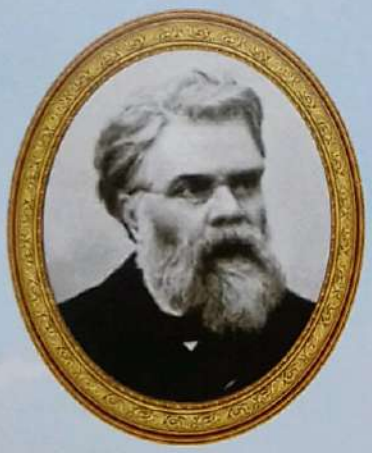
TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

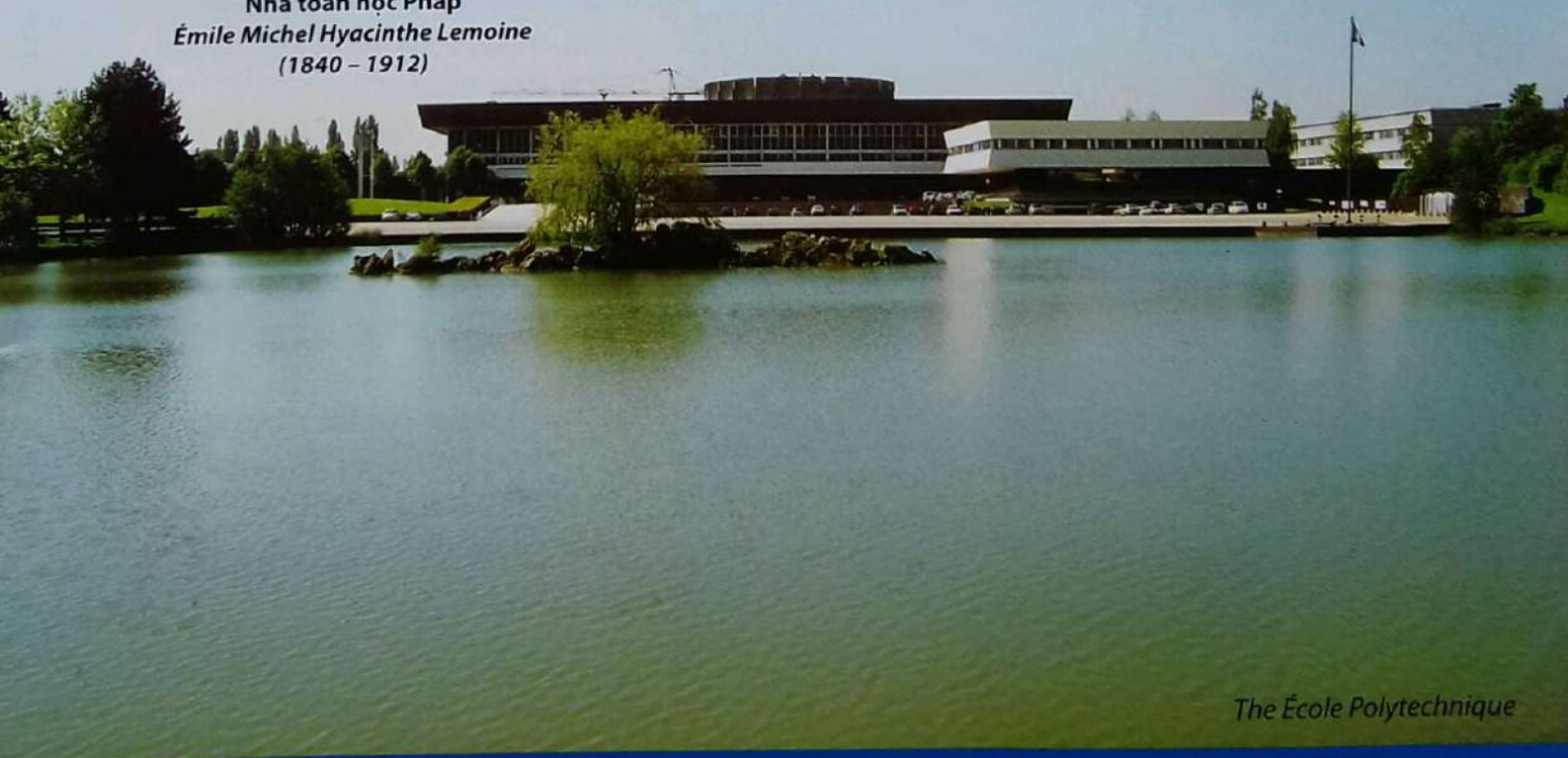
XUẤT BẢN TỪ 1964

12 2019
Số 510

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 56
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre



Nhà toán học Pháp
Émile Michel Hyacinthe Lemoine
(1840 – 1912)



The École Polytechnique

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Chân trời sáng tạo

BỘ SÁCH GIÁO KHOA
CHÂN TRỜI SÁNG TẠO

DANH MỤC BỘ SÁCH LỚP MỘT

SÁCH HỌC SINH

1. Tiếng Việt 1, tập một
2. Tiếng Việt 1, tập hai
3. Toán 1
4. Đạo đức 1
5. Tự nhiên và Xã hội 1
6. Âm nhạc 1
7. Mĩ thuật 1
8. Hoạt động trải nghiệm 1
9. Giáo dục thể chất 1
10. Family and Friends 1 (National Edition), Student book

SÁCH GIÁO VIÊN

1. Tiếng Việt 1, tập một - SGV
2. Tiếng Việt 1, tập hai - SGV
3. Toán 1 - SGV
4. Đạo đức 1 - SGV
5. Tự nhiên và Xã hội 1 - SGV
6. Âm nhạc 1 - SGV
7. Mĩ thuật 1 - SGV
8. Hoạt động trải nghiệm 1 - SGV
9. Giáo dục thể chất 1 - SGV
10. Family and Friends 1 (National Edition), Teacher Guide

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

MỘT SỐ ỨNG DỤNG HAY CỦA NGUYÊN LÝ DIRICHLET

NGUYỄN HIỆP (*Hà Nội*)

Dirichlet Peter Gustav hay *Lejeune - Dirichlet P.G.* (*Đi-rich-lê*) (13-02-1805 - 05-05-1859) là nhà toán học người Đức. Ông thiết lập *Nguyên lí ô chuồng chim bồ câu* đã được sử dụng một cách rộng rãi trong toán học để chứng minh nhiều định lí. Chẳng hạn định lí *Gelfond - Schneider* được chứng minh năm 1934. Đó là lời giải của bài toán thứ bảy trong số 23 bài toán của *Hilbert* (*Hai mươi ba bài toán cho thế kỉ XX*). *Nguyên lí ô chuồng chim bồ câu* cũng là một trong những nguyên lí được dùng nhiều để chứng minh sự tồn tại của các cấu hình trong lí thuyết tổ hợp.

1. Nguyên lí Dirichlet

Giả sử có một đàn chim bồ câu bay vào chuồng. Nếu số chim nhiều hơn số ô chuồng thì ít nhất trong một ô chuồng có nhiều hơn một con chim. Nguyên lí này được *Dirichlet* thiết lập, sử dụng và đặt tên là "*Nguyên lí ô chuồng chim bồ câu*". Nguyên lí này dĩ nhiên có thể áp dụng cho các đối tượng không phải là chim bồ câu và ô chuồng chim.

Định lí 1 (Nguyên lí Dirichlet). *Nếu có nhiều hơn k đồ vật được đặt vào trong k hộp, thì có ít nhất một hộp chứa nhiều hơn một đồ vật.*

Chứng minh. Giả sử không có hộp nào trong k hộp chứa nhiều hơn một đồ vật. Khi đó tổng số đồ vật được chứa trong các hộp nhiều nhất là k. Điều này trái với giả thiết là có nhiều hơn k đồ vật. Vậy có ít nhất một hộp chứa nhiều hơn một đồ vật.

"*Nguyên lí Dirichlet*" còn được gọi là "*Nguyên lí ngăn kéo*" hay "*Nguyên lí hộp*".

Thí dụ 1. *Khối 6 của một trường có 400 học sinh thì có ít nhất 2 học sinh trùng ngày sinh vì một năm có nhiều nhất 366 ngày.*

Thí dụ 2. *Một lớp có 30 học sinh thì có ít nhất 2 học sinh có tên bắt đầu bằng cùng một chữ cái, vì chỉ có 29 chữ cái tiếng Việt.*

Thí dụ 3. *Bài thi trong một kì thi học sinh giỏi được chấm theo thang điểm là các số nguyên từ 0 đến 100. Hỏi phải có bao nhiêu học sinh dự thi để chắc chắn có 2 học sinh cùng điểm thi?*

Lời giải. Thang điểm có 101 bậc. Theo nguyên lí Dirichlet, kì thi phải có ít nhất 102 học sinh dự thi để chắc chắn có 2 học sinh cùng điểm thi.

Nguyên lí Dirichlet chỉ ra rằng có ít nhất hai vật trong cùng một hộp nếu số vật nhiều hơn số hộp. Tuy nhiên, ta có thể rút ra kết luận mạnh hơn nếu số vật hơn số hộp rất nhiều. Chẳng hạn, trong bất kì một nhóm gồm 21 chữ số của hệ thập phân đều có ít nhất 3 chữ số trùng nhau. Điều đó là đúng bởi vì nếu chứa 21 vật vào 10 hộp thì ít nhất có một hộp chứa nhiều hơn 2 vật.

Định lí 2 (Nguyên lí Dirichlet tổng quát). *Nếu có N đồ vật được đặt vào trong k hộp thì tồn tại một hộp chứa ít nhất* $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ *vật và tồn tại một hộp chứa nhiều nhất* $\left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor$ *vật.*

Chú thích. Kí hiệu $\lceil a \rceil$ được dùng để chỉ *phần nguyên trần* của số thực a, là số nguyên nhỏ nhất không bé hơn a. Ví dụ $\lceil 0,25 \rceil = 1$. Kí hiệu $\lfloor a \rfloor$ ($[a]$) được dùng để chỉ *phần nguyên sàn* (phần nguyên) của số thực a, là số nguyên lớn nhất không lớn hơn a. Ví dụ $\lfloor 0,25 \rfloor = [0,25] = 0$.

Chứng minh. Giả sử không có hộp nào trong k hộp chứa ít nhất $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ vật. Khi đó tổng số vật được chứa trong các hộp nhiều nhất là

$k\left(\left\lceil\frac{N}{k}\right\rceil-1\right)<k\left\{\left(\frac{N}{k}+1\right)-1\right\}=N$. Điều này trái với giả thiết là có N vật. Vậy tồn tại một hộp chứa ít nhất $\left\lceil\frac{N}{k}\right\rceil$ vật. Giả sử không có hộp nào trong k hộp chứa nhiều nhất $\left\lfloor\frac{N}{k}\right\rfloor$ vật. Khi đó tổng số vật được chứa trong các hộp ít nhất là $k\left(\left\lfloor\frac{N}{k}\right\rfloor+1\right)>k\left\{\left(\frac{N}{k}-1\right)+1\right\}=N$. Điều này trái với giả thiết là có N vật. Vậy tồn tại một hộp chứa nhiều nhất $\left\lfloor\frac{N}{k}\right\rfloor$ vật.

Thí dụ 4. *Một lớp học có 40 học sinh thì có ít nhất $\left\lceil\frac{40}{12}\right\rceil=4$ học sinh cùng tháng sinh và tồn tại một tháng có không quá $\left\lfloor\frac{40}{12}\right\rfloor=3$ học sinh tổ chức sinh nhật.*

Thí dụ 5. *Trên đầu mỗi người có không quá 100000 sợi tóc. Theo kết quả đánh giá sơ bộ tính đến 01-04-2019, Việt Nam có hơn 96,2 triệu dân. Trong số đó có ít nhất $\left\lceil\frac{96200000}{100000}\right\rceil=962$ người có số sợi tóc trên đầu bằng nhau.*

Thí dụ 6. *Có 4 loại giải thưởng. Hỏi phải có ít nhất bao nhiêu học sinh để chắc chắn có ít nhất 5 học sinh cùng nhận một loại giải thưởng?*

Lời giải. Để chắc chắn có ít nhất 5 học sinh cùng nhận một giải thưởng thì số học sinh N thỏa mãn $\left\lceil\frac{N}{4}\right\rceil\geq 5$. Suy ra $N\geq 4.4+1=17$. Vậy phải có ít nhất 17 học sinh.

Thí dụ 7. *Số lượng đầu số (mã mạng) ít nhất là bao nhiêu để đảm bảo 95 triệu thuê bao di động có số điện thoại khác nhau, mỗi số gồm 10 chữ số có dạng 0xx-xxxxxxx, trong đó ba chữ số đầu tiên là đầu số?*

Lời giải. Có 10 triệu số điện thoại khác nhau có dạng xxxxxxx mà có 95 triệu thuê bao nên theo nguyên lí Dirichlet ít nhất có $\left\lceil\frac{95000000}{10000000}\right\rceil=10$ thuê bao có cùng một số. Để đảm bảo mỗi thuê bao có một số cần có ít nhất 10 đầu số.

2. Một số bài toán áp dụng nguyên lí Dirichlet

Trong nhiều áp dụng của nguyên lí Dirichlet các đồ vật và các hộp cần phải được chọn một cách khôn khéo. Thường áp dụng nguyên lí Dirichlet phối hợp với các phương pháp suy luận toán học khác. Sau đây chúng ta mô tả một số áp dụng như vậy.

Bài toán 1. *Trong một tháng 30 ngày một đội bóng chuyền chơi mỗi ngày ít nhất 1 trận, nhưng chơi không quá 40 trận. Chứng minh rằng có những ngày liên tiếp đội bóng chơi tất cả 19 trận.*

Phân tích. Ta chứng minh tồn tại i, j sao cho $a_i=a_j+19$ trong đó a_i là số trận đội chơi từ ngày đầu tháng đến hết ngày i. Ta chọn các đồ vật là các a_i, a_i+19 với $i=1,2,\ldots,30$; các hộp là các giá trị có thể có của chúng.

Lời giải. Gọi a_i là số trận mà đội chơi từ ngày đầu tháng đến hết ngày i. Khi đó $a_1,a_2,\ldots,a_{30}$ là một dãy các số nguyên phân biệt và tăng dần với $1\leq a_i\leq 40$. Ta cũng có $a_1+19,a_2+19,\ldots,a_{30}+19$ là một dãy các số nguyên phân biệt và tăng dần với $20\leq a_i+19\leq 59$. Do đó 60 số $a_1,a_2,\ldots,a_{30},a_1+19,a_2+19,\ldots,a_{30}+19$ chỉ nhận 59 giá trị là các số nguyên từ 1 đến 59. Theo nguyên lí Dirichlet, trong 60 số này có ít nhất 2 số bằng nhau. Vì mỗi dãy $a_1,a_2,\ldots,a_{30}$ và $a_1+19,a_2+19,\ldots,a_{30}+19$ gồm các số phân biệt nên tồn tại các chỉ số i,j sao cho $a_i=a_j+19$. Vậy có các ngày liên tiếp từ ngày $j+1$ đến hết ngày i đội bóng chơi tất cả 19 trận.

Bài toán 2. *Ta viết tất cả các số tự nhiên từ 1 đến 2019 lên bảng rồi xóa 1008 số bất kì trong chúng. Chứng minh rằng trong các số còn lại trên bảng tồn tại ít nhất 2 số mà tổng của chúng là một số còn lại trên bảng.*

Phân tích. Trên bảng còn lại 1011 số. Áp dụng nguyên lí Dirichlet với các các đồ vật là 2020 số

$a_i, a_i - a_1$ với $i = 2, 3, \ldots, 1011$ và các hộp là 2019 giá trị có thể có của chúng là các số tự nhiên từ 1 đến 2019.

Lời giải. Ta kí hiệu 1011 số còn lại trên bảng là a_i với $i = 1, 2, \ldots, 1011$ sao cho $1 \le a_1 < a_2 < \ldots < a_{1011} \le 2019$. Ta có $1 \le a_2 - a_1 < a_3 - a_1 < \ldots < a_{1011} - a_1 \le 2018$. Hai dãy a_i, $i = 2,3,\ldots,1011$ và $a_i - a_1$ có 2020 số hạng mà có 2019 giá trị có thể có của chúng là các số tự nhiên từ 1 đến 2019 nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại 2 số hạng bằng nhau. Mỗi dãy gồm các số hạng phân biệt do đó tồn tại i, j khác 1 để $a_i = a_j - a_1$. Vì $a_1 \ne 0$ nên tồn tại 3 số a_1, a_i, a_j sao cho $a_1 + a_i = a_j$.

Bài toán 3 (Đề thi tuyển sinh vào THPT Chuyên KHTN Hà Nội, 1989). *Chứng minh rằng trong 52 số nguyên dương bất kì luôn luôn có thể tìm được 2 số sao cho tổng hoặc hiệu của 2 số đó chia hết cho 100.*

Phân tích 1. Hai số có cùng số dư khi chia cho 100 thì có hiệu chia hết cho 100. Hai số khi chia cho 100 có tổng các số dư bằng 100 thì có tổng chia hết cho 100. Ta chia các số dư trong các phép chia 52 số cho 100 thành các nhóm, mỗi nhóm là một số hoặc hai số có tổng là 100. Nếu hai số chia cho 100 có số dư thuộc cùng một nhóm thì hai số đó có tổng hoặc hiệu chia hết cho 100. Ta chọn các đồ vật là số dư của các phép chia 52 số cho 100 và các hộp là các nhóm số dư.

Phân tích 2. Mỗi số a_i có dạng $a_i = 100b_i + c_i$. Nếu $c_i = c_j$ thì $a_i - a_j \vdots 100$. Nếu $c_i \ne c_j$, ta chứng minh $a_i + a_j \vdots 100$ bằng cách chứng minh $c_i = 100 - c_j$. Trong trường hợp này ta chọn các đồ vật là các số c_i và $100 - c_i$; các hộp là các giá trị có thể có của chúng.

Lời giải. *Cách 1.* Ta chia các số dư trong các phép chia 52 số cho 100 thành các nhóm {0}, {1, 99}, {2, 98}, ... ,{49, 51}, {50}. Theo nguyên lí Dirichlet, có 52 số mà có 51 nhóm số dư nên tồn tại 2 số khi chia cho 100 có số dư thuộc cùng nhóm. Nếu số dư của 2 số đó giống nhau thì hiệu của chúng chia hết cho 100. Nếu số dư của 2 số đó khác nhau thì tổng 2 số dư bằng 100 nên tổng của 2 số đó chia hết cho 100. Vậy trong 52 số nguyên dương bất kì luôn luôn có thể tìm được 2 số sao cho tổng hoặc hiệu của 2 số đó chia hết cho 100.

Cách 2. Gọi 52 số nguyên dương bất kì là $a_1, a_2, \ldots, a_{52}$. Mỗi số $a_i, i = 1,2,\ldots,52$ có dạng $a_i = 100b_i + c_i$; trong đó $b_i, c_i \in \mathbb{N}$ và $0 \le c_i \le 99$. Nếu trong $c_1, c_2, \ldots, c_{52}$ có hai số bằng nhau, giả sử $c_i = c_j$ thì $a_i - a_j = 100(b_i - b_j) \vdots 100$. Nếu $c_1, c_2, \ldots, c_{52}$ đôi một khác nhau thì có 51 số khác 50, giả sử đó là $c_1, c_2, \ldots, c_{51}$. Ta có các số $d_i = 100 - c_i, i = 1,2,\ldots,51$ là các số nguyên đôi một khác nhau và $1 \le d_i \le 100$. Như vậy 102 số $c_1, c_2, \ldots, c_{51}, d_1, d_2, \ldots, d_{51}$ nhận giá trị trong 101 số nguyên từ 0 đến 100. Theo nguyên lí Dirichlet, có 2 số trong chúng bằng nhau. Do các số $c_1, c_2, \ldots, c_{51}$ đôi một khác nhau và các số $d_1, d_2, \ldots, d_{51}$ đôi một khác nhau nên hai số bằng nhau là c_i và d_j nào đó. Ta có:

$$c_i = d_j = 100 - c_j \Rightarrow c_i + c_j = 100$$
$$\Rightarrow a_i + a_j = 100(b_i + b_j) + 100 \vdots 100.$$

Vì $c_i \ne 50 \Rightarrow c_i \ne c_j \Rightarrow a_i \ne a_j$. Vậy trong 52 số nguyên dương bất kì luôn luôn có thể tìm được 2 số sao cho tổng hoặc hiệu của 2 số đó chia hết cho 100.

Bài toán 4. *Chứng minh rằng trong $n + 1$ số nguyên dương không vượt quá $2n$ tồn tại một số chia hết cho một số khác.*

Phân tích. Mỗi số nguyên dương đều viết được dưới dạng $2^k.q$ trong đó k là số tự nhiên, q là số nguyên dương lẻ. Ta chứng minh trong $n + 1$ số nguyên dương đó tồn tại hai số $a_i = 2^{k_i}.q_i$ và $a_j = 2^{k_j}.q_j$ sao cho $q_i = q_j$. Ta chọn các đồ vật là

các q_i với $i = 1, 2, \ldots, n+1$; các hộp là các giá trị có thể có của chúng.

Lời giải. Gọi $n + 1$ số nguyên dương đó là $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Ta có $a_i = 2^{k_i}.q_i$ với $i = 1, 2, \ldots, n+1$, trong đó k_i là số tự nhiên, q_i là số nguyên dương lẻ nhỏ hơn $2n$. Có $n + 1$ số $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ mà chỉ có n số nguyên dương lẻ nhỏ hơn $2n$ nên theo nguyên lí Dirichlet trong các số $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ tồn tại hai số q_i và q_j bằng nhau, tức là $q_i = q_j = q$. Khi đó $a_i = 2^{k_i}.q$ và $a_j = 2^{k_j}.q$. Nếu $k_i \geq k_j$ thì $a_i \vdots a_j$. Nếu $k_j > k_i$ thì $a_j \vdots a_i$. Vậy trong $n + 1$ số nguyên dương không vượt quá $2n$ tồn tại một số chia hết cho một số khác.

Bài toán 5 (Đề thi tuyển sinh vào THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, 1989). *Có 6 thành phố, trong đó cứ 3 thành phố bất kì thì có ít nhất 2 thành phố liên lạc được với nhau. Chứng minh rằng trong 6 thành phố nói trên tồn tại 3 thành phố liên lạc được với nhau.*

Phân tích. Ta chọn các hộp là hai mối quan hệ liên lạc được và không liên lạc được, các đồ vật là các mối quan hệ của một thành phố với các thành phố khác.

Lời giải. Gọi A là một trong 6 thành phố. A quan hệ với 5 thành phố khác trong 2 mối quan hệ là liên lạc được và không liên lạc được nên theo nguyên lí Dirichlet có 3 thành phố liên lạc được với A hoặc có 3 thành phố không liên lạc được với A, vì $\left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = 3$. Xét trường hợp có 3 thành phố B, C, D liên lạc được với A. Theo giả thiết, trong 3 thành phố B, C, D có 2 thành phố liên lạc được với nhau do đó 2 thành phố này cùng với A là 3 thành phố liên lạc được với nhau. Xét trường hợp có 3 thành phố B, C, D không liên lạc được với A. Theo giả thiết, trong bộ ba thành phố (A, B, C) thì B và C liên lạc được với nhau (vì B và C không liên lạc được với A). Tương tự, trong các bộ ba thành phố (A, B, D) và (A, C, D) thì B và D liên lạc được với nhau, C và D liên lạc được với nhau. Do đó B, C, D là ba thành phố liên lạc được với nhau. Vậy trong 6 thành phố đã cho tồn tại 3 thành phố liên lạc được với nhau.

Bài toán 6 (Đề thi tuyển sinh vào THPT chuyên KHTN Hà Nội, 2000). *Trên mặt phẳng cho 6 điểm sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng và khoảng cách giữa các cặp điểm là các số khác nhau. Ta nối mỗi cặp điểm bởi một đoạn thẳng. Chứng minh rằng trong các đoạn thẳng thu được có một đoạn thẳng là cạnh nhỏ nhất của một tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 6 điểm đã cho, đồng thời là cạnh lớn nhất của một tam giác khác cũng có 3 đỉnh là 3 trong 6 điểm đã cho.*

Phân tích. Ta tô các đoạn thẳng thu được bằng 2 màu, trong đó một màu tô các cạnh lớn nhất (hoặc các cạnh nhỏ nhất) của mỗi tam giác, màu kia tô các cạnh còn lại. Sau đó áp dụng nguyên lí Dirichlet chứng minh tồn tại một tam giác có ba cạnh cùng màu. Khi đó, cạnh nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) của tam giác đó đồng thời là cạnh lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) của một tam giác khác.

Lời giải. Gọi 6 điểm đã cho là A, B, C, D, E, F. Ta tô màu các đoạn thẳng nối các cặp điểm trong chúng như sau: Trong mỗi tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 6 điểm đã cho, tô cạnh lớn nhất màu đỏ, các đoạn thẳng còn lại tô màu xanh. Ta chứng minh tồn tại một tam giác có ba cạnh cùng màu. Theo nguyên lí Dirichlet, có 5 đoạn thẳng AB, AC, AD, AE, AF được tô bởi 2 màu xanh, đỏ nên trong chúng có 3 đoạn thẳng cùng màu. Không mất tổng quát, giả sử đó là AB, AC, AD. Khi đó, nếu một trong 3 đoạn thẳng BC, CD, DB, chẳng hạn BC, cùng màu với các đoạn thẳng AB, AC, AD thì tam giác ABC có ba cạnh cùng màu. Nếu cả 3 đoạn thẳng BC, CD, DB khác màu với các đoạn thẳng AB, AC, AD thì chúng cùng màu với nhau suy ra tam giác BCD có ba cạnh cùng màu. Do đó tồn tại tam giác có ba cạnh là 3 đoạn thẳng trong các đoạn thẳng thu được cùng màu. Do cạnh lớn nhất của tam giác đó có màu đỏ nên cạnh nhỏ nhất của nó có màu đỏ. Vậy cạnh nhỏ nhất của tam giác này đồng thời là cạnh lớn nhất của một tam giác khác.

Bài toán 7 (Đề thi tuyển sinh vào THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, 1999). *Cho hình tròn (C) bán kính bằng 1. Giả sử $A_1, A_2, \ldots, A_8$ là 8 điểm bất kì nằm trong hình tròn (kể cả trên biên).*

Chứng minh rằng trong các điểm đã cho luôn tồn tại 2 điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1.

Phân tích. Trường hợp một điểm trùng với tâm, các điểm còn lại có một điểm nằm bên trong đường tròn hoặc cùng nằm trên đường tròn thì tồn tại 2 điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Trường hợp không có điểm nào trùng với tâm, ta chia hình tròn thành 7 hình quạt bằng nhau. Áp dụng nguyên lí Dirichlet với các đồ vật là 8 điểm và các hộp là các hình quạt.

Lời giải. Trường hợp 1: 8 điểm đã cho có điểm A_i trùng với tâm O của đường tròn (C). Nếu 7 điểm còn lại có điểm A_j nằm bên trong đường tròn (C) thì $A_iA_j < R = 1$. Nếu cả 7 điểm còn lại nằm trên đường tròn thì chúng chia đường tròn thành 7 cung. Do đó có một cung trong các cung đó có số đo nhỏ hơn $\frac{360^o}{6} = 60^o$. Khoảng cách giữa 2 điểm là đầu mút của cung đó nhỏ hơn $R = 1$.

Trường hợp 2: Cả 8 điểm đã cho đều khác O. Ta chia hình tròn thành 7 hình quạt bằng nhau có góc ở tâm bằng $\frac{360^o}{7} < 60^o$ (hình vẽ). Theo nguyên lí Dirichlet, trong 8 điểm đã cho phải có 2 điểm thuộc cùng một trong 7 hình quạt thu được (có thể nằm trên biên của hình quạt). Giả sử A_i, A_j thuộc một hình quạt.

Khi đó $\widehat{A_iOA_j} < 60^o$ nên một trong hai góc $\widehat{OA_iA_j}$ và $\widehat{OA_jA_i}$ lớn hơn 60° (có thể bằng 180°), chẳng hạn $\widehat{OA_iA_j} > 60^o$. Ta có $\widehat{A_iOA_j} < \widehat{OA_iA_j}$ nên $A_iA_j < OA_j \le R = 1$. Vậy trong các điểm đã cho luôn tồn tại 2 điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1.

Bài toán 8 (TH&TT, số 480). *Trên bảng ta viết các số từ 1 đến 2017. Hỏi xóa nhiều nhất bao nhiêu số để trên bảng chắc chắn tồn tại 7 số trong đó có một số là tổng của các số còn lại?*

Phân tích. Gọi số các số xóa là x và các số còn lại là $a_1 < a_2 < ... < a_{2017-x}$. Với $S = a_1 + ... + a_5$, ta chọn các đồ vật là hai dãy số nguyên $a_6 < ... < a_{2017-x}$, $a_{4x+16} - S < ... < a_{2017-x} - S$, các hộp là các giá trị có thể có của chúng là các số nguyên từ 1 đến 2017. Ta tìm x sao cho số đồ vật nhiều hơn số hộp để có $a_i = a_j - S$.

Lời giải. (*Xem* Toán học và Tuổi trẻ, Số 483).

BÀI TẬP

1. (*Đề thi tuyển sinh vào THPT chuyên Sư phạm Hà Nội*, 1992) Cho 100 số tự nhiên lẻ đầu tiên: 1, 3, 5, … , 199. Tìm số tự nhiên k bé nhất sao cho với k số tùy ý trong 100 số đã cho, bao giờ cũng chọn được hai số mà một trong hai số đó là bội của số kia.

