TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

9 2011 Số 411

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 48

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

CHÀO NĂM HỌC MỚI 2011-2012

THƯ CỦA CHỦ TỊCH NƯỚC TRƯƠNG TẤN SANG

Gửi ngành giáo dục nhân dịp khai giảng năm học mới 2011-2012

Hà Nội ngày 23 tháng 8 năm 2011

Các thầy giáo, cô giáo, cán bộ, công chức, viên chức ngành giáo dục, các bậc phụ huynh và các em học sinh, sinh viên thân mến,

Nhân dịp khai giảng năm học mới 2011-2012 và ngày "Toàn dân đưa trẻ đến trường", tôi thân ái gửi tới các thế hệ nhà giáo, cán bộ, công chức, viên chức ngành giáo dục, các bậc phụ huynh và các em học sinh, sinh viên trong cả nước lời chúc mừng tốt đẹp nhất.

Năm học 2010-2011, ngành giáo dục đã có nhiều cố gắng, tiến bộ. Quy mô và mạng lưới giáo dục tiếp tục được mở rộng; chất lượng giáo dục ở các cấp học được nâng lên; giáo dục đạo đức, pháp luật, lí tưởng sống cho học sinh, sinh viên được chú trọng; công tác xã hội hoá giáo dục, huy động các nguồn lực đầu tư cho giáo dục đạt được kết quả tốt; cơ sở vật chất của nhà trường được tăng cường.

Tôi nhiệt liệt biểu dương sự nỗ lực và những kết quả của ngành giáo dục, nhất là các tập thể, cá nhân điển hình tiên tiến, các thầy giáo, cô giáo tâm huyết, tận tụy với công việc, các em học sinh nghèo ở vùng sâu, vùng xa, biên giới, hải đảo đã vượt khó vươn lên trong học tập.

Năm học 2011-2012 có ý nghĩa rất quan trọng, là năm học đầu tiên thực hiện Nghị quyết Đại hội Đảng toàn quốc lần thứ XI. Để thực hiện tốt sứ mệnh "nâng cao dân trí, phát triển nguồn nhân lực, bồi dưỡng nhân tài, góp phần quan trọng phát triển đất nước, xây dựng nền văn hóa và con người Việt Nam", cùng với sự góp sức của toàn xã hội, ngành giáo dục cần đổi mới căn bản, toàn diện, xây dựng, nâng cao chất lượng đội ngũ giáo viên, cán bộ quản lí giáo dục; đổi mới mạnh mẽ nội dung, chương trình, phương pháp dạy và học ở tất cả các cấp, bậc học; đẩy mạnh thi đua "dạy tốt, học tốt"; nâng cao chất lượng giáo dục toàn diện, đặc biệt coi trọng giáo dục truyền thống lịch sử, đạo đức, lối sống, ý thức trách nhiệm xã hội, năng lực sáng tạo, kĩ năng thực hành, tác phong công nghiệp; xây dựng môi trường giáo dục lành mạnh, kết hợp chặt chẽ giữa nhà trường với gia đình và xã hội; huy động các nguồn lực tăng cường đầu tư phát triển giáo dục, nhất là ở vùng sâu, vùng xa, biên giới, hải đảo, vùng đồng bào dân tộc thiểu số; thực hiện tốt chính sách ưu đãi, hỗ trợ đối với học sinh, sinh viên giỏi, nghèo, khuyết tật, con em gia đình có công với cách mạng, dân tộc thiểu số, giáo viên công tác ở những vùng khó khăn.

Tôi mong muốn và tin tưởng các em học sinh, sinh viên phát huy truyền thống hiếu học của dân tộc ta, nỗ lực phấn đấu vươn lên, rèn luyện tốt, đạt nhiều thành tích cao trong học tập, nghiên cứu khoa học.

Tôi đề nghị các cấp ủy Đảng, chính quyền, các tổ chức, đoàn thể và toàn xã hội tiếp tục quan tâm, chăm lo nhiều hơn nữa cho sự nghiệp "trồng người", tạo điều kiện thuận lợi để con em chúng ta được học tập, rèn luyện đạt kết quả tốt.

Chúc các thầy giáo, cô giáo, cán bộ, công chức, viên chức ngành giáo dục và toàn thể các em học sinh, sinh viên đạt được nhiều thành tích xuất sắc trong năm học mới. Chúc sự nghiệp giáo dục ngày càng phát triển, góp phần tích cực vào sự nghiệp xây dựng và bảo vệ Tổ quốc Việt Nam xã hội chủ nghĩa.

Thân ái,

TRƯƠNG TẤN SANG

Đổi biến
ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

LÊ ANH TUẤN
(GV Đại học Đồng Nai)

Khi chứng minh bất đẳng thức (BĐT), việc đổi biến một cách linh hoạt có thể làm cho BĐT ban đầu trở nên đơn giản hơn hoặc giúp ta có thêm một hướng giải quyết bài toán. Bài viết này chúng tôi xin đề cập đến vấn đề đó thông qua một số thí dụ minh họa sau.

★Thí dụ 1. *Cho a, b khác 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+4\ge 0.$$

Lời giải. Đặt $x=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$.

Ta có $|x|=\dfrac{a^2+b^2}{|ab|}\ge 2$.

Khi đó $\text{VT}=\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)^2-3\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)+2$

$$=x^2-3x+2=(x-2)(x-1)\ge 0$$

(luôn đúng do $|x|\ge 2$). ❒

★Thí dụ 2. *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le abc.$$

Lời giải. Đặt $x=a+b-c$; $y=b+c-a$; $z=c+a-b$. Do a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $x>0$; $y>0$; $z>0$ và

$$a=\frac{x+z}{2};\ b=\frac{x+y}{2};\ c=\frac{y+z}{2}.$$

BĐT đã cho trở thành $xyz\le\dfrac{x+z}{2}.\dfrac{x+y}{2}.\dfrac{y+z}{2}$.

Điều này chứng minh được nhờ áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương với ba thừa số ở vế phải. ❒

★Thí dụ 3. *Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}\quad \textit{(BĐT Nesbit).}$$

Lời giải. Đặt $x=b+c$; $y=c+a$; $z=a+b$.

Suy ra $a=\dfrac{y+z-x}{2}$; $b=\dfrac{x+z-y}{2}$; $c=\dfrac{x+y-z}{2}$.

Khi đó VT của BĐT đã cho trở thành

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\right)-\frac{3}{2}$$

$$\ge\frac{1}{2}(2+2+2)-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\quad\text{(đpcm)}.$$ ❒

★Thí dụ 4. *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{a+c-b}+\frac{c}{a+b-c}\ge 3.$$

Lời giải. Đặt $x=b+c-a$; $y=a+c-b$; $z=a+b-c$. Do a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $x>0$; $y>0$; $z>0$ và

$$a=\frac{y+z}{2};\ b=\frac{x+z}{2};\ c=\frac{x+y}{2}.$$

Khi đó VT của BĐT đã cho trở thành

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\right)$$

$$\ge\frac{1}{2}(2+2+2)=3\ \text{(đpcm)}.$$ ❒

★Thí dụ 5. *Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{2a+b+c}+\frac{b}{a+2b+c}+\frac{c}{a+b+2c}\le\frac{3}{4}.$$

(Xem tiếp trang 27)

ĐỀ THI VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, TP. ĐÀ NẴNG
NĂM HỌC 2011 - 2012

(*Thời gian làm bài : 150 phút*)

Câu 1. (1,5 *điểm*)

a) Cho $a = xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$,

$$b = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2},$$

trong đó x và y là hai số thực. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b, không phụ thuộc vào x và y.

b) Đặt $x_1 = \dfrac{m-\sqrt{m^2+1}}{2}$, $x_2 = \dfrac{m+\sqrt{m^2+1}}{2}$ (m là tham số). Hãy tính theo m giá trị của biểu thức

$$A = \left((2m+1)x_1 - (2m-1)x_2\right)^2 + \left((m-2)x_1 + (m+2)x_2\right)^2.$$

Câu 2. (1,5 *điểm*)

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng

$$\Delta:\ y = \frac{3}{5}x - \frac{12}{25}.$$

a) Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng Δ và trục hoành. Chứng minh rằng $\sin\alpha > \dfrac{1}{2}$.

b) Chứng minh rằng trong mọi hình tròn bán kính $\dfrac{1}{30}$ với tâm nằm trên đường thẳng Δ, không có điểm nào có hoành độ và tung độ là các số nguyên.

Câu 3. (2 *điểm*)

a) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} yz(x+y)(x+z) = 72 \\ zx(y+z)(y+x) = 45 \\ xy(z+x)(z+y) = 40. \end{cases}$$

b) Với mỗi số tự nhiên $n \geq 3$, gọi x_n là số đo góc ở đỉnh (tính theo đơn vị độ) của một đa giác đều n cạnh. Tìm tất cả các cặp số tự nhiên m, n ($m \geq 3, n \geq 3$) sao cho $x_m - x_n = 30^o$.

Câu 4. (2 *điểm*)

a) Tìm a, b, c, d biết rằng

$$5(a^2+b^2+c^2+d^2) = (a+b+c+d+2)^2 - 20.$$

b) Cho ba số x, y, z thỏa mãn

$$1 \leq x \leq 3;\ 1 \leq y \leq 3;\ 1 \leq z \leq 3.$$

Đặt $S_n = x^n + y^n + z^n$ với mỗi số nguyên dương n. Chứng minh rằng nếu $S_1 \leq 5$ và $S_2 \geq 11$ thì $S_n = 3^n + 2$ với mọi số nguyên dương n.

Câu 5. (3 *điểm*)

Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng r. M là một điểm di động trên cạnh BC (M không trùng với B và C). Trên cạnh CD lấy điểm N sao cho $\widehat{MAN} = 45^o$. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của BD với AM và AN.

a) Chứng minh rằng MQ vuông góc với AN.

b) Gọi H là giao điểm của MQ và NP. Tìm quỹ tích giao điểm K của các đường thẳng AH và MN.

c) Tính diện tích phần chung của bốn hình tròn có tâm lần lượt là các điểm A, B, C, D và có cùng bán kính bằng r.

NGUYỄN DUY THÁI SƠN (*ĐHSP Đà Nẵng*)
THÁI TRUNG (*Sở GD – ĐT Đà Nẵng*)
giới thiệu.

Lời giải Đề thi vào lớp 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG HÀ NỘI
NĂM HỌC 2011 - 2012
(Đề thi đã đăng trên THTT số 410, tháng 8 năm 2011)

VÒNG 1

Câu 1. 1) Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases}(x-1)(y^2+1)=2-y & (1)\\ (y-2)(x^2+1)=x-1 & (2)\end{cases}$$

+) Nếu $x>1$ thì $(x-1)(y^2+1)>0$ nên từ (1) suy ra $2-y>0 \Rightarrow (y-2)(x^2+1)<0$. Do đó từ (2) có $x-1<0$ hay $x<1$, mâu thuẫn.

+) Nếu $x<1$, tương tự suy ra $x>1$, mâu thuẫn.

+) Nếu $x=1$ thì $y=2$ (thỏa mãn).

Vậy HPT có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;2)$.

2) ĐK $x>0$, ta có PT tương đương

$$2(x+1)\sqrt{x+\frac{3}{x}}=x^2+7.$$

Chia hai vế PT trên cho $x\neq 0$, thu được

$$2\left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt{x+\frac{3}{x}}=x+\frac{7}{x}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+\frac{3}{x}}-2\right)\left(\sqrt{x+\frac{3}{x}}-\frac{2}{x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+\frac{3}{x}}-2=0 \text{ hoặc } \sqrt{x+\frac{3}{x}}-\frac{2}{x}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3.\end{array}\right.$$

Câu 2. 1) Giả sử tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn

$$x^4+y^4=7z^4+5 \Leftrightarrow x^4+y^4+z^4=8z^4+5 \quad (1)$$

Vì $a^4\equiv 0,1 \pmod 8$ với mọi số nguyên a, nên ta có

$$\begin{cases}x^4+y^4+z^4\equiv 0,1,2,3 \pmod 8\\ 8z^4+5\equiv 5 \pmod 8.\end{cases}$$

Mâu thuẫn với (1). Vậy không tồn tại bộ số nguyên $(x;y;z)$ nào thỏa mãn đẳng thức.

2) PT đã cho tương đương với

$$\left((x+1)^2-(x-1)^2\right)\left((x+1)^2+(x-1)^2\right)=y^3$$

$$\Leftrightarrow 4x(2x^2+2)=y^3 \Leftrightarrow 8x^3+8x=y^3.$$

+) Nếu $x\geq 1$ thì $8x^3<8x^3+8x<(2x+1)^3$

$\Leftrightarrow (2x)^3<y^3<(2x+1)^3$ (mâu thuẫn vì y nguyên).

+) Nếu $x\leq -1$ và $(x;y)$ là nghiệm của PT thì $(-x;-y)$ cũng là nghiệm, mà $-x\geq 1$ nên mâu thuẫn.

+) Nếu $x=0$ thì $y=0$ (thỏa mãn).

Vậy $(x;y)=(0;0)$ là nghiệm duy nhất của PT.

Câu 3. 1) Tứ giác $OBCD$ nội tiếp và CO là phân giác góc $\widehat{BCD}$ nên $\widehat{BCO}=\widehat{DCO}$

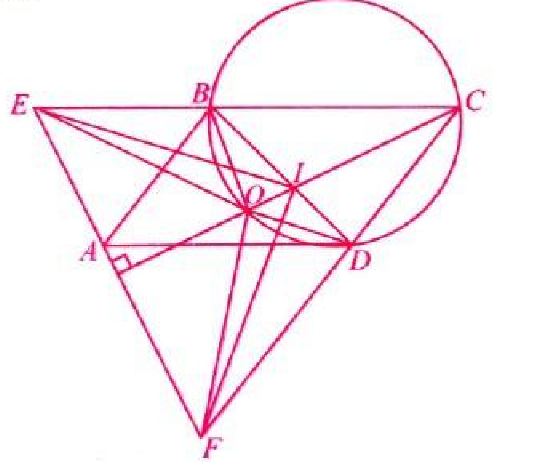
$\Rightarrow OB=OD$ (1)

Mặt khác $\widehat{ODC}=\widehat{OBE}$ (cùng bù với góc $\widehat{OBC}$) (2)

Tam giác CEF cân tại C vì có CO vừa là đường cao vừa là đường phân giác nên $\widehat{AFC}=\widehat{AEB}$.

Lại do $AB//CF \Rightarrow \widehat{EAB}=\widehat{AFC}=\widehat{AEB}$ nên tam giác ABE cân tại $B \Rightarrow BE=BA=CD$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\Delta OBE=\Delta ODC$ (c.g.c) (đpcm).



2) Do $\Delta OBE=\Delta ODC$ nên $OE=OC$. Mà CO là đường cao tam giác cân CEF nên $OE=OF$.

Suy ra $OE = OC = OF$, vậy O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF (đpcm).

3) Từ (3), ta có $BE = CD$ mà $CE = CF \Rightarrow BC = DF$. Mặt khác, CI là đường phân giác góc $\widehat{BCD}$ nên $\dfrac{IB}{ID}=\dfrac{CB}{CD}=\dfrac{DF}{BE} \Rightarrow IB.BE=ID.DF.$

Mà CO là trung trực của EF và $I \in CO$, nên $IE = IF$. Từ hai đẳng thức trên suy ra

$$IB.BE.EI = ID.DF.FI \text{ (đpcm).}$$

Câu 4. Ta chứng minh hai bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{x^3}{x^3+8y^3}} \geq \frac{x^2}{x^2+2y^2} \qquad (1)$$

và
$$\sqrt{\frac{y^3}{y^3+(x+y)^3}} \geq \frac{y^2}{x^2+2y^2} \qquad (2)$$

Thật vậy BĐT (1) $\Leftrightarrow \dfrac{x^3}{x^3+8y^3} \geq \dfrac{x^4}{(x^2+2y^2)^2}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 2xy$ (luôn đúng).

BĐT (2) $\Leftrightarrow \dfrac{y^3}{y^3+(x+y)^3} \geq \dfrac{y^4}{(x^2+2y^2)^2}$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2)(x^2+3y^2) \geq y(x+y)^3.$

Ta có

$x^2+3y^2 = x^2+y^2+2y^2 \geq 2xy+2y^2 = 2y(x+y).$

Nên $(x^2+y^2)(x^2+3y^2) \geq \dfrac{1}{2}(x+y)^2.2y(x+y)$

$= y(x+y)^3$ suy ra BĐT (2) luôn đúng.

Từ (1) và (2) ta được $P \geq 1$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y$. Vậy $P_{\min} = 1$.

VÒNG 2

Câu 1. 1) ĐK $0 \leq x \leq 1$, PT đã cho tương đương với

$$\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}(\sqrt{1-x}+1) = 1$$

$\Leftrightarrow 3(\sqrt{1-x}+1) = \sqrt{x}+\sqrt{x+3}.$

Nếu $0 \leq x < 1$ thì $3\left(\sqrt{1-x}+1\right) > 3$ đồng thời $\sqrt{x}+\sqrt{x+3} < \sqrt{1}+\sqrt{4} = 3.$

Suy ra VT > VP. Thử lại, ta thấy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của PT.

2) Dễ thấy $x = y = 0$ là nghiệm của HPT. Xét $x \neq 0$, $y \neq 0$ HPT đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2} = 2 \\ \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^2 = 2+\dfrac{2}{xy} \\ \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\left(2+\dfrac{2}{xy}\right) = 8. \end{cases}$$

Suy ra $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^3 = 8$.

Từ đó, thu được $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} = 2 \\ \dfrac{1}{xy} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$

Vậy HPT đã cho có hai nghiệm $(x;y) = (0;0)$ và $(x;y) = (1;1)$.

