(1 - \frac{1}{1000}\right)\right].$$

"Khung" các bước giải toán như sau:

] LIST

10 S = 1 : N = 2

```
20 S = S + 1/N + log(1 - 1/N)
30 IF N = 1000 THEN 60
40 N = N + 1
50 GOTO 20
60 PRINT "C="; S
70 END
```



Dãy liệt kê ở trên là chương trình BASIC. Đưa chương trình này vào máy tính (ví dụ AppleII) có thể tính được:

$$C = 0{,}577215687.$$

Hằng số Euler C = 0,577216. Như vậy kết quả thu được nhờ máy tính gần như hằng số Euler đã có, có điều là nó chính xác hơn.

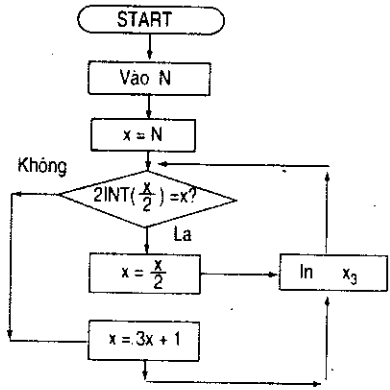
Sau đây là một vấn đề khiến người ta mê hoặc đã từng rộn lên một thời, nhiều người từng gắng sức nhưng đến nay vẫn chưa có được kết quả. Câu chuyện bắt đầu như thế này: vào những năm 1930 một học sinh người Đức đã phát hiện ra một hiện tượng kỳ lạ là nếu viết một số tự nhiên tùy ý, nếu là số lẻ thì nhân nó với 3 rồi cộng với 1, nếu là số chẵn thì đem nó chia cho 2. Làm nhiều lần như vậy thì thấy xuất hiện một hiện tượng lý thú tựa hồ như con số rơi vào "cạm bẫy", cuối cùng thì xuất hiện:

4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...

Vào những năm 1950 vấn đề này từng rộn lên ở Mỹ. Có một thời nhiều người ở Trường đại học Chicago và Trường đại học Ielu đã nghiên cứu vấn đề này, nhưng đều không có kết quả. Thậm chí có người đã nghĩ rằng, đây là "cái bẫy" thực sự kéo lùi tiến trình nghiên cứu toán học ở Mỹ. Vấn đề này ở Nhật Bản được gọi là "suy đoán Giacco", bởi vì do nhà toán học Giacco đưa về.

Chúng ta hãy để cho máy tính nghiệm chứng suy đoán này. "Khung" các bước giải toán như sau (hình 21-2):

```
]   LIST
10  INPUT N
20  X = N
30  IF X = 2 * INT (X/2)
    THEN 70
40  X = 3 * X + 1
50  PRINT " "; X; ",";
60  GOTO 30
70  X = X/2
80  GOTO 50
90  END
```



Hình 21-2

Liệt kê trên đây là chương trình BASIC tương ứng, có điều là nếu cho nó vào máy tính thì máy tính sẽ viết ra vô số... Ví dụ, N = 538, chúng ta có:

] RUN

? 538

269, 808, 404, 202, 101, 304, 152, 76, 38, 19,

58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40,

20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1,...

Để máy tính ngừng hoạt động chỉ có cách buộc nó dừng lại theo cách: dưới nút bấm vào ra chỉ lệnh $\boxed{\text{CTRL}}$ $\boxed{\text{C}}$.

Bây giờ ta hãy xem "não điện" bắt chước công năng tư duy của não người như thế nào?

Sau đây là một đề toán lý thú có liên quan đến thứ tự tên gọi. Những loại đề toán như vậy bạn đọc đã gặp trong mục 10: "Khéo giải loại toán logic khó".

Ba học sinh đã dự đoán thành tích thi toán của bốn bạn thi toán như sau:

- Khôi cho rằng: "An thứ 1, Bình thứ 3"
- Long cho rằng: "Cung thứ 1, Duy thứ 4"
- Minh cho rằng: "Duy thứ 2, An thứ 3".

So với kết quả cuộc thi thì mỗi người chỉ nói đúng một nửa. Bạn hãy sắp xếp thứ tự thành tích theo tên người.

Sau đây là chương trình BASIC của máy tính tạo thành ngôn ngữ logic (Để cho tiện, ta ký hiệu A - An, B - Bình, C - Cung, D - Duy).

```
10  FOR A = 1 TO 4
20  FOR B = 1 TO 4
30  IF A = B THEN 90
40  FOR C = 1 TO 4
50  IF C = A OR C = B THEN 80
60  D = 10 – A – B – C
70  IF (A = 1) + (B = 3) = 1 AND
    (C = 1) + (D = 4) = 1 AND
    (D = 2) + (A = 3) = 1
THEN PRINT "AN THU"; A, "BINH THU";
B, "CUNG THU"; C, "DUY THU"; D
```

```
80  NEXT C
90  NEXT B
100 NEXT A
110 END
```

Kết quả thực hiện là:

```
]RUN
An thứ 4, Bình thứ 3
Cung thứ 1, Duy thứ 2.
```

Như vậy thứ tự thành tích theo tên người như sau: 1 - Cung, 2 - Duy, 3 - Bình, 4 - An.

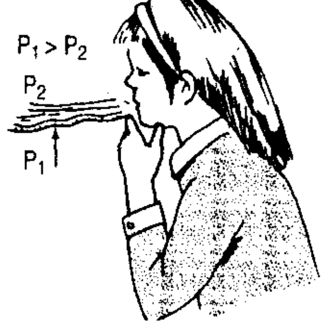
Trong chương trình ở trên chúng ta lợi dụng ba câu liên tục nhưng điều chủ yếu là sự thực hiện câu 70. Câu này yêu cầu khi A = 1 hoặc B = 3, C = 1 hoặc D = 4, D = 2 hoặc A = 3, ba điều kiện đều thỏa mãn rồi thì có thể cho in ra.