2. Cho 6 số vô tỉ. Chứng minh rằng có thể chọn ra được 3 số trong 6 số đã cho để tổng từng đôi một đều là số vô tỉ.

3. Chứng minh rằng trong 502 số tự nhiên bất kì luôn tìm được 2 số có tổng hoặc hiệu chia hết cho 1000.

4. Chứng minh rằng trong 501 số tự nhiên bất kì khác nhau, mỗi số gồm ba chữ số, luôn tìm được 2 số có tổng bằng 1000.

5. Có 20 học sinh của hai lớp xếp thành hai hàng dọc, mỗi hàng đứng cách đều. Chứng minh rằng có ít nhất một học sinh đứng cách 2 bạn cùng lớp với mình một khoảng cách như nhau.

6. Cho 5 điểm ở bên trong một tam giác đều cạnh 2. Chứng minh rằng trong 5 điểm đó tồn tại 2 điểm có khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1.

7. Ta viết tất cả các số tự nhiên từ 1 đến 2019 lên bảng. Hỏi xóa ngẫu nhiên nhiều nhất bao nhiêu số để trên bảng chắc chắn tồn tại 12 số và tổng của chúng.

BẠN ĐỌC TRAO ĐỔI

VỀ MẤY BẤT ĐẲNG THỨC CÓ LIÊN QUAN VỚI NHAU

VŨ TIẾN VIỆT
(Hội Toán học Hà Nội)

Trong toán học, luôn có những liên hệ nào đó giữa những kết quả mới với những kết quả đã biết hoặc giữa những kết quả đã biết với nhau. Bài viết nhỏ này đưa ra việc xây dựng một số bất đẳng thức mới mà việc chứng minh chúng nhờ sử dụng bất đẳng thức ban đầu. Chúng ta xét bài toán sau.

Bài toán 1. *Cho các số $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh bất đẳng thức*

1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{25}{1 + 48xyz}$.

Xét thêm $0 < \lambda \leq 25$, chứng minh bất đẳng thức

2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{25}{1 + (\lambda - 9)xyz}$.

Lời giải. 1) BĐT cần chứng minh tương đương với: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 48(xy + yz + zx) \geq 25$.

Vì vai trò của x, y, z là đối xứng, nên ta có thể giả thiết $x + y \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. Vì nếu ngược lại, $x + y > \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, y + z > \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, z + x > \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ sẽ dẫn đến $2(x + y + z) = 2 > \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, vô lý!

Đặt $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 48(xy + yz + zx)$, ta sẽ chứng minh BĐT:

$$f(x, y, z) \geq f\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, z\right) \geq 25. \quad (*)$$

BĐT thứ nhất của (*) sau khi rút gọn thành:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 48xy \geq \frac{4}{x+y} + 12(x+y)^2$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 12(x - y)^2 xy(x + y).$$

Nếu $x = y$ thì BĐT hiển nhiên đúng. Nếu $x \neq y$ thì BĐT tương đương với $1 \geq 12xy(x + y)$.

Điều này đúng do ta có $2\sqrt{xy} \leq x + y \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Gọi $\alpha = \frac{x+y}{2}$ thì $z = 1 - 2\alpha$. BĐT thứ hai của (*) sau khi rút gọn thành:

$$144\alpha^4 - 168\alpha^3 + 73\alpha^2 - 14\alpha + 1 \geq 0$$

$\Leftrightarrow (3\alpha - 1)^2(4\alpha - 1)^2 \geq 0$, BĐT này luôn đúng.

2) Chứng minh BĐT 2) tương tự như với BĐT 1). Từ bài toán 1 ta có bài toán 2 sau.

Bài toán 2. *Cho các số $x, y, z > 0$. Chứng minh bất đẳng thức* $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{24xyz} \geq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x+y+z)^2}$.

Lời giải. Ta thấy BĐT cần chứng minh là thuần nhất theo nghĩa nó không thay đổi nếu ta thay x, y, z bởi kx, ky, kz $(k > 0)$, nên có thể giả thiết $x + y + z = 1$. Khi đó BĐT cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{xy + yz + zx - xyz}{24xyz} \geq 1 - (xy + yz + zx)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 48(xy + yz + zx) \geq 25,$$

là BĐT đã được chứng minh ở bài trên.

Áp dụng bài toán 2 cho BĐT Euler $R \geq 2r$, ta có kết quả mạnh hơn sau:

Bài toán 3. *Với mọi tam giác ta có bất đẳng thức* $\frac{R}{r} \geq 2 + 8\frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{(a+b+c)^2}$,

trong đó a, b, c là ba cạnh tam giác, R và r là bán kính các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác.

(xem tiếp trang 10)

Hướng dẫn giải ĐỀ THI VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN LƯƠNG VĂN TỤY, TỈNH NINH BÌNH, năm học 2019 - 2020

Dành cho thí sinh thi vào lớp chuyên Toán (Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. 1) $B=\dfrac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)+(2\sqrt{x}+9)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}=\dfrac{x-9+2\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}$

$$=\frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3}.$$

Với $x>0$ ta có: $\dfrac{A}{B}>\dfrac{5}{3}\Leftrightarrow\dfrac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}:\dfrac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}>\dfrac{5}{3}$

$\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}>\dfrac{5}{3}\Leftrightarrow 3\sqrt{x}+9>5\sqrt{x}$ (vì $3\sqrt{x}>0,\forall x>0$)

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}<9\Leftrightarrow 0<x<\dfrac{81}{4}.$

2) Ta có: $C=\dfrac{5\sqrt{6\sqrt{7-\sqrt{33+\sqrt{128}}}}-1}{3-\sqrt{2}}$

$$=\frac{5\sqrt{6\sqrt{7-\sqrt{(4\sqrt{2}+1)^2}}}-1}{3-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{5\sqrt{6\sqrt{6-4\sqrt{2}}}-1}{3-\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{6\sqrt{(2-\sqrt{2})^2}}-1}{3-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{5\sqrt{11-6\sqrt{2}}}{3-\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}}{3-\sqrt{2}}=\frac{5(3-\sqrt{2})}{3-\sqrt{2}}=5.$$

Câu 2. 1) ĐK: $x\ge\dfrac{-5}{2}$. PT đã cho tương đương với: $(x^2+3x+4)+2(2x+5)=3\sqrt{(2x+5)(x^2+3x+4)}$.

Đặt: $\begin{cases}u=\sqrt{x^2+3x+4}\\ v=\sqrt{2x+5}\end{cases}$ $(u,v\ge 0)$. PT trở thành:

$$u^2+2v^2=3uv\Leftrightarrow u^2-3uv+2v^2=0$$

$$\Leftrightarrow(u-v)(u-2v)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\ u=2v\end{array}\right..$$

• Với $u=v$, ta có:

$\sqrt{x^2+3x+4}=\sqrt{2x+5}\Leftrightarrow x^2+3x+4=2x+5$

$\Leftrightarrow x^2+x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ (nhận).

• Với $u=2v$, ta có: $\sqrt{x^2+3x+4}=2\sqrt{2x+5}$

$\Leftrightarrow x^2-5x-16=0\Leftrightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{89}}{2}$ (nhận).

Vậy tập nghiệm của PT đã cho là:

$$S=\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{5-\sqrt{89}}{2};\frac{5+\sqrt{89}}{2}\right\}.$$

2) ĐK: $x\ne-1;y\ne-1$. Ta có:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{y^2+2y+1}+\dfrac{y^2}{x^2+2x+1}=\dfrac{8}{9}\\ 5xy-4x-4y=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{x}{y+1}\right)^2+\left(\dfrac{y}{x+1}\right)^2=\dfrac{8}{9}\\ 9xy=4(x+1)(y+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{x}{y+1}\right)^2+\left(\dfrac{y}{x+1}\right)^2=\dfrac{8}{9}\\ \dfrac{2xy}{(x+1)(y+1)}=\dfrac{8}{9}\end{cases}.$$

Đặt $a=\dfrac{x}{y+1};b=\dfrac{y}{x+1}$, ta có HPT: $\begin{cases}a^2+b^2=\dfrac{8}{9}\\ 2ab=\dfrac{8}{9}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=2ab\\ 2ab=\dfrac{8}{9}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-b)^2=0\\ 2ab=\dfrac{8}{9}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b=\dfrac{2}{3}\\ a=b=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right..$$

Với $a=b=\dfrac{2}{3}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{y+1}=\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{y}{x+1}=\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=2y+2\\ 3y=2x+2\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=y=2$ (nhận).

Với $a=b=-\dfrac{2}{3}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{y+1}=-\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{y}{x+1}=-\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=-2y-2\\ 3y=-2x-2\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=y=-\dfrac{2}{5}$ (nhận).

HPT có 2 nghiệm $(x;y)$ là: $(2;2)$ và $\left(-\dfrac{2}{5};-\dfrac{2}{5}\right)$.

Câu 3. 1) $x^2-xy+y^2=x+y+3$

$\Leftrightarrow x^2-(y+1)x+y^2-y-3=0 \quad (*).$

Ta có: $\Delta=(y+1)^2-4(y^2-y-3)=-3y^2+6y+13.$

PT (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta\ge 0 \Leftrightarrow -3y^2+6y+13\ge 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3-4\sqrt{3}}{3}\le y\le \frac{3+4\sqrt{3}}{3}.$$

Vì y nguyên dương nên $y\in\{1;2;3\}$.

- Với $y=1$ thay vào (*) ta được:

$$x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \text{ (nhận)} \\ x=1 \text{ (nhận)} \end{array}\right..$$

- Với $y=2$ thay vào (*) ta được: $x^2-3x-1=0$.

PT này có $\Delta=13$ không là số chính phương nên không có nghiệm nguyên.

- Với $y=3$ thay vào (*) ta được:

$$x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \text{ (nhận)} \\ x=1 \text{ (nhận)} \end{array}\right..$$

Vậy có 3 cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $(3;1);(1;3);(3;3)$.

2) *Nhận xét*: Với n số thực dương $x_1,x_2,...,x_n$ ta luôn có: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\ge\frac{n^2}{x_1+x_2+...+x_n}$.

Đẳng thức xảy ra khi $x_1=x_2=...=x_n$.

Áp dụng nhận xét ta có:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}\ge\frac{3^2}{x+y+y}=\frac{9}{x+2y}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y$. Tương tự ta có:

$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{y+2z}$. Đẳng thức xảy ra khi $y=z$.

$\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\ge\frac{9}{z+2x}$. Đẳng thức xảy ra khi $z=x$.

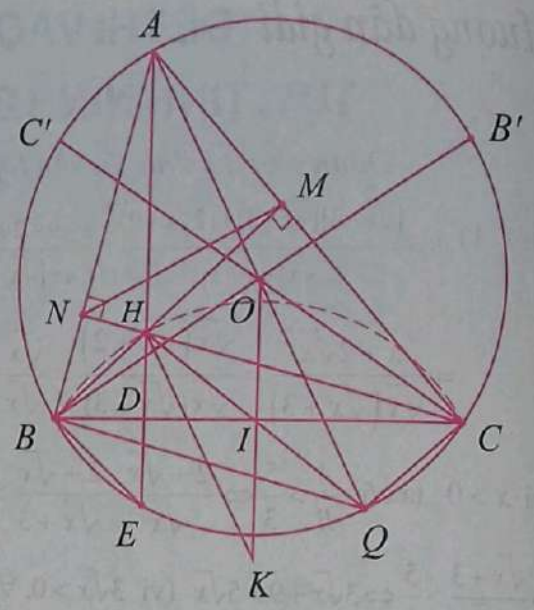
Cộng theo từng vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9\left(\frac{1}{x+2y}+\frac{1}{y+2z}+\frac{1}{z+2x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 3\left(\frac{1}{x+2y}+\frac{1}{y+2z}+\frac{1}{z+2x}\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z$.

Câu 4. 1) Kẻ đường kính AQ của (O). Ta có $\widehat{ABQ}=\widehat{ACQ}=90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Suy ra: $AB\perp BQ$, $CQ\perp AC$.



Ta có: $BH\perp AC$, $CQ\perp AC \Rightarrow BH//CQ$.

Tương tự: $CH//BQ$. Suy ra $BHCQ$ là hình bình hành. Mà I là trung điểm của BC nên I đồng thời là trung điểm của HQ. Xét ΔAQH có OI là đường trung bình. Do đó $AH=2OI$.

2) ***Cách 1.*** Lấy K đối xứng với O qua I suy ra $OK=2OI=AH$. Lại có $OK//AH$ (cùng $\perp BC$) nên suy ra $AHKO$ là hình bình hành. Do đó $KH=OA=R$ không đổi. Do O, I cố định nên K cố định. Do đó H di chuyển trên đường tròn tâm K bán kính R.

Giới hạn: Kẻ các đường kính BB', CC' của $(O;R)$. Để tam giác ABC nhọn thì A thuộc cung nhỏ $B'C'$ (trừ B',C').

Khi $A\equiv C'$ thì ΔABC vuông tại B, $H\equiv B$.

Khi $A\equiv B'$ thì ΔABC vuông tại C, $H\equiv C$.

Vậy H di chuyển trên cung BC của đường tròn $(K;R)$ thuộc nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A (trừ hai đầu mút B, C).

Cách 2. Gọi giao điểm của tia AH với BC và cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ lần lượt là D và E. Vì H là trực tâm ΔABC nên $AD\perp BC$.

Ta có: $\widehat{BEA}=\widehat{BCA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$ của (O)). Mà $\widehat{BCA}=\widehat{BHE}$ (cùng bù $\widehat{MHD}$) nên $\widehat{BEA}=\widehat{BHE}\Rightarrow\Delta HBE$ cân tại B $\Rightarrow$ đường cao BD đồng thời là đường trung trực của HE $\Rightarrow$ H và E đối xứng nhau qua BC.

Khi A di động trên cung lớn $\overset{\frown}{BC}$ của $(O;R)$ sao cho ΔABC nhọn thì E di động trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ của $(O;R)$ (trừ hai điểm B và C). Do đó H di động trên cung $\overset{\frown}{BmC}$ đối xứng với cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ của $(O;R)$ qua đường thẳng BC. Gọi K và r lần lượt là tâm và bán kính của cung $\overset{\frown}{BmC}$, ta có: $r = R$ và K là điểm đối xứng của O qua đường thẳng BC.

Giới hạn: Kẻ các đường kính BB', CC' của $(O;R)$. Để ΔABC nhọn thì A thuộc cung nhỏ $B'C'$ (trừ B', C').

Khi $A \equiv C'$ thì ΔABC vuông tại B, $H \equiv B$.

Khi $A \equiv B'$ thì ΔABC vuông tại C, $H \equiv C$.

Vậy H di chuyển trên cung $\overset{\frown}{BmC}$ của đường tròn $(K; R)$ thuộc nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A (trừ hai đầu mút B, C).

3) ***Cách 1.*** Ta có: $BI = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Xét ΔBIO vuông tại I có: $\sin \widehat{BOI} = \dfrac{BI}{BO} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\widehat{BOI} = 60^0$. ΔBOC cân tại O có OI là đường cao nên OI đồng thời là đường phân giác của $\widehat{BOC} \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^0 \Rightarrow \widehat{BAC} = \dfrac{\widehat{BOC}}{2} = 60^0$.

Xét ΔABM vuông tại M, $\widehat{BAM} = 60^0$ suy ra:

$$AM = AB.\cos A = AB.\cos 60^0 = \frac{AB}{2}.$$

Tương tự: $AN = AC.\cos A = AC.\cos 60^0 = \dfrac{AC}{2}$.

Do đó: $AM.NH + HM.NA = \dfrac{AB.NH + HM.AC}{2}$ (1).

Gọi giao điểm của AH và BC là D. Vì H là trực tâm ΔABC nên $AD \perp BC$.

Do đó: $AB.NH + AC.HM = 2.S_{\Delta AHB} + 2.S_{\Delta AHC}$

$= AH.BD + AH.CD = AH.BC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $AM.NH + HM.NA = \dfrac{AH.BC}{2}$.

Mà $AH = 2.IO$ nên $AM.NH + HM.NA = OI.BC$.

Cách 2. Xét ΔBIO vuông tại I có:

$$\sin \widehat{BOI} = \frac{BI}{BO} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{BOI} = 60^0.$$

ΔBOC cân tại O có OI là đường cao nên OI đồng thời là đường phân giác của $\widehat{BOC} \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^0$

$\Rightarrow \widehat{BAC} = \dfrac{\widehat{BOC}}{2} = 60^0$.

Tứ giác $AMHN$ nội tiếp nên áp dụng định lý Ptolemy ta có: $AM.NH + HM.NA = AH.MN$.

Mà $AH = 2OI$ nên

$$AM.NH + HM.NA = 2OI.MN \quad (3).$$

$\Delta AMN \backsim \Delta ABC$ nên $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AM}{AB}$.

Mà $\dfrac{AM}{AB} = \cos A = \dfrac{1}{2}$, suy ra $BC = 2MN$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $AM.NH + HM.NA = OI.BC$.

Câu 5. 1) Giả sử phương trình $P(x) = 0$ có nghiệm nguyên $x = a$, $a \in \mathbb{Z}$. Theo định lý Bézout: $P(x) = (x-a)Q(x)$ với $Q(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên. Ta có:

$$P(1).P(2) = (1-a)(2-a).Q(1).Q(2) = 2019.$$

Do $Q(1).Q(2) \in \mathbb{Z}$, $1-a$ và $2-a$ là hai số nguyên liên tiếp, nên $P(1)P(2)$ là số nguyên chẵn. Mà 2019 là một số lẻ, suy ra vô lý. Vậy phương trình $P(x) = 0$ không có nghiệm nguyên.

2) Chia hình tròn thành 1009 hình quạt bằng nhau, mỗi hình quạt có diện tích bằng 1cm^2. Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất một hình quạt (M) chứa ít nhất $\left[\dfrac{2019}{1009}\right] + 1 = 3$ điểm trong số 2019 điểm đã cho. Ba điểm đó không thẳng hàng nên tam giác có ba đỉnh là 3 điểm này nằm trọn trong hình quạt (M). Rõ ràng tam giác đó có diện tích nhỏ hơn diện tích hình quạt (M), tức là có diện tích nhỏ hơn 1cm^2.

NGUYỄN TRƯỜNG SƠN
(GV THPT chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình)

Giới thiệu

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TP. HỒ CHÍ MINH NĂM HỌC 2019 - 2020

Thời gian làm bài : 90 phút

Bài 1. (4 *điểm*) Cho x, y là các số thực sao cho

$$\frac{2}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2x+y}.$$

Tính giá trị của biểu thức $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}$.

Bài 2. (3 *điểm*) Cho a, b, c là ba số thực sao cho $a+b=c-2$ và $ab=2c^2-3c+1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $p=a^2+b^2$.

Bài 3. (3 *điểm*) *An* khởi hành từ Sài Gòn đi Biên Hòa . Sau đó 5 phút, *Bình* và *Cường* khởi hành từ Biên Hòa về Sài Gòn. Trên đường đi, *An* gặp *Cường* ở địa điểm C rồi gặp *Bình* ở địa điểm D. Tính vận tốc của mỗi người, biết rằng quãng đường Sài Gòn – Biên Hòa dài 39 km; $CD = 6$km; Vận tốc của *An* bằng 1,5 vận tốc của *Bình* và bằng $\frac{3}{4}$ vận tốc của *Cường*.

Bài 4. (6 *điểm*) Cho tam giác ABC cân tại A, nội tiếp đường tròn (O). Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với OC, đường thẳng này cắt AC tại D và cắt (O) tại E (E khác B) . Cho biết $AB = 8$cm, $BC = 4$ cm. Tính độ dài các đoạn thẳng DE, OA và OD.

Bài 5. (4 *điểm*) Hộp phô mai có dạng hình trụ, đường kính đáy 12,2 cm và chiều cao 2,4 cm.

a) Biết rằng 8 miếng phô mai được xếp nằm sát bên trong hộp và độ dày của giấy gói từng miếng không đáng kể. Hỏi thể tích của một miếng phô mai là bao nhiêu?

b) Tính diện tích giấy gói được sử dụng cho một miếng phô mai. (Ghi kết quả gần đúng chính xác đến 1 chữ số thập phân sau dấu phẩy).

NGUYỄN ĐỨC TẤN (*TP. Hồ Chí Minh*)

Giới thiệu

****

VỀ MẤY BẤT ĐẲNG THỨC ... ***(Tiếp theo trang 6)***

Lời giải. Vì $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{abc}{4R}=pr$,

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c),$$

nên BĐT cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{2abc}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} \geq \frac{18(a^2+b^2+c^2)-12(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}.$$

Đặt $a=x+y, b=y+z, c=z+x$ $(x, y, z>0)$ thì $p=x+y+z$. Khi đó BĐT trên được viết thành: $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{24xyz} \geq \frac{x^2+y^2+z^2}{(x+y+z)^2}$,

là BĐT đã được chứng minh ở bài toán 2.

BÀI TẬP

1. Cho các số $x, y, z>0$ thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leq \frac{9}{4}+\frac{1}{4xyz}.$$

2. Chứng minh rằng với mọi tam giác ta có bất đẳng thức

$$p^2 \geq 16Rr-5r^2.$$

Trong đó R và r là bán kính các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác, còn $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ là nửa chu vi của tam giác.

Gợi ý. Bài tập 2 có thể giải dựa vào bài tập 1. Tuy nhiên, ta có thể giải trực tiếp bằng cách chứng minh công thức

$$IG^2=\frac{1}{9}\left(p^2+5r^2-16Rr\right),$$

trong đó I là tâm đường tròn nội tiếp, còn G là trọng tâm của tam giác.

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC DỰA VÀO BIỂU THỨC PHỤ

NGÔ VĂN THÁI
(Tổ 34, phường Hoàng Diệu, TP. Thái Bình)

Rất nhiều bài toán bất đẳng thức (BĐT) dạng tổng các phân thức có cấu trúc cồng kềnh phức tạp, khi giải nếu ta không dựa vào biểu thức phụ thì lời giải hoặc quá dài, hoặc không thể thực hiện được. "Chứng minh bất đẳng thức dựa vào biểu thức phụ" là cách giải không mới, giống như khi chứng ta chứng bài toán hình học phải kẻ thêm hình phụ mà thôi, nhưng chọn biểu thức phụ hợp lý để tham gia vào quá trình giải toán sẽ cho ra một lời giải ấn tượng, tự nhiên, tường minh, ngắn gọn.

Giả sử cần đánh giá biểu thức P dựa vào biểu thức phụ Q. Trước hết ta phải xây dựng biểu thức phụ Q có cấu trúc như sau: Các mẫu thức ở từng phân thức của biểu thức phụ Q cũng là các mẫu thức đã có trong P, chọn các tử thức cho từng phân thức tương ứng của Q để $P+Q$ sau khi rút gọn sẽ là một đa thức, hoặc là một biểu thức thu gọn dễ đánh giá. Các bước đánh giá biểu thức P như sau:

Bước 1: Xây dựng biểu thức phụ Q.

Bước 2: Đánh giá biểu thức $P+Q$.

Bước 3: Đánh giá biểu thức phụ Q.

Từ bước 2 và bước 3 rút ra kết luận.

Có những bài toán khi giải ta phải sử dụng tới hai hoặc ba biểu thức phụ. Sau đây là một số thí dụ minh họa.

Thí dụ 1. *Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\ge\frac{a+b+c}{2}\ge\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}.$$

Phân tích. Đặt vế trái của dãy bất đẳng thức là P, xây dựng biểu thức phụ Q là tổng các phân thức, có mẫu thức ở các phân thức lần lượt $(a+b),(b+c),(c+a)$ tử thức tương ứng là ab, bc, ca. Khi đó $P+Q$ sau khi rút gọn là đa thức bậc nhất.

Lời giải. Đặt $P=\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}$,

$$Q=\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}.$$

Dễ thấy: $P+Q=a+b+c$ (1). Theo BĐT Cauchy ta có: $Q=\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}$

$$\le\frac{(a+b)^2}{4(a+b)}+\frac{(b+c)^2}{4(b+c)}+\frac{(c+a)^2}{4(c+a)}=\frac{a+b+c}{2}\ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\ge\frac{a+b+c}{2}\ge\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}.$$

Dấu "=" của BĐT kép xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Thí dụ 2. *Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng* $\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\ge\frac{a+b+c}{2}$.

Phân tích. Tương tự như thí dụ 1, đặt vế trái của bất đẳng thức là P, xây dựng biểu thức phụ Q là tổng các phân thức, có mẫu thức ở các phân thức lần lượt là $(a^2+b^2),(b^2+c^2),(c^2+a^2)$, tử thức tương ứng là ab^2,bc^2,ca^2. Khi đó $P+Q$ sau khi rút gọn sẽ là một đa thức bậc nhất.

Lời giải. Đặt vế trái của BĐT là P, biểu thức phụ là $Q=\frac{ab^2}{a^2+b^2}+\frac{bc^2}{b^2+c^2}+\frac{ca^2}{c^2+a^2}$.

Dễ thấy $P+Q=a+b+c$ (3).

Mặt khác theo BĐT Cauchy thì

$$Q\le\frac{ab^2}{2ab}+\frac{bc^2}{2bc}+\frac{ca^2}{2ca}=\frac{b+c+a}{2}\ (4).$$

Từ (3), (4) ta được: $P\ge\frac{a+b+c}{2}$.

Dấu "=" của bài toán xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Thí dụ 3. *Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng* $\frac{a^3}{a+b}+\frac{b^3}{b+c}+\frac{c^3}{c+a}\ge\frac{(a+b+c)^2}{6}$.

Lời giải. Gọi vế trái của BĐT là P, biểu thức phụ là $Q=\frac{a^2b}{a+b}+\frac{b^2c}{b+c}+\frac{c^2a}{c+a}$.

Dễ thấy: $P+Q=a^2+b^2+c^2$ (5).

Mặt khác theo BĐT Cauchy thì

$$Q\le\frac{a(a+b)^2}{4(a+b)}+\frac{b(b+c)^2}{4(b+c)}+\frac{c(c+a)^2}{4(c+a)}$$
$$=\frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{4}.$$

Mà $ab+bc+ca\le\frac{(a+b+c)^2}{3}\le a^2+b^2+c^2$

suy ra: $Q\le\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$ (6). Từ (5),(6) ta được:

$$P\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\ge\frac{(a+b+c)^2}{6}.$$

Dấu "=" của bài toán xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Thí dụ 4. *Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^4}{(a^2+b^2)(a+b)}+\frac{b^4}{(b^2+c^2)(b+c)}+\frac{c^4}{(c^2+a^2)(c+a)}\ge\frac{a+b+c}{4}.$$

Lời giải. Đặt vế trái của BĐT là P, biểu thức phụ là $Q=\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)(a+b)}+\frac{b^2c^2}{(b^2+c^2)(b+c)}+\frac{c^2a^2}{(c^2+a^2)(c+a)}$.

Dễ thấy: $P+Q=\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\ge\frac{a+b+c}{2}$ (7).

Mặt khác theo BĐT Cauchy

$$Q\le\frac{a^2b^2}{(2ab)(a+b)}+\frac{b^2c^2}{(2bc)(b+c)}+\frac{c^2a^2}{(2ca)(c+a)}$$
$$=\frac{ab}{2(a+b)}+\frac{bc}{2(b+c)}+\frac{ca}{2(c+a)}$$
$$\le\frac{(a+b)^2}{8(a+b)}+\frac{(b+c)^2}{8(b+c)}+\frac{(c+a)^2}{8(c+a)}=\frac{a+b+c}{4}\ (8)$$

Từ (7), (8) ta được: $P\ge\frac{a+b+c}{4}$.

Dấu "=" của bài toán xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Thí dụ 5. *Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^5}{a^4+ab(a^2+b^2)+b^4+a^2b^2}+\frac{b^5}{b^4+bc(b^2+c^2)+c^4+b^2c^2}+$$
$$+\frac{c^5}{c^4+ca(c^2+a^2)+a^4+c^2a^2}\ge\frac{1}{5}(a+b+c).$$

Nhận xét. Bài này khá cồng kềnh, nên ta đưa vào hai biểu thức phụ để đánh giá.

Lời giải. Đặt vế trái của BĐT là P, hai biểu thức phụ là

$$Q_1=\frac{b^5}{a^4+ab(a^2+b^2)+b^4+a^2b^2}+\frac{c^5}{b^4+bc(b^2+c^2)+c^4+b^2c^2}+$$
$$+\frac{a^5}{c^4+ca(c^2+a^2)+a^4+c^2a^2};$$

$$Q_2=\frac{a^2b(a^2+b^2)+ab^4+a^3b^2}{a^4+ab(a^2+b^2)+b^4+a^2b^2}+\frac{b^2c(b^2+c^2)+bc^4+b^3c^2}{b^4+bc(b^2+c^2)+c^4+b^2c^2}$$
$$+\frac{c^2a(c^2+a^2)+ca^4+c^3a^2}{c^4+ca(c^2+a^2)+a^4+c^2a^2}.$$

Ta thấy: $P=Q_1$, $P+Q_2=(a+b+c)$ (9).

Xét hiệu: $4P-Q_2=2(P+Q_1)-Q_2$

$$=\frac{2(a^5+b^5)-a^2b(a^2+b^2)-ab^4-a^3b^2}{a^4+ab(a^2+b^2)+b^4+a^2b^2}+$$
$$+\frac{2(b^5+c^5)-b^2c(b^2+c^2)-bc^4-b^3c^2}{b^4+bc(b^2+c^2)+c^4+b^2c^2}+$$
$$+\frac{2(c^5+a^5)-c^2a(c^2+a^2)-ca^4-c^3a^2}{c^4+ca(c^2+a^2)+a^4+c^2a^2}.$$

Ta có: $2(a^5+b^5)-a^2b(a^2+b^2)-ab^4-a^3b^2$

$$=(a-b)^2(a+b)(2a^2+2b^2+ab)\ge0.$$

Tương tự: hai biểu thức ở tử của hai phân thức còn lại cũng không âm. Vậy $4P - Q_2 \geq 0$ (10).

Từ (9), (10) suy ra: $P \geq \frac{1}{5}(a+b+c)$.

