BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❊ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

7
2000

SỐ 277 - NĂM THỨ 37 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

Bơnoa - Mandenbrot người khai sinh : HÌNH HỌC FRACTAL

TOÁN HỌC MUÔN MẦU

MANĐENBRÔT và HÌNH TỰ ĐỒNG DẠNG

Nhà toán học Bơnoa Manđenbrôt (Benoit Mandelbrot) sinh năm 1924 ở Ba Lan và từ năm 1936, ông sang học ở Pháp, sau đó làm việc ở Trung tâm nghiên cứu Khoa học Tự nhiên của Pháp. Ông nghiên cứu các hình tự đồng dạng và mở ra một ngành toán học mới : *hình học fractal* (xem bài viết ở trang 9).

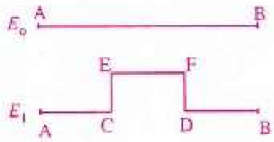
Hình học Fractal có nhiều ứng dụng trong công nghệ, trong đồ họa vi tính, có thể mô tả được nhiều hiện tượng tự nhiên và xã hội.

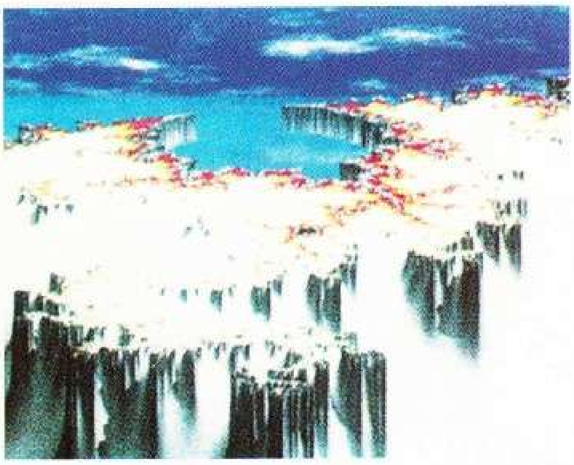
Dành cho bạn đọc :

1. Hai Fractal ở dưới đây mô tả hình ảnh gì trong tự nhiên ?

2. Quan sát E_o, E_1, bạn có thể vẽ được E_4 không ?

Năm phần thưởng cho 5 bạn có ý tưởng độc đáo, quan sát tinh tường và khéo tay nhất.





Lời giải : TAM GIÁC SỐ PATXCAN

1) Hình vẽ gợi ý một tính chất của tam giác Patxcan, để ý thấy các con số trong các vòng tròn lập thành dãy số Phibônaxi. Để chứng minh nhận xét này chỉ cần sử dụng tính chất :

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k \text{ với } 1 \le k \le n.$$

2) Ta thấy dãy (C_n^k) tăng khi k tăng và $k \le \frac{n}{2}$ với n chẵn và $k \le \frac{n-1}{2}$ với n lẻ. Mặt khác $C_n^k = C_n^{n-k}$ nên C_n^k đạt giá trị lớn nhất khi $k = \frac{n}{2}$ với n chẵn và khi $k = \frac{n-1}{2}$ hoặc $k = \frac{n+1}{2}$ với n lẻ.

Xin trao tặng phẩm cho 5 bạn nhanh tay, nhanh mắt nhất : *Võ Thị Ngọc Ánh*, 97/3, Trần Phú, Tp Huế; *Bùi Đăng Tài*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An; *Võ Xuân Minh*, 9^1, THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa; *Vũ Huy Mừng*, $11A_2$, THCS Lê Hoàn, Thọ Xuân, Thanh Hóa; *Đoàn Văn Quang*, 10A1, THPT Hạ Hòa, Phú Thọ.

GALLERY

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 37
Số 277 (7-2000)
Tòa soạn : 57 Giảng Võ, Hà Nội
ĐT : 04.5142648-04.5142650
FAX: (84).4.5142648

TRONG SỐ NÀY

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

TỔNG QUÁT HÓA MỘT BẤT ĐẲNG THỨC VÀ NHỮNG ỨNG DỤNG

VŨ ĐỨC SƠN
(SV ĐHKHTN–ĐHQG Hà Nội)

Sau mỗi lần chứng minh xong các bất đẳng thức (BĐT), các bạn có hay tổng quát hóa các BĐT vừa chứng minh được không ? Việc này nếu được sẽ không chỉ làm đẹp và phong phú thêm các BĐT mà đôi khi còn đem lại những ứng dụng không nhỏ. Ví dụ cụ thể dưới đây sẽ minh họa điều đó.

Chúng ta hãy bắt đầu với một BĐT quen thuộc :

$$\frac{a^2+b^2}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \ (1)\ \forall a, b \in R$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

BĐT (1) có thể tổng quát hóa như sau :

$$\frac{a^{2k}+b^{2k}}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^{2k} \ (2)\ \forall a, b \in R, k \in N^*.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Bạn đọc tự chứng minh (2) bằng quy nạp theo k.

Với số mũ lẻ thì có xảy ra BĐT tương tự không ? Ta sẽ chứng minh :

$$\frac{a^3+b^3}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \quad (3) \quad \text{với } a+b \ge 0$$

Ta có :

$$\frac{a^3+b^3}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 =$$

$$= \left(\frac{a+b}{2}\right)\left[a^2-ab+b^2-\frac{(a+b)^2}{4}\right] =$$

$$= \frac{3}{8}(a+b)(a-b)^2 \ge 0 (\text{do } a+b \ge 0).$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a^2 = b^2$.

BĐT (3) có sự tổng quát :

$$\frac{a^{2k+1}+b^{2k+1}}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^{2k+1} \qquad (4)$$

với $a+b \ge 0$, $k \in N^*$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a^2 = b^2$. Thật vậy, không mất tổng quát, giả sử $a \ge b$.

Áp dụng BĐT (2) và do $a+b \ge 0$ ta có :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{2k+1} = \left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)^{2k} \le \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^{2k}+b^{2k}}{2}$$

(5)

Xét hiệu :

$$2(a^{2k+1}+b^{2k+1}) - (a+b)(a^{2k}+b^{2k}) =$$

$$= a^{2k+1}+b^{2k+1} - ab^{2k} - a^{2k}b =$$

$$= (a-b)(a^{2k}-b^{2k}) \ge 0$$

(do $a \ge b$ và $a \ge -b \Rightarrow a^2 \ge b^2 \Rightarrow a^{2k} \ge b^{2k}$)

$$\Rightarrow (a+b)(a^{2k}+b^{2k}) \le 2(a^{2k+1}+b^{2k+1}) \ (6).$$

Từ (5) và (6) ta sẽ có (4). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a^2 = b^2$.

Lưu ý thêm rằng nếu $a+b \le 0$ thì :

$$\frac{a^{2k+1}+b^{2k+1}}{2} \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^{2k+1} \ (7), k \in N^*$$

BĐT (7) là dạng khác của BĐT (4) vì nếu ta đặt $a = -u$, $b = -v$ thì $u+v \ge 0$ và (7) trở thành BĐT dạng (4).

Bây giờ, phối hợp các BĐT (2) và (4) ta được BĐT :

$$\frac{a^n+b^n}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \ (8) \text{ với } a+b \ge 0, n \in N^*$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \text{ nếu } n \text{ chẵn} \\ a^2 = b^2 \text{ nếu } n \text{ lẻ} \\ a, b \text{ bất kì nếu } n = 1 \end{cases}$$

Các BĐT (2), (4) và (8) có nhiều ứng dụng, đặc biệt trong việc giải phương trình và chứng minh các BĐT. Sau đây là các ví dụ :

Ví dụ 1. *Giải phương trình :*

$$(x+1)^6 + (x+\sqrt{5})^6 = 18 - 8\sqrt{5}$$

Giải. Áp dụng BĐT(2) ta có :

$$\frac{(x+1)^6+(x+\sqrt{5})^6}{2} = \frac{(-x-1)^6+(x+\sqrt{5})^6}{2} \ge$$

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^6 = 9 - 4\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow (x+1)^6 + (x+\sqrt{5})^6 \ge 18 - 8\sqrt{5}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow -x-1 = x+\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow x = -(1+\sqrt{5})/2$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -(1+\sqrt{5})/2$.

Ví dụ 2. *Tìm tất cả các cặp số thực (x, y) thỏa mãn :*

$$\sqrt[19]{x^2+y^2-x} + \sqrt[19]{y^2-x^2+x} = 2\sqrt[19]{y^2}$$

Giải : Đặt : $a = \sqrt[19]{x^2+y^2-x}$, $b = \sqrt[19]{y^2-x^2+x}$ thì $a+b = 2\sqrt[19]{y^2} \geq 0$

Áp dụng BĐT (4), ta được :

$$y^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^{19} \leq \frac{a^{19}+b^{19}}{2} = y^2$$

$\Rightarrow$ Phương trình đã cho tương đương với $(x^2+y^2-x)^2 = (y^2-x^2+x)^2$, từ đó giải ra ta được các cặp (x, y) cần tìm :

$$\begin{cases} x \text{ tùy ý} \\ y = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = 0 \text{ hoặc } x = 1 \\ y \text{ tùy ý} \end{cases}$$

Ví dụ 3. *Cho các số dương a, b, c và số nguyên $k \geq 1$. Chứng minh rằng :*

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k \geq \frac{3}{2^k} \qquad (*)$$

Giải. Nhân vế trái của (*) với 2^k rồi áp dụng BĐT (8) ta có :

$$\left(\frac{2}{b+c}\right)^k.a + \left(\frac{2}{c+a}\right)^k.b^k = \left(\frac{2}{a+b}\right)^k.c^k \geq$$

$$\geq \frac{2.a^k}{b^k+c^k} + \frac{2.b^k}{c^k+a^k} + \frac{2.c^k}{a^k+b^k}$$

Thành thử, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh :

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2} \text{ với } x = a^k, y = b^k, z = c^k.$$

Đây là BĐT quen thuộc. Việc chứng minh xin dành cho bạn đọc !

Ví dụ 4. *Cho số nguyên lẻ $k > 1$ và x, y, z, t là các số thực thỏa mãn :*

$$\begin{cases} x \geq z, \ y \geq t \\ \sqrt[k]{x} + \sqrt[k]{y} = \sqrt[k]{z} + \sqrt[k]{t} + \sqrt[k]{2^{k-1}} \end{cases}$$

Chứng minh rằng : $\sqrt[k]{x-z} + \sqrt[k]{y-t} \geq 1$.

Giải. Áp dụng BĐT (4), ta được :

$$\left(\frac{\sqrt[k]{x}-\sqrt[k]{z}}{2}\right)^k = \left(\frac{\sqrt[k]{x}+\sqrt[k]{-z}}{2}\right)^k \leq \frac{x-z}{2} \text{ (do } k \text{ lẻ và } x \geq z)$$

$\Rightarrow \sqrt[k]{x-z} \geq \frac{\sqrt[k]{2}}{2}(\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{z})$ (đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = z^2$)

Tương tự : $\sqrt[k]{y-t} \geq \frac{\sqrt[k]{2}}{2}(\sqrt[k]{y} - \sqrt[k]{t})$ (đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow y^2 = t^2$)

Từ đó suy ra :

$$\sqrt[k]{x-z} + \sqrt[k]{y-t} \geq \frac{\sqrt[k]{2}}{2}(\sqrt[k]{x} + \sqrt[k]{y} - \sqrt[k]{z} - \sqrt[k]{t}) = \frac{\sqrt[k]{2}}{2}.\sqrt[k]{2^{k-1}} = 1 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

(Bạn đọc tự xét các trường hợp xảy ra dấu đẳng thức)

Ví dụ 5. *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng :*

$$(a+b-c)^n + (b+c-a)^n + (c+a-b)^n \geq a^n + b^n + c^n \quad \forall n \in N^*$$

Giải. Với $n = 1$, BĐT trở nên tầm thường. Xét $n \geq 2$:

Đặt $b+c-a = x$, $c+a-b = y$, $a+b-c = z$ thì : $x+y = 2c \geq 0$, $y+z = 2a \geq 0$, $z+x = 2b \geq 0$, và BĐT phải chứng minh trở thành :

$$x^n + y^n + z^n \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n + \left(\frac{y+z}{2}\right)^n + \left(\frac{z+x}{2}\right)^n \quad \forall n \in N^*$$

Việc chứng minh BĐT này không khó khăn gì nếu ta áp dụng BĐT (8).

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Giải các phương trình :

a) $x^{100} + (x+6)^{100} = 2.3^{100}$

b) $\sqrt[17]{x^3+3x-3} + \sqrt[17]{5-3x-x^3} = 2$

Bài 2. Chứng minh rằng :

$$x^{2k} + (x+1)^{2k} + (x+3)^{2k} + (x+4)^{2k} \geq 2 + 2^{2k+1}$$

với $x \in R$ và $k \in N^*$.

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Bài 3. Cho số nguyên lẻ $k > 1$ và các số thực $x_1, x_2, ..., x_n$ thỏa mãn :

$$2^{k-1} \leq x_n \leq x_{n-1} \leq ... \leq x_1 \leq 2^{2k-1}$$

Chứng minh rằng :

$$\sqrt[k]{2^{2k-1}-x_1} + \sqrt[k]{x_1-x_2} + ... + \sqrt[k]{x_{n-1}-x_n} + \sqrt[k]{x_n-2^{k-1}} \geq 1 \ ./.$$

CUỘC THI OLYMPIC TOÁN APMO 2000

NGUYỄN VIỆT HẢI

Cuộc thi Olympic toán châu Á - Thái Bình Dương (APMO) lần thứ 12 (3/2000) có sự tham gia của 19 đội với 187 thí sinh. So với năm 1999 có thêm đội Philippin nhưng vắng 3 đội : Malaisia, Mêhicô và Niu Dilân. Ở Việt Nam, kì thi được tổ chức ngày 8-3-2000 với 69 thí sinh ở 30 tỉnh, thành phố và 5 khối chuyên toán trực thuộc các trường Đại học. Đề thi gồm 5 bài toán, làm trong 240 phút. Điểm tối đa là 5×7 điểm = 35 điểm. Ban tổ chức APMO của mỗi nước (hoặc lãnh thổ) chấm bài của học sinh mình rồi gửi kết quả của n ($n \leq 10$) bài làm tốt nhất cho Ban tổ chức APMO quốc tế (kèm theo bản photocopy một số bài). Ban tổ chức APMO quốc tế đã công bố kết quả chung như sau : điểm trung bình mỗi thí sinh của tất cả các đội là M = **15,65** (điểm trung bình mỗi thí sinh của một đội kí hiệu là m). Điểm đạt huy chương vàng (HCV) là **23,25**, điểm đạt huy chương bạc (HCB) là **18,18**, điểm đạt huy chương đồng (HCĐ) là **13,12**. Thí sinh được bằng khen (BK) phải đạt điểm HCĐ hoặc làm trọn vẹn 1 bài. Theo thể lệ cuộc thi, mỗi đội chỉ được không quá 1 HCV, không quá 3 HC Vàng và Bạc, không quá 7 HC Vàng, Bạc và Đồng.

TT	Tên đội	n	m	HCV	HCB	HCĐ	BK
1	Achentina	10	19,40	1	2	4	3
2	Ôxtralia	10	21,10	1	2	4	3
3	Canađa	10	20,70	1	2	4	3
4	Chilê	7	4,57				1
5	Côlômbia	10	12,90		1	5	4
6	Côsta Rica	10	7,20		1		3
7	Êquađo	10	1,30				
8	Hồng Kông	10	19,60	1	2	4	3
9	Inđônêsia	10	12,20	1		5	4
10	Hàn Quốc	10	25,20	1	2	4	3
11	Pêru	10	12,90			3	6
12	Philippin	10	10,80			3	7
13	Singapo	10	17,60	1	2	3	4
14	Nam Phi	10	12,00	1		3	3
15	Đài Loan	10	28,40	1	2	4	3
16	Thái Lan	10	13,90			6	3
17	Trinidat Tôbagô	10	6,30		1		3
18	Hoa Kì	10	25,00	1	2	4	3
19	Việt Nam	10	26,30	1	2	4	3

Đội Việt Nam chiếm số giải tối đa dành cho mỗi nước :

1 HCV : *Nguyễn Trung Lập* (Vĩnh Phúc) : 30 điểm

2 HCB : *Vũ Việt Tài* (Nam Định) : 29 điểm; *Bùi Viết Lộc* (ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội): 28 điểm

4 HCĐ : *Tạ Anh Sơn* (Phú Thọ) : 28 điểm; *Đỗ Trường Giang* (Hà Nội) : 28 điểm; *Nguyễn Quang Bằng* (Hải Dương) : 26 điểm; *Nguyễn Anh Quân* (Hải Phòng) : 25 điểm.

3 BK : *Trần Đức Sơn* (ĐHSP Vinh) : 24 điểm ; *Trần Tuấn Anh* (Khánh Hòa) : 23 điểm; *Trần Quang Vinh* (ĐHQG Tp Hồ Chí Minh) : 22,5 điểm

Trong các bài giải của Việt Nam có 24 bài đạt từ 19 điểm trở lên và có 32 bài đạt từ 14 đến 18 điểm.

