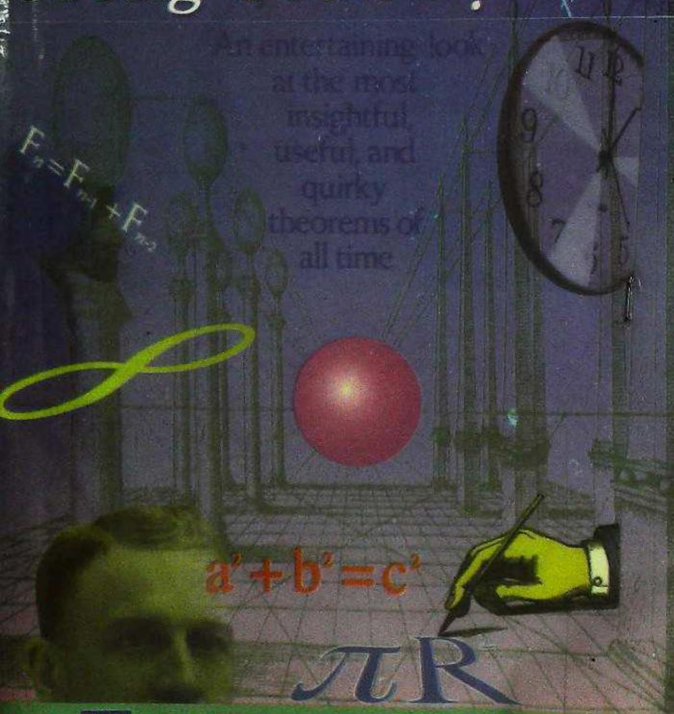
Những Công Thức Tuyệt đẹp Trong Toán học

X. Hương



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Lionel Salem - Frédéric Testard
Coralie Salem

NHỮNG CÔNG THỨC TUYỆT ĐẸP
TRONG TOÁN HỌC

Người dịch : NGUYỄN HOÀNG HẢI
Hiệu đính : TRẦN TẤT THẮNG

Nhà xuất bản giáo dục 1996

Dịch theo bản tiếng Anh :
Salem, Lionel
THE MOST BEAUTIFUL
MATHEMATICAL FORMULUS
Lionel Salem - Frédéric Testard - Coralie Salem
Translated by James D. Wuest
John Wiley & Sons Inc. 1993

Lời giới thiệu

Mục đích cuốn sách này nhằm nói lên cái đẹp trong các công thức toán học. Cái đẹp đó bắt nguồn từ sự uyển chuyển của các ký hiệu toán học, sự giản đơn trong các mệnh đề toán học với những hàm ý đầy sức lôi cuốn về mặt thẩm mỹ. Cũng như tất cả các khoa học khác, toán học có một nét hài hòa riêng của nó. Mục đích của chúng tôi là khám phá nét hài hòa đó.

Chúng tôi sẽ tìm cách trình bày vẻ đẹp này bằng một ngôn ngữ toán học đơn giản. Mô tả nguồn gốc của mỗi công thức và chứng minh tính hiệu lực của nó. Một số khái niệm như Định lý Pythagore và Diện tích hình tròn được lựa chọn đưa vào đây là do tính phổ biến của chúng. Những khái niệm khác như Định lý cuối cùng của Fermat và Giả định của Goldbach là do tầm quan trọng lịch sử của chúng. Các khái niệm khác nữa, trong đó có cả logarit và các công thức lượng giác, đã được lựa chọn là do hàng ngày chúng được các sinh viên toán học còn ít tuổi sử dụng tới.

Để minh họa thêm cho vẻ đẹp này của toán học chúng tôi đã vẽ nhiều hình nhằm gây hứng thú khi tìm hiểu và biểu tượng hóa ý nghĩa sâu xa của các công thức toán học. Chúng tôi cũng cố gắng làm cho văn phong và các hình vẽ tạo ra sự giải trí nhưng không làm sai lệch các chân lý toán học bởi chúng tôi hoàn toàn tin rằng hoạt động toán học có liên quan tới một ý nghĩa là trò giải trí.

Sự giải trí này khiến chúng tôi dựng nên những mẩu chuyện về các nhân vật có thực và các nhân vật giả tưởng. Trong số các nhân vật có thực đó có các nhà toán học d'Alembert, Archimedes, Cardano, Euler, Fermat, Fibonaci, Gauss, Goldbach, Lagrange, Leibniz, Napier, Newton, Pascal và Pythagoras cũng như triết *gia Hy Lạp Zeno vùng Elea, nhà triết học Pháp Diderot, Catherine Đại đế Nga và Tổng thống Hoa Kỳ là James Garfield. Tiểu sử tóm tắt nhóm các nhân vật có thể tìm thấy ở các trang 139 - 144. Các nhân vật giả tưởng thì có Cosine, một học giả có phần quẫn trí mượn từ một cuốn sách của Christophe, một họa sĩ vẽ tranh minh họa và là một tiểu thuyết gia người Pháp. Chúng tôi đã dành cho Cosine một cái nhìn hiện đại hơn và một số nét bất thường về thể hình mà ông không có trong cuốn sách của Christophe. Những nhân vật hư cấu khác gồm có đồng sự của Cosine là Giáo sư Sine, cũng như một tay đua xe đạp thông minh người Hà Lan và các nhân vật vô danh khác nhưng có tài về toán học gồm có những người nông dân, người làm vườn, một người thích biển quảng cáo đang treo các biển chào hàng và một bé gái tinh nghịch đã cắt quả cầu ra từng mảnh. Một số sự kiện và tình huống như cuộc đua xe giành Giải Golden Gouda và việc khám phá ra các đồ tạo tác Ai Cập hoàn toàn chỉ là những chuyện bịa đặt.*

Bạn đọc có thể tìm đến phụ lục ở cuối cuốn sách này để có thêm thông tin cho các sự kiện và nhân vật thực trong các văn cảnh lịch sử đích thực của chúng, cũng như có thêm thông tin về các tình huống mà chúng tôi đã dựng nên.

Các phần khác nhau trong cuốn sách với nhiều khái niệm toán học rất khác nhau về mức độ khó dễ. Các vấn đề được sắp xếp theo một trình tự tự phát là chính, theo chúng tôi đó là sự tiến triển tự nhiên của các chủ đề. Phần nào trật tự này phản ánh cách suy nghĩ của các tác giả song tất nhiên đó không phải cách lựa chọn duy nhất có thể có. Do đó mà các chủ đề không nhất thiết xuất hiện theo trình tự mức độ khó tăng dần. Chẳng hạn các vấn đề ở phần giữa cuốn sách nói về logarit và số mũ thì việc tiếp thu không dễ dàng như các vấn đề nói ở phần sau về các vật thể không gian và các số. Mỗi phần đều độc lập với những phần khác, vì vậy bạn đọc có thể tùy ý đọc nhảy cóc cuốn sách. Vì chúng tôi muốn bạn đọc dễ dàng tiếp thu, nên không coi sự chặt chẽ của các phép chứng minh và các từ vựng là ưu tiên hơn so với sự hiểu được các khái niệm về cơ bản. Sự thật là *việc giải thích cho thật chặt chẽ và chính xác thì vẫn cứ dài và khó hơn mà nó lại thường làm rối rắm thêm so với việc làm cho sáng tỏ ra.*

Cuốn sách này là một phần thừa kế trí tuệ của Raphael Salem mà tư tưởng và văn phong của ông đã ảnh hưởng tới nhiều nhà toán học đương đại.

Chúng tôi xin gửi tới các Giáo sư Jean-Pierre Kahane và Henri Cartan lời cảm ơn nồng nhiệt. Giáo sư Kahane đã ưu ái cổ vũ chúng tôi viết cuốn sách này khi nó mới chỉ là một ý nghĩ. Giáo sư Cartan đã chấp nhận đọc bản thảo của chúng tôi và có những đóng góp đáng kể cho văn phong được chặt chẽ và sáng sủa, sửa lại những chỗ sai sót và gợi ý cách trình bày đơn giản. Chúng tôi cảm ơn Jean-Pierre Sicre về những góp ý dựa trên kinh nghiệm giảng dạy phong phú của ông làm cho những phần khó nhất của cuốn sách trở thành dễ hiểu. Chúng tôi biết ơn Geoffrey Staines đã tin tưởng ở chúng tôi. Cuối cùng, cuốn sách sẽ chẳng bao giờ được xuất bản nếu không có sự giúp đỡ tận tình của Martine Wiznitzer và Pascaline Jay.

Để kết luận, chúng tôi hy vọng rằng vẻ đẹp thấy được qua buổi dạo chơi ngắn ngủi trong thế giới toán học sẽ là nguồn cảm hứng để bạn đọc đi xa hơn nữa và tiếp tục tìm kiếm các vương quốc mới.

Lionel Salem
Frédéric Testard
Coralie Salem

Lũy thừa

của

các số

1

Lũy thừa nguyên của các số

Giả sử có một số a, ta gọi a tự nhân với nó là bình phương của a và viết là a^2 :

$$a^2 = a \times a$$

Nếu $a = 3$ thì $a^2 = 3 \times 3 = 9$. Từ bình phương, tiếng Anh là *square* bắt nguồn từ việc nếu ta tính diện tích một hình vuông, tiếng Anh cũng là *square*, có cạnh là a thì kết quả là a^2. Chẳng hạn nếu $a = 3$ thì hình vuông đó có thể chia thành 3×3 hình vuông nhỏ có cạnh là 1 và theo định nghĩa thì có diện tích bằng 1. Như vậy là cái khay trong hình vẽ có thể đựng được 9 miếng bánh.

Tương tự như vậy, a tự nhân với nó hai lần là lập phương của a và viết là a^3 :

$$a^3 = a \times a \times a$$

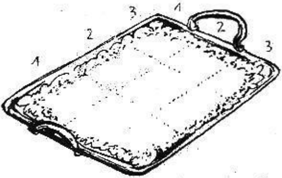
Ví dụ $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$. Lần này, từ lập phương, tiếng Anh là *cube*, là do có tính đến việc a^3 là thể tích của khối lập phương, tiếng Anh cũng là *cube*, có cạnh là a, và có thể chia nhỏ thành a^3 khối lập phương nhỏ có cạnh là 1 và thể tích là 1. Như vậy cái thức ăn đầy màu sắc trong hình bao gồm 27 miếng bánh.

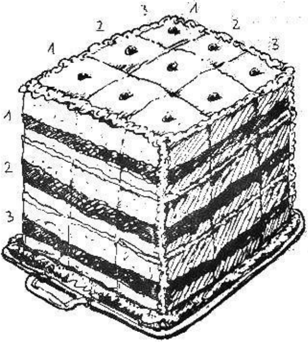
Nói chung, ta định nghĩa

$$a^4 = a \times a \times a \times a$$
$$(3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81)$$
$$a^5 = a \times a \times a \times a \times a$$
$$(3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243)$$

vân vân. Trong những trường hợp này thì không có cách biểu diễn hình học đơn giản nào nữa.

Cuối cùng ta cũng có thể định nghĩa các *lũy thừa âm* của các số : số a^{-1} theo định nghĩa là bằng với nghịch đảo $1/a$ của a. Ví dụ : $2^{-1} = 1/2 = 0,5$; $2^{-3} = 1/2^3 = 1/8 = 0,125$; v.v...





2

$2^n \times 2^m = 2^{n+m}$

Chúng ta vừa thấy cách "nâng một số lên một lũy thừa cho trước". Để nâng số a lên bình phương (lũy thừa hai) tức là $a^2 = a \times a$, nâng lên lũy thừa ba là tính $a^3 = a \times a \times a$, vân vân.

Ví dụ số

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

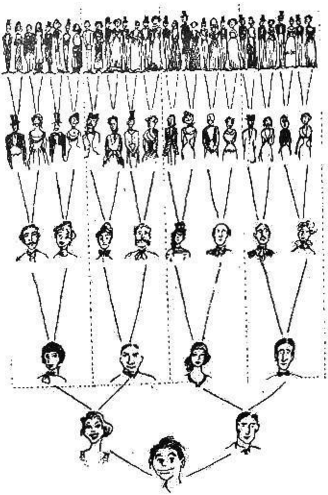
có thể tính được bằng cách nhân năm con số đều bằng 2 với nhau. Nếu ta nhóm năm con số đó thành một tập hợp ba con số và một tập hợp hai con số thì thấy rằng

$$2^5 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2)$$
$$2^5 = 2^3 \times 2^2$$

Vì mỗi đời con cháu đều có hai vị tổ tiên trực tiếp (hai bố mẹ, bốn ông bà, v.v...) nên ta thấy rằng các vị tổ tiên của đời con cháu thứ năm sẽ là 2^5 và có thể tính được bằng cách viết

$$\begin{aligned} 2^5 &= 2^3 \times 2^2 \\ &= 8 \times 4 \\ &= 32 \end{aligned}$$

Vì mỗi một trong bốn vị ông bà lại có 8 bậc cụ kỵ nên cu cậu có cái đầu trong hình ở đời con cháu thứ năm sẽ có 32 vị tổ tiên tất cả tính đến thời điểm đủ các cụ để nhảy các điệu valse đầu tiên.



Tam giác, Hình chữ nhật, Hình vuông và Hình tròn

3

Diện tích một hình chữ nhật bằng tích các cạnh của nó

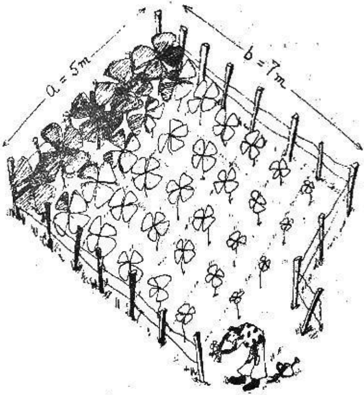
Do có một đột biến kỳ dị mà một số cây tam diệp lại có bốn lá đã biến thành các cây khổng lồ làm các nhà thực vật học rất ngạc nhiên đã vội vã đặt tên cho nó là *Trifolium giganteum*. Các Trifolium giganteum này có một đặc tính kỳ lạ là chỉ mọc khi chúng có một khoảng đất mỗi bề một mét, tức là 1 mét vuông.

Một nông dân muốn trồng các cây kỳ lạ này ngẫu nhiên lại có một mảnh đất hình chữ nhật đo được là 5 mét và 7 mét. Ông ta thấy có thể gieo năm hàng cách nhau một mét với bảy cây mỗi hàng. Do đó ông trồng được

$$5 \times 7 = 35 \text{ cây}$$

mà không lãng phí một tí đất nào. Diện tích của nó, *area*, một từ dẫn xuất từ một tiếng Latinh có nghĩa một mảnh đất nhô lên, do đó bằng 35 mét vuông, tích của chiều dài với chiều rộng của nó

$$\boxed{A_{\text{hình chữ nhật}} = a \times b}$$


a = 5m
b = 7m

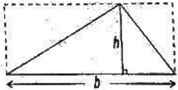
4

Diện tích của một tam giác bằng một nửa tích của chiều cao với đáy của nó

Trồng các Trifolium giganteum cho thấy khá thành công trong thương mại nên anh bạn nông dân của chúng ta rất thích trồng nhiều hơn nữa. Mảnh đất duy nhất mà anh bạn còn lại là một miếng đất hình tam giác. Tiếc thay, theo như biến đổi kỳ lạ về di truyền của định mệnh thì cái cây biến dị đó chỉ mọc ở các mảnh đất có hình chữ nhật.

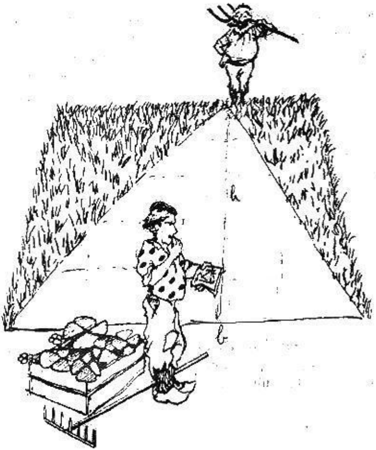
"Không sao !" anh bạn nông dân nói lớn. "Một tam giác chỉ bằng một nửa hình chữ nhật". Rồi anh đến gặp người láng giềng và gợi ý một thỏa thuận.

Anh giải thích, "Trong mảnh đất hình tam giác của tôi, tôi có thể vẽ một đường thẳng h thẳng góc với cạnh đáy b đi qua đỉnh đối diện. Đường này chia mảnh đất đó thành hai hình tam giác vuông góc. Nếu chúng ta hợp lực thì có thể biến mảnh đất đó thành một hình chữ nhật để trồng Trifolium bởi chúng ta chỉ cần tăng đôi mỗi tam giác đó."



"Vì diện tích của hình chữ nhật là b x h nên diện tích tam giác của tôi sẽ phải là 1/2 (b x h). Vậy thì ghép các mảnh đất của chúng ta lại với nhau và đến vụ thì sẽ chia đều cho nhau."

$$\boxed{A_{\text{Tam giác}} = \frac{1}{2}(b \times h)}$$


h
b

5

Tổng các góc của một tam giác bằng 180°

Phấn chấn với ý nghĩ lần đầu tiên trồng vụ Trifolium, người láng giềng cứ sốt ruột đi quanh chu vi mảnh đất hình tam giác của mình trong khi đợi anh bạn kia đi mua hạt giống về. Anh bạn láng giềng đặt tên cho tam giác đó là ABC và có một nhận xét là nếu các cạnh AC và AB tạo thành một góc α thì mỗi lần tới được A rồi anh phải quanh một góc là $180^\circ - \alpha$. Sở dĩ như vậy vì tổng các góc *ngoài* và *trong* tại A bằng 180°. Cũng với lý do đó, anh quay $180^\circ - \beta$ tại B và $180^\circ - \gamma$ tại C.

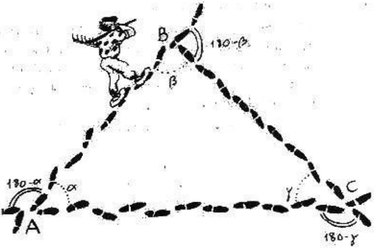
Sau ba lần quay như vậy anh lại thấy mình hướng theo hướng cũ nhưng đã thực hiện được đầy đủ một vòng quay 360°. Vì vậy anh nhận ra rằng

$$(180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma) = 360^\circ$$

hoặc

$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ}$$

Để giải trí thêm, bạn đọc có thể rút ra được những phương trình mà anh bạn nông dân kia sẽ khám phá ra nếu mảnh đất của anh có 4, 5, 6, cạnh hoặc nhiều hơn.



B
180-β
β
180-α
α
A
γ
C
180-γ

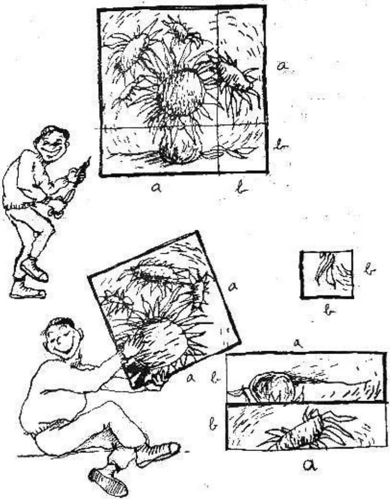
6

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Có một ngày đẹp trời, một chú bé thần đồng nhìn thấy tấm tranh in lộng lẫy "Cây hướng dương" của Van Gogh treo trong hành lang nhà bố mẹ mình có bốn nếp gấp. Tò mò, chú bé lại nhìn gần hơn thì thấy các nếp gấp đó chia tấm tranh in hình vuông thành hai phần nhỏ hình vuông có các cạnh là a và b và hai phần nhỏ hình chữ nhật có chiều dài là a và chiều rộng là b. Thế là cậu quyết định chơi vui bằng cách tính diện tích của toàn bộ bức tranh in bằng hai cách khác nhau.

Cậu thấy ngay là nó phải bằng $(a + b)^2$. Nhưng nó cũng bằng $a^2 + b^2 + ab + ab$, vì diện tích của bức tranh in bằng tổng các diện tích của bốn phần nhỏ kia. Rồi để cho chắc ăn, cậu đã quyết định cắt dọc theo các nếp gấp. Sau khi mau chóng dùng kéo cắt ra cậu đã tin tưởng đi đến kết luận là

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$


a
b
a
b
a
b
b
a
a
b
b
a

7

$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$

Chú bé thần đồng của chúng ta lại sống lang thang trên đường phố và bây giờ thì đang dán các tấm biển quảng cáo lên bảng để kiếm sống. Không bao giờ để mất đi niềm say mê tài tử về toán học, trong phạm vi việc làm mới của mình cậu bé đã có nhiều cơ hội vận dụng được tốt điều cậu quan tâm về các công thức. Từ kinh nghiệm trước đây của cậu khi cắt nhỏ các tờ tranh in, bây giờ cậu chuyển sang tìm tòi các vấn đề mới. Cậu bắt đầu treo một biển quảng cáo hình vuông có các cạnh là a mà bên trong có một hình vuông nhỏ cạnh là b. Cậu quyết định cắt rời hình vuông nhỏ đó ra. Thế là còn lại cái biển hình chữ L cụt lủn. Hình này rõ ràng là phải có diện tích bằng

$$a^2 - b^2$$

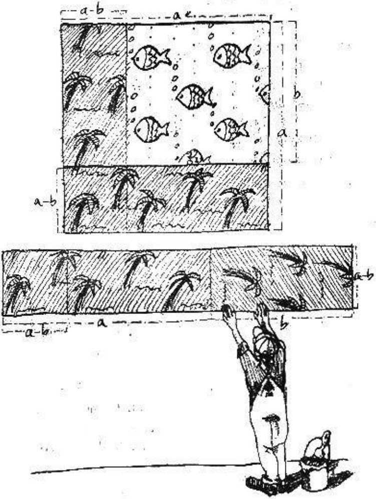
Như có ai mách bảo, cậu hạ phần trên của chữ L xuống là phần có các cạnh là b và a - b và đặt ở phía cuối bên phải phần đáy của chữ L. Cậu nhận ra ngay rằng làm như vậy thì có được một hình chữ nhật lớn có chiều dài là a + b và chiều cao là a - b, và diện tích là

$$(a + b)\,(a - b)$$

Như vậy có nghĩa là

$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$$

Thế là trong ngày hôm đó cậu bỗng nhiên nổi tiếng rồi tự nói với mình rằng đã khám phá ra được một đẳng thức thực sự đáng chú



a-b
a
b
a
a-b
a-b
a-b
a
b

8

Định lý Pythagore : $a^2 + b^2 = c^2$

Để chứng minh rằng trong một tam giác vuông thì bình phương đường huyền bằng tổng bình phương các cạnh còn lại,

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Tổng thống Hoa kỳ James Garfield đã quyết định dựng một hình thang như trong hình vẽ bao gồm hai tam giác vuông góc có các cạnh là a, b và c và một tam giác vuông cân mà hai cạnh bằng nhau có chiều dài là c. Có thể thử lại thì thấy rằng góc AOB là góc $180° - \alpha - \beta$ phải bằng 90° vì anh bạn nông dân ở Vấn đề số 5 đã cho thấy là tổng các góc $\alpha + \beta + 90°$ trong mỗi tam giác vuông góc đều bằng 180°.

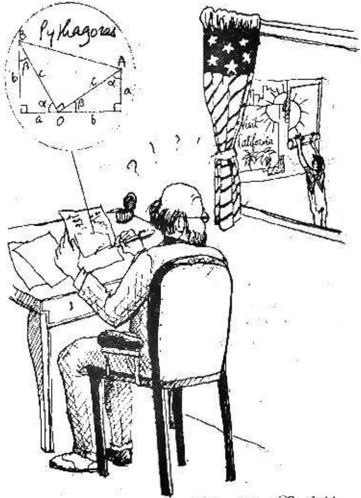
Rồi Tổng thống Garfield đã tính diện tích của hình thang đó theo hai cách khác nhau. Ông đã biết rằng diện tích đó đơn giản là tích đáy của nó, a + b, nhân với một nửa tổng của các cạnh, 1/2 (a + b). Chúng tôi không chứng minh điều này song bạn đọc có thể dễ dàng thấy là đúng như vậy bằng cách dựng một hình chữ nhật từ hai hình thang.

Diện tích này cũng có thể tính được bằng cách cộng các diện tích của mỗi một trong ba tam giác trên, $ab/2$, $ab/2$, và $c^2/2$. Kết quả là

$$(a + b) \times \frac{(a + b)}{2} = ab + \frac{c^2}{2}$$

Bằng cách vận dụng những gì mà chuyên viên về bảng quảng cáo đã truyền cho ở Vấn đề 6 khi còn là một người học việc, Tổng thống đã có thể triển khai vế trái của phương trình và thế là lại tái phát hiện đẳng thức mà gần 2500 trước Pythagoras đã tìm ra.

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$



Tổng thống Garfield
chứng minh định lý Pythagore
nhờ có sự giúp đỡ của một anh bạn
trẻ thích biển quảng cáo.

9

Chu vi một đường tròn bằng $2\pi R$

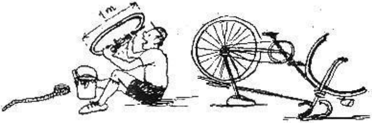
Một người đi xe đạp có nhận xét rằng để quay hết một vòng các chiếc bánh xe có đường kính 70 centimet của mình thì anh ta phải mất nhiều sức hơn khi đường kính chỉ có 50 centimet, và thế là anh quyết định tìm cho được điều bí ẩn này. Để đo chiều dài của một vòng quay đầy đủ anh lấy mỗi loại vỏ xe một chiếc rồi phết nhẹ ít sơn lên ta-lông rồi quay bánh xe và đo khoảng cách giữa các vết sơn. Với loại vỏ 50 centimet thì đo được 1,57 met và loại vỏ 70 centimet thì đo được 2,19 met. Lặp lại thử nghiệm này với các loại vỏ có đường kính khác nhau, anh ta thấy rằng chu vi L của chúng luôn luôn tỷ lệ với đường kính D và hệ số tỷ lệ xấp xỉ bằng 3,14.

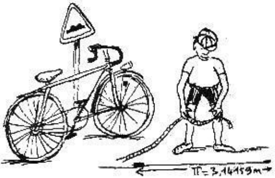
$$L \approx 3{,}14 \times D$$

Ít lâu sau anh có thấy công thức này trong một cuốn sách về hình học. Ở đó hệ số tỷ lệ này gọi là π, đọc là pi và được biết đó là chữ đầu của một từ Hy Lạp ứng với từ tiếng Anh *perimeter* nghĩa là chu vi. Trong công thức này, đường kính có thể thay bằng 2R, hai lần bán kính.

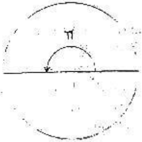
$$\boxed{L = 2\pi R}$$

Trong cuốn sách đó anh bạn đi xe đạp của chúng ta cũng tìm thấy định nghĩa một đơn vị đo góc khác gọi là *radian*. Một radian xấp xỉ bằng 57°18' là một góc cắt một độ dài bằng 1 trên chu vi một đường tròn có bán kính là 1.

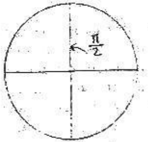

1 m


π = 3,14159 m

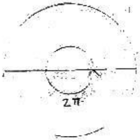
Vì chiều dài của một phần tư đường tròn có bán kính là 1 là $\pi/2$ nên $\pi/2$ là giá trị của một góc vuông tính theo radian. Tương tự, một góc 180° ứng với π radian vì một nửa chu vi của đường tròn bán kính bằng 1 là π. Tổng quát hơn, trong một đường tròn bán kính bằng 1 thì cung cắt bởi một góc bằng α radian có chiều dài là α. Nói riêng, một góc 360° ứng với toàn bộ đường tròn sẽ đo được 2π radian vì chu vi của một đường tròn có bán kính bằng 1 là 2π.



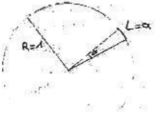
Góc π radian
(180°)



Góc π/2 radian
(90°)



Góc 2π radian
(360°)



Trong một đường tròn có bán kính bằng 1 thì cung cắt bởi một góc α radian có độ dài là α.

10

Diện tích một hình tròn bằng πR^2*

Vào khoảng năm 250 trước công nguyên một thợ cả làm bánh ngọt tại Syracuse làm một cái bánh khổng lồ hình tròn và mời mọi người trong phố đến cùng chia xẻ. Sau khi mất nhiều tiếng đồng hồ để cắt nhỏ ra, mỗi người khách nhận được một lát bánh nhỏ. Một số vị khách có nhận xét rằng các lát bánh đó đều giống như những tam giác vuông góc có chiều cao là R và đáy là 1, như thấy ở hình phía trên của hình kèm theo đây.

Do đó diện tích của mỗi lát bánh đó xấp xỉ bằng 1/2 (R x 1). Nhưng một vị khách đầy vẻ thông minh là Archimedes thì nói để mọi người biết rằng nếu diện tích của tất cả các lát bánh nhỏ đó mà cộng lại thì kết quả sẽ là R lần tổng tất cả các độ dài 1 chia cho 2 và sẽ bằng diện tích A của toàn bộ cái bánh đó.

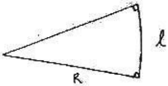
"Song", ông nói thêm, "tổng các độ dài 1 lại chính là chu vi của cái bánh đó và bằng $2\pi R$". Thế rồi các vị khách thấy ông reo lên "Eureka !" (có nghĩa là "Tôi đã tìm thấy") rồi viết lên mặt kem của cái bánh

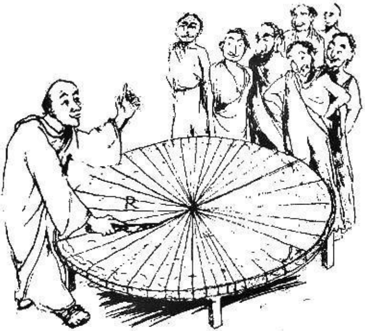
$$A = \frac{1}{2} R \times 2\pi R$$

hoặc

$$A = \pi R^2$$

* Các nhà toán học đã phân biệt tỉ mỉ giữa một "hình tròn" là cái có một chu vi nhưng không có diện tích nào với một "đĩa" là cái tương ứng với diện tích bên trong hình tròn. Tuy nhiên, theo cách dùng thông thường chúng tôi vẫn giữ lại từ "hình tròn".


l
R


R

Các góc

11

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

Vào khoảng năm 1900, những người mà các tác giả cuốn sách này kêu bằng cụ đã nhờ Christophe, một nhà văn Pháp và là một họa sĩ vẽ tranh minh họa, giới thiệu họ với một trong những người bạn khó gặp nhất của ông là nhà bác học vĩ đại Cosine. Sau một chuyến đi dài ở tư thế bịt mắt trong một xe hơi thuộc loại hàng đầu, các cụ của chúng tôi cuối cùng cũng đã đến được nhà của bậc sư phụ. Bên cạnh người là Giáo sư Sine được giới thiệu là cộng sự trung thành nhất của người.

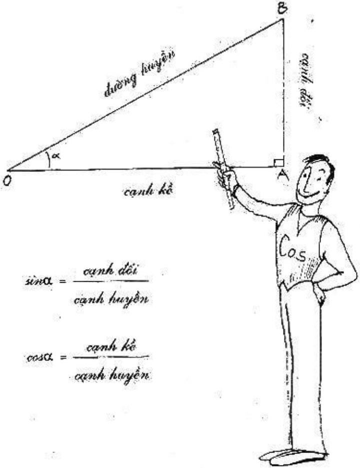
Bất ngờ đầu tiên trong nhiều bất ngờ là khi chợt nhìn thấy Giáo sư Sine. Các cụ tổ của chúng tôi mau chóng nhận ra rằng nhà bác học Cosine và Giáo sư Sine cả hai đều lùn và biết cách co người lại có thể co được từ một mét đến nhỏ hơn một centimet rồi lại lớn trở lại. Hai người ngầm nháy mắt với nhau và nói với các vị khách là sẽ giảng cho các vị một bài về lượng giác.*

"Chắc các vị đã biết", họ bắt đầu nói, "rằng trong một tam giác vuông thì sin của một góc được tính bằng cách chia cạnh đối diện cho đường huyền và cos thì có được bằng cách chia cạnh kề cho đường huyền như thấy ở hình vẽ trên bảng. Song, như các vị có thể thấy được, định nghĩa này không cho sin và cos của các góc tù."

"Rất tiếc là", họ nói thêm "không có cách nào để định nghĩa các loại sin và cos này."

---

* Thuật ngữ lượng giác, tiếng Anh là *trigonometry* bắt nguồn từ tiếng Hy Lạp *trigônos* nghĩa là góc (giác) và *metron*, nghĩa là đo, số đo (lượng).



$$\sin\alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}}$$

Rồi họ nằm xuống hai đường thẳng, một dọc, một ngang xác định hai đường kính của một hình tròn có bán kính bằng 1. Rồi họ đề nghị các vị khách chọn lấy một góc. Các cụ tổ chúng tôi chọn 30°. Nhà bác học Cosine điều chỉnh chiều cao của mình cho bằng cos của 30°, khoảng 0,866, và Giáo sư Sine thì làm cho chiều cao của mình hợp với sin của 30° là 0,5. "Hãy chú ý cẩn thận", nhà học giả Cosine nói, "là trong tam giác vuông góc OAB, đường huyền bằng 1 nên các sin và cos 'mới' đồng nhất với những giá trị bình thường." (Hiểu là bằng chính cạnh đối hoặc cạnh kề - ND)

Khi các cụ tổ của chúng tôi chọn 90° thì đầu của Giáo sư Sine đụng vào đường tròn và nhà bác học Cosine thì co nhỏ lại tới mức không còn trông thấy ông nữa. Điều đó có nghĩa là

$$\sin 90^\circ = 1, \cos 90^\circ = 0$$

Mặt khác, khi chọn 180° thì Giáo sư Sine biến mất còn nhà bác học Cosine thì đạt tới chiều cao cực đại của mình. Song lần này ông lại nằm ở bên trái đường thẳng, có nghĩa cos là âm :

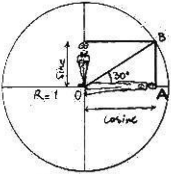
$$\sin 180^\circ = 0, \cos 180^\circ = -1$$

Rồi họ kết luận "Các vị thấy đấy, bằng cách này người ta có thể tính được sin và cos của một góc tù".

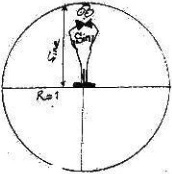
Một phút sau, đột nhiên họ hỏi các vị khách là họ có muốn biết tại sao

$$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$$

với mọi giá trị của α hay không. Theo truyền thống toán học công thức trên cũng có thể viết thành $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Sau vài phút, họ xin chịu. Sine và Cosine giải thích là mỗi người họ đại diện cho một cạnh của một tam giác vuông góc OAB có đường huyền bằng 1, tức là bán kính của hình tròn. Do đó rõ ràng là theo định lý Pythagore thì bình phương của một cạnh cộng với bình phương của cạnh kia thì bằng bình phương của đường huyền, tức là bằng 1.

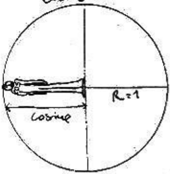


1) Góc 30°
sine $= \frac{1}{2}$
cosine ≈ 0.866

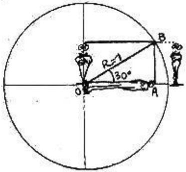


2) Góc 90°
Sine = 1
Cosine = 0

3) Góc 180°
Sine = 0
cosine = 1



4) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$



12

$\sin\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha \approx 1 - \dfrac{\alpha^2}{2}$

(α nhỏ)

Họ phàn nàn, "Vì chúng tôi không có máy tính nên cần tìm cách tính được, ít nhất là gần đúng, sin và cos của một góc cho trước. Độ dài một cung của đường tròn có bán kính bằng 1 thì bằng góc α khi góc đó không biểu thị bằng độ mà bằng radian. Một radian bằng khoảng 57° là một đơn vị khác để đo góc mà chúng ta đã bắt gặp ở Vấn đề 9. Nếu cung này rất nhỏ thì thực tế nó đồng nhất với đường thẳng trương nó mà về độ dài thì tương tự đường thẳng đứng tạo thành tam giác vuông góc trong hình vẽ kèm theo đây." Đường này có cùng chiều dài như Giáo sư Sine nên

$$\boxed{\sin\alpha \approx \alpha}$$

Các cụ tổ của chúng tôi ngỡ ngàng song nhà bác học Cosine lại bồi tiếp : "Bây giờ xin các vị hãy nhìn vào tam giác vuông góc nhỏ tô đậm ở bên phải giáo sư Sine. Các cạnh của nó chính là $\sin\alpha$ và $1 - \cos\alpha$ và đường huyền xấp xỉ bằng α."

Dùng định lý Pythagora do công thức mà anh chàng thích tranh in đã cung cấp ở Vấn đề 6, ta thấy

$$\sin^2\alpha + (1 - \cos\alpha)^2 \approx \alpha^2$$

$$\sin^2\alpha + 1 + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha \approx \alpha^2$$

Nhưng vì $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, nên ta có

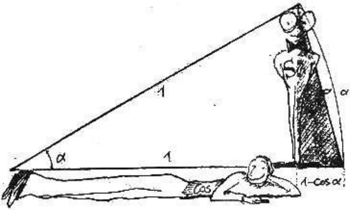
$$2 - 2\cos\alpha \approx \alpha^2$$

$$\boxed{\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}}$$

"Hãy cẩn thận nhé !", nhà bác học Cosine dặn dò, "Đây là những phép xấp xỉ chỉ có giá trị với các gốc α nhỏ mà thôi."

---

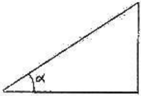
* Để chặt chẽ về mặt toán học thì biểu thức này được viết là $1 - \cos\alpha \approx \frac{\alpha^2}{2}$ và cần phải hiểu không phải một tương đương mà là một giá trị giới hạn của cosα khi α tiến tới 0.



13

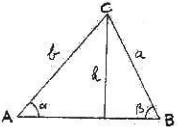
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

Nhà bác học Cosine và Giáo sư Sine tiếp tục, "Bây giờ chúng tôi sẽ trình bày với quí vị một điều thực sự đáng ngạc nhiên. Các vị chớ nên quên rằng trong một tam giác vuông góc thì



$$\sin\alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{đường huyền}}$$

Lấy một tam giác - có lẽ tam giác này đây - và cắt theo chiều dọc thành hai nửa. Ta được hai tam giác vuông góc. Ta sẽ gọi các góc tại A và B là α và β, chiều dài của các cạnh đối là a và b và chiều cao là h." Như vậy thì



$$\sin\alpha = \frac{h}{b}$$

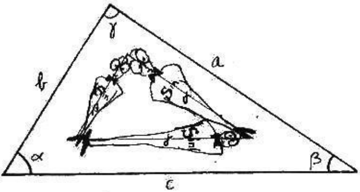
$$\sin\beta = \frac{h}{a}$$

Do đó h = b sinα = a sinβ. Từ đẳng thức này, ta có

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$$

Song chẳng có gì ngăn cản chúng ta không được cắt tam giác giữa A và C nên cũng đúng là ta có

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}}$$

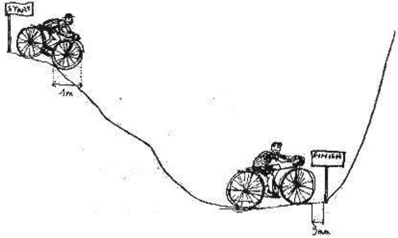


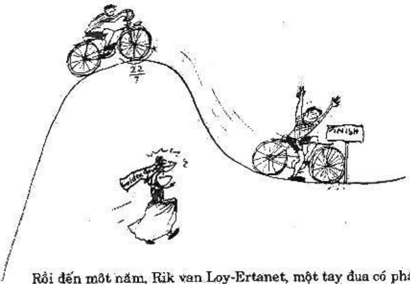
14

Số hữu tỷ và số vô tỷ

Số *hữu tỷ* là các số có được bằng cách chia một số nguyên cho một số nguyên. Ví dụ 2/3 (2 chia cho 3) là một số hữu tỷ. Song có những số không thể biểu thị được là thương của hai số nguyên. Các số này gọi là các số *vô tỷ*. Ví dụ trong các số vô tỷ có số $\sqrt{2}$ là chiều dài đường chéo của một hình vuông có cạnh bằng 1, số π là chu vi của một vỏ xe có đường kính bằng 1 (xem Vấn đề 9), và số e, chúng ta sẽ gặp ở Vấn đề 23.

Ở thế kỷ thứ 18, tại hội chợ truyền thống trong vùng tại Amstel, một thị trấn nhỏ ở Hà Lan, người ta yêu cầu những người tham dự cuộc đua xe đạp tranh giải Golden Gouda không phải là chạy nhanh mà là chế tạo ra những chiếc xe đạp có lốp xe đi được 22 mét sau một số nguyên các vòng quay. Không một ai có thể chiếm được giải cả.





Rồi đến một năm, Rik van Loy-Ertanet, một tay đua có phần thông minh hơn những người khác một chút khẳng định là với một vài phép tính và một chút quyết tâm anh ta có thể dành được chiến thắng. Lúc đầu anh dùng một vỏ xe đường kính một mét, nhưng anh đã thất vọng khi thấy rằng vì chu vi của nó bằng π nên một số nguyên vòng quay không thể nào bằng được 22 vì π là một số vô tỷ. Anh càng vỡ mộng khi thấy sau 7 vòng quay đầy đủ thì còn đúng 9 milimet nữa mới đi hết 22 mét.

Năm sau anh xem lại các tính toán của mình và chế tạo một cái vỏ có chu vi đo được 22/7. Thế là anh có thể đi hết khoảng cách 22 mét với đúng 7 vòng quay đầy đủ. Sở dĩ như vậy vì 22/7, cũng như tất cả các số hữu tỷ khác, có các bội số là các số nguyên. Trong trường hợp này là 7 x (22/7) = 22.

Mặc dầu anh giữ kín khám phá của mình song điều bí mật đó cuối cùng cũng bị lộ ra và mỗi năm sau đều có ngày càng nhiều người cùng chiếm giải với anh. Cuối cùng thì các vị trong ban tổ chức mệt vì cứ phải giải quyết các trường hợp ngang điểm nên họ đã thay đổi qui định thi đấu : Từ đó trở đi người thắng cuộc phải là người nhanh nhất. Với qui định này đã ra đời cuộc đua xe đạp hiện nay.

15

$$\pi \approx \frac{355}{113}$$

Chúng ta vừa thấy rằng không có cách nào biểu thị được π là tỷ số của hai số nguyên. Song có nhiều cách tính xấp xỉ thuộc loại này như 3,14 = 314/100 = 157/50. Dưới đây là một phương pháp hay để tìm một xấp xỉ khác :

$$\pi \approx 3{,}1415926 = 3 + 0{,}1415926$$

Rồi ta có thể viết

$$0{,}1415926 \approx \frac{1}{(7{,}062516)} = \frac{1}{(7 + 0{,}062516)}$$

Vì

$$0{,}062516 \approx 1/15{,}99$$

và vì ta có thể lấy tròn 15,99 là 16 nên ta có

$$\pi \approx 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{\cfrac{113}{16}} = 3 + \frac{16}{113} = \frac{355}{113}$$

Ta thấy là

$$355/113 \approx 3{,}1415929$$

từ đó

$$\pi \approx 3{,}1415926$$

Điều này có nghĩa là sự khác biệt giữa π và giá trị xấp xỉ cho bởi 355/113 chỉ vào khoảng 3 phần mười triệu.

** Ai là người sẽ chi li với*
3 phần mười triệu đấy ?

Phương trình bậc hai

16

Nghiệm của một phương trình bậc hai

Khoảng năm 500 trước công nguyên, một nông dân Hy Lạp muốn mua một mảnh đất hình vuông và một vật gì đó để rào quanh nó. Mỗi mét vuông đất giá một drachma kể cả một mét hàng rào. Anh ta có tổng cộng 60 drachmas. Anh tính toán rằng nếu hình vuông đo được mỗi cạnh là N mét thì diện tích sẽ là N^2 mét vuông và chu vi sẽ là 4N mét và tổng số tiền phải trả cho đất và hàng rào sẽ là $N^2 + 4N$ drachma. Do đó mảnh đất lớn nhất mà anh có thể có được sẽ là mảnh đất mà

$$N^2 + 4N = 60$$

Để giải phương trình này anh có nhận xét là $N^2 + 4N$ là "phần đầu" của $(N + 2)^2$ vì $(N + 2)^2 = N^2 + 4N + 4$. (Để có được hiểu biết này có thể anh đã được những người thích chơi tranh in và các chuyên viên bảng hiệu cùng thời giúp đỡ. Xem Vấn đề 6). Như vậy phương trình trở thành

$$(N + 2)^2 = N^2 + 4N + 4 = 64$$

vậy $N + 2 = 8$, hoặc $N = 6$. Nghiệm khác, $N + 2 = -8$ đối với người nông dân là vô nghĩa.

Về sau, các nhà toán học khác thấy rằng các số N mà

$$aN^2 + bN + c = 0$$

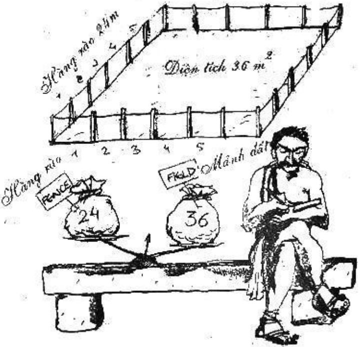
chỉ tồn tại khi $b^2 - 4ac \geq 0$ và được cho bởi công thức

$$N_1 = \frac{1}{2a}\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)$$

$$N_2 = \frac{1}{2a}\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)$$

Nếu $b^2 - 4ac = 0$ thì hai nghiệm là như nhau.

Các số N_1 và N_2 gọi là các *nghiệm* của phương trình bậc hai trên. Bạn đọc có thể thử rút ra những công thức này bằng cách chia phương trình trên cho a rồi làm theo cách người nông dân Hy Lạp đã làm.



17

Tỷ số vàng : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Từ những ngày xa xưa, các nghệ sĩ cũng như các nhà hình học đều đã biết rằng có một hình chữ nhật đặc biệt, có một nét thẩm mĩ rất thú vị, với chiều rộng bằng 1, chiều dài x và có tính chất sau đây : Khi lấy đi một hình vuông có cạnh bằng 1 thì hình chữ nhật còn lại sẽ có các tỷ lệ như nhau so với hình chữ nhật lúc đầu (xem hình vẽ kèm theo đây). Vì hình chữ nhật mới có chiều rộng là $x - 1$ và chiều dài là 1 nên sự tương đương các tỷ lệ có nghĩa là

$$\frac{x-1}{1} = \frac{1}{x}$$

Số x gọi là tỷ số vàng, vì vậy phải thỏa mãn phương trình

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Công thức ở Vấn đề 16 được sử dụng sẽ cho thấy rằng nghiệm dương của phương trình này là

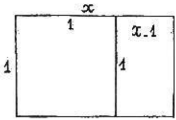
$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$$

Như chúng ta đã làm cho số π ở Vấn đề 15, bây giờ ta thử tìm một số hữu tỷ xấp xỉ với số vô tỷ x. Để làm việc này ta lưu ý rằng phương trình đầu tiên cho phép chúng ta viết là

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

Ở vế bên phải của phương trình này ta có thể thay thế x bằng biểu thức tương đương $1 + \frac{1}{x}$. Việc này sẽ cho phương trình mới

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}$$



Các hình chữ nhật có những tỷ lệ như nhau nên

$$\frac{x-1}{1} = \frac{1}{x}$$

Tiếp tục những thay thế đó và bỏ đi 1/x cuối cùng thì ta sẽ được một chuỗi số sau đây

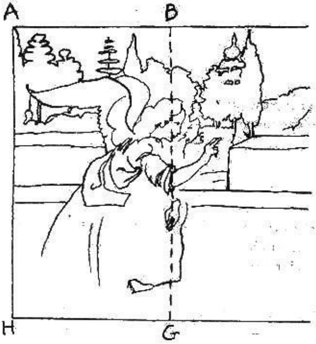
$$1\ ,\ 1 + \frac{1}{1}\ ,\ 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}\ ,\ 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}\ , \ldots$$

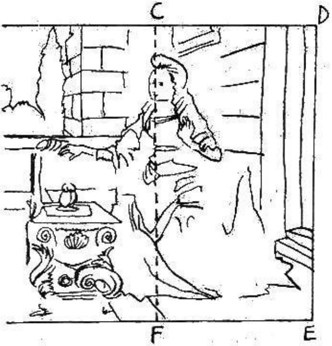
Thực tế cứ tiếp tục tính toán những con số này đến vô hạn thì thật là nhạt nhẽo, nhưng có thể thấy được rằng chúng ngày càng gần với giá trị đúng của

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Để biểu thị hiện tượng hội tụ này, ta có thể viết

$$\boxed{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}$$


A
B
H
G



Hai đường gạch chia bức tranh thành bốn hình chữ nhật vàng :

ACFH,

BDEG,

ABGH, và

CDEF

18

Số ảo : $i = \sqrt{-1}$

Chúng ta đã biết cách giải $x^2 + 4x = 60$ và các phương trình bậc hai khác ở Vấn đề 16. Công thức ở đó cho phép chúng ta thấy được rằng phương trình

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

có các nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = 2$. Song một số phương trình bậc hai lại không có các nghiệm bình thường. Ví dụ đơn giản nhất là phương trình

$$x^2 + 1 = 0$$

mà với công thức ở Vấn đề 16 thì cho

$$x_1 = \frac{\sqrt{-4}}{2} \qquad x_2 = -\frac{\sqrt{-4}}{2}$$

Nhưng số $\sqrt{-4}$ không tồn tại vì không có số thực nào có thể có bình phương bằng số âm -4. Với một ý nghĩa, sự tồn tại các phương trình bậc hai loại này đã buộc các nhà toán học phát minh ra *số ảo* là số có bình phương là âm. Điều này đã được nhà toán học Ý Girolamo Cardano thực hiện ở thế kỷ 16 khi ông phát triển công thức để dùng được khi giải phương trình bậc ba như

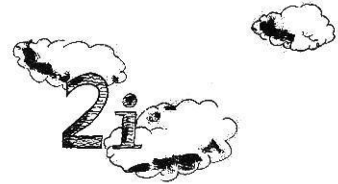
$$x^3 - 13x + 12 = 0$$

Kể cả khi có tồn tại các nghiệm đơn giản (trong trường hợp trên chẳng hạn, các nghiệm đó là 1, 3 và -4) Cardano cũng đều ngạc nhiên khi thấy công thức của ông buộc ông phải dùng các căn bậc hai của các số âm. Do đó ông đã chấp nhận sự tồn tại của các số như vậy. Số đơn giản nhất, gọi là i, là căn bậc hai của -1 :

$$i = \sqrt{-1}$$

Điều đó có nghĩa là các nghiệm của $x^2 + 1$ là i và -i.

Kết hợp các số thực như 5 với những số ảo như 2i, các nhà toán học đã tạo ra cả loạt các số mới như 5 + 2i gọi là các *số phức*. Trong trường hợp này 5 gọi là phần *thực* của 5 + 2i và 2 là phần *ảo*.



Số ảo

Số thực

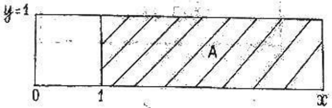
Logarit và Số mũ

19

Khám phá ra Logarit

Có một lần kia vào năm 1614, Lord Napier có một người Scot làm vườn. Lord Napier rất mê hình học và cực kỳ lập dị và ông yêu cầu người giúp việc mình trồng cho các khu vườn có những hình dáng có thể tưởng tượng ra được. Ngoài ra người làm vườn đó phải có phương pháp tính toán diện tích của mỗi khu vườn đó bởi Napier sẽ không bao giờ đưa cho anh ta dư lấy một hạt giống ngoài số thực sự cần thiết. Việc làm đầu tiên của anh ta là trồng một khu vườn có hình chữ nhật chiều rộng bằng 1 và chiều dài bằng x và Napier còn đưa ra một hạn chế là không được trồng gì trong mét đầu tiên. Do đó diện tích A thực sự cần gieo hạt là

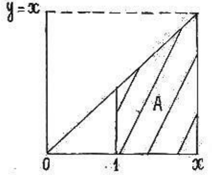
$$A = 1 \times (x - 1) = x - 1$$



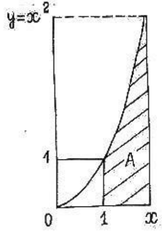
Rồi Napier lại yêu cầu anh ta trồng một vườn hình tam giác có bờ là đường thẳng $y = x$ với cùng một hạn chế như vậy. Nhớ lại công thức tính diện tích một tam giác, người làm vườn tính được diện tích trồng cây phải là

$$A = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$$

đó là diện tích của tam giác lớn trừ đi diện tích của tam giác nhỏ có cạnh bằng 1.

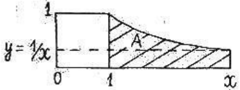


Lại đòi hỏi tiếp, Lord Napier muốn người làm vườn trồng cho một vườn hình parabol lần này có bờ ngoài là đường $y = x^2$. Ông hé miệng định nói tiếp thì người làm vườn đã ngắt lời "Cháu biết rồi", anh ta nói, "Không được trồng gì ở mét đầu tiên".



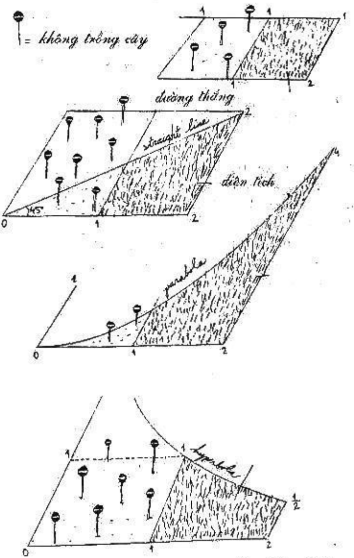
Lần này người làm vườn phải tham khảo một cuốn hình học mới thấy được diện tích A để trồng cây sẽ là

$$A = \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{3}$$



Quen với trò này rồi anh ta nảy ra ý định trồng một vườn hình hypecbol là cái vườn hẹp hơn sau mét đầu tiên thay vì rộng hơn. Song lần này mọi cố gắng của anh để tìm công thức trong sách đều vô ích. Để tỏ lòng kính trọng chủ mình, người đã làm cho anh ta thích thú với hình học, người làm vườn quyết định gọi diện tích đó là *diện Napier*. Về sau các nhà toán học cho nó một cái tên khác là *logarit Napier*. Do đó logarit của x, viết là log x hoặc ln x, ứng với diện tích gạch A trong hình vẽ trên :

$$\boxed{A = \log x}$$



diện tích này gọi là logarit của 2, hoặc loga của 2

20

Luật diệu kỳ của các loga : log (ab) = log a + log b

Cho các logarit một cái tên là một chuyện, còn tính toán chúng lại là một chuyện hoàn toàn khác. Người làm vườn mau chóng nhận ra rằng khi $x = 1$ thì cái vườn thu gọn lại thành một cái bờ đơn giản và do đó chẳng có diện tích nào cả :

$$\log 1 = 0.$$

Để tính các giá trị khác anh ta cắt diện tích cần đo lường thành một số lớn các phần nhỏ gần giống như hình chữ nhật. Ví dụ như hình vẽ kèm theo đây cho thấy log 4 có thể chia nhỏ thành ba phần như thế nào. Bằng cách dùng phương pháp tỉ mỉ này cần để chia diện tích đó thành một số ngày càng lớn các phần ngày càng nhỏ hơn, và theo một thủ tục mà ta sẽ thấy ở Vấn đề 22, anh ta đã tìm thấy

$$\log 2 \approx 0{,}693$$

$$\log 3 \approx 1{,}098$$

$$\log 4 \approx 1{,}386$$

$$\log 5 \approx 1{,}609$$

$$\log 6 \approx 1{,}791$$

Đột nhiên người làm vườn kêu to đầy vẻ chiến thắng. Anh ta vừa nhận xét thấy là

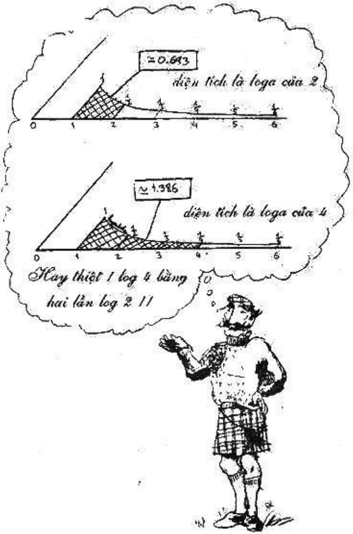
$$\log 4 = \log 2 + \log 2$$

$$\log 6 = \log 2 + \log 3$$

Rồi cả gan suy ra rằng với mọi số a và b thì

$$\boxed{\log (ab) = \log a + \log b}$$

Sau đó ít lâu đã có được phép chứng minh chặt chẽ nhờ ở những nỗ lực của Isaac Newton, một người Briton khác đầy hứng thú với những khu vườn, đặc biệt là những khu vườn có cây ăn trái.



21

$1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \log n$

Hội tụ về 0,577...

Việc khám phá ra công thức thần kỳ

$$\log (ab) = \log a + \log b$$

khiến người làm vườn dễ dàng tính được các giá trị mới mà không cần phải đo lường gì thêm nữa. Ví dụ để tính log 18 anh ta có thể dùng một sự kiện là

$$18 = 2 \times 9$$

để viết

$$\log 18 = \log 2 + \log 9$$

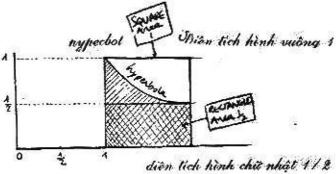
Nhưng vì 9 = 3 x 3, nên

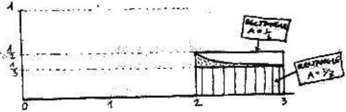
$$\log 9 = \log 3 + \log 3$$

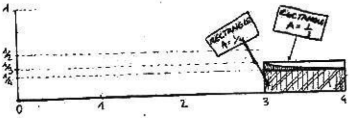
và cuối cùng thì

$$\log 18 = \log 2 + 2 \log 3 \approx 2{,}890$$

Phương pháp này có thể dùng để tính cả những giá trị loga lớn hơn, và để giải trí bạn đọc có thể chứng minh được rằng log 100 hoặc log 1000 có thể biểu thị được qua log 2 và log 5. Tuy nhiên, người làm vườn không chịu tin rằng thủ tục này có thể dùng để tính giá trị của tất cả các logarit. Bằng cách vẽ các hình giống như những hình kèm theo đây anh ta có nhận xét rằng hình dáng đặc biệt của vườn hypecbol cho thấy là diện tích giữa mét thứ nhất và mét thứ hai nằm giữa 1/2 và 1, diện tích giữa mét thứ hai và mét thứ ba là giữa 1/3 và 1/2, diện tích giữa mét thứ ba và mét thứ tư là giữa 1/4 và 1/3, v.v...


SQUARE AREA 1
nypecbol
Diện tích hình vuông 1
hyperbola
RECTANGLE AREA 1/2
diện tích hình chữ nhật 1/2


RECTANGLE A = 1/2
RECTANGLE A = 1/3


RECTANGLE A = 1/4
RECTANGLE A = 1/3

Do đó anh ta quyết định tính xấp xỉ giá trị của loga bằng cách tính tổng của các số 1, 1/2, 1/3, 1/4, v.v. Ví dụ giá trị gần đúng của log 6 sẽ là

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = 2{,}45$$

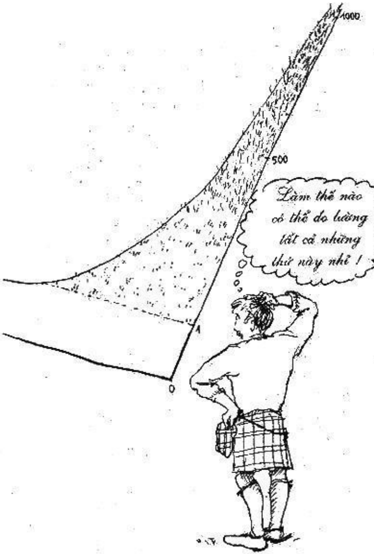
với sai số là

$$E \approx 2{,}45 - 1{,}791 = 0{,}659$$

Nói chung, log n có thể tính xấp xỉ bằng 1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/n, đúng bằng tổng các nghịch đảo của tất cả các số nguyên từ 1 đến n. Khi n ngày càng lớn người ta thấy rằng tổng này khác giá trị thực của log n một lượng C gần bằng

$$\boxed{C \approx 0{,}577}$$

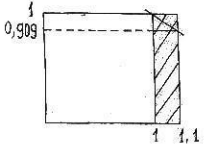
Số C này gọi là hằng số Euler để tỏ lòng trân trọng đối với một nhà toán học lớn. Công thức này thật là có giá trị vì khi n ngày càng lớn thì log n cũng ngày càng lớn và 1 + 1/2 = 1/3 + ... + 1/n - C sẽ là một ước lượng ngày càng gần với giá trị chính xác của log n.


1000
500
1
0
Làm thế nào có thể đo lường tất cả những thứ này nhỉ !

22

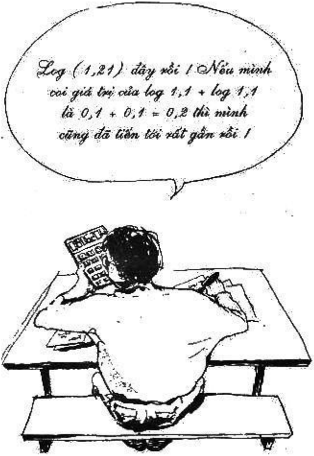
log (1 + x) ≈ x (x nhỏ)

Một điều khiến người làm vườn phải suy nghĩ là thật điên rồ khi tính các số lớn như log 50.000 trong khi không biết gì về giá trị các số nhỏ hơn như log (1,1) chẳng hạn. Sau khi thấy rằng buộc phải tính toán tiếp, trong óc anh bỗng lóe lên một tia sáng.



Giữa 1 và 1,1 thì "chiều cao" của vườn thay đổi từ 1 đến 0,909 lại đúng là giá trị của đường hypecbol $y = 1/x$ khi $x = 1,1$ (xem Vấn đề 19). Do đó diện tích ở dưới đường này gần như nằm giữa diện tích hình chữ nhật thẳng đứng có các cạnh là 0,1 và 0,909 và diện tích của hình chữ nhật gạch lớn hơn có các cạnh là 0,1 và 1. Hai diện tích này lần lượt là 0,0909 và 0,1 nên chỉ khác nhau có 0,01. Người làm vườn nhận ra rằng sẽ chỉ có một sai số nhỏ nếu lấy diện tích của hình chữ nhật lớn coi như giá trị diện tích dưới đường cong, như vậy giá trị gần đúng của log (1,1) là 0,1. Nói chung nếu x nhỏ hơn 0,1 thì anh ta có thể dùng x là giá trị cần tính của log (1 + x) vì diện tích ở dưới đường cong xấp xỉ bằng diện tích của hình chữ nhật có chiều rộng x và chiều cao 1.

Ở Vấn đề 21 chúng ta đã thấy rằng công thức log (ab) = log a + log b cho phép ta tính log 9, log 18 và các loga khác. Bằng cách dùng công thức để tính log (1 + x) mà chúng ta vừa khám phá ra thì bây giờ ta có thể tính được loga của bất kỳ số dương nào. Các máy tính khoa học thì vận dụng cách làm có phần chính xác hơn với cùng thủ tục trên.


Log (1,21) đây rồi ! Nếu mình coi giá trị của log 1,1 + log 1,1 là 0,1 + 0,1 = 0,2 thì mình cũng đã tiến tới rất gần rồi !

23
Số e

Hoa mắt về những khám phá của mình, người làm vườn vội nói với Lord Napier rằng anh ta đã tạo ra được một mảnh vườn đặc biệt và cần có một lượng hạt giống để khẳng định các giả thiết của mình. Vẫn cứ hay quan trọng hóa, Lord Napier đã trả lời, "Tôi chỉ cho chú đủ để trồng 1 mét vuông thôi, không hơn, không kém".

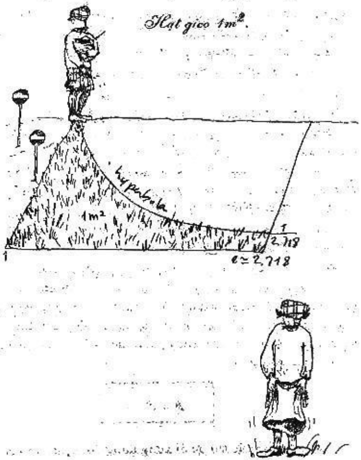
Người làm vườn lại trở về với công việc của mình có phần nào bực bội vì cái tính bủn xỉn của Lord Napier, nhưng rồi anh ta cũng nhận ra rằng mình có đủ số hạt giống để làm một điều thú vị gì đó. "Từ trước tới giờ", anh lẩm bẩm, "mình mới chọn x rồi tính diện tích $\log x$. Lần này thử làm ngược lại xem sao." Thế là anh ta quyết định tìm giá trị của x để có một diện tích $\log x$ bằng 1.

Anh ta thấy rằng rõ ràng đó là một con số giữa 2 và 3 vì diện tích giữa 1 và 2 thì nhỏ hơn 1 ($\log 2 \approx 0{,}693$ theo Vấn đề 20) trong khi diện tích giữa 1 và 3 thì lớn hơn 1 ($\log 3 \approx 1{,}098$). Sau khi loay hoay với những con số cuối cùng anh cũng thấy rằng giá trị cần tìm của x là xấp xỉ bằng 2,718, và anh đã đặt tên cho con số này là e :

$$\boxed{e \approx 2{,}718}$$

Một số người đoán già đoán non rằng chữ e được chọn là vì nó là chữ đầu tiên trong từ "England" là nước Anh. Để trả đũa, các nhà toán học đã chỉ cho thấy rằng đó là một con số vô tỷ (xem Vấn đề 14).

Người làm vườn bắt đầu gieo hạt, cái túi hạt giống lúc đầu đầy ắp



Túi hạt kkhông còn tí gì

24

Nâng số e lên một lũy thừa thực

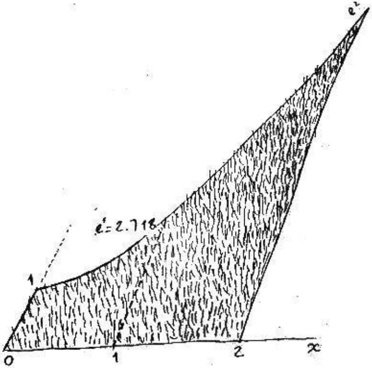
Sau khi đã tìm được số e để log e = 1, người làm vườn lúc nào cũng vẫn háo hức đi xa nữa, đã quyết định đi tìm con số a để log a = 2. Anh ta tiến hành tính toán và thấy rằng $a \approx (2,718)^2$. Thế rồi anh ta nhận ra rằng lời giải đó quả là hiển nhiên vì nếu log a = 2 = log e + log e thì theo công thức ở Vấn đề 20, đúng là phải có $a = e \times e = e^2$.

Nếu người làm vườn lại chọn một số x thay vì số 2 thì anh ta cần tìm một số a để log a = x. Anh ta cảm thấy hợp lý khi viết con số này là e^x vì anh đã thấy rằng khi $x = 2$ thì $a = e^2$. Bằng cách này, người làm vườn đã phát minh ra việc "nâng số e lên một lũy thừa thực". Các lũy thừa đó thậm chí có thể là vô tỷ. Trước đây ta chỉ thấy các số được nâng lên các lũy thừa 2, 3 hoặc các lũy thừa nguyên khác như đã nói ở Vấn đề 1, nhưng bây giờ thì ta có thể viết các số như $e^{\sqrt{2}}$.

Rồi người làm vườn lại quyết định trồng một mảnh vườn mới có dùng tới con số e^x mà anh ta vừa khám phá ra. Lần này thì Lord Napier không còn cấm trồng ở mét đầu tiên nữa nên người làm vườn đã gieo hạt toàn bộ diện tích. Anh ta thực sự ngạc nhiên khi thấy diện tích có các bờ là chiều dài x và chiều cao e^x là

$$\boxed{A = e^x - 1}$$

Lord Nagpier tức thì ưu ái xứng đáng để người làm vườn được về nghỉ ngơi.



Diện tích ₩ $= e^2 - 1$!!

25

Đạo hàm và Tích phân : Diện tích nhìn theo hai quan điểm khác nhau

Khoảng 60 năm sau những sự kiện này, Isaac Newton ngồi dưới gốc cây táo đọc một cuốn tường thuật lại những việc làm táo bạo của người làm vườn của Napier khi anh ta đưa ra những ý kiến độc đáo.

Thực ra người làm vườn đã làm điều gì nhỉ ? Anh ta đã chọn hình thù của mảnh vườn, hoặc có hình tam giác, hình chữ nhật, hình parabol, hoặc có hình hypecbol, rồi tính diện tích giữa 1 và x. Vậy thì có thể làm ngược lại được chăng ?

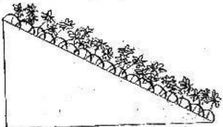
Đó là điều Newton đặt ra để thực hiện. "Hãy tưởng tượng", ông nói, "là diện tích giữa các điểm O và x là $x^2/2$. Trong trường hợp này mảnh vườn phải có bờ chắn là đường thẳng $y = x$". Rồi ông quyết định gọi x là "đạo hàm" của $x^2/2$.

Ông chỉ cần đọc cuốn tường thuật việc làm của người làm vườn cũng khám phá ra được rằng đạo hàm của x là 1 (vườn chữ nhật), của $x^3/3$ là x^2 (vườn parabol) và của log x là $1/x$. Cuối cùng, bằng cách vận dụng công thức cuối cùng trong số các công thức, ông đã tìm thấy là đạo hàm của $e^x - 1$ là e^x.

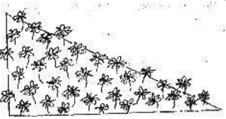
Chẳng bao lâu sau ông nhận ra rằng để tăng đôi hoặc tăng ba diện tích của một mảnh vườn thì chỉ cần tăng đôi hoặc tăng ba "chiều cao" của nó. Kết quả là nếu ông muốn có đạo hàm của x^3 thì ông chỉ cần đơn giản là tính 3 lần đạo hàm của $x^3/3$, hoặc $3x^2$. Tương tự, đạo hàm của x^2 bằng $2x$. Từ đó ông đã có thể mau chóng thấy được là đạo hàm của x^4 là $4x^3$, của x^5 là $5x^4$, vân vân.

Trong các hình vẽ kèm theo đây, đường thẳng phía trên là một hàm của x. Nói chung, hàm này xác định chiều cao của một diện phụ thuộc vào x. Chúng ta gọi diện tích của diện đó là *tích phân* của hàm ấy và bản thân hàm đó là *đạo hàm* của tích phân đó.

Thực ra từ *đạo hàm* không phải do Newton đặt ra mà ông thích dùng từ *sự chảy* hơn, còn từ đạo hàm là bắt nguồn từ nhà toán học Pháp Lagrange sẽ xuất hiện ở Vấn đề 40 liên quan tới một câu chuyện hoàn toàn khác. Ngoài ra chính nhà toán học lớn người Đức và là một triết gia, Leibniz đã gọi $x^2/2$ là "tích phân" của x (và viết rất điệu là $\int x dx$) dã cho diện tích của diện bị chặn bởi đường thẳng $y = x$. Bằng cách đo diện tích, anh bạn làm vườn của chúng ta đã tính các tích phân mà thực ra không biết tới nó.



Đạo hàm



Tích phân

26

Nâng số e lên một lũy thừa ảo : $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$

Số e bắt gặp ở Vấn đề 23 có những tính chất đáng chú ý rất giống như các số đặc biệt khác như i (Vấn đề 18) và π (Vấn đề 15). Còn thấy có những điều khác thường hơn khi kết hợp tác động của các con số này.

Từ người làm vườn của Lord Napier chúng ta đã biết được cách làm thế nào để nâng số e lên một lũy thừa thực. Bây giờ trong buổi chiến thắng trở lại vũ đài khoa học, các bạn của chúng ta là nhà bác học Cosine và Giáo sư Sine sẽ giảng giải cho chúng ta về các "lũy thừa ảo" bằng cách xác định là

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

với một góc α cho trước.

"Có lẽ các bạn cảm thấy", họ nói ngay, "rằng điều này chẳng giống tí gì định nghĩa về lũy thừa". Nhưng lưu ý là

$$\begin{aligned} e^{-i\alpha} &= \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha) \\ &= \cos\alpha - i\sin\alpha \end{aligned}$$

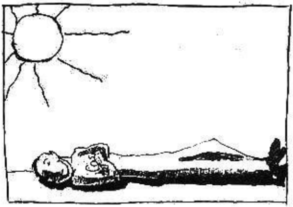
thì

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} \times e^{-i\alpha} &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha - i\sin\alpha) \\ &= \cos^2\alpha - i^2\sin^2\alpha \\ &= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \end{aligned}$$

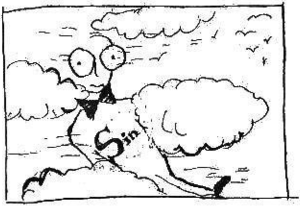
(Chúng tôi không phát biểu các qui tắc chi tiết khi tính toán các số ảo vì một lý do rất đơn giản là chúng giống hệt các qui tắc đối với số thực ngoại trừ một điều quan trọng là đừng quên rằng $i^2 = -1$). Kết quả là

$$e^{-i\alpha} = \frac{1}{e^{i\alpha}}$$

"Như quí vị có thể thấy được", họ kết luận, "mặc dù lũy thừa này hoàn toàn là ảo song nó cũng ứng xử chẳng khác gì các lũy thừa thực mà quí vị đã gặp ở cuối Vấn đề 1".



Phần thực



Phần ảo.

27

$e^{i\pi} = -1$

"Như chúng tôi đã nói", nhà bác học Cosine và Giáo sư Sine nói tiếp, "khi e, i và π kết hợp với nhau thì xuất hiện những điều đáng ngạc nhiên". Chẳng hạn như hãy nhớ lại là ở Vấn đề 11 ta đã thấy rằng

$$\cos\pi = -1 \quad , \qquad \sin\pi = 0$$

Với những điều kiện đó thì

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

Giáo sư Sine thông báo cho chúng tôi biết rằng đẳng thức này đã được nhà toán học Thụy Sĩ Leonhard Euler khám phá ra ở thế kỷ 18. Giáo sư Sine lấy ra một ấn phẩm cổ và giải thích cho chúng tôi là nó miêu tả sinh động một buổi tọa đàm nổi tiếng giữa Catherine Đại đế nước Nga, Euler và triết gia Denis Diderot trong đó Nữ hoàng đặt vấn đề là Chúa có tồn tại hay không. Bằng những lập luận dài dòng và rất rắc rối, Diderot đã cố tìm cách chứng minh rằng Chúa không tồn tại. Ngược lại, Euler đã giản dị nói rằng "Vì $e^{i\pi} = -1$, nên Chúa phải tồn tại"*.

"Để tỏ lòng trân trọng thiên tài vĩ đại của Euler", Giáo sư Sine nói tiếp, "công thức của ông xuất hiện trong Viện bảo tàng Phát minh ở Paris tại một căn phòng ở đó số π được viết ra với một số khổng lồ các số thập phân. Nếu các vị thích thì một ngày nào đó tôi sẽ dẫn các vị tới đó".

---

* Câu chuyện thực còn vui nhộn hơn. Euler đã giễu Diderot bằng cách bịa ra một công thức vô nghĩa:

"Thưa Ngài, $\frac{a + b^n}{n} = x$ nên Chúa phải tồn tại! Xin Ngài giải đáp cho!"

Diderot tội nghiệp sợ quá chẳng dám trả lời.

(E. T. Bell, *Men of Mathematics*, Simon and Schuster, 1937).


Vì $e^{i\pi} = -1$, nên Chúa phải tồn tại !!

28

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

Lại một lần nữa chúng tôi đã để cho cặp hai người đầy năng động Cosine và Sine hướng dẫn vào thế giới toán học. Hôm nay họ giới thiệu với chúng tôi hai trong số các môn sinh của họ có tên là Cos II và Sin II đều là những bạn trẻ biết uốn dẻo có thể thay đổi cả chiều cao lẫn bề ngang của mình.

"Chắc các vị còn nhớ", nhà bác học Cosine nói với chúng tôi, "là các vị đã gặp số $e^{i\alpha}$ ở Vấn đề 26. Bây giờ ta xem $e^{2i\alpha}$ là cái gì đây". Trước hết

$$
\begin{aligned}
e^{2i\alpha} &= e^{i\alpha} \times e^{i\alpha} \\
&= (\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 \\
&= \cos^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha + i^2\sin^2\alpha
\end{aligned}
$$

(cách làm của anh bạn chúng ta ở Vấn đề 6)

$$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha$$

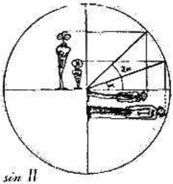
Nhưng chúng ta cũng biết rằng

$$
\begin{aligned}
e^{2i\alpha} &= e^{i(2\alpha)} \\
&= \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha
\end{aligned}
$$

Khi các phần thực và phần ảo được đối chứng với nhau thì hai công thức thật đẹp đã nổi lên và các môn sinh Cos II và Sin II đã viết lại là

$$\boxed{\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha\end{aligned}}$$

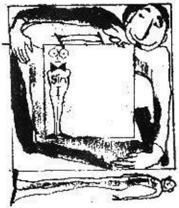
"Nói thật là", nhà bác học Cosine về sau đã tâm sự với chúng tôi, "có thể rút ra được hai công thức này mà chẳng cần phải dùng đến các số ảo nhưng cách chứng minh thì có hơi phức tạp. Điều này cho thấy để giới thiệu những thứ trừu tượng thì nó có thể hữu dụng và lý thú biết bao".



Diện tích = sin II

$\alpha = 30^\circ$
$\cos I = 0.866$
$\sin I = 0.5$
$2\alpha = 60^\circ$
$\cos II = 0.5$
$\sin II = 0.866$

Diện tích = cos II



Chuỗi số

29

$1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Mặc dầu có những điều mà một số người muốn chúng ta phải tin song việc các giáo sư hành hạ sinh viên của mình không phải là một hiện tượng mới mẻ gì. Chẳng hạn năm 1787, một giáo viên nhìn đâu cũng thấy cảnh lộn xộn trong lớp học đã quyết định phạt học sinh bằng cách bắt họ tính tổng

$$1 + 2 + \ldots + 100$$

của 100 số nguyên đầu tiên. Hy vọng sẽ được yên cho đến cuối giờ, người giáo viên đó thanh thản ngồi xuống. Thật bất hạnh cho ông, một trong số học sinh của ông, Carl Friedrich Gauss, trong vòng có năm phút đã nói rằng làm xong bài tập mà thậm chí không phải làm một phép tính nào cả.

"Rất là đơn giản", cậu bé giải thích, "Nếu em viết cũng tổng đó bên dưới tổng trên nhưng theo trình tự ngược lại,

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & 100 \\ 100 & + & 99 & + & 98 & + & \ldots & + & 1 \end{array}$$

rồi cộng lại thì em sẽ được hai lần con số mà thầy bắt chúng em phải tính. Nhưng $1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \ldots = 101$. Cộng "dọc xuống" em được 100 lần con số 101". Kết quả là tổng đó đúng bằng

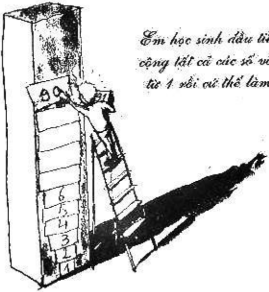
$$\frac{1}{2} \times 100 \times 101 = 5050$$

Người thầy giáo hơi bị ngỡ ngàng, song Gauss lại tiếp tục nói rằng cách làm này có thể dùng được để tính tổng của n số nguyên đầu tiên :

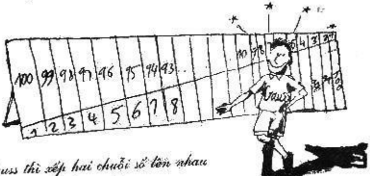
$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}\,[(1 + n) + (2 + n - 1) + \ldots + (n + 1)]$$

Vì mỗi một trong n số hạng ở biểu thức trên đều bằng n + 1, nên

$$\boxed{1 + 2 + ... + n = \frac{1}{2}n(n + 1)}$$



Em học sinh đầu tiên chỉ đơn giản cộng tất cả các số với nhau bắt đầu từ 1 rồi cứ thế làm cho đến 100.



Gauss thì xếp hai chuỗi số lên nhau rồi mới cộng chúng lại.

30

Dãy Fibonacci : $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Vào khoảng năm 1200 một người Ý tên là Leonardo Fibonacci đã xét tới bài toán sau đây. Giả sử có một cặp thỏ mắn đẻ cứ cuối mỗi tháng lại sinh ra một cặp mới. Nếu mỗi cặp mới đó cũng lại đẻ sau một tháng và nếu không con nào bị chết cả thì sau một năm có bao nhiêu cặp thỏ ?

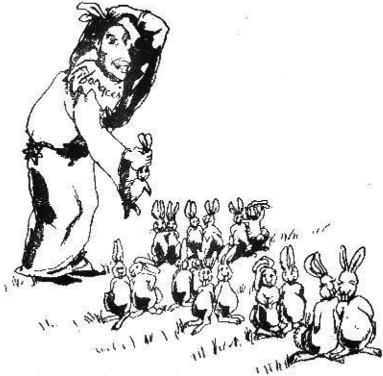
Để tính được con số này, Fibonacci đã quyết định gọi F_n là số cặp có ở đầu tháng thứ n. Như vậy $F_1 = 1$ và $F_2 = 2$ vì ở đầu tháng thứ nhất chỉ có đúng một cặp lúc đầu nhưng đến đầu tháng thứ hai thì cặp đầu tiện đó đã đẻ ra cặp thứ hai.

Rồi ông lại nhận xét rằng ở đầu tháng thứ n thì các cặp có thể chia thành hai nhóm : số F_{n-1} các cặp "cũ" đã có sau n-1 tháng, và số các cặp "mới" vừa được sinh ra. Vì một cặp mới sẽ đẻ sau một tháng và đẻ ra cháu đầu tiên sau một tháng nữa nên số các cặp mới bằng tổng số các cặp hai tháng trước là F_{n-2}. Kết quả là

$$\boxed{F_n = F_{n-1} + F_{n-2}}$$

Bằng cách dùng công thức này và các giá trị ban đầu $F_1 = 1$ và $F_2 = 2$, có thể chỉ được ra rằng sẽ có $F_{12} = 233$ cặp sau một năm. Chuỗi các số F_n gọi là *dãy Fibonacci*. Theo qui định chung, các giá trị ban đầu thường lấy là 1 và 1 thay vì 1 và (để thay bằng các số hạng sau đây trong dãy) :

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, vân vân.



31

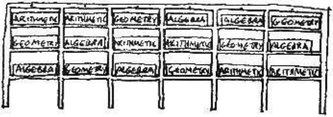
Số cách sắp xếp n vật là $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$

Nếu ta muốn đặt một cuốn đại số và một cuốn hình học vào hai ô kéo khác nhau thì có hai cách để làm việc đó : Cuốn đại số xếp vào một ngăn còn ngăn kia dành cho cuốn hình học. Nếu ta lại có thêm một ngăn thứ ba và một cuốn số học thì bấy giờ lại có nhiều cách xếp hơn. Cuốn số học có thể đặt ở các ngăn thứ nhất, thứ hai hoặc thứ ba còn hai cuốn kia thì xếp vào hai ngăn còn lại. Ta đã thấy rằng điều này có thể thực hiện được theo hai cách khác nhau. Kết quả là có $6 = 3 \times 2$ cách sắp xếp ba cuốn sách như thấy trong hình vẽ.

Nếu ta thêm một ô kéo thứ tư và một cuốn lượng giác thì bây giờ sẽ có bốn chỗ để xếp cuốn sách mới đó. Với mỗi một trong bốn khả năng đó lại sẽ có 6 cách để sắp xếp ba cuốn còn lại như ta vừa thấy. Do đó có

$$24 = 4 \times 6 = 4 \times 3 \times 2$$

cách để sắp xếp bốn cuốn sách.

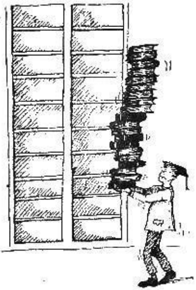


Tất nhiên 3 x 2 có thể viết được là 3 x 2 x 1, và 4 x 3 x 2 thì tương đương với 4 x 3 x 2 x 1. Số 3 x 2 x 1 gọi là "3 giai thừa" và viết là 3! Tương tự 4 x 3 x 2 x 1 là "4 giai thừa" và viết là 4!

Nếu bây giờ ta muốn biết có bao nhiêu cách có thể sắp xếp cho 20 tập của một bộ bách khoa toàn thư thì ta phải tính số 20! ("20 giai thừa").

$$\begin{aligned} 20! &= 20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \\ &\quad \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 2.432.902.008.176.640.000 \end{aligned}$$

Như vậy có khoảng $2\frac{1}{2}$ 10 lũy thừa 18 cách khác nhau để sắp xếp bộ bách khoa toàn thư này vào 20 ô kéo.



"Nếu mỗi kiểu sắp xếp mình làm mất một giây thì phải mất 77 ngàn tỷ năm mới làm xong hết được !"

32

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=1$$

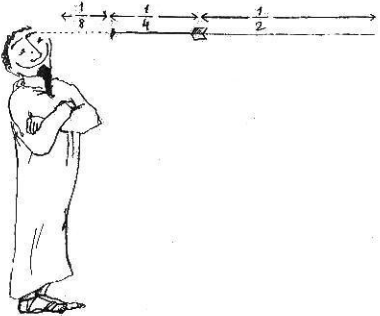
Zeno vùng Elea là một triết gia Hy Lạp rất thích các nghịch lý. Một hôm ông tuyên bố rằng không thể có chuyển động được. Ông lập luận rằng để một mũi tên bắn được tới đích thì trước hết nó phải bay qua được nửa khoảng cách, rồi nửa của khoảng cách còn lại, rồi lại nửa của khoảng cách còn lại tiếp theo, vân vân, cho nên có thể thấy rằng mũi tên thực tế sẽ chẳng bao giờ tới đích được cả.

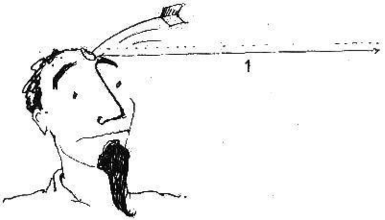
Thực ra thì ta biết rằng mũi tên sẽ bắn được tới đích của nó. Sở dĩ như vậy vì thời gian cần có để đi hết các khoảng cách liên tiếp nhỏ dần ngày càng ít đi. Song nghịch lý của Zeno lại cho thấy một mét có thể phân thành 1/2 mét (nửa đầu tiên), cộng 1/4 mét (nửa đầu tiên của phần còn lại), cộng thêm 1/8, cộng thêm 1/6, vân vân. Giống như trường hợp tỷ số vàng ở Vấn đề 17, thật là bất tiện khi phải tính giá trị của chuỗi này đến vô hạn. Song ngay cả khi ta chỉ cần xét 1/2 (= 0,5), 1/2 + 1/4 (= 0,75), và 1/2 + 1/4 + 1/8 (= 0,875) ta cũng có thể thấy được rằng giá trị này ngày càng gần tới 1 mỗi khi ta "cộng thêm một số hạng". Kết quả là ta có thể biểu thị sự hội tụ này bằng cách viết

$$\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=1}$$

Dấu ba chấm chỉ cho biết rằng càng thêm nhiều số hạng hơn vào tổng ở bên trái thì giá trị của nó lại càng gần 1 hơn.

Để giải trí, bạn đọc có thể rút ra được công thức này bằng cách đặt x = 1/2 trong phương trình được nói tới ở Vấn đề 33.


1/8
1/4
1/2


1

33

$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \dfrac{1}{1 - x}$ (với $|x| < 1$)

Nhờ sự giúp đỡ của Zeno vùng Elea mà ta thấy rằng có thể dùng cách lập luận thông minh mà suy ra được tổng của một chuỗi vô hạn các số mà thực tế không cần một tính toán cụ thể nào. Bây giờ ta sẽ thử xét tới một công thức tổng quát hơn cũng thuộc loại đó.

Lại nhờ có anh bạn treo biển quảng cáo mà ta đã biết được rằng

$$(1 - x)(1 + x) = 1 - x^2$$

Nếu ta cộng số x^2 vào số hạng $1 + x$ ở vế bên trái của phương trình này thì nó sẽ nhân với 1 để có x^2 và với $-x$ để có $-x^3$, nên

$$(1 - x)(1 + x + x^2) = 1 - x^2 + x^2 - x^3 = 1 - x^3.$$

Tiếp tục cộng thêm các số hạng liên tiếp x^3, x^4, vân vân vào số hạng $1 + x + x^2$ thì biểu thức ở bên phải sẽ trở thành $1 - x^4$, rồi $1 - x^5$, v.v...

Nếu x là một con số nhỏ hơn 1 thì các số x^2, x^3, x^4, vân vân ở biểu bên phải sẽ ngày càng nhỏ hơn và sẽ mau chóng tiến tới 0. Chẳng hạn, nếu $x = 0{,}2$ thì $x^2 = 0{,}04$, $x^3 = 0{,}008$, $x^4 = 0{,}0016$, $x^5 = 0{,}00032$, vân vân. Nếu ta tiếp tục quá trình cộng thêm các số hạng liên tiếp cho đến vô hạn thì ta sẽ có

$$(1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) = 1$$

từ đó có thể rút ra phương trình ở đầu đề mục này.*

Ta hãy trở lại ví dụ $x = 0{,}2$. Giá trị của số hạng bên phải là

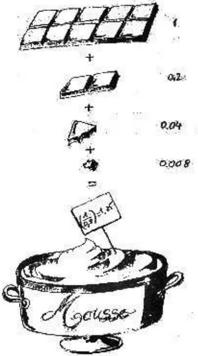
$$\frac{1}{1 - x} = \frac{1}{0{,}8} = 1{,}25$$

* Phương trình này đều có giá trị cho cả hai giá trị dương và âm của x miễn là giá trị tuyệt đối $|x|$ nhỏ hơn 1.

trong khi đó giá trị của sáu số hạng đầu ở bên trái là

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = 1,24992$$

Nếu các số hạng tiếp sau được cộng thêm vào như x^6, x^7, v.v... thì giá trị của tổng càng gần giá trị "thực" 1,25.



Kem mút

34

Một vài tổng khác

Ở các trang trên ta đã thấy rằng nhờ có sự giúp đỡ của Gauss, Zeno vùng Elea, và anh bạn treo biển quảng cáo của chúng ta mà tương đối dễ dàng tính được các tổng đặc biệt như của n số nguyên đầu tiên, $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots$ và $1 + x + x^2 + \ldots$ Cùng với thời gian, nhiều nhà toán học đã tìm mọi cách vận dụng các tổng "vô hạn" khác tương tự như các tổng ở các Vấn đề 21, 32, và 33 để tính một số các số đặc biệt trong đó có các số π, e, và log 2 mà ta đã gặp trong quá trình khám phá toán học của chúng ta. Một số các công thức nổi tiếng nhất trong số này được ghi lại dưới đây. Để giải trí, bạn đọc có thể trắc nghiệm các phương trình này bằng cách tính giá trị các biểu thức bên phải với số các số hạng tăng dần và sẽ thấy rằng các tổng này ngày càng gần với các số đặc biệt ở bên trái. Tất nhiên ngày nay, khi dùng máy tính thì muốn có các số đặc biệt đó sẽ dễ dàng hơn nhiều.

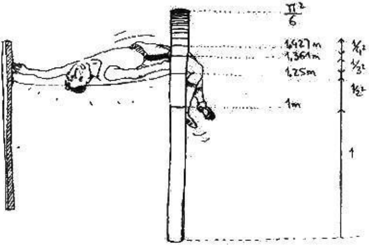
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

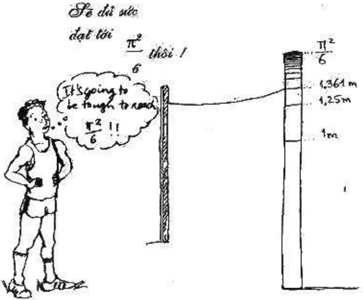
$$\frac{\pi}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \ldots$$

Ở tổng cuối cùng, các mẫu số 1, 2, 6, 24, 120, ... đơn giản chỉ là các số n! đã gặp ở Vấn đề 31.



$\frac{\pi^2}{6}$
1,427 m
1,361 m
1,25m
1m
$1/4^2$
$1/3^2$
$1/2^2$
1



Sẽ đủ sức
đạt tới $\frac{\pi^2}{6}$ thôi !
It's going to be tough to reach $\frac{\pi^2}{6}$!!
$\frac{\pi^2}{6}$
1,361 m
1,25m
1m
1

Các Vật thể trong Không gian

35

Định lý Euler
f - e + v = 2

Đa diện là một cố thể giới hạn bởi các mặt phẳng, các cạnh thẳng và các đỉnh. Ví dụ khối lập phương và tứ diện là các đa diện. Tất cả các đa diện đã được chấp nhận đều thỏa mãn định lý Euler :

$$f - e + v = 2$$

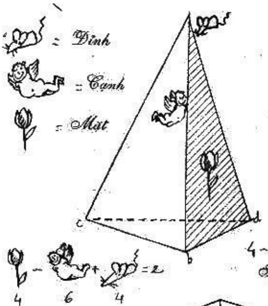
trong đó f là số mặt, e là số cạnh và v là số đỉnh. Với một khối lập phương thì

$$6 - 12 + 8 = 2$$

và với một tứ diện thì

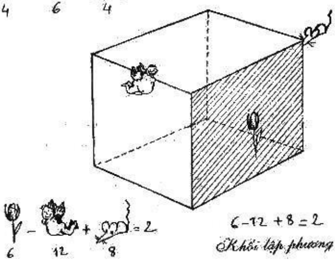
$$4 - 6 + 4 = 2$$

Không chứng minh kết quả này một cách tổng quát song ta có thể thấy rằng nó đúng là như vậy bởi một khối lập phương có thể "biến đổi" thành một tứ diện bằng cách thêm vào hoặc lấy đi các cạnh và các đỉnh. Mỗi lần thay đổi như vậy thì số f - e + v đều không thay đổi. Những phép biến đổi tương tự có thể biến đổi tất cả các đa diện đã được chấp nhận như các lăng trụ và các khối tám mặt.



4 − 6 + 4 = 2

Tứ diện



6 − 12 + 8 = 2

Khối lập phương

36

Diện tích một mặt cầu bằng $4\pi R^2$

Một bé gái thích nghịch ngợm vừa được cho một quả cầu bằng giấy thấy rằng điều tốt nhất để chơi với quả cầu đó là cắt nó thành hàng ngàn các mảnh nhỏ. Vì cô bé còn có một cái hộp hình trụ để dựng nó nên cô đã quyết định phanh cái hộp ra và dán các mảnh nhỏ đó vào bên trong. Lúc đầu cái hộp đó trông đủ lớn để dán toàn bộ quả cầu nên cô cho rằng sẽ có nhiều chỗ để dán.

Cô thật ngạc nhiên khi khám phá ra rằng cô cần phải dùng toàn bộ diện tích đó để dán tất cả các mảnh của hình cầu. Tính thích tìm hiểu của cô bé đã khiến cô nhận ra ngay một vấn đề về hình học rằng diện tích của cái hộp hình trụ phải bằng diện tích của mặt cầu bao kín. Vì chiều cao của hình trụ bằng hai lần bán kính R của mặt cầu và vì chu vi đáy của nó bằng $2\pi R$ nên diện tích đó là

$$A = 2R \times 2\pi R$$

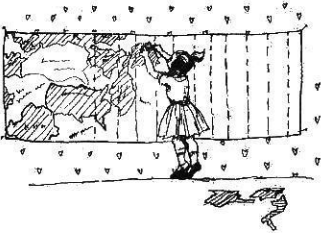
$$\boxed{A = 4\pi R^2}$$

Suy nghĩ về khám phá của mình cô bé kết luận rằng vì bán kính của trái đất khoảng 6400 kilomet nên diện tích của nó phải xấp xỉ bằng

$$A \approx 4 \times 3{,}14159 \times (6400)^2\ km^2$$
$$\approx 515 \text{ triệu kilomet vuông}$$

Bằng cách so sánh thì thấy nước Mỹ chiếm khoảng 9,4 triệu kilomet vuông bằng chưa đầy 2% diện tích địa cầu.


Quả cầu
bằng giấy



37

Thể tích hình cầu bằng $\frac{4}{3}\pi R^3$

Ở Vấn đề 10 chúng ta đã thấy Archimedes làm thế nào để có thể tính được diện tích một hình tròn khi đã biết chu vi bằng cách cắt nó một cách thông minh thành các lát mỏng. Những đồ tạo tác mà các nhà khảo cổ đã khai quật được cho tới nay đã khiến chúng ta tin rằng những người Ai Cập cổ đại cũng đã thực hiện một điều tương tự khi tính thể tích của một hình cầu khi đã biết diện tích mặt ngoài.* Các đồ tạo tác này hầu như đã chắc chắn là được làm ra vào thời xây dựng các Kim tự tháp hùng vĩ. Như thấy ở hình vẽ, các đồ tạo tác này là các hình chóp đồng đều nhỏ bằng đá có đáy là hình vuông và các đỉnh nhọn mà khi ghép lại với nhau thì tạo thành một hình cầu về đại thể mà các đỉnh thì định vị tất cả tại tâm điểm. Thể tích v của mỗi hình chóp thì bằng diện tích a đáy của nó nhân với chiều cao R của nó (bằng bán kính của hình cầu) chia cho 3 :

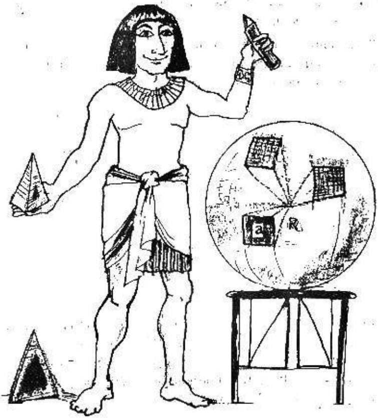
$$v = \frac{1}{3}(R \times a)$$

(Không giống như hình thang ở Vấn đề 8, hình chóp không thể dễ dàng cắt nhỏ thành các mảnh hình học đơn giản có thể tích dễ dàng tính được cho nên chúng tôi chỉ đề nghị bạn đọc là chấp nhận công thức cổ điển trên.)

* Cũng như trong trường hợp hình tròn (Vấn đề 10), thuật ngữ mà các nhà toán học sử dụng đã phân biệt giữa mặt cầu (sphere) chỉ là một diện, và một hình cầu (a ball) là cố thể bao bởi diện đó. Tuy nhiên trong tiếng Anh hàng ngày vẫn quen dùng từ *sphere* để chỉ cả cố thể trên. (Trong tiếng Việt từ sphere được dịch ra cả hai từ, mặt cầu và hình cầu.)

Nếu bây giờ chúng ta bắt chước Archimedes và cộng tất cả các thể tích nhỏ này lại với nhau thì ta được thể tích V của cả hình cầu, tức là phải bằng R/3 nhân với tổng của tất cả các diện tích a, vừa vặn bằng diện tích A của mặt cầu. Do đó

$$\boxed{V = \frac{R}{3} \times A = \frac{R}{3} \times 4\pi R^2\ V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

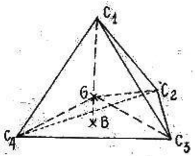


38

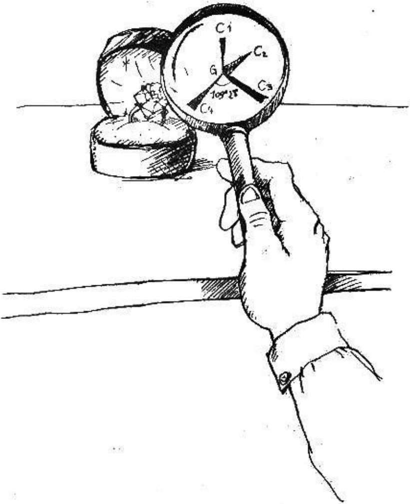
Góc ở tâm của một tứ giác đều bằng 109°28′

Một số vì sao trong bầu trời toán học như số π đã nổi tiếng từ thời cổ đại trong khi các vì sao khác trong đó có các số i và e gặp trong cuốn sách này chỉ là những khám phá tương đối gần đây. Thật là thú vị khi thấy một con số nổi tiếng khác nhưng ít được nhiều người biết tới hơn là π, i và e lại ẩn náu trong lòng các viên kim cương.

Kim cương có được là do có một sắp xếp đều các nguyên tử cacbon nằm ở các góc một tứ giác đều (C_1, C_2, C_3, C_4) và tại trọng tâm G của nó.



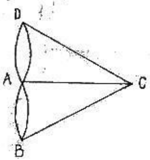
Có thể chứng minh được rằng các góc C_1GC_3, C_1GC_2, vân vân đều bằng nhau và cos của chúng là -1/3. Sở dĩ như vậy là vì nếu B là điểm mà đường thẳng C_1G gặp mặt phẳng $C_2C_3C_4$ thì khoảng cách GB bằng một phần ba C_1G. Nếu cos là -1/3 thì góc đó phải xấp xỉ bằng 109°28′.


C1
C2
G
C3
109°28'
C4

39

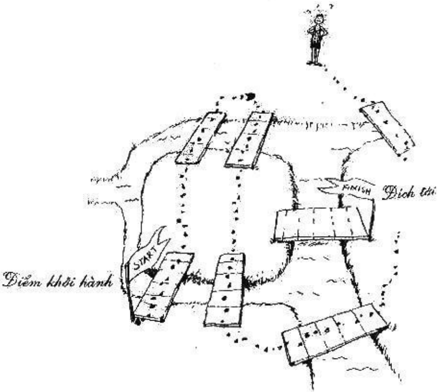
Các cây cầu Konigsberg

Ở thế kỷ 18, những thị dân ăn không ngồi rồi của đô thị Phổ Konigsberg đã giết thời gian bằng cách thả bộ qua bảy cây cầu bắc ngang Sông Pregel và có lẽ vừa đi vừa thả những viên sỏi xuống đường như Tom Thumb trong câu truyện xưa và như trong hình vẽ kèm theo đây. Họ đã thử đi thử lại mà chẳng bao giờ làm được việc đi qua tất cả các cây cầu đó mà không phải đi qua một cây cầu nào trong số đó hơn một lần. Cuối cùng thì nhà toán học lớn Euler đã cho biết là không thể làm được điều đó. Để làm việc này ông đã đơn giản hóa bài toán bằng cách biểu thị nó bằng đồ thị như dưới đây trong đó B, C và D mỗi chữ biểu thị một bờ của con sông, A biểu thị ốc đảo và mỗi đường thì tương ứng một trong 7 cây cầu.



Rồi Euler có nhận xét rằng bài toán đi qua cầu tương đương với bài toán tìm một mạch chạy theo tất cả các đường mà không bao giờ được đi qua cùng một đường trong hai lần. Nếu có thể thực hiện được thì một khi đến được một điểm trên mạch tại đó phải có hai đường đi qua, một ứng với đường đến và một ứng với đường từ đó đi. Điều này có nghĩa một con số chẩn các đường phải tỏa ra từ mỗi điểm trừ hai điểm tại đó mạch bắt đầu và kết thúc. Song không thể thỏa mãn được điều kiện này vì mỗi điểm A, B, C và D nối với các điểm khác bởi một số lẻ các đường.

Về sau này, Konigsberg đã trở thành một thành phố ở Liên Xô gọi là Kaliningrad. Ngày nay bài toán các cây cầu đã bị loại bỏ qua việc đã xây một cây cầu thứ tám. Bạn đọc có thể tin tưởng được rằng cây cầu mới đó, bất kể được đặt ở đâu, sẽ làm cho người ta có thể đi qua tất cả các cây cầu mà chẳng bao giờ cần phải đi ngược trở lại lần nào.

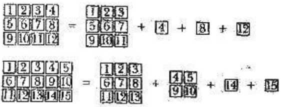


Số nguyên, Số nguyên tố

40

Định lý Lagrange : Mỗi số nguyên đều là tổng của bốn bình phương

"Sự cố thảm hình vuông" là trung tâm cuộc tranh luận gần đây được đăng tải rộng rãi trên báo chí. Cuộc cãi vã bắt đầu từ khi tập đoàn các nhà sản xuất thảm Martian quyết định chỉ bán các tấm thảm hình vuông mỗi cạnh đo được một số nguyên mét. Đối với một khách hàng cần 16m^2 chẳng hạn thì ổn thôi vì chỉ một miếng 4 mét nhân 4 mét là xong, nhưng ai mà cần tới 20m^{2}thì không gặp hên rồi. Coi như kết quả của một phát triển mới về câu chuyện này, cuộc tranh luận bây giờ được đặt ra để giúp cho các nhà sản xuất thảm. Họ đã tìm ra một công trình của Lagrange, một nhà toán học sống ở thế kỷ 18 và đã có khám phá sau đây : Bất kỳ một mặt hình chữ nhật nào có diện tích là một số nguyên cũng đều có thể tách thành 1, 2, 3 hoặc 4 mặt có diện tích là bình phương của các số nguyên. Ví dụ

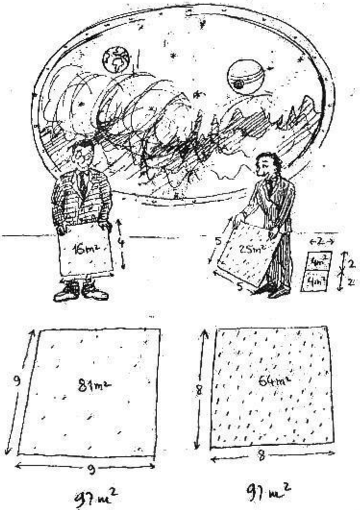


Một cách tổng quát, Lagrange đã chứng minh rằng bất kỳ một số nguyên nào cũng có thể tách thành các tổng của không quá bốn bình phương. Một ví dụ khác là

$$97 = 64 + 25 + 4 + 4 = 8^2 + 5^2 + 2^2 + 2^2$$
$$= 81 + 16 = 9^2 + 4^2$$

như thấy trong hình vẽ kèm theo. Trong trường hợp này có hai cách tách 97 thành các bình phương trong đó có một cách ngắn gọn hơn.

Để giải trí, bạn đọc có thể chọn các số khác và chứng tỏ cho thấy rằng chúng lúc nào cũng có thể tách được bằng ít nhất một cách để có các tổng chứa không nhiều hơn 4 bình phương.



41

Định lý cuối cùng của Fermat

Chúng ta đã thấy ở Vấn đề 40 là sự cố thảm hình vuông đã kích thích sự quan tâm của người ta như thế nào khi tìm các cách tách các con số thành các tổng những bình phương. Người ta mau chóng nhận ra rằng một số bình phương có thể tách tiếp thành tổng của hai bình phương. Ví dụ

$$25 = 16 + 9$$

và

$$169 = 144 + 25$$

Những quan sát tương tự cũng đã được thực hiện ở thế kỷ 17 và đã khiến một nhà toán học thời đại đó, Pierre de Fermat, đặt cùng câu hỏi cho một nội dung 3 thứ nguyên : Liệu một khối lập phương có các cạnh là một số nguyên có thể tách được thành hai khối lập phương khác cũng có các cạnh là các số nguyên được không ? Nói cách khác là có các số nguyên x, y, và z nào (biểu thị các cạnh của ba khối lập phương) sao cho

$$x^3 = y^3 + z^3 \text{ được không ?}$$

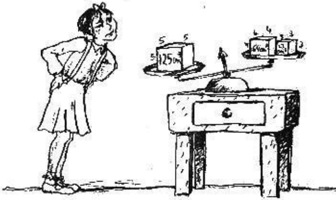
Không giống như các hình vuông, không có các khối lập phương nào như vậy cả. Ví dụ $8 = 2^3$ hoặc $27 = 3^3$ không bao giờ có thể viết được thành tổng các tam thừa của hai số nguyên, vì vậy mà cô bé trong hình vẽ sẽ chẳng bao giờ làm cho cái cân của mình được thăng bằng cả.

Trong một thành tựu phi thường, Fermat tuyên bố rằng đã khám phá ra một phép chứng minh thật đẹp đối với một kết quả còn tổng quát hơn : Tính không thể tách các tam thừa thành tổng các tam thừa đã được mở rộng cho tất cả các lũy thừa nguyên lớn hơn 3, tức là nếu x, y và z là các số nguyên và nếu $n \geq 3$ thì phương trình

$$\boxed{x^n = y^n + z^n}$$

không bao giờ có thể thỏa mãn được cả. Song thậm chí sau ba thế kỷ đầy nỗ lực mà vẫn không có một nhà toán học nào có thể xác lập được rằng mệnh đề tổng quát này là đúng. Bạn đọc nào có thể tìm ra một phép chứng minh thì chắc hẳn sẽ phải nổi tiếng lắm.

Với những hình vuông thì cái cân có thể làm cho thăng bằng được.



Với các khối lập phương thì cái cân không thể nào làm cho thăng bằng được.

42

Các số nguyên tố không chia hết được

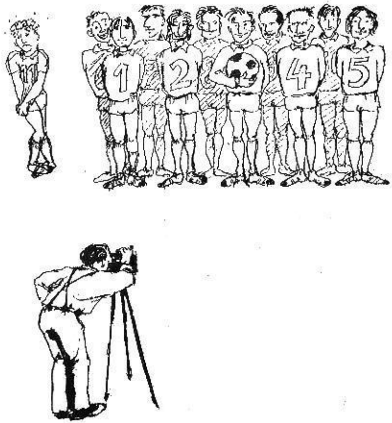
Các vị biên tập mục thể thao trên báo chí từ lâu đã biết rằng các phóng viên chụp hình của họ luôn luôn tỏ ra linh hoạt hơn khi họ được cử đi chụp các trận đấu bóng bầu dục so với khi họ phải chụp các trận bóng đá. Một quan sát nhỏ đã khám phá ra những lý do của sự so sánh này và đã đi tới những kết luận có phần đáng ngạc nhiên.

"Về bản thân các môn thể thao thì chẳng có chuyện gì", một phóng viên chụp hình giải thích. "Đơn giản chỉ vì trong đấu bóng bầu dục thì có 15 đấu thủ nên trong những bức hình chụp toàn đội họ có thể xếp thành ba hàng năm. Còn trong bóng đá thì lại khác, chỉ có 11 cầu thủ và họ không thể nào xếp được thành các hàng như nhau được."

Một chuyên gia khoa học đã khẳng định rằng câu nói này có ý nghĩa đó. "Thực tế là", ông đáp lời, "con số 15 có thể chia thành các số nguyên nhỏ hơn : 15 = 5 x 3. Ngược lại, con số 11 thì chỉ có thể chia cho chính nó và cho 1, nên chúng ta mới gọi nó là một *số nguyên tố*".

Ông nói thêm rằng mười số nguyên tố đầu tiên là 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, và 29. Trừ con số 2 còn lại tất cả các con số này đều là lẻ. Song không nhất thiết các con số lẻ là số nguyên tố. Chẳng hạn như 9 = 3 x 3. 15 = 5 x 3, 35 = 5 x 7, vân vân.

Được hỏi làm thế nào để có thể giải quyết được bài toán các bức hình đội bóng đá thì vị chuyên gia nảy ra một ý nghĩ rằng cứ phải đành bỏ đại đi một cầu thủ nào đó : "Rồi chia các cầu thủ còn lại thành hai." Ông gợi ý như vậy. Nhưng liên đoàn bóng đá chuyên nghiệp đã phản đối nên các phóng viên chụp hình vẫn phải tiếp tục chụp hình đội bóng với bốn cầu thủ đằng trước và 7 cầu thủ đằng sau.


11
1
2
4
5

43

Giả định của Goldbach : Mỗi số chẵn đều là tổng của hai số nguyên tố

Trong cuốn sách này chúng ta đã bắt gặp nhiều kết quả và công thức toán học và thấy rằng động lực dẫn đến việc khám phá ra chúng thực sự là khác nhau. Trong lý thuyết số chúng ta đã thâm nhập một lĩnh vực mà những thôi thúc chính là sự tò mò thuần túy và điều mong muốn đơn giản là biết nhiều hơn nữa. Đó là điều đã khiến Golbach, một nhà toán học Đức sống ở Nga vào khoảng năm 1750, có nhận xét là

$4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 8 = 5 + 3, 10 = 7 + 3, 12 = 7 + 5,$

$14 = 7 + 7 = 3 + 11, \quad 16 = 11 + 5 = 3 + 13,$

$18 = 11 + 7 = 13 + 5, \quad 20 = 13 + 7 = 17 + 3$

Nói cách khác mỗi số chẵn từ 4 đến 20 đều là tổng của hai số nguyên tố. Thế rồi Goldbach tự đặt cho mình câu hỏi sau : Điều đó có đúng cho tất cả các số chẵn hay không ?

Bạn đọc có thể tin được rằng với bất kỳ một số chẵn nào mình chọn thì bao giờ cũng có hai số nguyên tố a và b để N = a + b. Chẳng hạn 48 = 11 + 37. Nhưng chưa hề có nhà toán học nào chứng minh được giả định của Goldbach dưới dạng tổng quát nhất của nó. Chưa hề có ai tìm được một con số chẵn nào mà không thể biểu thị được là tổng của hai số nguyên tố và cũng không có ai chỉ ra được rằng một ngày nào đó điều này có thể sẽ không xảy ra.


2072
1021
+
1051
4=2+2
24 =
11 + 13
6 =3+3
14=7+7

44
Định lý số nguyên tố

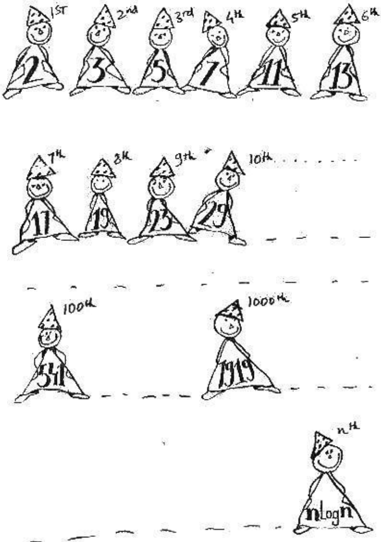
Nếu bạn nhìn vào một bảng các số nguyên tố bạn sẽ thấy chúng được phân bố rất thất thường. Chẳng hạn như có thể có một chuỗi số dài không phải là nguyên tố như 90, 91, 93, 94, 95 và 96 rồi tiếp sau là nhiều số nguyên tố rất gần với nhau như 97, 101 và 103. Điều hiển nhiên hơn về việc sự phân bố này là không đều bắt nguồn từ một thực tế là chưa hề có ai tìm ra được một "công thức"* đơn giản đảm bảo phát sinh các số nguyên tố.

Song gần cuối thế kỷ trước các nhà toán học đã đi tới một kết luận đáng chú ý sau đây : Mặc dầu có thể là không tìm ra được một công thức tổng quát cho giá trị chính xác của số nguyên tố thứ n song có thể đánh giá được độ lớn của nó. Khi n càng lớn thì số nguyên tố thứ n càng gần với n log n.

Chẳng hạn nếu n = 100 thì số nguyên tố thứ 100 là 541 trong khi giá trị của 100 log 100 xấp xỉ bằng 460,517. Do đó có một khác biệt khoảng 81 giữa giá trị thực và giá trị gần đúng, ứng với một sai số tương đối là 81/541 ≈ 15%. Song nếu n = 1000 thì số nguyên tố thứ 1000 là 7919 và giá trị xấp xỉ là 6907,75. Trong trường hợp này thì sai số tương đối chỉ là 1001/7919 ≈ 12,8%. Việc chứng minh điều gọi là *định lý số nguyên tố* cực kỳ khó song những ví dụ này cũng gợi cho thấy rằng sai số tương đối thực sự quả là ngày càng gần tới số 0 khi n ngày càng lớn :

số nguyên tố thứ n ≈ n log n (n lớn)

* "Công thức" cho tất cả các số nguyên tố quả là có tồn tại song lại liên quan tới những phép tính toán phức tạp tới mức chúng không có một giá trị thực tiễn nào cả.



1st
2
2nd
3
3rd
5
4th
7
5th
11
6th
13
7th
17
8th
19
9th
23
10th
29
100th
541
1000th
7919
nth
nlogn

Cơ may

45

Cơ may trúng xổ số

Loto "6/49" là một kiểu xổ số phổ biến ở Québec và ở châu Âu trong đó rút ra con số ngẫu nhiên từ 49 con số. Những người trúng giải thưởng lớn là người đã chọn đúng 6 con số trên các vé số của mình. Rõ ràng là có nhiều cách chọn 6 con số từ 49 con, đó là lý do tại sao các cơ may trúng giải lớn rất là nhỏ. Đối với một người chơi đã chọn 6 con số thì tỷ lệ chính xác để trúng là bao nhiêu ?

Để có một khái niệm về bài toán này ta hãy tưởng tượng một cách chơi xổ số đơn giản hóa là "2/5" trong đó rút ra hai con số từ 5 con số. Có thể rút ra được các cặp sau đây :

(1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (2,3) (2,4) (2,5) (3,4) (3,5) (4,5)

cho tổng số là 10 cặp. Sở dĩ như vậy vì có 5 khả năng cho con số thứ nhất và 4 khả năng còn lại cho con số thứ hai cho cả thảy 20 cách rút có thể. Nhưng mỗi cách rút thực tế đã được tính là hai lần, ví dụ (1,2) và (2,1) thực ra là như nhau vì thứ tự các con số không thành vấn đề. Kết quả là thực tế có 20/2 = 10 cách rút có thể xảy ra. Bằng cách lập luận tương tự có thể thấy được rằng con số các cách rút khác nhau trong đích thực cách xổ số 6/49 là

$$N = \frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

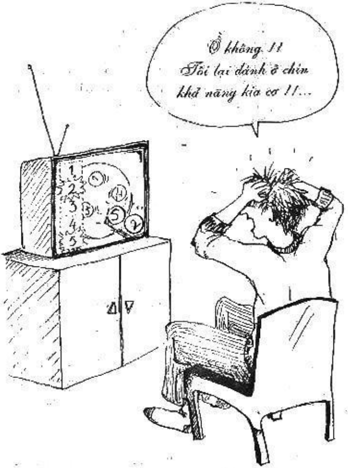
Trong trường hợp này tử số giữ vị trí của 5 x 4 và mẫu số thay cho 2 x 1. Do đó số các cách rút là

$$N = 13.983.816$$

Không giống như người chơi xổ số 2/5 đang xem kết quả trên truyền hình kèm theo đây, những người chơi đích thực xổ số 6/49 không thể có điều kiện mua đủ số vé có đại bộ phận các kết hợp có thể. Thực tế xác suất trúng giải p chỉ là 1/13.983.816 hoặc

$$p \approx 0,000000072$$

tương ứng với 7 cơ may trong số 100 triệu. Vì thế mà quá ít người trúng được giải lớn.



46
Rulet và Martingal của d'Alembert

Nếu bạn không có quá nhiều tham vọng thì có một cách chắn chắn để thắng khi chơi rulet là theo chiến lược được gọi là Martingal của d'Alembert. Đây là một hệ thống đánh cược, đánh $1 ăn $1.

Bạn bắt đầu đánh $1 màu đỏ. Nếu ra đỏ bạn được $2 cho $1 cược lúc đầu, do đó bạn được chính xác là $1 và bạn có thể thôi. Nếu không thì bạn lại cược $2 màu đỏ. Nếu màu đỏ ra thì bạn được $4 sau khi đã đánh một tổng số là $3 ($1 ở vòng đầu và $2 ở vòng thứ hai), do đó cả thảy tiền được cuộc của bạn là $1 và bạn có thể thôi. Nếu không thì bạn đánh $4 màu đỏ. Nếu ra đỏ thì bạn được $8 sau khi đã cược một tổng số là $7 (1 + 2 + 4). Do đó bạn được $1. Nếu chưa thôi, bạn tiếp tục theo cùng chiến lược đó, mỗi lần đánh gấp đôi cho màu đỏ cho đến khi màu đỏ ra lần cuối cùng. Vì điều này cuối cùng phải xảy ra nên chiến lược đánh cược bảo đảm là có kết quả.

Vấn đề là để thắng được $1000, bạn có thể cần đánh các khoản tiền $3000, $7000 hoặc thậm chí $15.000 hoặc hơn nữa. Ngoài việc bạn có thể chưa hẳn đã có nhiều tiền như vậy* còn có việc là tiền đánh rulet là có giới hạn. Điều đó có nghĩa là bạn có thể không tiếp tục được chiến lược đó tại chính thời điểm mà màu đỏ ra cú quyết định, đó là điều đã xảy ra cho ông bạn đánh rulet bất hạnh trên hình kèm theo, người đã mất tổng cộng tất cả các tiền đặt cược của mình. Mặt khác, nếu bạn chỉ muốn thắng đủ để có thể nói là bạn đã hạ được căn nhà thì chiến lược này hoàn toàn thích hợp đó.

---

* Chú ý rằng người đánh với số tiền ban đầu là 2^{n-1} dollars theo ý mình thì sẽ vỡ nợ nếu màu đen xuất hiện n lần liên tiếp.

Nhưng bố ơi, màu đen đã ra 7 lần liên tiếp rồi và bố đã thua cả chùm rồi còn gì !

Tiền đặt tối đa $1000

Tôi vẫn tiếp tục đánh màu đỏ ! $1280 ông ạ

47

Tam giác Pascal

Ở Vấn đề 45 ta đã thấy rằng có 10 cách để chọn ra 2 vật từ một nhóm 5 vật. Cũng có thể phân tích số các cách để chọn 1, 3, 4 hoặc 5 vật từ cùng nhóm đó. Trong những trường hợp này có 5, 10, 5 và 1 các kết hợp khác nhau. Bạn đọc sẽ thấy rằng việc chọn hai vật tương đương với việc chọn 3 vật còn lại nên cũng là có lý khi có 10 cách chọn 3 vật từ một nhóm 5 vật.

Số những khả năng khác nhau cũng có thể tìm được bằng cách dùng một công cụ "hình học" gọi là *tam giác Pascal*. Ở trên cùng ta đặt một mình con số 1. Trên dòng thứ hai ta đặt hai số 1 mới ở hai bên của số 1 đầu tiên. Trên các dòng tiếp sau thì mỗi con số xuất hiện được tính bằng cách cộng hai con số nằm ở dòng trên thấy ở hai bên của nó lại với nhau. Hai đầu của mỗi dòng số lúc nào cũng là con số 1. Do đó dòng thứ ba là 1, 2 (= 1 + 1), 1 và dòng thứ tư là 1, 3 (= 1 + 2), 3 (= 2 + 1), 1. Tiếp tục cách này ta thấy dòng thứ sáu là 1, 5, 10, 10, 5, 1 do suy từ trên mà ra.

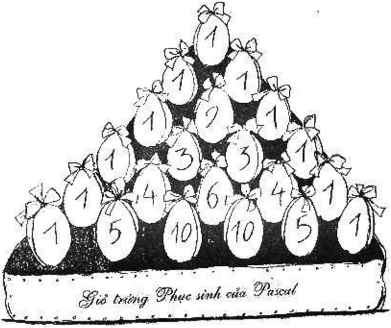
Một trong những điều làm cho tam giác này nổi tiếng là các con số ở dòng thứ n là các hệ số trong công thức khai triển của $(a + b)^{n-1}$:

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ (xem Vấn đề 6)}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a\ b)^4 &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4 \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a\ b)^5 &= 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5 \\ &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\end{aligned}$$


1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
Giỏ trứng Phục sinh của Pascal

Ngày nay và Mai sau...

48

Hệ nhị phân : 1 + 1 = 10

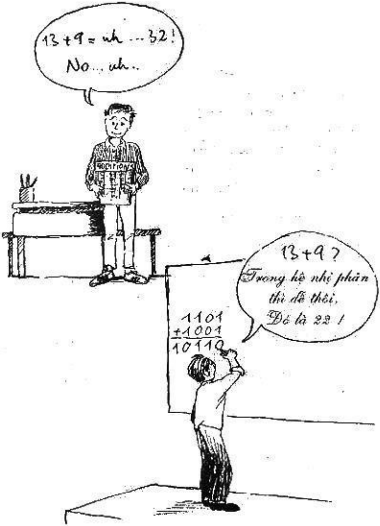
Thói quen dùng của chúng ta về hệ thống gọi là "thập phân" để tính toán các con số đã bắt đầu từ lúc chúng ta còn bé và ta coi nó là điều hoàn toàn tự nhiên khi tính đếm bằng cách này. Nhưng nó đòi hỏi phải nhớ khá nhiều (chẳng hạn phải học thuộc các bảng cửu chương) và thực ra thì nó không hoàn toàn thực tiễn như ta vẫn tưởng. Vì vậy mà các máy tính được lập trình đã dùng một phương pháp tính toán khác gọi là hệ "nhị phân" trong đó con số 2 chiếm vị trí của con số 10. Trong hệ này tất cả các con số được viết ra thì chỉ dùng các ký hiệu 0 và 1. Bảng sau đây ghi cách biểu thị nhị phân và thập phân của 16 số nguyên đầu tiên và cho thấy các số kế tiếp nhau được hình thành trong hệ nhị phân như thế nào :

Thập phân	*Nhị phân*	*Thập phân*	*Nhị phân*
0	0	8	1000
1	1	9	1001
2	10	10	1010
3	11	11	1011
4	100	12	1100
5	101	13	1101
6	110	14	1110
7	111	15	1111

Trong hệ thống mới này phép cộng rất đơn giản và tuân theo ba qui tắc sau đây :

$$\begin{array}{r} 0 \\ +0 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ +1 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \text{hoặc} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ +0 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {}^{1}1 \\ +1 \\ \hline 10 \end{array}$$

Số 1 nhỏ ở phép cộng cuối cùng chỉ ra rằng 1 được mang từ cột thứ nhất sang.


13+9 = uh ... 32!
No... uh..
ADDITIONS
13+9?
Trong hệ nhị phân
thì dễ thôi.
Đó là 22 !
1101
+1001
10110

Theo qui tắc cuối cùng thì đẳng thức qui ước 1 + 1 = 2 bây giờ có thể được viết thành 1 + 1 = 10 như thấy ở đầu đề vấn đề này. Một ví dụ khác là

$$\begin{array}{r} 101 \\ +110 \\ \hline 1011 \end{array}$$

tương ứng với phép cộng qui ước 5 + 6 = 11.

Thật là thú vị khi thấy rằng hệ nhị phân, một hệ thống mới nổi bật gần đây cùng với việc đưa ra các phương pháp tính toán hiện đại, thực ra lại là một khám phá từ xưa có lẽ đã có từ nhà toán học người Đức Leibniz. Trong một bức thư đề ngày 26 tháng 2 năm 1701, hiện còn trong sưu tập của Viện Hàn lâm Khoa học Pháp, Leibniz đã viết những dòng sau đây :

> Tôi đã có nghĩ ra một hệ thống số có thể cho thấy là hoàn toàn mới. Nói ngắn gọn nó như thế này... Bằng cách dùng một hệ nhị phân dựa trên con số 2 thay vì hệ thập phân dựa trên con số 10, tôi đã có thể viết được tất cả các số bằng cách dùng 0 và 1. Tôi đã làm việc này không phải chỉ vì những lý do thực tiễn mà còn là để có được những khám phá mới... Hệ thống này có thể mang lại thông tin mới mà bằng bất kỳ cách nào khác thì khó mà đạt được...

Khi viết những dòng này, Leibniz khó có thể tưởng tượng được rằng trong số "những khám phá mới" đó lại có máy tính và kỹ thuật xử lý từ mà chúng ta dùng ngày nay đã dựa vào công trình của ông.


Và nghĩ rằng bức thư của tôi
lại đã làm cho tất cả điều này
có thể thực hiện được !

49

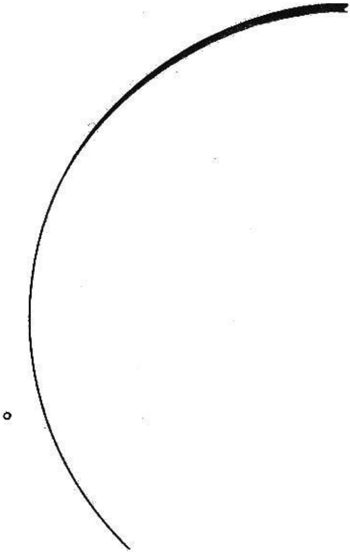
Tiến tới vô hạn

Trong quá trình khám phá thế giới toán học này, chúng ta thường dùng những câu như "Tổng này ngày càng gần với... khi ngày càng nhiều số hạng được "tính toán" hoặc "con số này ngày càng nhỏ hơn khi n ngày càng lớn hơn." Một ví dụ cho câu phát biểu thứ nhất là chúng ta đã viết rằng

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1$$

Đằng sau tất cả các mệnh đề này chỉ là ẩn nấu một tư tưởng về vô hạn. Phương trình trên tương đương với việc nói rằng nếu tổng của một chuỗi vô hạn các số 1/2, 1/4, 1/8, vân vân mà tính được thì kết quả là 1. Nói một cách thực tiễn thì tất nhiên phép tính đó là không thể làm được vì một tổng vô hạn đã vượt ra ngoài tầm với hữu hạn của con người. Ngoài ra, kể cả khi chúng ta thực sự có thời gian vô tận ta cũng không thể nào "tiến tới" cái vô tận được.

Tuy nhiên trong nhiều thế kỷ các nhà toán học đã đề cập tới cái khái niệm khó về cái vô hạn đó. Không thể tự mình tiếp cận cái vô hạn, họ đã cố làm cho cái vô hạn đó được gần hơn một chút với mình. Do đó họ đã làm cho nó trở thành một bộ phận không thể thiếu được của thế giới các khái niệm toán học, một lãnh địa thần bí mà các khách thể tỏ ra hữu ích kể cả khi chưa hiểu được đầy đủ tất cả các tính chất của chúng. Kết quả là cái vô hạn không còn là một khái niệm nghịch lý khiến chúng ta thấy khó chịu nữa. Ngược lại, kể cả khi cái vô hạn vẫn còn là một khái niệm ta cần phải dè chừng, nó vẫn là một nguồn to lớn những khám phá phong phú.



Phụ lục

Trong các câu chuyện liên quan tới các nhân vật có thực đôi khi chúng tôi cũng có làm khác đi với sự thật lịch sử. Mục đích của thông tin bổ sung dưới đây là để uốn nắn lại những ghi chép đó :

- Có nhiều phép chứng minh khác nhau về định lý Pythagore (*Vấn đề 8*). Phép chứng minh chúng tôi đã chọn sự thực là do Tổng thống James Garfield nghĩ ra, đã được trình bày là do nó độc đáo và đơn giản. Trên trang 143 và 144 chúng tôi cũng đã đưa ra một phép chứng minh cổ điển hơn cho định lý đó và điều này cũng dùng tới một phép dựng hình.
- Đúng là Archimedes đã khám phá ra phương pháp mô tả ở *Vấn đề 10* để tính diện tích một hình tròn. Còn cái bánh khổng lồ đó thì chỉ tồn tại trong óc tưởng tượng của các tác giả.
- Mặc dầu các nhà toán học Hy Lạp không có các công thức xuất hiện cuối *Vấn đề 16*, song họ vẫn có thể tính được các nghiệm của các phương trình bậc hai.
- John Napier, một nhà quí tộc người Scotland của thế kỷ 17 thực sự có thuê một người làm vườn thật. Song những câu chuyện kể *ở các Vấn đề từ 19 đến 24* hoàn toàn là hư cấu. Đóng góp chính của Napier cho việc nghiên cứu logarit là đã đưa ra được một bảng các giá trị bằng số vào năm 1614. Những kết quả nói trong phần này thực ra là từ công trình của các nhà toán học về sau, kể cả Newton và Euler.
- Cuộc tọa đàm có liên quan tới Euler, Diderot và Catherine Đại đế của nước Nga là có thực. Ghi chú phía dưới của *Vấn đề 27* xác định rõ hơn những gì thực sự đã được nói ra trong dịp này.

- Khó có gì đảm bảo được rằng Gauss đã khám phá ra công thức đơn giản để tính tổng 1 + 2 + ... + 99 + 100 khi ông mới chỉ là một cậu học sinh, nhưng đây là điều chúng ta được truyền tụng lại như vậy. Nếu không còn điều gì đúng hơn nữa thì câu chuyện này có thể được coi là một "truyền thuyết có thực".
- *Vấn đề 30* cho thấy làm thế nào để có thể tính được số các cặp thỏ được sinh ra vào cuối một năm do một cặp duy nhất hữu sinh nếu mỗi cặp hữu sinh đó lại sinh được một cặp mới vào cuối mỗi tháng và cặp mới đó cũng lại sinh được vào cuối mỗi tháng. Leonardo Fibonacci thực ra đã dùng cách tính này năm 1202 trong *Liber abaci* để giới thiệu dãy số hiện nay mang tên ông.

Cuối cùng thì chúng tôi cũng đã dựng nên những câu chuyện về các bác nông dân đo diện tích các hình chữ nhật hoặc hình tam giác (*Các vấn đề 3 và 4*) hoặc về những đứa trẻ đã khám phá ra những công thức nổi tiếng bằng cách cắt các thứ theo những cách thông minh (*Các vấn đề 6 và 7*) nhưng có thể là thực sự đã xảy ra những sự kiện tương tự hoặc thậm chí đúng như vậy nữa. Trifolium giganteum (*Các vấn đề 3, 4 và 5*) và các nhân vật lùn tịt và biết co duỗi uốn dẻo (*Các vấn đề 11 và 28*) quả thực không có trong khi các câu chuyện về đua xe dành giải Golden Gouda (*Vấn đề 14*) và những đồ tạo tác Ai Cập (*Vấn đề 37*) chỉ là những chuyện bịa không thể có xét về mặt lịch sử hoặc công nghệ. Rõ ràng là sự cố thảm hình vuông (*Vấn đề 40*) chỉ có thể xảy ra trên Sao Hỏa và cái kiểu cáu kỉnh của các vị phóng viên nhiếp ảnh thì cũng chỉ trong khoảnh khắc như khi nháy ống kính vậy.

Bảng tra tiểu sử

d'Alembert (Jean Le Rond) (1713 - 1783) : Triết gia và là nhà toán học người Pháp, ông là cố vấn khoa học cho bộ *Encyclopedia* (Bách khoa toàn thư). Ông nổi tiếng trong toán học nhờ có công trình của mình về giải tích và cơ học. Tên tuổi của ông cùng với tên tuổi của Gauss gắn liền với định lý cơ bản của đại số nói rằng mỗi phương trình đa thức đều có ít nhất một nghiệm là một số phức.

Archimedes (287 - 212 tr. CN) : Nhà toán học, nhà vật lý và kỹ sư Hy Lạp sống ở Syracuse vào thế kỷ thứ 3 trước công nguyên. Là người sáng tạo ra phương pháp tính trình bày ở *Vấn đề 10*, ông là một trong những nhà tư tưởng lớn của thời cổ đại. Ông cũng khám phá ra nguyên lý phao nổi giải thích sự nổi của tàu thuyền và các hiện tượng khác. Ông đã bị giết khi Syracuse rơi vào tay người La Mã sau một trận vây hãm phải kéo dài nhiều năm nhờ có những máy móc ông nghĩ ra với tính cách một kỹ sư quân sự.

Cardano (Girolamo) (1501 - 1576) : Nhà đại số học và là bác sĩ người Ý đã khám phá ra công thức để giải các phương trình bậc ba. Công trình của ông đánh dấu sự xuất hiện đầu tiên của căn bậc hai các số âm mà về sau trở thành các số "ảo" (*Vấn đề 18*). Người ta tin rằng ông đã thiết kế các nguyên mẫu của hệ thống các khớp hiện mang tên ông và được dùng để kiểm soát việc lái và truyền động của ôtô. Ngoài công trình của ông về y học ông còn biết về chiêm tinh và đã lấy các lá số tử vi khiến đã bị Tòa dị giáo kết tội.

Catherine II của Nga, danh xưng là Catherine Đại đế (1729 - 1796) : Là nữ hoàng của Nga từ 1762 đến 1796, Catherine Đại đế đã thống nhất được đất nước. Thấm nhuần tư tưởng tự do, ngay từ đầu triều đại của mình, nữ hoàng đã tìm cách làm thay đổi xã hội bằng cách bảo đảm một nền tự do chính trị rộng rãi hơn. Một số các triết gia và nhà khoa học kể cả Euler và Diderot (*Vấn đề 27*) cũng như Voltaire đã nhận được sự bảo trợ của nữ hoàng.

Christophe (biệt hiệu của *Georges Colomb*) (1856 - 1945) : Nhà vạn vật học người Pháp là phó giám đốc của phòng thực nghiệm thực vật học tại Sorbonne. Công trình viết của ông bao gồm những sách tra cứu khác nhau về vạn vật học cũng như một tác phẩm ba tập có văn bản được minh họa tên là *Gia đình Fenouillard, Camembert người cứu hỏa* và *Sự ám ảnh của nhà bác học Cosine.*

Diderot (Denis) (1713 - 1784) : Triết gia lớn người Pháp và là một nhà văn. Vai trò nhỏ mà ông thể hiện trong cuốn sách này nói lên sự không biết đánh giá đúng những đóng góp quan trọng của ông. Ông tỏ ra không có tài năng gì lắm về toán học và đúng là Euler đã lợi dụng chỗ yếu này để biến ông thành trò cười trước mặt Catherine Đại đế của Nga. Thuyết vô thần của ông khiến Euler phải nói ra lời châm biếm đã làm ông bị vào tù năm 1749. Ngoài những tiểu thuyết của ông (*Jacques Nhà định mệnh luận, Cháu trai của Rameau* và *Nữ tu sĩ*), ông và d'Alembert đã có những tác động quan trọng đối với *Encyclopedia.*

Euler (Leonhard) (1707 - 1783) : Nhà toán học và vật lý học Thụy Sĩ. Nhờ có khả năng sáng tạo khác thường ông đã khám phá và phát triển các lĩnh vực toán học hoàn toàn mới và nghiên cứu sâu hơn về các chủ đề khác mà những người trước ông đã nghiên cứu. Trong cuốn sách này, chúng ta đã gặp ông nhiều lần khi nói về hằng số Euler (*Vấn đề 21*), số mũ ảo (*Vấn đề 27*), đa diện (*Vấn đề 35*) và bài toán những cây cầu Konigsberg (*Vấn đề 39*). Sự đa dạng của những điều bất gặp này là một thể hiện rõ ràng về mức độ bao quát dễ nhận ra trong công trình của ông. Một toàn tập tác phẩm của ông đã được công bố vào đầu thế kỷ 20 và gồm có gần cả 100 tập.

Fermat (Pierre de) (1601 - 1665) : Một luật gia người Pháp vùng Toulouse đã có đóng góp vào việc hiện đại hóa việc tính toán. Uy tín lớn của ông bắt nguồn từ công trình của ông về lý thuyết số, một lĩnh vực đã tiềm ẩn ở phương Tây trên một ngàn năm. Trong thời Fermat người ta thường công bố các kết quả mà không công bố cụ thể các phép chứng minh. Do vậy mà thách thức các nhà toán học khác hãy tỏ ra là đủ thông minh để tự mình rút ra phép chứng minh, và Fermat thì thường xuyên chơi trò này. Một trong những kết quả của ông, "định lý cuối cùng" nói ở *Vấn đề 41*, vẫn tiếp tục trên ba trăm năm thu hút mọi nỗ lực của các nhà toán học khác để tìm ra một phép chứng minh.

Fibonacci (Leonardo), danh xưng là Leonardo vùng Pisa (sinh khoảng 1175, qua đời sau năm 1240) : Nhà toán học Ý đã phát minh ra dãy số mà ngày nay mang tên ông (*Vấn đề 30*). Đóng góp chính của ông là việc công bố năm 1202 cuốn *Liber abaci* đã làm cho phương Tây chú ý tới những thành tựu toán học đáng kể của người Ả Rập. Đặc biệt trong cuốn sách này có giới thiệu số không và các số mà ngày nay chúng ta dùng thường ngày gọi là các chữ số Ả Rập.

Garfield (James) (1831 - 1881) : Chính khách và là Tổng thống Mỹ. Tự học, ông là một nhà toán học tài tử và là giáo sư về các cổ ngữ. Sau khi đấu tranh cho nước Mỹ trong cuộc Nội chiến ông trở thành lãnh tụ Đảng Cộng hòa năm 1876. Ông được bầu làm Tổng thống của Hợp chủng quốc vào tháng 11 năm 1880 và nhậm chức vào tháng Giêng năm 1881 theo hiến pháp của nước Mỹ. Hai tháng sau ông bị ám sát chết.

Gauss (Carl Friedrich) (1777 - 1855) : Nhà toán học và vật lý học người Đức. Biệt danh "princeps mathematicorum" (Ông hoàng của các nhà toán học) được những người cùng thời đặt cho ông, Gauss đã thống lĩnh tất cả các ngành toán học trong 30 năm. Không có lĩnh vực nào mà thiên tài vạn năng của ông không có ảnh hưởng và kỷ lục của ông với tính cách một nhà phát minh thì vô song. Ông đã có quá nhiều thành tựu tới mức ngày cả các sách giáo khoa ngày nay vẫn đầy dẫy những "Định lý Gauss" bao trùm một mảng cực kỳ rộng lớn các lĩnh vực.

Goldbach (Christian) (1690 - 1764) : Nhà toán học Đức. Ông nổi tiếng chủ yếu là có giả định nói ở *Vấn đề 43* rằng mọi số nguyên đều là tổng của hai số nguyên tố. Trong một bức thư viết năm 1742 khi ông đang sống tại nước Nga, ông đã làm cho Euler phải chú ý tới giả định đó của mình. Cho đến tận ngày nay giả định đó vẫn chưa chứng minh được.

Lagrange (Joseph Louis) (1736 - 1813) : Nhà toán học Pháp sinh tại Turin. Ông nghiên cứu rộng rãi nhiều vấn đề trong toán học, nhất là trong giải tích và lý thuyết số và đã khám phá ra "định lý bốn bình phương" nói ở *Vấn đề 40*. Ông tham gia nhiều hoạt động khác nhau và giữ chức vụ giáo sư toán học tại École Polytechnique và là chủ tịch Ủy ban Đo lường thành lập năm 1795.

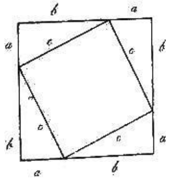
Leibniz (Gottfried Wilhelm) (1646 - 1716) : Triết gia Đức và là nhà toán học. Cùng thời gian như Newton, Leibniz đã độc lập khám phá ra các nguyên lý của phép tính vi tích phân (*Vấn đề 25*). Trong quá trình làm việc này ông đã nghĩ ra các ký hiệu toán học mà đến nay vẫn còn sử dụng kể cả ký hiệu $\int$ chỉ một tích phân. Chúng ta đã thấy ở một chỗ khác (*Vấn đề 48*) rằng Leibniz là người đầu tiên nghĩ tới việc dùng hệ nhị phân trong toán học. Trong các luận văn triết học của mình ông đã dùng khái niệm "đơn tử" để phát triển một quan điểm lạc quan về thế giới đã gây ra nhiều phản ứng về sau ở thế kỷ 18 đặc biệt là từ Voltaire và Diderot.

Napier (John), Laird vùng Merchiston (1550 - 1617) : Nhà toán học người Scốt. Tên tuổi của ông gắn liền với các logarit "tự nhiên" và đã cho công bố một bảng các giá trị bằng số của chúng vào năm 1614. Ngoài các hoạt động toán học ông tỏ ra có vấn vương với ma thuật khiến ông có vẻ thần bí và làm cho gia nhân và láng giềng nhìn ông mà rờn rợn.

Newton (Isaac) (1642 - 1727) : Nhà bác học Anh. Cùng thời gian với Leibniz ông đã độc lập phát minh ra phép tính vi phân và tích phân và ông là thủy tổ của giải tích hiện đại. Khám phá nổi tiếng nhất của ông, luật vạn vật hấp dẫn, theo truyền thuyết là do bắt nguồn từ việc những quả táo rơi trong vườn. Ngoài ra, "Cơ học Newton" đã nói rõ về chuyển động các vật thể chuyển động với một tốc độ nhỏ hơn rất nhiều so với tốc độ ánh sáng (coi như đối lập với "cơ học tương đối" do Albert Einstein sáng tạo ra vào đầu thế kỷ 20).

Pascal (Blaise) (1623 - 1662) : Nhà văn Pháp và là nhà toán học. Ông nổi tiếng chủ yếu là do đã phát minh ra chiếc máy tính đầu tiên khi ông mới chỉ 18 tuổi. Pascal cũng giúp sáng tạo ra khoa học về xác suất và được công nhận là có nhiều đóng góp khác nhau cho việc nghiên cứu các thiết diện conic. Hoán cải theo giáo phái Jansen năm 1654, một giáo lý thô thiển được xây dựng chủ yếu theo quan niệm tiền định, Pascal đã dành cả nửa phần còn lại của đời mình để bảo vệ giáo phái đó chống lại những cuộc tấn công của các giáo hữu dòng Tên. Công trình chính của ông, *Pensés* nổi tiếng đã xuất hiện sau khi ông qua đời. Ý định của ông là coi đó là một "Sự bảo vệ Cơ đốc giáo", nó chứa đựng "sự đánh cược nổi tiếng của Pascal" rằng vì có một khả năng hữu hạn để có được một hạnh phúc đích thực bằng cách sống một cuộc đời tôn giáo nên "Tin ở nơi Chúa thì tốt hơn".

Pythagoras (thế kỷ thứ 6 tr. CN) : Nhà toán học Hy Lạp. Ông nổi tiếng rộng rãi là do có định lý mang tên ông (*Vấn đề 8*) nhưng thực ra ông không phải là người khám phá ra nó. Sự thực là các nhà hình học Babylon đã quen thuộc với nguyên lý này một ngàn năm trước. Song Pythagoras đã là người đầu tiên xác lập một số các tính chất khác của các tam giác kể cả qui tắc nói rằng tổng của các góc trong bao giờ cũng bằng 180° (*Vấn đề 5*).



Lập luận sau đây trình bày một phép chứng minh khác về định lý Pythagore, cổ điển hơn phép chứng minh được đưa ra ở *Vấn đề 8*. Bạn đọc có thể dễ dàng thấy được là diện tích hình vuông lớn bằng $(a + b)^2$ vì các cạnh đều bằng a + b. Song diện tích đó cũng bằng diện tích một hình vuông có cạnh là c cộng thêm bốn tam giác vuông góc, cho tổng số là $c^2 + 2ab$. Nếu $(a + b)^2$ được khai triển theo công thức của *Vấn đề 6* thì có thể xác lập rằng $a^2 + b^2 = c^2$.

Zeno vùng Elea (thế kỷ thứ 5 trước CN) : Triết gia Hy Lạp sinh tại Elea. Ông được các nhà toán học biết tới là do có những nghịch lý chứng minh rằng không thể có chuyển động. Chẳng hạn như *Vấn đề 32* nói về nghịch lý liên quan tới một mũi tên nhằm thẳng mục tiêu của nó. Bằng phương cách tương tự, Zeno "đã chứng minh" rằng Achilles chẳng bao giờ có thể đuổi kịp một con rùa. Những nghịch lý này thuộc số những hình mẫu đầu tiên về nỗ lực suy nghĩ về cái vô hạn và chúng đã thôi thúc các nhà toán học tìm hiểu sâu hơn nữa về cái khái niệm khó có thể nắm được này.

Mục lục

Phương trình bậc hai

Logarit và số mũ

Chuỗi số

Các vật thể trong không gian

Số nguyên, Số nguyên tố

Cơ may

Ngày nay và Mai sau

NHỮNG CÔNG THỨC TUYỆT ĐẸP TRONG TOÁN HỌC

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Giám đốc	:	TRẦN TRÂM PHƯƠNG
Tổng biên tập	:	NGUYỄN KHẮC PHI
Biên tập	:	NGUYỄN THUỴ HÀ-TIÊN
Trình bày	:	HỒNG HÀ
Sửa bản in thử	:	HỒNG HÀ
Họa sĩ	:	HS. NGỌC HẠNH

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

81 Trần Hưng Đạo - Hà Nội

Chi nhánh **NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC tại Đà Nẵng**

4 Trần Phú - Đà Nẵng

In 2.000 bản khổ 14 x 20,5 cm tại xưởng in XN DỊCH VỤ TIẾP THỊ - QUẢNG CÁO. Giấy phép xuất bản số 572/ 60 - CXB ngày 23 - 2 - 1996. Trích ngang KHXB 215/ 25/ 3/ 96. In xong và nộp lưu chiểu tháng 8/ 1996

10000 -

Cuốn sách dẫn dắt bạn đến với vẻ đẹp của toán học và những lý thú của việc chơi các con số. Cũng hứng thú khi nó đem thực hành, Nó duy trì mức độ rắc rối tinh vi đủ cao cho những người thông minh phải suy nghĩ, nhưng không bao giờ cao đến mức khó hiểu.

Cùng với các công thức trên là 70 trang tranh hài hước và các chuyện vui, nhằm sao cho các sự kiện hàng ngày lại có thể dẫn tới sự hiểu biết sâu sắc nền tảng toán học.

- Gồm 24 chương ngắn hết sức thú vị được viết bằng ngôn ngữ giản dị, sáng sủa.
- Chứng tỏ toán học - vui, hoạt động và dễ tiếp thu, nó không phải là môn khoa học thần bí dành cho các chuyên gia.