Câu 2. 1) Kí hiệu $K = \left[\sqrt[3]{n-\dfrac{1}{27}}+\dfrac{1}{3}\right]$, do $n \geq 1$ nên $K \geq 1$. Ta có

$$K \leq \sqrt[3]{n-\frac{1}{27}}+\frac{1}{3} < K+1$$

$\Leftrightarrow \left(K-\dfrac{1}{3}\right)^3 \leq n-\dfrac{1}{27} < \left(K+\dfrac{2}{3}\right)^3$

$\Leftrightarrow K^3-K^2+\dfrac{K}{3}-\dfrac{1}{27} \leq n-\dfrac{1}{27}$

$< K^3+2K^2+\dfrac{4}{3}K+\dfrac{8}{27}$

$\Leftrightarrow K^3+\dfrac{K}{3} \leq n+K^2 < K^3+3K^2+\dfrac{4}{3}K+\dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow K^3 < n+K^2 < (K+1)^3.$

Vì vậy $n+K^2 = n+\left[\sqrt[3]{n-\dfrac{1}{27}}+\dfrac{1}{3}\right]^2$ không biểu diễn được dưới dạng lập phương của một số nguyên dương.

2) Vì $xy+yz+zx = 5$ nên ta có

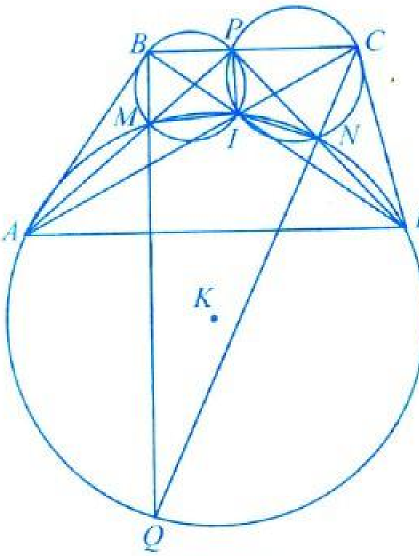
$$\sqrt{6(x^2+5)}+\sqrt{6(y^2+5)}+\sqrt{z^2+5}$$
$$= \sqrt{6(x+y)(x+z)}+\sqrt{6(y+z)(y+x)}$$
$$+\sqrt{(z+x)(z+y)}$$

$$\le \frac{3(x+y)+2(x+z)}{2}+\frac{3(x+y)+2(y+z)}{2}+\frac{(z+x)+(z+y)}{2}$$

$$=\frac{9x+9y+6z}{2}=\frac{3}{2}(3x+3y+2z).$$

Suy ra $P \ge \frac{2}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=1, z=2$. Vậy $P_{\min}=\frac{2}{3}$.

Câu 3. 1) (h. 1)



Hình 1

Tứ giác $BPIM$ nội tiếp và $AD//BC \Rightarrow \widehat{MAD}=\widehat{BPM}$ $=\widehat{BIM} \Rightarrow$ tứ giác $AMID$ nội tiếp. Tương tự tứ giác $DNIA$ nội tiếp. Vậy năm điểm A, M, I, N, D cùng thuộc một đường tròn (K).

2) (h. 1). Do các tứ giác $BPIM$ và $CPIN$ nội tiếp nên ta có $\widehat{QMI}=\widehat{BPI}=\widehat{CNI} \Rightarrow$ tứ giác $MINQ$ nội tiếp. Mà $M, I, N \in (K)$ nên $Q \in (K)$.

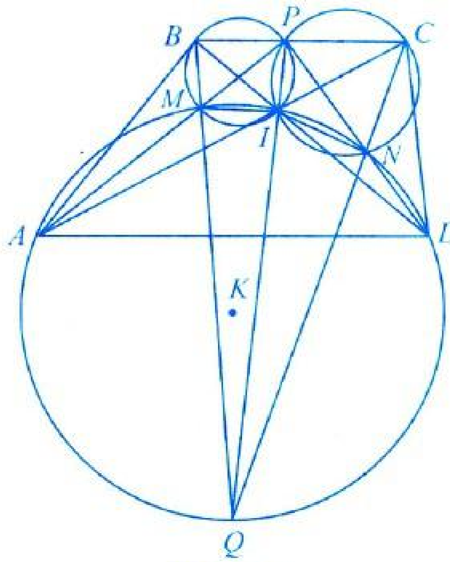
3) (h. 2). Khi P, I, Q thẳng hàng, kết hợp với $Q \in (K)$, ta có

$\widehat{AIQ}=\widehat{PIC}$ (đối đỉnh),

$\widehat{PIC}=\widehat{PNC}$ (do tứ giác $NIPC$ nội tiếp),

$\widehat{PNC}=\widehat{QND}$ (đối đỉnh),

$\widehat{QND}=\widehat{QID}$ (do tứ giác $INDQ$ nội tiếp)



Hình 2

$\Rightarrow \widehat{AIQ}=\widehat{QID} \Rightarrow IQ$ là phân giác của góc $\widehat{DIA}$ nên IP là phân giác của góc $\widehat{BIC}$.

Do đó $\frac{PB}{PC}=\frac{IB}{IC}=\frac{ID}{IA}=\frac{IB+ID}{IC+IA}=\frac{BD}{AC}$ (đpcm).

Câu 4. Giả sử A có n số, ta sắp xếp chúng theo thứ tự

$$1=x_1<x_2<x_3<\cdots\cdots<x_n=100 \qquad (1)$$

Suy ra với mỗi $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$, ta có

$$x_{k+1}=x_i+x_j \le x_k+x_k=2x_k \text{ với } 1\le i,j\le k \quad (2)$$

Áp dụng kết quả (2), thu được $x_2 \le 1+1=2$, $x_3 \le 2+2=4$, $x_4 \le 8, x_5 \le 16$, $x_6 \le 32, x_7 \le 64$. Suy ra tập A phải có ít nhất 8 phần tử.

+) Giả sử $n=8 \Rightarrow x_8=100$.

Vì $x_6+x_7 \le 32+64=96 \Rightarrow x_8=2x_7 \Rightarrow x_7=50$.

Vì $x_5+x_6 \le 16+32=48 \Rightarrow x_7=2x_6 \Rightarrow x_7=25$.

Vì $x_4+x_5 \le 8+16=24<25 \Rightarrow x_6=2x_5$

$\Rightarrow x_5=\frac{25}{2}$ (mâu thuẫn).

+) Giả sử $n=9$, khi đó ta có tập $\{1, 2, 3, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán .

Đáp số. $n=9$.

PHẠM VĂN HÙNG
(*GV THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội*) giới thiệu.

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

Khi giải các bài toán liên quan đến khảo sát hàm số nhiều học sinh đã không để ý đến tính chất hình học của nó, trong khi sử dụng những tính chất đó giúp ta giải bài toán nhanh hơn và đơn giản hơn. Để giúp các bạn ôn thi Đại học, Cao đẳng có hiệu quả, chúng tôi xin đưa ra một số thí dụ để minh hoạ cho các dạng toán mà khi gặp các bạn có thể giải quyết dễ dàng.

TÍNH CHẤT HÌNH HỌC trong các bài toán liên quan đến khảo sát hàm số

KIỀU ĐÌNH MINH
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

★Thí dụ 1. *Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}$, biết rằng tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB cân tại O.*

Lời giải. Từ giả thiết bài ra, vì tam giác OAB cân tại O nên đường thẳng AB phải song song với một trong hai đường thẳng có PT $y=x$ hoặc $y=-x$.

Ta có $y'=\dfrac{1}{(x+1)^2}>0,\forall x\neq -1$. Gọi $M_0(x_0;y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị hàm số.

$$y'(x_0)=1\Leftrightarrow \frac{1}{(x_0+1)^2}=1 \Leftrightarrow x_0=-2; x_0=0.$$

• Với $x_0=0$ thì $y_0=0$. PT tiếp tuyến là $y=1.(x-0)+0\Leftrightarrow y=x$ (loại vì khi đó $A\equiv B$).

• Với $x_0=-2$ thì $y_0=2$. PT tiếp tuyến là $y=1.(x+2)+2\Leftrightarrow y=x+4$ (thoả mãn).

Kết luận. Tiếp tuyến cần tìm có PT $y=x+4$. □

★Thí dụ 2. *Giả sử Δ là tiếp tuyến tại điểm $M(0;1)$ của đồ thị hàm số*

$$y=\frac{2x+1}{1-x}\ (C)$$

Hãy tìm trên (C) những điểm có hoành độ lớn hơn 1 mà khoảng cách từ đó đến Δ là ngắn nhất.

Lời giải. Khoảng cách từ một điểm trên (C) tới đường thẳng Δ là ngắn nhất khi và chỉ khi điểm đó là tiếp điểm của đồ thị (C) với tiếp tuyến song song với Δ.

Ta có $y'=\dfrac{3}{(1-x)^2}, y'(0)=3$. PT tiếp tuyến của (C) là $\Delta: y=3x+1$.

Gọi $N(x_0;y_0)\in(C)\ (x_0>1)$ có khoảng cách tới Δ ngắn nhất, thế thì x_0 là nghiệm của PT

$$y'(x_0)=3\Leftrightarrow\frac{3}{(1-x_0)^2}=3\Leftrightarrow x_0=2;\ x_0=0\ (\text{loại}).$$

Với $x_0=2$ thì $y_0=-5$. Vậy $N(2;-5)$ là điểm cần tìm. □

★Thí dụ 3. *Lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(-2;0)$ sao cho khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=-x^3+3x-2$ đến d là lớn nhất.*

Lời giải. Ta có $y'=-3x^2+3=-3(x^2-1), y'=0 \Leftrightarrow x=\pm1$. Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $M(1;0)$. Hạ $MH\perp d$, ta có $MH\le MA, MH=MA \Leftrightarrow H\equiv A\Leftrightarrow d\perp MA\Leftrightarrow d\perp Ox$.

Mặt khác d lại đi qua $A(-2;0)$, vậy PT của đường thẳng d là $x=-2$. □

★Thí dụ 4. *Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-m}{x-2}\ (m\neq 2)$ có ít nhất một điểm cách đều hai trục toạ độ, đồng thời* *hoành độ và tung độ của điểm đó trái dấu nhau.*

Lời giải. Những điểm cách đều hai trục tọa độ có hoành độ và tung độ trái dấu nhau sẽ nằm trên đường thẳng $y=-x$. Giả sử $M(x;y)$ là điểm thoả mãn đề bài thì ta có phương trình

$$-x=\frac{x-m}{x-2}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x-m=0\ (*)\\ x\neq 2.\end{cases}$$

Phương trình (*) có ít nhất một nghiệm khác 2 khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\Delta=1+4m\geq 0\\ 2-m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\geq -\dfrac{1}{4}\\ m\neq 2\end{cases}.\ \square$$

★Thí dụ 5. *Tìm các giá trị của m để hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$ có ba điểm cực trị, đồng thời các điểm cực trị của đồ thị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.*

Lời giải. Ta có $y'=4x^3-4mx=4x(x^2-m)$, $y'=0$ $\Leftrightarrow x=0, x^2=m$. Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $m>0$.

Gọi $A(-\sqrt{m};-m^2+m-1); B(0;m-1)$;

$C(\sqrt{m};-m^2+m-1)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số. Dễ thấy tam giác ABC cân tại B và tâm I của đường tròn ngoại tiếp thuộc trục tung. Giả sử $I(0;b)$, ta có

$$IA=IB=1\Leftrightarrow\begin{cases}(-\sqrt{m})^2+(-m^2+m-1-b)^2=1\\ (m-1-b)^2=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(-m^2+m-1-b)^2=1-m\\ (m-1-b)^2=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(-m^2+1)^2=1-m\\ (-m^2-1)^2=1-m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^4-2m^2+1=1-m\\ m^4+2m^2+1=1-m\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m(m^3-2m+1)=0\\ m(m^3+2m+1)=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow m^3-2m+1=0\ (\text{do } m>0)$$

$$\Leftrightarrow m=1;\ m=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.\ \square$$

★Thí dụ 6. *Tìm m để hàm số*

$$y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+(10m-7)x-\frac{8}{3}$$

có cực đại, cực tiểu, đồng thời các điểm cực trị nằm về hai phía của đường thẳng $\Delta: y=-x-1$.

Lời giải. Ta có $y'=x^2-4x+10m-7$,

Hàm số đã cho có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi $y'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Leftrightarrow \Delta'=11-10m>0\Leftrightarrow m<\dfrac{11}{10}$. Gọi

$A\left(x_1;\dfrac{20m-22}{3}.(x_1+1)\right); B\left(x_2;\dfrac{20m-22}{3}.(x_2+1)\right)$

là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

A và B nằm khác phía nhau đối với đường thẳng $\Delta: x+y+1=0$ khi và chỉ khi

$$\left(x_1+\frac{20m-22}{3}(x_1+1)+1\right)\times\left(x_2+\frac{20m-22}{3}(x_2+1)+1\right)<0$$

$$\Leftrightarrow(x_1+1)(x_2+1)\left(\frac{20m-19}{3}\right)^2<0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq\dfrac{19}{20}\\ x_1x_2+x_1+x_2+1<0\end{cases}\ (*)$$

Theo định lí Viète ta có $x_1+x_2=4; x_1x_2=10m-7$, thay vào hệ (*) ta được

$$\begin{cases}m\neq\dfrac{19}{20}\\ 10m-2<0\end{cases}\Leftrightarrow m<\frac{1}{5}.\ \square$$

★Thí dụ 7. *Tính khoảng cách giữa hai nhánh của đồ thị hàm số*

$$y=\frac{2x}{x+2}\ (C)$$

Lời giải. Giả sử (C_1) và (C_2) là hai nhánh của đồ thị hàm số và

$$M\left(a;\frac{2a}{a+2}\right)\in(C_1)\ (a>-2);$$

$$N\left(b;\frac{2b}{b+2}\right)\in(C_2)\ (b<-2).$$

Ta có $y'=\dfrac{4}{(x+2)^2}$, $\overrightarrow{MN}=\left(b-a;\dfrac{2b}{b+2}-\dfrac{2a}{a+2}\right)$, tiếp tuyến với (C) tại M có PT là

$$y=\frac{4}{(a+2)^2}(x-a)+\frac{2a}{a+2}$$

$$\Leftrightarrow 4x-(a+2)^2y+2a^2=0.$$

Ta thấy MN là khoảng cách của hai nhánh (C_1), (C_2) khi và chỉ khi tiếp tuyến tại M, N với (C_1) và (C_2) song song với nhau và chúng vuông góc với đường thẳng chứa MN. Điều đó tương đương với

$$\begin{cases}\dfrac{4}{(a+2)^2}=\dfrac{4}{(b+2)^2} & (1)\\ (b-a)(a+2)^2+4\left(\dfrac{2b}{b+2}-\dfrac{2a}{a+2}\right)=0 & (2)\end{cases}$$

Từ (1) suy ra $b=-4-a$, thay vào (2) ta có

$$(-4-2a)(a+2)^2+4\left(\frac{-8-2a}{-2-a}-\frac{2a}{a+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -2(a+2)^4+32=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ (do } a>-2).$$

Suy ra $b=-4$ và $\overrightarrow{MN}=(-4;4)$.

Do đó $MN=4\sqrt{2}$. □

★Thí dụ 8. *Gọi A, B là giao điểm của đường thẳng $y=\frac{1}{6}x$ với đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$. Tìm điểm M thuộc đường phân giác góc phần tư thứ nhất sao cho tổng MA + MB nhỏ nhất.*

Lời giải. Toạ độ A và B là nghiệm của hệ PT

$$\begin{cases}y=\dfrac{1}{6}x\\ y=\dfrac{x-1}{x+1}\end{cases}\Rightarrow A\left(2;\frac{1}{3}\right);B\left(3;\frac{1}{2}\right).$$

Dễ thấy A và B nằm về cùng phía đối với đường phân giác $\Delta: x-y=0$. Gọi $A'(a;b)$ là điểm đối xứng của A qua $\Delta: x-y=0$, thế thì

$$\begin{cases}(a-2).1+\left(b-\dfrac{1}{3}\right).1=0\\ \dfrac{a+2}{2}-\dfrac{b+\frac{1}{3}}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\\ b=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow A'\left(\frac{1}{3};2\right)\Rightarrow \overrightarrow{A'B}=\left(\frac{8}{3};-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{6}(16;-9).$$

PT tham số của $A'B$ là $\begin{cases}x=3+16t\\ y=\dfrac{1}{2}-9t\end{cases}(t\in\mathbb{R}).$

Khi ấy M là giao điểm của $A'B$ với Δ, toạ độ của M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x-y=0\\ x=3+16t\\ y=\dfrac{1}{2}-9t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=3+16t\\ 3+16t=\dfrac{1}{2}-9t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{7}{5}\\ y=\dfrac{7}{5}.\end{cases}$$

Vậy điểm cần tìm là $M\left(\frac{7}{5};\frac{7}{5}\right)$. □

BÀI TẬP

1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x+2}{2x+3}$ biết tiếp tuyến cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A và B sao cho tam giác OAB cân tại O.

2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ biết tiếp tuyến cắt tiệm cận đứng, tiệm cận ngang lần lượt tại A, B sao cho tam giác IAB cân, với I là giao điểm của hai đường tiệm cận.

3. Tính khoảng cách giữa hai nhánh của đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x-2}(C)$

4. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+2m+m^4$.
Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có cực đại, cực tiểu, đồng thời các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị lập thành một tam giác đều.

Đọc lại cho đúng

Trên Tạp chí TH&TT số 406 (4.2011) trang 5 đề bài ở Thí dụ 1 chưa chính xác. Nhà giáo Trần Trọng Thuyết (Bắc Ninh) đã đề nghị sửa lại đề bài như sau:

*Một tổ học sinh gồm 9 em, trong đó có 3 nữ được chia thành 3 nhóm đều nhau, **nhóm học hát, nhóm học đàn, nhóm học múa.** Tính xác suất để mỗi nhóm có 1 nữ.*

Xin cảm ơn nhà giáo Trần Trọng Thuyết và thành thật xin lỗi bạn đọc.

THTT

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

VỀ ĐIỂM BROCARD trong tam giác

NGUYỄN TIÊN TIẾN
(GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình)

Trong bài viết này, chúng tôi xin được giới thiệu một số kết quả có tính chất định lượng về điểm Brocard trong tam giác.