"Khung" các bước giải toán này ra sao? Bạn đọc cứ mạnh dạn lập ra. Chương trình ở trên là của một học sinh trung học ở Triết Giang (Trung Quốc) lập ra khi thực tập lập trình ngôn ngữ máy tính.

22. Kỹ thuật dòng xạ thần kỳ

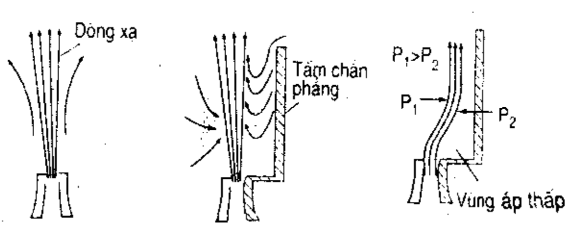
Trên vùng biển mù mịt, hai chiếc tàu thủy vùn vụt chạy với tốc độ nhanh dần rồi từ từ áp vào nhau. Khi hai thuyền trưởng phát hiện ra chuyện này thì đã quá muộn. Một tai nạn bi thảm nảy sinh! Đó là giấc mơ khủng khiếp chăng? Không, đó là sự thật. Những chuyện như vậy xảy ra trên biển không phải là hiếm. Chúng ta hãy xem hiện tượng sau đây:

Lấy một tờ giấy mỏng để một đầu kề miệng rồi thổi mạnh thì tờ giấy sẽ bay về phía trước, tựa hồ như có một sức mạnh đẩy từ dưới lên khiến tờ giấy không thể vì trọng lực mà rơi xuống ngay được.



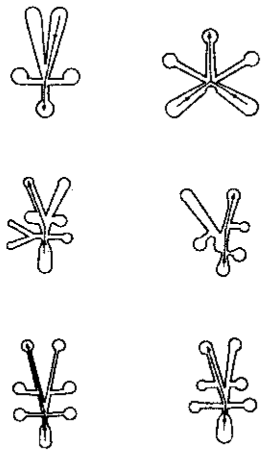
Đó là vì sao vậy? Nhà toán học Daniel Bernoulli (29.1.1700 - 17.3.1782) người Thụy Sĩ đã từng giải thích như sau: "Dòng cao tốc hình thành xung quanh tờ giấy một vùng áp thấp, tốc độ dòng càng cao thì áp lực càng thấp, độ lệch áp lực với bên ngoài càng lớn, độ lệch áp lực này có thể khiến các thứ gần đó ép xuống thể dòng". Đó là nguyên lý Bernoulli nổi tiếng về lực đối lưu đã học ở trung học. Ở trên đã nói về hai chiếc tàu thủy tự áp vào nhau, mảnh giấy bị đẩy và nhiều hiện tượng khác nữa đều là do nguyên lý này sinh ra.

Bây giờ chúng ta hãy tưởng tượng từ miệng thổi phun ra một dòng xạ cao tốc như tia nước bắn ra từ vòi phun. Dùng một tấm chắn phẳng đặt kề miệng thì nảy sinh một hiện tượng kỳ lạ: dòng xạ trước tiên bị lệch với tấm chắn rồi cuối cùng bám sát tấm chắn. Hình 22-1 là sơ đồ quá trình hiện tượng bức chắn xạ đặc biệt này.



Hình 22-1

Những năm 1960, cùng với sự phát triển của kỹ thuật tự động hóa, loài người đã nêu ra yêu cầu mới về thiết bị tự động hóa là cần chịu được nhiệt độ cao, chịu được áp suất cao, chịu được chấn động cao, không bị điện từ làm nhiễu. Thế là bức chắn xạ đã thức tỉnh ký ức nhiều người nghĩ đến việc vận dụng kỹ thuật dòng xạ. Người ta lợi dụng nguyên lý chắn xạ (chắn kề của dòng xạ) để thiết kế nhiều loại "xạ lưu", trong các trường hợp nhất định những linh kiện này dùng thay thế những linh kiện tạo thành do ống điện tử hoặc ống tinh thể để các thiết bị tự động hóa làm việc ổn định hơn.



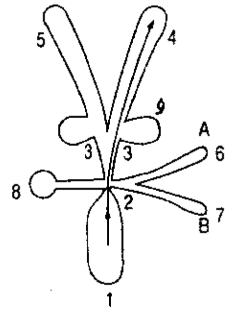
Hình 22-2

Hình 22-2 là 6 loại "xạ lưu" chủ yếu. Những linh kiện này cũng giống như các linh kiện điện tử đã trình bày ở mục 20: "Đường điện bật - tắt với "lắp đặt tự động"", có tác dụng như "tế bào não" của bộ máy tư duy. Tìm hiểu quá trình làm việc "tế bào não" cố nhiên là việc rất có ích.

Hình 22-3 là một loại "xạ lưu tự động" không đối xứng, vách phải áp sát miệng phun hơn vách trái, cho nên khi lỗ ép biên thông với luồng khí, dòng xạ phun ra từ miệng phun (2) thì áp sát vào vách phải và thoát ra đường thông thoát (4). Bây giờ giả sử đường khống chế (6) có tín hiệu p hoặc đường khống chế (7) có tín hiệu q. Lúc này dòng khí áp liền cắt ngang dòng xạ lệch sang vách trái, từ đó đường thông thoát (5) biến đổi tín hiệu ra. Tín hiệu đường thông thoát (5) có thể kéo dài đến mất đi mới thôi. Lúc đó dòng xạ tự động ngoặt về vách phải và thoát ra đường thông thoát (4). Nếu chúng ta ghi tín hiệu có là "1", ghi tín hiệu không có là "0", ta có được bảng 22-1. Điều này chứng tỏ là:

$$\begin{cases} x = p + q \\ y = \overline{x} = \overline{p}\,\overline{q} \end{cases}$$

giống với kết quả thu được ở "cửa vào" và "cửa trống" trong linh kiện logic điện tử. Thuật ngữ "tự động" có lẽ từ đó mà có.