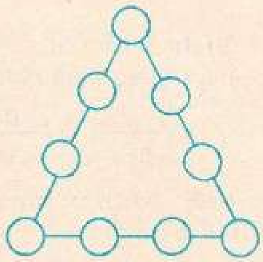
Xin giới thiệu đề thi Olympic toán châu Á - Thái Bình Dương lần thứ 12 (3/2000) :

ĐỀ THI APMO 2000

Bài 1. Tính tổng $S = \sum_{i=0}^{101} \frac{x_i^3}{1 - 3x_i + 3x_i^2}$

trong đó $x_i = \frac{i}{101}$.

Bài 2. Cho trước 9 hình tròn được xếp thành một tam giác như hình vẽ dưới đây.



Mỗi số 1, 2, ..., 9 phải được điền vào một trong các hình tròn đó sao cho mỗi hình tròn chứa đúng một trong các số đó và thỏa mãn đồng thời hai yêu cầu sau :

(i) các tổng của bốn số trên mỗi cạnh bằng nhau.

(ii) các tổng bình phương của bốn số trên mỗi cạnh bằng nhau.

Tìm tất cả các cách điền như thế.

Bài 3. Cho tam giác ABC. Gọi M và N là các điểm trên cạnh BC sao cho AM là trung tuyến và AN là phân giác trong của tam giác ABC. Đường thẳng vuông góc với AN tại N cắt đường thẳng MA tại Q và cắt đường thẳng BA tại P. Đường thẳng vuông góc với BA tại P cắt đường thẳng AN tại O. Chứng minh rằng đường thẳng QO vuông góc với đường thẳng BC.

Bài 4. Giả sử n và k là các số nguyên dương sao cho $n > k$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}} < \frac{n!}{k!(n-k)!} < \frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}$$

Bài 5. Cho trước một hoán vị $(a_0, a_1, ..., a_n)$ của dãy $0, 1, ..., n$. Một phép hoán vị của $(a_0, a_1, ..., a_n)$ được gọi là *hợp lệ* nếu phép hoán vị đó chỉ đổi chỗ phần tử a_i với phần tử a_j mà trong đó $a_i = 0$ ($i > 0$) và $a_j = a_{i-1} + 1$.

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho từ hoán vị $(1, n, n-1, ..., 3, 2, 0)$ ta thu được hoán vị $(1, 2, ..., n, 0)$ bằng cách thực hiện một số hữu hạn phép hoán vị hợp lệ./.

Nhìn ra thế giới

TỔ CHỨC THI HỌC SINH GIỎI TOÁN Ở MỸ

ĐẶNG HÙNG THẮNG
(Trường ĐHKHTN–ĐHQG Hà Nội)

Nhân dịp kì thi Olympic Toán quốc tế lần thứ 42 (tháng 7/2001) sẽ được tổ chức tại Mỹ, xin giới thiệu việc tổ chức thi chọn học sinh giỏi (HSG) ở Mỹ.

I. Vài nét về thành tích của đội tuyển Mỹ

Nước Mỹ lần đầu tham gia Olympic Toán quốc tế vào năm 1974. Đến năm 1999, sau 25 lần dự thi với 165 lượt thí sinh, đội tuyển Mỹ đã giành được tổng cộng 152 huy chương (HC) trong đó có 48 HV Vàng, 76 HC Bạc và 28 HC Đồng. Số huy chương đoạt được trong một lần thi trung bình là 152/25 ≈ 6,08 và số HC Vàng trung bình là 48/25 ≈ 1,92.

Đội Mỹ đã 4 lần xếp thứ nhất vào các năm 1977, 1981, 1986, 1994 và 21 lần đứng trong tốp 5 đội mạnh nhất. Thành tích kỉ lục mà đội Mỹ giành được tại kì thi IMO lần thứ 35 tại Hồng Kông là cả 6 thành viên của đội đều đạt điểm tuyệt đối 42/42. Mỹ lần đầu tiên đã đăng cai IMO vào năm 1981 và sẽ lại tổ chức vào năm 2001.

Nhân đây hãy so sánh với Việt Nam. Nước ta tham dự IMO lần đầu vào năm 1974. Cho đến năm 1999 đã tham dự 23 lần với 139 lượt thí sinh, giành được tổng cộng 124 HC, trong đó có 22 HC Vàng, 58 HC Bạc và 44 HC Đồng. Số HC đoạt được trong một lần thi trung bình là 124/23 ≈ 5,39 và số HC Vàng trung bình là 22/23 ≈ 0,956. Thành tích cao nhất của Việt Nam cho đến nay là xếp thứ 3 (1999) và đã 4 lần trong tốp 5 đội mạnh nhất.

II. Tổ chức thi học sinh giỏi ở Mỹ

Kỳ thi HSG Toán bậc Trung học của Mỹ lần đầu tiên được tổ chức cách đây 50 năm. Kì thi HSG Toán ở Mỹ được tổ chức hàng năm gồm nhiều giai đoạn. Chịu trách nhiệm tổ chức kì thi là Ủy ban Olympic Toán (AMC), dưới sự bảo trợ của Hội Toán học Mỹ và được tài trợ bởi 15 tổ chức khác.

Giai đoạn 1: Cuộc thi Toán toàn nước Mỹ vòng 1 (AMC 12 và AMC 10). Cuộc thi mở rộng cho tất cả các thí sinh trung học ở Mỹ, ai có nguyện vọng đều có thể dự thi. Học sinh lớp 10, 11 hay 12 có quyền đăng kí dự thi AMC 12 còn AMC 10 chỉ dành cho học sinh lớp 10. Lệ phí thi là 30 USD. Thời gian là 75 phút. Đề thi ở dạng trắc nghiệm, gồm 25 bài toán (mỗi bài toán có 5 câu trả lời trong đó chỉ có 1 câu trả lời đúng). Mỗi câu đúng được 6 điểm, câu bỏ trống được 2 điểm còn câu trả lời sai thì không được điểm nào. Điểm tối đa là 25×6 điểm = 150 điểm.

AMC 10 và AMC 12 được tổ chức trong cùng một ngày vào giữa tháng 2. Trong năm 1999 vừa qua có khoảng gần 400000 học sinh của hơn 5000 trường khắp nước Mỹ tham dự. Có lẽ đây là cuộc thi toán dành cho học sinh trung học lớn nhất thế giới. Vì hình thức thi theo kiểu trắc nghiệm nên có thể thực hiện chấm thi bằng máy tính, vừa tiết kiệm kinh phí vừa cho kết quả nhanh và chính xác. Trong vòng chưa đầy hai tuần thí sinh đã được thông báo kết quả.

Giai đoạn 2: Cuộc thi Toán toàn nước Mỹ vòng 2 (AIME). Những người đạt trên 100 điểm của AMC 12 hoặc trong số 10% thí sinh có điểm cao nhất của AMC 10 được mời dự thi tiếp vòng 2 (AIME), tổ chức vào cuối tháng 3. Có khoảng 6000-7000 học sinh dự kỳ thi này. Thời gian thi là 3 giờ. Đề thi gồm 15 bài toán, nói chung khó hơn các bài toán của giai đoạn 1. Mỗi bài toán được thiết kế sao cho đáp số là một số nguyên từ 0 đến 999. Thí sinh chỉ cần viết đáp số, không cần giải thích chứng minh. Với cách thi này khả năng đoán mò được hạn chế ở mức rất thấp đồng thời vẫn cho phép thực hiện chấm thi bằng máy tính. Mỗi câu đúng được 10 điểm, câu sai không được điểm nào.

Giai đoạn 3: Cuộc thi HSG quốc gia vòng chung kết (USAMO) 170 thí sinh đạt điểm cao nhất của kì thi AIME được tham gia cuộc thi HSG Toán quốc gia (USAMO) tổ chức vào đầu tháng 5. Đây là cuộc thi viết gồm hai buổi thi, mỗi buổi 3 tiếng. Trong mỗi buổi thí sinh phải giải 3 bài toán khó đòi hỏi khả năng sáng tạo, năng khiếu và sự hiểu biết sâu sắc về toán học của thí sinh. Mỗi bài được tối đa 7 điểm, như vậy điểm tối đa của USAMO là 42 điểm. Sau đây là một bài toán của kì thi USAMO năm 1997 :

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên n thì tồn tại và duy nhất một đa thức Q với hệ số trong tập hợp $\{0, 1, 2, ..., 9\}$ *sao cho* $Q(-2) = Q(-5) = n$

12 thí sinh đạt điểm cao nhất của USAMO được mời về thủ đô Washington vào đầu tháng 6 để tham dự buổi lễ trao giải thưởng. Buổi lễ trao giải do Hội Toán học Mỹ, Bộ Giáo dục quốc gia, Viện Hàn lâm khoa học, Quỹ Khoa học quốc gia phối hợp tổ chức với các nhà tài trợ là Công ty Microsoft và Matilda Wilson Foundation. Sau lễ trao giải trọng

thể là buổi nói chuyện của các nhà khoa học và toán học nổi tiếng và một bữa tiệc tại nhà khách của chính phủ. Các học sinh đoạt giải có cơ hội gặp gỡ tiếp xúc với các nhà khoa học và toán học hàng đầu của Mỹ.

Giai đoạn chót: Trường hè Olympic Toán học (MOSP): 12 học sinh chiến thắng trong kì thi USAMO (nhóm 1) và 12 em học sinh (từ lớp 11 trở xuống) có tổng số điểm cao nhất trong 3 kì thi USAMO, AMC 12 và AIME (nhóm 2) được mời tham dự Trường hè Olympic Toán học (MOSP) kéo dài trong 1 tháng trước khi thi Toán quốc tế. Ngay khi bắt đầu trường hè 12 em nhóm 1 sẽ tham dự kì thi chọn đội tuyển IMO để tranh 6 vị trí chính thức trong đội tuyển Mỹ. Giống như kì thi USAMO, kì thi chọn đội tuyển gồm hai buổi, mỗi buổi 3 giờ với 3 bài toán. Trường hè có mục đích trước mắt là bồi dưỡng cho các em thêm các kiến thức và kĩ năng giải Toán, chuẩn bị thật tốt cho các em bước vào kì thi IMO sắp tới, đồng thời cũng có mục tiêu xa hơn nhằm khuyến khích các em chọn Toán học làm nghề nghiệp sau này. Việc sống chung với nhau ở trường hè đã tạo một bầu không khí hợp tác, phát triển tinh thần đồng đội của các em. Trường hè được tổ chức tại Trường ĐH Tổng hợp Nebreka nơi có phòng học, thư viện rất tốt, yên tĩnh và khu nội trú ăn ở thuận tiện, các phương tiện giải trí đầy đủ. Trong thời gian 4 tuần học sinh sẽ nghe các bài giảng và tham gia các buổi luyện Toán dưới sự hướng dẫn của các thầy giáo giỏi và sự trợ giúp đắc lực của các cựu học sinh đã tham gia các IMO trước. Nhiều vấn đề quan trọng của toán học thường gặp trong nội dung thi IMO như số học, đa thức, phương trình hàm, tổ hợp, bất đẳng thức, số phức, hình học, graph... được chú trọng. Buổi sáng học lí thuyết, buổi chiều luyện toán, thảo luận nhóm, thuyết trình ở xêmina, làm bài kiểm tra và các hoạt động toán học khác. Buổi tối và một số buổi chiều nghỉ ngơi . Các học sinh có thể chơi thể thao, xem phim, chơi trò chơi điện tử... Tất cả mọi chi phí bao gồm ăn ở, đi lại, tiền học phí... đều được các tổ chức tài trợ.

Các học sinh tham gia đội tuyển sau đó đều được học bổng học tại các trường đại học danh tiếng của Mỹ như Harvard, Stanford, Columbia, MIT,... Nhiều người trong số họ sau này đã có học vị Tiến sĩ và trở thành giáo sư đại học. Một số khác làm việc trong các công ty tin học lớn hoặc trong các công ty chứng khoán bảo hiểm..., ở đó những bộ óc toán học giỏi tỏ ra rất có ích./.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 31

Problem. Suppose that each of n people knows exactly one piece of information, and all n pieces are different. Every time a person A phones person B, A tells B everything he knows, while B tells A nothing. What is the minimum number of phone calls between pairs of people needed for everyone to know everything ?

Solution. Denote the n people by $A_1, ..., A_n$ and a call from A_i to A_j by $A_i \to A_j$. Let $f(n)$ denote the minimum number of calls which can leave everybody fully informed. The particular sequence

$$A_1 \to A_n, A_2 \to A_n, ..., A_{n-1} \to A_n,$$
$$A_n \to A_1, A_n \to A_2, ..., A_n \to A_{n-1}.$$

contains $2n$–2 calls and leave everybody informed, showing that $f(n) \le 2n - 2$

Suppose that we have a sequence of calls which leaves everybody informed. Consider the crucial call at the end of which the receiver (call him A) is the first person to be fully informed. Clearly, each of the n–1 people other than A must have placed at least one call no later than the crucial call. Also each of these n–1 people (being not fully informed) must receive at least one call after the crucial one. Hence the given sequence contains at least 2(n–1) calls. Thus $f(n) = 2n$–2.

Từ mới:

exactly = chính xác, đúng
piece = mẩu, phần
information = tin tức, thông tin
person = người, nhân vật
phone = gọi điện (động từ)
while = trong lúc, trong khi
minimum = cực tiểu
call = cú điện thoại (danh từ), gọi (động từ)
need = cần, phải (động từ)
leave = để cho, để lại (động từ)
fully = hoàn toàn
inform = thông báo (động từ)
particular = đặc biệt, riêng (tính từ)
sequence = dãy
crucial = quan trọng, quyết định (tính từ)
receiver = người nhận
receive = nhận
contain = chứa, bao gồm.

NGÔ VIỆT TRUNG

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

VỀ CÁCH BIỂU DIỄN cosnx THEO cos$x$

TRƯƠNG CÔNG THÀNH
(Nhà xuất bản Giáo dục)

Trên tạp chí THTT số 249 (3/1998) có bài *"Nhị thức Niutơn với các hàm số sin và cosin"* của tác giả Nguyễn Công Sứ, trong đó trình bày cách tìm công thức tổng quát biểu diễn cosnx và sinnx theo cos$x$, sin$x$ nhờ tam giác số trong bảng Pascal.

Bài báo này góp thêm một ý về cách xác định các hệ số của sự biểu diễn cosnx theo cos$x$.

Một vài công thức biểu diễn đầu tiên của cosnx theo cos$x$ là :

$\cos 0x = 1$
$\cos x = 1\cos x$
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$
$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$
$\cos 6x = 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1$
$\cos 7x = 64\cos^7 x - 112\cos^5 x + 56\cos^3 x - 7\cos x$

Nếu chỉ xét các hệ số của các biểu thức trên ta được bảng hệ số dạng tam giác dưới đây (bỏ các cột ứng với hệ số 0), trong đó n là số hàng, k là số cột, giao giữa hàng n và cột k là hệ số $a_{n,k}$ với $m = n-2k$.

Dạng tổng quát : $\cos nx = \sum_{0\le k\le \frac{n}{2}} a_{n,k}\cos^{n-2k}x =$

$a_{n,0}\cos^n x + a_{n,1}\cos^{n-2}x + a_{n,2}\cos^{n-4}x + ...$

n \ k	0	1	2	3
0	1			
1	1			
2	2	−1		
3	4	−3		
4	8	−8	1	
5	16	−20	5	
6	32	−48	18	−1
7	64	−112	56	−7

Từ bảng hệ số một cách tự nhiên xuất hiện câu hỏi : Cấu trúc của bảng số trên như thế nào ?

Các hệ số $a_{n,k}$ trong bảng có mối liên hệ gì ?

Có thể viết nối tiếp bảng trên một cách nhanh chóng không ?

Có thể viết ngay công thức cosnx theo cos$x$ với mỗi số n ?

1) *Công thức xuất phát*

Từ $2\cos nx = 2\cos((n-1)x + x) =$
$= 2\cos(n-1)x\cos x - 2\sin(n-1)x\sin x$
và $-2\sin(n-1)x\sin x = \cos nx - \cos(n-2)x$ với mọi $n \ge 2$ ta có

$$\mathbf{\cos nx = 2\cos(n-1)x\cos x - \cos(n-2)x} \quad (1)$$

2) *Mối liên hệ giữa các hệ số $a_{n,k}$*

Vì $\cos^{n-2k}x = \cos^{(n-1)-2k}x \,.\, \cos x =$
$= \cos^{(n-2)-2(k-1)}x$ nên từ (1) có

$$a_{n,k} = 2a_{n-1,k} - a_{n-2,k-1} \quad (2)$$

với $1 \le k \le \frac{n}{2}, n \ge 2$

và $a_{n,0} = 2a_{n-1,0}$ với $k = 0, n \ge 2$ (2')

$a_{2k,k} = (-1)^k$ với $n = 2k$ (2'')

Chẳng hạn : $a_{5,0} = 2a_{4,0} = 2.8 = 16$;
$a_{6,3} = (-1)^3 = -1$;
$a_{7,2} = 2a_{6,2} - a_{5,1} = 2.18 - (-20) = 56$.