I. ĐỊNH NGHĨA

Cho tam giác ABC. Khi đó có đúng hai điểm B_1 và B_2 nằm trong tam giác ABC sao cho

$$\widehat{BCB_1} = \widehat{CAB_1} = \widehat{ABB_1} = \omega_1 \text{ (h. 1)};$$
$$\widehat{BCB_2} = \widehat{CAB_2} = \widehat{ABB_2} = \omega_2.$$

Các điểm B_1 và B_2 được gọi là *điểm Brocard* của tam giác ABC. Các góc ω_1 và ω_2 được gọi là *góc Brocard* tương ứng.

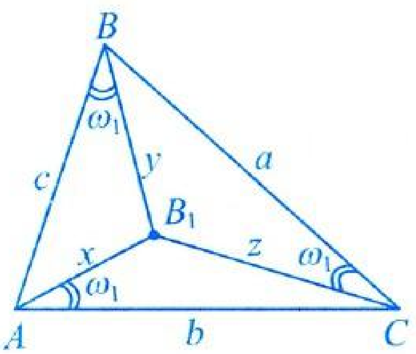
Trong bài viết này chúng tôi chỉ trình bày một số kết quả về điểm Brocard B_1.

II. MỘT SỐ TÍNH CHẤT VỀ GÓC BROCARD

✦**Tính chất 1.** Giả sử ω_1 là góc Brocard tương ứng với điểm Brocard B_1 của tam giác ABC ($BC = a, AC = b, AB = c$). Khi đó

$$\cot\omega_1 = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S_{ABC}}.$$

Chứng minh. (h. 1).



Hình 1

Đặt $AB_1 = x$, $BB_1 = y, CB_1 = z$.

Áp dụng định lí côsin cho các tam giác ABB_1, BCB_1, CAB_1, ta có

$$c^2 + y^2 - x^2 = 2cy\cos\omega_1 = 4S_{ABB_1}.\cot\omega_1;$$
$$a^2 + z^2 - y^2 = 2az\cos\omega_1 = 4S_{BCB_1}.\cot\omega_1;$$
$$b^2 + x^2 - z^2 = 2bx\cos\omega_1 = 4S_{CAB_1}.\cot\omega_1.$$

Cộng vế theo vế các đẳng thức trên ta được

$$a^2+b^2+c^2=4S_{ABC}.\cot\omega_1 \Leftrightarrow \cot\omega_1=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S_{ABC}}.$$

Nhận xét. Từ tính chất 1 ta có $\omega_1 = \omega_2$. Vì vậy, ta kí hiệu ω chung cho cả hai điểm Brocard.

Hệ quả. Giả sử ω là góc Brocard của tam giác ABC. Khi đó

1) $\cot\omega = \cot A + \cot B + \cot C$.

2) $\cot\omega = \dfrac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2\sin A.\sin B.\sin C}$.

✦**Tính chất 2.** Giả sử ω là góc Brocard của tam giác ABC. Khi đó

$$\frac{1}{\sin^2\omega} = \frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C}.$$

Chứng minh. Đặt $AB_1 = x$, $BB_1 = y, CB_1 = z$.

Ta có $\widehat{CAB_1} + \widehat{ACB_1} = \widehat{BCB_1} + \widehat{ACB_1} = \widehat{ACB}$.

Xét tam giác ACB_1, ta có $\widehat{AB_1C} = 180^0 - \widehat{ACB}$.

Do đó $\sin\widehat{AB_1C} = \sin C$.

Áp dụng định lí sin cho tam giác AB_1C, ta có

$$\frac{b}{\sin\widehat{AB_1C}} = \frac{z}{\sin\omega} \Rightarrow z = \frac{b\sin\omega}{\sin C}.$$

Tương tự $x = \dfrac{c\sin\omega}{\sin A}$; $y = \dfrac{a\sin\omega}{\sin B}$.

Mặt khác $S_{AB_1C}=\frac{1}{2}zx\sin\widehat{AB_1C}$

$$=\frac{1}{2}.\frac{b\sin\omega}{\sin C}.\frac{c\sin\omega}{\sin A}.\sin C=S_{ABC}.\frac{\sin^2\omega}{\sin^2 A}.$$

Tương tự $S_{CB_1B}=S_{ABC}.\frac{\sin^2\omega}{\sin^2 C}$;

$$S_{BB_1A}=S_{ABC}.\frac{\sin^2\omega}{\sin^2 B}.$$

Kết hợp với hệ thức $S_{AB_1C}+S_{CB_1B}+S_{BB_1A}=S_{ABC}$ ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Từ tính chất 2, ta có

$$4R^2\sin^2\omega=\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

✦**Tính chất 3.** Giả sử ω là góc Brocard của tam giác ABC. Khi đó

$$\frac{1}{2}\min\{A,B,C\}\le\omega\le 30^\circ.$$

Chứng minh. 1) Chứng minh $\omega\le 30^\circ$.

Hiển nhiên có $\omega<\min\{A,B,C\}\le 60^\circ$.

Từ các bất đẳng thức

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\le\frac{9}{4};$$

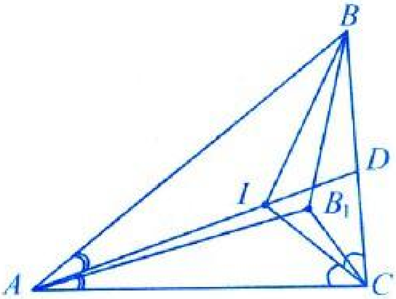
$$\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}\ge\frac{9}{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C};$$

và tính chất 2, suy ra

$$\sin^2\omega\le\frac{1}{4}\Rightarrow\sin\omega\le\frac{1}{2}\Rightarrow\omega\le 30^\circ.$$

2) Chứng minh $\frac{1}{2}\min\{A,B,C\}\le\omega$.

Không giảm tính tổng quát giả sử $A\le B\le C$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và D là giao điểm của AI và BC (h. 2).



Hình 2

Giả sử $\omega<\frac{1}{2}A$. Khi đó $\omega=\widehat{CAB_1}<\frac{1}{2}A=\widehat{CAI}$ nên tia AB_1 nằm trong góc $\widehat{CAI}$; $\omega=\widehat{BCB_1}<\frac{1}{2}C=\widehat{BCI}$ nên tia CB_1 nằm trong góc $\widehat{BCI}$.

Vậy điểm B_1 nằm trong tam giác ICD và nằm ngoài tam giác IAB, do đó

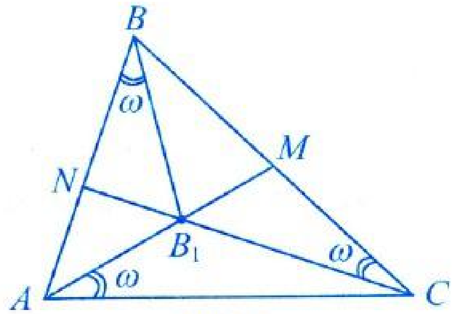
$$\omega=\widehat{ABB_1}>\widehat{ABI}=\frac{1}{2}B\ge\frac{1}{2}A.$$

Điều này mâu thuẫn.

Vậy $\omega\ge\frac{1}{2}A$ hay $\frac{1}{2}\min\{A,B,C\}\le\omega$.

III. HỆ THỨC VECTƠ LIÊN QUAN ĐẾN ĐIỂM BROCARD

Giả sử AB_1, CB_1 kéo dài cắt các cạnh BC và BA lần lượt tại M và N (h. 3).



Hình 3

Khi đó ta có

$$\frac{BM}{CM}=\frac{S_{ABM}}{S_{ACM}}=\frac{c.\sin(A-\omega)}{b\sin\omega}$$

$$=\frac{c}{b}.\frac{\sin A.\cos\omega-\cos A.\sin\omega}{\sin\omega}$$

$$\Leftrightarrow\frac{BM}{MC}=\frac{c}{b}(\sin A.\cot\omega-\cos A).$$

Áp dụng hệ thức $\cot\omega=\cot A+\cot B+\cot C$, ta được

$$\frac{BM}{MC}=\frac{c}{b}.\sin A.(\cot B+\cot C)=\frac{c}{b}.\frac{\sin^2 A}{\sin B.\sin C}=\frac{a^2}{b^2}.$$

Tương tự, ta cũng có $\frac{AN}{NB}=\frac{c^2}{a^2}$.

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ABM với cát tuyến NB_1C ta được

$$\frac{AN}{NB}.\frac{BC}{CM}.\frac{MB_1}{B_1A}=1 \Rightarrow \frac{MB_1}{B_1A}=\frac{a^2b^2}{c^2\left(a^2+b^2\right)},$$

suy ra $a^2b^2\overrightarrow{B_1A}=-c^2\left(a^2+b^2\right)\overrightarrow{B_1M}$.

Từ $\frac{BM}{MC}=\frac{a^2}{b^2}\Rightarrow b^2\overrightarrow{BM}=a^2\overrightarrow{MC}$

$$\Rightarrow b^2\overrightarrow{B_1B}+a^2\overrightarrow{B_1C}=\left(a^2+b^2\right)\overrightarrow{B_1M}.$$

Vậy ta có hệ thức

$$a^2b^2\overrightarrow{B_1A}+b^2c^2\overrightarrow{B_1B}+c^2a^2\overrightarrow{B_1C}=\vec{0}.$$

IV. KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM BROCARD ĐẾN CÁC ĐIỂM ĐẶC BIỆT TRONG TAM GIÁC

Từ hệ thức vectơ trên, với mọi điểm M ta có

$$\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\overrightarrow{MB_1}$$
$$=a^2b^2\overrightarrow{MA}+b^2c^2\overrightarrow{MB}+c^2a^2\overrightarrow{MC}.$$

Bình phương hai vế và khai triển, ta được

$$MB_1^2=\frac{\left(a^2b^2MA^2+b^2c^2MB^2+c^2a^2MC^2\right)-a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \quad (*)$$

1. Khoảng cách từ điểm Brocard đến đỉnh của tam giác

Lần lượt cho $M\equiv A;\ M\equiv B;\ M\equiv C$, ta được

$$AB_1^2=\frac{b^2c^4}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2};$$
$$BB_1^2=\frac{c^2a^4}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2};$$
$$CB_1^2=\frac{a^2b^4}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

2. Khoảng cách từ điểm Brocard đến tâm O đường tròn ngoại tiếp

Do $OA=OB=OC=R$ nên khi $M\equiv O$, từ (*) ta có

$$OB_1^2=R^2-\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}=R^2\left(1-4\sin^2\omega\right).$$

3. Khoảng cách từ điểm Brocard đến tâm I đường tròn nội tiếp

Do $IA^2=bc-4Rr; IB^2=ca-4Rr; IC^2=ab-4Rr$ nên khi $M\equiv I$, từ (*) ta có

$$IB_1^2=\frac{\left(a^2b^2IA^2+b^2c^2IB^2+c^2a^2IC^2\right)-a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$
$$=\frac{abc\left(ab^2+b^2c+c^2a-abc\right)}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}-4Rr.$$

4. Khoảng cách từ điểm Brocard đến trọng tâm G

Do $GA^2=\frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{9}$; $GB^2=\frac{2\left(c^2+a^2\right)-b^2}{9}$;

$GC^2=\frac{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}{9}$ nên khi $M\equiv G$, ta có

$$GB_1^2=\frac{\left(a^2b^2GA^2+b^2c^2GB^2+c^2a^2GC^2\right)-a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$
$$=\frac{2}{9}\left(a^2+b^2+c^2\right)-\frac{3(abc)^2-\left(a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2\right)}{3\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)}.$$

5. Khoảng cách từ điểm Brocard đến trực tâm H

Do $HA^2=4R^2-a^2; HB^2=4R^2-b^2; HC^2=4R^2-c^2$

nên khi $M\equiv H$, từ (*) ta có

$$HB_1^2=\frac{\left(a^2b^2HA^2+b^2c^2HB^2+c^2a^2HC^2\right)-a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$
$$=4R^2-\frac{(abc)^2-\left(a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2\right)}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

V. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Chứng minh rằng với ω là góc Brocard của tam giác ABC ta có các kết quả sau:

1. $\sin\omega\ge 2\left(\frac{r}{R}\right)^2$.

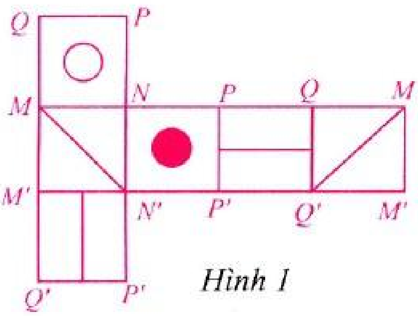
2. $\omega^3\le(A-\omega)(B-\omega)(C-\omega)$.

Trên đây là một số kết quả về điểm Brocard B_1. Tương tự ta cũng có các kết quả về điểm Brocard B_2. Rất mong được sự trao đổi của các bạn cùng quan tâm đến vấn đề này.

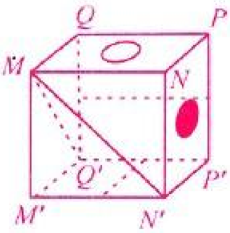
Giải đáp: HÌNH LẬP PHƯƠNG NÀO?

(Đề đăng trên THTT số 405, tháng 3 năm 2011)

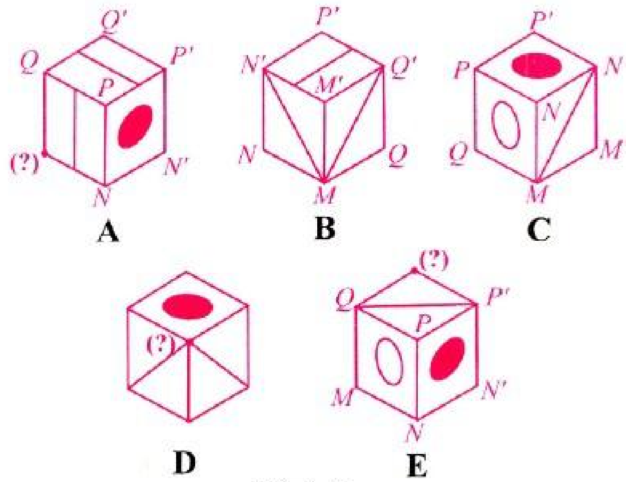
Ta cuộn các mặt hình vuông ở hình 1 để tạo thành hình lập phương (phóng to như ở hình 3). Kí hiệu các đỉnh của hình lập phương ở hình 1 và hình 3 là $MNPQ.M'N'P'Q'$. Ta đặt kí hiệu các đỉnh của các hình lập phương **B** và **C** phù hợp với hình 1 và hình 3, còn đối với các hình lập phương **A, D, E** thì có những đỉnh (ghi dấu ?) không đặt được kí hiệu phù hợp với hình 1 và hình 3.



Hình 1



Hình 3

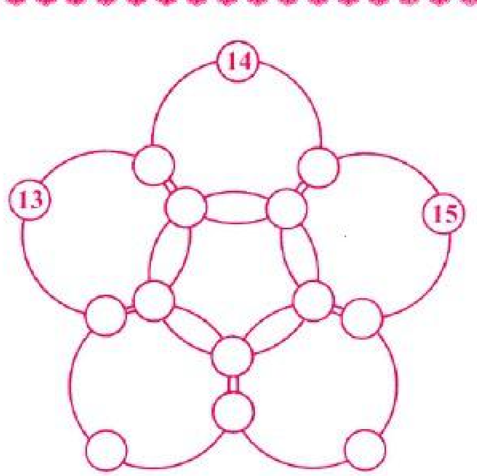


Hình 2

1) *Nguyễn Hoàng Duy Thành*, 10 Lí, THPT chuyên **Quảng Bình**.
2) *Nguyễn Ngọc Minh*, 10A2 K18, THPT Thái Hòa, Nghĩa Đàn, **Nghệ An.**
3) *Nguyễn Quang Trọng*, 10A1, THPT Tây Tiền Hải, Tiền Hải, **Thái Bình**.
4) *Bùi Thị Thúy*, 12A3, THPT Lê Hoàn, Thọ Xuân, **Thanh Hóa**.
5) *Trần Thị Mỹ Ánh*, 11A1, PT cấp II-III Phan Chu Trinh, TX. Sông Cầu, **Phú Yên**.
6) *Đinh Việt Thắng*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**.
7) *Đào Việt Anh*, 10 Toán 1, THPT chuyên **Hưng Yên**.
8) *Trần Quang Khanh*, 11TN2, THTP Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn, **Bình Định**.

ĐAN QUỲNH

SÁU VÒNG TRÒN SỐ



Bạn hãy điền thêm các số từ 1 đến 12 vào những ô tròn trên sáu vòng tròn ở hình bên sao cho tổng của năm số trên mỗi vòng tròn đều bằng 35.

NGUYỄN VĂN HIẾU
(Số 80 đường Xuân 68, TP. Huế, Thừa Thiên - Huế)

Có nhiều cách để xây dựng bất đẳng thức (BĐT) nói chung và BĐT trong tam giác nói riêng, như bài viết "Hình thành bất đẳng thức trong tam giác từ một bất đẳng thức cơ bản" của tác giả Thái Viết Thảo đăng trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 348 và 349. Trong phạm vi bài viết này xin trình bày một cách để hình thành BĐT trong tam giác.