Hình 22-3:
1- buồng khí
2- miệng phun
3- vách ngăn
4, 5- đường thông thoát
6,7- đường khống chế
8- lỗ ép biên
9- lỗ xả dòng.

"Bộ nhớ" của "xạ lưu" được thực hiện do bộ máy tiếp xúc dạng "ổn đôi" ở hình 22-4. Đây là một loại "xạ lưu" đối xứng. Khi bắt đầu dòng xạ bắn ra tùy theo dòng mà áp kề vào hai đường thông thoát (đường 5) và hình thành một loại trạng thái vách kề ổn định khi đường khống chế (6) cho vào tín hiệu q có dòng ép lỏng, tức là cắt dòng xạ đổi sang đường thông thoát (4), cũng hình thành một loại trạng thái vách kề ổn định. Lúc này cho dù tín hiệu q cho vào đường khống chế (6) mất đi, song nếu đường khống chế (7) không có tín hiệu thì vách ngăn ổn định, đường thông thoát (4) không thể bị phá hỏng. Điều đó chứng tỏ tín hiệu y bởi đường thông thoát (4) mà ra đã "ghi nhớ" tín hiệu q. Cũng với cách suy luận như vậy, tín hiệu x thông ra bởi đường thông thoát (5) ra đã "ghi nhớ" tín hiệu p.

Bảng 22-1

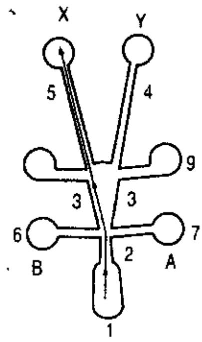
p	q	x	y
1	1	10	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

Hình 22-5 là sơ đồ hệ thống tự động khống chế mực nước trong bể nhờ áp dụng các "xạ lưu" lợi dụng dòng xạ. Yêu cầu khống chế $h_2 < h < h_1$. Trong thiết kế, chúng ta đã dùng hai "xạ lưu đóng - mở" và một "xạ lưu ổn đôi".

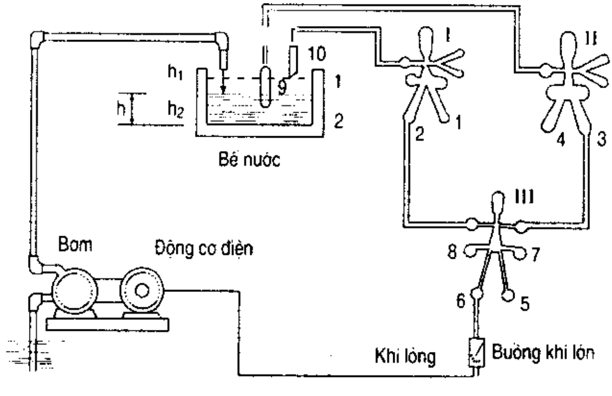
Việc vận hành của hình 22-5 theo nguyên lý sau đây:

Khi mức nước $h < h_2$, ống thăm dò (9) không bị ngập nước (thông với không khí) thì đường thông thoát (3) của "xạ lưu đóng - mở" II có tín hiệu. Tín hiệu này hòa vào đường khống chế (7) với "xạ lưu ổn đôi" khiến đường thông thoát (6) thông tín hiệu và qua chuyển đổi biến thành tín hiệu điện khiến cho bơm cung cấp nước cho bể.

Khi $h_2 < h < h_1$, do ống thăm dò (q) bị ngập nước, đường thông thoát (3) của "xạ lưu đóng - mở" II mất tín hiệu. Nhưng lúc này do "bộ nhớ" của "xạ lưu ổn đôi", đường thông thoát (6) vẫn có tín hiệu ra, bơm vẫn không ngừng cung cấp nước cho bể.



Hình 22-4:
1- buồng khí
2- miệng phun
3- vách ngăn
4, 5- đường thông thoát
6,7- đường khống chế
8- lỗ ép biên
9- lỗ xả dòng.



Hình 22-5:
1 - 6 - đường thông thoát;
7,8 - đường khống chế; 9.10 - ống thăm dò.

Khi $h_1 < h$, ống thăm dò (9) bị ngập nước, đường thông thoát (2) của "xạ lưu đóng - mở" I có tín hiệu. Tín hiệu này hòa vào đường khống chế (8) của "xạ lưu ổn đôi", khiến cho dòng xạ từ đường thông thoát (6) cắt sang đường thông thoát (5). Đường thông thoát (6) mất tín hiệu, bơm ngừng hoạt động.

Khi mực nước lại giảm xuống thấp đến $h_2 < h < h_1$, tuy rằng ống thăm dò (10) lúc này không bị ngập (thông khí), dòng xạ của "xạ lưu đóng - mở" I tự động trở về đường thông thoát khí (1) dẫn đến đường khống chế (8) không có tín hiệu vào. Nhưng do "bộ nhớ" của "xạ lưu ổn đôi", nên đường thông thoát (6) vẫn không có tín hiệu ra, bơm tiếp tục ngừng làm việc đến khi $h < h_2$ mới thôi.

Từ ví dụ thực tế khống chế mực nước giản đơn ở trên, ta thấy công năng logic thần kỳ của "xạ lưu". Có điều cần nói rõ thêm là kỹ thuật dòng xạ tuy có nhiều ưu điểm và ý tưởng không ngờ, nhưng do dòng xạ dựa vào chuyển động mà thực hiện được, nên tốc độ của nó không thể so với tốc độ dòng điện, do đó nó không thể thay thế cho kỹ thuật điện được. Tuy vậy, đánh giá sau đây cũng không quá đáng:

"Kỹ thuật điện tử và kỹ thuật dòng xạ là chị em của khoa học và kỹ thuật hiện đại".