Dấu "=" của bài toán xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Thí dụ 6. *Cho x, y, z là ba số thực dương và $\alpha \geq 3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{x^\alpha}{x^2+xy+y^2} + \frac{y^\alpha}{y^2+yz+z^2} + \frac{z^\alpha}{z^2+zx+x^2} \geq \frac{x^{\alpha-2}+y^{\alpha-2}+z^{\alpha-2}}{3}.$$

Lời giải. Đặt vế trái của BĐT là *P*, biểu thức phụ là $Q = \frac{x^{\alpha-2}y^2}{x^2+xy+y^2} + \frac{y^{\alpha-2}z^2}{y^2+yz+z^2} + \frac{z^{\alpha-2}x^2}{z^2+zx+x^2}$.

Ta có: $P+Q = \frac{x^\alpha + x^{\alpha-2}y^2}{x^2+xy+y^2} + \frac{y^\alpha + y^{\alpha-2}z^2}{y^2+yz+z^2} + \frac{z^\alpha + z^{\alpha-2}x^2}{z^2+zx+x^2}$.

Áp dụng BĐT Cauchy ta được:

$$P+Q \geq \frac{x^{\alpha-2}(x^2+y^2)}{x^2+\frac{x^2+y^2}{2}+y^2} + \frac{y^{\alpha-2}(y^2+z^2)}{y^2+\frac{y^2+z^2}{2}+z^2} + \frac{z^{\alpha-2}(z^2+x^2)}{z^2+\frac{z^2+x^2}{2}+x^2}$$

hay $P+Q \geq \frac{2}{3}\left(x^{\alpha-2}+y^{\alpha-2}+z^{\alpha-2}\right)$ (11).

Lại theo BĐT Cauchy thì

$$Q \leq \frac{x^{\alpha-2}y^2}{3xy} + \frac{y^{\alpha-2}z^2}{3yz} + \frac{z^{\alpha-2}x^2}{3zx} = \frac{1}{3}\left(x^{\alpha-3}y + y^{\alpha-3}z + z^{\alpha-3}x\right)$$

Mặt khác theo hệ quả của bất đẳng thức hoán vị sẽ được: $\left(x^{\alpha-3}y + y^{\alpha-3}z + z^{\alpha-3}x\right) \leq x^{\alpha-2}+y^{\alpha-2}+z^{\alpha-2}$.

Do đó: $Q \leq \frac{1}{3}\left(x^{\alpha-2}+y^{\alpha-2}+z^{\alpha-2}\right)$ (12).

Từ (11), (12) suy ra: $P \geq \frac{1}{3}\left(x^{\alpha-2}+y^{\alpha-2}+z^{\alpha-2}\right)$.

Dấu "=" của bài toán xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

Thí dụ 7 [Bất đẳng thức Shapiro]. *Cho bốn số thực dương a, b, c, d. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

Lời giải. Đặt vế trái của BĐT là *P*, hai biểu thức phụ là $Q_1 = \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+a} + \frac{a}{a+b}$;

$$Q_2 = \frac{c}{b+c} + \frac{d}{c+d} + \frac{a}{d+a} + \frac{b}{a+b}.$$

Theo BĐT Cauchy cho bốn số thì:

$$P + Q_1 = \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+d} + \frac{c+d}{d+a} + \frac{d+a}{a+b} \geq 4.$$

Mà $Q_1 + Q_2 = 4 \Rightarrow P \geq Q_2$. Mặt khác theo BĐT Schwarz ta có:

$$P + Q_2 = \frac{(a+c)^2}{(a+c)(b+c)} + \frac{(b+d)^2}{(b+d)(c+d)} + \frac{(c+a)^2}{(c+a)(d+a)} + \frac{(d+b)^2}{(d+b)(a+b)}$$

$$\geq \frac{(a+c+b+d+c+a+d+b)^2}{(a+c)(b+c)+(b+d)(c+d)+(c+a)(d+a)+(d+b)(a+b)}$$

$$= \frac{4(a+b+c+d)^2}{(a+b+c+d)^2} = 4.$$ Vậy $P \geq 2$.

Dấu "=" của bài toán xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = d$.

Thí dụ 8. *Cho n số thực dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $(n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$. Chứng minh rằng*

$$\frac{(a_1+a_2)a_1^3}{(a_1^2+a_1a_2+a_2^2)} + \frac{(a_2+a_3)a_2^3}{(a_2^2+a_2a_3+a_3^2)} + \ldots + \frac{(a_n+a_1)a_n^3}{(a_n^2+a_na_1+a_1^2)} \geq \frac{2(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)}{3}.$$

Lời giải. Đặt vế trái của BĐT là *P*, biểu thức phụ là

$$Q = \frac{a_1^2a_2^2}{(a_1^2+a_1a_2+a_2^2)} + \frac{a_2^2a_3^2}{(a_2^2+a_2a_3+a_3^2)} + \ldots + \frac{a_n^2a_1^2}{(a_n^2+a_na_1+a_1^2)}$$

$$P+Q = \frac{(a_1+a_2)a_1^3+a_1^2a_2^2}{(a_1^2+a_1a_2+a_2^2)} + \frac{(a_2+a_3)a_2^3+a_2^2a_3^2}{(a_2^2+a_2a_3+a_3^2)} + \ldots + \frac{(a_n+a_1)a_n^3+a_n^2a_1^2}{(a_n^2+a_na_1+a_1^2)}$$

hay $P+Q = a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$ (13).

Sử dụng BĐT Cauchy ta được:

$$Q \leq \frac{a_1^2a_2^2}{3a_1a_2} + \frac{a_2^2a_3^2}{3a_2a_3} + \ldots + \frac{a_n^2a_1^2}{3a_na_1} = \frac{1}{3}(a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_na_1).$$

Từ $(a_1-a_2)^2 + (a_1-a_3)^2 + \ldots + (a_n-a_1)^2 \geq 0$

suy ra: $(a_1a_2+a_2a_3+...+a_na_1)\le(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)$.

Vậy $Q\le\frac{1}{3}(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)$ (14).

Từ (13), (14) suy ra: $P\ge\frac{2(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)}{3}$.

Dấu "=" của bài toán xảy ra $\Leftrightarrow a_1=a_2=...=a_n$.

Thí dụ 9 [APMO-1991]. *Cho* $\begin{cases} a_i>0,b_i>0;\forall i=\overline{1,n} \\ \sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i \end{cases}$.

Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_i+b_i}\ge\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i$.

Lời giải. Đặt $P=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_i+b_i}$ và biểu thức phụ là $Q=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{a_i+b_i}$. Dễ thấy

$$P+Q=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2+a_ib_i}{a_i+b_i}=\sum_{i=1}^{n}a_i \quad (15).$$

Từ $a_ib_i\le\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right)^2,\forall i=\overline{1,n}$

ta có: $Q=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{a_i+b_i}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{(a_i+b_i)^2}{4(a_i+b_i)}$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i+b_i}{4}=\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i \quad (16).$$

Từ (15), (16) thu được: $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_i+b_i}\ge\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i$.

Dấu "=" của bài toán xảy ra $\Leftrightarrow a_i=b_i,\forall i=\overline{1,n}$.

Thí dụ 10 [TH&TT, T3/237]. *Cho n số thực dương* $x_1,x_2,...,x_n,(n\in\mathbb{N},n\ge3)$. *Chứng minh rằng* $\frac{x_1}{x_n+x_2}+\frac{x_2}{x_1+x_3}+...+\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}+x_n}+\frac{x_n}{x_{n-1}+x_1}$

$$\ge\frac{n}{2}\left[2\sqrt[n]{\frac{(x_1+x_2)(x_2+x_3)...(x_n+x_1)}{(x_n+x_2)(x_1+x_3)...(x_1+x_3)}}-1\right].$$

Lời giải. Đặt vế trái của BĐT là P, hai biểu thức phụ là

$$Q_1=\frac{x_n}{x_n+x_2}+\frac{x_1}{x_1+x_3}+...+\frac{x_{n-2}}{x_{n-2}+x_n}+\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_1};$$

$$Q_2=\frac{x_2}{x_n+x_2}+\frac{x_3}{x_1+x_3}+...+\frac{x_n}{x_{n-2}+x_n}+\frac{x_1}{x_{n-1}+x_1}.$$

Dễ thấy $Q_1+Q_2=n$. Theo BĐT Cauchy ta có:

$$P+Q_1\ge n\sqrt[n]{\frac{(x_1+x_2)(x_2+x_3)...(x_n+x_1)}{(x_1+x_3)(x_2+x_4)...(x_n+x_2)}}$$

$$P+Q_2\ge n\sqrt[n]{\frac{(x_1+x_2)(x_2+x_3)...(x_n+x_1)}{(x_1+x_3)(x_2+x_4)...(x_n+x_2)}}$$

$$\Rightarrow 2P\ge 2n\sqrt[n]{\frac{(x_1+x_2)(x_2+x_3)...(x_n+x_1)}{(x_1+x_3)(x_2+x_4)...(x_n+x_2)}}-(Q_1+Q_2).$$

Do đó: $2P\ge 2n\sqrt[n]{\frac{(x_1+x_2)(x_2+x_3)...(x_n+x_1)}{(x_1+x_3)(x_2+x_4)...(x_n+x_2)}}-n.$

Vậy $P\ge\frac{n}{2}\left[2\sqrt[n]{\frac{(x_1+x_2)(x_2+x_3)...(x_n+x_1)}{(x_n+x_2)(x_1+x_3)...(x_1+x_3)}}-1\right]$.

Dấu "=" của bài toán xảy ra $\Leftrightarrow x_1=x_2=...=x_n$.

Thí dụ 11. *Cho n số thực dương* $a_1,a_2,...,a_n$, $(n\in\mathbb{N},n\ge3)$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+...+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2}$$

$$\ge\frac{n}{2}\sqrt[n]{\frac{(a_1+a_3)(a_2+a_4)...(a_{n-1}+a_1)(a_n+a_2)}{(a_2+a_3)(a_3+a_4)...(a_n+a_1)(a_1+a_2)}}.$$

Lời giải. Đặt vế trái của BĐT là P, hai biểu thức phụ là

$$Q_1=\frac{a_2}{a_2+a_3}+\frac{a_3}{a_3+a_4}+...+\frac{a_n}{a_n+a_1}+\frac{a_1}{a_1+a_2};$$

$$Q_2=\frac{a_3}{a_2+a_3}+\frac{a_4}{a_3+a_4}+...+\frac{a_1}{a_n+a_1}+\frac{a_2}{a_1+a_2}.$$

Theo BĐT Cauchy ta có:

$$P+Q_1\ge n.n\sqrt[n]{\frac{(a_1+a_2)(a_2+a_3)...(a_{n-1}+a_n)(a_n+a_1)}{(a_2+a_3)(a_3+a_4)...(a_n+a_1)(a_1+a_2)}}=n.$$

Mà $Q_1+Q_2=n$ suy ra $P\ge Q_2$. Lại theo BĐT Cauchy thì:

$$P+Q_2\ge n\sqrt[n]{\frac{(a_1+a_3)(a_2+a_4)...(a_{n-1}+a_1)(a_n+a_2)}{(a_2+a_3)(a_3+a_4)...(a_n+a_1)(a_1+a_2)}}$$

$$\Rightarrow P \ge \frac{n}{2}\sqrt[n]{\frac{(a_1+a_3)(a_2+a_4)...(a_{n-1}+a_1)(a_n+a_2)}{(a_2+a_3)(a_3+a_4)...(a_n+a_1)(a_1+a_2)}}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Thí dụ 12 [Olympic Poland 2001]. *Cho số tự nhiên $n \ge 3$ và $x_1, x_2, ..., x_n > 0$. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai bất đẳng thức sau đúng:*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}} \ge \frac{n}{2}; \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i-1}+x_{i-2}} \ge \frac{n}{2}.$$

(Ở đây quy ước $x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2, x_0 = x_n, x_{-1} = x_{n-1}$).

Lời giải. Sử dụng giả thiết, quy ước và tính chất của tổng hoán vị vòng quanh. Đặt

$$P_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}}, \; P_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i-1}+x_{i-2}};$$

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}, Q_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+2}}{x_{i+1}+x_{i+2}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i-1}}{x_{i-1}+x_{i-2}}.$$

Dễ thấy $Q_1 + Q_2 = n$.

$$(P_1+Q_1)+(P_2+Q_2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i+x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i+x_{i-1}}{x_{i-1}+x_{i-2}}.$$

Theo BĐT Cauchy thì:

$$(P_1+Q_1)+(P_2+Q_2)$$
$$\ge n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i+x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}} + n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i+x_{i-1}}{x_{i-1}+x_{i-2}}} = 2n.$$

Suy ra $P_1 + P_2 \ge n$. Vậy trong hai biểu thức P_1, P_2 có ít nhất một biểu thức không nhỏ hơn $\frac{n}{2}$.

Thí dụ 13. [TH&TT, bài 3, trang 6, số 12, 1999]. *Cho n số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n, (n \in \mathbb{N}, n \ge 3)$. Chứng minh rằng*

$$\frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_3+x_4} + ... + \frac{x_{n-1}}{x_n+x_1} + \frac{x_n}{x_1+x_2}$$
$$\ge \frac{3n}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + ... + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{x_1}{x_n}\right).$$

Lời giải. Đặt vế trái của BĐT là P, ba biểu thức phụ là

$$Q_1 = \frac{x_2}{x_2+x_3} + \frac{x_3}{x_3+x_4} + ... + \frac{x_n}{x_n+x_1} + \frac{x_1}{x_1+x_2}$$

$$Q_2 = \frac{x_3}{x_2+x_3} + \frac{x_4}{x_3+x_4} + ... + \frac{x_1}{x_n+x_1} + \frac{x_2}{x_1+x_2}$$

$$Q_3 = \left(\frac{x_1+x_2}{2x_1}\right) + \left(\frac{2x_2}{x_1+x_2}\right) + \left(\frac{x_2+x_3}{2x_2}\right) +$$
$$+ \left(\frac{2x_3}{x_2+x_3}\right) + ... + \left(\frac{x_n+x_1}{2x_n}\right) + \left(\frac{2x_1}{x_n+x_1}\right).$$

Theo BĐT Cauchy thì: $Q_3 \ge 2n$ và $P + Q_1 \ge n$.

Mà $Q_1 + Q_2 = n$, suy ra $P \ge Q_2$. Mặt khác

$$Q_3 = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + ... + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{x_1}{x_n}\right) + 2Q_2.$$

Do đó: $\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + ... + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{x_1}{x_n}\right) + 2Q_2 \ge 2n.$

hay $Q_2 \ge \frac{3n}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + ... + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{x_1}{x_n}\right).$

Vậy $P \ge \frac{3n}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + ... + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{x_1}{x_n}\right).$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Thí dụ 14. *Cho n số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$, $(n \in \mathbb{N}, n \ge 3)$ và $\alpha \ge \frac{3}{2}$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a_1^\alpha}{a_1+a_2} + \frac{a_2^\alpha}{a_2+a_3} + ... + \frac{a_n^\alpha}{a_n+a_1} \ge \frac{a_1^{\alpha-1}+a_2^{\alpha-1}+...+a_n^{\alpha-1}}{2}.$$

Lời giải. Đặt $P = \frac{a_1^\alpha}{a_1+a_2} + \frac{a_2^\alpha}{a_2+a_3} + ... + \frac{a_n^\alpha}{a_n+a_1}$

$$Q = \frac{a_1^{\alpha-1}a_2}{a_1+a_2} + \frac{a_2^{\alpha-1}a_3}{a_2+a_3} + ... + \frac{a_n^{\alpha-1}a_1}{a_n+a_1}$$

$$\Rightarrow P + Q = \frac{a_1^\alpha + a_1^{\alpha-1}a_2}{a_1+a_2} + \frac{a_2^\alpha + a_2^{\alpha-1}a_3}{a_2+a_3} + ... + \frac{a_n^\alpha + a_n^{\alpha-1}a_1}{a_n+a_1}$$

hay $P + Q = a_1^{\alpha-1} + a_2^{\alpha-1} + ... + a_n^{\alpha-1}$ (17).

Theo BĐT Cauchy thì:

$$Q \le \frac{a_1^{\alpha-1}a_2}{2\sqrt{a_1a_2}} + \frac{a_2^{\alpha-1}a_3}{2\sqrt{a_2a_3}} + ... + \frac{a_n^{\alpha-1}a_1}{2\sqrt{a_na_1}}$$
$$= \frac{1}{2}\left(a_1^{\alpha-\frac{3}{2}}a_2^{\frac{1}{2}} + a_2^{\alpha-\frac{3}{2}}a_3^{\frac{1}{2}} + ... + a_n^{\alpha-\frac{3}{2}}a_1^{\frac{1}{2}}\right).$$

Theo hệ quả của BĐT hoán vị thì:

$$\left(a_1^{\alpha-\frac{3}{2}}a_2^{\frac{1}{2}}+a_2^{\alpha-\frac{3}{2}}a_3^{\frac{1}{2}}+...+a_n^{\alpha-\frac{3}{2}}a_1^{\frac{1}{2}}\right)\le a_1^{\alpha-1}+a_2^{\alpha-1}+...+a_n^{\alpha-1}.$$

Do đó: $Q\le\frac{1}{2}\left(a_1^{\alpha-1}+a_2^{\alpha-1}+...+a_n^{\alpha-1}\right)$ (18).

Từ (17), (18) suy ra: $P\ge\frac{1}{2}\left(a_1^{\alpha-1}+a_2^{\alpha-1}+...+a_n^{\alpha-1}\right)$.

Dấu "=" của bài toán xảy ra $\Leftrightarrow a_1=a_2=...=a_n$.

BÀI TẬP

1. Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(a+b)a^3}{\left(a^2+ab+b^2\right)}+\frac{(b+c)b^3}{\left(b^2+bc+c^2\right)}+\frac{(c+a)c^3}{\left(c^2+ca+a^2\right)}\ge\frac{2(a+b+c)^2}{9}.$$

2. Cho x, y, z là ba số thực dương. Chứng minh rằng $\frac{x^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^3}{z^2+zx+x^2}\ge\frac{x+y+z}{3}$.

3. Cho a, b, c là ba số thực dương và $n\in\mathbb{N}, n\ge 2$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^n}{a+b}+\frac{b^n}{b+c}+\frac{c^n}{c+a}\ge\frac{(a+b+c)^{n-1}}{2.3^{n-1}}.$$

4. [*IMO-SL-1990*] Cho bốn số thực dương a, b, c, d và $ab+bc+cd+da=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\ge\frac{1}{3}.$$

5. [*Russia 1990*] Cho $\begin{cases}a_i>0,\forall i=\overline{1,n}\\ \sum_{i=1}^{n}a_i=1\end{cases}$.

Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_i+a_{i+1}}\ge\frac{1}{2}$; $(a_{n+1}=a_1)$.

6. [*TH&TT-T6/246*] Cho hai biểu thức

$$M=\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+...+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2},$$

$$N=\frac{x_1}{x_n+x_2}+\frac{x_2}{x_1+x_3}+...+\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}+x_n}+\frac{x_n}{x_{n-1}+x_1},$$

trong đó $x_1,x_2,...,x_n$ là các số thực dương. Chứng minh rằng trong hai biểu thức trên có ít nhất một biểu thức không nhỏ hơn $\frac{n}{2}$.

7. [*Bất đẳng thức Nesbitt suy rộng*] Cho n số thực dương $a_1,a_2,...,a_n$, $n\in\mathbb{N}, n\ge 3$, thỏa mãn

$a_1\le a_2\le...\le a_n$, hoặc $a_1\ge a_2\ge...\ge a_n$.

Chứng minh rằng

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+...+\frac{a_n}{a_1+a_2}\ge\frac{n}{2}.$$

8. [*TH&TT-T3/278*] Cho n số thực dương $x_1,x_2,...,x_n,(n\in N,n\ge 3)$. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1^2+x_2x_3}{x_1(x_2+x_3)}+\frac{x_2^2+x_3x_4}{x_2(x_3+x_4)}+...+\frac{x_{n-1}^2+x_nx_1}{x_{n-1}(x_n+x_1)}+\frac{x_n^2+x_1x_2}{x_n(x_1+x_2)}\ge n.$$

9. [*Saint Petersburg 2000*] Cho số tự nhiên $n\ge 3$ và $0<x_1\le x_2\le...\le x_n$. Chứng minh rằng

$$\frac{x_nx_1}{x_2}+\frac{x_1x_2}{x_3}+...+\frac{x_{n-2}x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_{n-1}x_n}{x_1}\ge x_1+x_2+...+x_n.$$

10. Cho số tự nhiên $n\ge 3$ và $0<x_1\le x_2\le...\le x_n;k\ge r\ge 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{x_n^k}{x_2^{k-r}}+\frac{x_1^k}{x_3^{k-r}}+...+\frac{x_{n-2}^k}{x_n^{k-r}}+\frac{x_{n-1}^k}{x_1^{k-r}}\ge x_1^r+x_2^r+...+x_n^r.$$

11. Cho n số thực dương $x_1,x_2,...,x_n$, $(n\in\mathbb{N}, n\ge 3)$ và $\alpha\ge\frac{3}{2}$. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1^\alpha}{x_1+\sqrt{x_1x_2}+x_2}+\frac{x_2^\alpha}{x_2+\sqrt{x_2x_3}+x_3}+...+\frac{x_n^\alpha}{x_n+\sqrt{x_nx_1}+x_1}\ge\frac{x_1^{\alpha-1}+x_2^{\alpha-1}+...+x_n^{\alpha-1}}{3}.$$

12. Cho n số thực dương $a_1,a_2,...,a_n$, $(n\in\mathbb{N},n\ge 3)$ và $\alpha\ge\frac{3}{2}$, thỏa mãn

$a_1\le a_2\le...\le a_n$, hoặc $a_1\ge a_2\ge...\ge a_n$.

Chứng minh rằng

$$\frac{a_1^\alpha}{a_2+a_3}+\frac{a_2^\alpha}{a_3+a_4}+...+\frac{a_n^\alpha}{a_1+a_2}\ge\frac{a_1^{\alpha-1}+a_2^{\alpha-1}+...+a_n^{\alpha-1}}{2}.$$

BÀI TOÁN CÂY TRE TRĂM ĐỐT

NGUYỄN VĂN NGỌC
(GV Trường Đại học Mỏ địa chất, Hà Nội)

Chúng ta bắt đầu từ bài toán cơ bản sau:

Bài toán 1 (Bài toán cây tre trăm đốt). *Đếm số cách chia cây tre 100 đốt thành 10 đoạn.*

Chú ý rằng, trong suốt bài viết này nói đến "đoạn" của cây tre ta đều hiểu là đoạn nguyên đốt. Tức là việc chia cây tre thành các đoạn được thực hiện bởi các lát cắt vào mắt của cây tre.

Để giải bài toán này cần đến phần kiến thức cơ bản của tập hợp được trình bày sau đây:

Xét tập hợp A có n phần tử. Dễ thấy A có đúng n tập con 1 phần tử. Vì phần còn lại của mỗi tập là một tập con của A có $n-1$ phần tử nên số tập con 1 phần tử của A đúng bằng số tập con $n-1$ phần tử.

Đặt số tập con k phần tử của tập hợp n phần tử là C_n^k. Ta có: $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

Tương tự, với mỗi $1 \le k \le n-1$, ta có:

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Quy ước số tập con 0 phần tử của A là 1, tức là $C_n^0 = 1$ (với mọi n), thì công thức trên được mở rộng cho cả trường hợp $k = n$ và $k = 0$.

Có nhiều cách đếm số tập con k phần tử của tập hợp n phần tử. Ta ghi nhận kết quả bằng công thức sau: $C_n^k = \dfrac{n.(n-1)...(n-k+1)}{1.2.3...k}$.

(Tử thức là tích của k số tự nhiên liên tiếp giảm dần bắt đầu từ n. Mẫu thức là tích của k số tự nhiên liên tiếp tăng dần, bắt đầu từ 1).

Trở lại bài toán cây tre trăm đốt. Nếu chỉ chia cây tre thành 2 đoạn thì ta chỉ cần chọn 1 mắt trong số 99 nguyên mắt của cây tre (ở đây ta hiểu 2 mắt đầu và cuối của cây tre là không nguyên mắt, các mắt còn lại là nguyên mắt). Đặt lát cắt vào mắt tre đã chọn ta được một cách chia cây tre thành 2 đoạn. Dĩ nhiên số cách chọn 1 trong số 99 mắt tre chính là $C_{99}^1 = 99$ hay có 99 cách chia cây tre 100 đốt thành 2 đoạn.

Tương tự số cách chia cây tre 100 đốt thành 10 đoạn là C_{99}^9. Đây là số khá lớn và có thể tính được bằng chức năng tính tổ hợp chập k của n trên các máy tính cầm tay.

Tổng quát: *Số cách chia cây tre n đốt thành k đoạn là* C_{n-1}^{k-1}.

Bài toán 2. *Lập công thức tính tổng*

$$T = C_2^2 + C_3^2 + ... + C_n^2 \quad (n \ge 2).$$

Để giải bài toán 2 ta bắt đầu bằng bài toán cây tre trăm đốt trong trường hợp tổng quát bằng cách:

Thực hiện việc đếm số cách chia cây tre n+2 đốt ($n \ge 2$) thành 4 đoạn như sau:

- Đặt A_1 là tập các cách chia, trong đó đoạn thứ nhất có đúng 1 đốt. Phần còn lại của cây tre gồm $n+1$ đốt cần phải chia thành 3 đoạn. Số cách chia là C_n^2. Ta có: $|A_1| = C_n^2$.
- Tiếp theo, đặt A_2 là tập các cách chia, trong đó đoạn thứ nhất có đúng 2 đốt. Phần còn lại của cây tre gồm n đốt cần phải chia thành 3 đoạn số cách chia là C_{n-1}^2. Ta có: $|A_2| = C_{n-1}^2$.

.....

- Cuối cùng, đặt A_{n-1} là tập các cách chia, trong đó đoạn thứ nhất có đúng $n-1$ đốt. Phần còn lại của cây tre gồm 3 đốt cần phải chia thành 3 đoạn. Số cách chia là C_2^2. Ta có: $|A_{n-1}| = C_2^2$.

Giả sử A là tập tất cả các cách chia cây tre $n+2$ đốt thành 4 đoạn. Theo quy tắc cộng, ta có

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_{n-1}|.$$

Từ bài toán cây tre trăm đốt ta được:

$$C_{n+1}^3 = C_n^2 + C_{n-1}^2 + \ldots + C_2^2.$$

Bằng cách trên ta có thể thiết lập công thức tính các tổng sau:

$$C_3^3 + C_4^3 + \ldots + C_n^3 \ (n \geq 3);$$

$$C_4^4 + C_5^4 + \ldots + C_n^4 \ (n \geq 4);$$

.....

Bài toán 3. *Đếm số nghiệm nguyên dương của phương trình*: $x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 100$.

Trở lại cây tre 100 đốt. Theo thứ tự cho tương ứng các biến $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ với số đốt các đoạn từ 1 đến 10 của cây tre trăm đốt. Khi đó mỗi nghiệm của phương trình tương ứng 1-1 với một cách chia cây tre trăm đốt thành 10 đoạn. Từ đó số nghiệm của phương trình bằng số cách chia cây tre 100 đốt thành 10 đoạn. Số đó là C_{99}^9.

Tổng quát: *Số nghiệm nguyên dương của phương trình* $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ *là* C_{n-1}^{k-1}.

Bài toán 4. *Đếm số nghiệm nguyên dương của phương trình* $x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 100$ *thỏa mãn* $x_1 > 3$.

Đặt $X_1 = x_1 - 3$. Khi đó X_1 là nguyên dương. Thay $x_1 = X_1 + 3$ vào phương trình, ta được

$$X_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 97.$$

Đáp số của bài toán được suy từ bài toán 3; số nghiệm đó là C_{96}^9.

Bài toán 4'. *Đếm số nghiệm nguyên dương của phương trình* $x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 100$ *thỏa mãn* $x_1 \leq 3$.

Xem xét 2 cách giải bài toán này.

Cách 1. $x_1 \leq 3$ nghĩa là $x_1 = 1$, $x_1 = 2$ hoặc $x_1 = 3$ (vì x_1 nguyên dương).

Trường hợp $x_1 = 1$. Số nghiệm của phương trình trong trường hợp này bằng số nghiệm nguyên dương của phương trình sau:

$$x_2 + \ldots + x_{10} = 99$$

Số nghiệm đó là C_{98}^8.

Tương tự, có C_{97}^8 nghiệm của phương trình thỏa mãn $x_1 = 2$ và có C_{96}^8 nghiệm của phương trình thỏa mãn $x_1 = 3$.

Vậy đáp số của bài toán 4' là $C_{98}^8 + C_{97}^8 + C_{96}^8$.

Cách 2. Tổng số nghiệm của bài toán 4 và bài toán 4' bằng số nghiệm của bài toán 3. Vậy đáp số của bài toán 4' là: $C_{99}^9 - C_{96}^9$.

Từ 2 cách giải khác nhau, ta có công thức:

$$C_{98}^8 + C_{97}^8 + C_{96}^8 = C_{99}^9 - C_{96}^9$$

hay $C_{99}^9 = C_{96}^9 + C_{98}^8 + C_{97}^8 + C_{96}^8$.

Dạng tổng quát của công thức này có thể là:

$$C_n^k = C_{n-3}^k + C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-3}^{k-1}.$$

(Bạn đọc tự kiểm nghiệm công thức này).

Bài toán 5. *Đếm số cách chia cây tre 100 đốt thành các đoạn.*

Nhắc lại rằng, nói đến đoạn ta hiểu đó là đoạn nguyên đốt. Chú ý rằng, theo kết quả ở bài toán 1, số cách chia cây tre 100 đốt thành k đoạn $(1 \leq k \leq 100)$ là C_{99}^{k-1}.

Cho k lần lượt từ 1 đến 100, ta được số cách chia là: $C_{99}^0 + C_{99}^1 + \ldots + C_{99}^{99} = 2^{99}$.

Tổng quát gọi u_n là số cách chia cây tre n đốt thành các đoạn thì $u_n = 2^{n-1}$.