Hệ thức (2') và (2'') có thể coi là trường hợp riêng của (2) nếu đặt $a_{n,k} = 0$ với $k < 0$ hoặc $n < 2k$

Nhờ công thức (2) bạn có thể viết tiếp bảng hệ số $a_{n,k}$.

3) *Chú ý* : Tổng các hệ số của một hàng tùy ý bằng 1, nghĩa là :

$$\sum_{0\le k\le \frac{n}{2}} a_{n,k} = 1 \quad (3)$$

Thực vậy, (3) đúng với $n = 1, 2, 3$. Giả sử (3) đúng với mọi số không lớn hơn n thì

$$\sum_{0\le k\le \frac{n}{2}} a_{n,k} = 2\sum_{0\le k\le \frac{n-1}{2}} a_{n-1,k} - \sum_{0\le k-1\le \frac{n-2}{2}} a_{n-2,k-1}$$

$= 2.1 - 1 = 1$.

Vậy (3) đúng với n.

4) *Công thức tổng quát của $a_{n,k}$*.

Có thể viết :

$$\cos 6x = \frac{6}{6}.2^5.C_6^o.\cos^6 x - \frac{6}{5}.2^3.C_5^1.\cos^4 x + \frac{6}{4}.2^1.C_4^2.\cos^2 x - \frac{6}{3}.2^{-1}.C_3^3.$$

$$\cos 7x = \frac{7}{7}.2^6.C_7^o.\cos^7 x - \frac{7}{6}.2^4.C_6^1.\cos^5 x + \frac{7}{5}.2^2.C_5^2.\cos^3 x - \frac{7}{4}.2^o.C_4^3.\cos x$$

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng :

$$a_{n,k} = (-1)^k\frac{n}{n-k}.2^{n-1-2k}.C_{n-k}^k \quad (4)$$

Dễ thấy (4) đúng với $n = 1, 2, 3$. Giả sử (4) đúng với mọi số không lớn hơn n thì

$$a_{n,k} = 2a_{n-1,k} - a_{n-2,\,k-1} =$$

$$= (-1)^k \cdot \frac{n-1}{n-1-k} \cdot 2^{n-1-2k} \cdot C_{n-1-k}^{k} -$$

$$- (-1)^{k-1} \frac{n-2}{n-1-k} \cdot 2^{n-1-2k} \cdot C_{n-1-k}^{k-1}$$

$$= (-1)^k \frac{2^{n-1-2k}}{n-1-k} \left((n-1)C_{n-1-k}^{k} + (n-2)C_{n-1-k}^{k-1} \right)$$

$$= (-1)^k \frac{n}{n-k} \cdot 2^{n-1-2k}\, C_{n-k}^{k}.$$

Vậy (4) đúng với n.

Nhờ công thức tổng quát của $a_{n,k}$ ta có thể viết được ngay công thức biểu diễn $\cos nx$ theo $\cos x$ với mỗi n, chẳng hạn $\cos 6x$, $\cos 7x$ như ở trên.

5) *Mối liên hệ giữa số $a_{n,k}$ với hệ số trong khai triển nhị thức Niutơn.*

Ta cũng có thể viết

$$\cos 6x = \cos^6 x\,(1.C_6^0 + 1.C_6^2 + 1.C_6^4 + 1.C_6^6)$$
$$- \cos^4 x\,(1.C_6^2 + 2.C_6^4 + 3.C_6^6)$$
$$+ \cos^2 x\,(1.C_6^4 + 3.C_6^6)$$
$$- \cos^0 x\,(1.C_6^6)$$

$$\cos 7x = \cos^7 x\,(1.C_7^0 + 1.C_7^2 + 1.C_7^4 + 1.C_7^6)$$
$$- \cos^5 x\,(1.C_7^2 + 2.C_7^4 + 3.C_7^6)$$
$$+ \cos^3 x\,(1.C_7^4 + 3.C_7^6)$$
$$- \cos x\,(1.C_7^6)$$

Lập bảng các hệ số của các công thức trên (bỏ các dấu cộng) rồi *quay bảng* đó ta được bảng sau, trong đó thừa số bên trái của mỗi tích lập thành tam giác số Paxcan.

$$1.C_n^0$$
$$1.C_n^2 \qquad 1.C_n^2$$
$$1.C_n^4 \qquad 2.C_n^4 \qquad 1.C_n^4$$
$$1.C_n^6 \qquad 3.C_n^6 \qquad 3.C_n^6 \qquad 1.C_n^6$$

Nếu các bạn biết phép tính ma trận thì có thể viết :

$$\cos 6x = \left[C_6^0\ C_6^2\ C_6^4\ C_6^6 \right] \begin{bmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&1&1 \\ 0&1&2&1 \\ 1&3&3&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ \cos^2 x \\ -\cos^4 x \\ \cos^6 x \end{bmatrix}$$

$$\cos 7x = \left[C_7^0\ C_7^2\ C_7^4\ C_7^6 \right] \begin{bmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&1&1 \\ 0&1&2&1 \\ 1&3&3&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos x \\ \cos^3 x \\ -\cos^5 x \\ \cos^7 x \end{bmatrix}$$

So sánh bảng số trên với công thức (4), rút ra công thức sau với $0 \le k \le \frac{n}{2}$:

$$C_k^0 \cdot C_n^{2k} + C_{k+1}^1\, C_n^{2k+2} + C_{k+2}^2\, C_n^{2k+4} + \ldots =$$

$$= \frac{n}{n-2} \cdot 2^{n-1-2k} \cdot C_{n-k}^{k}$$

hay $$\sum_{0 \le t \le \frac{n}{2}-k} C_{k+t}^{t}\, C_n^{2(k+t)} = \frac{n}{n-k} \cdot 2^{n-1-2k} \cdot C_{n-k}^{k} \quad (5)$$

Bạn đọc có thể chứng minh được công thức (5) hay không ?

Tương tự như trên, các bạn hãy lập bảng hệ số và tìm dạng tổng quát của hệ số trong công thức biểu diễn $\sin nx$ theo $\sin x$./.

TRỰC QUAN TRONG GIẢI TOÁN

(Tiếp trang 11)

Ta có $MN^2 = (a+b)^2 + \left(a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^2$

$$= (a+b)^2 \left[1 + \left(1 + \frac{1}{ab} \right)^2 \right]$$

$$= (a+b)^2 \left(2 + \frac{1}{a^2b^2} + \frac{2}{ab} \right) \ge$$

$$\ge 4ab \left(2 + \frac{1}{a^2b^2} + \frac{2}{ab} \right) = 4 \left(2ab + \frac{1}{ab} + 2 \right) \ge$$

$$\ge 4(2\sqrt{2} + 2) = 8(1 + \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow MN \ge 2\sqrt{2(1 + \sqrt{2})}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = \sqrt[4]{1/2} \approx 0{,}84$

Vậy với : $M = (\sqrt[4]{1/2};\ \sqrt[4]{1/2} + \sqrt[4]{2})$;

$N = (-\sqrt[4]{1/2}\ ;\ -\sqrt[4]{1/2} - \sqrt[4]{2})$ thì

$MN = 2\sqrt{2(1 + \sqrt{2})}$ là giá trị nhỏ nhất.

Lưu ý rằng $2\sqrt{2(1 + \sqrt{2})} \approx 4{,}39 < 2\sqrt{5} \approx 4{,}47$.

Đường thẳng MN chính là trục đối xứng của hypebol (H).

***LTS.** Trong đề thi tuyển sinh vào đại học của một số trường mấy năm gần đây có xuất hiện loại toán này và nhiều học sinh đã mắc sai lầm như tác giả phát hiện. Nếu quay đồ thị quanh tâm O một góc $27^0 30'$ (ngược chiều kim đồng hồ) thì trực quan sẽ giúp cho các bạn dự đoán... chính xác.*

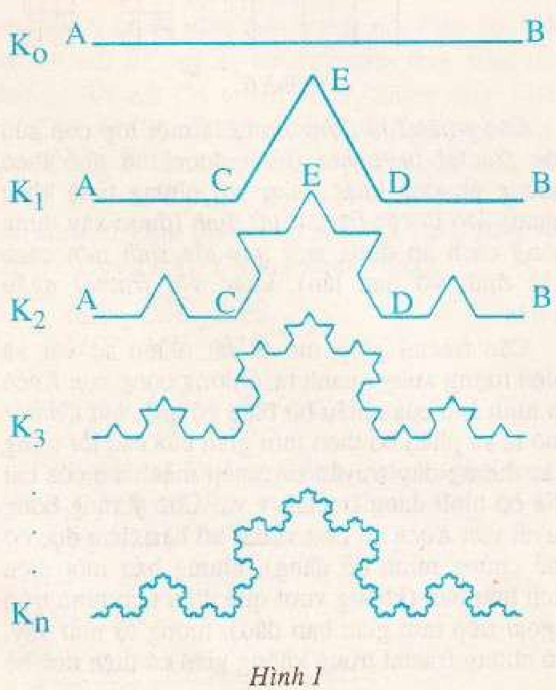
GIỚI THIỆU VỀ TOÁN HỌC CAO CẤP

HÌNH HỌC FRACTAL LÀ GÌ ?

HOÀNG CHÚNG
(Tp Hồ Chí Minh)

Hình học Ơclit (Euclid) được giới thiệu ở trường trung học với việc khảo sát các hình đa giác, hình tròn, hình đa diện, hình cầu, hình nón, v.v... Hơn hai nghìn năm qua, hình học Euclid đã có tác dụng to lớn đối với nền văn minh nhân loại, từ chỗ đo đạc ruộng đất đến vẽ đồ án xây dựng nhà cửa, chế tạo vật dụng và máy móc, từ chỗ mô tả quỹ đạo của các hành tinh trong hệ Mặt Trời đến mô tả cấu trúc của nguyên tử. Tuy nhiên, qua hình học Euclid ta nhìn mọi vật dưới dạng "đều đặn", "trơn tru". Với những hình dạng trong hình học Euclid, ta không thể hình dung và mô tả được nhiều vật thể rất quen thuộc chung quanh ta như quả núi, bờ biển, đám mây, nhiều bộ phận trong cơ thể người (phổi, mạch máu, ...) v.v... là những vật thể cực kì *không đều đặn, rất gồ ghề*. Một ví dụ đơn giản : bờ biển đảo Phú Quốc dài bao nhiêu ? Ta không thể có được câu trả lời, nếu dùng cách đo hình học quen thuộc, dù thước đó có nhỏ mấy đi nữa, ta cũng đã bỏ qua những lồi lõm giữa hai đầu của thước đo ấy, nhất là chỗ bờ đá nhấp nhô ; và với thước đo càng nhỏ, ta có kết quả càng lớn.

Hình học Phracton (Fractal) ra đời đã góp phần giải quyết bất lực nói trên của hình học Euclid. Trước hết, ta tìm hiểu về Fractal qua vài ví dụ :

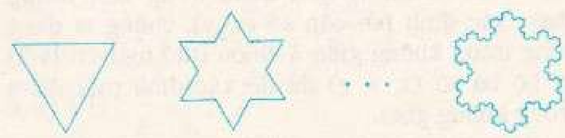


Hình 1

***Đường cong* von Kock**

Lấy một đoạn thẳng AB bất kì (K_0, hình 1) ; chia AB ra ba phần bằng nhau ($AC = CD = DB$), dựng tam giác đều CED trên đoạn thẳng ở giữa, rồi xóa cạnh CD đi, ta được hình K_1. Quy tắc biến đổi từ hình ban đầu K_0 thành hình K_1 gọi là *quy tắc sinh*. Áp dụng quy tắc sinh này về cùng một phía theo chiều từ A đến B với bốn đoạn thẳng của K_1 ta được K_2, với 16 đoạn thẳng của K_2 ta được K_3..., Áp dụng quy tắc sinh vô hạn lần, ta được đường cong *von Koch K* mà K_n là một hình ảnh gần đúng. Đường cong này mang tên nhà toán học Thụy Điển Vôn Côc (1870 – 1924).

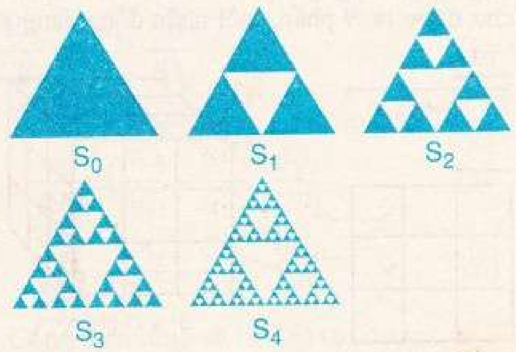
Nếu lấy hình ban đầu là một tam giác đều và áp dụng quy tắc sinh trên đây đối với mỗi cạnh của tam giác, thì ta được một hình gọi là *bông tuyết von Koch* (hình 2).



Hình 2

Thảm Sierpinski

Hình đầu tiên là một tam giác đều S_0 (hình 3). Quy tắc sinh : chia S_0 ra bốn hình tam giác đều bằng nhau, rồi xóa đi tam giác đều ở giữa, ta được S_1. Áp dụng quy tắc sinh đối với ba tam giác đều của S_1 ta được S_2, đối với 9 tam giác đều của S_2 ta được S_3, v.v... Áp dụng quy tắc này vô hạn lần, ta được *thảm Sierpinski* (tên nhà toán học Ba Lan Xiepinxki 1882-1969).



Hình 3

Đường cong *von Koch* và *thảm Sierpinski* có tính *đồng dạng nội tại* hay *tự đồng dạng*, theo nghĩa là một bộ phận của nó đồng dạng với chính nó. Trên hình 1, K_1 gồm 4 phần, mỗi phần đồng dạng với K_0 theo tỉ số đồng dạng 1/3; K_2 gồm 4 phần, mỗi phần đồng dạng với K_1 theo tỉ số 1/3; v.v... Áp dụng quy tắc sinh vô hạn lần, ta được đường cong K gồm 4 phần, mỗi phần đồng dạng với K theo tỉ số 1/3. Tương tự, trên hình 3, S_n gồm 3 phần, mỗi phần đồng dạng với S_{n-1} theo tỉ số đồng dạng 1/2 và áp dụng quy tắc sinh vô hạn lần ta được thảm Sierpinski S gồm 3 phần, mỗi phần đồng dạng với S theo tỉ số đồng dạng 1/2.

Những hình tự đồng dạng thuộc một lớp các Fractal

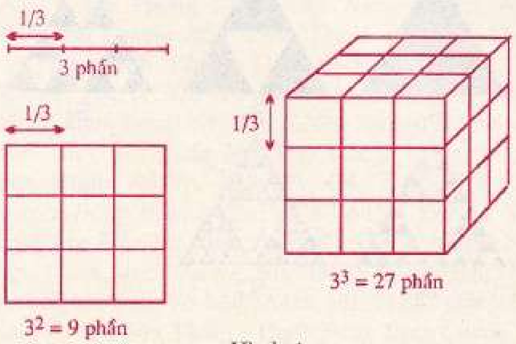
Với Fractal, có thể mở rộng khái niệm về *thứ nguyên* (số chiều), để mô tả những đối tượng *không đều đặn, gồ ghề*.

Trong hình học Euclid, ta nói đường thẳng có thứ nguyên 1 (số chiều là 1), theo nghĩa mỗi điểm trên đường thẳng được xác định bởi 1 số (tọa độ của điểm ấy); mặt phẳng có thứ nguyên 2 (số chiều là 2), vì mỗi điểm trong mặt phẳng được xác định bởi cặp số (x, y); chúng ta đang sống trong không gian 3 chiều (thứ nguyên là 3) vì bộ ba số (x, y, z) đủ để xác định một điểm trong không gian.

Thứ nguyên của một đối tượng hình học có thể định nghĩa một cách khác.

Xét các hình quen thuộc: đoạn thẳng, hình vuông, hình lập phương. Có thể chia mỗi hình này ra N phần, mỗi phần đồng dạng với hình ban đầu theo tỉ số $1/k$; với đoạn thẳng thì $N = k$, với hình vuông thì $N = k^2$, với hình lập phương thì $N = k^3$. Hình 4 minh họa điều này với $k = 3$. Ta nói đoạn thẳng có thứ nguyên 1, tương ứng với số mũ $d = 1$ trong công thức $N = k^d$; hình vuông có thứ nguyên 2, tương ứng với $d = 2$ và hình lập phương có thứ nguyên 3, tương ứng với $d = 3$.