23. Dòng xoáy của cảm giác sai lầm

Nhà di truyền học, người đặt nền móng cho thuyết tiến hóa Charles Darwin (12.2.1809 - 1882, người Anh) có một câu danh ngôn hài hước rằng: "Giới tự nhiên hễ có dịp là nói dối". Đương nhiên, giới tự nhiên không nói dối, mà là những hiện tượng giả đã tạo ra cho người ta cảm giác sai lầm.

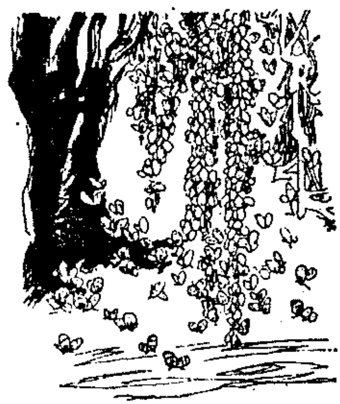
Nhà địa lý học nổi tiếng Từ Hà Khách (1586 - 1641, triều

Minh, Trung Quốc) có lần đến Thượng Sơn huyện Đại Lý tỉnh Vân Nam đã nhìn thấy ven núi Lộng Sơn độ cao 2030 mét có "suối bươm bướm" nên trong một bài du ký ông viết: "... có tới hàng nghìn vạn con bướm muôn màu rực rỡ nối vào nhau từ ngọn cây xuống gần sát mặt nước suối tạo nên vẻ đẹp tuyệt vời".

Có du khách họ Triệu đến bên suối ở Thượng Sơn xem đã phát hiện ra một hiện tượng kỳ lạ: những con bướm nhảy múa bên suối thì nhỏ mà những con bướm nối nhau treo lơ lửng trên cây thì to, ban ngày thì treo lở lửng, tối đến bay đi. Du khách cảm thấy kỳ lạ bèn tới hỏi nhà động vật học, chuyên gia phân loại bướm.

Bướm

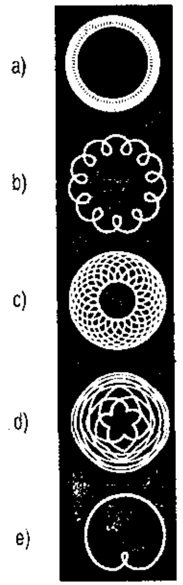
Ngài



Vị chuyên gia nói rằng, ban ngày nối nhau treo không phải là bướm, mà là ngài. Ngài thì ngày đậu nghỉ, đêm bay đi, cơ thể to. Bướm thì ngày bay, đêm đậu nghỉ, cơ thể nhỏ. Thế là ông ta viết một bài về "sự phát hiện bên suối bươm bướm" là cảm giác sai lầm!

Nếu như mệnh đề của sự vật trong tự nhiên là sự thật thì chúng ta gọi nó là sự thật. Song chỉ dựa vào *cảm giác trực quan* để phán đoán thì rất có khả năng khiến người ta rơi vào vòng xoáy sai lầm. Chỉ dùng cảm giác trực quan mà dẫn đến suy luận thì đó là phi khoa học.

Sau đây là một ví dụ rất sinh động: Sáng sớm người ta thấy Mặt Trời từ từ nhô lên ở phương Đông và chiều đến lại từ từ khuất vào đường chân trời ở phương Tây. Mặt Trời mọc - lặn làm cho loài người có cảm giác ngày đêm. Do đó đã mấy nghìn năm loài người cho rằng: Trái Đất là trung tâm vũ trụ, sao và Mặt Trời xoay quanh Trái Đất (thuyết "Địa tâm"). Những cảm giác tạo thành bởi hiện tượng giả đã ăn sâu vào vỏ não của con người, từ đó dẫn đến khi quan sát một hành tinh, chúng ta cảm thấy chuyển động của nó theo đường vòng.

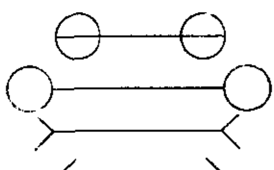


Hình 23-1

Hình 23-1 mô tả đường chuyển động trong 6-8 tuần của năm hành tinh nổi tiếng: a/ Thủy tinh; b/ Kim tinh; c/ Hỏa tinh; d/ Mộc tinh và e/ Thổ tinh. Đường chuyển động của các hành tinh này là những đường vòng rất đẹp và có quy luật.

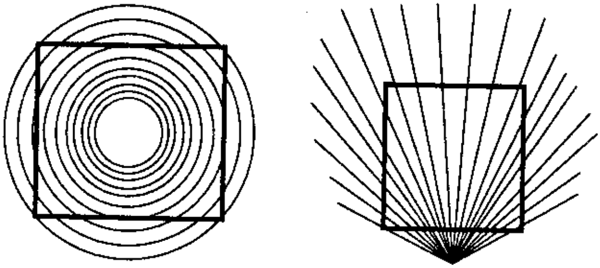
Ngày nay cảm giác sai về "Địa tâm" đã được vạch ra. Dường như không ai hoài nghi rằng Trái Đất xoay quanh Mặt Trời nữa và tất cả học sinh trung học đều biết rằng Trái Đất tự xoay quanh mình nó sinh ra ngày đêm.

Sau đây là một ví dụ lý thú nữa: Bốn đường ở hình 23-2 bằng nhau nhưng nhìn qua tựa hồ như chúng dài ngắn khác nhau. Nguyên nhân có cảm giác sai lầm này là chúng ta thường chú ý đến điểm cuối mà không để ý đến điểm đầu.