MỘT CÁCH SÁNG TẠO BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC

PHẠM BÌNH NGUYÊN
(GV THPT Kon Tum)

Cho tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi p, R, r lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

I. MỘT SỐ KẾT QUẢ CƠ BẢN

1. Về ba cạnh của tam giác

Ba cạnh a, b, c của tam giác ABC là nghiệm của phương trình

$$t^3 - 2pt^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)t - 4pRr = 0 \quad (1)$$

Chứng minh. Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC và công thức góc nhân đôi ta có

$$a = 2R\sin A = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} \qquad (*)$$

Theo công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp thì

$$p - a = r\cot\frac{A}{2} = \frac{r\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} \qquad (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{ar}{4R(p-a)};\quad \cos^2\frac{A}{2} = \frac{a(p-a)}{4Rr}.$$

Từ đó suy ra $\dfrac{ar}{4R(p-a)} + \dfrac{a(p-a)}{4Rr} = 1.$

$$\Leftrightarrow r^2a + a(p-a)^2 = 4Rr(p-a)$$

$$\Leftrightarrow a^3 - 2pa^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)a - 4Rrp = 0.$$

Vậy a là nghiệm của PT (1). Tương tự b và c cũng là nghiệm của PT (1), từ đó ta được đpcm. ❒

2. Các bất đẳng thức đối xứng cơ bản

Cho a, b, c là các số thực dương, đặt

$$\begin{cases} P = a + b + c \\ Q = ab + bc + ca \\ K = abc. \end{cases}$$

Khi đó ta có các bất đẳng thức sau

1) $P^2 \geq 3Q$ (2)

2) $P^3 \geq 27K$ (3)

3) $PQ \geq 9K$ (4)

4) $P^3 + 9K \geq 4PQ$ (5)

5) $2P^3 + 9K \geq 7PQ$ (6)

6) $P^2Q + 3PK \geq 4Q^2$ (7)

7) $Q^2 \geq 3PK$ (8)

Chứng minh

1) Ta có $P^2 \geq 3Q$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0.$$

BĐT cuối cùng luôn đúng suy ra BĐT (2) đúng.

2) Ta có $P^3 \geq 27K \Leftrightarrow (a+b+c)^3 \geq 27abc$

$$\Leftrightarrow a + b + c \geq \sqrt[3]{abc}.$$

BĐT cuối cùng đúng do BĐT $AM - GM$ suy ra BĐT (3) đúng.

3) Ta có $PQ \geq 9K$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc$$

$$\Leftrightarrow a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 \geq 0.$$

BĐT cuối cùng luôn đúng với mọi a, b, c dương, suy ra BĐT (4) đúng.

4) Ta có $P^3+9K\geq 4PQ$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^3+9abc\geq 4(a+b+c)(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\geq 0.$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\geq b\geq c>0$. Khi đó $a(a-b)(a-c)\geq b(a-b)(b-c)$

$\Leftrightarrow a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)\geq 0.$

Mặt khác $c(c-a)(c-b)\geq 0$. Vậy

$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\geq 0$

BĐT cuối cùng luôn đúng với mọi a, b, c dương, suy ra BĐT (5) đúng.

5) Ta có $2P^3+9K\geq 7PQ$

$\Leftrightarrow 2(a+b+c)^3+9abc\geq 7(a+b+c)(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2+(b+c)(b-c)^2+(c+a)(c-a)^2\geq 0.$

BĐT cuối cùng luôn đúng với mọi a, b, c dương, suy ra BĐT (6) đúng.

6) Ta có $P^2Q+3PK\geq 4Q^2$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^2(ab+bc+ca)+3(a+b+c)abc$

$\geq 4(ab+bc+ca)^2$

$\Leftrightarrow ab(a-b)^2+bc(b-c)^2+ca(c-a)^2\geq 0.$

BĐT cuối cùng luôn đúng với mọi a, b, c dương, suy ra BĐT (7) đúng.

7) Ta có $Q^2\geq 3PK$

$\Leftrightarrow (ab+bc+ca)^2\geq 3(a+b+c)abc$

$\Leftrightarrow b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2+a^2(b-c)^2\geq 0.$

BĐT cuối cùng luôn đúng với mọi a, b, c, suy ra BĐT (8) đúng.

Ở các bất đẳng thức trên, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$, hay tam giác ABC đều. □

II. HÌNH THÀNH CÁC BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC

Ta có a, b, c là ba nghiệm của PT (1) nên

$$\begin{cases} P=a+b+c=2p \\ Q=ab+bc+ca=p^2+r^2+4Rr \\ K=abc=4pRr. \end{cases}$$

1) Áp dụng vào BĐT (2) ta có

$P^2\geq 3Q \Leftrightarrow (2p)^2\geq 3(p^2+r^2+4Rr).$

Từ đó suy ra BĐT $p^2\geq 3r^2+12Rr$ (9)

2) Áp dụng vào BĐT (3) ta có

$P^3\geq 27K \Leftrightarrow (2p)^3\geq 27.(4pRr).$

Từ đó, suy ra BĐT $2p^2\geq 27Rr$ (10)

3) Áp dụng vào BĐT (4) ta có

$PQ\geq 9K \Leftrightarrow 2p(p^2+r^2+4Rr)\geq 9.(4pRr).$

Từ đó suy ra BĐT $p^2+r^2\geq 14Rr$ (11)

4) Áp dụng vào BĐT (5) ta được

$P^3+9K\geq 4PQ$

$\Leftrightarrow (2p)^3+9.(4pRr)\geq 4.2p(p^2+r^2+4Rr).$

Khai triển và rút gọn ta được $R\geq 2r$ (12)

5) Áp dụng vào BĐT (6) ta được

$2P^3+9K\geq 7PQ$

$\Leftrightarrow 2.(2p)^3+9.(4pRr)\geq 7.(2p).(p^2+r^2+4Rr).$

Khai triển và rút gọn ta được

$p^2\geq 7r^2+10Rr$ (13)

6) Áp dụng vào BĐT (7) ta được

$P^2Q+3PK\geq 4Q^2$

$\Leftrightarrow (2p)^2(p^2+r^2+4Rr)+3.(2p).(4pRr)$

$\geq 4(p^2+r^2+4Rr)^2.$

Khai triển và rút gọn ta được

$2p^2Rr\geq p^2r^2+r^4+16R^2r^2+8Rr^3$ (14)

7) Áp dụng vào BĐT (8) ta được

$Q^2\geq 3PK \Leftrightarrow (p^2+r^2+4Rr)^2\geq 3.(2p).(4pRr).$

Từ đó ta có BĐT

$p^2+r^2+4Rr\geq 2S.\dfrac{\sqrt{6R}}{\sqrt{r}}$ (15)

Các bạn hãy tự chứng minh các BĐT trên.

Bằng cách làm tương tự, ta có được một loạt các bất đẳng thức khác, sau đây là bài tập đề nghị.

BÀI TẬP

Chứng minh rằng với mỗi tam giác ABC ta có

1. $ab+bc+ca\leq 2(p^2-r^2-4Rr)$.
2. $p\geq 3\sqrt{3}r$.
3. $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S$.
4. $p^2\geq 8Rr+11r^2$.
5. $4R^2\geq p^2-3r^2-4Rr$.
6. $p^2+5r^2\geq 16Rr$.
7. $p^2+r^2+4Rr\geq 4\sqrt{3}S$.
8. $p\leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}R$.
9. $9R^2\geq 2p^2-2r^2-8Rr$.
10. $\sqrt{3}\leq r+4R$.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/411.(Lớp 6). Đặt các số tự nhiên 1, 2 ..., 2011^2 trên một bảng ô vuông kích thước 2011×2011, mỗi số ở một ô. Chứng minh rằng tồn tại hai ô vuông kề nhau (là hai ô vuông hoặc có chung một cạnh, hoặc có chung một đỉnh) mà hiệu của hai số đặt ở đó không nhỏ hơn 2012.

TRẦN MINH HIỀN
(GV THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước)

Bài T2/411. (Lớp 7). Tính tổng gồm 2009 thừa số sau

$$S=\left(1+\frac{1}{1.3}\right)\left(1+\frac{1}{2.4}\right)\left(1+\frac{1}{3.5}\right)...\left(1+\frac{1}{2009.2011}\right).$$

NGUYỄN THỊ MINH
(GV THCS Cao Viên, Thanh Oai, Hà Nội)

Bài T3/411. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức

$$x^3+x^2y+xy^2+y^3=4(x^2+y^2+xy+3).$$

TRỊNH XUÂN TÌNH
(GV THPT Phú Xuyên B, Hà Nội)

Bài T4/411. Cho tam giác ABC. M là điểm nằm trong tam giác. Gọi P, Q, R, H, G lần lượt là trọng tâm của các tam giác MBC, MAC, MAB, PQR, ABC. Chứng minh rằng ba điểm M, H, G thẳng hàng.

LÊ XUÂN DƯƠNG
(GV THCS Lý Thường Kiệt, Yên Mỹ, Hưng Yên)

Bài T5/411. Cho a, b, c là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$$\frac{4}{(a+b)^3}+\frac{4}{(b+c)^3}+\frac{4}{(c+a)^3}\ge\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$$

DƯƠNG ĐỨC LÂM
(SV K59B Khoa Toán Tin, ĐHSP Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/411. Giả sử đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại D, E, F. Đường thẳng qua A và song song với BC cắt EF tại K. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng IM vuông góc với DK.

TRẦN QUANG VINH
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bà Rịa - Vũng Tàu)

Bài T7/411. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{3}}=x+y\\ x\sqrt{2xy+5x+3}=4xy-5x-3.\end{cases}$$

ĐỖ THANH DIỄN
(GV THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, Kon Tum)

Bài T8/411. Xét các số thực a, b, c sao cho phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm thực thuộc đoạn $[0;1]$. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\frac{(a-b)(2a-c)}{a(a-b+c)}.$$

NGUYỄN XUÂN HÙNG
(GV THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/411. Cho hai đa thức với hệ số thực $P(x)$ và $Q(x)$, mỗi đa thức có ít nhất một nghiệm thực và thỏa mãn

$$P(1+x+Q(x)+(Q(x))^2)=Q(1+x+P(x)+(P(x))^2)$$

với mọi $x\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng $P(x)\equiv Q(x)$.

DƯƠNG VIỆT THÔNG
(GV khoa Toán Kinh tế Đại học KTQD Hà Nội)

Bài T10/411. Cho các số dương a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a\ge b\ge c\ge d$ và $abcd=1$. Tìm hằng số k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng.

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{k}{d+1}\ge\frac{3+k}{2}.$$

VÕ QUỐC BÁ CẨN
(SV YY0647A1, K32, ĐH Y Dược Cần Thơ)

Bài T11/411. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn $\{f(x+y)\}=\{f(x)+f(y)\}$ với mọi $x, y\in\mathbb{R}$ (trong đó $[t]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá t và $\{t\}=t-[t]$).

NGUYỄN THỊ MINH TƯỚC
(GV THCS Lý Thường Kiệt, Đà Nẵng)

Bài T12/411. Cho tam giác *ABC*, *P* là điểm bất kì nằm trong tam giác. Gọi d_a, d_b, d_c lần lượt là khoảng cách từ *P* đến *BC*, *CA*, *AB*. Gọi R_a, R_b, R_c lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác *PBC*, *PCA*, *PAB*. Chứng minh rằng

$$\frac{(d_a+d_b+d_c)^2}{PA.PB.PC} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sin A}{R_a}+\frac{\sin B}{R_b}+\frac{\sin C}{R_c}\right).$$

TRẦN QUANG HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/411. Một ống thủy tinh hình trụ thẳng dài 20cm, kín hai đầu, được đặt cố định và nghiêng góc 40^o so với phương ngang tại nơi có gia tốc trọng trường bằng $9{,}8\text{m/s}^2$. Bên trong ống có một quả cầu nhỏ nặng 0,1g và tích điện $q = 5\mu$C. Biết đường kính của quả cầu nhỏ hơn đường kính ống thủy tinh và hệ số ma sát giữa quả cầu và thành ống là 0,06. Ban đầu quả cầu nằm yên tại đầu dưới của ống thủy tinh. Người ta tạo ra một điện trường đều nằm ngang và có cường độ 520V/m ở không gian xung quanh ống thủy tinh làm cho quả cầu chuyển động trong ống. Va chạm giữa quả cầu với hai đầu ống là hoàn toàn đàn hồi. Điện tích của quả cầu không bị ảnh hưởng bởi ma sát và va chạm giữa quả cầu với ống.

a) Tính quãng đường mà quả cầu đi được cho đến khi dừng lại.

b) Sau đó, người ta đột ngột đổi chiều điện trường. Tính quãng đường quả cầu đi thêm được.

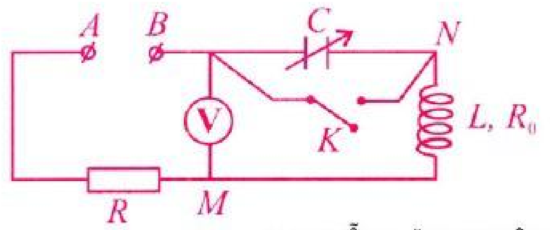
NGUYỄN CAO CƯỜNG
(GV THPT Đội Cấn, Vĩnh Phúc)

Bài L2/411. Cho mạch điện như hình vẽ. Biết $u_{AB} = 150\sin 100\pi t$(V), vôn kế lí tưởng.

a) Khi khóa *K* đóng: $U_{AM} = 35$V, $U_{MN} = 85$V, công suất trên đoạn mạch *MN* bằng 40W. Tính R_0, R và độ tự cảm *L* của cuộn dây.

b) Khi khóa *K* mở, điều chỉnh tụ điện *C* để U_C cực đại. Tính $U_{C\max}$ và U_{AM}, U_{MN} khi đó.

c) Khi khóa *K* mở, điều chỉnh tụ điện *C* để số chỉ của vôn kế là nhỏ nhất. Tìm *C* là chỉ số của vôn kế khi đó.



NGUYỄN VĂN THUẬN
(GV ĐHSP Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/411. (For 6th grade). The natural numbers $1, 2 ..., 2011^2$ are arranged in some order in a 2011×2011 square table, each square contains one number. Prove that there exists two adjacent squares (that is two squares having a common edge or a common vertex) such that the difference between the corresponding assigned numbers is not smaller than 2012.

T2/411. (For 7th grade). Find the value of the following 2009-terms sum

$$S=\left(1+\frac{1}{1.3}\right)\left(1+\frac{1}{2.4}\right)\left(1+\frac{1}{3.5}\right)...\left(1+\frac{1}{2009.2011}\right).$$

T3/411. Find the integers *x*, *y* satisfying the expression

$$x^3+x^2y+xy^2+y^3=4(x^2+y^2+xy+3).$$

T4/411. *M* is a point in the interior of a triangle *ABC*. Let *P, Q, R, H, G* be respectively the centroid of triangles *MBC, MAC, MAB, PQR, ABC*. Prove that points *M, H,* and *G* are colinear.

T5/411. *a, b,* and *c* are positive real numbers whose sum is 3. Prove the inequality

$$\frac{4}{(a+b)^3}+\frac{4}{(b+c)^3}+\frac{4}{(c+a)^3} \ge \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$$

(Xem tiếp trang 29)

★Bài T1/407. *Kí hiệu T(a) là số các chữ số của số tự nhiên a. Biết rằng $T(5^n) - T(2^n)$ là số chẵn. Hỏi số nguyên dương n là số chẵn hay lẻ?*

Lời giải. Gọi số chữ số của 5^n là $a = T(5^n)$ thì $10^{a-1} < 5^n < 10^a$.

Gọi số chữ số của 2^n là $b = T(2^n)$ thì $10^{b-1} < 2^n < 10^b$.

Từ trên có $10^{a-1}.10^{b-1} < 5^n.2^n < 10^a.10^b$ hay $10^{a+b-2} < 10^n < 10^{a+b}$.

Từ đó suy ra $a+b-2 < n < a+b$.

Vì n và $a+b$ đều là số nguyên nên $n = a+b-1$.

Theo giả thiết $a - b = T(5^n) - T(2^n)$ là số chẵn nên hai số a và b phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ, suy ra $a+b$ là số chẵn, từ đó $n = a+b-1$ là số lẻ. ❐

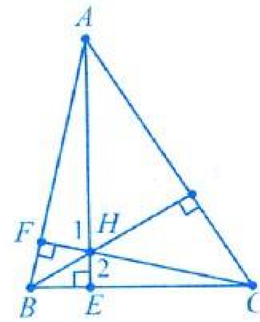
➢**Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải tốt:

Nam Định: *Phạm Quang Huy*, 6A4, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định; **Thanh Hóa:** *Lê Quang Dũng, Hoàng Bảo Long*, 6D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Hoàng Văn Phượng*, 6A, THCS Diễn Đoài, Diễn Châu, *Nguyễn Thị Ly, Nguyễn Thị Bình, Cao Thị Linh, Cao Nhật Hằng, Nguyễn Văn Phát, Cao Thị Mai Lâm, Đặng Thị Thanh Thảo, Đặng Thanh Trang, Lê Thị Ngọc Mai*, 6C, *Cao Tuấn Kiệt, Võ Thị Huyền*, 6D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Hà Tĩnh:** *Trần Thị Linh Đan, Nguyễn Ánh Triều, Nguyễn Thị Khánh Huyền, Phan Thị Hà Phương*, 6A, *Trần Linh Giang, Bùi Thị Khánh Linh, Trần Xuân Hải Biên, Ngô Thục Mây, Lê Thị Phương Tâm, Bùi Thị Quỳnh Trang, Võ Thị Hương Trà*, 6B, *Nguyễn Thị Hiền, Thái Văn Nam, Phan Thị Mỹ Thành, Trần Thị Quỳnh Trang, Nguyễn Thị Vân Anh*, 6C, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Tấn Phúc, Võ Quang Phú Thời*, 5A, TH số 1 Hành Phước, *Phạm Kiều Chinh*, 5C, TH số 2 Hành Phước, *Nguyễn Tấn Trung, Dương Thúy Hiền*, 5A, TH số 2, Hành Đức, *Nguyễn Thị Hạ Vy, Nguyễn Thị Hạnh*, 6A, *Phạm Quang Nghĩa*, 6B, THCS Hành Phước, *Nguyễn Thị Kiều Duyên*, 6A, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành, *Trần Thị Mỹ Ninh*, 6A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa.

VIỆT HẢI

★Bài T2/407. *Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} < 90°$, trực tâm H và HA=BC. Tính độ lớn của góc BAC.*

Lời giải. Nếu tam giác ABC vuông, chẳng hạn ở B, thì trực tâm H trùng với B. Khi đó từ giả thiết $HA = BC$, ta có $BA = BC$, suy ra tam giác ABC vuông cân tại B nên $\widehat{BAC} = 45°$.