Một cách tổng quát, nếu có thể chia một hình H cho trước ra N phần, mỗi phần đồng dạng với



Hình 4

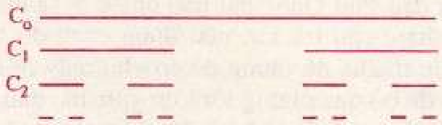
H theo tỉ số $\frac{1}{k}$ mà $N = k^d$ thì ta nói H có thứ nguyên d. Lấy lôgarit hai vế của đẳng thức trên (theo cùng một cơ số), ta có

$$\log N = d\log k \text{ hay } d = \frac{\log N}{\log k}$$

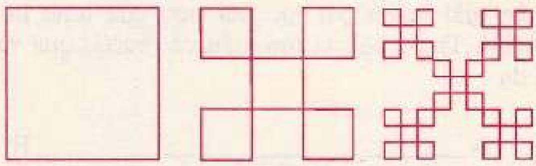
Đường cong *von Koch* K có thể chia ra $N = 4$ phần, mỗi phần đồng dạng với K theo tỉ số $\frac{1}{k} = \frac{1}{3}$, do đó đường cong *von Koch* có thứ nguyên là $d = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1{,}2619$.

Thảm Sierpinski S có thứ nguyên $d = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1{,}585$, vì S có thể chia ra $N = 3$ phần, mỗi phần đồng dạng với S theo tỉ số $\frac{1}{2}$.

Bạn đọc dễ dàng tính được thứ nguyên của các fractal trong *bụi* (bụi bặm) *Cantor* (hình 5) và hình 6.



Hình 5



Hình 6

Các *fractal tự đồng dạng* là một lớp con của các *fractal tự–aphin* (hình được thu nhỏ theo những phương khác nhau với những tỉ lệ khác nhau). Đó là các *fractal tất định* (được xây dựng bằng cách áp dụng *một quy tắc sinh* một cách xác định vô hạn lần), khác với *fractal ngẫu nhiên*.

Các fractal giúp mô tả rất nhiều sự vật và hiện tượng xung quanh ta. Đường cong *von Koch* là hình ảnh của nhiều bờ biển gồ ghề; *bụi Cantor* mô tả sự phân bố theo thời gian của các lỗi trong các đường dây truyền tin; mép mảnh vỡ của cái đĩa có hình dạng fractal, v.v... Chú ý rằng bông tuyết *von Koch* có chu vi dài vô hạn (bạn đọc có thể chứng minh dễ dàng), nhưng bao một diện tích hữu hạn (không vượt quá diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác ban đầu); tương tự như vậy, có những fractal trong không gian có diện tích bề mặt là vô hạn nhưng bao một thể tích hữu hạn. Những fractal đó giúp mô tả nhiều sự vật trong thiên nhiên, như hệ thống mạch máu, các phế nang trong cơ thể người (có cấu trúc fractal để chiếm diện tích tối đa trong một thể tích nhất định).

Hình học fractal mới ra đời cách đây chưa đầy 30 năm. Tuy rằng *đường cong von Koch, thảm Sierpinski, bụi Cantor* cũng như ý tưởng quan trọng về *thứ nguyên phân số* (Hausdorff, Besicovitch, ...) đã có từ cuối thế kỉ 19, đầu thế kỉ 20 (chú ý rằng đường cong *von Koch* là một đường cong liên tục không có tiếp tuyến tại bất cứ điểm nào), nhưng có thể coi nhà toán học Ba Lan Bơnoa Manđenbrôt (Benoit Mandelbrot) là người khai sinh ra hình học fractal. Thuật ngữ *fractal* do B.Mandelbrot đưa ra (dựa vào từ latin "fractus", có nghĩa là "phân đoạn", và cũng có nghĩa là "không đều", "gồ ghề") và sớm được giới khoa học thừa nhận. Hình học fractal đã phát triển rất nhanh chóng, gắn liền với *đồ họa vi tính*, có thể nói rằng nếu không có đồ họa vi tính thì hình học fractal không thể có diện mạo như hiện nay.

Benoit Mandelbrot là một nhà khoa học rất độc đáo. Năm 20 tuổi, thi đỗ vào École Normale Supérieure (trường Đại học Sư phạm), trường đại học danh tiếng bậc nhất của Pháp, ông chỉ học ở đó có một ngày, vì thấy xu hướng nghiên cứu của các nhà toán học ở đây quá thiên về lí thuyết trừu tượng không phù hợp với mình. Ông lại thi đỗ vào trường đại học nổi tiếng khác là École Polytechnique (Trường Đại học Bách Khoa), sau đó học tiếp một trường đại học Công nghệ ở Mỹ. Với thiên tài về tư duy hình ảnh và trực giác hình học, được sự trợ giúp của máy tính, ông đã đi vào rất nhiều lĩnh vực khoa học khác nhau (toán học, kinh tế học, kĩ thuật, sinh lí học...) và phát hiện nhiều ứng dụng lí thú của hình học fractal.

Chú ý rằng trong tháng 10-1999, ở Hà Nội có một triển lãm mang tên *"Trong thế giới các fractal"*, giới thiệu nhiều fractal rất đẹp và vai trò của hình học fractal. Sách giáo khoa toán học phổ thông gần đây ở nhiều nước cũng đã giới thiệu một vài fractal.

Bạn đọc quan tâm đến những ứng dụng rất phong phú của hình học fractal có thể tìm đọc cuốn sách *"Những điều kì thú về các hình thái hỗn loạn CHAOS"* của Nguyễn Ngọc Giao (NXB Giáo dục, 1998). Muốn hiểu thêm về Benoit Mandelbrot, có thể tìm trên Internet theo địa chỉ :

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/mat.../mandelbrot.html

Diễn đàn
DẠY VÀ HỌC TOÁN

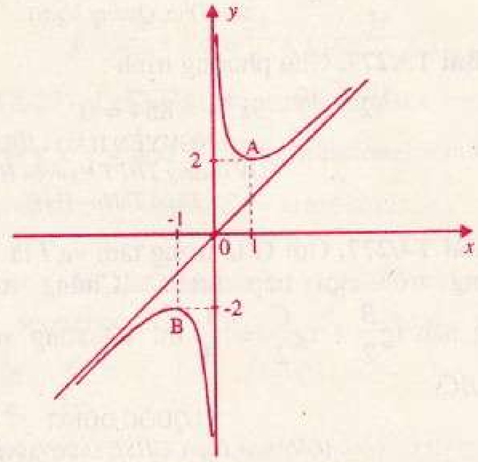
TRỰC QUAN trong giải toán ?

TƯỞNG MINH MINH
(Lệ Thủy – Quảng Bình)

Trong việc giải toán, nhiều khi trực quan giúp chúng ta tìm ra lời giải. Tuy nhiên, trực quan không phải lúc nào cũng dẫn đến dự đoán chính xác; không ít trường hợp, từ trực quan đã tạo ra những ngộ nhận đáng tiếc.

Bài toán sau đây là một ví dụ minh họa :

Bài toán : *Cho hypebol (H) :* $y = x + \frac{1}{x}$. *Tìm hai điểm M, N trên hai nhánh phân biệt của (H) sao cho độ dài MN nhỏ nhất.*



Nhiều học sinh sau khi vẽ (H) đã vội vàng khẳng định là giá trị nhỏ nhất của MN là khoảng cách giữa hai điểm cực trị $AB = 2\sqrt{5}$ với $A\,(1, 2)$; $B\,(-1, -2)$, sau đó cố gắng chứng minh bằng phương pháp hình học rằng A, B là hai điểm cần tìm.

Ta giải bằng phương pháp đại số :

Vì M, N là hai điểm thuộc hai nhánh phân biệt của (H) nên chúng có tọa độ

$M\left(a\,;a+\frac{1}{a}\right)$; $\left(-b;\,-b-\frac{1}{b}\right)$ với $a, b > 0$

(Xem tiếp trang 8)

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/277. Tìm tất cả các bộ số nguyên (a, b, c, d) thỏa mãn đồng thời các điều kiện :

$$\begin{cases} a^3 + 3b = c^3 \\ b^3 + 3a = d^3 \end{cases}$$

NGUYỄN DUY LIÊN
(GV trường THPT chuyên Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc)

Bài T2/277. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$20xy + 11xz + 2000yz$$

trong đó các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 2000$

NGUYỄN NGỌC KHOA
(GV trường THPT Huỳnh Thúc Kháng, Sơn Tịnh, Quảng Ngãi)

Bài T3/277. Giải phương trình :

$$\sqrt[5]{27}\,x^{10} - 5x^6 + \sqrt[5]{864} = 0$$

NGUYỄN HÀO LIỄU
(GV trường THPT Nguyễn Huệ, Thừa Thiên–Huế)

Bài T4/277. Gọi G là trọng tâm và I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. Chứng minh rằng nếu $\mathrm{tg}\frac{B}{2} \cdot \mathrm{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$ thì IG song song với BC.

VI QUỐC DŨNG
(GV khoa Toán, ĐHSP Thái Nguyên)

Bài T5/277. Cho tam giác ABC. Đường tròn tâm O nội tiếp ΔABC tiếp xúc với các cạnh AB, AC, BC lần lượt tại D, E, F. Đường tròn tâm Q bàng tiếp ΔABC tiếp xúc với cạnh BC, tia AB, tia AC theo thứ tự tại K, H, I. Đường thẳng DE cắt các tia BO và CO lần lượt tại M và N. Đường thẳng HI cắt các tia BQ và CQ lần lượt tại R và S. Chứng minh rằng :

a) $\Delta FMN = \Delta KRS$

b) $\dfrac{IS}{AB} = \dfrac{SR}{BC} = \dfrac{RH}{CA}$

NGUYỄN HỐI
(GV trường THPT Kim Sơn A, Ninh Bình)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/277. Chứng minh rằng số $2000^{2^{2000}}$ là tổng của hai số chính phương.

PHẠM ĐÌNH TRƯỜNG
(SV K41 khoa Toán Tin, ĐHKHTN–ĐHQG Hà Nội)

Bài T7/277. Tìm tất cả các số hữu tỉ p, r, s thỏa mãn :

$$p\cos\frac{\pi}{7} + r\cos\frac{2\pi}{7} + s\cos\frac{3\pi}{7} = 1.$$

NGUYỄN ĐỨC HUY
(GV trường THPT Lê Quý Đôn, Long An)

Bài T8/277. Cho số thực x sao cho $0 < x < \pi$ và $\frac{x}{\pi}$ không là số hữu tỉ. Đặt $S_1 = \sin x$, $S_2 = \sin x + \sin 2x$, ..., $S_n = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$. Gọi t_n là số các số hạng âm trong dãy S_1, S_2, ..., S_n. Chứng minh rằng : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{t_n}{n} = \frac{x}{2\pi}$

ĐINH THÀNH TRUNG
(SV K41 khoa Toán Tin, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội)

Bài T9/277. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm I và ngoại tiếp đường tròn tâm O. Đường thẳng qua I song song với một cạnh nào đó của tứ giác, cắt hai cạnh đối nhau ở hai điểm M, N. Chứng minh rằng độ dài MN không phụ thuộc vào việc chọn cạnh của tứ giác để kẻ đường thẳng song song với nó

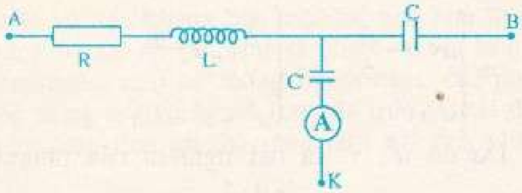
NGUYỄN XUÂN HÙNG
(GV trường THPT Lam Sơn, Thanh Hóa)

Bài T10/277. Cho tứ diện $ABCD$ nội tiếp một mặt cầu. Gọi G là trọng tâm của $ABCD$. Các đường thẳng AG, BG, CG, DG lần lượt cắt mặt cầu tại điểm thứ hai A_1, B_1, C_1, D_1. Chứng minh rằng $V_{ABCD} \le V_{A_1B_1C_1D_1}$. Đẳng thức xảy ra khi nào ?

NGUYỄN MINH PHƯƠNG
(SV BK84, K43, ĐH Bách Khoa Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/277. Cho mạch điện có sơ đồ như hình vẽ. Biết $Z_L = 100\Omega$; $Z_C = 200\Omega$; $Z_{C'} = 200\Omega$; $R_A \approx 0$. Hai đầu AB của mạch được nối với hiệu điện thế xoay chiều $u = U\sqrt{2}\sin\omega t$(V). Biết rằng khi nối K vào đầu A thì ampe kế chỉ 0,5(A) và qua tụ C có dòng điện $i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{3})$(A). Hỏi khi chuyển K sang nối vào đầu B thì số chỉ của ampe kế có



còn là 0,5(A) nữa không ? Vẽ giản đồ vectơ chính xác khi K nối với A.

TRẦN VĂN MINH
(GV Hà Nội)

Bài L2/277. Trên mặt nước, chiết suất $n=4/3$, có một thước gỗ mỏng, được khắc vạch đến mm. Một lăng kính thủy tinh hình lăng trụ đứng mà tiết diện thẳng là một tam giác ABC vuông tại A, $\hat{C} = 30^o$, mặt chứa AC được bôi đen. Đặt lăng kính lên thước sao cho cạnh qua B trùng vạch số 0, cạnh qua C trùng vạch số 40 và mặt đáy chứa BC của lăng kính chạm vào mặt nước. Đặt mắt trong không khí nhìn vào mặt chứa AB thì chỉ có thể nhìn được đến vạch số 31 của thước.

Hãy giải thích hiện tượng và tính chiết suất của thủy tinh.

TRẦN MẠNH HÙNG
(GV khối chuyên Toán Tin, ĐHSP Vinh, Nghệ An)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/277. Find all 4-uples of integers (a, b, c, d) satisfying simultaneously the following conditions :

$$\begin{cases} a^3 + 3b = c^3 \\ b^3 + 3a = d^3 \end{cases}$$

T2/277. Find the greatest value of the expression

$$20xy + 11xz + 2000yz$$

where x, y, z are natural numbers satisfying $x + y + z = 2000$

T3/277. Solve the equation :

$$\sqrt[5]{27}\, x^{10} - 5x^6 + \sqrt[5]{864} = 0$$

T4/277. Let G be the centroid and I be the incenter of triangle ABC. Prove that if

$\mathrm{tg}\frac{B}{2} \cdot \mathrm{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$ then IG is parallel to BC.

T5/277. Let be given a triangle ABC. Its incircle has center O and touches the sides AB, AC, BC respectively at D, E, F. Its escribed circle in the angle A has center Q and touches the side BC and the rays AB, AC respectively at K, H, I. The line DE cuts the rays BO and CO respectively at M and N. The line HI cuts the rays BQ and CQ respectively at R and S. Prove that :

i) $\Delta FMN = \Delta KRS$

ii) $\frac{IS}{AB} = \frac{SR}{BC} = \frac{RH}{CA}$

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/277. Prove that the number $2000^{2^{2000}}$ is the sum of two perfect squares.

T7/277. Find all rational numbers p, r, s satisfying

$$p\cos\frac{\pi}{7} + r\cos\frac{2\pi}{7} + s\cos\frac{3\pi}{7} = 1.$$

T8/277. Let be given a real number x such that $0 < x < \pi$ and $\frac{x}{\pi}$ is not a rational number.

Denote by : $S_1 = \sin x$, $S_2 = \sin x+\sin 2x$, ..., $S_n = \sin x + \sin 2x + ... + \sin nx$.

Let t_n be the number of negative terms of the sequence S_1, S_2, ..., S_n. Prove that $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{t_n}{n} = \frac{x}{2\pi}$.

T9/277. A given quadrilateral $ABCD$ is inscribed in a circle with center I and is circumscribed about a circle with center O. A line passing through I, parallel to a side of $ABCD$, cuts its two opposite sides at M and N. Prove that the length of MN does not depend on the choosen side to which the line is parallel.

T10/277. Let G be the centroid of a tetrahedron $ABCD$ which is inscribed in a sphere. The lines AG, BG, CG, DG cut again the sphere respectively at A_1, B_1, C_1, D_1. Prove that $V_{ABCD} \le V_{A_1B_1C_1D_1}$. When does equality occur ?

Bài T1/273. *Tìm tất cả các cặp số nguyên dương a, b sao cho* $\frac{a^2-2}{ab+2}$ *là số nguyên.*

Lời giải. (theo *Nguyễn Tiến Dũng*, 8^2, THCS Mỹ Hóa, Bến Tre).

Dễ thấy không có cặp số nguyên dương (a, b) nào mà $a = 1$ thỏa mãn đề bài. Do đó phải có $a \geq 2$.

Từ giả thiết suy ra

$(a^2-2) \vdots (ab+2) \Rightarrow b(a^2-2) \vdots (ab+2)$

$\Rightarrow a(ab+2) - 2(a+b) \vdots (ab+2)$

$\Rightarrow 2(a+b) \vdots (ab+2)$

$\Rightarrow 2(a+b) = k(ab+2)\ (k \in N^*)$

• Nếu $k = 1$, ta có :

$2(a+b) = ab+2 \Leftrightarrow (a-2)(b-2) = 2$

Do $a-2 \geq 0$ và $b-2 \geq 0$ nên chỉ xảy ra

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$$

Thử lại thấy chỉ có $a = 4$ và $b = 3$ là thỏa mãn đề bài.