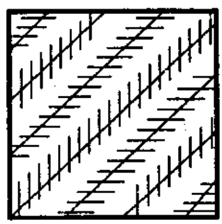
Hình 23-2

Ở hình 23-3 là hai hình vuông nhưng do sự làm nhiễu của các đường bối cảnh mà ta có cảm giác sai lầm là chúng biến đổi hình dạng.



Hình 23-3

Hình 23-4 có bảy đường song song với nhau, nhưng lúc đầu do cảm giác sai lầm hẳn bạn cho rằng chúng là những đường nghiêng không song song với nhau. Bỏ cảm giác trực giác, cần phải có tư duy quan sát và khoa học nhạy cảm. Chỉ có bỏ đi "ý nghĩa đương nhiên" mới phân biệt được hiện tượng giả.



Hình 23-4

Khoảng giữa thế kỷ XIX, nhà hóa học nổi tiếng Justus Liebig (12.5.1803 - 1873) người Đức đã đến Anh để tiến hành khảo sát. Một hôm ông đến nhà máy chế tạo màu lam "palin" và đã nhìn thấy quá trình chế tạo màu như sau: cho da động vật và màu cùng với một loại thuốc gì đó hòa nước rồi để vào nồi sắt đun lên. Trong khi nhiệt độ tăng lên, họ dùng một que sắt luôn luôn khuấy dung dịch trong nồi, khi khuấy thì phát ra một tiếng nổ lớn. Chủ nhân giải thích rằng: "Khi khuấy dung dịch trong nồi phát ra tiếng nổ càng to thì chất lượng màu lam "palin" càng tốt".

Sau đó J. Liebig đã từ hiện tượng giả đó mà nhận ra bản chất. Trong một bức thư viết về nước, ông viết: "Dùng loại nguyên liệu này chế ra màu lam "palin", cho thêm một số chất hóa hợp chứa sắt là được, không cần thiết phát ra tiếng nổ. Bởi vì khuấy mạnh dung dịch trong nồi chắc là muốn gỉ sắt nồi rơi vào cho nó hòa cùng với nguyên liệu lỏng để chế màu lam "palin". Cách làm này tuy không phải là không có lý nhưng chất màu lam "palin" tạo ra chưa chắc đã tốt, mà điều quan trọng hơn là lãng phí sức lao động".

Một vấn đề lý thú sau đây thật tai hại cho cách nhận thức với "ý nghĩa đương nhiên": Hai người tranh luận về một bức tranh (hình 23-5), A nói: "Mặt Trăng sáng gần tròn cho nên hôm ấy là 15 hay 16 âm lịch", B nói: "Sao lại là 15 hay 16 âm lịch, phải là 20 rồi, vì trăng đã khuyết!".

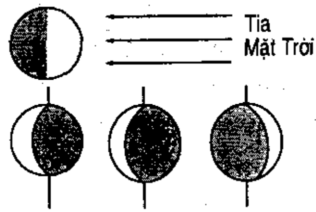
Hình 23-5

Bạn đã có thể khẳng định ai nói đúng không?

A nói đúng, vì hiện tượng khuyết ở Mặt Trăng chỉ là "hiện tượng giả", do một vật gì đó che khuất một phần Mặt Trăng. Bởi vì Mặt Trăng bị Mặt Trời chiếu vào, nó gần như chỉ có một phía phát sáng, nên ở Trái Đất trông thấy Mặt Trăng như hình 23-6. Hai điểm nhọn của phần khuyết phải trên một đường kính của Mặt Trăng nhưng hình Mặt Trăng ở bức tranh lại không như vậy. Do đó mới đoán là phần khuyết của hình Mặt Trăng ở bức tranh bị một vật gì đó che khuất. Như vậy B nói Mặt Trăng khuyết chỉ là do cảm giác sai lầm.

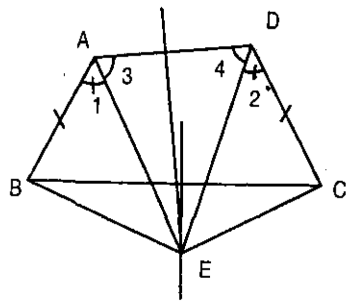
Sau đây là ví dụ nổi tiếng chứng minh về sự sai lầm trong hình học. Cho biết: một hình tứ giác ABCD, AB = CD (hình 23-7).

Chứng minh rằng: AD//BC.



Hình 23-6

Bạn đọc đã học hình học hẳn biết rằng, kết luận khẳng định là sai. Vậy vấn đề là ở chỗ nào? Chỉ cần bạn đọc suy nghĩ cẩn thận một chút thì sẽ tìm ra được.



Hình 23-7

Ở các mục trên, chúng ta đã từng nói, tư duy chính xác của nhân loại tựu trung chỉ ở hai điểm: một là sự thật, hai là suy luận. Sự thật là căn cứ của suy luận. Suy luận là cái nút gắn sự thật với kết luận, song cảm giác sai lầm thường thường khiến cho tư duy của loài người rơi vào vòng luẩn quẩn. Do đó khi chúng ta kiểm tra tính chất thực tại của sự vật và suy luận logic thì không nên quên rằng cảm giác của ta có khả năng sai lầm, cho nên phải luôn hỏi vì sao?

24. Phân biệt ngụy khoa học

Khoa học không có biên giới, loài người đang mang hết dũng khí ra để khai thác các lĩnh vực chưa từng biết. Song, chỉ cần trên thế giới này còn có những hiện tượng mà khoa học chưa làm rõ được thì thần học vẫn còn chỗ đứng, treo "đầu dê" khoa học đã bán "thịt chó" ngụy khoa học, mê tín dị đoan vẫn còn có chỗ đứng.