Kiểm nghiệm công thức từ các trường hợp đầu tiên:

- Cây tre 2 đốt có 2 cách chia đó là chia đôi và để nguyên. Vậy $u_2 = 2$.
- Cây tre 3 đốt có 4 cách chia gồm:

(1,1,1); (1,2); (2,1); (3).

Vậy $u_3 = 4$.

Kiểm nghiệm để củng cố niềm tin vào công thức mà ở đây chưa được chứng minh. Điều đó là chưa đủ đối với người làm toán. Sau đây là lập luận chặt chẽ (chứng minh).

Ta chỉ ra: cứ 1 cách chia cây tre $n-1$ đốt có tương ứng 1-1 với tập 2 cách chia khác nhau của cây tre n đốt.

Thật vậy, chú ý đốt đầu tiên d_1 và phần còn lại ($n-1$ đốt) của cây tre n đốt. Phần còn lại đó chính là cây tre $n-1$ đốt.

Xét một cách chia cây tre $n-1$ đốt. Hai cách chia cây tre n đốt tương ứng với cách chia đó được xác định như sau:

Cách 1: Thêm đốt d_1 vào đoạn thứ nhất của cách chia cây tre $n-1$ đốt ta được cách chia cây tre n đốt.

Cách 2: Đoạn đầu chỉ gồm đốt d_1, các đoạn tiếp theo là các đoạn của cách chia cây tre $n-1$ đốt.

Như vậy, nếu u_n là số cách chia cây tre n đốt thành các đoạn thì $u_n = 2\,u_{n-1}$. Với các kiểm nghiệm đã thực hiện ở trên, ta có: $\begin{cases} u_n = 2u_{n-1} \\ u_2 = 2 \end{cases}$.

Từ đó ta có:

$u_n = 2u_{n-1} = 2^2 u_{n-2} = ... = 2^{n-3}u_3 = 2^{n-2}u_2 = 2^{n-1}$.

Vậy $u_n = 2^{n-1}$.

Bài toán 6. *Bé Pi có hộp kẹo vitamin 100 viên. Mẹ Pi dặn mỗi ngày Pi cần ăn 1 hoặc 2 viên kẹo. Đếm số cách Pi ăn hết hộp kẹo (chú ý rằng Pi không quên lời mẹ dặn).*

Dĩ nhiên rằng nếu mẹ không dặn mà để *Pi* tự ý ăn kẹo, khi đó cho tương ứng 100 viên kẹo với 100 đốt của cây tre và lần lượt cho tương ứng các đoạn tre (ở bài toán 5) với kẹo *Pi* ăn mỗi ngày thì bài toán 6 được đưa về bài toán 5.

Xét dạng tổng quát của bài toán 6. Thực hiện các cách chia kẹo cho mỗi ngày. Giả sử hộp kẹo có n viên và số cách chia tương ứng là a_n.

Dễ thấy: $a_1 = 1$; $a_2 = 2$.

• Hộp kẹo có 3 viên, các cách chia kẹo cho mỗi ngày được liệt kê sau đây:

1 1 1
1 2
1 1

Vậy $a_3 = 3$.

Đến đây ta thấy lời giải của bài toán 6 bắt đầu khác bài toán 5. Thử trường hợp tiếp theo

• Hộp kẹo có 4 viên, các cách chia gồm

1 1 1 1
1 1 2
1 2 1
2 1 1
2 2

Vậy $a_4 = 5$.

Trường hợp tiếp theo, $n = 5$. Ta thấy:

1) Nếu ngày đầu *Pi* ăn 1 viên thì 4 viên còn lại được chia như trường hợp $n = 4$, số cách chia đó là $a_4 = 5$.

2) Nếu ngày đầu *Pi* ăn 2 viên thì 3 viên còn lại được chia như trường hợp $n = 3$, số cách chia đó là $a_3 = 3$.

Ngoài ra không còn cách nào nữa. Từ đó ta được: $a_5 = a_4 + a_3 = 5 + 3 = 8$.

Cứ lần lượt như vậy, ta có công thức:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \end{cases}.$$

Bài toán 7. *Trên một trang giấy có các dòng các kí tự sau:*

Dòng 1	*A*
Dòng 2	*a A*
Dòng 3	*A a A*
Dòng 4	*a A A a A*
Dòng 5	*A a A a A A a A*
	.....

Ở đây, dòng sau nhận được từ dòng trước bằng cách biến đổi A thành a A và a thành A.

Hỏi dòng n có tổng cộng bao nhiêu kí tự (a hoặc A).

(Xem tiếp trang 21)

THÔNG CÁO BÁO CHÍ

về sách giáo khoa lớp 1 theo Chương trình Giáo dục phổ thông mới của Nhà Xuất bản Giáo dục Việt Nam

1. Ngày 22 tháng 11 năm 2019, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã ban hành Quyết định số 4507/QĐ-BGDĐT phê duyệt Danh mục sách giáo khoa (SGK) lớp 1 sử dụng trong các cơ sở giáo dục phổ thông. Trong số 32 tên SGK lớp 1 được Bộ Giáo dục và Đào tạo phê duyệt lần này có 24 tên sách thuộc 4 bộ SGK của Nhà Xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN), gồm: *Kết nối tri thức với cuộc sống; Chân trời sáng tạo; Cùng học để phát triển năng lực; Vì sự bình đẳng và dân chủ trong giáo dục.*

Đây là kết quả quá trình lao động miệt mài của đội ngũ tác giả, biên tập viên, họa sĩ,... cũng như sự chuẩn bị nghiêm túc, kĩ lưỡng các nguồn lực[1] của NXBGDVN trong suốt 5 năm qua nhằm thực hiện chủ trương đổi mới chương trình, sách giáo khoa giáo dục phổ thông.

Mỗi bộ sách mang một thông điệp, bản sắc riêng và cụ thể hoá mục tiêu giáo dục toàn diện, chuyển từ truyền thụ kiến thức sang hình thành, phát triển phẩm chất và năng lực của người học; kết nối kiến thức với cuộc sống, dẫn dắt học sinh khám phá cái mới, tổ chức dạy học theo cách sáng tạo để gợi hứng thú cho người học; phù hợp với học sinh trên mọi vùng miền trong cả nước.

Các bộ SGK mới của NXBGDVN được thiết kế với khổ sách 19×26,5 cm lớn hơn khổ SGK hiện hành và sử dụng giấy in chất lượng tốt; được đầu tư công phu về hình thức trình bày; phối hợp lôgic, đạt tính thẩm mĩ cao giữa kênh chữ và kênh hình; được đánh giá là tương đương với SGK của các nước phát triển trong khu vực và trên thế giới.

Ở một số môn học như Toán, Tiếng Việt, Đạo đức, Tự nhiên và Xã hội,... SGK của NXBGDVN xây dựng các tuyến nhân vật xuyên suốt từ lớp 1 lên các lớp trên, giúp học sinh cảm thấy trang sách sống động, gần gũi, tạo cho các em niềm hứng thú trong học tập.

Ngoài sách in, NXBGDVN cũng tổ chức triển khai sách điện tử, hệ thống học liệu và thiết bị phục vụ dạy học theo SGK lớp 1 mới; đồng thời nỗ lực phối hợp với các tỉnh, thành phố tổ chức biên soạn *Tài liệu giáo dục địa phương* theo chương trình giáo dục phổ thông mới.

2. NXBGDVN thực hiện chỉ đạo của Bộ GD&ĐT, phối hợp với các địa phương tổ chức tập huấn

[1] Tổ chức nghiên cứu về mô hình, cấu trúc SGK của các nước phát triển; tổ chức các đợt tập huấn bởi các chuyên gia trong nước và nước quốc tế (Anh, Đức, Phần Lan, Australia,...) về phát triển SGK theo định hướng phát triển năng lực... cho đội ngũ tác giả, biên tập viên, hoạ sĩ,...
Đội ngũ biên soạn SGK gồm: hơn 700 tác giả là Giáo sư, Phó Giáo sư, Tiến sĩ, các nhà khoa học và giáo viên giỏi, có tuổi đời bình quân trẻ, được đào tạo căn bản ở nước ngoài, am tường lĩnh vực giáo dục, giàu ý tưởng sáng tạo trong việc biên soạn SGK theo yêu cầu của chương trình giáo dục phổ thông mới; 500 biên tập viên, họa sĩ có bề dày kinh nghiệm trong việc làm SGK với chất lượng cao, đáp ứng nhu cầu đổi mới dạy học ở các trường phổ thông trên toàn quốc.

sử dụng SGK mới dưới hình thức hội thảo chuyên đề và đào tạo trực tuyến. Đến nay, NXBGDVN đã xây dựng kế hoạch và triển khai những hạng mục cần thiết để tập huấn giáo viên khai thác, sử dụng SGK mới bao gồm:

- Biên soạn tài liệu tập huấn giáo viên sử dụng SGK lớp 1 theo mô hình phát triển năng lực và phẩm chất. Tổ chức sản xuất các video clip ghi hình các tiết dạy học minh họa theo SGK mới. Những video clip này sẽ được cung cấp đến thầy, cô giáo tham gia tập huấn.
- Chuẩn bị đội ngũ giảng viên, báo cáo viên có trình độ, kinh nghiệm, am tường về đổi mới chương trình và SGK mới để triển khai kế hoạch tập huấn cho giáo viên khai thác, sử dụng SGK phù hợp với điều kiện của mỗi địa phương.
- Đưa vào khai thác cổng thông tin (portal), cơ sở dữ liệu hỗ trợ giáo viên những học liệu điện tử cần thiết trong quá trình dạy học các môn học và hoạt động giáo dục.

Thông qua tập huấn, NXBGDVN sẽ giúp giáo viên tiếp cận đầy đủ SGK mới của NXBGDVN để có thêm thông tin nhằm lựa chọn bộ SGK phù hợp sử dụng tại địa phương mình.

3. Với chất lượng của các bộ SGK của NXBGDVN cùng sự chuẩn bị kĩ càng, chu đáo cho việc tập huấn, NXBGDVN tin tưởng sẽ hỗ trợ giáo viên khai thác và sử dụng SGK mới hiệu quả nhất. Bằng kinh nghiệm trong nhiều thập niên tổ chức xuất bản, in và phát hành SGK, NXBGDVN đã chuẩn bị đầy đủ vật tư và máy móc thiết bị để đảm bảo cung ứng đầy đủ, kịp thời, đồng bộ SGK, thiết bị giáo dục đến tất cả các vùng miền trong cả nước trước ngày khai giảng năm học 2020 – 2021, năm học đầu tiên triển khai áp dụng SGK mới.

Với quan điểm phục vụ ngành giáo dục là ưu tiên hàng đầu, NXBGDVN sẽ tiếp tục thực hiện các chương trình tặng sách cho học sinh có hoàn cảnh đặc biệt, con em các gia đình chính sách, vùng sâu vùng xa; tặng sách các thư viện trường học tại những địa bàn khó khăn.

NXBGDVN sẽ lắng nghe và nghiêm túc tiếp thu những ý kiến đóng góp của các nhà khoa học, nhà sư phạm, giáo viên, phụ huynh và dư luận xã hội để tiếp tục hoàn thiện, nâng cao hơn nữa chất lượng các bộ SGK, đồng hành, hỗ trợ giáo viên trong suốt quá trình tổ chức dạy học.

****

BÀI TOÁN CÂY TRE... *(Tiếp theo trang 19)*

Đặt f_n là số kí tự của dòng n. Dễ thấy $f_n = a_n$ với n từ 1 đến 5 như đã liệt kê trong đề bài toán 7 và a_n là dãy số trong bài toán 6.

Với $n > 5$, $a_n = f_n$ còn đúng không?

Lời giải bài toán 6 nhắc ta cần xem xét 3 dòng liên tiếp: dòng $n - 2$, dòng $n - 1$ và dòng n.

Giả sử dòng $n - 2$ có:

x kí tự a và y kí tự A.

Chuyển qua dòng $n - 1$, ta thấy:

x kí tự a biến thành x kí tự A

y kí tự A biến thành y kí tự A và y kí tự a.

Vậy dòng $n - 1$ có:

y kí tự a và $x + y$ kí tự A.

Chuyển qua dòng n, ta thấy:

y kí tự a biến thành y kí tự A

$x + y$ kí tự A biến thành $x + y$ kí tự A và $x + y$ kí tự a.

Vậy dòng n có: $x + y$ kí tự a và $x + 2y$ kí tự A.

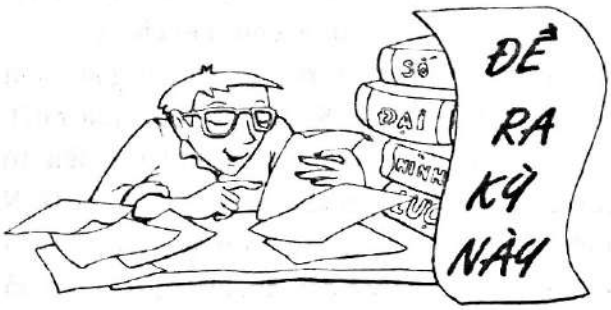
Tức là $f_{n-2} = x + y$, $f_{n-1} = x + 2y$, $f_n = 2x + 3y$.

Rõ ràng $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

Vậy đáp số của bài toán 7 là $\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \\ f_1 = 1 \\ f_2 = 2 \end{cases}$.

Đáp số này trùng với đáp số bài toán 6.

Tổng cộng ta đã trải qua 7 bài toán và tất cả đều là bài toán đếm. Ngày nay bài toán đếm có vai trò cực kỳ quan trọng. Trở về bài toán 7, hình dung mỗi lần sinh một cách chia kẹo của *Pi* mất 1 đơn vị thời gian thì việc sinh toàn bộ các cách chia kẹo của *Pi* với hộp kẹo n viên mất f_n đơn vị thời gian. Thời gian đó đo độ phức tạp của bài toán, một lĩnh vực toán học quan trọng đối với mọi ứng dụng khoa học.



CÁC LỚP THCS

Bài T1/510 (Lớp 6). Tìm các số tự nhiên x, y, z sao cho $3^x + 5^y - 2^z = (2z+3)^3$.

CAO NGỌC TOẢN

(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên - Huế)

Bài T2/510 (Lớp 7). Cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{B} = 75^0$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm H sao cho $BH = 2AC$. Tính số đo $\widehat{BHC}$.

NGUYỄN HÙNG CƯỜNG

(85 Biên Cương, Ngô Mây, TP. Quy Nhơn, Bình Định)

Bài T3/510. Cho

$$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)+2xyz=0.$$

Chứng minh rằng

$$x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}=(x+y+z)^{2019}.$$

LÊ MINH HÒA

(GV THCS Khả Cửu, Thanh Sơn, Phú Thọ)

Bài T4/510. Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 30^0$. Bên ngoài tam giác ABC, dựng tam giác ACD vuông cân tại D. Chứng minh rằng

$$2BD^2 = BA^2 + BC^2 + BA.BC.$$

NGUYỄN QUANG NAM

(GV THPT Quỳ Hợp 2, Quỳ Hợp, Nghệ An)

Bài T5/510. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T=\frac{5-3x}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{5-3y}{\sqrt{1-z^2}}+\frac{5-3z}{\sqrt{1-x^2}}.$$

HUỲNH THANH TÂM

(Cán bộ Bưu điện TX. An Nhơn, Bình Định)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/510. Tìm tham số m để phương trình

$$4^x+2=m.2^x(1-x)x$$

có nghiệm duy nhất.

THÁI NHẬT PHƯỢNG

(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài T7/510. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a) > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}+\frac{4\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c}.$$

HOÀNG NGỌC MINH

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T8/510. Cho tam giác ABC có $\widehat{C} = 45^o$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, $\widehat{AGB} = \alpha$. Chứng minh hệ thức $\frac{\sqrt{2}}{\sin A \sin B} + 3\cot\alpha = 1$.

HỒ QUANG VINH

(Hà Nội)

Bài T9/510. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$$
$$\geq \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\right).$$

TRẦN TIẾN MẠNH

(Khối Quang Trung, Vinh Tân, TP. Vinh, Nghệ An)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/510. Với ba số thực a, b, c, ta kí hiệu $T(a, b, c) = |a-b| + |b-c| + |c-a|$. Xét dãy (*) gồm các số nguyên $x_1, x_2, ..., x_{12}$ sao cho tồn tại đa thức $f(x)$ với các hệ số nguyên mà các giá trị $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_{12})$ đôi một phân biệt và

$$880 < \sum_{\substack{1\le i<j<k\le 12\\ i,j,k\in\mathbb{N}}} T\left(f(x_i), f(x_j), f(x_k)\right) \le 3758.$$

Chứng minh rằng trong (*) luôn chứa một cấp số cộng với ít nhất bốn số hạng.

PHẠM BẮC PHÚ

(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định)

Bài T11/510. Tìm tất cả các hàm số $h(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

i) $h(2019) = 0$;

ii) $h(x+1) = h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

CÁC LỚP THCS

Bài T1/510 (Lớp 6). Tìm các số tự nhiên x, y, z sao cho $3^x + 5^y - 2^z = (2z+3)^3$.

CAO NGỌC TOẢN

(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên - Huế)

Bài T2/510 (Lớp 7). Cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{B} = 75^0$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm H sao cho $BH = 2AC$. Tính số đo $\widehat{BHC}$.

NGUYỄN HÙNG CƯỜNG

(85 Biên Cương, Ngô Mây, TP. Quy Nhơn, Bình Định)

Bài T3/510. Cho

$$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)+2xyz=0.$$

Chứng minh rằng

$$x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}=(x+y+z)^{2019}.$$

LÊ MINH HÒA

(GV THCS Khả Cửu, Thanh Sơn, Phú Thọ)

Bài T4/510. Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 30^0$. Bên ngoài tam giác ABC, dựng tam giác ACD vuông cân tại D. Chứng minh rằng

$$2BD^2 = BA^2 + BC^2 + BA.BC.$$

NGUYỄN QUANG NAM

(GV THPT Quỳ Hợp 2, Quỳ Hợp, Nghệ An)

Bài T5/510. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T=\frac{5-3x}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{5-3y}{\sqrt{1-z^2}}+\frac{5-3z}{\sqrt{1-x^2}}.$$

HUỲNH THANH TÂM

(Cán bộ Bưu điện TX. An Nhơn, Bình Định)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/510. Tìm tham số m để phương trình

$$4^x+2=m.2^x(1-x)x$$

có nghiệm duy nhất.

THÁI NHẬT PHƯỢNG

(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài T7/510. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a) > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}+\frac{4\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c}.$$

HOÀNG NGỌC MINH

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T8/510. Cho tam giác ABC có $\widehat{C} = 45^o$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, $\widehat{AGB} = \alpha$. Chứng minh hệ thức $\dfrac{\sqrt{2}}{\sin A \sin B} + 3\cot\alpha = 1$.

HỒ QUANG VINH

(Hà Nội)

Bài T9/510. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$$
$$\geq \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\right).$$

TRẦN TIẾN MẠNH

(Khối Quang Trung, Vinh Tân, TP. Vinh, Nghệ An)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/510. Với ba số thực a, b, c, ta kí hiệu $T(a, b, c) = |a-b| + |b-c| + |c-a|$. Xét dãy (*) gồm các số nguyên $x_1, x_2, ..., x_{12}$ sao cho tồn tại đa thức $f(x)$ với các hệ số nguyên mà các giá trị $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_{12})$ đôi một phân biệt và

$$880 < \sum_{\substack{1\le i<j<k\le 12\\ i,j,k\in\mathbb{N}}} T\left(f(x_i), f(x_j), f(x_k)\right) \le 3758.$$

Chứng minh rằng trong (*) luôn chứa một cấp số cộng với ít nhất bốn số hạng.

PHẠM BẮC PHÚ

(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định)

Bài T11/510. Tìm tất cả các hàm số $h(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

i) $h(2019) = 0$;

ii) $h(x+1) = h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

iii) $3^{x+y}\left[h(x)h(y)+h(x+y)\right]=$

$=3^x(y+1)h(x)+3^y(x+1)h(y)+3^{xy}h(xy), \forall x,y\in\mathbb{R}.$

LA ĐẠI CƯƠNG

(GV THPT Cam Lộ, Quảng Trị)

Bài T12/510. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn (Ω). Các điểm E, F lần lượt nằm trên cạnh CA, AB sao cho tứ giác $BCEF$ nội tiếp. Trung trực của đoạn thẳng CE lần lượt cắt BC, EF tại các điểm N, R. Trung trực của đoạn thẳng BF lần lượt cắt BC, EF tại các điểm M, Q. K là điểm đối xứng với E qua RM. L là điểm đối xứng với F qua QN. Gọi giao điểm của RK và QB là S; giao điểm của QL và RC là T.

1) Chứng minh rằng bốn điểm Q, R, S, T cùng nằm trên một đường tròn, ký hiệu đường tròn này là (ω).

2) Chứng minh rằng hai đường tròn (ω) và (Ω) tiếp xúc nhau.

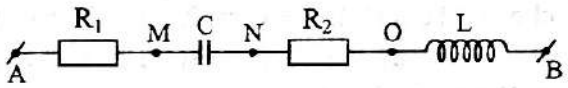
TRẦN QUANG HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài L1/510. Trong môi trường đồng tính, không hấp thụ âm có một nguồn âm đẳng hướng, đặt ở O. Một máy thu âm đặt ở A thu được âm có mức cường độ âm là 50 dB. Nếu dịch chuyển máy thu ra xa nguồn âm thêm một khoảng d thì mức cường độ âm thu được là 30 dB. Nếu tiếp tục dịch chuyển máy thu ra xa thêm một khoảng nữa cũng là d theo phương truyền âm thì mức cường âm thu được là bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

Bài L2/510. Cho đoạn mạch như hình vẽ. Trong đó $R_1 = 30\ \Omega$, cuộn cảm thuần. Đặt vào hai đầu đoạn mạch AB một điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng $U = 150$ V và tần số $f = 50$ Hz thì công suất tiêu thụ trong mạch bằng 500 W. Nối hai đầu cuộn cảm thuần bằng một dây dẫn có điện trở không đáng kể. Khi đó điện áp hiệu dụng trên các đoạn AM và MO bằng nhau và bằng $50\sqrt{3}$ V. Độ tự cảm L của cuộn dây bằng bao nhiêu?



THANH LÂM *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/510 (For 6th grade). Find natural numbers x, y, z satisfying

$$3^x+5^y-2^z=(2z+3)^3.$$

Problem T2/510 (For 7th grade). Given a right triangle ABC with the right angle A and $\widehat{B}=75^0$. Let H be the point on the opposite ray of AB such that $BH=2AC$. Find the angle $\widehat{BHC}$.

Problem T3/510. Given that

$$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)+2xyz=0.$$

Show that

$$x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}=(x+y+z)^{2019}.$$

Problem T4/510. Given a triangle ABC with $\widehat{ABC}=30^0$. Outside the triangle ABC, construct the isosceles triangle ACD with the right angle D. Show that

$$2BD^2=BA^2+BC^2+BA.BC.$$

Problem T5/510. Find the minimum value of the expression

$$T=\frac{5-3x}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{5-3y}{\sqrt{1-z^2}}+\frac{5-3z}{\sqrt{1-x^2}}.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/510. Find all possible values for the parameter m so that the equation

$$4^x+2=m.2^x(1-x)x$$

has a unique solution.

Problem T7/510. Let a, b, c be non-negative numbers such that $(a+b)(b+c)(c+a)>0$. Find the minimum value of the expression

$$P=\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}+\frac{4\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c}.$$

(Xem tiếp trang 32)

iii) $3^{x+y}\left[h(x)h(y)+h(x+y)\right]=$

$=3^x(y+1)h(x)+3^y(x+1)h(y)+3^{xy}h(xy), \forall x,y\in\mathbb{R}.$

LA ĐẠI CƯƠNG

(GV THPT Cam Lộ, Quảng Trị)

Bài T12/510. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn (Ω). Các điểm E, F lần lượt nằm trên cạnh CA, AB sao cho tứ giác $BCEF$ nội tiếp. Trung trực của đoạn thẳng CE lần lượt cắt BC, EF tại các điểm N, R. Trung trực của đoạn thẳng BF lần lượt cắt BC, EF tại các điểm M, Q. K là điểm đối xứng với E qua RM. L là điểm đối xứng với F qua QN. Gọi giao điểm của RK và QB là S; giao điểm của QL và RC là T.

1) Chứng minh rằng bốn điểm Q, R, S, T cùng nằm trên một đường tròn, ký hiệu đường tròn này là (ω).

2) Chứng minh rằng hai đường tròn (ω) và (Ω) tiếp xúc nhau.

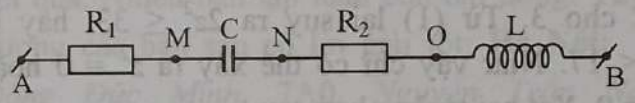
TRẦN QUANG HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài L1/510. Trong môi trường đồng tính, không hấp thụ âm có một nguồn âm đẳng hướng, đặt ở O. Một máy thu âm đặt ở A thu được âm có mức cường độ âm là 50 dB. Nếu dịch chuyển máy thu ra xa nguồn âm thêm một khoảng d thì mức cường độ âm thu được là 30 dB. Nếu tiếp tục dịch chuyển máy thu ra xa thêm một khoảng nữa cũng là d theo phương truyền âm thì mức cường âm thu được là bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

Bài L2/510. Cho đoạn mạch như hình vẽ. Trong đó $R_1 = 30\ \Omega$, cuộn cảm thuần. Đặt vào hai đầu đoạn mạch AB một điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng $U = 150$ V và tần số $f = 50$ Hz thì công suất tiêu thụ trong mạch bằng 500 W. Nối hai đầu cuộn cảm thuần bằng một dây dẫn có điện trở không đáng kể. Khi đó điện áp hiệu dụng trên các đoạn AM và MO bằng nhau và bằng $50\sqrt{3}$ V. Độ tự cảm L của cuộn dây bằng bao nhiêu?



THANH LÂM *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/510 (For 6th grade). Find natural numbers x, y, z satisfying

$$3^x+5^y-2^z=(2z+3)^3.$$

Problem T2/510 (For 7th grade). Given a right triangle ABC with the right angle A and $\widehat{B}=75^0$. Let H be the point on the opposite ray of AB such that $BH=2AC$. Find the angle $\widehat{BHC}$.

Problem T3/510. Given that

$$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)+2xyz=0.$$

Show that

$$x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}=(x+y+z)^{2019}.$$

Problem T4/510. Given a triangle ABC with $\widehat{ABC}=30^0$. Outside the triangle ABC, construct the isosceles triangle ACD with the right angle D. Show that

$$2BD^2=BA^2+BC^2+BA.BC.$$

Problem T5/510. Find the minimum value of the expression

$$T=\frac{5-3x}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{5-3y}{\sqrt{1-z^2}}+\frac{5-3z}{\sqrt{1-x^2}}.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/510. Find all possible values for the parameter m so that the equation

$$4^x+2=m.2^x(1-x)x$$

has a unique solution.

Problem T7/510. Let a, b, c be non-negative numbers such that $(a+b)(b+c)(c+a)>0$. Find the minimum value of the expression

$$P=\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}+\frac{4\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c}.$$

(Xem tiếp trang 32)

Bài T1/506. *Tìm tất cả các số nguyên x, y, z thỏa mãn* $3x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 - 18x = 6$.

Lời giải. Ta biến đổi như sau

$3x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 - 18x - 6$

$= 3x^2 - 18x + 27 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 - 33$

$= 3(x-3)^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 - 33 = 0$

nên có $3(x-3)^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 = 33$ (1)

Từ (1) suy ra $2z^2$ phải chia hết cho 3, do đó z^2 phải chia hết cho 3. Do 3 là số nguyên tố thì z phải chia hết cho 3. Từ (1) lại suy ra $2z^2 \le 33$, hay là $z^2 < 17$. Như vậy chỉ có thể xảy ra $z^2 = 0$ hoặc $z^2 = 9$. Xét hai trường hợp sau.

1) Nếu $z^2 = 0$ thay vào (1) được $3(x-3)^2 + 6y^2 = 33$, hay là $(x-3)^2 + 2y^2 = 11$ (2).

Từ (2) có $2y^2 \le 11$ suy ra $y^2 < 6$ nên y^2 chỉ có thể bằng 0, 1, 4.

Với $y^2 = 0$ thay vào (2) được $(x-3)^2 = 11$, không có số nguyên x nào thỏa mãn.

Với $y^2 = 4$ thay vào (2) được $(x-3)^2 = 3$, không có số nguyên x nào thỏa mãn.

Với $y^2 = 1$ thay vào (2) được $(x-3)^2 = 9$, lúc đó $x = 0$ và $x = 6$ đều thỏa mãn.

2) Nếu $z^2 = 9$ thay vào (1) được $3(x-3)^2 + 6y^2 + 27y^2 = 15$, hay là $(x-3)^2 + 11y^2 = 5$ (3)

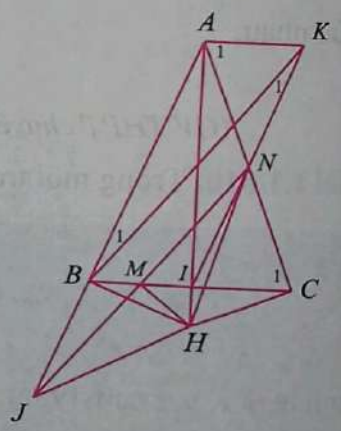
Từ (3) có $11y^2 \le 5$, suy ra $y^2 = 0$, do đó $(x-3)^2 = 5$, không có số nguyên x nào thỏa mãn.

Vậy các số nguyên $(x ; y ; z)$ thỏa mãn đẳng thức ở đề bài là $(0 ; 1 ; 0)$, $(0 ; -1 ; 0)$, $(6 ; 1 ; 0)$, $(6 ; -1 ; 0)$.