• *Nếu* $k \geq 2$ ta có : $2(a+b) = k(ab+2) \geq 2(ab+2)$

$\Rightarrow\ a+b \geq ab+2\ \Rightarrow\ (a-1)(b-1)+1 \leq 0$ điều này không xảy ra.

Vậy chỉ có cặp số $(a, b) = (4, 3)$ thỏa mãn đề bài.

Nhận xét. Rất nhiều bạn có lời giải đúng.

TỐ NGUYÊN

Bài T2/273. *Giải phương trình*

$$5x^5 + 5ax^3 + a^2x + 5b = 0.$$

trong đó a, b là các số cho trước và $a \geq 0$.

Lời giải. Đặt $x = u+v$ thì $x^5 = (u+v)^5$

$\Rightarrow x^5 = u^5 + v^5 + 5uv(u^3+v^3) + 10u^2v^2(u+v)$

$\Rightarrow x^5 = u^5 + v^5 + 5uv[(u+v)^3 - 3uv(u+v)] + 10u^2v^2(u+v)$

$\Rightarrow x^5 = u^5 + v^5 + 5uvx^3 - 15u^2v^2x + 10u^2v^2x$

$\Rightarrow x^5 - 5uvx^3 + 5u^2v^2x - (u^5+v^5) = 0$

Thử tìm u, v thỏa mãn $\begin{cases} -5uv = a \\ -(u^5+v^5) = b \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv = -\frac{a}{5} \\ u^5+v^5 = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^5.v^5 = \frac{-a^5}{5^5} \\ u^5+v^5 = -b \end{cases}$$

Do đó u^5, v^5 là hai nghiệm của phương trình : $\quad t^2 + bt - \left(\frac{a}{5}\right)^5 = 0$

Ta có : $\Delta_t = b^2 + 4\left(\frac{a}{5}\right)^5 \geq 0$ vì $a \geq 0$ nên

$$t_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-b \pm \sqrt{b^2 + 4\left(\frac{a}{5}\right)^5}\right) = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{5}\right)^5}$$

Suy ra : $x = x_o = u+v =$

$$= \sqrt[5]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{5}\right)^5}} + \sqrt[5]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{5}\right)^5}}$$

là nghiệm của phương trình đã cho.

Ta chứng minh $x = x_o$ là nghiệm duy nhất.

Thật vậy, nếu $x > x_o$

$\Rightarrow x^5 > x_o^5;\ x^3 > x_o^3;\ x > x_o$

$\Rightarrow 5x^5 + 5ax^3 + a^2x + 5b >$

$> 5x_o^5 + 5ax_o^3 + a^2x_o + 5b = 0$

Nếu $x < x_o$ thì các bất đẳng thức trên cùng đổi chiều nên cũng không thỏa mãn.

Tóm lại phương trình luôn có nghiệm duy nhất $x = x_o$.

Nhận xét. 1) Nhiều bạn đưa ngay ra biểu thức x_o và chứng minh $x = x_o$ là nghiệm duy nhất. Lời giải trên đã trình bày cách tìm ra x_o.

2) Một số bạn biện luận quá nhiều trường hợp và dẫn đến kết luận sai. Chẳng hạn : "Xét $a>0$ và $b \neq 0$, viết phương trình về dạng:

$$x.a^2 + 5x^3.a + 5x^5 + 5b = 0$$

Phương trình đối với ẩn a nếu có nghiệm a_1, a_2 thì $a_1+a_2 = -5x^2 < 0\ (x \neq 0)$.

Điều này vô lí vì $a_1, a_2 > 0$. Từ đó kết luận $a>0$, $b \neq 0$ thì phương trình vô nghiệm".

Các bạn đã sai lầm khi cho rằng $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. Thựa ra a chỉ là nghiệm dương của phương trình ẩn a, phương trình ẩn *a chỉ cần có ít nhất một nghiệm dương*.

Có bạn còn tính x qua a, b và... x (?).

3) Các bạn có lời giải tốt là : **Phú Thọ:** *Hoàng Ngọc Minh*, 9C, THCS Việt Trì; **Hải Dương:** *Nguyễn Thành Nam, Phạm Thành Trung*, 9A, THPT Nguyễn Trãi, Tp Hải Dương.

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T3/273. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $x^2 + 3x + y^2 + 3y + \dfrac{9}{x^2+y^2+1}$ *trong đó x, y là các số dương thỏa mãn xy = 1.*

Lời giải. (của bạn *Nguyễn Văn Thanh*, 8A, THCS Lê Quý Đôn và nhiều bạn khác).

Đặt $A = x^2 + 3x + 3y + y^2 + \dfrac{9}{x^2+y^2+1}$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có :

$$A = (x^2+y^2+1) + \frac{9}{x^2+y^2+1} + 3x + 3y - 1 \geq$$

$$\geq 4\sqrt[4]{(x^2+y^2+1)\cdot\frac{9}{x^2+y^2+1}\cdot 3x.3y} - 1$$

$$= 4\sqrt[4]{81xy} - 1 = 12 - 1 = 11.$$

Đẳng thức đạt được khi và chỉ khi

$$x^2 + y^2 + 1 = \frac{9}{x^2+y^2+1} = 3x = 3y \Leftrightarrow x = y = 1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 11, tương ứng với giá trị $x = y = 1$.

Nhận xét. Phần lớn các bạn giải đều đúng và ngắn gọn như trên, có một vài bạn quên không phát biểu giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T4/273. *Cho tam giác ABC và hai điểm phân biệt M, N nằm bên trong nó. Các tia AM và AN cắt BC tại A_1 và A_2 tương ứng. Các tia BM và BN cắt CA tại B_1 và B_2 tương ứng. Các tia CM và CN cắt AB tại C_1 và C_2 tương ứng. Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của AA_1 và B_1C_1, BB_1 và C_1A_1, CC_1 và A_1B_1. Gọi P, Q, R lần lượt là giao điểm của AA_2 và BB_1, BB_2 và CC_1, CC_2 và AA_1. Chứng minh rằng :*

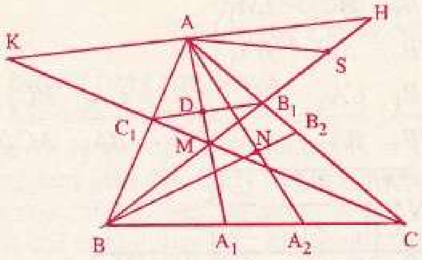
a) $\dfrac{AM}{MD} + \dfrac{BM}{ME} + \dfrac{CM}{MF} \geq 12$

b) $\dfrac{AP}{PA_2} + \dfrac{BQ}{QB_2} + \dfrac{CR}{RC_2} \geq 6.$

Lời giải. a) Đường thẳng qua A song song với B_1C_1 cắt tia BB_1 tại H, cắt tia CC_1 tại K. Áp dụng định lí Talet ta có :

$$\frac{AM}{MD} = \frac{MK}{MC_1} = \frac{KH}{B_1C_1}$$

$$= \frac{KA}{B_1C_1} + \frac{AH}{B_1C_1} = \frac{AC}{CB_1} + \frac{AB}{BC_1}$$



$$= 2 + \frac{AB_1}{CB_1} + \frac{AC_1}{BC_1} \quad (1)$$

Tương tự ta có $\dfrac{BM}{ME} = 2 + \dfrac{BA_1}{CA_1} + \dfrac{BC_1}{AC_1}$ (2)

$$\frac{CM}{MF} = 2 + \frac{CA_1}{BA_1} + \frac{CB_1}{AB_1} \quad (3)$$

Cộng theo từng vế (1) (2) (3) được

$$\frac{AM}{MD} + \frac{BM}{ME} + \frac{CM}{MF} = 6 + \left(\frac{AB_1}{CB_1} + \frac{CB_1}{AB_1}\right) + \left(\frac{AC_1}{BC_1} + \frac{BC_1}{AC_1}\right) + \left(\frac{BA_1}{CA_1} + \frac{CA_1}{BA_1}\right) \geq 12$$

do áp dụng BĐT $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2.$

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{AB_1}{CB_1} = \dfrac{CB_1}{AB_1}$, $\dfrac{AC_1}{BC_1} = \dfrac{BC_1}{AC_1}$, $\dfrac{BA_1}{CA_1} = \dfrac{CA_1}{BA_1}$

$\Leftrightarrow AB_1 = CB_1, AC_1 = BC_1, BA_1 = CA_1 \Leftrightarrow M$ là trọng tâm ΔABC.

b) Đường thẳng qua A song song với BC cắt tia BB_1 tại S. Áp dụng định lí Talet ta có :

$$\frac{AP}{PA_2} = \frac{AS}{BA_2} = \frac{AS}{BC}\cdot\frac{BC}{BA_2} = \frac{AB_1}{CB_1}\left(\frac{BA_2 + CA_2}{BA_2}\right)$$

$$= \frac{AB_1}{CB_1} + \frac{AB_1}{CB_1}\cdot\frac{CA_2}{BA_2} \quad (4)$$

Tương tự ta có :

$$\frac{BQ}{QB_2} = \frac{BC_1}{AC_1} + \frac{BC_1}{AC_1}\cdot\frac{AB_2}{CB_2} \quad (5)$$

$$\frac{CR}{RC_2} = \frac{CA_1}{BA_1} + \frac{CA_1}{BA_1}\cdot\frac{BC_2}{AC_2} \quad (6)$$

Cộng theo từng vế (4) (5) (6) được :

$$\frac{AP}{PA_2} + \frac{BQ}{QB_2} + \frac{CR}{RC_2} =$$

$$= \left(\frac{AB_1}{CB_1} + \frac{BC_1}{AC_1} + \frac{CA_1}{BA_1}\right) +$$

$$+ \left(\frac{AB_1}{CB_1} \cdot \frac{CA_2}{BA_2} + \frac{BC_1}{AC_1} \cdot \frac{AB_2}{CB_2} + \frac{CA_1}{BA_1} \cdot \frac{BC_2}{AC_2}\right) \geq$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{AB_1}{CB_1} \cdot \frac{BC_1}{AC_1} \cdot \frac{CA_1}{BA_1}} +$$

$$+ 3\sqrt[3]{\frac{AB_1.BC_1.CA_1}{CB_1.AC_1.BA_1} \cdot \frac{AB_2.BC_2.CA_2}{CB_2.AC_2.BA_2}} \quad (7)$$

do áp dụng BĐT Côsi.

Ta thấy

$$\frac{AB_1}{CB_1} \cdot \frac{BC_1}{AC_1} \cdot \frac{CA_1}{BA_1} = \frac{S_{ABM}}{S_{CBM}} \cdot \frac{S_{CBM}}{S_{CAM}} \cdot \frac{S_{CAM}}{S_{ABM}} = 1 \quad (8)$$

Tương tự $\frac{AB_2}{CB_2} \cdot \frac{BC_2}{AC_2} \cdot \frac{CA_2}{BA_2} = 1$ (9)

Thay thế (8), (9) vào (7) được

$$\frac{AP}{PA_2} + \frac{BQ}{QB_2} + \frac{CR}{RC_2} \geq 6.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{AB_1}{CB_1} = \frac{BC_1}{AC_1} = \frac{CA_1}{BA_1}$ và $\frac{AB_2}{CB_2} = \frac{BC_2}{AC_2} = \frac{CA_2}{BA_2}$ đồng thời có (8) (9) nên lúc đó M, N đều trùng với trọng tâm của ΔABC.

Nhận xét. 1) Một số bạn đã chứng minh $\frac{AM}{MA_1} \cdot \frac{BM}{MB_1} \cdot \frac{CM}{MC_1} \geq 8$ từ đó suy ra BĐT ở (a).

2) Câu (b) chính là trường hợp tổng quát của bài toán 4 do Jack Garfunkel nêu ra, đã đăng ở trang 8 THTT số 266 (8/1999). Nhiều bạn trước đây đã gửi lời giải bài toán này.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Yên Bái: *Trần Bình Minh*, 9K, THCS Lê Hồng Phong, thị xã Yên Bái; **Phú Thọ:** *Phạm Minh Hoàng*, 9A1, THCS Phong Châu, Phù Ninh, *Hoàng Ngọc Minh, Bùi Quang Nhã, Trần Thanh Hải*, 9C, THCS Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Trần Quốc Hội, Trần Thu Phương*, 8A, THCS Tự Lập, Mê Linh; **Bắc Ninh:** *Đặng Thành Long*, 9A, THCS Yên Phong; **Hà Nội:** *Tô Thùy Linh, Vũ Quốc Mỹ*, 9H, THCS Trưng Vương; **Nam Định:** *Đỗ Thị Hải Yến*, 9B, THCS Hải Hậu, *Nguyễn Đăng Hợp*, 8A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Nghệ An:** *Đậu Thị Ngọc Ánh*, 9C, THCS thị trấn Nam Đàn, *Quan Minh Vương*, 9B, THCS Sông Hiếu, Thái Hòa, Nghĩa Đàn, *Võ Văn Thành*, 9B, THCS Đặng Thai Mai, Vinh; **Thừa Thiên - Huế:** *Đặng Đình Chính*, 9A, THCS Phú Bài, Hương Thủy; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Duy Thành, Phạm Lê Thịnh*, 9A, THCS Huỳnh Thúc Kháng, Nghĩa Hành; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Tiến Việt*, 8B, *Trần Minh Bình*, 9/15, THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Công Thắng*, $9A_1$, THCB thị xã Cao Lãnh.

VIỆT HẢI

Bài T5/273. *Trên mặt phẳng cho hai điểm cố định M, N và tam giác ABC có BC < MN và $\angle BAC < 90^0$. Cho tam giác ABC chuyển động trượt trên mặt phẳng sao cho độ dài ba cạnh AB, BC, CA không đổi, đường thẳng AB đi qua M và đường thẳng AC đi qua N. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.*

Lời giải. Từ giả thiết ta có 4 trường hợp xảy ra :

$M \in Ax, N \in Ay$ (1)

$M \in Ax', N \in Ay'$ (2)

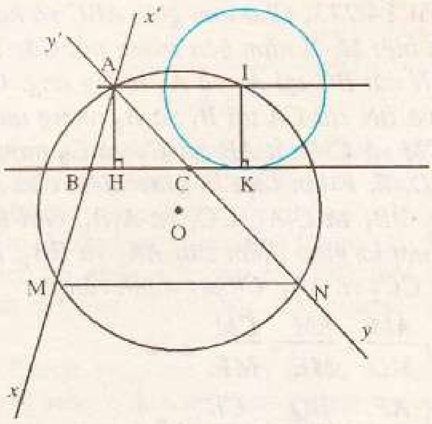
$M \in Ax', N \in Ay$ (3)

$M \in Ax, N \in Ay'$ (4)

Trong 2 trường hợp (1) và (2) do $\angle BAC = \alpha$ không đổi và M, N cố định nên đỉnh A chạy trên cung chứa góc α vẽ trên đoạn MN.

Trong 2 trường hợp (3) và (4) đỉnh A chạy trên cung chứa góc $180^0 - \alpha$ vẽ trên đoạn MN và khác phía với cung chứa góc nói trên.

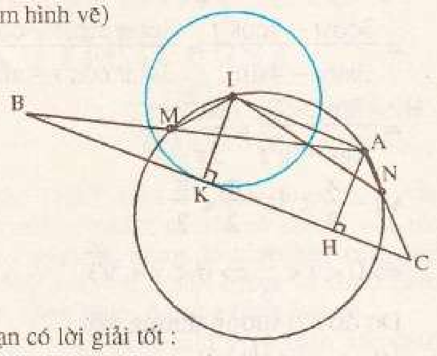
Vậy A chạy trên đường tròn (O) cố định



Ta chỉ cần xét 1 trường hợp đầu, các trường hợp còn lại lập luận tương tự. Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường tròn (O) tại I. Kẻ đường cao AH của ΔABC. Từ I kẻ $IK \perp BC$. Vì $\angle IAN$ bằng hoặc bù với $\angle ACB$ không đổi và N cố định nên I cố định và $IK = AH = h$ không đổi. Vậy BC tiếp xúc với đường tròn cố định tâm I bán kính h.

Nhận xét. 1. Ít bạn giải được bài này.

2. Điều kiện $BC < MN$ và $\angle BAC < 90^o$ là không cần thiết (xem hình vẽ)



3. Các bạn có lời giải tốt :

Bắc Ninh: *Nguyễn Thị Ngọc Thu*, 9A, THCS Thuận Thành; **Hà Nội:** *Đặng Quang Khải*, 9A1, PTDL Lương Thế Vinh, *Tô Thùy Linh*, 9H, THCS Trưng Vương; **Bình Thuận:** *Phạm Thế Nghĩa*, 9_1 THCS Trần Hưng Đạo; **Đồng Nai:** *Phạm Văn Thắng*, 9^3, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Biên Hòa.