Từ xưa tới nay, có biết bao nhà khoa học bị người đương thời coi là "dị đoan", nhưng họ vẫn kiên trì chân lý như nhà thiên văn học vĩ đại Nicolas Copernicus (19.2.1473 - 25.4.1543) người Ba Lan, nhà bác học vĩ đại Galileo Galile (16.2.1564 - 8.1.1642) người Italia, nhà di truyền học nổi tiếng Ch.Darwin, (12.2.1809-1882) người Anh, nhà vật lý vĩ đại A. Eistein là những người như thế.

Vậy giới hạn của khoa học và ngụy khoa học là ở chỗ nào?

Ở mục 23: "Dòng xoáy của cảm giác sai lầm" chúng ta đã biết tư duy chính xác của nhân loại được xây dựng lên từ sự thật và suy luận. Sự thật đòi hỏi nhà khoa học phải có thái độ nghiêm túc, thật thà, tôn trọng và biết lợi dụng thành quả khoa học đã được khẳng định. Các nhà khoa học thường không tin vào cảm giác, bởi vì họ ý thức được sự tồn tại của khả năng có thể sai lầm. Trong đầu họ luôn có những câu hỏi kiểu như: Điều này có thật không?", "Ta làm sao để khẳng định được?",...

Về suy luận, các nhà khoa học nghiêm khắc thường thông qua quan sát mới để kiểm nghiệm giả thiết của mình. Nếu sự quan sát chứng tỏ giả thiết trước kia của mình là sai lầm thì họ vứt bỏ giả thiết đó không thương tiếc. Song, cho dù con đường khoa học khó tránh khỏi quanh co khúc khuỷu, nhưng chỉ cần tôn trọng khoa học thì tuy khác đường đi nhưng vẫn có thể quy về một mối để vươn tới bờ kia của chân lý.

Ngụy khoa học thì chống lại hoàn toàn, đó là cơ sở của những thuyết mê tín, huyễn hoặc. Ở đó sự thực khách quan thường bị tùy ý bóp méo, thành quả khoa học bị phủ nhận, ... để nhằm mục đích là dẫn người ta vào chỗ ngu muội, tới mê cung của chủ nghĩa duy tâm.

Ở phương Tây, ngụy khoa học có nhiều loại, có ảnh hưởng nhất trên thế giới phải kể đến Erich von Daniken người Thụy Sĩ với thuyết "Những cỗ xa cho Thần Thánh". Mổ xẻ phân tích một chút về tác giả của thuyết này để phân biệt rõ đây chỉ là ngụy khoa học.

Năm 1968 E. von Daniken viết cuốn sách "Những cỗ xa cho Thần Thánh". Ông ta đã đem các chuyện thần thoại, truyền thuyết văn vật di chỉ thu thập được qua 15 chuyến chu du thế giới mà ghi chép lại, trong đó đương nhiên không thiếu những chuyện "bắt bò vẽ bóng" mà tác giả nghe được nơi "đầu đường cuối chợ", căn cứ vào sự tưởng tượng phong phú, miêu tả "người ngoài hành tinh" bay đến Trái Đất khoảng 1-4 vạn năm trước rồi đoán rằng: "Thượng đế đang tồn tại, Thượng Đế là thủ lĩnh của "Người ngoài hành tinh", những nền văn minh ngày nay trên Trái Đất đều do các thần sắp xếp, rải khắp thế gian những cổ văn vật và di chỉ không đoán biết được, ngay cả những hiện tượng cổ quái trên thế giới ngày nay cũng đều do "Người ngoài hành tinh" giáng lâm trên Trái Đất".

Sau khi cuốn sách "Những cỗ xa cho Thần Thánh" xuất hiện đã rộn lên một thời và nhiều người đã tìm đọc. Đương nhiên, còn vấn đề kỹ thuật viết nữa, chẳng hạn, vừa mở đầu tác giả đã dùng lối kích thích: "Người ngoài hành tinh" phát hiện khai quật quá khứ và dự đoán tương lai, ... Viết cuốn sách này cần có dũng khí, mà đọc cuốn sách này cũng cần cỏ dũng khí". Ai lại muốn thừa nhận mình không có dũng khí? Vì thế mà loại ngôn ngữ kích thích trần trụi này cũng lôi kéo được một số người đọc.

Chúng ta hãy xem E. von Daniken dựa vào sự thật nào? Kể về Trung Quốc, tác giả đã viết: "Trong mộ của Chu Xứ (Chu Xứ chết vào thời Tây Tấn, năm 297) có đoạn dây lưng bằng nhôm". Ông ta cho rằng, đây là thành tựu kỹ thuật mà thời Cổ Đại không thể có được, rồi lấy đó để chứng minh rằng "Người ngoài hành tinh" đã tới Trái Đất. Song sự thật này đã bị phủ định. Năm 1972, giám đốc Sở Nghiên cứu khảo cổ thuộc Viện Khoa học Trung Quốc đã có bài viết tổng kết về sự kiện này, chứng minh rằng ngôi mộ đó đã hai lần bị đào trộm, khi khai quật thì trong ngôi mộ này có dấu vết lộn xộn rất rõ ràng, mà những di vật còn lại lặt vặt đã nhặt ra để thanh lý thì không thể loại trừ việc có những miếng nhôm nhỏ do người đào trộm làm lẫn vào.

Trong một cuốn sách khác, E. von Daniken trích dẫn bài viết trong Tạp chí "Vệ tinh nhân tạo" của Liên Xô nói rằng, năm 1938 các nhà khảo cổ Trung Quốc đã phát hiện trong hang động núi Baiankhola có nhiều phiến đá mà trên đó dùng thứ văn tự tượng hình ghi chép chuyện một vạn hai nghìn năm trước "Người ngoài hành tinh" bay vào Trái Đất vì sự cố mà buộc phải hạ cánh phi thuyền rồi bị dân địa phương bắt giết. Song, sự kiện "kinh thiên động địa" này thì ngay người dân vùng đó cũng chưa hề nghe được!