Bây giờ ta chứng minh cho trường hợp tam giác ABC có ba góc nhọn (trường hợp góc B hoặc góc C tù chứng minh tương tự).

Vẽ các đường cao AE, CF. Xét hai tam giác vuông CBF và AHF, có $\widehat{BCF} = \widehat{HAF}$ (cùng phụ với hai góc đối đỉnh $\widehat{H_1} = \widehat{H_2}$), $BC = HA$ (gt), do đó $\Delta CBF = \Delta AHF$, suy ra $CF = AF$. Vậy tam giác AFC vuông cân tại F nên $\widehat{BAC} = 45°$. Như vậy ta luôn tìm được độ lớn của góc BAC bằng $45°$. ❐

➢**Nhận xét.** 1) Tất cả các lời giải đều cho kết quả đúng. Tuy nhiên nhiều bạn không xét trường hợp tam giác ABC vuông tại B hoặc C. Một số bạn sử dụng kiến thức về tam giác đồng dạng hoặc tỉ số lượng giác của góc nhọn (không thuộc chương trình toán lớp 7).

Một số bạn nêu được nhận xét đúng : *Nếu thay giả thiết $\widehat{BAC} < 90^{\circ}$ trong bài toán bằng giả thiết $\widehat{BAC} > 90^{\circ}$ thì độ lớn của góc BAC bằng 135°.*

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt :
Vĩnh Phúc: *Nguyễn Thị Nga*, 7A, THCS Yên Lạc; **Hà Nội**: *Nguyễn Minh Hoàng, Phạm Minh Đức*, $7A_4$, THCS Đống Đa, Q. Đống Đa; **Hà Nam**: *Đỗ Đăng Dương*, 7A, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; **Nam Định**: *Vũ Đức Tài*, $7A_3$, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định; **Nghệ An**: *Đậu Hương Giang*, 7B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Hà Tĩnh**: *Phạm Hoàng, Nguyễn Mai Lê*, 7B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Thừa Thiên - Huế**: *Nguyễn Khoa Thanh Nhàn*, 7/1, THCS Phú Thạnh, Phú Vang; **Quảng Ngãi**: *Bùi Diễm Hương, Nguyễn Thị Hạ Vy, Nguyễn Thị Hạnh, Vũ Thị Thi, Lê Thị Như Yến*, 6A, *Phạm Quang Nghĩa*, 6B, *Huỳnh Tiến Vỹ, Nguyễn Thúy Phượng, Cao Thị Thúy Điểm*, 7A, THCS Hành Phước; *Nguyễn Khắc Cao Kỳ*, 7B, THCS Hành Trung; *Nguyễn Thị Kiều Duyên*, 7A, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành; *Trần Thị Mỹ Ninh*, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **TP. Hồ Chí Minh**: *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, $7A_3$, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Q1.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài T3/407. *Tìm các số nguyên x, y sao cho*

$$7^x + 24^x = y^2 \qquad (1)$$

Lời giải. (Theo bạn *Lê Quang Dũng*, 6D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa).**

Nhận thấy: Nếu $(x\ ;\ y)$ là nghiệm của (1) thì $(x\ ;\ -y)$ cũng là nghiệm của PT (1). Do đó ta chỉ xét với $y \in \mathbb{N}$.

• Với $x \le -1 \Rightarrow 0 < 7^x \le \frac{1}{7} < \frac{1}{2}$; $0 < 24^x \le \frac{1}{24} < \frac{1}{2}$.

Do đó $0 < 7^x + 24^x = y^2 < 1$. Vậy $y \notin \mathbb{Z}$, trường hợp này bị loại.

• Với $x = 0 \Rightarrow y^2 = 2 \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$, trường hợp này bị loại.

• Với $x \in \mathbb{N}^*$, từ (1) suy ra y^2 là số chính phương lẻ, do đó $y^2 \equiv 1 \pmod 8$.

Mặt khác $24^x \equiv 0 \pmod 8$, nên $7^x \equiv 1 \pmod 8$. Suy ra x là số chẵn nên có dạng $x = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Ta có

$$7^{2k} + 24^{2k} = y^2 \Leftrightarrow (y - 24^k)(y + 24^k) = 7^{2k} \qquad (2)$$

Do 7 là số nguyên tố và $y \in \mathbb{N}$ nên từ (2) suy ra $y - 24^k = 7^m$, $y + 24^k = 7^{2k-m}$ với $m \in \mathbb{N}, m \le k$.

Suy ra $7^{2k-m} - 7^m = 7^m(7^{2k-2m} - 1) = 2.24^k \not\vdots\, 7$ $\Rightarrow 7^m = 1 \Rightarrow m = 0$.

Do đó $y - 24^k = 1 \Leftrightarrow y = 24^k + 1$. Thay vào PT (1) ta có

$$7^{2k} + 24^{2k} = (24^k + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2.24^k + 1 = 7^{2k} = 49^k > 48^k \qquad (3)$$

Với $k \ge 2$ thì $48^k - 2.24^k = 24^k(2^k - 2) > 1$.

Vậy (3) không xảy ra với $k \ge 2$. Do đó $k = 1$. Suy ra $x = 2$, $y = 24^1 + 1 = 25$. Vậy các cặp số nguyên $(x\ ;y)$ cần tìm là $(2;25)$ và $(2;-25)$. ❒

➤**Nhận xét.** Có ít bạn tham gia giải bài này. Lập luận trong lời giải của một số bạn không chặt chẽ. Ngoài bạn *Dũng*, các bạn sau cũng có lời giải tốt:

Bắc Ninh: *Phạm Đức Hiển*, 9A, THCS Yên Phong; *Trương Văn Khánh*, 9A, THCS Đại Đồng, Thuận Thành; **Hải Phòng:** *Lương Thế Sơn*, 8A1, THCS Hồng Bàng; **Nghệ An:** *Nguyễn Thiện Nhân*, 9A, THCS Phúc Thọ, Nghi Lộc, *Hồ Sĩ Thành*, 9C, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên; **Quảng Ngãi:** *Huỳnh Đặng Hiếu*, 9B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T4/407. *Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{x^2-z^2}{y+z} + \frac{z^2-y^2}{x+y} + \frac{y^2-x^2}{z+x} \ge 0 \qquad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. • *Cách 1.* Gọi vế trái của BĐT (1) là A, ta có

$$A = \frac{x^2-z^2}{y+z} + \frac{z^2-y^2}{x+y} + \frac{y^2-x^2}{z+x}$$

$$= x^2\left(\frac{1}{y+z} - \frac{1}{z+x}\right) + y^2\left(\frac{1}{z+x} - \frac{1}{x+y}\right) + z^2\left(\frac{1}{x+y} - \frac{1}{y+z}\right)$$

$$= \frac{x^2(x-y)}{(y+z)(z+x)} + \frac{y^2(y-z)}{(z+x)(x+y)} + \frac{z^2(z-x)}{(x+y)(y+z)}$$

$$= \frac{x^2(x^2-y^2) + y^2(y^2-z^2) + z^2(z^2-x^2)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$= \frac{(x^2-y^2)^2 + (y^2-z^2)^2 + (z^2-x^2)^2}{2(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Do x, y, z là các số dương nên $A \ge 0$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x^2 - y^2 = y^2 - z^2 = z^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z.$$

• *Cách 2.* Do vai trò bình đẳng khi hoán vị vòng quanh của các số x, y, z nên không giảm tổng quát, giả sử $x=\max\{x,y,z\}$. Ta có

$$A=\frac{x^2-z^2}{y+z}-(x-z)+\frac{z^2-y^2}{x+y}-(z-y)+\frac{y^2-x^2}{z+x}-(y-x)$$
$$=\frac{(x-z)(x-y)}{y+z}+\frac{(z-x)(z-y)}{x+y}+\frac{(y-x)(y-z)}{z+x}$$
$$=\frac{(x-z)(x-y)}{x+y}+\frac{(y-z)^2(y+z)}{(x+y)(z+x)}.$$

Vì x, y, z là các số dương và $x\geq z$, $x\geq y$ nên $A\geq 0$. Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases}(x-z)(x-y)=0\\ y-z=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z.\ \square$$

➢**Nhận xét.** 1) Có thể giải bài toán đã cho bằng cách đặt $x+y=a$, $y+z=b$, $z+x=c$ để đưa BĐT (1) về dạng

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq a+b+c \qquad (2)$$

rồi sử dụng BĐT Cauchy cho hai số dương để chứng minh BĐT (2).

2) Rất nhiều bạn tham gia giải bài này. Một số bạn đã nhầm lẫn coi vai trò x, y, z như nhau để giả sử $x\geq y\geq z>0$ (!) hoặc sử dụng BĐT Schur, BĐT Bunyakovsky, BĐT Cauchy cho bộ ba số dương vượt quá yêu cầu của cấp THCS. Tuyên dương các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: *Nguyễn Chí Tùng*, 8A10, THCS Giảng Võ, *Phan Anh Tuấn*, 9C, THCS Kiều Phú, Quốc Oai; **Bắc Ninh:** *Trương Văn Khánh*, 9A, THCS Đại Đồng Thành; **Phú Thọ:** *Nguyễn Chí Thanh*, 8A3, THCS Lâm Thao, *Nguyễn Nhật Quang*, 8B, THCS Phong Châu; **Thái Bình:** *Phạm Trung Anh*, 9B, THCS TTr. Đông Hưng, *Lê Văn Thắng*, 9A4, THCS Nguyễn Đức Cảnh, Thái Thụy; **Bắc Giang:** *Nguyễn Văn Thắng*, 9D, THCS TTr. Neo, Yên Dũng; **Yên Bái:** *Nguyễn Ngọc Hiệp*, 8A2, THCS Lê Hồng Phong, Lạc Tiên; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Tuấn Huy*, *Trương Thị Hoài Thu*, 7A, THCS Yên Lạc, *Nguyễn Thị Nga*, *Nguyễn Văn Cao*, 9A, THCS Phương Khoan, Sông Lô; **Hưng Yên:** *Nguyễn Thị Hương Giang*, 9A3, THCS Chu Mạnh Trinh; **Nam Định:** *Vũ Thị Thanh Hiền*, 9B, THCS Đào Sư Tích, Trực Ninh; **Hải Phòng:** *Lương Thế Sơn*, 8A1, THCS Hồng Bàng; **Thanh Hóa:** *Lê Quang Dũng*, 6D, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Trần Ngọc Linh*, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, *Hồ Hoàng Hiệp*, 8C, THCS Đặng Thai Mai, *Đậu Xuân Quang*, 9B, THCS Diễn Châu, *Lê Hồng Đức*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Hồ Sĩ Thành*, 9C, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên; **Gia Lai:** *Trần Nguyên Try*, 9[1], THCS Phạm Hồng Thái, TP. Pleiku.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★**Bài T5/407.** *Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O) kẻ tiếp tuyến MA và cát tuyến MBC (B nằm giữa M và C) với đường tròn. Gọi H là hình chiếu của A trên MO, K là giao điểm của đoạn thẳng MO với đường tròn (O). Chứng minh rằng*

a) Tứ giác OHBC là tứ giác nội tiếp.

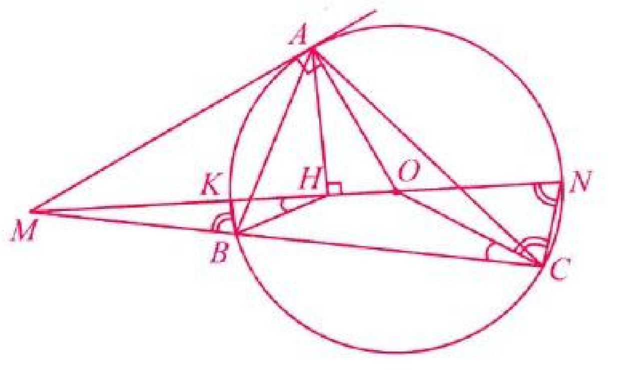
b) BK là tia phân giác của góc HBM.

Lời giải. a) Từ $\Delta MAB \backsim \Delta MCA$ (g.g) suy ra

$$\frac{MA}{MC}=\frac{MB}{MA}\Rightarrow MA^2=MB.MC \qquad (1)$$

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông MAO, ta có $MA^2=MH.MO$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $MB.MC=MH.MO$, hay $\frac{MC}{MO}=\frac{MH}{MB}$. Từ đó suy ra $\Delta MCO \backsim MHB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MHB}=\widehat{MCO}$, mà $\widehat{MHB}+\widehat{BHO}=180^o$ nên $\widehat{MCO}+\widehat{BHO}=180^o$, dẫn đến tứ giác $OHBC$ là tứ giác nội tiếp (đpcm).



b) Gọi N là giao điểm thứ hai của MO với đường tròn (O). Khi đó $\widehat{MBK}=\widehat{MNC}=\widehat{NCO}$ $=\frac{1}{2}\widehat{COH}$ (tính chất góc ngoài của tam giác) (3)

Mặt khác theo câu a) tứ giác $OHBC$ nội tiếp nên $\widehat{COH}=\widehat{MBH}$ (cùng bù với $\widehat{HBC}$) (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{MBH}=2\widehat{MBK}$, hay BK là tia phân giác của góc $\widehat{HBM}$ (đpcm). $\square$

➢**Nhận xét.** 1) Các lời giải gửi về Tòa soạn đều đúng. Một số bạn sử dụng khái niệm phương tích của một điểm đối với một đường tròn để giải câu a), tuy nhiên khái niệm này đã vượt quá chương trình bậc THCS.

2) Các bạn sau có lời giải đúng và gọn hơn cả:

Hà Nội: *Phan Anh Tuấn*, 9C, THCS Kiều Phú, Quốc Oai; **Hải Phòng:** *Lương Thế Sơn*, 8A1, THCS Hồng Bàng; **Vĩnh Phúc:** *Vũ Thị Quỳnh Anh*, 9A, THCS Vĩnh

Yên, *Nguyễn Thị Lan Hương*, THCS Vĩnh Tường, *Nguyễn Đức Đại*, 8A1, THCS Yên Lạc, *Khổng Thị Minh Thư*, 9B, THCS Liên Bảo; **Bắc Ninh:** *Trương Văn Khánh*, 9A, THCS Đại Đồng Thành, Thuận Thành; **Hà Nam:** *Lại Thái Sơn*, *Nguyễn Quang Huy*, 9A, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; **Thái Bình:** *Nguyễn Thành Trung*, *Hoàng Thu Huyền*, 9A4, THCS Nguyễn Đức Cảnh, Thái Thụy; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Quốc Đạt*, 9C, THCS Thiệu Phú, Thiệu Hóa; **Nghệ An:** *Đậu Xuân Quang*, *Nguyễn Hoàng Tâm*, 9B, THCS Diễn Xuân, Diễn Châu, *Lê Hồng Đức*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Hồ Sỹ Thành*, 9C, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên; **Thừa Thiên - Huế:** *Nguyễn Khoa Thanh Nhàn*, 7/1, THCS Phú Thanh, Phú Vang; **Quảng Ngãi:** *Huỳnh Đặng Hiếu*, 9B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, *Nguyễn Thị Kiều Duyên*, 8A, THCS Nguyễn Kim Vang, *Tống Thành Nguyện*, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Phú Yên:** *Nguyễn Xuân Viết Lĩnh*, 9E, THCS Lương Thế Vinh; **Đồng Tháp:** *Trần Chí Thiện*, 8A7, THCS Kim Hồng, TP. Cao Lãnh; **Đồng Nai:** *Lệnh Hồ Xung*, 6A1, THCS Lý Tự Trọng, Trảng Bom, *Lê Huỳnh Quốc Bảo*, 9/3, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Biên Hòa; **BếnTre:** *Phạm Ngọc Tú An*, 8^1, THCS Cẩm Sơn, Mỏ Cày Nam.

QUANG PHÚC

★Bài T6/407. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{3}}=x+y & (1) \\ x\sqrt{2xy+5x+3}=4xy-5x-3 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. Từ (1) suy ra $x+y\ge 0$. Ta có

$$\frac{x^2+xy+y^2}{3}=\frac{1}{4}(x+y)^2+\frac{1}{12}(x-y)^2\ge\frac{1}{4}(x+y)^2$$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}}\ge\frac{1}{2}(x+y) \quad (3)$$

và $\dfrac{x^2+y^2}{2}=\dfrac{1}{4}(x+y)^2+\dfrac{3}{4}(x-y)^2\ge\dfrac{1}{4}(x+y)^2$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\ge\frac{1}{2}(x+y) \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}}\ge x+y.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Do đó PT (1) $\Leftrightarrow x=y\ge 0$.

Thay $y=x$ vào phương trình (2), ta được

$$x\sqrt{2x^2+5x+3}=4x^2-5x-3 \quad (5)$$

Đặt $t=\sqrt{2x^2+5x+3}$ với $t\ge 0$.

Phương trình (5) trở thành

$$xt=6x^2-t^2\Leftrightarrow(3x+t)(2x-t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=-3x \\ t=2x. \end{array}\right.$$

Vì $t\ge 0$; $x\ge 0$ và khi $x=0$ thì $t=\sqrt{3}$ nên trường hợp $t=-3x$ không xảy ra.

Với $t=2x$, ta được $2x=\sqrt{2x^2+5x+3}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 2x^2-5x-3=0 \\ x\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow x=3.$$

Vậy hệ phương trình trong đầu bài có một nghiệm duy nhất $(x;y;z)=(3;3;3)$. ❒

➢**Nhận xét.** 1) Điều mấu chốt của bài toán là sử dụng bất đẳng thức để chứng minh phương trình (1) tương đương với $x=y\ge 0$.