Nhận xét. Một số bạn lập luận dài vì không xét tính chia hết của các số nguyên. Một số bạn quên tìm nghiệm số âm. Các bạn sau có lời giải đúng. **Hà Nội:** *Hoàng Xuân Tú*, 6A, THCS Tô Hoàng, Q. Đống Đa; *Nguyễn Hà Anh*, 6A0, *Hà Minh Đức*, 6A01, *Vũ Đặng Đức Minh*, 7A0, THCS Ngôi Sao Hà Nội, Thanh Xuân, *Lý Hoàng Việt*, 6A11, THCS Nguyễn Trường Tộ; **Nghệ An**: *Phạm Ngọc Trinh*, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, TTr. Cầu Giát, Quỳnh Lưu, *Nguyễn Văn Hùng*, *Vương Viết Lượng*, 6A, *Võ Ánh Dương*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi**: *Võ Hữu Thanh Thảo*, 6B, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/506. *Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi H là điểm thuộc miền trong của góc A sao cho* $HB \perp BA$, $HC \perp CA$. *Trên đoạn BC lấy điểm M sao cho* $BM = \frac{1}{4}BC$. *Gọi N là trung điểm AC. Tính số đo góc* $\widehat{HMN}$.



Lời giải. Gọi I là giao điểm của AH và BC, J là giao điểm của MN và AB. Vẽ điểm K sao cho N là trung điểm của IK. Nối HN, HJ, KA, KB. Xét ΔABH và ΔACH có:

$\widehat{ABH} = \widehat{ACH} = 90^0$,

cạnh AH chung, $AB = AC \Rightarrow \Delta ABH = \Delta ACH$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông) $\Rightarrow HB = HC$.

Ta lại có $AB = AC$ suy ra AH là đường trung trực của BC. Do đó I là trung điểm của BC mà $BM = \frac{1}{4}BC$, suy ra $BM = IM$. Xét ΔANK và ΔCNI có $AN = CN$, $\widehat{ANK} = \widehat{CNI}$, $NK = NI$ suy ra $\Delta ANK = \Delta CNI$ (c.g.c) $\Rightarrow AK = CI$, $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$.

Ta có $AK = CI$, $CI = IB$ suy ra $AK = IB$. Ta có $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$, hai góc này ở vị trí so le trong nên $AK // BC \Rightarrow \widehat{AKB} = \widehat{IBK}$. Xét ΔAKB và ΔIBK có $AK = IB$, $\widehat{AKB} = \widehat{IBK}$, cạnh BK chung $\Rightarrow \Delta AKB = \Delta IBK$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{K_1}$, $AB = IK$.

Ta có $\widehat{B_1} = \widehat{K_1}$, hai góc này ở vị trí so le trong nên $IN \parallel AB$. Ta có $IK = AB$ mà $IN = \frac{1}{2}IK$ nên $IN = \frac{1}{2}AB$. Xét ΔBMJ và ΔIMN có $\widehat{JBM} = \widehat{NIM}$, $MB = MI$, $\widehat{BMJ} = \widehat{IMN} \Rightarrow \Delta BMJ = \Delta IMN$ (g.c.g) $\Rightarrow MJ = MN, BJ = IN$. Ta có $BJ = IN$, $IN = \frac{1}{2}AB$, $NC = \frac{1}{2}AC, AB = AC \Rightarrow BJ = NC$. Xét ΔHJB và ΔHNC có $HB = HC$, $\widehat{HBJ} = \widehat{HCN} = 90^o$, $BJ = NC \Rightarrow \Delta HJB = \Delta HNC$ (c.g.c) $\Rightarrow HJ = HN$. Do đó ΔHJN cân tại H có HM là trung tuyến, suy ra HM là đường cao. Vậy $\widehat{HMN} = 90^o$.

Nhận xét. Bài toán này dành cho các bạn Lớp 7. Đông đảo các bạn tham gia giải bài nhưng đa số các bạn sử dụng tính chất đường trung bình của tam giác thuộc chương trình Lớp 8 để giải. Tuyên dương các bạn sau đây giải bằng phương pháp sử dụng định lí Pythagore. *Nguyễn Hà Anh*, 6A0, THCS Ngôi Sao Hà Nội, Thanh Xuân, *Lý Hoàng Việt*, 6A11, THCS Nguyễn Trường Tộ, **Hà Nội**.

NGUYỄN HIỆP

Bài T3/506. *Tìm các cặp số nguyên (x, y) thoả mãn điều kiện*

$$y^3 - 2(x-4)y^2 + (x^2 - 9x - 1)y + 3x^2 + x = 0 \quad (1)$$

Lời giải. Do x, y là các số nguyên nên tồn tại $t \in \mathbb{Z}$ sao cho $x = y + t$. Thay vào phương trình (1), ta có $y^3 - 2(y+t-4)y^2 + [(y+t)^2 - 9(y+t) - 1]y + 3(y+t)^2 + y + t = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - t(3-t)y + 3t^2 + t = 0$ (2). Coi (2) là phương trình bậc hai ẩn y (t là tham số), ta tính $\Delta = t^2(3-t)^2 - 8(3t^2 + t) = t(t+1)^2(t-8)$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow t \in \{-1; 0; 8\}$. Nếu $t = 0$ thì (2) có nghiệm kép $y = 0$, suy ra $x = 0$. Nếu $t = 8$ thì (2) có nghiệm kép $y = -10$, suy ra $x = -2$. Nếu $t = -1$ thì (2) có nghiệm kép $y = -1$, suy ra $x = -2$. Nếu $t \neq 0, t \neq -1, t \neq 8$ thì $\Delta \neq 0$. Để (2) có nghiệm nguyên thì trước hết Δ phải là số chính phương khác 0, nên $t(t-8) = a^2$ $(a \in \mathbb{N}^*)$

$\Leftrightarrow (t-4)^2 - a^2 = 16 \Leftrightarrow (t-4+a)(t-4-a) = 16$. Lại có $(t-4+a) + (t-4-a) = 2(t-4)$ là số chẵn nên $t-4+a$ và $t-4-a$ là hai số nguyên cùng chẵn; $t-4+a > t-4-a$ (do $a \in \mathbb{N}^*$). Phân tích 16 thành tích hai số nguyên chẵn khác nhau là $16 = 8 . 2 = (-2).(-8)$. Xảy ra hai khả năng sau:

1) $\begin{cases} t-4+a=8 \\ t-4-a=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t-8=10 \\ a=t-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=9 \\ a=3 \end{cases}$.

Từ đó tìm được $\begin{cases} x=3 \\ y=-6 \end{cases}$ và $\begin{cases} x=-12 \\ y=-21 \end{cases}$.

2) $\begin{cases} t-4+a=-2 \\ t-4-a=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t-8=-10 \\ a=t+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ a=3 \end{cases}$

(loại vì đang xét $t \neq -1$).

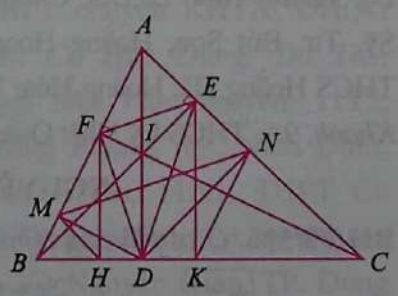
Vậy có 5 cặp số nguyên (x, y) là (0; 0), (–2; –1), (–2; –10), (3; –6), (–12; –21) thoả mãn điều kiện (1).

Nhận xét. Đa số các bạn gửi bài đều chưa tìm hết kết quả. Nhiều bạn lập luận còn dài dòng. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Vũ Đặng Đức Minh*, 7A0, *Nguyễn Trần Nam*, 8A0,THCS Ngôi Sao Hà Nội, Thanh Xuân; **Thanh Hoá:** *Lê Đức Chính*, 8B, THCS Nhữ Bá Sỹ, TTr. Bút Sơn, Hoằng Hoá.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/506. *Cho tam giác nhọn ABC có hai đường cao BE và CF. Kẻ FH và EK cùng vuông góc với BC ($H, K \in BC$). Kẻ HM song song với AC và KN song song với AB ($M \in AB, N \in AC$). Chứng minh EF // MN.*

Lời giải. *Cách 1.* Kẻ đường cao AD. Khi đó ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại I.



Dễ thấy tứ giác $ABDE$ nội tiếp nên $\widehat{BAC} = \widehat{EDC}$.

Mà $KN \parallel AB$ nên $\widehat{BAC} = \widehat{KNC}$. Suy ra tứ giác $DKNE$ nội tiếp, nên

Bài T5/506. *Giải phương trình*

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\frac{2x+6}{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}\right)^2}=2.$$

Thịnh, Phạm Thị Ngọc Ánh, Bùi Phương Thảo, Nguyễn Tuấn Việt, Nguyễn Hoài Phương, Nguyễn Đức Vinh Quang, Đỗ Ngọc Hải, Chứ Lê Phương Linh, Bùi Thị Hồng Huệ, Trần Đức Duy, Nguyễn Anh Tú, Nguyễn Quỳnh Chi, Phạm Thị Minh Châu, Triệu Tuấn Anh, Nguyễn Đức Anh, Nguyễn Trung Đức Dũng, Đào Quang Huy, Nguyễn Văn Quân, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao.

NGUYỄN ANH DŨNG

T6/506. *Cho $a < b$ là hai số thực dương thỏa mãn $a^b = b^a$. Chứng minh rằng tồn tại số thực dương c sao cho $a = \left(1+\frac{1}{c}\right)^c$, $b = \left(1+\frac{1}{c}\right)^{c+1}$.*

Lời giải. (Của bạn *Đinh Đoàn Xuân Phương*, 12 Toán chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**). Ta chọn $c = \frac{a}{b-a} > 0$. Khi đó từ $a^b = b^a$ ta có đẳng thức $a = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{a}{b-a}} = \left(1+\frac{b-a}{a}\right)^{\frac{a}{b-a}} = \left(1+\frac{1}{c}\right)^c$ và

$$b = a.\frac{b}{a} = \left(1+\frac{1}{c}\right)^c.\left(1+\frac{1}{c}\right) = \left(1+\frac{1}{c}\right)^{c+1}.$$

Một số bạn giải khác, bằng cách lưu ý khi $b > a$ thì tồn tại $k > 1$ sao cho $b = ka$. Đặt $k = 1+\frac{1}{c}$ ta dễ dàng có khẳng định của bài toán.

Nhận xét: Các bạn sau có lời giải đúng: **Hà Nội**: *Nguyễn Xuân Tùng*, 10 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Phú Thọ:** *Nguyễn Đăng Khoa*, 11T, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì; **Quảng Bình:** *Đinh Đoàn Xuân Phương*, 12 Toán, *Lê Mỹ Duyên*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, *Lê Hồ Trọng Tín*, 8A8, THCS Kế Sách, Kế Sách; **Thanh Hóa**: *Nguyễn Duy Long*, 10T2, THPT chuyên Lam Sơn; **Thừa Thiên - Huế:** *Trương Đức Dũng, Nguyễn Thị Bảo Ngọc, Lê Mỹ Duyên*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc Học Huế.

VŨ ĐÌNH HÒA

T7/506. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} \tan x - \tan y = \left(1+\sqrt{x+y}\right)^y - \left(1+\sqrt{x+y}\right)^x \\ 3^{\sqrt{1-x}} + 5^{\sqrt{1-y}} = 2\left(1+\sqrt{9-10x+y}\right) \end{cases}.$$

Lời giải. ĐK:

$$\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, y \neq \frac{\pi}{2}+l\pi \ (k,l \in \mathbb{Z}) \\ x+y \geq 0, x \leq 1, y \leq 1, 10x-y \leq 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geq 0, x \leq 1, y \leq 1 \\ 10x-y \leq 9 \end{cases}.$$

Từ ĐK trên suy ra $-\frac{\pi}{2} < -1 \leq x, y \leq 1 < \frac{\pi}{2}$.

Do đó $x > y \Leftrightarrow \tan x > \tan y$. Trong khi đó

$$\left(1+\sqrt{x+y}\right)^y > \left(1+\sqrt{x+y}\right)^x \Leftrightarrow x+y > 0, y > x.$$

Tương tự với $x < y$. Do đó PT thứ nhất tương đương $x = y$, $0 \leq x \leq 1$. Khi đó PT thứ hai tương đương với: $3^{\sqrt{1-x}} + 5^{\sqrt{1-x}} = 2\left(1+3\sqrt{1-x}\right)$

$$\Leftrightarrow f(a) = 3^a + 5^a - 6a - 2 = 0,$$

$a = \sqrt{1-x}$, $0 \leq a \leq 1$. Ta có $f(0) = f(1) = 0$ và $f'(a) = 3^a \ln 3 + 5^a \ln 5 - 6$ là hàm số tăng thực sự với $0 \leq a \leq 1$. Do đó PT $f'(a) = 0$ có không quá một nghiệm. Bởi vậy, theo Định lí Rolle, PT $f(a) = 0$ có không quá hai nghiệm. Như vậy PT $f(a) = 0$ chỉ có hai nghiệm $a = 0$ và $a = 1$. Suy ra hệ PT của bài toán có hai nghiệm $x = y = 1$ và $x = y = 0$.

Nhận xét. Đây là bài toán cơ bản thuộc ứng dụng của đạo hàm trong tính số nghiệm của PT. Các bạn học sinh sau có lời giải đúng. **Hà Nội**: *Nguyễn Xuân Tùng*, 10T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Nam Định:** *Cồ Huy Dũng, Đỗ Tiến Dũng, Trần Huy Lực, Mai Văn Nguyên*, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Hữu Tâm*, 11A1, THPT Cù Huy Cận, Vũ Quang; **Quảng Bình:** *Lê Mỹ Duyên*, 11T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Thừa Thiên Huế:** *Phạm Bá Hoàng, Nguyễn*

Thị Bảo Ngọc, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Vĩnh Long:** *Vũ Công Thiện*, 11T2, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 12A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.

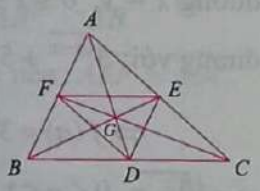
NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/506. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ΔABC ta luôn có*

$$\frac{(b+c)a}{m_a^2}+\frac{(c+a)b}{m_b^2}+\frac{(a+b)c}{m_c^2}\ge 8,$$

trong đó a, b, c, m_a, m_b, m_c thứ tự là độ dài các cạnh BC, CA, AB và độ dài các đường trung tuyến ứng với các cạnh a, b, c.

Lời giải. Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB; G là trọng tâm tam giác ΔABC. Áp dụng bất đẳng thức Ptolemy cho tứ giác $BDGF$ ta được



$FD.BG \le FG.BD + BF.GD$

$\Rightarrow 2bm_b \le am_c + cm_a$

$\Rightarrow 2b^2m_b \le abm_c + bcm_a$ (1).

Áp dụng bất đẳng thức Ptolemy cho tứ giác $AFDC$ ta được: $AD.CF \le FD.AC + AF.CD$

$\Rightarrow 4m_am_c \le 2b^2 + ac$

$\Rightarrow 4m_am_bm_c \le 2b^2m_b + acm_b$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra:

$$4m_am_bm_c \le bcm_a + acm_b + abm_c$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{m_am_b}+\frac{bc}{m_bm_c}+\frac{ca}{m_cm_a}\ge 4 \text{ (3).}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{(b+c)a}{m_a^2}+\frac{(c+a)b}{m_b^2}+\frac{(a+b)c}{m_c^2}$$

$$=\left(\frac{ab}{m_a^2}+\frac{ab}{m_b^2}\right)+\left(\frac{bc}{m_b^2}+\frac{bc}{m_c^2}\right)+\left(\frac{ca}{m_c^2}+\frac{ca}{m_a^2}\right)$$

$$\ge \frac{2ab}{m_am_b}+\frac{2bc}{m_bm_c}+\frac{2ca}{m_cm_a}\ge 8 \text{ (theo (3)).}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Nhận xét. Bất đẳng thức (3) cũng có thể chứng minh nhờ kết quả sau: *Với P là điểm bất kỳ trong tam giác ABC ta có bất đẳng thức* $\frac{PA.PB}{ab}+\frac{PB.PC}{bc}+\frac{PC.PA}{ca}\ge 1$ (BĐT Hayashi).

Các bạn sau có lời giải tốt là: **Hà Nội:** *Nguyễn Xuân Tùng*, 10 Toán, *Đỗ Xuân Trọng*, 11 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, *Vũ Đặng Đức Minh*, 7A0, *Nguyễn Trần Nam*, *Hoàng Nhật Nam*, *Nguyễn Nhật Linh*, 8A0, THCS Ngôi Sao Hà Nội, Thanh Xuân; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Nhật Hào*, 12T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Sóc Trăng:** *Đậu Đức Quân*, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Hữu Đức*, *Nguyễn Thành Phát*, 10T1, *Trương Gia Bảo*, *Lê Minh Tâm*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/506. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $M=\sqrt[3]{\frac{a^5}{b^4}}+\sqrt[3]{\frac{b^5}{c^4}}+\sqrt[3]{\frac{c^5}{a^4}}$.

Lời giải. *Cách 1.* Áp dụng BĐT Cauchy cho 9 số dương, ta có:

$$\sqrt[3]{\frac{a^5}{b^4}}+\sqrt[3]{\frac{a^5}{b^4}}+\sqrt[3]{\frac{a^5}{b^4}}+ab+ab+ab+ab+1+1$$

$$\ge 9\sqrt[9]{\sqrt[3]{\frac{a^{15}}{b^{12}}}.a^4b^4}=9\sqrt[9]{\frac{a^5}{b^4}.a^4b^4}=9a$$

$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{\frac{a^5}{b^4}}+4ab+2\ge 9a \Rightarrow 3\sqrt[3]{\frac{a^5}{b^4}}\ge 9a-4ab-2.$$

Tương tự: $3\sqrt[3]{\frac{b^5}{c^4}}\ge 9b-4bc-2;$

$$3\sqrt[3]{\frac{c^5}{a^4}}\ge 9c-4ca-2.$$

Cộng theo vế các BĐT trên, ta được:

Bài T8/506. *Chứng minh rằng với mọi tam giác* ΔABC *ta luôn có*

$$\frac{(b+c)a}{m_a^{\ 2}}+\frac{(c+a)b}{m_b^{\ 2}}+\frac{(a+b)c}{m_c^{\ 2}}\geq 8,$$

trong đó a, b, c, m_a, m_b, m_c *thứ tự là độ dài các cạnh BC, CA, AB và độ dài các đường trung tuyến ứng với các cạnh a, b, c.*

Bài T9/506. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn* $a + b + c = 3$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $M = \sqrt[3]{\frac{a^5}{b^4}} + \sqrt[3]{\frac{b^5}{c^4}} + \sqrt[3]{\frac{c^5}{a^4}}$.

$3M \geq 9(a+b+c)-4(ab+bc+ca)-6$

$=9.3-4(ab+bc+ca)-6=21-4(ab+bc+ca).$

Mặt khác: $3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 = 9$

$\Rightarrow ab+bc+ca \leq 3.$

Do đó: $3M \geq 21-4(ab+bc+ca) \geq 21-4.3=9$

$\Rightarrow M \geq 3$. Ta có $M=3$ khi $a=b=c=1$.

Vậy $\min M = 3$.

Cách 2. Đặt $a=x^3, b=y^3, c=z^3 \Rightarrow x^3+y^3+z^3=3$

$\Rightarrow M = \frac{x^5}{y^4}+\frac{y^5}{z^4}+\frac{z^5}{x^4}$. Theo BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{x^5}{y^4}+2x^2y^2 = \frac{x^5}{y^4}+x^2y^2+x^2y^2 \geq 3x^3.$$

Tương tự: $\frac{y^5}{z^4}+2y^2z^2 \geq 3y^3$; $\frac{z^5}{x^4}+2z^2x^2 \geq 3z^3$.

$\Rightarrow M+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) \geq 3(x^3+y^3+z^3)=9.$

$\Leftrightarrow M \geq 9-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$. Mặt khác:

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \leq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{3} \quad (1).$$

Theo BĐT Holder, ta có:

$$(x^2+y^2+z^2)^3 = (x.x.1+y.y.1+z.z.1)^3$$

$$\leq (x^3+y^3+z^3)(x^3+y^3+z^3)(1^3+1^3+1^3)=27$$

$\Rightarrow \quad x^2+y^2+z^2 \leq 3 \quad (2).$

Từ (1) và (2) suy ra: $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \leq 3$.

Do đó: $M \geq 9-2.3=3$; $M=3$ khi $x=y=z=1$ hay $a=b=c=1$. Vậy $\min M = 3$.

➢***Nhận xét.*** Có nhiều bạn tham gia giải bài này và đa số các bạn sử dụng BĐT Cauchy để tìm min*P*. Những bạn sử dụng BĐT Bunyakovsky, BĐT Minkovsky hoặc BĐT Holder cũng đều tìm ra kết quả của bài toán. Các bạn sau có lời giải tương đối gọn: **Hà Nội:** *Đỗ Xuân Trọng*, 11 Toán, *Nguyễn Xuân Tùng*, 10 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; *Nguyễn Nhật Linh, Nguyễn Trần Nam, Hoàng Nhật Nam*, 8A0, *Vũ Đặng Đức Minh*, 7A0, THCS Ngôi Sao Hà Nội, Thanh Xuân; **Hưng Yên:** *Phạm Văn Thông*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Duy Long, Trương Ngọc Tâm*, 10T2, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Đặng Hữu Khanh*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Nam Định:** *Trần Huy Lực*, 11 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định; **Hà Tĩnh:** *Trần Thị Ngọc Ánh, Nguyễn Thị Thùy Linh*, 10A1, THPT Cù Huy Cận, Vũ Quang; **Quảng Bình:** *Nguyễn Phương Trang*, 10 Toán 2, *Lê Mỹ Duyên*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Phạm Bá Hoàng, Nguyễn Thị Bảo Ngọc*, 11 Toán 1, *Nguyễn Đức Phát*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Thành Phát*, 10T1, *Lê Minh Tâm*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm. **Sóc Trăng:** *Đậu Đức Quân*, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, TP. Sóc Trăng; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Nhật Hào*, 12T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu.

TRẦN HỮU NAM

Bài T10/506. *Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho 2^n+n^2+1 là số chính phương.*

Lời giải. (Của bạn *Lê Tuấn Nghĩa*, 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ, **Hưng Yên**).

1) Với $n=0$ thì $2^n+n^2+1=2$ không phải là số chính phương.

2) Với $n=1$ thì $2^n+n^2+1=4$ là số chính phương.

3) Với $n>1$: Nếu n lẻ thì $2^n+n^2+1 \equiv 2 \pmod 4$ nên 2^n+n^2+1 không phải là số chính phương. Nếu n chẵn: Giả sử $n=2k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$, ta có $2^{2k}+4k^2+1=a^2$ $(a \in \mathbb{N}^*)$ (1). Thử với $k \in \{1;2;3;4;5;6\}$, ta thấy chỉ có $k=1$ thỏa mãn (1). Với $k \geq 7$, bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được $2^{k-1}>k^2$. Do đó $2.2^k>4k^2$.

Vậy $2^{2k}+2.2^k+1>2^{2k}+4k^2+1>(2^k)^2$

$\Rightarrow (2^k+1)^2>a^2>(2^k)^2 \Rightarrow 2^k+1>a>2^k.$

Không có giá trị k nào thỏa mãn. Vậy $n=1$, $n=2$ là tất cả các giá trị cần tìm.

Nhận xét. Đây là một bài toán dễ. Có nhiều em tham gia giải và tất cả đều làm đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt. **Phú Thọ:** *Nguyễn Đăng Khoa,* 11T, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì; **Hà Nội:** *Đỗ Xuân Trọng,* 11 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Nam Định:** *Nguyễn Quốc Hiệu,* 11 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định; **Thanh Hóa:** *Đỗ Cao Bách Tùng*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn, TP. Thanh Hóa; **Quảng Bình:** *Đinh Đoàn Xuân Phương*, 12 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Thành Phát*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/506. *Cho dãy số nguyên dương* (a_n) $(n = 1, 2, ...)$ *tăng nghiêm ngặt. Đặt*

$$S_n = \frac{\sqrt{a_1}}{[a_1, a_2]} + \frac{\sqrt{a_2}}{[a_2, a_3]} + \frac{\sqrt{a_n}}{[a_n, a_{n+1}]}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

(với hai số nguyên x, y, ta kí hiệu [x, y] là bội số chung nhỏ nhất của x và y). Chứng minh rằng dãy số $(S_n), n = 1, 2, \ldots$ *có giới hạn hữu hạn khi* $n \to +\infty$.

Lời giải. (Theo ý lời giải của các bạn).

Từ giả thiết, ta có $1 \le a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1}$ với mọi $n \ge 1$ và $S_{n+1} = S_n + \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{[a_{n+1}, a_{n+2}]} > S_n$. Suy ra (S_n) là dãy tăng nghiêm ngặt. Tiếp theo, ta chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{\sqrt{n}}{[m,n]} < \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{m}} \quad (1), \text{ ứng với } m > n \ge 1.$$

Thật vậy, giả sử ƯCLN $(m,n) = d$ thì $m = dm_1$, $n = dn_1$ và $m_1 > n_1$. Vì $[m,n] = \frac{mn}{d} = dm_1n_1$ nên

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{dm_1n_1} < \frac{2}{\sqrt{d}}\left(\frac{1}{\sqrt{n_1}} - \frac{1}{\sqrt{m_1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{d}\sqrt{n_1}}{\sqrt{d}\, m_1n_1} < 2\frac{\sqrt{m_1} - \sqrt{n_1}}{\sqrt{m_1n_1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{m_1}} < 2\frac{m_1 - n_1}{\sqrt{m_1} + \sqrt{n_1}} \quad (2).$$

Bất đẳng thức (2) đúng vì $m_1 - n_1 \ge 1$ và

$$\frac{1}{\sqrt{m_1}} < \frac{2}{\sqrt{m_1} + \sqrt{n_1}} \le 2\frac{m_1 - n_1}{\sqrt{m_1} + \sqrt{n_1}}$$

nên (1) đúng. Áp dụng (1), ta thu được

$$S_n = \frac{\sqrt{a_1}}{[a_1, a_2]} + \frac{\sqrt{a_2}}{[a_2, a_3]} + \frac{\sqrt{a_n}}{[a_n, a_{n+1}]}$$

$$< 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}} - \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} - \frac{1}{\sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_n}} - \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}} - \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}\right) < \frac{2}{\sqrt{a_1}}.$$

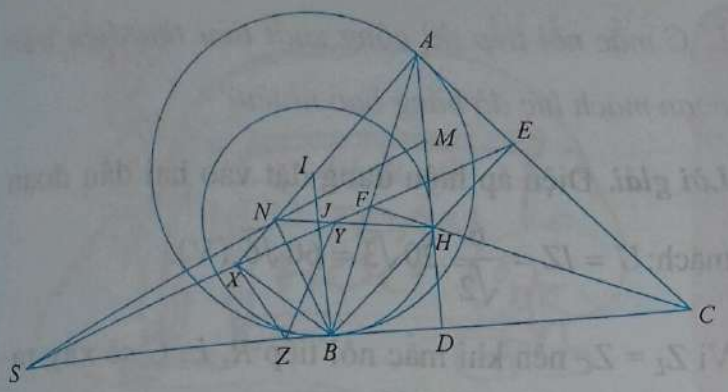
Ta thu được kết quả là dãy (S_n) tăng và bị chặn trên nên dãy số (S_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải đúng. **Hà Nội:** *Đỗ Xuân Trọng*, 11T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Phú Thọ:** *Nguyễn Đăng Khoa*, 11T, THPT chuyên Hùng Vương.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/506. *Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC). Hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Gọi I là tâm đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với BC và J là tâm đường tròn đi qua B, H và tiếp xúc với BC. Gọi M là trung điểm của AH, S = EF ∩ BC. Chứng minh rằng SM chia đôi IJ.*

Lời giải. Gọi D là giao điểm của AH và BC; N là giao điểm của AI và HJ; X, Y theo thứ tự là giao điểm của NA, NH và EF; Z là hình chiếu của N trên BC.



Dễ thấy tứ giác $AEHF$ nội tiếp. Từ đó, chú ý rằng $IA = IB; IB // AH$, suy ra

$$\widehat{NAB} = \widehat{IAB} = \widehat{IBA} = \widehat{HAB};$$

$$\widehat{XAB} = \widehat{IAB} = \widehat{IBA} = \widehat{BAH} = \widehat{FAH} = \widehat{FEH} = \widehat{XEB}.$$

Do đó AB là phân giác trong của tam giác AHN và tứ giác $AEBX$ nội tiếp (1). Từ đó, chú ý rằng $JH = JB; JB // AH$, suy ra:

$$\widehat{NHB} = \widehat{JHB} = \widehat{JBH} = \widehat{DHB};$$

$$\widehat{YHB} = \widehat{JHB} = \widehat{JBH} = \widehat{BHD} = \widehat{EHA} = \widehat{EFA} = \widehat{YFB}.$$

Do đó HB là phân giác ngoài của tam giác AHN và tứ giác $HFYB$ nội tiếp (2).

Từ (1) và (2) suy ra NB là phân giác ngoài của tam giác AHN (3). Từ (1) và (2) suy ra

$$\widehat{NXB} = \widehat{AXB} = 180° - \widehat{AEB} = 180^0 - 90^0 = 90^0;$$

$$\widehat{NYB} = 180° - \widehat{HYB} = 180° - \widehat{HFB} = 180^0 - 90^0 = 90^0.$$

Kết hợp với $\widehat{NZB} = 90^0$, suy ra X, Y, Z, N, B cùng thuộc đường tròn đường kính NB. Kết hợp với (3), suy ra ZN là phân giác của góc $\widehat{XZY}$ (4).

Từ (3) và (4), chú ý rằng $NZ // AH$; $MA = MH$; $ZN \perp ZS$ và X, Y, S thẳng hàng, suy ra:

$$N(XYMZ) = N(AHMZ)$$
$$= -1 = Z(XYSN) = N(XYSZ).$$

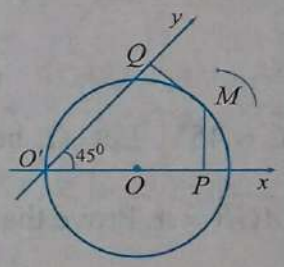
Do đó S, M, N thẳng hàng. Kết hợp với $IJ // AH$ và $MA = MH$, suy ra SM chia đôi IJ (đpcm).