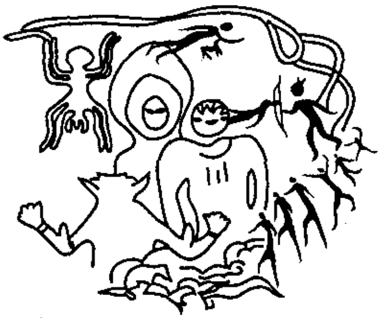
Những loại chuyện đại khác như vậy còn rất nhiều. Từ những chuyện bóp méo sự thật lịch sử mà E. von Daniken bịa ra đó, chúng ta hoàn toàn có lý để hoài nghi rằng, những tư liệu mà ông ta miêu tả vị tất đã phù hợp với sự thật khách quan.

Bây giờ chúng ta hãy thử xem "màn lưới tư duy" của E.von Daniken được thêu dệt như thế nào?

E.von Daniken viết rằng: "Trụ cột của tri thức loài người từng bị nhiều phen sụp đổ, hàng nghìn vạn năm người ta đã cho rằng Trái Đất bằng phẳng, Mặt Trời xoay quanh Trái Đất. Các định luật "rắn như thép" ấy đã từng ngự trị duy trì mấy nghìn năm, cuối cùng đã bị sụp đổ". Để ông ta dẫn đến kết luận là: Tri thức loài người đã bị lật đổ nhiều lần rồi thì ngày nay tránh sao khỏi sự sụp đổ!

Xét theo góc độ toán học thì phương pháp suy luận của E.von Daniken là: "Nếu n = 1, n = 2, thậm chí n = 3 mà mệnh đề là đúng thì bất cứ với số n nào mệnh đề cũng đúng". Sự sai lầm do quy nạp không hoàn toàn sản sinh ra này, trong mục 12 "Bước tới chân lý" hẳn bạn đã hiểu rõ ràng. Không chỉ có thế, mà E. von. Daniken còn khéo dùng kiểu "Nếu n = k (k > 1) mà mệnh đề là đúng thì khi n = 1 mệnh đề nhất định cũng đúng". Kiểu suy luận này đúng là "thuật suy luận" kinh người.

Chúng ta hãy xem một đoạn ông ta miêu tả trong cuốn sách "Những cỗ xa cho Thần Thánh": "Có một ngày nào đó con tàu vũ trụ của chúng ta hạ trên mảnh đất của một hành tinh khác thì ở đó các sinh mệnh lý trí sẽ đối đãi với chúng ta - những người khách không mời mà đến như thế nào? Khi đêm đến, sáng như ban ngày (nhờ đèn chiếu) thì họ kinh ngạc đến ngây ra, khi những con người nhẹ nhàng bay lên không trung (nhờ tên lửa đẩy) thì họ sợ lắm, khi những "động vật" vô tri bay lượn trong không trung phát ra những âm thanh ù ù và phụt khí (sự nổ thăm dò) thì họ chạy vào ẩn nấp trong hang động. Không còn nghi ngờ gì nữa, đối với những người nguyên thủy này thì đội những phi hành viên vũ trụ là những vị "thần toàn năng".



Và ông ta kết luận là: "Chúng ta đến một hành tinh khác có thể tưởng tượng ra sự gặp gỡ như thế thì xưa kia "Người ngoài hành tinh" đến Trái Đất cũng đã từng gặp người Trái Đất như thế!". Những điều mà E. von Daniken nói có thể khái quát một câu là: "Những thứ mà từ nay về sau muốn làm thì xưa kia đã từng có!". Điều này thật là một suy luận hoang đường!

Đất trời bao la không thiếu chuyện lạ kỳ. E.von Daniken không quên lấy những chuyện mơ hồ của thế giới làm văn chương. Ông ta đã nhằm vào sơ hở tâm lý của bạn đọc mà dùng lối nửa giả nửa thật để đưa những chuyện ngày nay còn mơ hồ khó giải thích vào học thuyết thần kỳ của ông ta. Ví dụ, E.von Daniken đưa ra chuyện vị tướng hải quân Thổ Nhĩ Kỳ hồi thế kỷ XVIII đã dùng tấm bản đồ, để nói "tấm bản đồ này chính xác tới mức không cần phải bàn",... "đánh dấu châu Nam Cực ở đoạn dưới, đồng thời phải dùng phương pháp siêu âm đã thăm dò được mặt đất dưới lớp băng rất chính xác", rồi ông ta suy luận là "chúng ta nên mạnh dạn "chọc tổ ong", tuyên bố rằng những tấm bản đồ có liên quan đến Trái Đất chúng ta là do những "dụng cụ bay trên trời" hoặc từ "những con tàu vũ trụ" vẽ ra, điều này chỉ có thể là "Người ngoài hành tinh"!". Đương nhiên tấm bản đồ của vị tướng hải quân Thổ Nhĩ Kỳ dùng không phải là nguyên bản, nó là bản "sao chép lại nhiều lần". Song, hoàn toàn có thể so sánh bản đồ hiện nay về châu Nam Cực với bản đồ mà vị tướng hải quân Thổ Nhĩ Kỳ dùng thì sẽ phát hiện ra tính "chính xác" mà E.von Daniken nói rút cục sẽ phải đặt ra bao nhiêu dấu chấm hỏi!

Về bức tranh Taxili được phát hiện ra ở Sahara, E.von Daniken nói như "đinh đóng cột" rằng, người trong bức tranh mặc bộ quần áo liền, đầu đội giáp kỳ lạ. Ở đây lại một lần nữa chứng tỏ chỉ có thể là "Người ngoài hành tinh".