Có thể giải phương trình (5) bằng cách khác như sau:

Nhận thấy $x=0$ không thỏa mãn phương trình; với $x>0$, chia hai vế của PT (5) cho x^2 suy ra

đ $\sqrt{2+\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=4-\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2}$; ặt $t=\sqrt{2+\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}}$ với $t\ge 0$,

ta được $t^2+t-6=0$; từ đó tìm được kết quả bài toán.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Bắc Ninh: *Trương Văn Khánh*, 9A, THCS Đại Đồng Thành, Thuận Thành; **Phú Thọ**: *Vũ Tuấn Linh*, 9F, THCS Văn Lang, TP Việt Trì; **Vĩnh Phúc**: *Nguyễn Văn Cao*, 9A, THCS Phương Khoan, Sông Lô; **Hải Dương**: *Vũ Đức Thịnh*, 9/3, THCS Lê Quý Đôn, TP. Hải Dương; **Hưng Yên**: *Nguyễn Thị Hương Giang*, 9A3, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang; **Nghệ An**: *Lê Hồng Đức*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** *Phạm Tấn Phát*, 9D, THCS Đức Phong, Mộ Đức, *Huỳnh Đặng Hiếu*, 9B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa.

NGUYỄN ANH DŨNG

★Bài T7/407. *Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $3x_{n+1}=x_n^3-2$ $(n=1, 2, ...)$. Xác định x_1 để cho dãy số (x_n) hội tụ. Trong trường hợp dãy số hội tụ, hãy tìm giới hạn của nó.*

Lời giải. Giả sử dãy số (x_n) hội tụ và $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=l$. Khi đó từ biểu thức xác định dãy (x_n) ta có

$$3l=l^3-2\Leftrightarrow l=-1 \text{ hoặc } l=2 \quad (1)$$

Từ biểu thức xác định dãy (x_n) ta cũng có

$$x_{n+1}-2=\frac{1}{3}(x_n-2)(x_n^2+2x_n+4) \quad (2)$$

$$x_{n+1}+1=\frac{1}{3}(x_n^3+1) \quad (3)$$

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{3}(x_n+1)^2(x_n-2) \quad (4)$$

• Nếu $x_1>2$ thì từ (4) suy ra $x_{n+1}>x_n>2$, với $n=1, 2, ...$ Do đó (x_n) là dãy tăng, kết hợp với (1) suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$.

• Nếu $x_1=2$ thì từ (4) suy ra $x_n=2$, với $n=1, 2, ...$ Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=2$.

• Nếu $-1<x_1<2$ thì từ (4) suy ra $x_{n+1}<x_n$, với $n=1, 2, ...$ Từ (2) và (3) suy ra $-1<x_n<2$ với $n=1, 2, ...$ Suy ra dãy (x_n) giảm và bị chặn dưới bởi -1 nên dãy hội tụ. Từ (1) suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=-1$.

• Nếu $x_1=-1$ thì từ (3) suy ra $x_n=-1$ với $n=1, 2, ...$ Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=-1$.

• Nếu $x_1<-1$ thì từ (4) suy ra $x_{n+1}<x_n$, với $n=1, 2, ...$ Kết hợp với (1) suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=-\infty$.

Tóm lại, dãy số (x_n) hội tụ khi và chỉ khi $-1\le x_1\le 2$, và $l=2$ nếu $x_1=2$; $l=-1$ nếu $-1\le x_1<2$. ❒

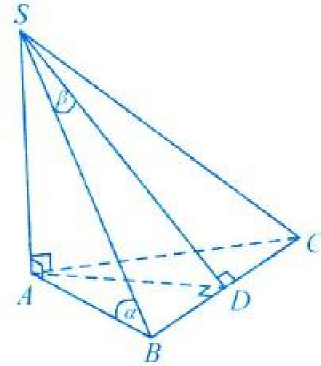
➢**Nhận xét.** Có khá đông các bạn tham gia giải bài toán này và đa số cho làm theo cách trên. Một số bạn trình bày chưa chặt chẽ khi chưa chỉ ra khoảng cụ thể của x_n trong mỗi trường hợp. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hưng Yên: *Đỗ Thanh Tùng*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hải Dương:** *Phạm Đức Vượng*, 11A1, THPT Thanh Miện I; **Hải Phòng:** *Phan Đức Minh*, 12A5, THPT Thái Phiên; **Nghệ An:** *Nguyễn Hiền Trang*, 10A2, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Bắc Giang:** *Nguyễn Thế Hiệp*, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Quảng Ninh:** *Phan Mạnh Tùng*, 11Toán, THPT chuyên Hạ Long; **Hà Tĩnh:** *Phạm Tiến Dũng*, 11T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Phú Yên:** *Huỳnh Văn Thắng*, 10 Tin, THPT chuyên Lương Văn Chánh.

NGUYỄN THANH HỒNG

★**Bài T8/407.** *Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác cân tại A, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC), D là trung điểm của BC. Gọi α là góc tạo bởi SB với mặt phẳng (ABC) và β là góc tạo bởi SB với mặt phẳng (SAD). Chứng minh rằng $\cos^2\alpha+\cos^2\beta>1$.*

Lời giải. Dễ thấy $\widehat{SBA}=\alpha$. Do tam giác ABC cân tại A và D là trung điểm của đoạn BC nên $BC\perp AD$. Mặt khác $SA\perp(ABC)\Rightarrow BC\perp SA$. Do đó $BC\perp(SAD)$, suy ra D là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng (SAD), vậy $\widehat{BSD}=\beta$.



Từ đó $\cos^2\alpha+\cos^2\beta$

$$=\frac{AB^2+SD^2}{SB^2}>\frac{AB^2+SA^2}{SB^2}=1 \text{ (đpcm)}. ❒$$

➢**Nhận xét.** Số lời giải gửi tới Tòa soạn rất nhiều. Tất cả các lời giải đều đúng. Sau đây là danh sách các bạn có lời giải gọn hơn cả:

Hà Nội: *Lương Hữu Bằng*, 11A1, THPT Đồng Quan, Phú Xuyên; **Hải Phòng:** *Phan Đức Minh*, 12A15, THPT Thái Phiên; **Hà Nam:** *Nguyễn Chí Linh*, 11 Toán, *Đinh Ngọc Hải*, 11 Lí, THPT chuyên Biên Hòa; **Hải Dương:** *Nguyễn Viết An*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi, *Nguyễn Thúy Quỳnh*, 11A, THPT Kim Thành; **Nam Định:** *Phùng Mạnh Linh*, 11 Toán 1, *Nguyễn Quang Nhân*, 11 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** *Trần Quang Đại*, 11 Toán, *Nguyễn Anh Tuyến*, 12 Toán, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Hữu Hoàng*, 11B4, THPT Lê Văn Hưu, Thiệu Hóa; **Nghệ An:** *Trương Lê Văn*, A3, K38, *Nguyễn Thanh Long*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Nguyễn Văn Nguyên*, K43 A6 Lí, THPT chuyên ĐH Vinh, *Nguyễn Việt Mạnh*, 11A1, THPT Huỳnh Thúc Kháng, TP. Vinh, *Nguyễn Sỹ Tuân*, 10A7, *Lê Đình Tuấn*, 11T7, *Nguyễn Văn Hoàng*, 12T7, THPT Đô Lương I, *Hoàng Danh Thắng*, 11A1, THPT Quỳnh Lưu III, *Nguyễn Bá Cương*, 11A1, THPT Hoàng Mai, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh:** *Phạm Tiến Dũng*, 11T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Nam:** *Lê Vũ Văn Phi*, *Nguyễn Thanh Vỹ*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; *Nguyễn Văn Từ Thiện*, 12T1, THPT Nguyễn Duy Hiệu, Điện Bàn; **Bình Định:** *Trần Quang Trí*, 11T-L, THPT chuyên Lê Quý Đôn, *Nguyễn Quang Hải*, 11TN2, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn, *Nguyễn Văn Hải*, 11B, THPT Tây Sơn; **Đồng Nai:** *Nguyễn Ngọc Duy*, 10 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, TP. Biên Hòa; **Bến Tre:** *Nguyễn Văn Anh*, 10T, *Đào Bá Khá*, *Khưu Thành Quý*, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Hậu**

Giang: *Đường Ngọc Lan*, 11H, THPT chuyên Vị Thanh, TP. Vị Thanh.

HỒ QUANG VINH

★Bài T9/407. *Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Chứng minh rằng*

$$8(x+y+z)^3 \le 10(x^3 + y^3 + z^3) + 11(x+y+z)(1+4xyz) - 12xyz \quad (*)$$

Lời giải. Bài toán trên có hai phần chính:

i) Từ giả thiết ta sẽ chứng minh

$$1+4xyz \ge 2(xy+yz+zx) \quad (1)$$

Thật vậy, trong ba số $x-\frac{1}{2}, y-\frac{1}{2}, z-\frac{1}{2}$ có hai số cùng dấu.

Do vai trò của x, y, z như nhau, không mất tổng quát ta giả sử $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right) \ge 0$

$\Rightarrow z(2x-1)(2y-1) \ge 0 \Rightarrow z(4xy-2x-2y+1) \ge 0$

$\Rightarrow 4xyz \ge 2yz + 2zx - z.$

Bởi vậy $1+4xyz \ge 1+2yz+2zx-z$

$= 2(xy+yz+zx) + (1-2xy-z) \quad (2)$

Mặt khác từ giả thiết

$x^2+y^2+z^2+2xyz = 1 \Rightarrow x<1, y<1, z<1$ và

$(z+xy)^2 = 1-x^2-y^2+x^2y^2 = (1-xy)^2-(x-y)^2$

$\le (1-xy)^2 \Rightarrow z+xy \le 1-xy \Rightarrow 0 \le 1-2xy-z \quad (3)$

Từ (2) và (3) ta suy ra bất đẳng thức (1).

ii) Từ bất đẳng thức (1) ta có

$10(x^3+y^3+z^3)+11(x+y+z)(1+4xyz)-12xyz$

$-8(x+y+z)^3$

$\ge 10(x^3+y^3+z^3)+11(x+y+z).2(xy+yz+zx)$

$-12xyz-8(x+y+z)^3$

$=10(x^3+y^3+z^3)+22(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+$

$z^2x+zx^2+3xyz)-12xyz-8(x^3+y^3+z^3+3(x^2y+$

$xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2)+6xyz)$

$=2(x^3+y^3+z^3-x^2y-xy^2-y^2z-yz^2-z^2x-zx^2+3xyz)$

$=2(x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y)) \quad (4)$

Do x, y, z có vai trò như nhau trong (4), không mất tính tổng quát ta giả sử $x \ge y \ge z > 0$.

Khi đó

$x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y)$

$=x(x-y)(x-y+y-z)+y(y-x)(y-z)$

$\quad +z(z-y+y-x)(z-y)$

$=x(x-y)^2+(x-y)(y-z)(x-y+z)+z(z-y)^2 \ge 0 \quad (5)$

Từ (4) và (5) ta suy ra bất đẳng thức (*). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{2}$. □

➢**Nhận xét.** 1) Đây là bất đẳng thức được ghép bởi hai bất đẳng thức khó nhưng quen thuộc với nhiều bạn học sinh (bất đẳng thức (5) là một trường hợp của *bất đẳng thức Schur*). Rất đông các bạn học sinh tham gia giải và hầu hết có lời giải như trên.

Bạn *Đỗ Xuân Việt*, 11A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc** nhận xét: (Đây là **Câu 6** trong Đề dự bị của Kì thi Toán Quốc gia Việt Nam năm 2008!).

NGUYỄN MINH ĐỨC

★Bài T10/407. *Cho p là số nguyên tố lẻ, n là số nguyên dương sao cho (n, p) = 1. Hãy tính số các bộ số $(a_1, a_2, ..., a_{p-1})$ thoả mãn điều kiện tổng $\sum_{k=1}^{p-1} ka_k$ chia hết cho p, trong đó mỗi số $a_1, a_2, ..., a_{p-1}$ đều là các số tự nhiên không vượt quá $n-1$.*

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Văn Hoàng*, 12T7, THPT Đô Lương I, **Nghệ An**).

Xét đa thức $P(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + ... + x + 1.$

Đa thức này có $p-1$ nghiệm phức phân biệt. gọi α là một nghiệm bất kì của $P(x)$. Dễ chứng minh rằng $\alpha, \alpha^2, ..., \alpha^{p-1}$ đều là nghiệm của $P(x)$ và chúng đôi một khác nhau. Vậy tập nghiệm của $P(x)$ là $\{\alpha, \alpha^2, ..., \alpha^{p-1}\}$.

Mặt khác do $\alpha^p = 1$ nên $(\alpha^n)^p = 1$. Vì $(n, p) = 1$ nên $\alpha^n \ne 1$, do đó $P(\alpha^n) = 0$. Vậy $\{\alpha^n, \alpha^{2n}, ..., \alpha^{(p-1)n}\}$ cũng là tập nghiệm của $P(x)$. Nói cách khác với mỗi n thì $(\alpha^n, \alpha^{2n}, ..., \alpha^{(p-1)n})$ là một hoán vị của $(\alpha, \alpha^2, ..., \alpha^{p-1})$.

Đặt $A = \{(a_1, a_2, ..., a_{p-1}); 0 \le a_j \le n-1, a_j \in \mathbb{N}\}$.

Ta có $|A| = n^{p-1}$. Với mỗi $j = 0, 1, ..., p-1$, kí hiệu

$$A_j = \{(a_1, a_2, ..., a_{p-1}) \in A : \sum_{k=1}^{p-1} ka_k \equiv j \pmod p\}.$$

Khi đó $\{A_j\}_{j=0}^{p-1}$ là một phân hoạch của A và do đó $|A| = \sum_{j=0}^{p-1} |A_j|$.

Xét đa thức $F(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1$.

Với mỗi $a = (a_1, a_2, ..., a_{p-1}) \in A$ kí hiệu $S(a) = \sum_{k=1}^{p-1} ka_k$. Để ý rằng nếu $a \in A_j$ thì $S(a) \equiv j \pmod{p}$. do đó $\alpha^{S(a)} = \alpha^j$. Từ đó ta có

$$F(\alpha)F(\alpha^2)...F(\alpha^{p-1}) = \sum_{a\in A} \alpha^{S(a)} = \sum_{j=0}^{p-1} |A_j|\alpha^j \quad (1)$$

Mặt khác $F(x) = \dfrac{x^n - 1}{x-1}$ nếu $x \neq 1$. mà $\alpha^j \neq 1$ với mỗi $j = 1, 2, ..., p-1$, nên

$$F(\alpha^j) = \frac{\alpha^{jn} - 1}{\alpha^j - 1} \; (j = 1, 2, .., p-1) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$F(\alpha)F(\alpha^2)...F(\alpha^{p-1}) = \frac{(\alpha^n - 1)(\alpha^{2n} - 1)...(\alpha^{(p-1)n} - 1)}{(\alpha - 1)(\alpha^2 - 1)...(\alpha^{p-1} - 1)}.$$

Vì (theo nhận xét trên) $(\alpha^n, \alpha^{2n}, ..., \alpha^{(p-1)n})$ là một hoán vị của $(\alpha, \alpha^2, ..., \alpha^{(p-1)})$ nên suy ra

$$F(\alpha)F(\alpha^2)...F(\alpha^{p-1}) = 1 \quad (3)$$

Từ (1) và (3) ta có $\sum_{j=0}^{p-1} |A_j|\alpha^j = 1$ với mọi α (4)

Đặt $Q(x) = \sum_{j=1}^{p-1} |A_j|x + |A_0| - 1$, do (4) ta có $Q(\alpha) = 0$.

Vì α là một nghiệm bất kì của $P(x)$ và $Q(x)$ cũng có bậc bằng $p - 1$ nên $P(x)$ và $Q(x)$ chỉ sai khác nhau một hằng số tỉ lệ. Vậy

$$|A_1| = |A_2| = ... = |A_{p-1}| = |A_0| - 1.$$

$$\text{Suy ra } |A_0| - 1 = \frac{|A_1| + |A_2| + ... + |A_{p-1}| + |A_0| - 1}{p}$$

$$= \frac{|A| - 1}{p} = \frac{n^{p-1} - 1}{p}.$$

Vậy $|A_0| = \dfrac{n^{p-1} - 1}{p} + 1$. ❒

➢**Nhận xét.** Đây là một bài toán rất hay, vận dụng các kiến thức tổng hợp về đa thức, số phức, số học và tổ hợp. Các bạn có lời giải tốt là :

Vĩnh Phúc: *Đỗ Xuân Việt*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Giang:** *La Văn Quân*, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Ninh Bình:** *Đỗ Thanh Bình*, 10 Toán, THPT chuyên Lương Văn Tụy, **Hải Dương:** *Phan Đức Vượng*, 11A1, THPT Thanh Miện; **Nghệ An:** *Nguyễn Hiền Trang*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Vương Nhật Quân*, 10A1, THPT chuyên ĐH Vinh, TP. Vinh; **Cà Mau:** *Lê Hoàng Minh*, 10T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★Bài T11/407. *Tìm tất cả các hàm số f xác định trên tập $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}$ và thỏa mãn phương trình*

$$f(x + y + f(y)) = f(f(x)) + 2y \quad (1)$$

với mọi số thực x, y.

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Trước tiên, ta chứng minh f là đơn ánh. Từ điều kiện của bài ra, hoán vị vai trò của x và y cho nhau, ta thu được

$$f(y + x + f(x)) = f(f(y)) + 2x \quad (2)$$

với mọi số thực x, y.

Giả sử $f(x) = f(y)$, khi đó từ (1) và (2) suy ra ngay $x = y$, hay f là đơn ánh.

Thay $y = 0$ vào (1), ta thu được

$$f(x + f(0)) = f(f(x)),$$

với mọi số thực x, hay $f(x) = x + f(0)$ (do tính đơn ánh của f), tức $f(x) = x + a, \; a \in \mathbb{R}$. Thử lại trực tiếp, ta thấy hàm này thỏa mãn phương trình (1). ❒

➢**Nhận xét.** Đây là dạng toán quen thuộc về phương trình hàm nên có nhiều bạn tham gia giải và đa số có lời giải tương tự như cách giải ở trên.