Nhận xét. Lời giải trên của bạn *Nguyễn Trúc Như Bình*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh, **Đồng Tháp.** Các bạn sau đây có lời giải đúng nhưng không đơn giản như lời giải của bạn *Như Bình*. **Bắc Ninh:** *Nguyễn Tất Đạt*, 10T2, THPT chuyên Bắc Ninh, TP. Bắc Ninh; **Thanh Hóa:** *Đỗ Cao Bách Tùng*, 11T1, THPT chuyên Lam Sơn, TP. Thanh Hóa; **Long An:** *Phạm Đăng Khôi*, 10T1, THPT chuyên Long An; **Sóc Trăng:** *Lâm Khánh Hòa*, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, TP. Sóc Trăng; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Nhật Hào*, 12T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/506. *Một chất điểm M chuyển động tròn đều trên quỹ đạo tâm O và có chiều ngược kim đồng hồ. Hình chiếu của M trên trục Ox là điểm P dao động điều hòa theo phương trình* $x = 8\cos\left(10t - \frac{\pi}{6}\right)cm.$

Hỏi hình chiếu của M trên trục O'y với trục Ox góc 45^0 (xem hình vẽ) là Q có phương trình chuyển động y(t) như thế nào?



Lời giải. Dựa vào mối liên hệ giữa chuyển động tròn đều thì ở thời điểm $t = 0$ điểm M ở vị trí M_0 với bán kính OM_0 lập với trục Ox một góc $\frac{\pi}{6}$.

Kẻ thêm trục $O'y$ song song với trục Oy'. Hình chiếu của M trên trục Oy' sẽ dao động điều hòa với phương trình:

$$y' = 8\cos\left[10t - \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$= 8\cos\left(10t - \frac{5\pi}{12}\right)(\text{cm}).$$

Trên trục $O'y$, hình chiếu Q dao động xung quanh điểm có tọa độ: $y_0 = \frac{O'O}{\cos 45^0} = 4\sqrt{2}$.

Do đó hình chiếu Q trên trục $O'y$ sẽ dao động với phương trình: $y_Q = 4\sqrt{2} + 8\cos\left(10t - \frac{5\pi}{12}\right)(\text{cm})$.

Nhận xét. Không có bạn nào tham gia giải bài Vật lí này.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/506. *Có ba dụng cụ gồm điện trở thuần $R = 30\ \Omega$, cuộn cảm thuần L và tụ điện C. Đặt điện áp xoay chiều $u = U_0\cos(\omega t + \varphi)$ (V) lần lượt vào hai đầu đoạn mạch nối tiếp chứa R, L và chứa R, C. Khi đó cường độ dòng điện trong mạch $i_1 = 6\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{7}\right)$ (A) và $i_2 = 6\cos\left(\omega t + \frac{10\pi}{21}\right)$ (A). Đặt điện áp trên vào hai đầu đoạn mạch có R, L, C mắc nối tiếp thì công suất tiêu thụ điện trên đoạn mạch lúc đó bằng bao nhiêu?*

Lời giải. Điện áp hiệu dụng đặt vào hai đầu đoạn mạch: $U = IZ = \frac{6}{\sqrt{2}}.20\sqrt{3} = 60\sqrt{6}$ (V).

Vì $Z_L = Z_C$ nên khi mắc nối tiếp R, L, C sẽ xảy ra cộng hưởng điện. Khi đó

$$\mathcal{P} = \frac{U^2}{R} = \frac{(60\sqrt{6})^2}{30} = 720\,(\text{W}).$$

Nhận xét: Rất tiếc là không bạn nào có lời giải đúng cho đề ra kì này!

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

PROBLEMS ... *(Tiếp theo trang 23)*

Problem T8/510. Given a triangle ABC with $\widehat{C} = 45^\circ$. Let G be the centroid of ABC. Let $\widehat{AGB} = \alpha$. Prove that $\frac{\sqrt{2}}{\sin A \sin B} + 3\cot\alpha = 1$.

Problem T9/510. Let a, b, c be positive number such that $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Show that

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}\right).$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/510. For any real numbers a, b, c, we let $T(a, b, c) = |a - b| + |b - c| + |c - a|$.

Consider a sequence (*) of integers $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$ satisfying the conditions: there exists a polynomial $f(x)$ with integral coefficients so that $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{12})$ are different and

$$880 < \sum_{\substack{1 \le i < j < k \le 12 \\ i,j,k \in \mathbb{N}}} T\big(f(x_i), f(x_j), f(x_k)\big) \le 3758.$$

Show that from the sequence (*) we can always extract an arithmetic progression with at least four terms.

Problem T11/510. Find all functions $h(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ which satisfy all of the following conditions

i) $h(2019) = 0$;

ii) $h(x+1) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}$;

iii) $3^{x+y}\left[h(x)h(y) + h(x+y)\right] =$

$= 3^x(y+1)h(x) + 3^y(x+1)h(y) + 3^{xy}h(xy), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Problem T12/510. Given an acute triangle ABC inscribed in a circle (Ω). The points E, F are on the sides CA, AB respectively so that the quadrilateral $BCEF$ is cyclic. The perpendicular bisector of CE intersects BC, EF at N, R respectively. The perpendicular bisector of BF intersects BC, EF at M, Q respectively. Let K be the reflection point of E over the line RM. Let L be the reflection point of F over the line QN. Suppose that the intersection between RK and QB is S; the intersection between QL and RC is T.

3) Show that four points Q, R, S, T both belong to a circle, say (ω).

4) Show that (ω) and (Ω) are tangent to each other.

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(College of Science Vietnam National University, Hanoi)

VỀ XUẤT XỨ VÀ CÁC PHIÊN BẢN CỦA BÀI TOÁN TRĂM TRÂU TRĂM CỎ

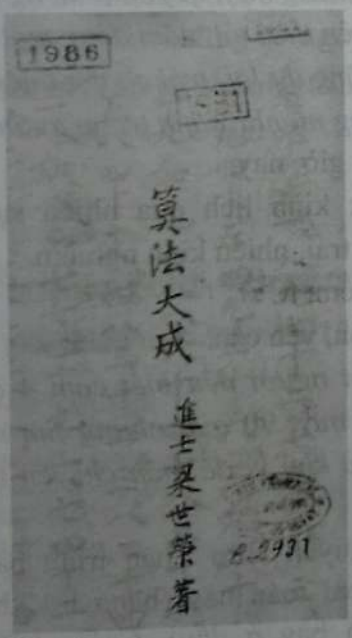
ĐOÀN THỊ LỆ (*National Tsing-Hua University, Taiwan*)
TẠ DUY PHƯỢNG (*Viện Toán học*)
CUNG THỊ KIM THÀNH, PHAN ÁNH TUYẾT (*Thạc sĩ Hán Nôm*)

(*Tiếp theo kì trước*)

3. Bài toán dạng *Trăm trâu trăm cỏ* trong các sách toán Việt Nam

Dạng toán *Trăm trâu trăm cỏ* đã được phát biểu trong *Toán pháp đại thành* [5] dưới dạng sau.

Bài 12 (Lương Thế Vinh, *Toán pháp đại thành*, [5]) *Số voi, ngựa và dê cộng lại được 1000, (biết) (nuôi một con) voi (cần) 9 người, chăm (một con) ngựa (cần) 3 người, mỗi người chăn 20 con dê. Tổng số người cũng là 1000. Thử hỏi những người biết tính toán bốn phương, có bao nhiêu voi, ngựa, bao nhiêu người nuôi?*



Trang đầu của *Toán pháp đại thành* có ghi: Tiến sĩ Lương Thế Vinh trứ (biên soạn).

Giải (theo ngôn ngữ hiện đại). Gọi số voi, ngựa và dê tương ứng là x, y, z (là những số nguyên, không âm). Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z=1000 \\ 9x+3y+\dfrac{z}{20}=1000 \end{cases} \quad (2).$$

Ta có: $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=1000-x \\ 3y+\dfrac{z}{20}=1000-9x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+z=1000-x \\ 60y+z=20000-180x \end{cases} \Rightarrow 59y=19000-179x.$$

$$\Rightarrow y=\frac{19000-179x}{59}=322-3x+\frac{2(1-x)}{59}.$$

Vì x, y nguyên nên $1-x=59k$, k là số nguyên.

Suy ra $x=1-59k$. Ta có:

$$y=\frac{19000-179x}{59}=322-3x+\frac{2(1-x)}{59}=319+179k;$$

$$z=1000-x-y$$
$$=1000-(1-59k)-(319+179k)=680-120k.$$

Vì $0 \le y, z \le 1000$ nên

$$\begin{cases} 0 \le y=319+179k \le 1000 \\ 0 \le z=680-120k \le 1000 \end{cases}.$$

Suy ra: $\begin{cases} -\dfrac{319}{179} \le k \le \dfrac{681}{179} \\ -\dfrac{8}{3} \le k \le \dfrac{17}{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=-1,0,1,2,3 \\ k=-2,-1,0,1,\ldots,5 \end{cases} \Leftrightarrow k \in \{-1,0,1,2,3\}.$$

Vì $0 \le x \le 1000$ nên $0 \le x=1-59k \le 1000$.

Suy ra: $-16{,}9 \le k \le \dfrac{1}{59}$ hay $k=-16,-15,\ldots,0$.

Do đó k chỉ có thể bằng 0 hoặc -1.

Với $k=0$ ta có $x=1, y=319, z=680$.

Khi ấy cần 9 người chăn voi, 957 người chăn ngựa và 34 người chăn dê.

Với $k=-1$ ta có $x=60, y=140, z=800$. Khi ấy cần 540 người chăn voi, 420 người chăn ngựa và 40 người chăn dê.

Nhận xét 1. *Toán pháp đại thành* chỉ cho một đáp số $x=60, y=140, z=800$.

Nhận xét 2. Lời giải của Lương Thế Vinh không đúng trong trường hợp tổng quát (xem phân tích trong [3]). Nhưng trong [3], A. Volkov cũng viết: *A preliminary inquiry into the history of the "one hundred fowls problem" suggests that the parameters found in the Vietnamese treatise* $(a=9, b=3, c=20, N=1000)$ *are not found in any other medieval treatise in the world.*

The Vietnamese problem certainly has a strong local taste due to the mention of "battle elephants," but exactly when it was introduced and adopted by local mathematicians remains obscure. It may have been transmitted to Vietnam from China, or possibly from other cultural areas (from India or the countries of Islam).

Dịch: "Khảo sát ban đầu về lịch sử bài toán 100 con gà cho thấy các tham số $a=9, b=3, c=20, N=1000$ trong sách Việt Nam không tìm thấy trong các sách khác trên thế giới.

Bài toán của Việt Nam tất nhiên mang âm hưởng địa phương mạnh mẽ vì nhắc đến voi trận, nhưng chính xác khi nào nó được du nhập và chấp nhận bởi các nhà toán học địa phương thì còn chưa rõ. Có thể nó đã được truyền từ Trung Hoa, hoặc có thể từ một nền văn hóa khác (từ Ấn Độ hoặc các nước theo đạo Hồi)."

Qua đây ta thấy, nhà toán học đầu tiên của Việt Nam Lương Thế Vinh, tác giả của *Toán pháp đại thành*, tuy không phải là người đầu tiên phát biểu và giải bài toán dạng *Trăm trâu trăm cỏ*, và Ông chỉ tìm ra một đáp số, nhưng Ông đã sáng tạo trong phát biểu và giải bài toán dạng *phương trình vô định* với tham số lớn *không gặp ở đâu trên thế giới*. Bài toán *voi, ngựa, dê* của Lương Thế Vinh thể hiện sự độc lập và tính độc đáo trong nghiên cứu toán học của Lương Thế Vinh.

Bài 13 (*Em đi chợ phiên*). Bài toán-thơ *Em đi chợ phiên* có lẽ lần đầu tiên được trình bày trong cuốn sách toán chữ Hán-Nôm *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục* (Một điều tâm đắc về toán của Ý Trai) được Ý Trai Nguyễn Hữu Thận khởi thảo năm 1812 và hoàn thành năm 1829. Trong Quyển 7, trang 178, [4], Ông viết:

Có bài ca Tây giang nguyệt rằng: Đưa ra 1 mạch tiền, mua trăm quả bưởi, quýt, cam. Cam hồng mỗi quả giá 3 văn, bưởi mỗi quả là 5 văn, quýt ba quả một văn, giá đủ. Mạn phép chuyển thành bài ca để bàn luận. Người giải được đề toán này, khen là diệu thủ (cực giỏi). *Đề này ban đầu có một người đặt ra rằng* (đoạn dưới đây được viết bằng chữ Nôm):

"Nàng bây[1] *lịch sự*[2]*, quê chợ đều khan*[3]*.*
Yêu[4] *gửi một tiền, mua trăm trái tốt.*
Cam ba đồng một, quýt một đồng năm.
Thanh yên tươi tốt, năm đồng một trái.
Tiền không dư lại, trái chẳng thiếu đi
Nên đấng nữ nhi, sánh trang quân tử.

[1] *Bây*: bây giờ, nay.

[2] *Lịch sự*: kinh lịch qua nhiều sự việc, chỉ người từng trải, nhiều kinh nghiệm.

[3] *Khan*: hiếm, ít.

[4] *Yêu*: muốn, yêu cầu.

Đề này mọi người đều biết cam 4 quả, thanh yên 6 quả, quýt 90 quả nhưng tìm ra cách để giải cũng là khó vì đề toán chuyển thành khúc ca.

Sau đó Nguyễn Hữu Thận trình bày phương pháp giải bài toán này (bằng lời khá dài nên không trình bày ở đây). Cuối cùng Ông kết luận: *"Phép toán này đã được dùng để hỏi trong nhiều sách, không thể không đúng, phép tính chắc chắn có thể áp dụng mà không đáng ngờ. Cái hay của nó ở chỗ tìm cam thì lấy cam bao nhiêu quả nhân với giá cam bao nhiêu tiền. Lại bội lên mà tiến 1 vị, dùng làm phép tính.*

Không tinh tường thì không thể đạt đến độ này."

Giải (theo ngôn ngữ hiện đại). Gọi số cam, thanh yên và quất tương ứng là x, y, z. Theo bài ra ta có hệ phương trình (1 tiền = 60 đồng):

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 3x+5y+\dfrac{z}{5}=60 \end{cases}.$$

Bài toán có duy nhất nghiệm (là đáp số Nguyễn Hữu Thận đã tìm ra): $x=4, y=6, z=90$.

Theo Lương An [1], Nguyễn Hữu Thận là tác giả của nhiều bài toán-thơ đã được lưu truyền ở Quảng Trị quê Ông, trong đó có bài *Em đi chợ phiên*, nhưng có hơi khác với bài trên:

Bài 13b.

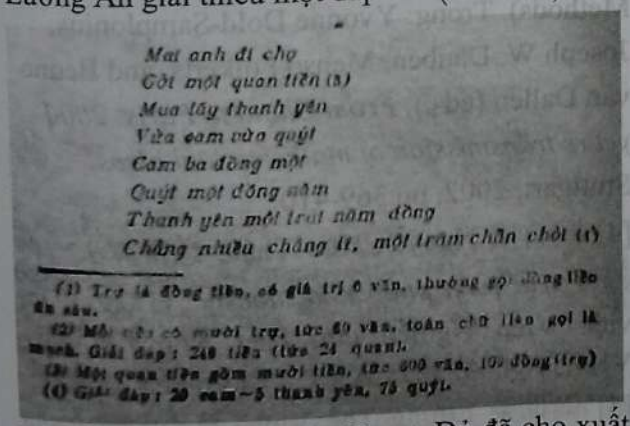
Mai anh đi chợ *Vừa cam vừa quýt*
Gửi một quan tiền *Cam ba đồng một*
Mua lấy thanh yên *Quýt một đồng năm*
Thanh yên một trái năm đồng
Chẳng nhiều thì ít, một trăm chẵn chòi.

Giải. 1 quan = 600 tiền = 100 đồng trự (đồng trự: 1 đồng trự ăn 6 tiền). Gọi số cam, thanh yên và quýt là x, y, z (là những số nguyên, không âm). Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 3x+\dfrac{y}{5}+5z=100 \end{cases}.$$

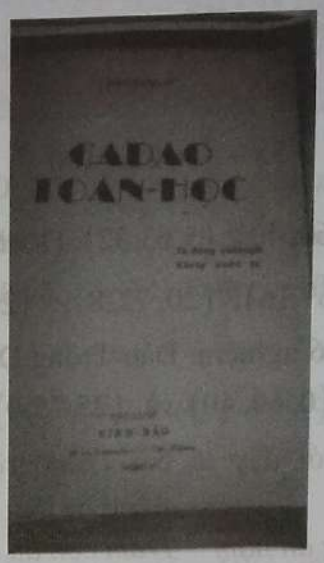
Đáp số: $(20, 5, 75)$; $(12, 8, 80)$.

Lương An giải thiếu một đáp số: $(12, 8, 80)$.


Mai anh đi chợ
Gửi một quan tiền (3)
Mua lấy thanh yên
Vừa cam vừa quýt
Cam ba đồng một
Quýt một đồng năm
Thanh yên một trái năm đồng
Chẳng nhiều chẳng ít, một trăm chẵn chòi (4)

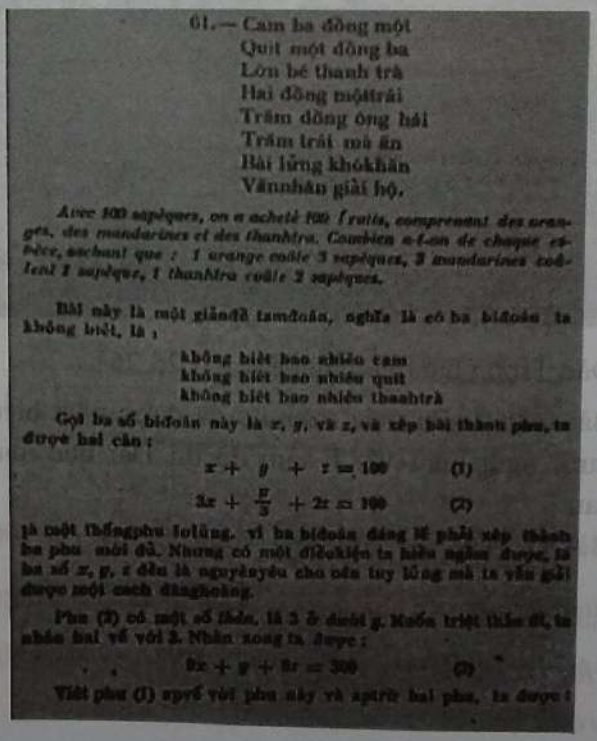
(1) Trự là đồng tiền, có giá trị 6 văn, thường gọi đồng tiền đi sáu.
(2) Mỗi vần có mười trự, tức 60 văn, toán cổ điển gọi là mạnh. Giải đáp: 240 tiền (tức 24 quan).
(3) Một quan tiền gồm mười tiền, tức 600 văn, 100 đồng (trự)
(4) Giải đáp: 20 cam–5 thanh yên, 75 quýt.

Năm 1950, Nhà văn Đào Trọng Đủ đã cho xuất bản cuốn sách *Ca dao toán học* [2], trong đó có chứa một số bài toán-thơ. Có lẽ những bài toán-thơ này đã tồn tại trong các sách hoặc trong dân gian từ trước khi được Đào Trọng Đủ đưa vào *Ca dao toán học* năm 1950. Nhưng [2] là tài liệu cũ nhất có các bài toán thơ mà chúng tôi biết.



Tờ bìa *Ca dao toán học* (Đào Trọng Đủ, 1950).

Bài 13c. Trong [2] (Bài 61, trang 100) cũng có bài toán thơ *Em đi chợ phiên* với các tham số khác $(a=3, b=\dfrac{1}{3}, c=\dfrac{1}{2}, N=100)$ và với lời dịch sang tiếng Pháp:


61.— Cam ba đồng một
Quít một đồng ba
Lớn bé thanh trà
Hai đồng một trái
Trăm đồng ông hái
Trăm trái mà ăn
Bài lững khókhăn
Vănnhân giải hộ.

Avec 100 sapèques, on a acheté 100 fruits, comprenant des oranges, des mandarines et des thanhtra. Combien a-t-on de chaque espèce, sachant que : 1 orange coûte 3 sapèques, 3 mandarines coûtent 1 sapèque, 1 thanhtra coûte 2 sapèques.

Bài này là một giảđề tamđoán, nghĩa là có ba bíđoán ta không biết, là :

không biết bao nhiêu cam
không biết bao nhiêu quít
không biết bao nhiêu thanhtrà

Gọi ba số bíđoán này là x, y, và z, và xếp bài thành phu, ta được hai câu :

$$x + y + z = 100 \quad (1)$$

$$3x + \frac{y}{3} + 2z = 100 \quad (2)$$

là một thốngphu lolũng. vì ba bíđoán đáng lẽ phải xếp thành ba phu mới đủ. Nhưng có một điềukiện ta hiểu ngầm được, là ba số x, y, z đều là nguyênyêu cho nên tuy lũng mà ta vẫn giải được một cách đàngkoàng.

Phu (2) có một số lẻn, là 3 ở dưới y. Muốn triệt tiêu đi, ta nhân hai vế với 3. Nhân xong ta được :

$$9x + y + 6z = 300 \quad (3)$$

Viết phu (1) sauvế với phu này và aptrừ hai phu, ta được :

Cam ba đồng một *Trăm đồng ông hái*
Quýt một đồng ba *Trăm trái mà ăn*
Lớn bé thanh trà *Bài lửng khó khăn*
Hai đồng một trái *Văn nhân giải hộ.*

Giải. Gọi x, y, z là số cam, quýt và thanh trà. Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 3x+\dfrac{y}{3}+2z=100 \end{cases}.$$

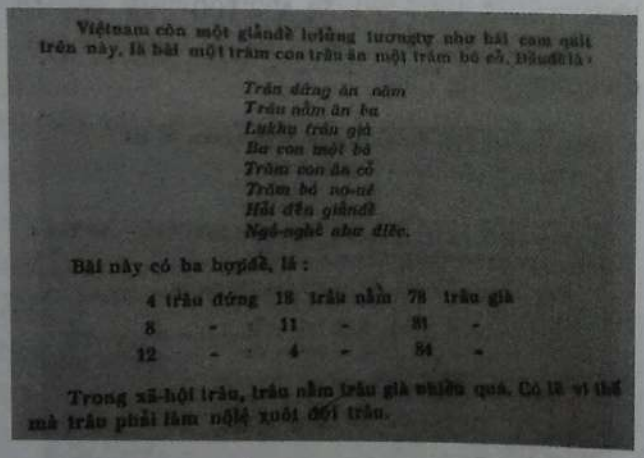
Đáp số: $(0,60,40)$; $(5,63,32)$; $(10,66,24)$; $(15,69,16)$; $(20,72,8)$; $(25,75,0)$.

Bài toán có 6 nghiệm. Đào Trọng Đủ giải thiếu hai nghiệm $(0,60,40)$ và $(25,75,0)$.

Bài 14. Dưới đây là bài *Trăm trâu trăm cỏ* trong [2].

Trâu đứng ăn năm *Trăm con ăn cỏ*
Trâu nằm ăn ba *Trăm bó no nê.*
Lụ khụ trâu già *Hỏi đến giản đề*[1]
Ba con một bó *Ngô nghê như điếc.*

[1] giản đề: lời giải.


Việtnam còn một giảnđề lưlửng lươngtỷ như bài cam quít trên này, là bài một trăm con trâu ăn một trăm bó cỏ. Đâuđề là :

Trâu đứng ăn năm
Trâu nằm ăn ba
Lụkhụ trâu già
Ba con một bó
Trăm con ăn cỏ
Trăm bó no-nê
Hỏi đến giảnđề
Ngô-nghê như điếc.

Bài này có ba bợđề, là :

4 trâu đứng	18 trâu nằm	78 trâu già
8 -	11 -	81 -
12 -	4 -	84 -

Trong xã-hội trâu, trâu nằm trâu già nhiều quá. Có là vì thế mà trâu phải làm nộlệ xuôi đối trâu.

Đào Trọng Đủ thiếu nghiệm: $(0,25,75)$.

Bài toán *Trăm trâu trăm cỏ* đã được phát biểu dưới ngôn ngữ vật lí làm đề thi Đại học như sau.

Bài 15 (Thi Đại học môn Toán, 1976). *Có 100 điện trở loại 5Ω, 3Ω và $\frac{1}{3}\Omega$ được mắc nối tiếp. Hỏi có bao nhiêu cách mắc để được tổng điện trở là 100Ω?*

4. Đôi lời kết: Bài viết liệt kê số lượng đủ nhiều các phiên bản của bài toán dạng *Trăm trâu trăm cỏ*. Hi vọng tài liệu có thể được sử dụng như một chuyên đề tương đối hoàn chỉnh và phong phú về bài toán này trong ngoại khóa toán.

Đã phải mất hàng nghìn năm để đi đến phương pháp hiện đại giải hệ phương trình nghiệm nguyên (tất cả các bài toán cổ trình bày trong bài viết đều giải không theo phương pháp hiện đại, mà chủ yếu theo cách *thử dần*). Sẽ thú vị và ý nghĩa hơn nếu *phân tích sự phát triển tư duy và phương pháp giải toán theo lịch sử giải bài toán*. Điều này chưa được thực hiện ở đây.

Tìm hiểu xuất xứ các bài toán toán cổ sẽ tránh được nhầm lẫn trong trích dẫn tài liệu. Thí dụ, trong một quyển sách đã viết: "**Lưu ý**. Sách *Đại thành toán pháp* của Lương Thế Vinh từ thế kỉ XV đã có bài toán *Trăm trâu trăm cỏ* nói trên" là không có cơ sở.

Tài liệu dẫn

[1] Lương An, Nguyễn Hữu Thận (1757-1831), trong *Danh nhân Bình Trị Thiên* (Tập I), Nhà Xuất bản Thuận Hóa, Huế, 1986, trang 106-126.

[2] Đào Trọng Đủ, *Ca dao toán học*, Nhà sách Vĩnh Bảo, Sài Gòn, 1950.

[3] A. Volkov, *On the origins of the* Toan phap dai thanh (Great Compendium of Mathematical Methods). Trong: Yvonne Dold-Samplonius, Joseph W. Dauben, Menso Folkerts, and Benno van Dallen (eds.), *From China to Paris: 2000 years transmission of mathematical ideas*, Stuttgart, 2002, pp.369-410.

[4] 阮有慎 Nguyễn Hữu Thận, 意齋算法一得錄 *Ý trai toán pháp nhất đắc lục* (1829), Thư viện Viện Nghiên cứu Hán Nôm: A.1336; VHv.1184; A. 982; A.1336/a (3 phiên bản).

[5] 梁世榮 Lương Thế Vinh, 算法大成 *Toán pháp đại thành*, Thư viện Viện Nghiên cứu Hán Nôm, A.2931.

ÁP DỤNG MỘT SỐ MÔ HÌNH CỦA ĐƯỜNG ĐỐI TRUNG TRONG GIẢI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG

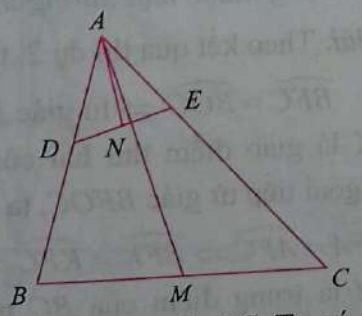
PHẠM ĐOAN NGỌC

(GV THPT chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ)

Mô hình *"Đường đối trung"* là một trong những công cụ hiệu quả để định hướng và tìm ra lời giải trong nhiều bài toán hình học. Tuy nhiên, để phát hiện được dạng hình nào có thể sử dụng các tính chất của "*Đường đối trung*" vẫn còn là khó khăn của nhiều học sinh. Bài viết này giới thiệu hai mô hình thường gặp của "*Đường đối trung*" cùng một số bài tập áp dụng nhằm giúp chúng ta định hướng tốt trong giải quyết các bài toán hình học có mô hình như thế, đồng thời có thể dựa vào đó để khai thác, mở rộng thêm nhiều bài toán mới. Chúng ta cùng bắt đầu với bài toán sau:

Bài toán 1. (*Mô hình đường đối song*) *Cho tam giác ABC. Gọi D, E lần lượt là các điểm thuộc AB, AC sao cho DE là đường đối song của BC, N thuộc DE. Khi đó, AN là đường đối trung của tam giác ABC khi và chỉ khi N là trung điểm của DE.*

Chứng minh.



Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Ta có AN là đường đối trung của tam giác ABC khi và chỉ khi $\widehat{DAN} = \widehat{CAM} \Leftrightarrow \Delta ADN \sim \Delta ACM$ (1)

Mà M là trung điểm của BC nên (1) $\Leftrightarrow N$ là trung điểm của DE.

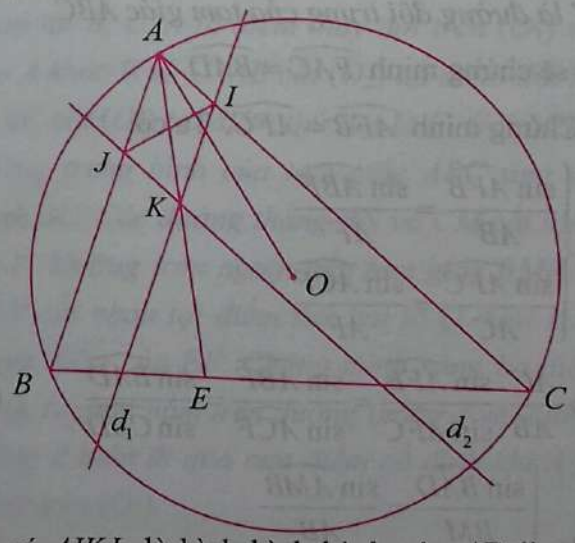
Kết luận: *Đường đối trung của tam giác ABC xuất phát từ A là tập hợp các trung điểm của DE với DE là đường đối song của BC.*

Chú ý: *AN là đường đối trung của tam giác ABC thì AN là đường trung tuyến của tam giác ADE.*

Ta cùng xét một số thí dụ sau:

Thí dụ 1. *Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O), có AE là đường đối trung ($E \in BC$), K thuộc đoạn AE. Qua K vẽ hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt song song với AB, AC. Gọi I là giao điểm của d_1 và AC, J là giao điểm của d_2 và AB. Chứng minh rằng IJ vuông góc với AO.*

Lời giải.