Những ví dụ như trên thì trong cuốn sách : "Những cỗ xa cho Thần Thánh" có rất nhiều.

Lẽ nào những văn minh mà loài người sáng tạo ra lại thấp thoáng như "trăng dưới nước, hoa trong gương"? Lẽ nào loài người sống trên Trái Đất lại kém cỏi như vậy? Một nền khoa học nghiêm túc giàu lý tính đang phải thách thức với tính phi khoa học! 186 nhà khoa học nổi tiếng, trong đó có 19 người đã được giải thưởng Nobel đã ký tên vào bản tuyên bố phê phán thứ ngụy khoa học này. Nhiều học giả nổi tiếng đã cùng biên soạn một loạt sách về "khoa học và ngụy khoa học" vạch ra một cách công khai về những ý tưởng và tư duy phi khoa học. Nhà địa chất học Kachio và nhà khảo cổ học Skoto đã làm cuộc du hành thế giới và bằng phương pháp khoa học nghiêm túc để khảo sát lại một lần nữa "tam giác quỷ", những vật bay không rõ xuất xứ, câu chuyện huyền hoặc về những nhà du hành vũ trụ thời Cổ Đại, tượng đá ở Fuhuo, kim tự tháp kỳ lạ, nền văn hoá Maia thần bí,... Cuối cùng họ đã có kết luận ngược lại với E.von Daniken. Họ đã viết cuốn sách nói cho chúng ta rõ là vì sao lại cần có tư duy khoa học chân chính và làm sao để phân biệt được thứ ngụy khoa học hoang đường.

25. Toán học và tư duy toán học

Khi mọi người bàn luận về các nhà toán học, thường thích coi họ khác với mọi người, nào là suốt ngày đứng ngây ra trước các công thức, suy đoán, tính toán sâu xa khó hiểu,... tựa hồ như cuộc sống của họ đơn điệu và khô khan. Kỳ thực miêu tả nhu vậy là không đúng.

Đại đa số các nhà toán học không phải là thần đồng "thông minh là bởi học, thiên tài là bởi sự tích luỹ"- đó là câu nói nổi tiếng của nhà toán học Hoa La Canh.

Trong tự nhiên tồn tại những hình và số, những hình và số này dường như đều đợi dịp xông vào mỗi cá nhân, nhưng không phải ai ai cũng đều hứng thú với hình và số. Ví dụ, đối với nhà ngôn ngữ học thì 26 chữ cái trong tiếng Anh chỉ là các ký hiệu. Các ký hiệu này đối với họ rất quan trọng, vì chúng được dùng để phát âm và phiên âm. Song, đối với nhà toán học thì lại là chuyện khác, họ chia 26 chữ cái đó làm 5 loại:

A M T U V W Y

B C D E K

N S Z

H I O X

F G J L P Q R

Theo thứ tự mỗi loại tương ứng với 5 phương trình:

$$y = x^2$$

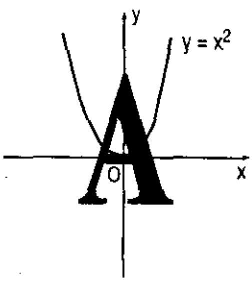
$$y = x$$

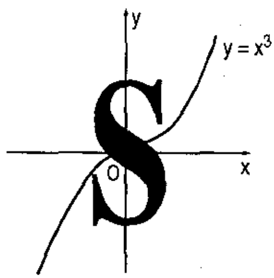
$$y = x^3$$

$$x^2 + 3y^2 = 1$$

$$y = x + x^3$$

Khi bạn đưa những chữ cái đó tương ứng với những đồ thị được vẽ bởi năm phương trình này xếp vào một chỗ, bạn sẽ hiểu được sức tưởng tượng phong phú và sức quan sát nhạy cảm của các nhà toán học đến phải kính nể!





Số học cũng như vậy, đòi hỏi thử nghiệm, nhưng một nhà toán học có kiến thức sâu thì chỉ cần thử nghiệm ít là có thể thấy thực chất của vấn đề. Những ví dụ này đã có nhiều trong tập sách này. Một số vấn đề thực tế qua nhà toán học có thể biểu thị bằng những mô thức như ma thuật rồi giải bằng phương pháp toán, như giáo sư G.Boole ở Viện Khoa học Hoàng gia Anh đã dùng chữ cái thay mệnh đề rồi xây dựng nên môn đại số logic lạ thường.

Phương thức tư duy của các nhà toán học giống như năm giai đoạn tư duy khoa học:

1. Kể lại quan sát, miêu tả
2. Giả định quy nạp
3. Suy luận diễn dịch (suy diễn)
4. Nghiệm chứng mở rộng
5. Dẫn tới kết luận.

Mấy nghìn năm nay, do biết bao nhiêu công sức của các nhà toán học đã chăm sóc cho mầm non tư duy toán học mọc lên cành lá sum suê, quả trĩu cành. Tập sách này chỉ nhằm giới thiệu một vài thành quả có liên quan đến quy luật tư duy, một phần của trí tuệ nhân loại.

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Tổng biên tập VŨ DƯƠNG THỤY

Biên tập nội dung:
TRƯƠNG CÔNG THÀNH
Trình bày bìa:
TẠ TRỌNG TRÍ
Sửa bản in:
TRƯƠNG CÔNG THÀNH

Sắp chữ:
PHÒNG CHẾ BẢN (NXB GIÁO DỤC)

CÁC CÂU CHUYỆN TOÁN HỌC - TẬP BA

In 5000 cuốn khổ 14,3 x 20,3 cm, tại Xí nghiệp In Tuyên Quang. Số in: 06. Giấy phép xuất bản số: 82/328-01 do Cục xuất bản cấp ngày 12 tháng 07 năm 2001. In xong và nộp lưu chiểu tháng 07 năm 2001.

Giá: 10.900 đ