Danh sách các bạn có lời giải đúng:

Vĩnh Phúc: *Hoàng Đỗ Kiên, Đặng Quang Tuấn*, 10A1, *Đỗ Xuân Việt*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** *Đặng Thắng Lợi*, 10A1 Tin, *Nguyễn Việt Dũng, Phạm Huy Hoàng*, 11A1 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN Hà Nội, *Lương Hữu Bằng*, 11A1 THPT Đồng Quan; **Hà Nam:** *Trương Công Minh*, 11A1, *Nguyễn Đức Nam*, 11A5 THPT Duy Tiên; **Hải Dương:** *Nguyễn Đức Bình*, 10T, *Nguyễn Viết An*, 11T THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Quảng Ninh:** *Phạm Mạnh Tùng*, 11T, THPT chuyên Hạ Long; **Thanh Hóa:** *Trịnh Văn Tam, Lê Văn Tuấn*, 11T THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Thanh Long*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Trần Chí Công*, 11A1 Toán, THPT chuyên ĐH Vinh, TP. Vinh, *Nguyễn Văn Hoàng*, 12T7 K50, THPT Đô Lương I; **Đà Nẵng:** *Lê Trần Nhạc Long*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Nai:** *Phạm Văn Minh*, 11T, *Nguyễn Ngọc Duy*, 10T, THPT chuyên Lương Thế Vinh, *Dương Quốc Khánh*, 10C2, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa; **Bình Định:** *Nguyễn Quang Hải*, 11TN2, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn; **Bến Tre:** *Lê Thị Minh Thảo*, 10T THPT chuyên Bến Tre; **Phú Yên:** *Huỳnh Văn Thống*, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Cà Mau:** *Lê Hoàng Minh*, 10T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển.

NGUYỄN VĂN MẬU

★Bài T12/407. *Gọi p, r, r_a, r_b, r_c lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn nội tiếp, bán kính đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C của tam giác ABC có độ dài các cạnh BC = a, CA = b, AB = c. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\ge p+\sqrt{rr_a}+\sqrt{rr_b}+\sqrt{rr_c}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. (Theo bạn *Phan Đức Minh*, 12A15, THPT Thái Phiên, **Hải Phòng**).

Đặt $p-a=x, p-b=y, p-c=z$.

Đương nhiên $x, y, z>0$ và $a=y+z;\ b=z+x$, $c=x+y$; $p=x+y+z$.

Mặt khác, vì $S=pr=(p-a)r_a=(p-b)r_b$ $=(p-c)r_c$ (S là diện tích tam giác ABC) nên theo công thức Héron, ta có

$$rr_a=\frac{S}{p}.\frac{S}{p-a}=\frac{S^2}{p(p-a)}=(p-b)(p-c)=yz.$$

Tương tự có $rr_b=zx$; $rr_c=xy$.

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau

$$\sqrt{(y+z)(z+x)}+\sqrt{(z+x)(x+y)}+\sqrt{(x+y)(y+z)}$$
$$\ge x+y+z+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{xy}.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\sqrt{(z+x)(x+y)}=\sqrt{(x+z)(x+y)}\ge x+\sqrt{yz}.$$

Tương tự

$$\sqrt{(x+y)(y+z)}\ge y+\sqrt{zx};\ \sqrt{(y+z)(z+x)}\ge z+\sqrt{xy}.$$

Cộng theo từng vế ba bất đẳng thức trên, ta được điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z \Leftrightarrow a=b=c$ hay tam giác ABC đều. ❐

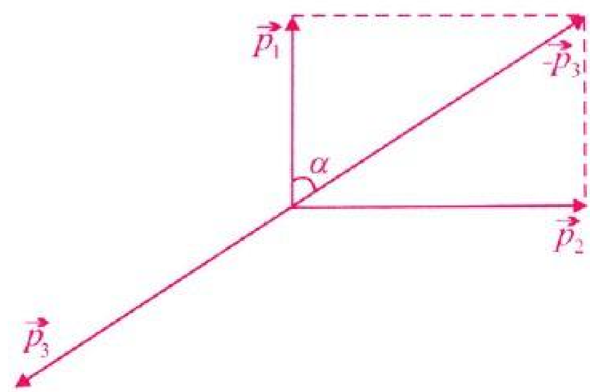
➢**Nhận xét.** Rất nhiều bạn tham gia giải và đều giải đúng. Xin nêu tên một vài bạn có lời giải tốt.

Phú Thọ: *Đỗ Quốc Tiến*, 11A1, THPT Thanh Thuỷ; **Bắc Ninh:** *Đỗ Quang Khải*, 10T, THPT chuyên Bắc Ninh; **Nam Định:** *Nguyễn Quang Nhân*, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hải Dương:** *Nguyễn Đức Bình*, 10T, THPT Nguyễn Trãi; **Thanh Hoá:** *Lê Văn Duy*, 10A2, THPT Nông Cống I; **Nghệ An:** *Nguyễn Hiền Trang*, 10A2, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Quảng Ngãi:** *Hồ Đông Triều*, 10T1, THPT chuyên Lê Khiết; **Bình Định:** *Nguyễn Quang Hải*, THPT Tăng Bạt Hổ; **Đồng Nai:** *Phạm Văn Minh*, 11T, THPT chuyên Lương Thế Vinh.

NGUYỄN MINH HÀ

★Bài L1/407. *Ba vật nhỏ có khối lượng lần lượt là 3m, 4m, 5m được thả từ ba điểm khác nhau bên trong một vỏ bán cầu nhẵn cố định bán kính R có miệng nằm ngang. Nhiệt lượng lớn nhất toả ra do va chạm của các vật là bao nhiêu, nếu tất cả các va chạm là hoàn toàn không đàn hồi? Các vật được thả ở những thời điểm nào và vị trí ban đầu ở đâu trong trường hợp này?*

Lời giải. Do các va chạm là hoàn toàn không đàn hồi nên để nhiệt lượng tỏa ra do va chạm lớn nhất thì phải thỏa mãn đồng thời các yêu cầu sau: các va chạm xảy ra đồng thời, vận tốc của các vật ngay trước va chạm là lớn nhất và vận tốc sau va chạm phải bằng không.



Để vận tốc các vật trước va chạm lớn nhất (tại đáy của vỏ bán cầu) thì các vật phải được thả từ miệng của vỏ bán cầu. Vận tốc ngay trước va chạm của các vật là $v=\sqrt{2gR}$.

Sau va chạm các vật dừng lại nên toàn bộ động năng trước va chạm chuyển thành nhiệt lượng tỏa ra:

$$Q=\frac{3mv^2}{2}+\frac{4mv^2}{2}+\frac{5mv^2}{2}=\frac{12mv^2}{2}=12mgR.$$

Gọi $\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3$ lần lượt là động lượng của các vật $3m$, $4m$, $5m$ ngay trước va chạm. Do sau va chạm các vật đứng yên nên áp dụng định luật bảo toàn động lượng ta có

$$\vec{p}_1+\vec{p}_2+\vec{p}_3=\vec{0} \quad (1)$$

Ta lại thấy rằng

$$p_1^2+p_2^2=25m^2v^2=(5mv)^2=p_3^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\vec{p}_1.\vec{p}_2=0 \Leftrightarrow \vec{p}_1\perp\vec{p}_2$.

Gọi α là góc giữa $\vec{p}_1$ và $-\vec{p}_3$ thì

$$\tan\alpha=\frac{p_2}{p_1}=\frac{4}{3}\Rightarrow\alpha\approx 53^o.$$

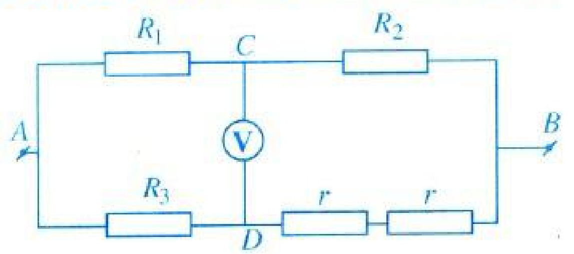
Vậy các vật 3m, 4m, 5m được thả đồng thời từ các điểm tương ứng *A, B, C* trên miệng vỏ bán cầu sao cho $OA\perp OB$ và $\widehat{BOC}=\widehat{AOC}=180^o-\alpha$ $\approx 127^o$ (trong đó O là tâm của miệng vỏ bán cầu). ❐

➤**Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nam: *Đinh Ngọc Hải,* 11 Lí, THPT chuyên Biên Hòa; **Nam Định:** *Đinh Việt Thắng, Bùi Xuân Hiển,* 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** *Vũ Công Lập,* 10A2, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★Bài L2/407. *Cho mạch điện như hình vẽ.*



Biết $U_{AB}=12V$, $R_1=5\Omega$, $R_2=25\Omega$, $R_3=20\Omega$. *Điện trở của vôn kế rất lớn. Khi mắc hai điện trở r nối tiếp thì vôn kế chỉ giá trị* U_1, *khi mắc song song thì vôn kế chỉ* $U_2=3U_1$.

a) *Tính r.*

b) *Tính số chỉ của vôn kế khi nhánh DB chỉ có một điện trở r.*

Lời giải. a) Khi mắc hai điện trở r nối tiếp thì

$$V_A-V_C=I_1R_1;\quad V_A-V_D=I_3R_3.$$

Suy ra $\quad V_C-V_D=I_3R_3-I_1R_1=U_1 \quad (1)$

Khi mắc hai điện trở r song song thì

$$V_A-V_C=I_1'R_1;\quad V_A-V_D=I_3'R_3.$$

Suy ra $\quad V_C-V_D=I_3'R_3-I_1'R_1=3U_1 \quad (2)$

với $\quad I_1=I_1'=\dfrac{U_{AB}}{R_1+R_2}=\dfrac{U_{AB}}{30};$

$$I_3=\frac{U_{AB}}{R_3+2r}=\frac{U_{AB}}{20+2r};$$

$$I_3'=\frac{U_{AB}}{R_3+\frac{r}{2}}=\frac{U_{AB}}{20+\frac{r}{2}}.$$

Thay I_1,I_1',I_3,I_3' vào các phương trình (1), (2) ta có

$$\frac{20}{20+2r}-\frac{5}{30}=\frac{U_1}{U_{AB}};\quad \frac{20}{20+\frac{r}{2}}-\frac{5}{30}=\frac{3U_1}{U_{AB}}$$

với $U_{AB}=12V$, suy ra $\; r=20(\Omega)$.

b) Khi nhánh DB chỉ có một r, ta có

$$V_C-V_D=I_3''R_3-I_1R_1$$

với $I_1=\dfrac{U_{AB}}{R_1+R_2}=0,4(A);\quad I_3''=\dfrac{U_{AB}}{R_3+r}=0,3(A)$

Suy ra $\quad V_C-V_D=0,3.20-0,4.5=4(V).$

Như vậy vôn kế chỉ 4V. ❐

➤**Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Võ Trung Hiếu,* 11A1, THPT Hưng Hóa, *Hà Thị Minh Phương,* 11 Tin, THPT chuyên Hùng Vương; **Bắc Ninh:** *Trương Đức Tài,* 10A1, *Nguyễn Văn Long,* 10A4, THPT Thuận Thành 1, Nguyễn *Thị Mai Loan,* 11 Toán, *Lê Văn Mạnh,* 12 Hóa, THPT chuyên Bắc Ninh; **Thái Bình:** *Nguyễn Văn Minh,* 11A2, THPT Bắc Đông Quan, *Vũ Công Lập,* 10A2, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy; **Hưng Yên:** *Nguyễn Văn Đức,* 10A1, *Nguyễn Tiến Dũng,* 11A1, THPT Dương Quảng Hàm; **Hà Nam:** *Nguyễn Trọng Khôi,* 11A1, THPT Thanh Liêm; **Thanh Hóa:** *Trần Văn Thắng,* 10A5, THPT Nông Cống 2; **Nghệ An:** *Vương Nhật Quân,* 10A1, THPT chuyên Đại học Vinh, *Nguyễn Thị Ngọc Mai,* 10C2, THPT Tân Kì 1, *Trương Tấn Anh,* 10A12, THPT Diễn Châu 2; **Vĩnh Long:** *Trần Trung Huy,* 11T2, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Đồng Tháp:** *Huỳnh Thanh Dư,* 10 Lí, THPT TP. Cao Lãnh.

NGUYỄN VĂN THUẬN

TRIẾT LÍ CUỘC SỐNG từ quả bóng

Bóng đá là môn thể thao vua. Có bao giờ bạn nghĩ tại sao quả bóng tròn được nhiều người yêu mến đến vậy, và bóng tròn được yêu thích hơn bóng bầu dục không? Theo tôi, vì bóng tròn là vật thể có mô hình hoàn hảo. Tôi sẽ phân tích cho ý kiến của mình.

Bề mặt quả bóng có dạng mặt cầu, là quỹ tích những điểm cách đều một điểm trong không gian. Nó đẳng hướng theo tất cả mọi phía, nên dù tác động theo hướng nào nó cũng phản ứng bằng thái độ tương ứng với bất kì tác nhân nào (vì đẳng hướng theo mọi phía). Bản thân nó không có sự thiên vị. Vậy quả bóng có mô hình hoàn hảo.

Con người chúng ta không hoàn hảo vậy. Nếu ghét ai thì dù người đó làm đúng ta vẫn ác cảm với họ, khi thương ai thì người đó có sai ta vẫn châm chước cho họ. Nên quả bóng được nhiều người thích là điều hợp lí. Ai sống hoàn hảo giống nó bao nhiêu thì càng được nhiều người yêu mến bấy nhiêu. Bạn thấy không, rất nhiều triết lí từ mọi vật quanh ta đấy chứ! Giờ đây, khi quả bóng lăn trên sân, không những cảm nhận sự khỏe mạnh và uy lực từ môn thể thao vua, tôi còn yêu mến nó hơn bởi mô hình mang tính hoàn hảo của nó.

Tóm lại, cuộc sống hàm chứa sự thú vị ẩn sau các vật trông thấy hàng ngày, ta rút ra được rất nhiều điều phải học từ chúng. Tôi thần tượng quả bóng các bạn ạ!

NGUYỄN HỮU HIẾU

ĐỔI BIẾN... *(Tiếp trang 2)*

Lời giải. Đặt $x = 2a + b + c$; $y = a + 2b + c$; $z = a + b + 2c$.

Suy ra $4a = 3x - y - z$; $4b = 3y - x - z$;
$4c = 3z - x - y$.

BĐT đã cho tương đương với

$$\frac{4a}{2a+b+c}+\frac{4b}{a+2b+c}+\frac{4c}{a+b+2c}\le 3.$$

Ta có $\mathrm{VT} = \dfrac{3x-y-z}{x}+\dfrac{3y-x-z}{y}+\dfrac{3z-x-y}{z}$

$$=9-\left(\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\right)\le 3 \text{ (đpcm)}. \square$$

★Thí dụ 6. *Cho $a+b+c=1$; $3a+2b>c$; $3b+2c>a$; $3c+2a>b$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{3a+2b-c}+\frac{1}{3b+2c-a}+\frac{1}{3c+2a-b}\ge\frac{9}{4}.$$

Lời giải. Đặt $x = 3a+2b-c$; $y = 3b+2c-a$; $z = 3c+2a-b$.

Từ giả thiết, ta có x, y, z đều dương và

$$x+y+z = 4(a+b+c) = 4.$$

Khi đó BĐT đã cho trở thành

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{4}\Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9$$

$$\Leftrightarrow 3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\ge 9.$$

BĐT này đúng do áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương (đpcm).$\square$

Cuối cùng mời bạn đọc tự luyện tập thông qua các bài toán sau:

1. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh các bất đẳng thức sau

a) $\dfrac{a}{2b+2c-a}+\dfrac{b}{2c+2a-b}+\dfrac{c}{2a+2b-c}\ge 1$.

b) $\dfrac{a}{\sqrt{b+c-a}}+\dfrac{b}{\sqrt{a+c-b}}+\dfrac{c}{\sqrt{a+b-c}}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

2. Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{4}{2a+b+c}+\frac{4}{a+2b+c}+\frac{4}{a+b+2c}\le\frac{9}{a+b+c}.$$

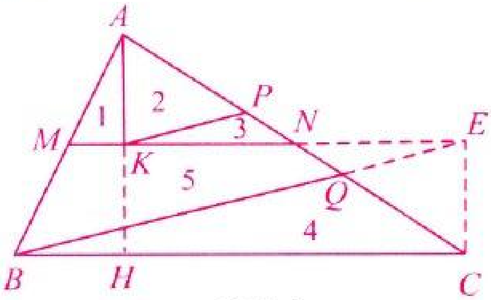
Đáp án Cuộc thi VUI HÈ 2011

*Cuộc thi Vui hè 2011 có sáu bài toán đố vui được đăng trên Tạp chí TH&TT số **407(5.2011)** và số **408(6.2011)**. Tòa soạn đã nhận được lời giải ba bài đợt thứ nhất của nhiều bạn trên khắp cả nước. Mong các bạn tiếp tục gửi lời giải cho ba bài đợt thứ hai. Hãy chờ đọc đáp án của ba bài đợt thứ hai và danh sách các bạn đoạt giải Cuộc thi Vui hè trên Tạp chí TH&TT số **412 (10.2011)**. Chúc các bạn may mắn. Dưới đây là đáp án ba bài của đợt thứ nhất.*

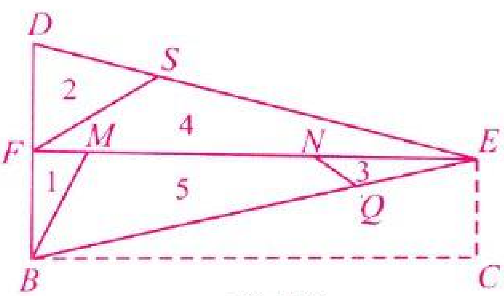
Bài 1. PHÂN CHIA TAM GIÁC THƯỜNG GHÉP THÀNH TAM GIÁC CÂN

Giả sử tam giác ban đầu là ABC có cạnh BC dài nhất thì đường cao AH ngắn nhất. Lúc đó các góc ABC và ACB đều là góc nhọn. Gọi M, N, K tương ứng là trung điểm của AB, AC và AH. Hạ $CE \perp MN$, BE cắt AC tại Q. Ta cắt tam giác ABC thành 5 mảnh như hình 1 rồi ghép lại như ở hình 2 sẽ được tam giác BDE cân ($BE = DE$) và có đáy $BD = AH$, trong đó

Hình 1		*Hình 2*	*Đa giác*
ΔAKM	=	ΔBFM	(1)
ΔAKP	=	ΔFDS	(2)
ΔKNP	=	ΔENQ	(3)
ΔBCQ	=	ΔEFS	(4)
Tứ giác $BMNQ$ giữ nguyên			(5)



Hình 1

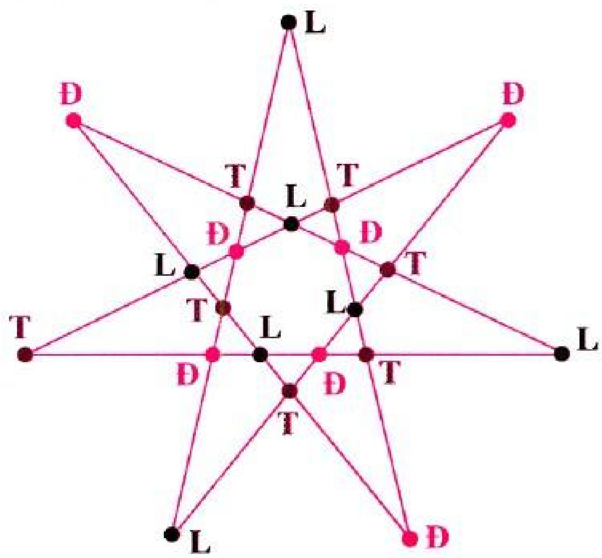


Hình 2

ĐAN QUỲNH

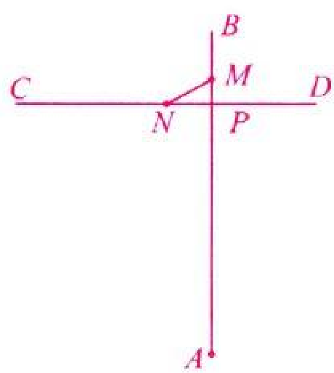
Bài 2. TRANG TRÍ BẢNG ĐÈN BA MÀU

Trên đường tròn lấy 7 điểm cách đều nhau và nối các đoạn thẳng như ở hình vẽ. Xếp các bóng đèn Đỏ (Đ), Lam (L) và Tím (T) như hình vẽ. Chú ý rằng ba bóng đèn tạo thành ba đỉnh của một tam giác nhỏ nhất phải khác màu nhau. Dưới đây là một cách trang trí thỏa mãn yêu cầu đề bài.