VŨ KIM THỦY

Bài T6/273. *Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n>0 đều tồn tại số tự nhiên k sao cho số* $k.5^n = \overline{a_m a_{m-1}...a_1}$ *viết trong hệ thập phân thỏa mãn điều kiện : a_i và i có cùng tính chất chẵn lẻ với mọi i = 1, 2, ..., m*

Lời giải. (của bạn *Vũ Ngọc Minh*, 10A1, ĐHSP **Hà Nội**).

Xét tập hợp các số có n chữ số $\overline{a_n...a_1}$ trong đó $a_i \equiv i \pmod 2$ $(i = 1, 2, ..., n)$ (a_n có thể bằng 0).

Vì rằng với mỗi i chẵn thì $a_i \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ và với mỗi i lẻ thì $a_i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ nên tập hợp này có 5^n số. Ta chứng minh rằng 5^n số như vậy tạo thành hệ thặng dư đầy đủ $(\text{mod } 5^n)$ (*)

Thật vậy giả sử $\overline{a_n...a_1} \equiv \overline{b_n...b_1} \pmod{5^n}$ hay

$10^{n-1}a_n + 10^{n-2}a_{n-1} + ... + 10a_2 + a_1 \equiv$

$10^{n-1}b_n + ... + 10b_2 + b_1 \pmod{5^n}$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} 10^{i-1}(a_i - b_i) \equiv 0 \pmod{5^n}$$

$\Rightarrow a_1 - b_1 \equiv 0 \pmod 5$ mà $a_1 - b_1 \equiv 0 \pmod 2$ nên $a_1 \equiv b_1 \pmod{10}$

$\Rightarrow a_1 = b_1$. Giả sử $a_1 = b_1, ..., a_k = b_k$ $(k \le n-1)$. Ta chứng minh $a_{k+1} = b_{k+1}$.

Thật vậy ta có

$10^{n-1}(a_n - b_n) + ... + 10^k(a_{k+1} - b_{k+1}) \equiv 0 \pmod{5^n}$

$\Rightarrow 10^k(a_{k+1} - b_{k+1}) \equiv 0 \pmod{5^{k+1}}$

$\Rightarrow a_{k+1} - b_{k+1} \equiv 0 \pmod 5$ mà $a_{k+1} - b_{k+1} \equiv 0 \pmod 2$ nên $a_{k+1} \equiv b_{k+1} \pmod{10} \Rightarrow a_{k+1} = b_{k+1}$. Khẳng định (*) được chứng minh.

Thành thử tồn tại một số dạng $\overline{a_n...a_1}$ với $a_i \equiv i \pmod 2$ (a_n có thể bằng 0) sao cho $\overline{a_n...a_1} \vdots 5^n$ hay $\overline{a_n...a_1} = k.5^n$ (nếu n chẵn và $a_n = 0$ thì ta thay bằng số $\overline{a_{n-1}...a_1}$).

Nhận xét: Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Tô Minh Hoàng, 11T, PTNK **Hải Dương**; *Nguyễn Trung Kiên*, 10, *Hàn Thế Anh*, 11A1, ĐHSP Hà Nội, *Nguyễn Hoàng Thạch*, 10, Hà Nội -Amsterdam, *Tô Thùy Linh*, 9H, THCS Trưng Vương, **Hà Nội**; *Nguyễn Phương Lê*, 10A, ĐHSP Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Du Thái*, 11CT, ĐHKH Huế, **Thừa Thiên - Huế**; *Phạm Thế Nghĩa*, 9, **Bình Thuận**; *Lê Mạnh Toàn*, 10 Toán, Hạ Long, **Quảng Ninh**; *Hoàng Thanh Lâm*, PTNK, ĐHQG **Tp Hồ Chí Minh**; *Đặng Quang Huy*, 10A1, THPT Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**; *Nguyễn Ngọc Hùng*, PTNK Hàn Thuyên, **Bắc Ninh**; *Cao Việt Dũng*, 10A chuyên **Vĩnh Phúc**;

Nhiều bạn giải bài toán trên bằng phương pháp quy nạp theo n

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/273. *Xác định hàm số f(x) liên tục* $R^+ \to R^+$ *thỏa mãn :*

1) $f(2x) = 2f(x)\ \forall x \in R^+$

2) $f[f^2(x)] = xf(x)\ \forall x \in R^+$

3) $f(x) \in N^*\ \forall x \in N^*$.

Lời giải. (của đa số các bạn).

Ta chứng minh $f(x)$ là hàm đồng biến trên R^+.

Từ $f(x_1) = f(x_2) > 0$, suy ra $f(f^2(x_1)] = f[f^2(x_2)] \Rightarrow x_1f(x_1) = x_2f(x_2)$. Do vậy $x_1 = x_2$. Suy ra $f(x)$ là đơn ánh và liên tục nên nó là hàm đơn điệu thực sự. Mặt khác, theo giả thiết thì $f(2) = 2f(1) > f(1)$ nên $f(x)$ là hàm đồng biến trên R^+.

Với $x = 1$ thì $f[f^2(1)] = f(1)$ nên $f^2(1) = 1$ và $f(1) = 1$. Từ đó theo quy nạp ta có

$2^n = f(2^n) < f(2^n + 1) < ... < f(2^{n+1}) = 2^{n+1}$, $\forall n \in N^*$.

Do $f(n) \in N^*\ \forall n \in N^*$, suy ra $f(n) = n\ \forall n \in N^*$. Với mọi $m, n \in N^*$, bằng quy nạp ta có

$$m = f(m) = 2^n f\left(\frac{m}{2^n}\right).$$

Suy ra $f\left(\frac{m}{2^n}\right) = \frac{m}{2^n}$ với mọi m, n nguyên dương. Vì rằng với mỗi $x > 0$ tùy ý cho trước đều tồn tại dãy số $\{q_k\}$, q_k có dạng $\frac{m}{2^n}$ hội tụ đến x và do $f(x)$ liên tục, nên

$$x = \lim_{k\to\infty} q_k = \lim_{k\to\infty} f(q_k) = f(\lim_{k\to\infty} q_k) = f(x).$$

Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) = x$ thỏa mãn mọi điều kiện của bài ra.

Nhận xét. Đa số các bạn đều xác định đúng đáp số, nhưng chứng minh không chặt chẽ.

Các bạn sau đây có lời giải tốt.

Lê Tất Thắng, 11A chuyên Toán, ĐHSP Vinh, *Đinh Thanh Thường*, 11A, THPT Hermann Gmeiner, **Nghệ An**; *Ngô Xuân Bách*, 10T, *Chu Ngọc Hưng*, chuyên 10T, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương**; *Phan Lạc Linh*, 11T, chuyên Nguyễn Huệ, **Hà Tây**; *Hàn Thế Anh*, *Vũ Ngọc Minh*, 10A, ĐHSP Hà Nội, *Nguyễn Hoàng Thanh*, 10T, Amsterdam, *Nguyễn Tuấn Dương*, 10T, *Hoàng Tùng*, 12T, chuyên Toán, ĐHKHTN-ĐHQG **Hà Nội**; *Trần Việt Anh*, 11T, chuyên Lê Quý Đôn, *Lê Anh Tuấn*, 11T, chuyên tỉnh **Quảng** Trị ; *Đặng Tuấn Hiệp*, 11C3, THPT Hùng Vương, Pleiku; *Nguyễn Việt Hải*, 10T, *Đinh Hữu Tiệp*, 11T chuyên Lương Văn Tụy, **Ninh Bình** ; *Đỗ Thu Hà*, 12T, Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình** ; *Thiều Quang Tùng*, 11AC, THPT Trần Hưng Đạo, **Phan Thiết**; *Hoàng Thanh Lâm*, 12T, *Lương Thế Nhân*, 11T, chuyên Toán **ĐHQG Tp Hồ Chí Minh**. *Nguyễn Xuân Trường*, *Nguyễn Văn Giáp*, 10A THPT chuyên **Vĩnh Phúc** ; *Nguyễn Hữu Hiếu*, 11F, THPT Đức Hợp, **Hưng Yên** ; *Tạ Đức Phương*, 11B, chuyên **Tuyên Quang** ; *Vũ Đức Nghĩa*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa** ; *Lưu Quang Tuấn*, 11T, chuyên tỉnh **Quảng Bình** ; *Nguyễn Dư Thái*, 11CT, ĐHKH **Huế** ; *Nguyễn Văn Thắng*, 11T, chuyên **Thái Nguyên**.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/273. *Giải phương trình*

$$3arctgx - arctg3x = \frac{\pi}{2}.$$

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\text{arctg}3x = 3\,\text{arctg}x - \frac{\pi}{2} \qquad (1)$$

Đặt t=arctg$x$. Phương trình tương đương với

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < 3t - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} \\ 3x = \text{tg}\,(3t - \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Chú ý : $\text{tg}\left(3t - \frac{\pi}{2}\right) = -\text{cotg}3t = -\frac{\cos 3t}{\sin 3t} =$

$$= \frac{3\cos t - 4\cos^3 t}{3\sin t - 4\sin^3 t} = \frac{3\cos t.\sin^2 t - \cos^3 t}{3\sin t.\cos^2 t - \sin^3 t} =$$

$$= \frac{3\text{tg}^2 - 1}{3\text{tg}t - \text{tg}^3 t} = \frac{3x^2 - 1}{3x - x^3}$$

và $-\frac{\pi}{2} < 3t - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow 0 < t < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{3}.$

Do đó (2) tương đương với

$$\begin{cases} 0 < x < \sqrt{3} \\ 3x = \frac{3x^2 - 1}{3x - x^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \sqrt{3} \\ 3x^4 - 6x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{9 + 6\sqrt{3}}}{3}.$$

Nhận xét. 1. Tòa soạn nhận được lời giải của 165 bạn. Nhưng do không chú ý điều kiện $0<x<\sqrt{3}$ nên khoảng một nửa các bạn tính cả nghiệm $x = \frac{-\sqrt{9+6\sqrt{3}}}{3}$

2. Các bạn sau có lời giải tốt :

Yên Bái: *Nguyễn Việt Hằng*, 11A1, THPT chuyên; **Phú Thọ:** *Hoàng Ngọc Minh*, 9C, THCS Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Vũ Nhật Huy*, 9A, THCS Vĩnh Tường; **Nghệ An:** *Lê Hồng Nhật*, 11Q, THPT Lê Viết Thuật, *Đinh Thanh Thường*, 11a, THPT Hermann Gmeiner; **Hà Tĩnh:** *Lê Tất Thắng*, 11A, ĐHSP Vinh; **Quảng Trị:** *Trần Việt Anh*, 11T, trường chuyên Lê Quý Đôn; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Đăng Sang*, 11B1, THPT chuyên ; **Tp Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Phú Sỹ*, 11A2 - THPT Lê Hồng Phong; **Quảng Nam:** *Phan Nguyên Như*, 11/7, THPT Trần Cao Vân; **Lâm Đồng:** *Phan Thị Thanh Vân*, 11, THPT chuyên; **Tiền Giang:** *Cao Trần Giang*, 10, THPT chuyên.

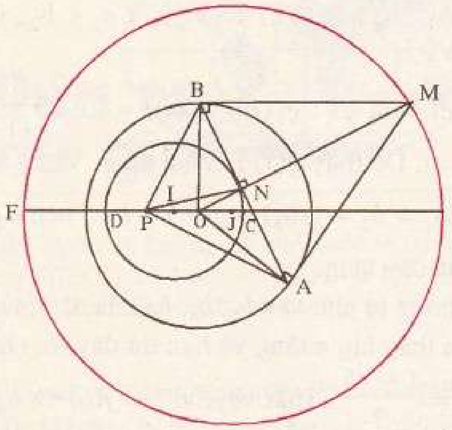
NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T9/273. *Cho đường tròn (O, R) và một điểm P nằm trong đường tròn. Hai cạnh Px và Py của góc vuông xPy cắt đường tròn ở A và B, các tiếp tuyến của đường tròn tại A và B cắt nhau ở điểm M. Tìm quỹ tích của điểm M khi góc vuông xPy quay quanh P.*

Lời giải. Gọi N là giao điểm của OM và AB, thế thì N là trung điểm của AB và OM vuông góc với AB ở N. Trong tam giác AOM vuông ở A, ta có hệ thức :

$\overline{OM}.\overline{ON} = \overline{OA}^2 = R^2$ (không đổi) (1)

Từ (1) suy ra : M là ảnh của N trong phép nghịch đảo cực O đối với đường tròn (O, R) đã



cho với phương tích nghịch đảo $p = R^2$. Bởi vậy, trước hết ta tìm quỹ tích trung điểm N của AB.

Trong ΔAPB vuông ta có $PN=AN=BN=\frac{1}{2}AB$.

Gọi I là trung điểm của OP, theo công thức đường trung tuyến :

$$ON^2 + PN^2 = 2IN^2 + \frac{1}{2}OP^2 ; \quad (2)$$

Mặt khác, vì $PN=AN$ và $ON \perp AN$ nên ta được :

$$ON^2 + PN^2 = ON^2 + AN^2 = OA^2 = R^2 \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra : $4IN^2 + OP^2 = 2R^2$

Từ đó, ta được : $IN = \rho = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - d^2}$, trong đó $d = OP < R$; (4)

Vậy : N nằm trên đường tròn tâm I, bán kính $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - d^2}$.

Đảo lại, lấy một điểm N bất kì trên đường tròn (I, ρ), thế thì $IN = \rho = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2-d^2}$ và do đó $4IN^2 = 2R^2 - OP^2$, hay là :

$$R^2 = 2IN^2 + \frac{1}{2}OP^2 = ON^2 + PN^2$$

Từ đó $ON < R$, nghĩa là N nằm bên trong đường tròn (O, R). Bây giờ qua N dựng dây cung AB của đường tròn đã cho (O, R) vuông góc với ON ở điểm N. Thế thì N là trung điểm của AB và ta được :

$$PA^2 + PB^2 = 2PN^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

$$= 2(R^2 - ON^2) + \frac{1}{2}AB^2 = 2(OA^2 - ON^2) + \frac{1}{2}AB^2$$

$$= 2AN^2 + \frac{1}{2}AB^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AB^2 = AB^2$$

Suy ra $PA \perp PB$.

Đến đây ta kết luận : Quỹ tích các trung điểm N của dây cung AB là đường tròn tâm I (trung điểm của OP), bán kính

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - d^2}.$$

Cuối cùng, từ (1) dẫn đến kết luận :

Quỹ tích các điểm M là một đường tròn, là ảnh của đường tròn tâm I bán kính ρ xác định như trên.

Có thể chỉ ra cách dựng cụ thể đường tròn quỹ tích của M như sau :

Gọi C và D là các giao điểm của đường thẳng OP với đường tròn (I, ρ) rồi dựng các điểm E và F thỏa mãn các hệ thức :

$$\overline{OC}.\overline{OE} = \overline{OD}.\overline{OF} = R^2.$$

Thế thì đường tròn đường kính EF (tâm là trung điểm J của EF) là quỹ tích của M cần tìm.

Thật vậy, phép nghịch đảo cực O, phương tích $p = R^2$ đối với đường tròn (O, R) biến C thành E, D thành F, N thành M, và do đó biến đường tròn (I, ρ) đường kính CD thành đường tròn đường kính EF.

Nhận xét : vì $OI = \frac{d}{2} < R - \rho = R - \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - d^2}$ nên đường tròn (I, ρ) nằm bên trong đường tròn (O, R) đã cho, và do đó (theo (1)), đường tròn (O, R) nằm bên trong đường tròn quỹ tích của M.

Nhận xét. 1) Đa số các bạn giải bài toán này đều biết sử dụng tính chất của phép nghịch đảo (phép nghịch đảo biến một đường tròn không qua cực nghịch đảo thành một đường tròn cũng không qua cực nghịch đảo), và do đó lời giải ngắn gọn. Đáng tiếc còn một số bạn giải sai.

2) Tuy nhiên, nhiều bạn không chứng minh phần đảo khi tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn AB; thực chất việc chứng minh phần đảo của bài toán quỹ tích này là giải một bài toán dựng hình.

3) Nhiều bạn đã chứng minh không chặt chẽ phần đảo của bài toán tìm quỹ tích của N : mặc nhiên thừa nhận đường thẳng vuông góc với ON ở N đều cắt đường tròn (O, R) ở hai điểm A, B mà không giải thích lí do. Ngoài ra, không có bạn nào nhận xét về vị trí tương đối của hai đường tròn quỹ tích của N và M đối với đường tròn (O, R).