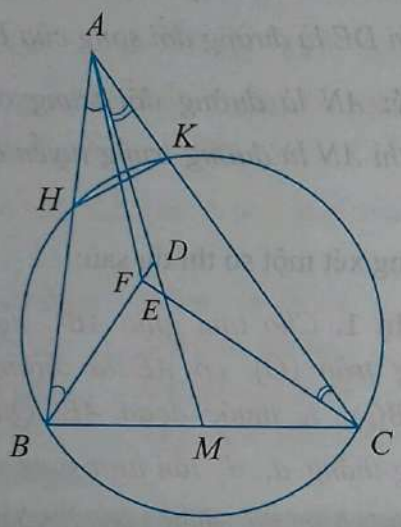


Ta có $AIKJ$ là hình bình hành nên AE đi qua trung điểm T của IJ. Mà AE là đường đối trung

của tam giác ABC nên IJ là đường đối song của BC. Vì IJ song song với tiếp tuyến tại A của (O) nên suy ra IJ vuông góc với AO.

Thí dụ 2. *Cho tam giác ABC nhọn và không cân. M là trung điểm của BC. D và E là các điểm thuộc AM sao cho AD = BD, AE = EC. Gọi F là giao điểm của DB và CE. Đường tròn qua B và C cắt cạnh AB, AC lần lượt tại H, K. Chứng minh rằng AF đi qua trung điểm của HK.*

Lời giải.



Nhận xét: *Ta thấy HK đối song với BC, M là trung điểm của BC. Do đó, để chứng minh AF đi qua trung điểm của HK, ta cần chứng minh AF là đường đối trung của tam giác ABC.*

Ta sẽ chứng minh $\widehat{FAC} = \widehat{BAD}$.

- Chứng minh $\widehat{AFB} = \widehat{AFC}$. Ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{\sin\widehat{AFB}}{AB} = \dfrac{\sin\widehat{ABF}}{AF} \\ \dfrac{\sin\widehat{AFC}}{AC} = \dfrac{\sin\widehat{ACF}}{AF} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AB}.\frac{\sin\widehat{AFB}}{\sin\widehat{AFC}} = \frac{\sin\widehat{ABF}}{\sin\widehat{ACF}} = \frac{\sin\widehat{BAD}}{\sin\widehat{CAD}} \qquad (1)$$

Mà $\begin{cases} \dfrac{\sin\widehat{BAD}}{BM} = \dfrac{\sin\widehat{AMB}}{AB} \\ \dfrac{\sin\widehat{CAD}}{MC} = \dfrac{\sin\widehat{AMC}}{AC} \end{cases}$

nên ta có: $\dfrac{\sin\widehat{BAD}}{\sin\widehat{CAD}} = \dfrac{AC}{AB}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{\sin\widehat{AFB}}{\sin\widehat{AFC}} = 1$

$$\Rightarrow \sin\widehat{AFB} = \sin\widehat{AFC} \Rightarrow \widehat{AFB} = \widehat{AFC}.$$

- Chứng minh $\widehat{FAC} = \widehat{BAD}$:

Ta có:

$$\widehat{BFC} = \widehat{FDE} + \widehat{FED} = 2\widehat{BAD} + 2\widehat{EAC}$$

$= 2\widehat{BAC} = \widehat{BOC}$ (với O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC)

$\Rightarrow \widehat{AFB} + \widehat{AFC} = 360^0 - \widehat{BFC}$

$\Rightarrow \widehat{FAC} + \widehat{FCA} = 180^0 - \widehat{AFC}$

$= \widehat{BAC} = \widehat{BAD} + \widehat{CAD}$

$\Rightarrow \widehat{FAC} = \widehat{BAD}$.

Từ đó AF là đường đối trung của ΔABC

$\Rightarrow AF$ qua trung điểm của HK.

Từ thí dụ 2, ta có kết quả sau

Thí dụ 3 (USA MO 2008). *Cho tam giác ABC nhọn và không cân, đường trung trực của AB và AC lần lượt cắt trung tuyến AM tại D và E. Gọi F là giao điểm của BD và CE; N, P lần lượt là trung điểm của AB và AC; O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng N, F, O, P cùng thuộc một đường tròn.*

Lời giải. Theo kết quả thí dụ 2, ta có:

$\widehat{BFC} = \widehat{BOC} \Rightarrow$ tứ giác $BFOC$ nội tiếp.

Gọi K là giao điểm thứ hai của AF và đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFOC$, ta có:

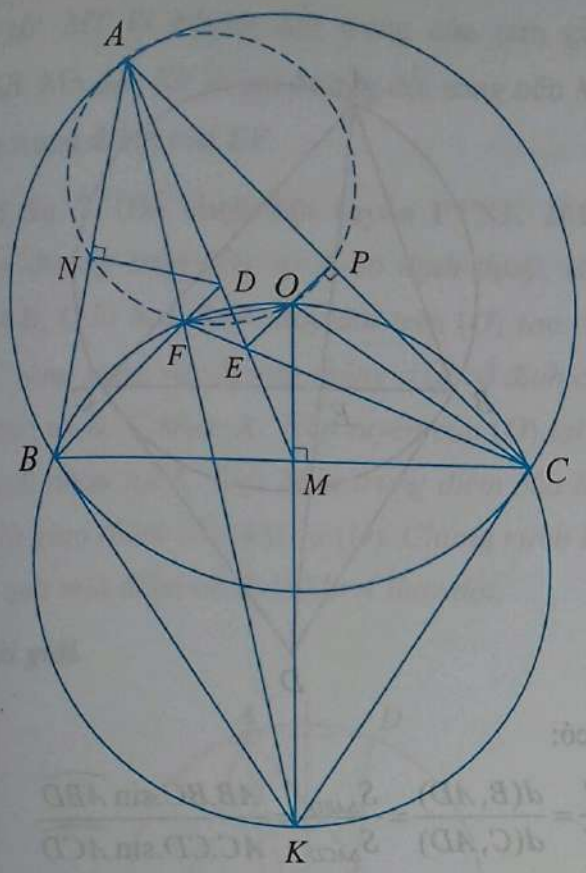
$\widehat{BFA} = \widehat{AFC} \Rightarrow \widehat{BFK} = \widehat{KFC} \Rightarrow KB = KC$.

Do M là trung điểm của BC nên $KM \perp BC$, suy ra K, M, O thẳng hàng và KO là đường kính của đường tròn ngoại tiếp $BFOC$

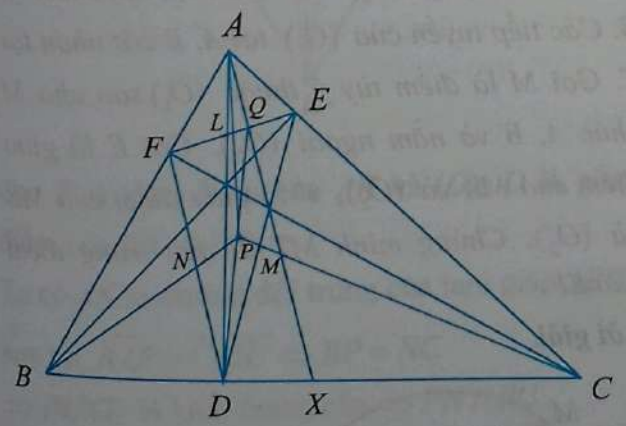
$\Rightarrow \widehat{KFO} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AFO} = 90^0$

$\Rightarrow F$ thuộc đường tròn đường kính AO.

Mà N, P thuộc đường tròn đường kính AO nên N, F, O, P thuộc đường tròn đường kính AO.



Thí dụ 4. *Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AD, BE, CF . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của DE, DF. P là giao điểm của BN và CM, Q là giao điểm của DP và EF. Chứng minh rằng* $\widehat{PAB} = \widehat{QAC}$.



Lời giải. Vì *M, N* lần lượt là trung điểm của *DE, DF* nên *BN, CN* là đường đối trung của tam giác *ABC*. Do đó, *P* là điểm Lemoine của tam giác *ABC*. Vậy *AP* là đường đối trung của tam giác *ABC*. Gọi *L* là trung điểm của *EF*, *X* là trung điểm của *BC*, *Q'* là giao điểm của *AX* và *EF*. Khi đó, *AQ'* là đường đối trung của tam giác *AEF*. Vậy $\widehat{LAF} = \widehat{Q'AE}$ nghĩa là $\widehat{PAB} = \widehat{QAC}$. Suy ra *D, P, Q'* thẳng hàng.

Gọi *P'* là giao điểm của *AL* và *DQ'*. Khi đó, *D, P, Q'* thẳng hàng khi và chỉ khi *P'* là điểm Lemoine của tam giác *ABC*.

Gọi (*O*) là đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*, *S* là giao điểm của các tiếp tuyến với (*O*) tại *B, C*, *V* là giao điểm của *AL* và *BC*. Khi đó ta có *A, L, V, S* thẳng hàng.

Dễ thấy $XE = XF$, mà $LE = LF$ nên $XL \perp EF$.

Ta có: $\widehat{LQ'X} = \widehat{AQ'E} = \widehat{AVB} = \widehat{LVB}$.

Suy ra tứ giác *LVXQ'* nội tiếp. Mà $XL \perp EF$ nên $Q'V \perp BC$. Do đó, $Q'V \,//\, AD$.

Theo định lý Thales ta có:

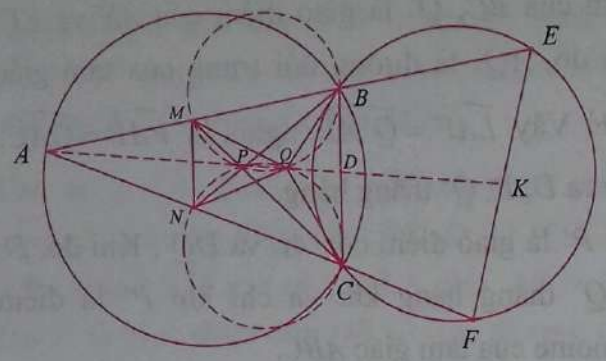
$$\frac{\overline{P'A}}{\overline{P'V}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{Q'V}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{XS}} = \frac{\overline{XS}}{\overline{Q'V}}$$

$$= \frac{\overline{VA}}{\overline{VS}} \cdot \frac{\overline{AS}}{\overline{AV}} = -\frac{\overline{SA}}{\overline{SV}}.$$

Suy ra $(AVP'S) = -1 = (AVPS)$ hay $P \equiv P'$.

Thí dụ 5. *Cho hai đường tròn* $(O_1),(O_2)$ *cắt nhau tại B, C. A là điểm thay đổi trên* (O_1) *sao cho A khác B và C. AB cắt* (O_2) *tại điểm thứ hai E, AC cắt* (O_2) *tại điểm thứ hai là F. Gọi MN là đường trung bình của tam giác ABC ứng với cạnh BC. Các đường thẳng BN và CM cắt nhau tại P. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BMP và CNP cắt nhau tại điểm thứ hai là Q. Gọi K là trung điểm của EF. Chứng minh rằng ba điểm A, Q, K cùng nằm trên đường thẳng d và đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định khi A di động trên* (O_1).

Lời giải.



Nhận xét: *Vì BC là đường đối song của EF, mà K là trung điểm của EF nên AK là đường đối trung của tam giác ABC. Vậy ta cần chứng minh AQ là đường đối trung của tam giác ABC, từ đó dễ dàng suy ra d đi qua điểm cố định.*

Ta có phép vị tự quay tâm Q biến B thành M và biến N thành C nên suy ra $\Delta BQM \sim \Delta NQC$.

Gọi D là giao điểm của AQ và BC.

Ta có: $$\frac{DB}{DC}=\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ADC}}=\frac{AB.d(D,AB)}{AC.d(D,AC)}$$
$$=\frac{AB.d(Q,AB)}{AC.d(Q,AC)}=\frac{AB.d(Q,MB)}{AC.d(Q,MC)}$$
$$=\frac{AB.MB}{AC.CN}=\frac{AB^2}{AC^2}.$$

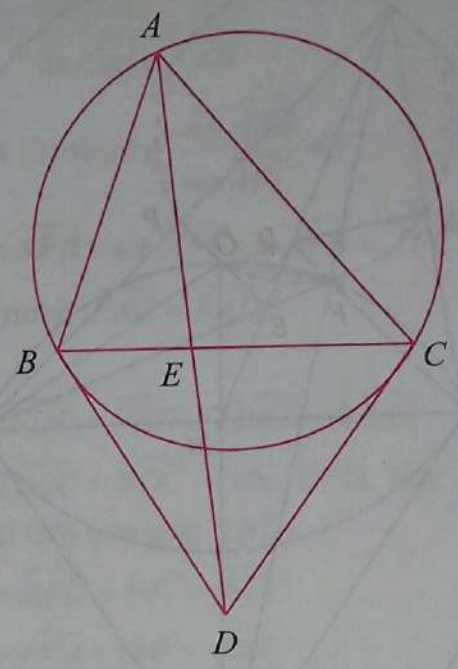
Suy ra AQ là đường đối trung của tam giác ABC. Vậy A, Q, K thẳng hàng hay A, Q, K cùng nằm trên đường thẳng d.

Từ đó d đi qua giao điểm của hai tiếp tuyến tại B, C của đường tròn (O) (xem Bài toán 2).

Bài toán 2 (*Mô hình cực và đối cực*) *Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O), E là điểm thuộc cạnh BC. Khi đó, AE là đường đối trung của tam giác ABC khi và chỉ khi AE qua cực của BC đối với đường tròn (O).*

Chú ý: *Cực của BC đối với đường tròn (O) $(B,C\in(O))$ là giao điểm của hai tiếp tuyến của (O) tại B và C.*

Chứng minh. Giả sử các tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại D và E là giao điểm của AD với BC. Ta sẽ chứng minh: $\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}}=-\frac{AB^2}{AC^2}$.



Ta có:

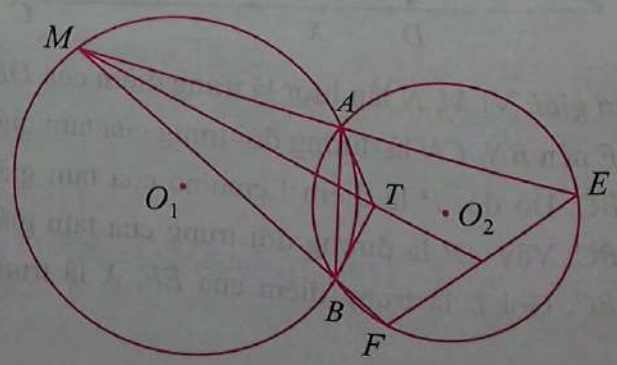
$$\frac{EB}{EC}=\frac{d(B,AD)}{d(C,AD)}=\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}}=\frac{AB.BC.\sin\widehat{ABD}}{AC.CD.\sin\widehat{ACD}}$$
$$=\frac{AB.\sin\widehat{ABD}}{AC.\sin\widehat{ACD}}=\frac{AB.\sin\widehat{ACB}}{AC.\sin\widehat{ABC}}=\frac{AB^2}{AC^2}.$$

Vậy AD là đường đối trung của tam giác ABC.

Ta xét các thí dụ sau:

Thí dụ 6 (St. Petersburg 1997). *Cho hai đường tròn $(O_1),(O_2)$ cắt nhau tại hai điểm A, B. Các tiếp tuyến của (O_1) tại A, B cắt nhau tại T. Gọi M là điểm tùy ý thuộc (O_1) sao cho M khác A, B và nằm ngoài (O_2). Gọi E là giao điểm của MA và (O_2), F là giao điểm của MB và (O_2). Chứng minh MT đi qua trung điểm của EF.*

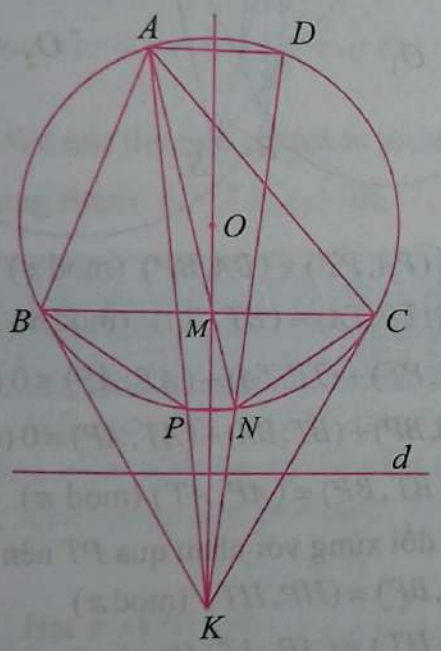
Lời giải.



Ta có: MT là đường đối trung của tam giác MAB. Mà AB, EF là hai đường đối song nên MT qua trung điểm của EF.

Thí dụ 7. (Đề chọn đội tuyển PTNK 2010) *Cho đường tròn (O) và A cố định thuộc (O). Gọi B, C là hai điểm thay đổi trên (O) sao cho BC song song với đường thẳng d (d cố định cho trước và B, C khác A. Tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau tại K. Gọi M là trung điểm của BC, N là giao điểm của AM và (O). Chứng minh KN đi qua một điểm cố định khi A thay đổi.*

Lời giải.



Gọi P là giao điểm của AK và (O), D là giao điểm của KN và (O).

Ta có AK là đường đối trung của tam giác ABC, suy ra: $\widehat{BAP} = \widehat{CAN} \Rightarrow BP = NC$

$\Rightarrow BCNP$ là hình thang cân $\Rightarrow PN // BC$.

Từ $\Delta BPK = \Delta NCK \Rightarrow KP = KM$

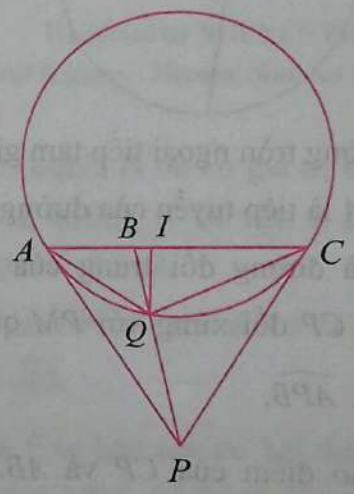
$\Rightarrow \widehat{KPN} = \widehat{PNK}$, mà $\widehat{PNK} = \widehat{NAD}$ nên $\widehat{NAD} = \widehat{NPK} \Rightarrow PN // AD$.

Vậy P, N đối xứng qua KM (cố định vì đi qua O và vuông góc với d cố định). Suy ra A, D đối xứng qua KM hay D cố định.

Vậy KN đi qua điểm D cố định.

Thí dụ 8. (IMO Shortlist 2003) *Cho ba điểm A, B, C theo thứ tự đó nằm trên một đường thẳng. Gọi (O) là đường tròn luôn đi qua A, C (AC không là đường kính). P là giao điểm của tiếp tuyến tại A và tại C của (O). Giả sử (O) cắt đoạn PB tại Q. Chứng minh rằng đường phân giác của góc $\widehat{AQC}$ luôn đi qua một điểm cố định khi (O) thay đổi.*

Lời giải.

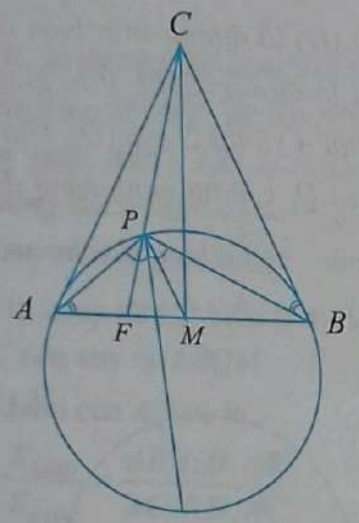


Gọi I là giao điểm của đường phân giác của $\widehat{AQC}$ và d ($d \equiv AC$). Ta sẽ chứng minh điểm I cố định.

Ta thấy QB qua cực P của AC đối với đường tròn (O). Suy ra QB là đường đối trung của $\Delta QAC \Rightarrow \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{AQ^2}{CQ^2}$. Mà $\dfrac{IA}{IC} = \dfrac{AQ}{QC}$ nên $\dfrac{BA}{BC} = \dfrac{IA^2}{IC^2}$. Vì các điểm A, B, C cố định và d cố định nên I cố định (đpcm).

Thí dụ 9. (Poland – 2000) *Cho tam giác ABC cân tại C. Gọi P là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{PAB} = \widehat{PBC}$. Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng $\widehat{CPB} + \widehat{APM} = 180^0$.*

Lời giải.



Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB

Ta có: CB, CA là tiếp tuyến của đường tròn (O). Suy ra PC là đường đối trung của tam giác PAB. Do đó, CP đối xứng với PM qua đường phân giác của $\widehat{APB}$.

Gọi F là giao điểm của CP và AB. Khi đó, $\widehat{BPM} = \widehat{APF}$, mà

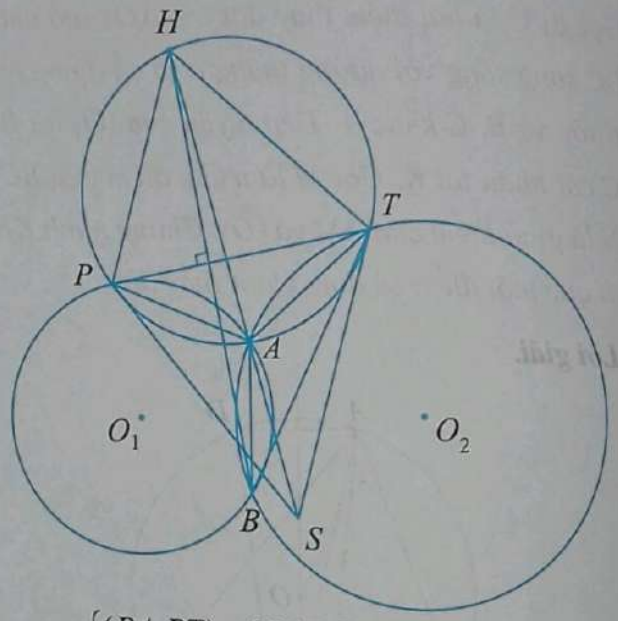
$\widehat{BPM} + \widehat{APC} = \widehat{APF} + \widehat{APC} = 180^0$ nên

$\widehat{CPB} + \widehat{APM} = 360^0 - \left(\widehat{BPM} + \widehat{APC}\right) = 180^0$.

Thí dụ 10 (Vietnam TST 2001). *Cho hai đường tròn $(O_1),(O_2)$ cắt nhau tại A và B. Gọi PT là một tiếp tuyến chung của chúng (P, T là tiếp điểm). Các tiếp tuyến tại P, T của đường tròn ngoại tiếp tam giác APT cắt nhau tại S. Gọi H là điểm đối xứng với B qua PT. Chứng minh rằng A, S, H thẳng hàng.*

Lời giải.

Nhận xét: *Ta có AS là đường đối trung của tam giác PAT. Ta cần chứng minh: AH cũng là đường đối trung của tam giác PAT, mà AB qua trung điểm của PT nên ta sẽ chứng minh AH đối xứng với AB qua đường phân giác của $\widehat{PAT}$.*



Ta có: $\begin{cases}(PA,PT) \equiv (BA,BP) \pmod{\pi} \\ (TP,TA) \equiv (BT,BA) \pmod{\pi}\end{cases}$

Mà $(PA,PT) + (TP,TA) + (AT,AP) \equiv 0 \pmod{\pi}$

nên $(BA,BP) + (BT,BA) + (AT,AP) \equiv 0 \pmod{\pi}$.

Suy ra $(BT,BP) \equiv (AP,AT) \pmod{\pi}$.

Vì H, B đối xứng với nhau qua PT nên

$(BT,BP) \equiv (HP,HT) \pmod{\pi}$

$\Rightarrow (HP,HT) \equiv (AP,AT) \pmod{\pi}$

$\Rightarrow A,H,P,T$ cùng thuộc một đường tròn

$\Rightarrow (AT,AH) \equiv (PT,PH) \equiv (PB,PT)$

$\equiv (AB,AP) \pmod{\pi}$.

Từ đó AH, AB là hai đường đẳng giác đối với góc $\widehat{PAT}$. Mà AB đi qua trung điểm của PT, nên AH là đường đối trung của ΔAPT.

Mặt khác AS là đường đối trung của ΔAPT, suy ra A, S, H thẳng hàng.

Trên đây là một số thí dụ áp dụng mô hình đường đối trung. Hy vọng mô hình này sẽ sẽ giúp ích cho các bạn giải quyết các bài toán hình học khác nữa.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 51

Problem. *The numbers of people and their finishing times in a running race were as follows.*

Time (minutes)	Frequency
(0; 15]	10
(15; 17]	12
(17; 19]	20
(19; 21]	5
(21; 23]	3

Estimate the standard deviation of the finishing times.

Solution. We use the mid-points to present the real finishing times: $c_1 = 7.5$, $c_2 = 16, \ldots, c_5 = 22$.

We use the approximation formula

$$\overline{x} \approx \frac{n_1c_1 + \ldots + n_5c_5}{n_1 + \ldots + n_5} = \frac{10*7.5 + \ldots + 3*22}{50} = 15.86.$$

And for the standard deviation

$$sd \approx \sqrt{\frac{n_1(c_1 - 15.86)^2 + \ldots + n_5(c_5 - 15.86)^2}{n_1 + \ldots + n_5}} \approx 4.45.$$

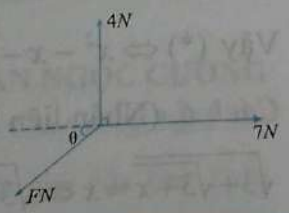
TỪ VỰNG

Frequency : *tần số*
Estimate : *ước lượng*
standard deviation : *độ lệch chuẩn*
mid-point : *điểm chính giữa*

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

BÀI DỊCH SỐ 48

Bài toán. *Một hạt nằm ở vị trí cân bằng trên một mặt bàn nhẵn nằm ngang khi chịu tác động bởi ba lực nằm ngang như hình dưới. Tìm giá trị của F.*



Lời giải. Hạt ở vị trí cân bằng nên hợp lực của các lực tác động lên nó bằng 0, điều đó có nghĩa là nó có giá trị bằng 0 theo cả hướng x và hướng y. Vì vậy ta có $F\cos\theta = 7$ và $F\sin\theta = 4$. Từ đó:

$$F^2\cos^2\theta + F^2\sin^2\theta = 49 + 16 = 65.$$

Vậy $F = \sqrt{65}$.

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm. *Lê Minh Trung*, 10T2, *Văn Lâm Thanh*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế, **Thừa Thiên Huế**.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

THÔNG BÁO

Mời bạn đọc đặt mua Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ Quý 1 năm 2020 tại các cơ sở Bưu điện trên cả nước hoặc tại Tòa soạn. Mọi chi tiết liên hệ: TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

187 B *Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội*

ĐT – Fax Phát hành, Trị sự: **(024) 35121606 – (024) 35121607**

Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

BÀI TOÁN 31. *Giải phương trình*:

$\sqrt{3+\sqrt{3+x}}=x.$

Lời giải. ĐK:

$$x+3\ge 0\Rightarrow x=\sqrt{3+\sqrt{3+x}}\ge\sqrt{3}\Rightarrow x\ge\sqrt{3}.$$

Cách 1. (Bình phương hai vế đưa về PT bậc 4)

$$\sqrt{3+\sqrt{3+x}}=x\Leftrightarrow 3+\sqrt{3+x}=x^2\Leftrightarrow\sqrt{3+x}=x^2-3$$

$$\Leftrightarrow 3+x=(x^2-3)^2\Leftrightarrow x^4-6x^2-x+6=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)(x+2)(x^2-x-3)=0\Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

Cách 2. (Đặt ẩn phụ) Đặt $y=\sqrt{3+x}$ $(y\ge 0)$,

ta có HPT: $\begin{cases}x=\sqrt{3+y}\\ y=\sqrt{3+x}\end{cases}$. Trừ theo vế ta được:

$$x-y=\sqrt{3+y}-\sqrt{3+x}\Leftrightarrow x-y=\frac{y-x}{\sqrt{3+y}+\sqrt{3+x}}$$

$$\Leftrightarrow(x-y)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3+y}+\sqrt{3+x}}\right)=0\Leftrightarrow x=y$$

$$\Rightarrow x=\sqrt{3+x}\Rightarrow x^2-x-3=0\Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

Cách 3. (Đặt ẩn phụ) Đặt $y=\sqrt{3+x}$ $(y\ge 0)$

$\Rightarrow y^2=3+x$ và $x=\sqrt{3+y}$ $\Rightarrow x^2=3+y.$

Ta có HPT: $\begin{cases}y^2=3+x\\ x^2=3+y\end{cases}\Rightarrow x^2-y^2=y-x$

$$\Rightarrow(x-y)(x+y+1)=0\Rightarrow x=y\Rightarrow x^2-x-3=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

Cách 4. (Nhân liên hợp)

$$\sqrt{3+\sqrt{3+x}}=x\Leftrightarrow 3+\sqrt{3+x}=x^2\Leftrightarrow\sqrt{3+x}=x^2-3$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3+x}-x=x^2-x-3\Leftrightarrow\frac{3+x-x^2}{\sqrt{3+x}+x}=x^2-x-3$$

$$\Leftrightarrow(x^2-x-3)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3+x}+x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-3=0\Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

Cách 5. (Sử dụng hằng đẳng thức)

$$\sqrt{3+\sqrt{3+x}}=x\Leftrightarrow 3+\sqrt{3+x}=x^2\Leftrightarrow\sqrt{3+x}=x^2-3$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x\sqrt{3+x}+(3+x)+2x^3-x^2-7x-3=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{3+x}\right)^2+(2x+1)(x^2-x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x^2-x-3}{x+\sqrt{3+x}}\right)^2+(2x+1)(x^2-x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow(x^2-x-3)\left(\frac{x^2-x-3}{(x+\sqrt{3+x})^2}+2x+1\right)=0.\ (*)$$

Ta có: $\dfrac{x^2-x-3}{(x+\sqrt{3+x})^2}+2x+1$

$$=\frac{x^2-x-3+x^2+2x\sqrt{3+x}+3+x}{(x+\sqrt{3+x})^2}+2x$$

$$=\frac{2x^2+2x\sqrt{3+x}}{(x+\sqrt{3+x})^2}+2x>0,\forall x\ge\sqrt{3}.$$

Vậy $(*)\Leftrightarrow x^2-x-3=0\Rightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}.$

Cách 6. (Nhân liên hợp)

$$\sqrt{3+\sqrt{3+x}}=x\Leftrightarrow\sqrt{3+\sqrt{3+x}}-\sqrt{3+x}=x-\sqrt{3+x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{3+\sqrt{3+x}-3-x}{\sqrt{3+\sqrt{3+x}}+\sqrt{3+x}}=x-\sqrt{3+x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3+x}-x}{\sqrt{3+\sqrt{3+x}}+\sqrt{3+x}}=x-\sqrt{3+x}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{3+x}-x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{3+x}}+\sqrt{3+x}}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3+x}=x\Leftrightarrow x^2-x-3=0\Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

Cách 7. (Tính chất đồng biến của hàm số)

Đặt $f(x)=\sqrt{3+x}$. Khi đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\left[\sqrt{3};+\infty\right)$.