AN MINH

Bài 3. KHOẢNG CÁCH NGẮN NHẤT



Gọi thời gian đi của mỗi bạn *Tuấn, Tú* là x giờ và M, N lần lượt là vị trí xuống xe của *Tuấn, Tú* trên đoạn AB, CD.

Khi đó quãng đường Tuấn đi là $AM = 48x$ (km).

Quãng đường *Tú* đi là

$$CN = 36x \text{ (km)}.$$

Khoảng cách giữa hai xe là

$$\begin{aligned} MN &= \sqrt{MP^2 + NP^2} \\ &= \sqrt{|AP - AM|^2 + |CP - CN|^2} \\ &= \sqrt{(46-48x)^2 + (38-36x)^2} \\ &= \sqrt{3600x^2 - 7152x + 3560} \\ &= \sqrt{\left(60x - \frac{298}{5}\right)^2 + \frac{196}{25}} \geq \frac{14}{5}. \end{aligned}$$

Suy ra $MN \geq 2{,}8$ (km).

Vậy khoảng cách gần nhất giữa hai xe là 2,8km, khi $x = \dfrac{149}{150}$ (giờ).

$$AM = 48.\frac{149}{150} = 47{,}68 \text{ (km)};$$

$$MP = AM - AP = 1{,}68 \text{ (km)};$$

$$CN = 36.\frac{149}{150} = 35{,}76 \text{ (km)};$$

$$NP = CP - CN = 2{,}24 \text{ (km)}.$$

Bạn *Tuấn* xuống xe tại điểm M nằm giữa B và P, với $MP = 1{,}68$km.

Bạn *Tú* xuống xe tại điểm N nằm giữa C và P, với $NP = 2{,}24$km.

Nhận xét. Tuyên dương các bạn sau đây giải đủ cả ba bài và có lời giải gọn, lập luận chặt chẽ.

1) *Bùi Hữu Vinh*, 11T7, THPT Đô Lương I, Đô Lương, **Nghệ An.**

2) *Nguyễn Phước Đoàn Nhân*, 11/2, THPT Sào Nam, Duy Xuyên, **Quảng Nam.**

3) *Vũ Công Lập*, 10A2, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy, **Thái Bình.**

4) *Nguyễn Đức Anh*, 10A, THPT chuyên Quang Trung, **Bình Phước.**

5) *Trương Đình Sách*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**

GIA LINH

PROBLEMS... *(Tiếp trang 17)*

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/411. The incircle (I) of a triangle ABC touches BC, CA, AB at D, E, F respectively. The line passing through A and parallel to BC meets EF at K. M is the midpoint of BC. Prove that IM is perpendicular to DK.

T7/411. Solve the system of equations

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{3}} = x+y \\ x\sqrt{2xy+5x+3} = 4xy-5x-3. \end{cases}$$

T8/411. Let a, b, c be real numbers such that the equation $ax^2+bx+c=0$ has two real solutions, both are in the closed interval $[0\ ;\ 1]$. Find the maximum and mininum values of the expression

$$M = \frac{(a-b)(2a-c)}{a(a-b+c)}.$$

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/411. Let $P(x)$ and $Q(x)$ be two polynomials with real coefficients, each has at least one real solution, so that

$$P(1+x+Q(x)+(Q(x))^2) = Q(1+x+P(x)+(P(x))^2)$$

For any $x \in \mathbb{R}$. Prove that $P(x) \equiv Q(x)$.

T10/411. Let a, b, c, d be positive numbers such that $a \geq b \geq c \geq d$ and $abcd = 1$. Find the smallest constant k such that the following inequality holds

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} + \frac{k}{d+1} \geq \frac{3+k}{2}.$$

T11/411. Find all continuous functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfying $\{f(x+y)\} = \{f(x)+f(y)\}$ for every $x, y \in \mathbb{R}$ ($[t]$ is the largest integer not exceed t and $\{t\} = t - [t]$.)

T12/411. Let ABC be a triangle, P is an arbitrary point inside the triangle. Let d_a, d_b, d_c be respectively the distances from P to BC, CA, AB; R_a, R_b, R_c are the circumradii of triangles PBC, PCA, PAB respectively. Prove that

$$\frac{(d_a+d_b+d_c)^2}{PA.PB.PC} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sin A}{R_a} + \frac{\sin B}{R_b} + \frac{\sin C}{R_c}\right).$$

Translated by LE MINH HA

TIN TỨC

Sau khi Thủ tướng Chính phủ phê duyệt Chương trình trọng điểm quốc gia phát triển toán học giai đoạn 2011 - 2020 và quyết định thành lập Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán, Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo đã kí Quyết định thành lập Ban Điều hành Chương trình trọng điểm quốc gia phát triển Toán học giai đoạn 2011- 2020 (gồm 14 thành viên theo QĐ số 2078/QĐ-BGDĐT ngày 20/5/2011) và Quyết định thành lập Hội đồng Khoa học của Viện nghiên cứu cao cấp về Toán nhiệm kì 2011-2014 (gồm 14 thành viên theo QĐ số 3467/QĐ-BGDĐT ngày 16/8/2011).

BAN ĐIỀU HÀNH CHƯƠNG TRÌNH TRỌNG ĐIỂM QUỐC GIA PHÁT TRIỂN TOÁN HỌC GIAI ĐOẠN 2011 - 2020

1. Ông *Bùi Văn Ga*, Thứ trưởng Bộ GD-ĐT: Trưởng ban;

2. Ông *Trần Văn Nhung*, Tổng Thư kí Hội đồng Chức danh giáo sư nhà nước: Phó trưởng ban;

3. Bà *Nguyễn Thị Lê Hương*, Phó Vụ trưởng Vụ Giáo dục Đại học, Bộ GD-ĐT: Ủy viên thường trực;

4. Ông *Nguyễn Văn Ngữ*, Vụ trưởng Vụ Kế hoạch - Tài chính, Bộ GD-ĐT: Ủy viên;

5. Ông *Tạ Đức Thịnh*, Vụ trưởng Vụ Khoa học, Công nghệ và Môi trường, Bộ GD-ĐT: Ủy viên;

6. Ông *Nguyễn Sỹ Đức*, Phó Vụ trưởng Vụ Giáo dục Trung học: Ủy viên;

7. Ông *Hoàng Đức Minh*, Cục trưởng Cục Nhà giáo và Cán bộ quản lí cơ sở giáo dục, Bộ GD-ĐT: Ủy viên;

8. Ông *Ngô Việt Trung*, Viện trưởng Viện Toán học, Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam: Ủy viên;

9. Ông *Nguyễn Hữu Dư*, Phó Hiệu trưởng Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội, Phó Chủ tịch kiêm Tổng Thư kí Hội Toán học Việt Nam: Ủy viên;

10. Ông *Phan Quốc Khánh*, Trường Đại học Quốc tế, Đại học Quốc gia TP Hồ Chí Minh, Phó Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam: Ủy viên;

11. Ông *Lê Văn Thuyết*, Trưởng Ban Đào tạo Sau đại học, Đại học Huế: Ủy viên;

12. Ông *Đỗ Đức Thái*, Phó Chủ nhiệm Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội: Ủy viên;

13. Ông *Đinh Thanh Đức*, Phó Hiệu trưởng Trường Đại học Quy Nhơn: Ủy viên;

14. Ông *Lê Tuấn Hoa*, Giám đốc điều hành Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán, Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam: Ủy viên thư kí.

HỘI ĐỒNG KHOA HỌC CỦA VIỆN NGHIÊN CỨU CAO CẤP VỀ TOÁN NHIỆM KÌ 2011 - 2014

1. GS.TSKH *Ngô Bảo Châu*, Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán (Chủ tịch);

2. GS.TSKH *Ngô Việt Trung*, Viện Toán học, Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam (Phó Chủ tịch);

3. GS.TSKH *Trần Văn Nhung*, Hội đồng Chức danh giáo sư nhà nước;

4. GS.TSKH *Lê Tuấn Hoa*, Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán;

5. GS.TS *Nguyễn Hữu Dư*, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội (Thư kí);

6. GS.TSKH *Đỗ Đức Thái*, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội;

7. GS.TSKH *Phan Quốc Khánh*, Trường Đại học Quốc tế, Đại học Quốc gia TP Hồ Chí Minh;

8. GS.TS *Dương Minh Đức*, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG TP Hồ Chí Minh;

9. GS.TSKH *Nguyễn Hữu Việt Hưng*, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội;

10. GS.TSKH *Hoàng Xuân Phú*, Viện Toán học, Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam;

11. GS.TSKH *Hồ Tú Bảo*, Viện Khoa học và Công nghệ Tiên tiến Nhật Bản;

12. GS.TSKH *Đinh Tiến Cường*, ĐH Paris 6 (Pháp);

13. GS.TS *Đàm Thanh Sơn*, Viện Lí thuyết hạt nhân, ĐH Washington (Mỹ);

14. GS.TS *Vũ Hà Văn*, ĐH Yale (Mỹ).

LÊ MAI

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

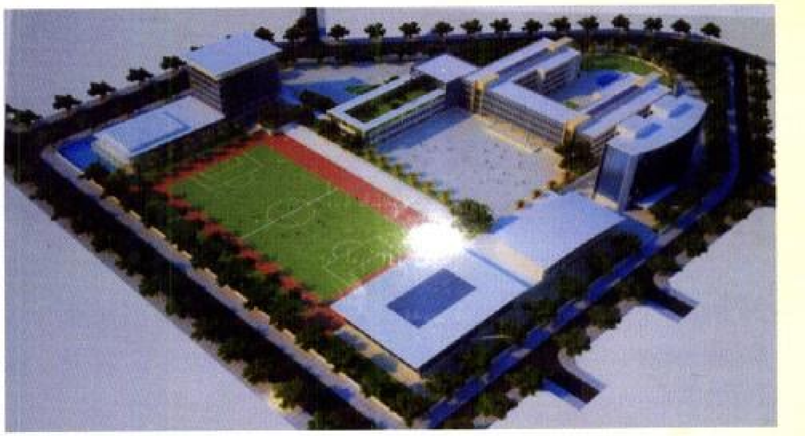
XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 411 (9.2011)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

TRONG SỐ NÀY

Ảnh Bìa 1: Học sinh Trường THPT chuyên Bắc Ninh trong ngày khai giảng năm học mới.

TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẮC NINH
TRÊN ĐƯỜNG PHÁT TRIỂN

ThS. TRỊNH KHÔI
Hiệu trưởng nhà trường



Mô hình trường THPT chuyên Bắc Ninh khởi công xây dựng vào 30/8/2011.

Trường THPT chuyên Bắc Ninh có tiền thân là trường PTNK Bắc Ninh, bao gồm cả 3 cấp học: 1,2, 3, được thành lập năm 1993 theo quyết định của UBND tỉnh Hà Bắc. Đến tháng 8 năm 1995 khối cấp 3 được tách ra thành trường PTTH Năng khiếu Hàn Thuyên, và đến tháng 5 năm 2003, trường được đổi tên thành trường THPT chuyên Bắc Ninh.

Năm đầu mới thành lập nhà trường chỉ vẻn vẹn có 3 lớp 10 với 12 cán bộ quản lí và giáo viên THPT. Đến nay nhà trường đã có quy mô đào tạo 27 lớp với 9 môn chuyên (Toán, Vật lí, Hóa học, Sinh học, Tin học, Ngữ văn, Lịch sử, Địa lí và Tiếng Anh) gồm 765 học sinh. Hội đồng nhà trường có 95 cán bộ, giáo viên, nhân viên, trong đó có 45 Thạc sĩ; 10 giáo viên đang học chương trình Cao học, 1 giáo viên đang làm Nghiên cứu sinh.

Mục tiêu xuyên suốt quá trình phát triển của nhà trường là: *tạo cho học sinh có hứng thú học tập, có lòng nhân ái, có sức khỏe và trí tuệ phát triển tốt, có kĩ năng sống, có ý thức cống hiến cho cộng đồng; có ước mơ hoài bão trở thành những nhà khoa học, những doanh nhân, nhà hoạt động xã hội, những công dân tốt,...bước đầu có nhiều học sinh bộc lộ những năng khiếu và phẩm chất, thiên hướng trí tuệ ở nhiều lĩnh vực, có thành tích tốt trong các kì thi trí tuệ đặc biệt là thi chọn học sinh giỏi Quốc gia, Khu vực và Quốc tế.*

Kể từ ngày thành lập, nhà trường luôn hoàn thành tốt nhiệm vụ và mục tiêu đề ra: tỉ lệ học sinh tốt nghiệp THPT luôn đạt 100%; tỉ lệ học sinh thi đỗ vào Đại học hằng năm thường trên 90% trong đó có nhiều học sinh là thủ khoa các trường đại học, có nhiều học sinh được học tại các lớp cử nhân tài năng . Nhà trường đã có 453 lượt học sinh đoạt giải Quốc gia, 1 Huy chương Bạc Olympic Quốc tế về Hóa học, 1 Huy chương Đồng Olympic Quốc tế về Toán học, 3 lượt học sinh tham dự Olympic Vật lí Châu Á ; 2 Huy chương Vàng môn Cờ vua Hội khỏe Phù Đổng toàn quốc; em *Hồ Thị Quế Chi* đoạt giải Nhất Quốc gia và đoạt giải Khuyến Khích Quốc tế cuộc thi viết thư UPU lần thứ 37,...

Với sự quan tâm của các cấp lãnh đạo, sự nỗ lực vươn lên không ngừng của các thế hệ giáo viên và học sinh, nhà trường đã đạt được những thành tích đáng trân trọng và tự hào. Nhà trường liên tục đạt danh hiệu Tập thể Lao động Xuất Sắc; được Chủ tịch nước tặng thưởng Huân chương Lao động Hạng Ba; được Thủ tướng Chính phủ tặng Bằng khen. Các tổ chức Đảng, Đoàn thể luôn luôn được công nhận Vững mạnh Xuất sắc . Hội đồng giáo dục nhà trường có 7 giáo viên được phong tặng danh hiệu Nhà giáo Ưu tú, 4 giáo viên được Chủ tịch nước tặng thưởng Huân chương Lao động Hạng Ba và nhiều nhà giáo được tặng Bằng khen của Thủ tướng Chính phủ, của Bộ trưởng Bộ GD&ĐT, của Chủ tịch UBND tỉnh Bắc Ninh.

Vừa qua UBND tỉnh Bắc Ninh đã phê duyệt đề án: "Phát triển trường THPT chuyên Bắc Ninh và 8 trường THCS chất lượng cao" đến năm 2020 mà điểm nhấn quan trọng nhất là đầu tư xây dựng mới trường THPT chuyên. Theo quy hoạch trường THPT chuyên Bắc Ninh sẽ được xây dựng thành ngôi trường kiểu mẫu đẳng cấp quốc tế, trên khu đất rộng 4ha tại trung tâm Thành phố Bắc Ninh với kinh phí 600 tỉ đồng. Công trình này được khởi công vào đầu năm học 2011-2012. Với cơ sở vật chất được đầu tư hiện đại cộng thêm nhiều chế độ đãi ngộ thỏa đáng nhằm thu hút đội ngũ giáo viên và học sinh xuất sắc sẽ được triển khai trong thời gian tới, tỉnh và ngành GD-ĐT Bắc Ninh kì vọng trường THPT chuyên Bắc Ninh sẽ là ngôi trường biểu tượng cho truyền thống hiếu học và khoa bảng của quê hương Bắc Ninh.

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT09M1
Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2011
Giá : 8000 đồng
Tám nghìn đồng