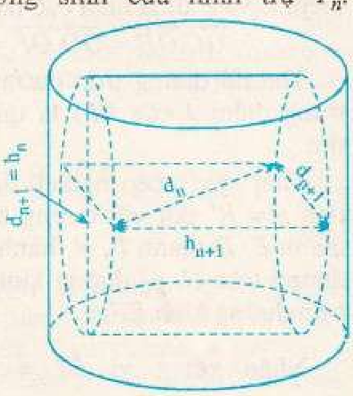
4) Các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt : **Hà Nội:** *Nguyễn Tuấn Thiện*, 12A, PTCT-ĐHSP Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Trung Lập*, 12A, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Phú Thọ:** *Bùi Thanh Hà*, 10A1, THPT chuyên Hùng Vương; **Nghệ An:** *Lê Bá Dũng*, 10CT, ĐHSP Vinh; **Tp Hồ Chí Minh:** *Lương Thế Nhân*, 11T, PTNK ĐHQG Tp Hồ Chí Minh

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài T10/273. *Cho hình trụ T_1. Ta gọi hình trụ T_2 là nội tiếp ngang T_1 nếu mỗi đáy của T_1 chứa đúng một đường sinh của T_2 và mặt xung quanh của T_1 chứa bốn điểm của đường tròn đáy của T_2. Hình trụ T_1 phải thỏa mãn điều kiện gì để có vô hạn hình trụ $T_1, T_2, ..., T_n, ...$ mà mỗi hình trụ đứng sau nội tiếp ngang hình trụ đứng trước.*

Lời giải. Gọi d_n, h_n tương ứng là đường kính đáy và đường sinh của hình trụ T_n. Dễ thấy :

$d_{n+1} = h_n$, $h_{n+1}^2 = d_n^2 - d_{n+1}^2$ (h. 1). Suy ra : $h_{n+1}^2 = d_n^2 - h_n^2$.



Vậy với mỗi n tồn tại hình trụ T_{n+1} nội tiếp ngang hình trụ $T_n \Leftrightarrow d_n^2 - h_n^2 > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{d_n^2}{h_n^2} > 1$ (1)

Xét dãy (a_n) trong đó $a_n = \dfrac{d_n^2}{h_n^2}$.

Ta thấy : $\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{h_{n+1}^2}{d_{n+1}^2} = \dfrac{d_n^2 - h_n^2}{h_n^2} = a_n - 1$

$\Rightarrow a_n = 1 + \dfrac{1}{a_{n+1}}$ với mọi n

Vì hàm số $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ trên $(0, +\infty)$

là hàm giảm nên :

$a_n > 1 \Leftrightarrow f(a_n < f(1) \Leftrightarrow a_{n-1} < f(1)$

$\Leftrightarrow f(a_{n-1}) > f(f(1)) \Leftrightarrow a_{n-2} > f(f(1))$... (*)

Đặt $b_1 = 1$, $b_2 = f(1)$, $b_3 = f(f(1))$, ...

Từ (*) suy ra :

Nếu n lẻ thì : $a_n > 1 \Leftrightarrow a_1 > b_n$

Nếu n chẵn thì : $a_n > 1 \Leftrightarrow a_1 < b_n$

Vậy : $a_n > 1\ (\forall n) \Leftrightarrow b_{2n+1} < a_1 < b_{2m}$ $(\forall m, n \in N)$.

Xét hàm số : $g(x) = f(f(x)) = 2 - \dfrac{1}{x+1}$ trên $(0, +\infty)$. Dễ thấy $g(x)$ là hàm tăng. Vì $b_1 = 1 < \dfrac{3}{2} = b_3 \Rightarrow b_5 = g(b_3) > g(b_1) = b_3$... nên b_1, b_3, b_5... là dãy tăng.

Tương tự như vậy b_2, b_4, b_6... là dãy giảm.

Ta thấy khi n tăng vô hạn thì dãy (b_n) hội tụ về $b = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Thật vậy, vì $b = f(b)$ và $b_n > 1$ $(\forall n)$ nên ta có :

$$|b - b_n| = |f(b) - f(b_{n-1})| = \left|\frac{1}{b} - \frac{1}{b_{n-1}}\right|$$

$$= \frac{|b - b_{n-1}|}{bb_{n-1}} < \frac{|b - b_{n-1}|}{b} < ... < \frac{|b - b_1|}{b^{n-1}}$$

mà dãy số này dần tới 0 khi $n \to \infty$

Vậy : $b_{2n+1} < a_1 < b_{2m}$ $(\forall m, n \in N)$

$$\Leftrightarrow a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (3)$$

Từ (1); (2); (3) ta có kết luận : T_1 thỏa mãn điều kiện đề bài $\Leftrightarrow \dfrac{d_1}{h_1} = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

Nhận xét. 1) Bài này có 42 bạn tham gia giải, 6 bạn giải sai. Nói chung các bạn trình bày không thật sáng sủa.

2) Các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt : **Hải Dương:** *Ngô Xuân Bách*, 10T, THPT Nguyễn Trãi; **Hà Nội:** *Nguyễn Hoài Anh*, 10T, THPT Hà Nội - Amsterdam; *Nguyễn Tuấn Thiện*, 12A, *Nguyễn Tuấn Dương*, 10A, PTCT-Tin, ĐHKHTN-ĐHQG, **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thừa Thắng*, 11T, THPT NK Hà Tĩnh;

NGUYỄN MINH HÀ

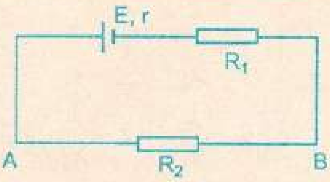
Bài L1/273. *Cho mạch điện như hình vẽ : $E = 60V$; $r = 1\Omega$; $R_1 = 2\Omega$; $R_2 = 6\Omega$. Có 8 bóng đèn : Đ$_1$: 10V–10W; Đ$_2$: 10V–10W; Đ$_3$: 10V–11W; Đ$_4$: 10V–12W; Đ$_5$: 8V–5W; Đ$_6$: 8V–10W; Đ$_7$: 7V–7W; Đ$_8$: 7V–8W.*

Hãy mắc các bóng đèn trên đây cùng với các điện trở phụ thành một bộ điện trở và mắc bộ điện trở đó vào hai điểm A, B của mạch sao cho thỏa mãn hai điều kiện sau :

1) Các đèn sáng bình thường;

2) Tiết kiệm nhất.

Tính giá trị các điện trở phụ đó.



Hướng dẫn giải. Tổng công suất các đèn khi chúng sáng bình thường là P_d = 73W = const. Công suất và hiệu suất của mạch là :

$P = EI$; $H = \dfrac{P_d}{P} = \dfrac{P_d}{EI}$. Như vậy $H_{\max} \leftrightarrow I_{\min}$, với I là cường độ dòng điện mạch chính,

$I = I_{R_2} + I_b$ (I_b là cường độ dòng điện qua bộ điện trở). Muốn cho I_b nhỏ nhất ta mắc các bóng đèn và điện trở phụ như sau :

$(Đ_1//Đ_4)$ nt $(Đ_2//Đ_3//R_3)$ nt $(Đ_5//Đ_6//R_4)$ nt $(Đ_7//Đ_8//R_5)$ nt R_6

Như vậy $I_b = I_{d_1} + I_{d_4} = 2{,}2\text{A} \Rightarrow U_{AB} = 2{,}2R_b$, với R_b là điện trở tương đương của bộ điện trở;

$$E = U_{AB} + I(r + R_1) =$$
$$= 2{,}2R_b + \left(\frac{2{,}2R_b}{6} + 2{,}2\right)3 = 60$$

$$\Rightarrow R_b = \frac{178}{11}\,\Omega \Rightarrow U_{AB} = 35{,}6\text{V} \Rightarrow U_{R_6} = 0{,}6\text{V}$$

$$\Rightarrow R_6 = \frac{0.6}{2{,}2} = \frac{3}{11}\Omega;\ R_3 = \frac{U_2}{I_b - I_{d_2} - I_{d_3}} = 100\Omega;$$

$$R_4 = \frac{U_5}{I_b - I_{d_5} - I_{d_6}} = \frac{32}{13}\Omega;$$

$$R_5 = \frac{U_7}{I_b - I_{d_7} - I_{d_8}} = 122{,}5\Omega;$$

$$H = \frac{P_d}{EI} = \frac{73}{60\left(\frac{35{,}6}{6} + 2{,}2\right)} \approx 15\%.$$

Nhận xét. Các em có lời giải gọn và đúng :

Yên Bái: *Hoàng Trọng Huy*, 11A2, THPT chuyên Yên Bái; **Nghệ An:** *Bùi Quang Sơn*, 11A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh; **Hà Tĩnh:** *Trương Hữu Cát*, 12 Lí, THPT NK Hà Tĩnh; **Tiền Giang:** *Trần Tấn Lộc*, 11 Lí, THPT chuyên Tiền Giang

MAI ANH

Bài L2/273. *Hình vẽ bên biểu thị sự quan sát vật AB qua kính hiển vi với vật kính MN và thị kính PQ. Màn chắn D có lỗ tròn mn là nơi đặt mắt. Cho biết : Mắt bình thường, điểm cực cận cách mắt d = 20cm. Vật AB cách vật kính d_1=1,8cm. Khoảng cách 2 thấu kính l = 18 cm. Khi đặt mắt cách thị kính a = 2cm thì thấy ảnh rõ nét mà không cần điều tiết, đồng thời lỗ tròn mn = 2mm sẽ hứng gọn toàn bộ ánh sáng từ vật qua kính hiển vi tới mắt.*

1) Tính các tiêu cự của vật kính và thị kính, đường kính tiết diện kính hiển vi, độ bội giác khi ảnh ở vô cực.

2) Bỏ kính hiển vi thì mắt có nhìn rõ vật AB không, tại sao ?

Hướng dẫn giải.

1) Với thị kính PQ thì vật thật là vật kính MN có ảnh thật mn, từ đó $f_2 = \dfrac{al}{l+a} = \dfrac{18.2}{18+2} =$ 1,8(cm) và $\dfrac{MN}{mn} = \dfrac{l}{a} \Rightarrow MN = 9mn = 1{,}8$(cm).

Mắt quan sát ở trạng thái không cần điều tiết nên ảnh A_2B_2 của AB ở vô cực, ảnh trung gian nằm tại tiêu diện của thị kính PQ :

$d_2 = f_2 = 1{,}8$(cm); $d'_1 = l - f_2 = 18 - f_2 = 16{,}2$(cm) $\Rightarrow f_1 = 1{,}62$(cm). Ta có :

$$G_\infty = \frac{\alpha'}{\alpha_o} = \frac{A_1B_1/f_2}{AB/d} = \frac{d'_1}{d_1} \times \frac{d}{f_2} = \frac{16{,}2}{1{,}8} \times \frac{20}{1{,}8} = 100$$

2) Vì $k = 9 \times \dfrac{1}{9} = 1 \Rightarrow AB = mn = 2$(mm).

Vật AB cách mắt $h = d_1 + l + a = 21{,}8$(cm).

Góc trông vật $\alpha = \dfrac{AB}{d} = \dfrac{2}{218} \approx 0{,}009\text{rad} < \varepsilon$.

Vì $h > d$ nên bỏ kính hiển vi đi mắt vẫn nhìn rõ nét vật AB.

Nhận xét. Chỉ có em *Trần Trọng*, lớp 11B, THPT Bỉm Sơn, **Thanh Hóa** là có lời giải gần hoàn chỉnh.

MAI ANH

Trả lời bạn đọc

Hỏi: *Trong SGK Hình học 8 có viết : "Hình vuông là hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau. Từ định nghĩa, suy ra : Hình vuông có bốn cạnh bằng nhau và bốn góc vuông. Điều suy ra đó, có phải là định nghĩa không ?*

BÀNH THỊ THÀNH
(Xóm 2, Gia An Đông, Hoài Nhơn, Bình Định)

Đáp: Điều suy ra chỉ là tính chất của hình vuông. Bạn lưu ý : khi định nghĩa không nêu ra "thừa" điều kiện, có nghĩa là *chỉ cần* hai cạnh liên tiếp bằng nhau *là đủ*.

Hỏi: *Trong dịp hè, nếu gửi bài cho tạp chí thì em ghi địa chỉ nào ? Sang năm em lên lớp 10 thì có được giải các bài dành cho THCS nữa không ?*

TRẦN KIM CHUNG
(9A, THCS Thường Tín, Hà Tây)

Đáp: Dù trong dịp nào, các em cũng nên *ghi thêm địa chỉ gia đình*. Cuộc thi giải toán hằng năm trên tạp chí là tính theo năm học, nếu em gửi lời giải thì cần ghi cả địa chỉ lớp, trường cũ của em. Khi em lên lớp 10 thì em vẫn có quyền giải các bài dành cho THCS nhưng... không nên gửi về Tòa soạn.

Hỏi: *Dựa vào định lí Đirichlê : "Có vô số số nguyên tố có dạng ax + b với a, b nguyên tố cùng nhau", em chứng minh được "Tập hợp các số nguyên tố dạng x^2+1 là vô hạn" như sau :*

Từ định lí Đirichlê ta chọn a=x, b=1 thì a và b nguyên tố cùng nhau, khi đó tập hợp số nguyên tố dạng $ax+b = x^2+1$ là vô hạn.

Em chứng minh như vậy có được không ?

ĐẶNG DUY ANH DÂN
(11A1, THPT Đồng Quan, Phú Xuyên, Hà Tây)

Đáp: Em nên hiểu định lí Đirichlê rõ hơn : Với a, b là hai số nguyên tố cùng nhau *cho trước* thì chọn được vô số giá trị của x để $ax+b$ là số nguyên tố, chẳng hạn các số nguyên tố có dạng $4x+3$; $2x+1$ là vô hạn. Vì vậy, khi em chọn $a=x$; $b=1$ thì sẽ có vô số các số nguyên tố dạng $xy+1$ với biến y nhưng khi $y = x$ chắc gì x^2+1 đã là số nguyên tố ? Phép chứng minh của em là sai.

Hỏi: *Khi cháu làm 2 bài toán : "Với a_1, a_2, $a_3 > 0$ và $a_1+a_2+a_3 = 1$. Chứng minh :*

$$\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\left(1+\frac{1}{a_3}\right) \ge 64$$

$$\left(2+\frac{1}{a_1}\right)\left(2+\frac{1}{a_2}\right)\left(2+\frac{1}{a_3}\right) \ge 125$$

cháu tình cờ phát hiện và chứng minh được :

"Nếu $\alpha \in N^*$, $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ và $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$ thì

$$\left(\alpha+\frac{1}{a_1}\right)\left(\alpha+\frac{1}{a_2}\right)...\left(\alpha+\frac{1}{a_n}\right) \ge (\alpha+n)^n"$$

Vậy bất đẳng thức này đã có ở đâu chưa và nếu có thì tên của bất đẳng thức này là gì ?

DƯƠNG VĂN GIÁP
(lớp 10A, THPT Krông Buk, ĐakLak)

Đáp: Từ các bài toán cụ thể, cháu đã biết khái quát phép chứng minh để đi tới bất đẳng thức tổng quát. Đó là một cách rèn luyện phong cách học tập rất tốt. Bất đẳng thức mà cháu phát hiện và chứng minh là hoàn toàn đúng. Cháu cứ coi là bất đẳng thức này là do cháu nghĩ ra và cháu cứ tự đặt tên. Chỉ có điều cháu nên biết : có biết bao bất đẳng thức ở trên đời này mà chẳng có tên ? Những bất đẳng thức mà cháu biết tên phải là những bất đẳng thức có ứng dụng mạnh trong toán học. Chúc cháu thành công và xin giới thiệu cùng bạn đọc.

Hỏi: *Chúng em làm mãi mà không được bài toán sau :"Chứng minh rằng với mọi giá trị của x thì $2^{|\sin x|} + 2^{|\cos x|} \ge 3$". Kính mong THTT cứu giúp.*

NGUYỄN TRỌNG TRƯỜNG
(12C, THPT Hiệp Hòa 2, Bắc Giang)

Đáp: Các bạn có thể đặt $u = |\cos x|$ thì $u \in [0 ; 1]$ và từ đó xét hàm số $f(u) = 2^u + 2^{\sqrt{1-u^2}}$ với $u \in [0;1]$. Các bạn dùng đạo hàm sẽ nhận được $f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$f'(u) > 0$ với $u \in \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và $f'(u) < 0$ với $u \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$.

Từ đó sẽ có $f(u) \ge f(0) = f(1) = 3$.

N.T.L

Ý KIẾN BẠN ĐỌC - ĐỌC Ý KIẾN ... BẠN !

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(Tp Hồ Chí Minh)

Trong bài "Hình học hóa nội dung và cách giải một số bài toán Đại số" (tạp chí THTT số 202 (4/1994) có bài toán. "Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x^2-\sqrt{3}x+1}$". Tác giả cho đáp số $y = 2$ và đến bài "Ý kiến bạn đọc" (Tạp chí THTT số 225 (3/1995)), nhóm học sinh 10A trường PTTH Nguyễn Trãi, quận Ba Đình, Hà Nội đã giải hoàn chỉnh bài toán và cho kết quả giá trị nhỏ nhất của hàm số y là $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2-\sqrt{3}})$. Thực ra kết quả này được thu gọn là $\sqrt{2}$. Như vậy giữa 2 và $\sqrt{2}$ chỉ là sự nhầm lẫn trong in ấn hoặc ghi chép. Hơn nữa lời giải bài toán các bạn đưa ra hơi dài và phức tạp. Tôi xin đề xuất lời giải ngắn gọn hơn như sau :

Trên mặt phẳng tọa độ xét các điểm $M(x; 0)$; $A\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{-1}{2}\right)$.

Dễ thấy A, B cố định nằm khác phía nhau đối với trục hoành, M chạy trên trục hoành.

Ta có : $MA + MB \geq AB$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(0+\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$\geq \sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x^2-\sqrt{3}x+1} \geq \sqrt{2}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ M là giao điểm của đoạn thẳng AB và trục hoành.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số y là $\sqrt{2}$.

Từ lời giải trên cho ta lời giải bài toán tổng quát :

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{(x-a)^2+b^2} + \sqrt{(x-c)^2+d^2}$ trong đó a, b, c, d là hằng số. Xét các điểm $M(x; 0)$, $A(a; |b|)$, $B(c; -|d|)$.

Dễ thấy A, B cố định nằm khác phía đối với trục hoành, M chạy trên trục hoành.

Ta có $MA + MB \geq AB$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (0-|b|)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (0+|d|)^2} \geq \sqrt{(a-c)^2 + (|b|+|d|)^2}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + b^2} + \sqrt{(x-c)^2 + d^2} \geq \sqrt{(a-c)^2 + (|b|+|d|)^2}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ M là giao điểm của đoạn thẳng AB và trục hoành.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số y là $\sqrt{(a-c)^2 + (|b| + |d|)^2}$.

Các bạn đọc có đồng ý với ý kiến của tôi không ?

LTS: *Chắc các bạn đều đồng ý với ý kiến của tác giả. Khi giải bài toán loại này, tác giả đã "khôn" hơn các bạn học sinh 10A, trường THPT Nguyễn Trãi khi chọn A và B khác phía trục hoành để khỏi thực hiện phép đối xứng trục và tiếp tục tổng quát hóa bài toán. Chúng ta sẽ cùng đi tiếp nữa để tìm lời giải cho bài toán sau đây :*

"Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{(x-a)^2 + b^2} + \sqrt{(x-c)^2 + d^2}$ *với* $x \in [\alpha; \beta]$."

Trước hết các bạn thử tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sqrt{\cos^2 x - 2\cos x + 10} + \sqrt{\cos^2 x + 6\cos x + 10}$$

Mong nhận được nhiều ý kiến trao đổi.

THTT

Đón đọc TH&TT số 278

Tạp chí tháng 8/2000 sẽ đưa tới các bạn :

- ☆ Giới thiệu các cuộc thi bằng gửi thư của các nước
- ☆ Giải đáp các bài toán khó trong các đề thi tuyển sinh Đại học năm 2000.
- ☆ Kết quả kì thi IMO 41 của Đội tuyển học sinh Việt Nam
- ☆ 7 bài toán với giải thưởng 1 triệu USD cho mỗi bài.
- ☆ Những chuyên mục thường xuyên với nhiều thông tin bổ ích. Ai sẽ được nhận quà sinh nhật của Câu lạc bộ gặp nhau qua ngày sinh ?

Các bạn hãy nhớ đặt mua tạp chí tại các đại lí hoặc các cơ sở Bưu điện gần nhất.

THTT

GẶP NHAU QUA NGÀY SINH

May mắn lớn nhất vừa qua trên sân cỏ là may mắn dành cho đội Pháp : đương kim vô địch thế giới lại giành luôn vô địch châu Âu, còn món quà may mắn của Câu lạc bộ lần này xin gửi tới các bạn sinh ngày 10 tháng 8 :

1) *Nguyễn Thị Thúy Hằng*, xóm Kho, Nguyên Xá, Minh Khai, Từ Liêm, Hà Nội.

2) *Lê Khắc Phú*, xóm Nam, Cổ Hiền, Hiền Ninh, Quảng Ninh, Quảng Bình.

3) *Nguyễn Tiến Sơn*, sinh năm 1983, lớp 10A1, THPT Chư Sê, Chư Sê, Gia Lai.

4) *Hoàng Trung Nghĩa*, sinh năm 1982, lớp 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai.

5) *Phạm Văn Hưng*, sinh năm 1983, tổ 33, phường Nguyễn Thái Học, thị xã Yên Bái, Yên Bái.

(Hai bạn Hằng, Phú báo gấp năm sinh cho CLB).

Các bạn thích ngày sinh 10 tháng 8 cũng nhận được quà của Câu lạc bộ là :

1) *Lê Thị Hải Châu*, 8A, PTTH KBang, Gia Lai.

2) *Võ Quang Phúc* (hay *Trúc* ? Chữ bạn viết bay bướm không nhận rõ là P thay T), hẻm 240, Trương Quang Trang, thị xã Quảng Ngãi, Quảng Ngãi.

3) *Phạm Tuấn*, Hòa Lạc, Thạch Thất, Hà Tây.

4) *Nguyễn Thị Thu Hiền*, 10A1, THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ.

Hiện nay C.L.B vẫn tiếp tục nhận thẻ hội viên (có in trên tạp chí số 271 và 272).

Một tháng nữa ... ai sẽ lại may mắn ? Các bạn hãy chờ nhé !

C.L.B

Kết quả :

TIÊU CHUẨN NÀO ĐÂY ?

Với suy nghĩ rất nghiêm túc, nhiều bạn đã tìm hiểu lĩnh vực nghiên cứu của 6 nhà toán học nhưng đưa ra tiêu chuẩn chưa thuyết phục. Có bạn "phát hiện" trong 6 nhà toán học có 2 nhà toán học Đức (?), 2 nhà toán học Việt Nam, 2 nhà toán học Pháp và đưa ra tiêu chuẩn trong một nhóm không có 2 nhà toán học ở cùng một nước. Tuy nhiên phát hiện trên là sai vì chỉ có Kaclơ Gauxơ người Đức và có đến 3 nhà toán học người Pháp nên tiêu chuẩn nêu ra không thực hiện được.

Tiêu chuẩn đơn giản và thuyết phục nhất là chia 6 nhà toán học thành 2 nhóm theo số chữ cái ở tên mỗi nhà toán học. Nhóm tên gồm 10 chữ cái : Lê Văn Thiêm, Kaclơ Gauxơ, Đờ Moócgăng. Nhóm tên gồm 12 chữ cái : Lương Thế Vinh, Bleđơ Patxcan, Giăng Đalămbe.

Số bạn giải tốt thì nhiều mà chỉ có 10 tặng phẩm nên đành bốc thăm tặng cho các bạn may mắn hơn : *Biện Ngọc Danh*, 126 Lý Thái Tổ, Tp Pleiku, Gia Lai; *Lê Đức Thọ*, xóm Hồng Tiến, Nghĩa Hồng, Nghĩa Đàn, Nghệ An; *Phan Quốc Hưng*, 10B, THPT Hải Lăng, Quảng Trị; *Nguyễn Duy Ngọc*, Toán 2A, ĐHSP Tp Hồ Chí Minh; *Dương Minh Sơn*, 8B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, Hà Tây; *Nguyễn Đức Hạnh*, 8A, THCS Kim Ngọc, Yên Lạc, Vĩnh Phúc; *Vũ Trường Giang*, 10D2, THCS Chu Văn An, Hà Nội; *Nguyễn Quang Tân*, 9A, THCS thị trấn Phố Lu, Bảo Thắng, Lào Cai; *Nguyễn Hoa Hường*, 10A5, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An; *Nguyễn Trung Thành*, 11A1, THPT Quế Võ số 1, Quế Võ, Bắc Ninh.

NGỌC MAI

DỌN VƯỜN NHÀ

Hầu hết các bạn đều chỉ ra được "mắt xích" lỏng lẻo ở "mũi tên" dưới đây :

$a > 4\sqrt{10^{n+2}}$

$\Rightarrow a \geq 4\sqrt{10^{n+2}} + 1$. Lập luận trên chỉ đúng khi n là số tự nhiên chẵn.

Bạn *Hà Minh Cường*, (lớp 10A1, khối PT chuyên Toán, ĐHSP Hà Nội) đã bổ sung cho lời giải nhờ xét thêm trường hợp n là số tự nhiên lẻ, bằng cách chứng minh khi đó a^2 chia cho 11 dư 10. Tuy nhiên không có số chính phương a^2 nào có tính chất này, từ đó kết luận bài toán.

Ngoài bạn Cường, xin "đa tạ" các bạn : *Hồ Hữu Phùng*, 9A, THCS Quỳnh Hồng, Quỳnh Lưu, Nghệ An; *Nguyễn Đình Dũng*, 8A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Thanh Hóa; *Võ Xuân Minh*, 9^1, THPT Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa; *Phùng Văn Doanh*, 9D, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy, Nam Định ; *Vũ Tiến Dũng*, 11A1, THPT

TRÒ CHƠI THÁNG 7

Lịch tháng 7 năm 2000 được biểu diễn trong hình chữ nhật 7×6 như hình vẽ.

					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

Bạn hãy chia hình đó thành 2 miền bằng một đường gấp khúc sao cho có thể đặt miền này trùng khít với miền kia và tổng các số trong mỗi miền bằng nhau.

NGUYỄN VĂN THIÊM
(Sưu tầm)

☛ Đồng Quan, Phú Xuyên, Hà Tây; *Lê Thanh Tùng*, 9B, THCS Chu Văn An, Thanh Hà, Hải Dương; *Phan Thành Trung*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Hải Dương; *Nguyễn Minh Thu*, 11 Toán, NK Hàn Thuyên, Bắc Ninh; *Trần Bình Minh*, 9K, THCS Lê Hồng Phong, Yên Bái; *Trần Anh Hùng*, 12A10, Trần Cao Vân, Quảng Nam.

Cám ơn các bạn và xin mời các bạn tiếp tục.

KIHIVI

TẠI SAO LẠI THẾ ?

Trong một cuốn sách và trong một kì thi học sinh giỏi có bài toán :

"Tìm x để $A = \dfrac{1}{x^2 + 2x - 3}$ đạt giá trị lớn nhất".

Đáp án như sau : $A = \dfrac{1}{(x+1)^2 - 4}$

Để A đạt giá trị lớn nhất thì $(x+1)^2 - 4$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hiệu này đạt giá trị nhỏ nhất khi $(x+1)^2 = 0$ hay $x = -1$. Khi đó, giá trị lớn nhất của $A = -\dfrac{1}{4}$.

Có thể thấy khi $x = 2$ thì $A = 1/5$, do đó $-\dfrac{1}{4}$ không phải là giá trị lớn nhất của A. Sai lầm của lời giải ở đâu ?

TRẦN XUÂN UY
(GV trường THCS Trần Đăng Ninh, Nam Định)

Giải đáp bài

XÓA NHỮNG CHỮ SỐ NÀO

Số chính phương chỉ có thể tận cùng là 0, 1, 4, 9, 6, 5. Theo bài ra sau khi xóa thì số còn lại phải có 6 chữ số (với thứ tự giữ nguyên) nên số còn lại phải có tận cùng phải là 6 hoặc 9. Số có 6 chữ số còn lại chỉ có duy nhất là 123456 không phải chính phương. Vậy chỉ còn khả năng chữ số tận cùng của số còn lại là 9. Suy ra chữ số hàng chục phải chẵn.

Dễ thấy chữ số hàng chục chỉ có thể là 6 hoặc 8.

• Nếu chữ số hàng chục là 6 thì ta còn phải xóa 1 trong 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5.

Vì số chính phương phải có dạng $3n$ hoặc $3n+1$ ($n \in N^*$) nên số còn lại có thể là 134569, 124569, 123469. Cả 3 số này đều không chính phương.

• Nếu chữ số hàng chục là 8. Số phải tìm là $\overline{abcd89} = x^2$. Ta có $351 \le x \le 675$ ở đó x phải có tận cùng là 3 hoặc 7.

* Nếu $x = \overline{ef3}$, ta có $\overline{ef3}$ cũng phải có dạng $3k$ hoặc $3k+1$. Do x^2 có chữ số hàng chục là 8 nên f là 3 hoặc 8. Từ đó được các trường hợp :

$e = 3, f = 3$
$e = 4, f = 3, 8$
$e = 5, f = 8$
$e = 6, f = 3$

Các trường hợp trên đều không thỏa mãn.

* Nếu $x = \overline{ef7}$. Xét tương tự như trên được $x = 367$. Số chính phương là $134689 = 367^2$.

Vậy các chữ số phải xóa là 2, 5, 7.

Nhận xét. Các bạn có bài giải tốt hơn cả là : **Phú Thọ:** *Trần Hải Minh*, 11A2, chuyên Hùng Vương; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Văn Phúc*, 11A2, chuyên Vĩnh Phúc; **Nam Định:** *Đỗ Minh Thành*, 8A, THCS Đào Sư Tích, Trực Ninh; **Thanh Hóa:** *Doãn Trọng Hoàn*, 8B, THCS Nguyễn Chính, Đông Sơn; **Thừa Thiên - Huế:** *Võ Thị Quỳnh Đan*, 10 chuyên Lý, Quốc học; **Khánh Hòa:** *Võ Xuân Minh*, 9^1, THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh ; **Đắc Lắc:** *Nguyễn Thị Hồng Hạnh*, 11CT, chuyên Nguyễn Du, Buôn Mê Thuột; **Tp Hồ Chí Minh:** *Huỳnh Minh Hiếu*, 205/19Z, 1Y Âu Cơ, Q.11. Bạn *Trần Minh Quang*, 11A chuyên Tin ĐHSP Vinh, **Nghệ An** có lời giải viết bằng ngôn ngữ PASCAL.

NAM HÀ

THI VUI HÈ 2000

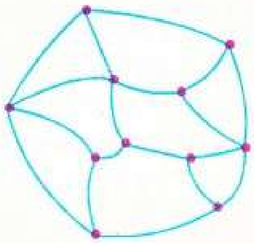
Đề thi Vui hè vừa công bố ngày 14.6.2000 thì ngày 16.6.2000 tòa soạn đã nhận được 2 lời giải của bạn Phạm Trọng Tiến, Thao Nội, Sơn Hà, Phú Xuyên và Nguyễn Xuân Cương, trường Tiểu học Tân Dân, Phú Xuyên đều thuộc tỉnh Hà Tây. Ngày hôm sau 17.6 bài của bạn Nguyễn Đức Thọ, 17/57, Lê Lợi, Hải Phòng về đến tòa soạn. Còn sau đó thì ... không thể kể tên các bạn được nữa. Thời hạn nhận bài đợt 1 là đến 30.7.2000.

Số báo này đăng tiếp 3 bài của đợt II và hạn nhận bài giải đến 30.8.2000 theo dấu bưu điện. Nào mời các bạn cùng giải và sớm gửi bài về tòa soạn.

ĐỀ ĐỢT II

Câu 4. Bố trí tuyến xe

Hình vẽ dưới đây biểu thị mạng đường ô tô chở khách nối các thị trấn. Các đường đi đều cần tô màu, mỗi màu biểu thị một tuyến xe ô tô đi từ một thị trấn này đến một thị trấn khác rồi quay lại. Đường đi nối hai thị trấn kề nhau được tô bởi chỉ 1 màu. Hành khách trên mỗi tuyến xe có thể chuyển sang ít nhất 2 tuyến xe khác. Bạn hãy tô màu mạng đường trên sao cho số tuyến xe là ít nhất.



Câu 5. Cắt thế nào ?

Tính để 1 sợi dây trên bàn. Em Tính là Toán dùng dao cắt sợi dây và nói :

- Anh Tính ơi em chỉ cắt 1 nhát đã được 4 đoạn, rồi cắt tiếp nhát nữa đã được 7 đoạn rồi.

Bạn có biết sợi dây đó lúc đầu nằm như thế nào không ?

Câu 6. Dịch mật mã

Xin gửi tới các bạn một bảng chữ dưới đây, trong đó có một lời muốn nói với các bạn. Bạn hãy dịch nghĩa của thông điệp này nhé ! Chìa khóa mở mã là : "Ơratôxten".

	C	H	N	Ú	G	C	U	Y
Ề	C	N	Á	C	Ả	N	C	H
B	T	O	À	Ạ	N	N	G	Ô
Đ	N	Ạ	M	T	T	Ứ	H	O
Ù	À	N	G	A	C	H	H	Ú
N	Ê	G	N	G	U	Y	B	Ê
N	V	I	Ệ	Ổ	T	Í	H	Ả
I	L	Ê	C	T	H	Ó	H	N
L	G	N	H	Ấ	T	Ý	V	Ũ
K	T	I	M	T	H	Ủ	H	Y
V	Ũ	A	N	H	T	Ủ	H	Ư
N	V	G	U	U	Y	Ễ	I	N
V	T	H	Ị	Ể	O	A	N	H

THTT

ISN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT79M0

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 2000

Giá : 3.000đ
Ba nghìn đồng