Nếu $f(x)>x \Rightarrow f(f(x))>f(x) \Rightarrow x>f(x)$, vô lí.

Nếu $f(x)<x \Rightarrow f(f(x))<f(x) \Rightarrow x<f(x)$, vô lí.

Vậy $f(x)=x \Rightarrow x^2-x-3=0 \Rightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Cách 8. (Phương pháp hằng số biến thiên)

Ta xem 3 như là một biến số:

$$\sqrt{3+\sqrt{3+x}}=x \Leftrightarrow 3+\sqrt{3+x}=x^2 \Leftrightarrow \sqrt{3+x}=x^2-3$$

$$\Leftrightarrow 3^2-2.3.x^2+x^4=x+3 \Leftrightarrow 3^2-(2x^2+1).3+x^4-x=0.$$

$$\Delta=(2x^2+1)^2-4\left(x^4-x\right)=4x^2+4x+1=\left(2x+1\right)^2$$

Phương trình có nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} 3=\dfrac{2x^2+1+2x+1}{2}=x^2+x+1 \\ 3=\dfrac{2x^2+1-2x-1}{2}=x^2-x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-2=0 \\ x^2-x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

TRẦN NGỌC CƯỜNG

(*GV THPT Mường Quạ, Con Cuông, Nghệ An*)

➢**Nhận xét.** Trên đây là 8 cách giải của bạn *Trần Ngọc Cường*. Bạn *Nguyễn Duy Thái*, GV THCS Nam Hồng, TX. Hồng Lĩnh, **Hà Tĩnh**, người giới thiệu đề toán đề xuất 5 cách giải. Ngoài ra Tòa soạn Tạp chí TH&TT còn nhận được một số lời giải tốt của các bạn: **Hà Nội:** *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Hưng Yên:** *Nguyễn Phúc Vinh*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Quảng Trị:** *Trần Nguyễn Hữu Phúc*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, *Lê Nguyễn Quỳnh Anh*, 10 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Minh Thảo*, GV THCS Nguyễn Chánh, Sơn Tịnh, *Trương Quang An*, Nghĩa Thắng, Tư Nghĩa; **Cần Thơ:** *Huỳnh Trung Hiếu*, 10A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

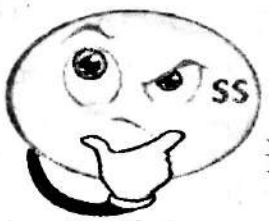
LÊ MAI (*Hà Nội*)

Mời các bạn gửi lời giải **BÀI TOÁN 33** dưới đây về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.1.2020.

BÀI TOÁN 33. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D. AB = 2a, AD = DC = a. $SA \perp (ABCD)$, $SA=a\sqrt{2}$. Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).*

NGUYỄN QUANG NAM

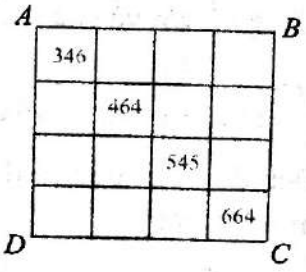
(*GV THPT Quỳ Hợp 2, Quỳ Hợp, Nghệ An*)



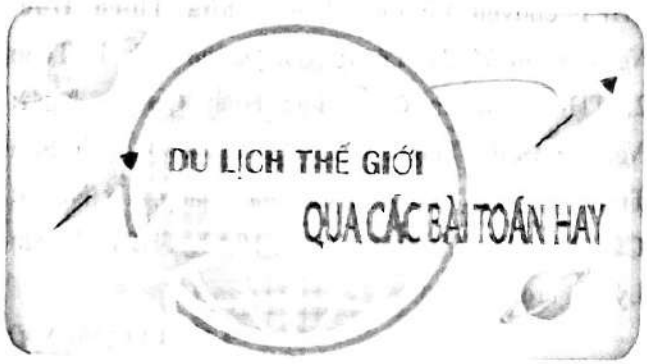
ĐỐ VUI !

MA PHƯƠNG 4 X 4 VỚI SỐ 2019

Cho hình vuông *ABCD* gồm 16 ô vuông như hình vẽ. Bạn hãy điền tiếp vào mỗi ô vuông còn trống của hình vuông đó một số gồm ba chữ số với các chữ số thuộc tập hợp các chữ số $\{3, 4, 5, 6\}$ sao cho các số trong ô vuông đều khác nhau mà tổng các chữ số theo mỗi hàng ngang, tổng các chữ số theo mỗi cột dọc, tổng các chữ số theo đường chéo *AC* và tổng các chữ số theo đường chéo *BD* đều bằng nhau và bằng 2019.



NGUYỄN VIỆT HẢI (*Hà Nội*)



Dưới đây là lời giải bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở TH&TT số 506, T8.2019.

Bài 39 (APMO 2005). *Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $abc=8$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}}\ge\frac{4}{3}.$$

Lời giải. (Của đáp án kỳ thi). Với mọi $x>0$ ta có $1-x+x^2>0$. Theo BĐT Cauchy thì

$$\sqrt{1+x^3}=\sqrt{(1+x)(1-x+x^2)}$$

$$\le\frac{(1+x)+(1-x+x^2)}{2}=\frac{2+x^2}{2}\quad(1)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=2$. Áp dụng (1) ta được:

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}\ge\frac{4a^2}{(2+a^2)(2+b^2)}\quad(2)$$

$$\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^2)}}\ge\frac{4b^2}{(2+b^2)(2+c^2)}\quad(3)$$

$$\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}}\ge\frac{4c^2}{(2+c^2)(2+a^2)}\quad(4)$$

Cộng vế với vế của (2),(3),(4) sẽ được:

$$A\ge\frac{4a^2}{(2+a^2)(2+b^2)}+\frac{4b^2}{(2+b^2)(2+c^2)}+\frac{4c^2}{(2+c^2)(2+a^2)}.$$

Đến đây bài toán sẽ được chứng minh nếu chứng minh được:

$$\frac{a^2}{(2+a^2)(2+b^2)}+\frac{b^2}{(2+b^2)(2+c^2)}+\frac{c^2}{(2+c^2)(2+a^2)}\ge\frac{1}{3}.$$

$$\Leftrightarrow 3\left[a^2(2+c^2)+b^2(2+a^2)+c^2(2+b^2)\right]$$

$$\ge(2+a^2)(2+b^2)(2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+6(a^2+b^2+c^2)$$

$$\ge 8+4(a^2+b^2+c^2)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+(abc)^2$$

$$\Leftrightarrow(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+2(a^2+b^2+c^2)\ge 72.$$

BĐT cuối cùng này đúng vì theo BĐT Cauchy thì:

$$(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\ge 3\sqrt[3]{(abc)^4}=64;$$

$$2(a^2+b^2+c^2)\ge 2.3\sqrt[3]{(abc)^2}=24.$$

Do đó: $\dfrac{a^2}{(2+a^2)(2+b^2)}+\dfrac{b^2}{(2+b^2)(2+c^2)}+\dfrac{c^2}{(2+c^2)(2+a^2)}\ge\dfrac{1}{3}.$

Vậy $\dfrac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}+\dfrac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}}+\dfrac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}}\ge\dfrac{4}{3}.$

Đẳng thức của bài toán xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=2$.

Nhận xét. 1) Đây là một bài toán hay. Bạn *Ngô Văn Thái (GV THPT Phạm Quang Thẩm, Vũ Thư, Thái Bình)* có nhận xét: Vẫn như lời giải trên, bài toán vẫn đúng khi ta hoán vị các tử số của 3 phân số ở vế trái BĐT cần chứng minh (các mẫu số vẫn giữ nguyên).

2) Ngoài bạn *Thái*, các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Nghệ An:** *Nguyễn Quốc Bảo Long*, 9C, THCS Đặng Thai Mai, *Nguyễn Nhất Huy*, 9C, THCS Hà Huy Tập, TP. Vinh; **Thừa Thiên Huế:** *Hồ Ngọc Hùng, Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, 11 Toán 2, *Nguyễn Thị Bảo Ngọc, Nguyễn Vinh Trí*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Quảng Ngãi:** *Trương Quang An*, xã Nghĩa Thắng, H. Tư Nghĩa; **Quảng Trị:** *Trần Nguyễn Hữu Phúc, Nguyễn Xuân Tiến*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đông Hà; **TP. Hồ Chí Minh:** *Hoàng Đình Ân*, THCS-THPT Nguyễn Khuyến; **Bà Rịa-Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 590 Điện biên Phủ, phường Long Toàn, TP. Bà Rịa; **Bình Phước:** *Dương Minh Đức, Nguyễn Trương Gia Huy*, 12T5, *Hà Trọng Tài*, 11T6, THPT chuyên Bình Long.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30.1.2020.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 41. *Với mọi số nguyên $n\ge 6$, chứng minh rằng:* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n}{n-k}\cdot\frac{1}{2^{k-1}}\le\frac{16}{5}.$

NGUYỄN HỮU (*Hà Nội*)

GIẢI ĐÁP: LỜI GIẢI NÀO ĐÚNG ?

(Đề đăng trên TH&TT số 506, tháng 8 năm 2019)

Phân tích sai lầm. Chúng ta biết rằng φ là giữa hai mặt phẳng (Q) và (P), φ thuộc đoạn $[0^0;90^0]$, hai bạn *Trà My* và *Bân Bân* đều ngộ nhận giá trị nhỏ nhất của φ là 0^0 nên lời giải của hai bạn đều sai. Ta chú ý rằng góc φ giữa hai mặt phẳng (Q) và (P) thuộc đoạn $[0^0;90^0]$, còn giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của φ đạt được còn tùy thuộc vào tính chất của (Q) và (P). Sau đây là lời giải đúng theo hướng giải của bạn *Trà My*.

Lời giải đúng. Ta có VTPT của (P) là $\overrightarrow{n_P}=(-2;1;2)$ và VTCP của d là $\vec{u}=(1;-2;-1)$. Ta có: $d\subset(Q)\Rightarrow$ $\vec{u}\perp\overrightarrow{n_Q}\Leftrightarrow\vec{u}.\overrightarrow{n_Q}=0\Leftrightarrow a-2b+1=0\Leftrightarrow a=2b-1$.

Gọi φ là góc giữa (P) và (Q), ta có:

$$\cos\varphi=\left|\cos(\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q})\right|=\frac{|-2a+b-2|}{3.\sqrt{a^2+b^2+(-1)^2}}=\frac{|b|}{\sqrt{5b^2-4b+2}}.$$

Ta có với $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi$ nghịch biến trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, do đó φ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $\cos\varphi$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Xét hàm $f(t)=\frac{t}{\sqrt{5t^2-4t+2}}$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=\frac{-2t+2}{(\sqrt{5t^2-4t+2})^3}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=1$. ta có bảng biến thiên:

t	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$

Suy ra $\max\limits_{\mathbb{R}}|f(t)|=|f(1)|=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\varphi$ nhỏ nhất khi $b=1$, $a=1$. Chọn C.

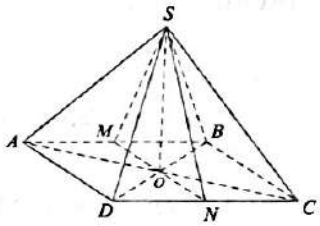
Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào phát hiện được sai lầm.

KIHIVI

GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG!

Sau đây là một bài toán trong đề kiểm tra của lớp 11A15: *Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là 60^0. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (ABCD).*

Lời giải của bạn Thu: Gọi $d=(SAB)\cap(SCD)$ thì $S\in d$. Ta có: $(SAB)\cap(ABCD)=AB$, $AB\,//\,CD$ (do $ABCD$ là hình vuông), $(SCD)\cap(ABCD)=CD$ nên $d\,//\,AB\,//\,CD$. Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng $(SAB),(SCD)$ là đường thẳng d đi qua đỉnh S và song song với AB,CD. ΔSAB cân tại S và M là trung điểm của AB nên $SM\perp AB$, suy ra $SM\perp d$. Tương tự ta có $SN\perp d$. Do đó, góc giữa hai mặt phẳng $(SAB),(SCD)$ là góc giữa hai đường thẳng SM,SN và chính là góc $\widehat{MSN}$ trong tam giác SMN. Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên ΔSNM cân, lại có $\widehat{MSN}=60^0$ nên ΔSNM đều, suy ra $\widehat{SMN}=60^0$. Ta có: $(SAB)\cap(ABCD)=AB$, $SM\perp AB$, $MN\perp AB$ $\Rightarrow$ góc giữa $(SAB),(ABCD)$ là góc giữa SM,MN và là góc $\widehat{SMN}=60^0$. Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên góc giữa mp(SAD) và mp$(ABCD)$ bằng góc giữa mp(SAB) và mp$(ABCD)$ và bằng 60^0.



Theo các bạn, bạn Thu có được điểm tối đa ở bài này không?

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

GIẢI ĐÁP: LỜI GIẢI NÀO ĐÚNG ?

(*Đề đăng trên TH&TT số* 506, *tháng* 8 *năm* 2019)

Phân tích sai lầm. Chúng ta biết rằng φ là giữa hai mặt phẳng (Q) và (P), φ thuộc đoạn $[0^0;90^0]$, hai bạn *Trà My* và *Bân Bân* đều ngộ nhận giá trị nhỏ nhất của φ là 0^0 nên lời giải của hai bạn đều sai. Ta chú ý rằng góc φ giữa hai mặt phẳng (Q) và (P) thuộc đoạn $[0^0;90^0]$, còn giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của φ đạt được còn tùy thuộc vào tính chất của (Q) và (P). Sau đây là lời giải đúng theo hướng giải của bạn *Trà My*.

Lời giải đúng. Ta có VTPT của (P) là $\overrightarrow{n_P}=(-2;1;2)$ và VTCP của d là $\vec{u}=(1;-2;-1)$. Ta có: $d\subset(Q)\Rightarrow$ $\vec{u}\perp\overrightarrow{n_Q}\Leftrightarrow\vec{u}.\overrightarrow{n_Q}=0\Leftrightarrow a-2b+1=0\Leftrightarrow a=2b-1$.

Gọi φ là góc giữa (P) và (Q), ta có:

$$\cos\varphi=\left|\cos(\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q})\right|=\frac{|-2a+b-2|}{3.\sqrt{a^2+b^2+(-1)^2}}=\frac{|b|}{\sqrt{5b^2-4b+2}}.$$

Ta có với $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi$ nghịch biến trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, do đó φ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $\cos\varphi$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Xét hàm $f(t)=\frac{t}{\sqrt{5t^2-4t+2}}$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=\frac{-2t+2}{(\sqrt{5t^2-4t+2})^3}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=1$. ta có bảng biến thiên:

t	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$

Suy ra $\max\limits_{\mathbb{R}}|f(t)|=|f(1)|=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\varphi$ nhỏ nhất khi $b=1$, $a=1$. Chọn C.

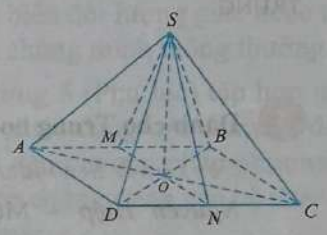
Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào phát hiện được sai lầm.

KIHIVI

GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG!

Sau đây là một bài toán trong đề kiểm tra của lớp 11A15: *Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là 60^0. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (ABCD).*

Lời giải của bạn Thu: Gọi $d=(SAB)\cap(SCD)$ thì $S\in d$. Ta có: $(SAB)\cap(ABCD)=AB$, $AB//CD$ (do $ABCD$ là hình vuông), $(SCD)\cap(ABCD)=CD$ nên $d//AB//CD$. Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng $(SAB),(SCD)$ là đường thẳng d đi qua đỉnh S và song song với AB,CD. ΔSAB cân tại S và M là trung điểm của AB nên $SM\perp AB$, suy ra $SM\perp d$. Tương tự ta có $SN\perp d$. Do đó, góc giữa hai mặt phẳng $(SAB),(SCD)$ là góc giữa hai đường thẳng SM,SN và chính là góc $\widehat{MSN}$ trong tam giác SMN. Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên ΔSNM cân, lại có $\widehat{MSN}=60^0$ nên ΔSNM đều, suy ra $\widehat{SMN}=60^0$. Ta có: $(SAB)\cap(ABCD)=AB$, $SM\perp AB$, $MN\perp AB\Rightarrow$ góc giữa $(SAB),(ABCD)$ là góc giữa SM,MN và là góc $\widehat{SMN}=60^0$. Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên góc giữa mp(SAD) và mp$(ABCD)$ bằng góc giữa mp(SAB) và mp$(ABCD)$ và bằng 60^0.



Theo các bạn, bạn Thu có được điểm tối đa ở bài này không?

NGUYỄN VĂN XÁ
(*GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh*)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 510 (12.2019)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 024.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
GS. ĐOÀN QUỲNH
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên
NXBGD Việt Nam
NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam
HOÀNG LÊ BÁCH
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập
NXBGD Việt Nam
PHAN XUÂN THÀNH

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

***Tổng biên tập : TS.* TRẦN HỮU NAM**

***Thư kí Tòa soạn : ThS.* HỒ QUANG VINH**

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, *ThS.* NGUYỄN ANH DŨNG, *TS.* TRẦN NAM DŨNG, *TS.* NGUYỄN MINH ĐỨC, *TS.* NGUYỄN MINH HÀ, *TS.* NGUYỄN VIỆT HẢI, *PGS. TS.* LÊ QUỐC HÁN, *ThS.* PHẠM VĂN HÙNG, *PGS. TS.* VŨ THANH KHIẾT, *GS. TSKH.* NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, *TS.* PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, *PGS. TS.* TẠ DUY PHƯỢNG, *ThS.* NGUYỄN THẾ THẠCH, *GS. TSKH.* ĐẶNG HÙNG THẮNG, *PGS. TS.* PHAN DOÃN THOẠI, *ThS.* VŨ KIM THỦY, *PGS. TS.* VŨ DƯƠNG THỤY, *GS. TSKH.* NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
For Lower Secondary School
Nguyễn Hiệp – Một số ứng dụng hay của nguyên lý Dirichlet.

6 *Vũ Tiến Việt* – Về mấy bất đẳng thức có liên quan với nhau.

7 Hướng dẫn giải đề thi vào lớp 10 THPT chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình, năm học 2019 – 2020.

10 Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 TP. Hồ Chí Minh, năm học 2019 – 2020.

11 **Phương pháp giải toán**
Ngô Văn Thái – Chứng minh bất đẳng thức dựa vào biểu thức phụ.

17 **Bạn đọc tìm tòi**
Nguyễn Văn Ngọc – Bài toán cây tre trăm đốt.

20 *Tin vắn*: Thông cáo báo chí về sách giáo khoa lớp 1 theo Chương trình Giáo dục phổ thông mới của Nhà Xuất bản Giáo dục Việt Nam.

22 **Đề ra kỳ này**
T1/510, ..., T12/510, L1/510, L2/510.
Problems in This Issue

24 **Giải bài kỳ trước**
T1/506, ..., T12/506, L1/506, L2/506.
Solutions to Previous Problems

33 **Lịch sử Toán học**
Đoàn Thị Lệ, Tạ Duy Phượng, Cung Thị Kim Thành, Phan Ánh Tuyết – Về xuất xứ và các phiên bản của bài toán trăm trâu trăm cỏ. (*Tiếp theo kỳ trước*).

37 **Diễn đàn dạy học toán**
Phạm Đoan Ngọc – Áp dụng một số mô hình của đường đối trung trong giải toán hình học phẳng.

43 **Tiếng Anh qua các bài toán**

43 **Nhiều cách giải cho một bài toán**

46 **Du lịch thế giới qua các bài toán hay**

47 **Sai lầm ở đâu?**

Biên tập: LÊ MAI, NGUYỄN HIỆP
Trị sự, phát hành: LÊ NGUYÊN NGỌC, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: LÊ NGUYÊN NGỌC

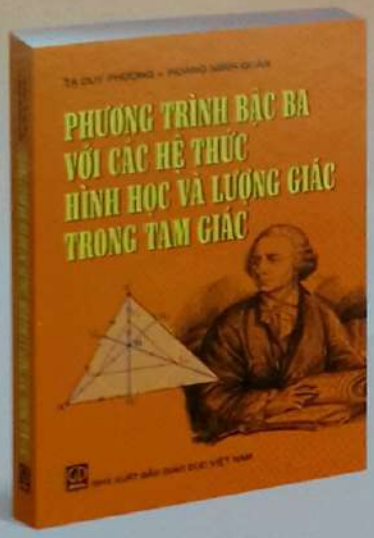
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc cuốn sách mới

PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA VỚI CÁC HỆ THỨC HÌNH HỌC VÀ LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC

của tác giả PGS.TS. TẠ DUY PHƯỢNG và Thầy giáo HOÀNG MINH QUÂN

Sách dày 448 trang, khổ 16x24cm, giá bìa 80.000 đồng.



Nội dung cơ bản của cuốn sách dựa trên kết quả: Các yếu tố của tam giác (ba cạnh, ba đường cao, bán kính của ba đường tròn bàng tiếp, các hàm số lượng giác của ba góc,...) *có thể được coi là ba nghiệm của một phương trình bậc ba* với các hệ số phụ thuộc vào ba yếu tố cơ bản là p, R, r, trong đó p là nửa chu vi, còn R và r tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Từ đó, theo tính chất nghiệm của phương trình bậc ba và vận dụng các bất đẳng thức quen thuộc, sách trình bày khoảng 600 hệ thức có liên quan đến các yếu tố hình học và lượng giác trong tam giác. Qua cuốn sách chúng ta sẽ thấy mối quan hệ hữu cơ giữa Đại số (phương trình và hàm số bậc ba) với Hình học và Lượng giác (các hệ thức trong tam giác). Đây chính là điểm mới và khác biệt của cuốn sách này so với các sách đã có về hệ thức trong tam giác.

Cuốn sách gồm năm chương.

Chương 1 tập hợp những kiến thức cơ bản về tam giác và các công thức lượng giác, các bất đẳng thức đại số quan trọng cần thiết cho các chương sau.

Chương 2 trình bày các tính chất của hàm số và phương trình bậc ba, trong đó đặc biệt lưu ý đến tính chất nghiệm của phương trình bậc ba.

Chương 3 và **Chương 4** chỉ ra rằng, các yếu tố hình học và lượng giác của tam giác (cạnh, đường cao, bán kính đường tròn bàng tiếp, sin, côsin của các góc, ...) chính là nghiệm của các phương trình bậc ba với các hệ số chứa ba yếu tố cơ bản của tam giác (tức là ba yếu tố p, R, r). Và như là các hệ quả, nhờ sử dụng tính chất nghiệm của phương trình bậc ba và các bất đẳng thức đại số như bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức Bunyakovsky, bất đẳng thức Schwarz, . . . các tác giả đã đưa ra và chứng minh khoảng 600 hệ thức hình học và lượng giác trong tam giác, trong đó có nhiều hệ thức là mới hoặc chỉ mới gặp trên các tạp chí và còn ít được biết đến trong các sách hiện nay.

Ngoài các bất đẳng thức mới hoặc còn ít được phổ biến, nhiều bài thi đại học, thi học sinh giỏi, thi Olympic của các nước, nhiều hệ thức hình học và lượng giác quen biết trong tam giác cũng được chứng minh lại trong Chương 3 và Chương 4 theo cách mới, dựa trên tính chất nghiệm của phương trình bậc ba, mà ít dùng đến cách biến đổi lượng giác hoặc những cách chứng minh thông thường.

Chương 5 (Phụ lục) tập hợp một số mục dưới dạng các chuyên đề liên quan đến phương pháp phương trình bậc ba chứng minh các hệ thức trong tam giác.

Cũng cần lưu ý thêm rằng, từ các hệ thức nêu trong cuốn sách này, ta có thể suy ra khá nhiều hệ thức khác nữa, chưa được khai thác trong cuốn sách. Đây là một gợi ý tốt để bạn đọc có thể tìm cách chứng minh mới cho các hệ thức cũ hoặc tìm ra các hệ thức mới. Ngoài ra, cách chứng minh mới hoặc cải biên những hệ thức đã có còn có thể giúp các thầy cô giáo trong việc thiết kế các bài tập và đề thi mới.

Cuốn sách không chỉ có ích cho các học sinh, các bạn yêu toán, các thầy cô dạy toán phổ thông, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho các sinh viên và giảng viên đại học, cao đẳng ngành toán, cũng như các phụ huynh mong muốn giúp con em mình học tốt môn toán.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, 187B Giảng Võ, Hà Nội

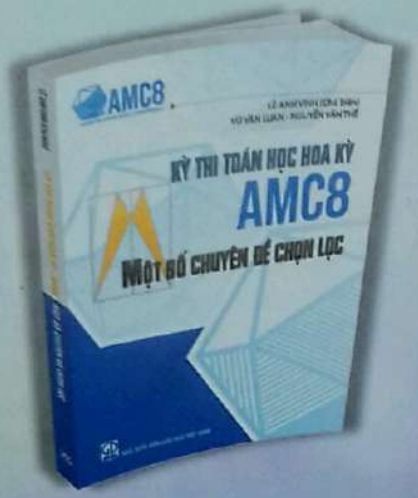
- Điện thoại biên tập: 024.35121607
- Điện thoại Fax- phát hành: 024. 35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc cuốn sách

KỲ THI TOÁN HỌC HOA KỲ- AMC8
MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ CHỌN LỌC

Của các tác giả: **PGT.TS Lê Anh Vinh** (Chủ biên)
Vũ Văn Luân - Nguyễn Văn Thế
Sách dày 152 trang, giá bìa 65000 đồng



Kỳ thi học sinh giỏi Toán Hoa Kỳ - AMC (American Mathematics Competitions) là kỳ thi có lịch sử lâu đời được tổ chức bởi Hiệp hội Toán học Hoa Kỳ từ năm 1950. Mục tiêu của kỳ thi là tạo cơ hội cho các thí sinh có cơ hội làm quen với các dạng toán có chiều sâu trong chương trình giáo dục phổ thông. Đề thi luôn hướng tới việc thúc đẩy khả năng tư duy và kỹ năng giải quyết vấn đề cho học sinh. Kỳ thi AMC được chia theo các khối lớp 8, 10, 12. Hằng năm có khoảng 350.000 thí sinh đến từ 6000 trường trên thế giới tham dự. Kỳ thi AMC8 bắt đầu từ năm 1985 dành cho các lớp 6, 7, 8 được tổ chức vào tháng 11 hàng năm. Đề thi gồm 25 câu hỏi trắc nghiệm với thời gian làm bài là 40 phút.

Bắt đầu từ năm học 2015-2016, Trung tâm Ứng dụng Khoa học Giáo dục, Trường Đại học Giáo dục, ĐHQG Hà Nội là đơn vị đầu tiên đại diện cho Hiệp hội Toán học Hoa Kỳ tổ chức các kỳ thi AMC tại Việt Nam. Để các em học sinh làm quen và làm tốt các bài toán trong kỳ thi AMC8, các tác giả đã biên soạn cuốn: *Kỳ thi Toán học Hoa Kỳ - AMC8, một số chuyên đề chọn lọc.* Cuốn sách gồm hai phần:

Phần 1 giới thiệu các chủ đề xuất hiện trong đề thi AMC. Trong phần này các tác giả giới thiệu với bạn đọc 7 chủ đề về: *Tính giá trị biểu thức*; *Hình học*; *Các bài toán lôgic*; *Các bài toán đếm*; *Xác suất và thống kê*; *Các bài toán có lời văn*; *Các bài toán số học*. Mỗi chủ đề có ba phần: Tóm tắt kiến thức, Ví dụ áp dụng và bài tập đề nghị. Các ví dụ hay bài tập luôn có lời giải hoặc hướng dẫn giải chi tiết.

Phần 2 là đề thi các năm gần đây. Phần này giới thiệu đề thi AMC8 các năm 2015, 2016, 2017 và 2018 cùng với các lời giải chi tiết.

Hy vọng rằng cuốn sách là một tài liệu tham khảo thiết thực giúp các em học sinh học tốt và các thầy cô giáo dạy tốt môn Toán.

Mọi chi tiết xin liên hệ:
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
● Điện thoại: 024.35121606 – 024.35121607 ● Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT12M9

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 12 năm 2019

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng