BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO * HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

NĂM THỨ 35 - RA HÀNG THÁNG
Số 1 (247)
1998

'98

Chúc Mừng Năm Mới

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Bìa 1 : Đặng Tố Anh - Học sinh trường PTTH Nguyễn Trãi, Hà Nội (Ảnh : Giang Hà Vy)

Trụ sở tòa soạn :
81 Trần Hưng Đạo, Hà Nội ĐT : 8.220073
231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh ĐT: 8.356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
LÊ THỐNG NHẤT
Trình bày : NGUYỄN THỊ OANH

Dành cho các bạn

TRUNG HỌC CƠ SỞ

BÀI TOÁN CỰC TRỊ CỦA BIỂU THỨC CHỨA DẤU CĂN

PHAN NGỌC THẢO
Trường chuyên Lê Khiết
Quảng Ngãi

Chương I là chương khó của Đại số lớp 9, các bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất có chứa dấu căn thường hay gặp trong các kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 và các kì thi Học sinh giỏi. Dưới đây là một số dạng toán thường gặp và một số vấn đề mà học sinh hay sai sót.

A/ CƠ SỞ LÍ THUYẾT

I. Để chứng minh

$MinP(x,y) = a$ (a là hằng số)

Ta chứng minh hai phần

1. $P(x,y) \geq a \ \forall x, y$

2. Có (x_o, y_o) sao cho $f(x_o, y_o) = a$

Chứng minh tương tự với $MaxP(x,y) = a$

Các dạng thường gặp

a) $p(x,y) = [Q(x,y)]^{2n} + a \geq a \quad n \in N$ (*)

Nếu có (x_o, y_o) sao cho $Q(x_o y_o) = 0$ thì Min $P(x,y) = a$

b) $p(x, y) = -[Q(x, y)]^{2n} + b \leq b$ (b là hằng số)(**) Nếu có (x_o, y_o) sao cho $Q(x_o, y_o) = 0$ thì $Max(x, y) = b$

II. Vận dụng việc tìm Min, Max vào bài toán có chứa dấu căn

1. Ở công thức (*)

Nếu $a \geq 0$ thì $Min\sqrt{p(x, y)} = \sqrt{a}$

Ở công thức (**)

Nếu $P(x, y) \geq 0$ và $b \geq 0$ thì $\text{Max}\sqrt{p(x, y)} = \sqrt{b}$

2. Vận dụng bất đẳng thức $|a| + |b| \geq |a + b|$

Dấu "=" xảy ra khi $a, b \geq 0$

3. Nếu $M > 0$ muốn tìm Min, Max của M ta tìm Min, Max của M^2.

B/ BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tìm Min các biểu thức

1. $D = \sqrt{(x-1996)^2} - \sqrt{(x-1997)^2}$

2. $F = -\dfrac{1}{x + \sqrt{x} + 1}$

• *Hướng dẫn*

1. $D = |x - 1996| + |x - 1997|$

Cách 1. Xét các khoảng

$+ x < 1996$: $D = 1996 - x + 1997 - x = 3993 - 2x > 1$

$+ 1996 \leq x \leq 1997$ $D = 1$

$+ x > 1997$ $D = 2x - 3993 > 1$

Do đó $D_{min} = 1$ khi $1996 \leq x \leq 1997$

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức $|a| + |b| \geq |a + b|$

Dấu = xảy ra khi $a, b \geq 0$

$D = |x - 1996| + |x - 1997| \geq$
$\geq |x - 1996 + 1997 - x| = 1$

$D_{min} = 1$ khi $(x - 1996)(1997 - x)$
$\Leftrightarrow 1996 - \leq x \leq 1997$

Chú ý. $|x - 1997| = |1997 - x|$

2. $F = \dfrac{1}{x + \sqrt{x} + 1}$ nhận xét : $x \geq 0$

Cách 1: $F < 0$ để F_{min} thì $|F|_{Max}$ tức là $\dfrac{1}{x + \sqrt{x} + 1}$ Max $\Rightarrow x + \sqrt{x} + 1(\min) \Rightarrow x(\min)$ mà $x \geq 0$ nên $x(\min) = 0$

Vậy $F_{min} = -1$ khi $x = 0$

Cách 2: $\dfrac{1}{x + \sqrt{x} + 1} \leq 1$ vì $x \geq 0$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{1 + \sqrt{x} - 1} \geq -1$

Vậy $F_{Min} = -1$ khi $x = 0$.

Bài 2. Tìm Max của các biểu thức

$$I = \frac{yz\sqrt{x-1} + xz\sqrt{y-2} + xy\sqrt{z-3}}{xyz}$$

• *Hướng dẫn*

$L = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x} + \dfrac{\sqrt{y-1}}{y} - \dfrac{\sqrt{z-3}}{z}$ với điều kiện $x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm $\left(\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}; a \geq 0; b \geq 0\right.$; dấu = xảy ra khi $a = b$)

$\sqrt{x-1} = \sqrt{1(x-1)} \leq \dfrac{1+x-1}{2} = \dfrac{x}{2}$

$\sqrt{y-2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2(y-2)} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{2+y-2}{2} = \dfrac{y}{2\sqrt{2}}$

$\sqrt{z-3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3(z-3)} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{3+z-3}{2} = \dfrac{z}{2\sqrt{3}}$

Do đó $L \leq \dfrac{x}{2x} + \dfrac{y}{2\sqrt{2}y} + \dfrac{z}{2\sqrt{3}z} =$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \le \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$LMax = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ khi } \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 6 \end{cases}$$

Bài 3: Xét Biểu thức :

$$P = \frac{1}{2\left(1+\sqrt{a}\right)} + \frac{1}{2\left(1-\sqrt{a}\right)} - \frac{a^2+2}{1-a^3}$$

a) Rút gọn P.

b) Tìm Min của P.

• *Hướng dẫn* : Điều kiện $a \ge 0, a \ne 1$

a) $P = -\dfrac{1}{a^2+a+1}$

b) Rõ ràng $P < 0$, vậy P_{Min} khi $|P|_{Max}$ tức là $a^2 + a + 1$ nhỏ nhất mà $a \ge 0$ nên Min của $a^2 + a + 1 = 1$ khi $a = 0$.

Kết luận: $P_{\text{Min}} = -1$ khi $a = 0$

Chú ý: Một số học sinh nhầm lẫn, quên điều kiện $a \ge 0$ nên đã giải:

$$P = -\frac{1}{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \ge -\frac{4}{3}\ P_{Min} = -\frac{4}{3}\ 1\text{khi}a = -\frac{1}{2}$$

Bài 4: Tìm Min của các biểu thức :

a) $H = \dfrac{5-3x}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $Y = \sqrt{x+2(1+\sqrt{x+1})} + \sqrt{x+2(1-\sqrt{x+1})}$

• *Hướng dẫn* : $H = \dfrac{5-3x}{\sqrt{1-x^2}}$ xác định khi $-1 \le x < 1 \Rightarrow H > 0$

Ta có $H^2 = \left(\dfrac{5-3x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2 = \dfrac{25-30x+9x^2}{1-x^2}$

$$= \frac{9-30x+25x^2+16-16x^2}{1-x^2} = \frac{(3-5x)^2}{1-x^2} + 16 \ge 16$$

(Vì $1 - x^2 > 0$) $\Rightarrow H_{\text{Min}} = 4$ khi $x = \dfrac{3}{5}$

b) $y = \sqrt{(\sqrt{x+1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2}$

đk: $x \ge -1$

$= |\sqrt{x+1} + 1| + |\sqrt{x+1} - 1|$

$= |\sqrt{x+1} + 1| + |1 - \sqrt{x+1}| \ge$

$\ge |\sqrt{x+1} + 1 + 1 - \sqrt{x+1}| = 2$

$y_{Min} = 2 \Leftrightarrow (\sqrt{x+1} + 1)(1 - \sqrt{x+1}) \ge 0$

Vì $\sqrt{x+1} + 1 > 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{x+1} \ge 0 \Leftrightarrow x \le 0$

Vậy $y_{\text{Min}} = 2$ khi $-1 \le x \le 0$.

Bài 5: a và b là 2 số cho trước với $a < b$ và x là 1 số bất kì a. Tìm Min của

$$S = |x - a| + x - b|$$

b. $a_1, a_2, ...a_n$ là n số cho trước với $a_1 \le a_2 \le ...a_n$ và x là một số bất kì.

Tìm Min của

$$S_n = |x - a_1| + |x - a_2 + ... + |x - a_n|$$

• *Hướng dẫn*

a) Ta phân biệt 3 trường hợp :

+ Nếu x - a ta có

$$S = a - x + b - x = b - a + 2(a - x) > b - a$$

vì $a - x > 0$

+ Nếu $a \le x \le b$ ta có

$$S = x - a + b - x = b - a$$

+ Nếu $x > b$ ta có

$S = b - a + 2(x - b) > b - a$ (vì $x - b > 0$)

Vậy $S_{Min} = b - a$ *khi* $a \le x \le b$

b) Ta chia làm 2 trường hợp :

* $n = 2p$ (chẵn); $p \in N$

Ta viết

$S_{2p} = [|x-a_1| + |x - a_{wp}|] + [|x - a_2| + + |x - a_{2p-1}|] + ... + [|x - a_p| + |x - a_{p+1}|]$

Theo (a), ta có

$|x - a_1| + |x - a_{2p}|$ Min $= a_{2p} - a_1$ khi $a_1 \le x \le a_{2p}$

$|x - a_2| + |x - a_{2p-1}|$ Min $= a_{2p-1} - a_2$ khi $a_2 \le x \le a_{2p-1}$

. . . .

$|x - a_p| + |x - a_{p+1}|$ Min $= a_{p+1} - a_p$ khi $a_p \le x \le a_{p+1}$

Vậy khi $x \in [a_p\ ;\ a_{p+1}] \subset ... \subset a_{2;}a_{2p-1}] \subset [a_{1;}\ a_{2p}]$ thì

$\text{Min}S_{2p} = (a_{2p} - a_1) + (a_{2p-1} - a_2) + ... + + (a_{p+1} - a_p)$ hay

$\text{Min}S_{2p} = (a_{2p} + a_{2p-1} + ... + a_{p+1}) - - (a_1 + a_2 + ... + a_p)$

* $n = 2p + 1$ (lẻ)

Tương tự như trên ta viết

$S_{2p+1} = [|x - a_1| + |x - a_{2p+1}|] + + [|x - a_2| + |x - a_{2p}|] + ... + + ... + [|x - a_p| + x - a_{p+2}|] + |x - a_{p+1}|$

và $S_{2p+1} = (a_{p+1} + a_{2p} + ... + a_{p+2}) - - (a_1 + a_2 + ... + a_p)$

khi $x = a_{p+1}$ (a_{p+1} là số hạng đứng giữa)

Người viết bài này hy vọng làm sáng tỏ một phần nào những thắc mắc về các bài toán cực trị vốn rất phong phú và phức tạp.

Bài T1/243: Chứng minh rằng tồn tại một số có 1997 chữ số gồm toàn chữ số 1 và 2 sao cho số đó chia hết cho 2^{1997}.

Lời giải (của Nguyễn Huy Sơn, 8A, PT Nguyễn Trãi, **Hải Dương** và nhiều bạn). Ta chứng minh bài toán tổng quát :

"Chứng minh rằng tồn tại một số có n chữ số chia hết cho 2^n và số này chỉ viết bởi các chữ số 1 và 2".

Dùng phương pháp quy nạp toán học:

* Với $n = 1$ ta có số thỏa mãn là $2 \vdots 2^1$

* Giả sử kết quả đúng với $n = K$, tức là có số A gồm k chữ số gồm toàn chữ số 1 và 2 mà $A \vdots 2^k$.

- Nếu $A \vdots 2^{k+1}$ thì $2.10^k + A \vdots 2^{k+1}$ nên chỉ cần viết thêm chữ số 2 vào trước số A, ta được số $\overline{2A}$ gồm k+1 chữ số chỉ gồm các chữ số 1 và 2.

- Nếu $A \not\vdots 2^{k+1}$ thì $10^k + A \vdots 2^{k+1}$ nên chỉ cần viết thêm chữ số 1 vào trước số A, ta được số $1A$ thỏa mãn.

Tóm lại kết quả cũng đúng với $n = k + 1$.

Vậy bài toán đúng với mọi số n nguyên dương.

Nhận xét: 1) Hầu hết các bạn đều phát biểu và giải quyết bài toán tổng quát.

2) Các bạn có lời giải tốt và trình bày mạch lạc hơn là: *Lê Nguyễn Anh Tuấn*, 7^{1CT}, Hồng Bàng, Q5 **(TP Hồ Chí Minh)**; *Đào Văn Nam*, 8A, Sao Khuê, Thường Tín **(Hà Tây)**; *Huỳnh Minh Việt*, 9A, Nguyễn Hiền, Điện Bàn (**Quảng Nam**); *Lưu Đức Thi*, 8A, NK Hoằng Hóa **(Thanh Hóa)**; *Hoàng Lê Lợi*, 9A, Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa (**Hà Nội**); *Đào Duy Hảo*, 8B, bán công chất lượng cao Việt Trì **(Phú Thọ)**. *Trần Xuân Hải Hưng*, 8A, Phan Chu Trinh (**Buôn Mê Thuột**); *Nguyễn Hoàng Sáo*, 9B, Đặng Thai Mai (**Nghệ An**); *Lương Thế Nhân*, 9A, Chuyên Bạc Liêu (**Bạc Liêu**).

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T2/243: Giải phương trình

$\sqrt{4x + 5x + 1} - 2\sqrt{x^2 - x + 1} = 9x - 3$

Lời giải: của *Dương Mạnh Hồng*, 9A, THCS Thị trấn Hiệp Hòa, **Bắc Giang**. Ta có:

$\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 2\sqrt{x^2 - x + 1} = 9x - 3 (1)$

$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + 5x + 1} - \sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 9x - 3 \quad (2)$

Điều kiện để bài toán có nghĩa: $(x \le -1, x \ge -\frac{1}{4})$

Đặt $a = \sqrt{4x^2 + 5x + 1} \quad (a \ge 0)$

$b = \sqrt{4x^2 - 4x + 4} \quad (b \ge 0)$

Ta có: $a^2 - b^2 = 9x - 3$

Kết hợp với (2): $a - b = a^2 - b^2$

$\Leftrightarrow (a - b)(a + b - 1) = 0$

Trường hợp $a - b = 0$ hay

$\sqrt{4x^2 + 5x + 1} = 4x^2 - 4x + 4$

$\Rightarrow x = \frac{1}{3}$

- Trường hợp $a + b - 1 = 0$ hay $a + b = 1$

Kết hợp với (2) : $a - b = 9x - 3$

ta có: $2a = 9x - 2$

hay $4x^2 + 5x + 1 = \frac{81}{4}x^2 - 9x + 1$

$\Leftrightarrow x(65x - 56) = 0$

Vậy $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{56}{65} \end{array}\right.$

Thử thay $x = \frac{1}{3}, x = 0, x = \frac{56}{65}$ vào (1) ta thấy chỉ có $x = \frac{1}{3}$ và $x = \frac{56}{65}$ là nghiệm đúng (1) Vậy phương trình có các nghiệm là $x = \frac{1}{3}$ và $x = \frac{56}{65}$.

Nhận xét : 1. Đa số các bạn gửi lời giải đến đều thiếu nghiệm $x = \frac{56}{65}$ hoặc thừa nghiệm $x = 0$, và thiếu điều kiện để bài toán có nghĩa. 2. Các bạn sau đây có lời giải tốt: *Phạm Lâm Quý*, 9A, C Toán, TĐ. Uông Bí, **Quảng Ninh**. *Lã Thành Công*, 9A, PTCS Dân lập Châu Phong, Mê Linh, **Vĩnh Phúc**. *Nguyễn Mạnh Thắng*, 9A, C Thạch Thất, **Hà Tây**. *Nguyễn Đình An*, $9A_1$, TGCS Giảng Võ, **Hà Nội**. *Phạm Đức Hiệp*, 8T, Chu Văn An; *Phan Phương Mai*, 9CT; *Thái Văn Việt*, $9A_1$, Trần Phú; *Nguyễn Hoàng Long*, $9A_1$, THCS Hồng Bàng, **Hải Phòng**. *Cáo Văn Duẩn*, TT CLC Giao Thủy; *Vũ Thị Hiền*, $9A_1$, Phùng Chí Kiên, **Nam Định**. *Lại Đức Phương*, 9A, Nguyễn Khuyến, Bình Lục; *Nguyễn Thanh Nga*, 9B, Thị xã Phủ Lý, **Hà Nam**. *Trần Thái Hoàng*, 9A, Yên Định; *Nguyễn Nam Giang*, 9B Nghi Trung, Nghi Lộc, **Nghệ An**; *Nguyễn Bá Thông*, $10A_1$, Minh Khai, Đức Thọ; *Hà Linh*, 8/1, Lê Văn Thiêm, Thị xã, **Hà Tĩnh**.

TỐ NGUYÊN

Bài T3/243: Cho một hình lục giác đều. Tại mỗi đỉnh của lục giác có một con chim đậu. Vào cùng một lúc, tất cả sáu con chim đều bay lên khỏi vị trí của mình rồi sau đó, cũng vào cùng một lúc, chúng lại đậu xuống các đỉnh của lục giác (mỗi đỉnh chỉ có đúng một con chim đậu; các con chim không nhất thiết đậu xuống vị trí cũ của mình). Chứng minh rằng, tồn tại ba con chim sao cho tam giác tạo bởi các đỉnh mà chúng đậu trước khi bay lên bằng tam giác tạo bởi các đỉnh mà chúng đậu xuống.

Lời giải (Theo *Đào Hải Long*, 8A THCS Cầu Diễn - Từ Liêm - **Hà Nội**; *Nguyễn Mạnh Thắng*, 9A - THCS Chuyên Thạch Thất, *Lưu Tiến Đức*, 9B THCS Nguyễn Thượng Hiền - ứng Hòa - **Hà Tây** và *Thu Phương*, $9T_3$ PTNK Vĩnh Tường - **Vĩnh Phúc**): Gọi O là tâm của lục giác đều đã cho. Dễ thấy, hai tam giác, mà mỗi tam giác có 2 đỉnh đối xứng với nhau qua O, là hai tam giác bằng nhau (1). Xét hai con chim mà trước khi bay lên chúng đại tại 2 đỉnh, gọi là A, B, đối xứng với nhau qua O. Xảy ra:

• *Trường hợp 1:* Sau khi đậu xuống ha con chim đó đậu tại 2 đỉnh đối xứng với nhau qua O. Chọn con chim mà trước khi bay lên nó đậu tại đỉnh C nào đó ($C \neq A$, $C \neq B$), ta sẽ có, theo (1), ba con chim thỏa mãn yêu cầu đề bài.

• *Trường hợp 2:* Sau khi đậu xuống hai con chim nói trên đậu tại 2 đỉnh gọi là A', B' không đối xứng với nhau qua O. Lúc này, chọn con thứ ba là con chim, mà sau khi đậu xuống nó đậu tại đỉnh C' đối xứng với A' (hoặc B') qua O, ta sẽ có, theo (1), ba con chim thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Nhận xét: 1. Một số bạn, bằng phương pháp sử dụng nguyên lí Dirichlet, cũng cho bài toán lời giải ngắn gọn.

2. Trong tổng số 33 bạn gửi lời giải tới T.S., có 9 bạn cho lời giải sai. 3. Ngoài các bạn đã nêu tên ở trên, các bạn sau có lời giải tốt: **TP Hồ Chí Minh**: *Ngô Trung Hiếu, Huỳnh Công Thành* (Trường Chuyên Nguyễn Du, Quận I). **Hà Tĩnh**: *Hà Linh* (8/1 Lê Văn Thiêm). **Hà Nội**: *Nguyễn Hoài Anh* (8A Trường Chất lượng cao Q. Cầu Giấy. **Hải Phòng:** *Phạm Đức Hiệp* (8T THCS Chu Văn An).

NGUYỄN KHẮC MINH

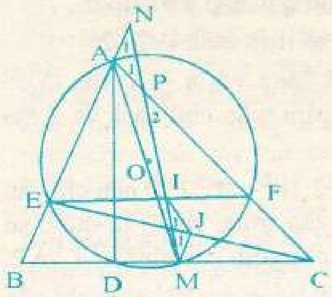
Bài T4/243: Cho tam giác ABC, phân giác trong AD và trung tuyến AM. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM cắt AB, AC tại các điểm tương ứng E, F. Gọi I là trung điểm của EF và N, P lần lượt là giao điểm của đường thẳng MI với các đường thẳng AB, AC. Tam giác ANP là tam giác gì, tại sao ?

Lời giải: Ta có : $BE.BA = BD.BM$ $(= OB^2 - R^2)$

Suy ra $BE = \dfrac{BD.BM}{BA}$ (1)

Tương tự $CF = \dfrac{CD.CM}{CA}$ (2)

Vì AD là phân giác nên $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$(3)



Do (1), (2), (3) nên $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{DC}{AC}$. Từ đó $BE = CF$. Gọi J là trung điểm EC $\Rightarrow MJ \parallel BE$. Suy ra $\hat{M}_1 = \hat{N}_1$

$IJ \parallel CF$ nên $\hat{I}_1 = \hat{P}_2 = \hat{P}_1$

Mặt khác $IJ = \dfrac{1}{2} FC = \dfrac{1}{2} BE = JM$ nên $\hat{I}_1 = \hat{M}_1$.

Vậy $\hat{N}_1 = \hat{P}_1$ tức ΔANP cân tại A.

Nhận xét

Giải tốt bài này có các bạn:

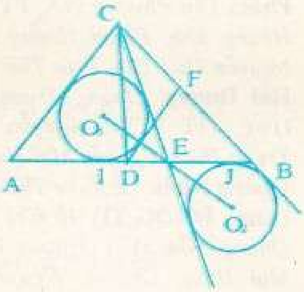
Phú Thọ: *Trần Ngọc Vinh*, 9A Bán công CLC. **Thái Nguyên:** *Nguyễn Đức Hạnh, Mai Nguyên Dũng*, 9A1 Chu Văn An. **Bắc Giang:** *Dương Mạnh Hồng*, 9A TT Hiệp Hòa; *Nguyễn Thạc Hiếu*, 8A CLC Tiên Sơn. **Bắc Ninh:** *Phùng Văn Thủy*, 9A CLC Gia Lương. **Vĩnh Phúc:** *Trịnh Minh Đức*, 9A THCS Vĩnh Yên; *Hà Minh Thế*, 9B THCS Yên Lạc; *Phạm Quang Nhật Minh*, 8A1 THCS Hai Bà Trưng, Mê Linh. **Hà Tây:** *Nguyễn Công Hảo*, 8D Trần Đăng Ninh, Hà Đông; *Nguyễn Mạnh Thắng*, 9A Chuyên Thạch Thất; *Lưu Tiến Đức*, 9B Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa. **Hải Phòng:** *Vũ Ngọc Minh*, 8T Chu Văn An; *Lê Văn Thanh*, 9A1 Ngô Quyền; *Nguyễn Hoàng Long*, 9A1 Hồng Bàng. **Hải Dương:** *Hoàng Thị Nguyệt ánh*, 9A PTTH Nguyễn Trãi; *Phạm Mạnh Tuấn* 8B Chu Văn An; *Tô Minh Hoàng*, 9T PTNK tỉnh. **Hà Nội:** *Nguyễn Thành Trung*, 9M Marie Curie; *Trần Minh Quân*, 9H Trưng Vương; *Trần Quang Huy*, 9C Hà Nội - Amsterdam; *Phạm Thế Hùng*, 9A Lê Quý Đôn; *Đỗ Trường Giang*, 9A THCS Đông Anh. **Nam Định:** *Trần Đức Hiệu*, 9I Hàn Thuyên; *Trần Đức Thịnh*, 9A6;

Nguyễn Khánh An, 9A6 Trần Đăng Ninh, Nam Định. **Thanh Hóa:** *Nguyễn Xuân Hòa*, 9A Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; *Vũ Văn Hưng*, 8T NK Bỉm Sơn; *Lê Anh Sơn*, 9C CLC Thành phố. **Nghệ An:** *Phan Thanh Minh*, 9B Đặng Thai Mai, Vinh; *Phạm Công Phong*, 9B Nghi Trung, Nghi Lộc; *Chu Việt Tuấn*, $10A_1$ Phan Bội Châu. **Hà Tĩnh:** *Phan Đăng Khoa*, 9A CLC Đức Thọ. **Thừa Thiên - Huế:** *Đinh Trung Hiếu*, 9A Phú Bài, Hương Thủy. **Quảng Ngãi:** *Hà Huy Đạt*, 8J, Trần Hưng Đạo; *Trần Văn Triều*, *Dương Lê Vũ Thiên*, 9A Chuyên Lê Khiết. **Bình Định:** *Nguyễn Lương Hoàng*, 9A Quốc học Quy Nhơn. **Đắc Lắc:** *Ngô Quốc Anh*, 9C Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/243. Cho tam giác vuông ABC ($C = 90^o$), phân giác trong $CD = \sqrt{2}$. Trên cạnh huyền AB lấy điểm E sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác CAE bằng bán kính đường tròn bàng tiếp góc C của tam giác CEB. Tính bán kính các đường tròn đó.

Lời giải. Hạ đường cao DF của $ADCB$, ta có $DF // AC$ và ΔCDF vuông cân nên $DF = FC = CD\sqrt{2} = 1$. áp dụng định lí Thales, ta có $DF : AC = BF : BC$ hay $1 : b = (a - 1) : a$, suy ra $ab = a + b (1)$. Gọi (O_1), (O_2) tương ứng là đường tròn nội tiếp ΔACE, đường tròn bàng tiếp góc C của ΔBCE; r là bán kính của chúng; I, J là các tiếp điểm tương ứng của chúng với AB. Ta có (O_1), (O_2) đối xứng qua E nên $EI = FI$. Từ tính chất của các đường tròn đó, ta có: $2EI = AE + CE - b$; $2EJ = EB + a - CE$. Suy ra $AE + CE - b = EB + a - CE$ hay $a + b = 2EC + AE - EB$ (2). Mặt khác, ta lại có : $S_{ABC} = S_{ACE} + S_{BCE}$ hay $ab = r(b + AE + CE) + r(a + CE - EB) = r((a + b) + (2EC + AE - BE))$ (3). Kết hợp (1), (2), (3), ta có $a + b = r(2(a + b))$. Vậy $r = 0,5$.



Nhận xét.

Chỉ có 29 bạn giải bài này, tất cả đều giải đúng nhưng phần lớn trình bày còn rườm rà. Lời giải tốt gồm có: **Bình Định:** *Phan Thanh Gian* (9A THCS Hòa Thắng, Tuy Phước). **Hải Phòng:** *Triệu Tuấn Đạt* (8T THCS Chu Văn An). **Hà Tây:** *Lưu Tiến Đức* (9B THCS Nguyễn Thượng Hiền, ứng Hòa). **Hà Nội:** *Trần Quang Huy* (9C Hà Nội - Amsterdam). **Thừa Thiên - Huế:** *Phạm Nguyên Quý* (9^1 Nguyễn Tri Phương). **TP Hồ Chí Minh:** *Huỳnh Công Thành* (9_1 Nguyễn Du, Q.1). **Quảng Nam:** *Huỳnh Minh Việt* (9A Nguyễn Hiền, Điện Bàn).

ĐẶNG VIỄN

Bài T6/243 : Cho $2p$ số thực $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$. Giả sử rằng $\sum_{n=1}^{n} a_i \neq 0$, $\sum_{i=1}^{n} b_i \neq 0$. Chứng minh rằng ta luôn có bất đẳng thức:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)} \geq \frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \dfrac{a_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i} + \dfrac{b_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} = \dfrac{2}{n} & "i = \overline{1, n} \\ \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) > 0 & (*) \end{cases}$$

Lời giải. (của nhiều bạn): Đặt $a = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $b = \sum_{i=1}^{n} b_i$, $c = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$ và $d = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki cho $2n$ số $a_1, a_2, ..., a_n; 2b - nb_1, 2b - nb_2, ..., 2b - nb_n$ ta được:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} a_i(2b - nb_i)\right]^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} (2b - nb_i)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(2ab - n\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq$$

$$\leq c.(4nb^2 - 4nb^2 + n^2 d) = n^2 cd$$

$$\Leftrightarrow \left| 2ab - n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \leq n\sqrt{cd}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{n} ab - \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{cd}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)} \geq \frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \text{ (đpcm).}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$2ab - n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq 0$$

$$\frac{2b-nb_1}{a_1} = \frac{2b-nb_2}{a_2} = \ldots = \frac{2b-nb_n}{a_n}$$

$$2ab - n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2b-nb_i}{a_i} = \frac{nb}{a} \quad \forall i=\overline{1,n} \ (1)$$

Từ (1) có: $2ba_1 - na_ib_i = \dfrac{nb}{a}a_i^2$

$$\Rightarrow 2ab - \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \frac{nb}{a}c$$

Do đó (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{nbc}{a} \geq 0 \\ \dfrac{2b-nb_i}{a_i} = \dfrac{nb}{a} \quad \forall i=\overline{1,n} \end{cases}$

$ab > 0$ (do $nc > 0$ và $ab \neq 0$)

$$\Leftrightarrow \frac{2}{n} - \frac{b_i}{b} = \frac{a_i}{a} \forall i=\overline{1,n}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) > 0$$

hay

$$\frac{a_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i} + \frac{b_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} = \frac{2}{n} \quad \forall i=\overline{1,n}.$$

Nhận xét: 1. Do sơ suất nên trong đề bài đã in thiếu điều kiện (*). Một số bạn, trong lời giải của mình, đã lưu ý T.S. về thiếu sót đó.

2. Trong tổng số 132 bạn gửi Lời giải tới T.S. có 48 bạn có Lời giải sai do đã cho rằng :"*không mất tổng quát có thể giả sử $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ và $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$*"(!) Việc giả sử như trên là không thể được do $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ bị phụ thuộc vào sự so sánh giữa các số a_i cũng như sự so sánh giữa các số b_i. Theo đó $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ *không đạt giá trị bé nhất khi $\{a_i\}_{i=1}^n$ và $\{b_i\}_{i=1}^n$ là các dãy "cùng chiều"*! (Để không mất tổng quát, ta chỉ có thể giả sử $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ (hoặc $b_1 \leq b_2 \leq \ldots <= b_n$) mà thôi~).

3. Một số ít bạn đã sử dụng các kiến thức về véctơ trong không gian R^n để giải bài toán. Tuy nhiên, do chưa nắm vững các kiến thức đó nên các bạn đã cho lời giải thiếu chính xác.

4. Các bạn sau đây có lời giải tốt hơn cả: **Đăklăc:** *Lê Anh Dũng* (12T Trường Nguyễn Du). **TP Hồ Chí Minh:** *Vũ Đức Phú* (12CT PTTH Lê Hồng Phong). **Khánh Hòa:** *Trần Tuấn Anh* (10 Toán Trường Lê Quý Đôn - Nha Trang). **Quảng Trị:** *Văn Thị Nhiên* (11 Toán PTTH Lê Quý Đôn). **Thanh Hóa:** *Vũ Đức Nghĩa* (9B THCS Đông Cương), *Lê Đức Hân* (11T PTTH Lam Sơn). **Nam Định:** *Vũ Việt Tài* (10 Toán PTTH Lê Hồng Phong). **Hà Tây:** *Lưu Tiến Đức* (9B THCS Nguyễn Thượng Hiền - Ứng Hòa), *Nguyễn Mạnh Hà* (11A PTTH Nguyễn Huệ). **Hà Nội:** *Lê Quang Tôn* ($11A_1$ PTTH Yên Hòa), *Hoàng Vân* ($12C_2$ PTTH Đống Đa), *Nguyễn Đức Mạnh* (12A PTTH Cổ Loa). **Vĩnh Phúc:** *Thu Phương* ($9A_3$ PTNK Vĩnh Tường); *Nguyễn Hoàng Anh, Phạm Hoàng Hà, Nguyễn Trung Hiếu, Nguyễn Duy Tân, Cao Thế Thụ* (11A PTTH chuyên). **Hải Dương:** *Hoàng Trường Gian, Trần Đại Nghĩa* (10T, 11T PTTH Nguyễn Trãi). **Hải Phòng:** *Trần Trung Hiếu, Nguyễn Mai Hưng* (10T PTTH Trần Phú). **Quảng Ninh:** *Lê Xuân Thành* ($12A_1$ PTTH chuyên Hạ Long). **ĐHQG TP Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Lê Lực, Lê Quang Nẫm* (12T Trường PTNK). **ĐHQG Hà Nội:** *Mai Hồng Chương, Nguyễn Trung Lập, Đinh Hữu Toàn, Hoàng Tùng, Nguyễn Phong Thiên, Phan Tuấn Sơn* (10A Toán, 10B Toán, 11A Toán Khối PTCT - Tin ĐHKHTN).

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T7/243 Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x^{1994} + y^{1994} = 4691^{4691}(x+y)$$

Lời giải: Trước hết ta chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề: Nếu $p = 4k+3$ $k \in$ N) là số nguyên tố và $x^2 + y^2 \vdots p$ thì $x \vdots p$ và $y \vdots p$.

Thật vậy, nếu có một số chia hết cho p thì số còn lại cũng chia hết cho p. Giả sử $x \not\vdots p$ và $y \not\vdots p$. Khi đó $x^{p-1} \equiv y^{p-1} \equiv 1$ (theo định lí Fecma). Mặt khác ta có $x^2 \equiv -y^2 >$ (mod p) $\rightarrow$ $x^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} y^{p-1}$(mod$p$) $\rightarrow (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$ (mod$p$)

Mà $\frac{p-1}{2}$ lẻ do đó $-1 \equiv 1 \pmod{p}$. Điều này không xảy ra. Bây giờ ta chứng minh phương trình vô nghiệm. Giả sử trái lại nhận xét rằng 4691 là số nguyên tố dạng 4k + 3. Do đó vì $(x^{997})^2 + (y^{997})^2 \vdots 4691$ nên theo bổ đề ta có $x^{997} \vdots 4692$, $y^{997} \mid 4691 \to x = 4691x_1$, $y = 4691y_1$. Thay vào ta được

$$4691^{1994}(x_1^{1994} + y_1^{1994}) = 4691^{4692}(x_1 + y_1)$$

$$\to x_1^{1994} + y_1^{1994} = 4691^{2698}(x_1 + y_1).$$

Lại áp dụng bổ đề ta có $x_1 = 4691x_2$, $y_2 = 4691y_2$. Thay vào ta dẫn đến $x_2^{1994} + y_2^{1994} = 4691^{705}(x_2 + y_2)$. áp dụng bổ đề ta lại có $x_2 = 4691x_3$, $y_2 = 4691y_3$ và $4691^{1288}(x_3^{1994} + y_3^{1994}) = x_3 + y_3$. Đây là một điều vô lí.

Nhận xét. Nhiều bạn giải đúng bài toán này. Tuyệt đại đa số các bạn có cách giải như đã nêu ở trên. Lời giải tốt thuộc về các bạn như: *Dương Ngọc Sơn*, 10 Toán, PTTH Lương Văn Tụy, **Ninh Bình**. *Lê Văn Hiệp*, 10T, Nguyễn Trãi, **Hải Dương**. *Trần Nam Dũng*, 12 CT Phan Bội Châu, **Nghệ An**. *Đặng Hoàng Việt Hà*, 12A, Ngô Sỹ Liên, **Bắc Giang**. *Võ Sỹ Nam*, 11A, Minh Khai, **Hà Tĩnh**. *Lưu Ngọc Tuân*, 9C, Năng khiếu Thành phố, **Thanh Hóa**. *Lương Thế Nhân*, 9A, **Bạc Liêu**. *Đào Thị Mỹ Châu*, 10T, chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**. *Trần Quang Vinh*, $9A_2$, Ý Yên, **Nam Định**. *Hoàng Tùng*, 10A, CT, ĐHKHTN, **Hà Nội**. *Lê Anh Dũng*, 12T, Nguyễn Du, **Đắclắc**. *Nguyễn Công Hoàn*, 10A, Nguyễn Huệ, **Hà Tây**. *Nguyễn Minh Công*, 11T, Hà Nội - Amsterdam, **Hà Nội**. *Trần Văn Hà*, 10T, Trần Phú, **Hải Phòng**. *Nguyễn Thị Minh Thoa*, 10A, Hóa, ĐHKHTN, **Hà Nội**.

Bài T8/243 Chứng minh.

$$4\,\mathrm{arc}\,tg\frac{1}{5} + \mathrm{arc}\,tg2 + \mathrm{arc}\,tg3 - \mathrm{arc}\,tg\frac{1}{239} = \pi$$

Lời giải (của đa số các bạn)

Đặt $4arctg\frac{1}{5} + arctg2 = \alpha$;

$$arctg3 - arctg\frac{1}{239} = \beta.$$

Khi đó:

$$tg(4arctg\frac{1}{5}) = \frac{2tg(2arctg\frac{1}{5})}{1 - tg^2(2arctg\frac{1}{5})} =$$

$$= \frac{2 \, . \, 2/5}{1 - \left[2/\frac{5}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}\right]^2} = \frac{120}{119}$$

$$tg\alpha = \frac{tg(4arctg\frac{1}{5}) + tg(arctg2)}{1 - tg(4arctg\frac{1}{5}) \, . \, tg(arctg2)} = -\frac{358}{121}$$

$$tg\,\beta = \frac{tg(arctg3) - tg(arctg\frac{1}{239})}{1 + tg(arctg3)\, tg(arctg\frac{1}{239})} = \frac{358}{121}.$$

Vậy $tg\alpha = -tg\beta$ hay $\alpha + \beta = k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Chú ý rằng:

$$arctg\frac{1}{5},\ arctg2,\ arctg3,\ arctg\frac{1}{239} \in (0, \pi/2)$$

$$0 < arctg\frac{1}{5} < arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

Do vậy $0 < \alpha + \beta < 4\,.\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{3} < 2\pi.$

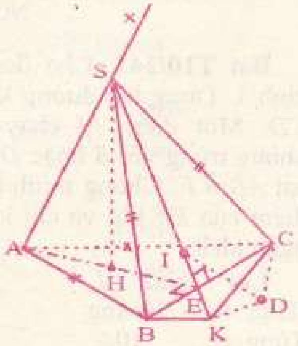
nên $0 < k\pi \; 2p \Leftrightarrow 0 < k < 2$.

Vì $k \in \mathbf{Z}$ nên $k = 1$ và do đó $\alpha + \beta = \pi$ (đpcm).

Nhận xét: Tòa soạn nhận được rất nhiều bài giải và các bạn đều giải theo đề bài tiếng Anh. Tòa soạn thành thật xin lỗi đã in sai phần đề bài bằng tiếng Việt.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/243. Cho tam giác ABC cân ở A. Dựng tia Ax sao cho các góc nhị diện $\hat{}AB$ và $\hat{}AC$ của tam diện $A(BCx)$ bằng nhau. S là một điểm chuyển động trên tia Ax. Tìm quỹ tích tâm đường tròn nội tiếp tam giác SBC.



Lời giải. Đối với góc tam diện $A(BCx)$, vì $\widehat{AB} = \widehat{AC}$ nên ta có: $\widehat{BAx} = \widehat{CAx}$ và do đó, cạnh Ax nằm trong mặt phẳng trung trực T[BC] của đoạn thẳng BC. Nói một cách khác, T[BC] là mặt phẳng (EAx), trong đó E là trung điểm của BC. Cũng vì vậy, gọi $H = SH \perp$ mp(ABC) thì $H \in (AE)$ là trung trực của BC và do đó: $HB = HC$, suy ra: $SB = SC$ và $SE \perp BC = E$. Dựng đường thẳng $Cy \perp$ mp(CAx) và gọi $D = Cy \cap (EAx)$; vì (CAx) và (EAx) cố định nên D cố định khi S

chạy trên tia Ax. Gọi $K = DK \perp mp(BCS)$, vì $(EAx) \perp (BCS) = (SE)$ và $D \in (EAx)$ nên $K = DK \perp (SE)$. Lại vì $DC \perp mp(SAC) = C$ nên $DC \perp SC$ và do đó $KC \perp SC$ (định lí ba đường vuông góc). Vì lí do đối xứng nên $KB \perp SB = B$.

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác cân SBC, theo một kết quả đã biết trong hình học phẳng thì: $KI = KB = KC$. Lại vì $DK \perp mp(BCS)$ và $KI = KC$ nên ta có: $DI = DC$ (không đổi). Tam giác SBC cân ở S nên $I \in SE$ và do đó $I \in mp(EAx) = T[BC]$ cố định. Trong mặt phẳng trung trực của BC, I cách điểm D cố định một khoảng không đổi DC, nên I nằm trên đường tròn v $(D, p = DC)$, tâm D, bán kính DC. Tuy nhiên, vì S chỉ chuyển động trên tia $[Ax)$ nên dễ thấy rằng I chuyển động trên cung $'I_oI_1$ của đường tròn $v(D, DC)$, trong đó I_o là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC (cân ở A) và I_1 là điểm trên đường tròn đó sao cho tia $[EI_1)$ // tia $[Ax)$.

Phần đảo dành cho các bạn tự chứng minh.

Kết luận: Quỹ tích của I là cung $'I_oI_1 \setminus \{I_1\}$ (không kể điểm I_1) của đường tròn $v(D, DC)$ trong mặt phẳng trung trực của BC.

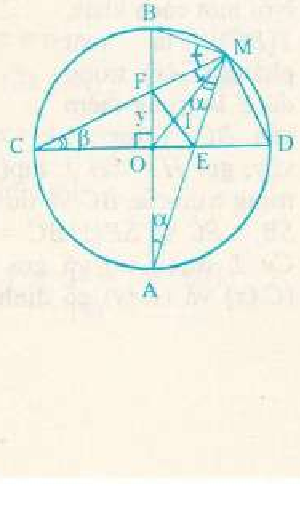
Nhận xét. 1) Một số bạn sử dụng phương pháp tọa độ, cũng cho lời giải đúng nhưng tính toán không gọn.

2) Đáng tiếc có một số bạn giải sai bài toán này hoặc vì không giới hạn được quỹ tích (quỹ tích là cả đường tròn $v(D, DC)$ trong mặt phẳng $T[DB]$) hoặc thậm chí kết luận quỹ tích của I là cả mặt phẳng (D, Ax) !!!.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt hơn cả: *Dương Việt Hùng*, 12A, PTTH Vân Nội, Đông Anh, **Hà Nội** *Trần Trung Hiếu*, lớp 10, PTNK Trần Phú, **Hải Phòng** và *Bùi Văn Bình*, 11T, Lam Sơn, **Thanh Hóa**.

NGUYỄN ĐANG PHÁT

Bài T10/243: Cho đường tròn tâm O, bán kính 1. Dựng hai đường kính vuông góc AB và CD. Một điểm M chạy trên cung nhỏ BD, không trùng với B hoặc D; MA cắt CD ở E, MC cắt AB ở F. Chứng minh rằng OM đi qua trung điểm của EF khi và chỉ khi đoạn EF có độ dài ngắn nhất.



Lời giải *1.* (Dựa theo Hoàng Tùng, 10A, PTCT, Đại học khoa học tự nhiên - ĐHQG Hà Nội).

a) Đặt: $\widehat{MAB} = \alpha$, $\widehat{MCD} = \beta$ và $OE = x$, $OF = y$; ta tìm hệ thức ràng buộc giữa x và y khi M chạy trên cung nhỏ $'BD$. Ta có: $\widehat{AMC} = \widehat{CMB} (= \frac{\pi}{4})$ và MF là phân giác góc vuông $\widehat{AMB}$, do đó: $\frac{FB}{FA} = \frac{MB}{MA} = tg\alpha$. Từ đó ta được: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ và : $\frac{1-y}{1+y} = x \Rightarrow$
$xy + x + y = 1$ $(0 < x, y < 1)$

Lại vì (B.Đ.T. Côsi): $xy \le \frac{x^2+y^2}{2}$ và $x + y \le \sqrt{2(x^2+y^2)}$ nên ta được (vì $x^2 + y^2 = EF^2$): $\frac{1}{2}EF^2 + EF\sqrt{2} \ge xy + x + y = 1$, hay là:
$EF^2 + 2EF\sqrt{2} - 2 \ge 0 \Rightarrow (EF + \sqrt{2})^2 \ge 4 = 2^2$
$EF \ge 2 - \sqrt{2}$

Vậy: EF có độ dài ngắn nhất bằng $2 - \sqrt{2} \Leftrightarrow x = y = \sqrt{2} - 1$;(1)

b) Gọi $I = OM \cap EF$; thế thì dễ thấy rằng:

$\overline{IE} = -\overline{IF} \Leftrightarrow s(\overset{\Delta}{OME}) = s(\overset{\Delta}{OMF})$
$\Leftrightarrow OM.OE\sin 2\beta = OM.OF\sin 2\alpha$
$\Leftrightarrow x\sin\beta\cos\beta = y\sin\alpha\cos\alpha$
$\Leftrightarrow x\frac{OF.OC}{CF^2} = y\frac{OE.OA}{AE^2} \Leftrightarrow \frac{xy}{CF^2} = \frac{xy}{AE^2}$;

Do đó:
$\overline{EI} = \overline{IF} \Leftrightarrow CF^2 = AE^2 \Leftrightarrow OF^2 = OE^2 \Leftrightarrow x = y$;   (2)

Từ (1) và (2) ta được đ.p.c.m.

Lời giải 2. (Dựa theo Lê Huy Bình, 11T, PTTH Lam Sơn, Thanh Hóa và Phan Thị Thu Hằng, 11CT, PTTH Lương Thế Vinh, Đồng Nai).

a) Cũng như lời giải 1, đặt $\widehat{MAB} = \alpha$, $MCD = \beta$ thì $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$. Ta có:

$$EF^2 = OE^2 + OF^2 = tg^2\alpha + tg^2\beta \ge \frac{1}{2}(tg\alpha + tg\beta)^2$$

Do đó: $EF = \sqrt{tg^2\alpha + tg^2\beta} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}(tg\alpha + tg\beta)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{1}{2\cos\alpha\cos\beta}$$

$$= \frac{1}{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos(2\alpha - \frac{\pi}{4})} \ge$$

$$\ge \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} + 1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = 2 - \sqrt{2}$$

Vậy ta được:

$$EF_{\min} = 2 - \sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ 2\alpha = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \frac{\pi}{8};$$

b) $I = OM \cap EF$; thế thì: $\overline{EI} = \overline{IF} \Leftrightarrow IE = IO = IF$. Lại có: $IE = IO \Leftrightarrow IOE = IEO \Leftrightarrow 2\beta = \beta + DFE \Leftrightarrow ED = EF$. Tương tự: $IO = IF \Leftrightarrow FB = FE$. Vậy ta được:

$\overline{EI} = \overline{IF} \Leftrightarrow EF = BF = EF \Rightarrow OE = OF \Rightarrow$ tức là: $x = y$.

Đảo lại, $x = y \Rightarrow AE = CF \Rightarrow EF \,//\, BD \,//\, AC \Rightarrow I \in OM$. Từ đó, ta đi đến kết luận: OM đi qua trung điểm của $[EF] \Leftrightarrow x = y$; (2) Từ (1') và (2'), ta được đ.p.c.m.

Lời giải 3. Có thể sử dụng phương pháp tọa độ để giải bài toán này. Chẳng hạn, có thể cho lời giải phần a) của bài toán như sau:

- Chọn tâm O đường tròn đơn vị làm gốc hệ trục tọa độ Đề các vuông góc, nhận CD làm trục hoành $x'Ox$ và AB làm trục tung, với $D(1,0)$ và $B(0,1)$. Trong hê trục tọa độ này, ta có: $M(\sin 2\alpha, \sin 2\beta)$, $E(\mathrm{tg}\alpha, 0)$, $F(0, \mathrm{tg}\beta)$. Trung điểm của $[EF]$ là điểm $I(\frac{1}{2}tg\alpha\,,\ \frac{1}{2}tg\beta)$. Thế thì dễ thấy rằng:

$$I \in OM \Leftrightarrow \frac{y_M}{y_I} = \frac{x_M}{x_I} \Leftrightarrow \frac{\sin 2\beta}{tg\beta} = \frac{\sin 2\alpha}{tg\beta}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\beta = \cos^2\alpha \Leftrightarrow \cos\beta = \cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \beta = \alpha = \frac{\pi}{8}\ (\text{vì } 0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{4}) \dagger OE = OF.$$

Nhận xét: 1) Về cơ bản, bài toán này phù hợp cho cả các bạn học sinh PTCS. Chẳng hạn, phần a) của lời giải 1 và phần b) của lời giải 2 hoàn toàn chỉ đòi hỏi vận dụng kiến thức toán lớp 8 và lớp 9.

2) Không ít bạn chưa chỉ ra được hệ thức ràng buộc giữa x và y là : $xy + x + y = 1$ (hoặc hệ thức tương đương: $\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta = 1$, suy từ $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ hay $\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = 1$). Bởi vậy, lập luận phần a) như sau là không thể chấp nhận được:

$EF^2 = OE^2 + OF^2 \geq 2OEOF$; vậy $EF \geq \sqrt{2OEOF}$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $OE = OF$.

Đây là một sai lầm tinh vi mà không ít bạn đã mắc phải. Trong lập luận trên mới chỉ nói lên rằng $EF = \sqrt{2OEOF} \Leftrightarrow OE = OF$. Vị trí của M trên BD để $OE = OF$ là tồn tại, nhưng lập luận này chưa chỉ ra được sự duy nhất của điểm M và ở vị trí đó thì độ dài EF bằng bao nhiêu.

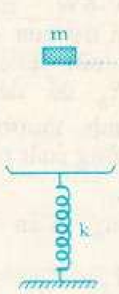
3) Đối với bài toán này, không cần thiết phải sử dụng công cụ giải tích.

4) Thực chất lời giải bài toán này là chứng minh sự tương đương của hai bài toán dựng hình: Tìm điểm M trên 'BD để EF đạt cực tiểu và tìm điểm M trên 'BD để OM đi qua trung điểm của EF. Nhiều bạn kết luận vội vàng khi chỉ mới giải bài toán đầu (phần a) đã khẳng định giải xong bà toán. Sa lầm đáng tiếc này xảy ra chỉ vì một nguyên nhân là nhiều bạn không đọc kĩ đề bài, hoặc chưa hiểu thấu đáo hai bài toán đó là tương đương.

5) Ngoài các bạn có lời giải ở trên, các bạn sau đây có lời giải tốt: *Nguyễn Minh Công*, 11T, PTTH Hà Nội - Amsterdam, **Hà Nội**. *Vũ Tuấn Anh*, 11K8, PTNK, *Mai Nguyên Dũng*, 9A1 THCS Chu Văn an, **Thái Nguyên**. *Nguyễn Nhật Huy*, 11T, PTNK **Hưng Yên**. *Nguyễn Kim Sổ*, PTTH Thanh Ba, **Phú Thọ**. *Dương Quang Huy*, 11A$_1$, PTTH chuyên **Yên Bái**. *Lê Quang Nẫm*, 12T, PTCT ĐHQG **Tp Hồ Chí Minh**.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/243 Một vật có khối lượng m rơi từ độ cao h lên một đĩa cân lò xo có độ cứng k (hình vẽ). Khi dính vào đĩa cân vật m bắt đầu thực hiện dao động điều hòa theo phương thẳng đứng (khối lượng đĩa cân và lò xo nhỏ không đáng kể).



Hỏi khi lò xo bị nén một đoạn $\frac{3mg}{2k}$ thì vật m đạt vận tốc bao nhiêu?

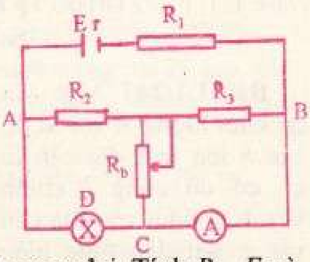
Hướng dẫn giải. Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng, gọi v là vận tốc của vật như lò xo bị nén một đoạn $x = \frac{3mg}{2k}$; $mg(h + x) = \frac{hx^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$, suy ra $v = \sqrt{2gh + \frac{3mg^2}{4k}}$

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn: *Nguyễn Trung Dũng*, 10 Lí, PTTH Lê Hồng Phong, **Nam Định**; *Đỗ Thị Hương Thanh*, 11G PTTH Phả Lại, **Hải Dương**; *Nguyễn Văn Sang*, 12A$_5$, PTTH Nguyễn Trân, Hoài Nhơn, **Bình Định**; *Trần Mai Sơn Hà*, 12CL, PTTH Năng khiếu, **Quảng Bình**; *Nguyễn Thanh Tuấn*, 11A$_7$, PTTH Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ, **Thái Bình**; *Nguyễn Ngọc Tuấn*, 12F, chuyên lí PTTH chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**; *Trần Anh Quân*, 12A$_1$, PTTH chuyên **Yên Bái**; *Vũ Xuân Bách*, 12CL, PTNK **Hưng Yên**; *Lê Hoài Ân*, 12CL, PTTH Lương Văn Chánh, **Phú Yên**; *Trịnh Minh Tuấn*, 12A$_2$, PTTH Bỉm Sơn, **Thanh Hóa**; *Phạm Quốc Anh*, 10A$_3$, PTTH Phan Bội Châu, **Nghệ An**; *Võ Như Phương*, 12TT, PTTH Lê Quý Đôn, Đông Hà, **Quảng Trị**, *Lê Đình Bình*, 12T, PTTH chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột, **Đaklak**; *Nguyễn Văn Thơi* 12A$_1$, PTTH Lê Quý Đôn, **Long An**; *Trương Văn Hùng*, PTTH Bến Tre, **Bến Tre**; *Phạm Doanh Tuyến*, 11A, PTTH chuyên Vĩnh Phú, Vĩnh Yên, **Vĩnh Phú**; *Trần Văn Anh*, 12A$_9$, THCB Nguyễn Duy Hiệu, Điện Bàn, **Quảng Nam**; *Phạm Văn Tập*, 11B1, PTTH Vĩnh Bảo, **Hải Phòng**; *Trương Quang Trí*, 12A$_1$, THCB Sơn

Tịnh I, **Quảng Ngãi**; *Thi Trần Anh Tuấn*, 12A$_2$, PTTH chuyên **Trà Vinh**; *Nguyễn Minh Vũ*, 11 Lí, PTTHNK Hàn Thuyên, **Bắc Ninh**; *Lê Thanh Bình*, 11L, PTTH Lương Văn Tụy, **Ninh Bình**; *Lê Anh Dũng*, PTTH Lào Cai, **Lào Cai**; *Nguyễn Quang Hưng*, 11CL, PTTHNK Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**; *Lê Doãn Cường*, 12A$_2$, PTTH chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**.

MAI ANH

Bài L2/243 Cho mạch điện như hình vẽ: $r = 1\Omega$; $R_1 = 8\Omega$; $R_2 = 9\Omega$; $R_3 = 12\Omega$; đèn 6V-6W. Bỏ qua điện trở của A và dây nối. Điều chỉnh R_b để đèn sáng bình thường và đạt công suất tiêu thụ cực đại. Tính R_b, E và số chỉ A.



Hướng dẫn giải Vẽ lại mạch, tính $R_{23b} = R_2 + R_{3b} = = \dfrac{108 + 21R_b}{12 + R_b}$; nhập điện trở R_{23b} với (E,x) và R_1 thành nguồn mới (R_1, r_1), với $r_1 = \dfrac{(r + R_1)R_{23b}}{r + R_1 + R_{23b}} = \dfrac{9(108 + 21R_b)}{216 + 30R_b}$, và $E_1 = r_1\dfrac{E}{r + R_1} = \dfrac{(36 + 7R_b)E}{72 + 10R_b}$. Khi đó đèn D là mạch ngoài của (R_1, r_1). Muốn đèn sáng bình thường và đạt công suất tiêu thụ cực đại thì $I_đ = 1A$ và $R_đ = 6\Omega$, suy ra: $R_b = 36\Omega$, $E_1 = \dfrac{2E}{3}$, $U_đ = \dfrac{1}{2}E_1$; từ đó $E = 18$V, $i_2 = \dfrac{V_{AB}}{R_{23b}} = \dfrac{1}{3}A$, $i_b = i_2\dfrac{R_{3b}}{R_b} = \dfrac{1}{12}A$ và $i_A = i_đ + i_b = \dfrac{13}{12}A$

Nhận xét. Các em có lời giải đúng: *Nguyễn Đức Tiến*, 10 Tin, PTTH Hà Nội - Amsterdam, **Hà Nội**; *Nguyễn Quốc Huy*, 12A$_2$, PTTH chuyên **Yên Bái**; *Đặng Thanh Nam*, 12A, PTTH chuyên **Vĩnh Phúc**; *Đào Anh Đức*, 10 Lí, PTTH chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**.

MAI ANH

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/247 Find four-digit number $\overline{abcd}$ such that: $\overline{ab}, \overline{ad}$ are prime numbers, and, simultaneously, $\overline{db} + c = b^2 + d$.

T2/247 Solve the equation

$$\frac{x^2}{5} + \frac{6125}{x^2} + \frac{210}{x} - \frac{12x}{5} = 0$$

T3/247 Let x_1, x_2 be the two roots of the equation

$$1998x^2 - (20a - 11)x - 1998 = 0$$

(Where a is a parameter).

Find the least value of

$$F = \frac{3}{2}(x_1 - x_2)^2 + 2\left(\frac{x_1 - x_2}{2} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)^2.$$

T4/247 Let be given a trapezoid $ABCD$ ($AB \parallel CD$, AD not parallel to BC), E and F be respectively the midpoints of BD and AC. Let G be the point of intersection of the line passing through E, perpendicular to AD and the line passing through F, perpendicular to BC. Compare the segments GD and GC.

T5/247 Let be given two point C, D on an arc AB of a circle. M is a moving point on the arc CD. Let X and Y be respectively the point of intersection of AM and BM with CD. Determine the position of M so that the length of XY attains its greatest value.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS.

T6/247 The sequence u_n is defined by:

$u_1 = 1$; $u_2 = 2$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, $\forall n \geq 3$. Prove that the sequence x_n, difined by

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} \ (n \geq 1)$$

is convergent.

T7/247. Let be given two continuous functions $f, g: [0; 1] \to [0; 1]$ satisfying the condition: $f(g(x)) = g(f(x))$ for every $x \in [0; 1]$. Suppose that f is an increasing function. Prove that there exists $a \in [0; 1]$ such that $f(a) = g(a) = a$.

T8/247. Prove that in every triangle ABC, we have:

$$\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} \geq \frac{1}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

T9/247. Let be given a rectangle $ABCD$ and a point M, moving on the side BC. The angled-bisector of $\widehat{DAM}$ cuts the side BC at N. Determine the pontion of M so that $\dfrac{AN}{NB}$ attains its least value.

T10/247. Let be given a tetrahedron $ABCD$. The planes bisecting the dihedral angles at the edges CD, DA, AB and BC cut respectively the edges AB, BC, CD and DA at M, N, P and Q. Prove that

$$\frac{MA}{MB} + \frac{NB}{NC} + \frac{PC}{PD} + \frac{QD}{QA} \geq 4.$$

ĐỀ RA KỲ NÀY

CÁC LỚP TRUNG HỌC CƠ SỞ

Bài T1/247: Tìm số có 4 chữ số $\overline{abcd}$ sao cho:

1) $\overline{ab}$, $\overline{ad}$ là hai số nguyên tố :

2) $\overline{db} + c = b^2 + d$.

ĐỖ THANH HÂN
(Bạc Liêu)

Bài T2/247: Giải phương trình :

$$\frac{x^2}{5} + \frac{6125}{x^2} + \frac{210}{x} - \frac{12x}{5} = 0$$

TRƯƠNG CÔNG CƯỜNG
(Lâm Đồng)

Bài T3/247: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình :

$$1998x^2 - (20a - 11)x - 1998 = 0$$

Tìm giá trị bé nhất của

$$F = \frac{3}{2}(x_1 - x_2)^2 + 2\left(\frac{x_1 - x_2}{2} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)^2$$

TRẦN HỒNG SƠN
(Thái Bình)

Bài T4/247: Cho hình thang $ABCD$ (AB // DC, AD không song song với BC), E là trung điểm của BD và F là trung điểm của AC. Gọi G là giao điểm của đường thẳng qua E vuông góc với AD và đường thẳng qua F vuông góc với BC. So sánh các đoạn thẳng GD và GC.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP Hồ Chí Minh)

Bài T5/247: Cho cung chứa góc α vẽ trên đoạn AB. C, D là hai điểm thuộc cung chứa góc đó. M là một điểm thay đổi trên cung $\overset{\frown}{CD}$. X, Y theo thứ tự là giao của AM, BM với đoạn CD. Tìm vị trí của M sao cho XY có độ dài lớn nhất.

NGUYỄN MINH HÀ
(Hà Nội)

CÁC LỚP PHỔ THÔNG TRUNG HỌC

Bài T6/247: Cho $\{u_n\}$ được xác định như sau $u_1 = 1$; $u_2 = 2$; $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ $(\forall n \geq 3)$.

Chứng minh rằng dãy x_n xác định bởi

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} \quad (n \geq 1)$$

là dãy hội tụ.

TRẦN XUÂN ĐÁNG
(Nam Định)

Bài T7/247: Cho hai hàm số liên tục f, g: $[0;1] \to [0;1]$ thỏa mãn điều kiện $f(g(x)) = g(f(x))$ với mọi $x \in [0; 1]$. Biết rằng f là hàm tăng. Chứng minh rằng tồn tại $a \in [0; 1]$ sao cho $f(a) = g(a) = a$.

PHẠM NGỌC QUANG
(Thanh Hóa)

Bài T8/247: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có :

$$\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} \geq \frac{1}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

NGUYỄN VĂN MINH
(Quảng Ngãi)

Bài T9/247: Cho hình chữ nhật $ABCD$ và một điểm M chuyển động trên cạnh BC. Phân giác của DAM cắt cạnh BC tại N. Xác định vị trí M để tỷ số $\frac{AN}{NM}$ đạt giá trị nhỏ nhất

NGUYỄN ĐĂNG HẠNH
(Thanh Hóa)

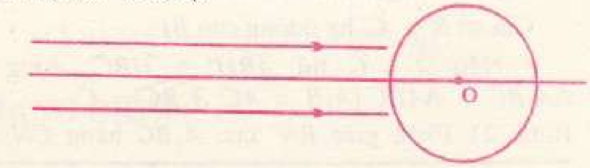
Bài T10/247: Cho tứ diện $ABCD$. Mặt phẳng phân giác của các góc nhị diện cạnh CD, DA, AB và BC lần lượt cắt các cạnh AB, BC, CD và DA ở M, N, P và Q. Chứng minh rằng :

$$\frac{MA}{MB} + \frac{NB}{NC} + \frac{PC}{PD} + \frac{QD}{QA} \geq 4$$

TRẦN DUY HINH
(Bình Định)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

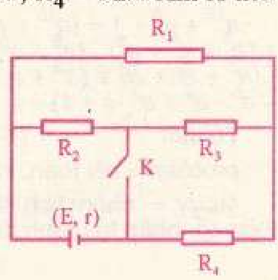
Bài L1/247: Chiếu một chùm sáng song song vào một quả cầu bằng thủy tinh. Kích thước chùm sáng rất nhỏ so với kích thước quả cầu (hình vẽ bên).



Hỏi chùm tia ló sau quả cầu là chùm hội tụ hay phân kì ?

NGUYỄN THẾ KHANG
(Nam Định)

Bài L2/247: Cho mạch điện như hình vẽ. Bỏ qua điện trở của dây nối và khóa K. Biết rằng : $R_1 = 9r$; $R_2 = 10r$; $R_3 = 8r$; $R_4 = 32r$. Khi K mở công suất tiêu thụ trên R_1 là 15W. Xác định công suất tiêu thụ trên R_1 khi K đóng.



LẠI THẾ HIỀN
(Hà Nội)

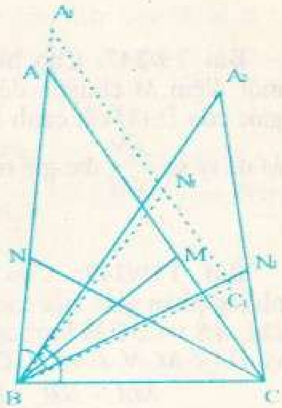
Diễn đàn

DẠY VÀ HỌC TOÁN

TRỞ LẠI ĐỊNH LÍ STEINER-LEHMUS

Định lí STEINER-LEHMUS :"Tam giác có hai đường phân giác trong bằng nhau là tam giác cân". Đây là một điều kiện để nhận biết một tam giác là tam giác cân nhưng tại sao lại không có mặt trong chương trình hình học lớp 7 (có thể dưới dạng bài tập) ? Qua nghiên cứu bài giới thiệu về định lí STEINER-LEHMUS của tác giả Lê Trường Tùng đăng trên báo toán học và tuổi trẻ số 1 năm 1987 tôi thấy các cách chứng minh định định lí rất đơn giản và gọn, nhưng đều phải sử dụng đến kiến thức về tứ giác hoặc kiến thức về đường tròn. Trong bài viết này tôi xin giới thiệu thêm 2 các chứng minh khác, tuy rằng các chứng minh đó chưa phải là gọn nhất nhưng nó có thể sử dụng kiến thức lớp 7 (cách 1), lớp 8 (cách 2) để chứng minh.

Cách chứng minh thứ nhất

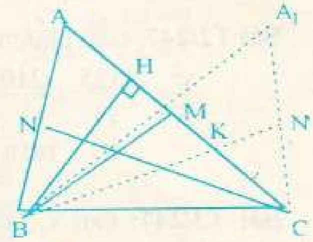


Tam giác ABC có 2 đường phân giác trong BM và CN bằng nhau. Giả sử $\widehat{B} > \widehat{C}$, do đó AC AB. Dựng ΔA_1BC_1 và ΔA_2BC bằng ΔABC ($A_1B = A_2B = AC$; $BC_1 = BC$; $\widehat{A_1BC_1} = \widehat{A_2BC} = \widehat{C}$ (hình 1). Phân giác BN_1 của $\widehat{A_1BC_1}$ và phân giác BN_2 của $\widehat{A_2BC}$ bằng CN. Điểm N_1, N_2 nằm cùng phía so với AC. Theo cách dựng thì BM là phân giác $\widehat{N_1BN_2}$. Hiển nhiên $BM < BN_1 = BN_2 = CN$, điều này mâu thuẫn giả thiết. Vậy ΔABC cân.

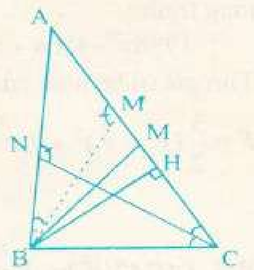
Cách chứng minh thứ hai

Giả sử $\widehat{B} > \widehat{C}$, hạ đường cao BI.

- Nếu $\widehat{A} > \widehat{C}$ thì $\widehat{ABH} < \widehat{HBC}$, dựng $\Delta A_1BC = \Delta ABC$ ($A_1B = AC$, $\widehat{A_1BC} = \widehat{C}$ (hình 2). Phân giác BN' của A_1BC bằng CN. Hiển nhiên $BM < BK < BN' = CN$. Mâu thuẫn với giả thiết.



- Nếu $\widehat{A} < \widehat{C}$ suy ra $\widehat{ABH} > \widehat{HBC}$, vì $\widehat{B} > \widehat{C}$ suy ra $\frac{\widehat{B}}{2} > \frac{\widehat{C}}{2}$ do đó $\widehat{ANC} > \widehat{AMB}$, dựng $\Delta ABM'$ có $\widehat{ABM'} = \frac{\widehat{C}}{2}$ (hình 3) nên $\Delta ANC \sim \Delta ABM'$, nhưng vì $AC > AB$ suy ra $CN > BM' > BM$; điều này mâu thuẫn giả thiết.



Nếu $\widehat{A} = \widehat{C}$ chứng minh tương tự như trên ta cũng rút ra được $CN > BM$, mâu thuẫn giả thiết. Vậy ΔABC là tam giác cân, trường hợp $\widehat{A} = \widehat{C}$ thì ΔABC đều.

NGÔ VĂN THÁI

Thái Bình

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN VÀ LỜI GIẢI

Bài số 1

Problem. Factor the expression $a^{10} + a^5 + 1$.

Solution. We have

$$a^{10} + a^5 + 1 = (a^{10} + a^9 + a^8) - (a^9 + a^8 + a^7) + (a^7 + a^6 + a^5) - (a^6 + a^5 + a^4) + (a^5 + a^4 + a^3) - (a^3 + a^2 + a) + (a^2 + a + 1) = (a^2 + a + 1)(a^8 - a^7 + a^5 - a^4 + a^3 - a + 1)$$

Từ mới

problem = bài toán, vấn đề

factor = phân tích thành thừa số (động từ), thừa số, nhân tử (danh từ)

expression = biểu thức

solution = lời giải, nghiệm

we have = ta có

Chú ý: Đây chỉ là các từ Việt tương ứng của các từ tiếng Anh trong toán học. Các từ tiếng Anh trên có thể còn có những nghĩa khác như *factor* = yếu tố hay *solution* = dung dịch.

NGÔ VIỆT TRUNG

(Viện Toán học)

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI - 1997

Môn thi : **TOÁN**

Thời gian làm bài : 180 phút

PHẦN I. (Dành cho tất cả các thí sinh)

Câu I. Cho hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3mx - 2$ với m là tham số nhận mọi giá trị thực.

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị *(C)* của hàm số khi $m = 1$.

b. Xác định các giá trị của m để bất phương trình:

$f(x) \leq -\dfrac{1}{x^3}$ được thỏa mãn với mọi $x \geq 1$.

Câu II. Giải các bất phương trình sau :

a. $3^{\sqrt{x^2 - 2x}} \geq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x - |x-1|}$

b. $\dfrac{\log_2(x+1)^2 - \log_3(x+1)^3}{x^2 - 3x - 4} > 0$

Câu III. a. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đề các trực chuẩn Oxy, hãy viết phương trình đường tròn đi qua điểm $A(2, -1)$ và tiếp xúc với hai trục tọa độ Ox và Oy.

b. Trong không gian với hệ tọa độ Đề các trực chuẩn $Oxyz$ cho điểm $M(1, 2, -1)$ và đường thẳng *(d)* có phương trình :

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{2}$$

Gọi N là điểm đối xứng của điểm M qua đường thẳng *(d)*. Tính độ dài đoạn thẳng MN.

Câu IV. a. Giải phương trình lượng giác :

$$(\sqrt{q - \cos x} + \sqrt{\cos x})\cos 2x = \frac{1}{2}\sin 4x$$

b. Cho ΔABC có 3 góc thỏa mãn điều kiện $A > B > C$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x - \sin A}{x - \sin C}} + \sqrt{\frac{x - \sin B}{x - \sin C}} - 1$$

Từ đó suy ra phương trình sau có và chỉ có một nghiệm :

$$\sqrt{x - \sin A} + \sqrt{x - \sin B} = \sqrt{x - \sin C}$$

PHẦN II

Câu Va. (Dành cho thí sinh **chưa phân ban**)

Cho tích phân : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,tg^n x\,dx$ (n là số nguyên dương bất kì)

a. Tính I_n khi $n = 2$.

b. Chứng minh rằng : $I_n > \dfrac{1}{n+2}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{n+2}$

Câu Vb. (Dành cho thí sinh **chuyên ban**)

Gọi n là số nguyên dương bất kì.

a) Tính tích phân : $J = \displaystyle\int_0^1 x(1 - x^2)^n dx$

b. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 - \frac{1}{8}C_n^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+2}C_n^n = \frac{1}{2(n+1)}$$

(C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

Câu I :

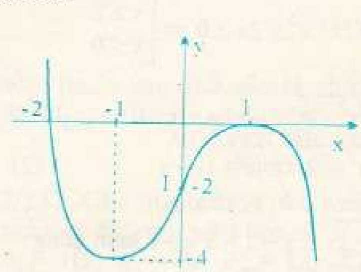
a) *) Tập XĐ : $\forall x \in R$

*) Chiều biến thiên và điểm uốn : $y' = -3x^2 + 3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{array}\right.$ $y'' = -6x = 0 \Rightarrow x = 0$

Bảng biến thiên

x	+∞		-1		0		1		+
y'		-	0	+	|	+	0	-	
y''		+	|	+	0	-	|	-	
y	+∞	↘	CT -4 lõm	↗	Uốn -2	↗	CĐ 0 lồi	↘	−∞

*) Giao điểm của đồ thị với trục tọa độ :



+) Đồ thị tiếp xúc Ox tại $x = 1$; cắt Ox tại $x = 2$

+) Đồ thị cắt Oy tại $I(0, -2)$

b) *Bất phương trình :*

$$f(x) \leq -\frac{1}{x^3}\ (\forall x \geq 1) \Leftrightarrow -x^3 + 3mx - 2 \leq -\frac{1}{x^3}\ (\forall x \geq 1)$$

$\Leftrightarrow x^6 - 3mx^4 + 2x^3 \geq 1 \ (\forall x \geq 1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^6 + 2x^3 - 1}{x^4} \geq 3m \ (\forall x \geq 1)$

Cách 1 : (Dùng bất đẳng thức)

Xét hàm số : $F(x) = \dfrac{x^6 + 2x^3 - 1}{x^4}$ $(x \geq 1)$ = $x^2 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^4}$ vì $x \geq 1$ nên $x^2 \geq x$;

$x^4 \geq x \Rightarrow F(x) \geq x + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x} = x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ (BĐT Côsi) dấu = xảy ra khi $x = 1$

Để $F(x) \geq 3m$ $(\forall x \geq 1)$ điều kiện cần và đủ là :

$\begin{cases} GTNN\ F(x) = 2 \geq 3m \Rightarrow m \leq \dfrac{2}{3} \\ 1 \leq x < +\infty \end{cases}$

Cách 2 : (Dùng đạo hàm)

Ta có $F'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{4}{x^5} > 0 \ (\forall x \geq 1) \Rightarrow F(x)$ đồng biến trong $[1, +\infty)$.

Ta có bảng biến thiên

X	$-\infty$	1		$+\infty$
f'(x)			+	+
F(x)		2	↗	$+\infty$

Vậy $F_{nn} = F(1) = 2 \geq 3m \Rightarrow m \leq \dfrac{2}{3}$

Ghi chú : Nếu thí sinh thay $x = 1$ vào bất phương trình $f(x) \leq -\dfrac{1}{x^3}$ và tìm được điều kiện cần $m \leq \dfrac{2}{3}$ sau đó chứng minh $m \leq \dfrac{2}{3}$ cũng là điều kiện đủ thì vẫn cho điểm tối đa.

Câu II : a) Giải bất phương trình :

$$3^{\sqrt{x^2 - 2x}} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{x - |x-1|} \qquad (1)$$

*) TXĐ : $x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq 0 \end{array}\right.$

*) (1)

$\Leftrightarrow 3^{\sqrt{x^2 - 2x}} \geq (3^{-1})^{x - |x-1|} - x = 3^{|x-1| - x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x} \geq |x - 1| - x \qquad (2)$

1) Nếu $x \geq 2$: (2) $\Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2 - 2x} \geq x - 1 - x = -1$ luôn đúng

2) Nếu $x \leq 0$: (2)

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x} \geq -x + 1 - x = 1 - 2x$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x) \geq (1 - 2x)^2$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 1 < 0 \Leftrightarrow$ Vô nghiệm. Vậy nghiệm của (1) là : $x \geq 2$

b) Giải bất phương trình :

$$\frac{\log_2(x+1)^2 - \log_3(x+1)^3}{x^2 - 3x - 4} > 0 \qquad (3)$$

*) TXĐ : $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 4 \end{cases}$

*) (3) $\Leftrightarrow \dfrac{2\log_2(x+1) - 3\log_3(x+1)}{x^2 - 3x - 4} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2\log_2(x+1) - 3\log_3 2\log_2(x+1)}{x^2 - 3x - 4} > 0$

$\Leftrightarrow (\log_3 9 - \log_3 8)\dfrac{\log_2(x+1)}{x^2 - 3x - 4} > 0$

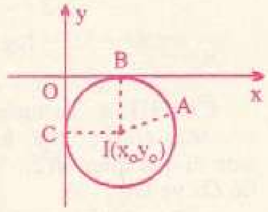
$\Leftrightarrow \dfrac{\log_2(x+1)}{x^2 - 3x - 4} > 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x+1) > 0 \\ x^2 - 3x - 4 > 0 \end{cases} \text{V} \begin{cases} \log_2(x+1) < 0 \\ x^2 - 3x - 4 < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 > 1 \\ x^2 - 3x - 4 > 0 \end{cases} \text{V} \begin{cases} 0 < x + 1 < 1 \\ x^2 - 3x - 4 < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x > 4 \text{ V } -1 < x < 0$

Câu III. a) Viết phương trình đường tròn đi qua A(2, -1) và tiếp xúc với Ox, Oy



Gọi $I(x_o, y_o)$ là tâm đường tròn. Giả sử đường tròn tiếp xúc với Ox tại $B \Rightarrow B(x_o, y_o)$ và tiếp xúc với Oy tại $C \Rightarrow C(0, y_o)$. Ta có $IA = IB = IC$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_o - 2)^2 + (y_o + 1)^2 = x_o^2 \\ |x_o| = |y_o| \end{cases} (4)$

1) Nếu $x_o = y_o$ (4)

$\Leftrightarrow (x_o - 2)^2 + (x_o + 1)^2 = x_o^2$

$\Leftrightarrow x_o^2 - 2x_o + 5 = 0 \Rightarrow$ VN

2) Nếu $x_o = -y_o$ (4)

$\Leftrightarrow (x_o - 2)^2 + (-x_o + 1)^2 = x_o^2$

$\Leftrightarrow x_o^2 - 6x_o + 5 = 0 \Rightarrow$

*) $x_o = 1 = -y_o \Rightarrow$ Phương trình đường tròn là $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$

*) $x_o = 5 = -y_o \Rightarrow$ Phương trình đường tròn là $(x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$

Vậy có 2 đường tròn thỏa mãn điều kiện bài toán:

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$$

$$(x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$$

Ghi chú : Nếu thí sinh nhận xét là tâm đường tròn nằm trên đường thẳng $y = -x$ do đó $I(x_o, -x_o)$ $(x_o > 0)$ và giải phương trình $R^2 = x_o^2 = (x_o - 2)^2 + (-x_o + 1)^2$ mà kết quả đúng vẫn cho điểm tối đa.

b) Tính độ dài đoạn thẳng MN :

Cách 1 : Phương trình tham số của *(d)* có dạng : $x = 3t - 1$; $y = -2t + 2$; $z = 2t + 2$ $t \in R$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên $(d) \Rightarrow H(3t - 1 ; -2t + 2 ; 2t + 2)$

$\overrightarrow{MH} = \{3t - 2 ; -2t ; 2t + 3\}$

Vec tơ chỉ phương $\vec{u}$ của *(d)* có dạng $\vec{u} = \{3 ; -2 ; 2\}$

$\overrightarrow{MH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} . \vec{u} = 0$

$\Leftrightarrow 3(3t - 2) + (-2)(-2t) + 2(2t + 2) = 0$

$\Leftrightarrow 17t = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow$

Vậy : $MH = 2MH = 2\sqrt{13}$

Cách 2 : Phương trình mặt phẳng *(P)* qua $M(1, 2, -1)$ và vuông góc với *(d)* có dạng :

$3(x - 1) - 2(y - 2) + 2(z + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 3x - 2y + 2z + 3 = 0$ (5)

Tìm giao điểm của *(d)* với mặt phẳng *(P)*. Thay $x = 3t - 1$; $y = -2t + 2$; $z = 2t + 2$ vào (5) $\Rightarrow 3(3t - 1) - 2(-2t + 2) + 2(2t + 2) + 3 = 0 \Leftrightarrow 17t = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow H(-1, 2, 2) \Rightarrow MH = \sqrt{13} \Rightarrow MH = 2MH = 2\sqrt{13}$.

Câu IV : *a) Giải phương trình :*

$(\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{\cos x})\cos 2x = \frac{1}{2}\sin 4x$ (6)

*) TXĐ : $\cos x \geq 0$

*) (6) $\Leftrightarrow (\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{\cos x})\cos 2x = \sin 2x \cos 2x$

1) $\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pm\pi/2 + 2k\pi \Rightarrow x = \pm\pi/4 + k\pi$ Vì $\cos x \geq 0$ nên k phải là số chẵn $k = 2n$ vậy : $x = \pm\pi/4 + 2n\pi$ $(n \in Z)$

2) $(\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{\cos x}) = \sin 2x$ (7)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \geq 0 \\ 1 + 2\sqrt{(1 - \cos x)\cos x} = \sin^2 2x \end{cases}$$

Vì VT ≥ 1 ; VP ≤ 1 dấu = xảy ra $\Leftrightarrow$ VT = VP = 1. VT = 1 $\Leftrightarrow \cos x = 0$ (Khi đó $\sin 2x = 2\sin x\cos x = 0$) hoặc $\cos x = 1$ (khi đó $\sin 2x = 0$) $\Rightarrow$ (7) vô nghiệm. Vậy nghiệm của phương trình là : $x = \pm\pi/4 + 2n\pi$ $(n \in Z)$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$f(x) = \sqrt{\frac{x - \sin A}{x - \sin C}} + \sqrt{\frac{x - \sin B}{x - \sin C}} - 1$$

Vì A, B, C là 3 góc của Δ nên bất đẳng thức $A > B > C \Leftrightarrow a > b > c \Leftrightarrow 2R\sin A > 2R\sin B > 2R\sin C \Leftrightarrow \sin A > \sin B > \sin C$ (8)

*) Tập xác định của *f(x)* là : $R[\sin C ; \sin A)$ $(x < \sin C \vee x \geq \sin A)$

$$*) f'(x) = \frac{\left(\frac{x - \sin A}{x - \sin C}\right)'}{2\sqrt{\frac{x - \sin A}{x - \sin C}}} + \frac{\left(\frac{x - \sin B}{x - \sin C}\right)'}{2\sqrt{\frac{x - \sin B}{x - \sin C}}}$$

$$= \frac{\sin A - \sin C}{2(x - \sin C)^2}\sqrt{\frac{x - \sin C}{x - \sin A}} + $$

$$+ \frac{\sin B - \sin C}{2(x - \sin C)^2}\sqrt{\frac{x - \sin C}{x - \sin B}} > 0 \text{ do } (8)$$

Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$\sin C$		$\sin A$		$+\infty$
f'(x)		+	||		||	+	
F(x)	1	↗	$+\infty$ ||		|| $\sqrt{\frac{\sin A - \sin B}{\sin A - \sin C}} - 1$	↗	1

Vậy : $f_{nn} = \sqrt{\frac{\sin A - \sin B}{\sin A - \sin C}} - 1$ đạt được khi $x = \sin A$

*) Phương trình

$\sqrt{x - \sin A} + \sqrt{x - \sin B} = \sqrt{x - \sin C}$

(Có TXĐ : $x \geq \sin A$)

$\Leftrightarrow f(x) = \sqrt{\frac{x - \sin A}{x - \sin C}} + \sqrt{\frac{x - \sin B}{x - \sin C}} - 1 = 0$ với điều kiện $x \geq \sin A$

Trong $[\sin A, +\infty)$ hàm *f(x)* có giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{\frac{\sin A - \sin B}{\sin A - \sin C}} - 1 < 0$ (vì $0 < \sin A - \sin B < \sin A - \sin C$) ; $\lim\limits_{x \to +\infty} = 1$; *f(x)* liên tục ; $f'(x) > 0$

Vậy trong khoảng $[\sin A, +\infty)$ phương trình ấy có và chỉ có 1 nghiệm.

Ghi chú : Nếu thí sinh dùng phương pháp bất đẳng thức để tìm GTNN của *f(x)* ví dụ như cách sau đây vẫn cho điểm tối đa :

1) Nếu $x \leq \sin C$

$\Rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{\sin A - x}{\sin C - x}} + \sqrt{\frac{\sin B - x}{\sin C - x}} - 1 > 1 + 1 - 1 = 1$

2) Nếu $x \geq \sin A$; áp dụng bất đẳng thức $\frac{p}{q} \geq \frac{p - k}{q - k}$ (ở đây $0 < p < q$; $0 \leq k < q$) với $p = x - \sin B$; $q = x - \sin C$; $k = x - \sin A$ ta được

$$\frac{x - \sin B}{x - \sin C} \geq \frac{x - \sin B - (x - \sin A)}{x - \sin C - (x - \sin A)} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A - \sin C}$$

(dấu = xảy ra khi $x = \sin A$)

Từ đó $\Rightarrow f_{nn} = \sqrt{\frac{\sin A - \sin B}{\sin A - \sin C}} - 1$ đạt được khi $x = \sin A$

Câu Va :

a) $I_2 = \int\limits_0^{\pi/4} x\,tg^2x\,dx = \int\limits_0^{\pi/4} x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx =$

$= \int\limits_0^{\pi/4} x\,d(tgx) - \int\limits_0^{\pi/4} x\,dx$

$= -\frac{1}{2}x^2 \Big|_0^{\pi/4} + (x\,tgx) \Big|_0^{\pi/4} - \int\limits_0^{\pi/4} tgx\,dx$

$= -\frac{\pi^2}{432} + \frac{\pi}{4} - \int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\frac{\pi^2}{34} + \frac{\pi}{4} + \int\limits_0^{\pi/4} \frac{d\cos x}{\cos x}$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln(\cos x) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{2}\ln 2$

Xem tiếp trang 24

ĐỀ THI QUỐC GIA CHỌN HỌC SINH GIỎI THPT
MÔN TOÁN LỚP 9
NĂM HỌC 1996-1997

BẢNG A

Ngày thi: 15-3-1997
Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 1: a. Chứng minh rằng số P sau đây không thuộc tập hợp số tự nhiên N với mọi giá trị thực dương của x, y, z, t:

$$P = \frac{2x+y+z}{x+y+z} + \frac{2y+z+t}{y+z+t} + \frac{2z+t+x}{z+t+x} + \frac{2t+x+y}{t+x+y}$$

b. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một bộ ba số tự nhiên lớn hơn 1 thỏa mãn tính chất: tích của hai số bất kì trong ba số đó cộng với 1 chia hết cho số còn lại.

Bài 2: a. Cho biểu thức $Q = \sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \sqrt{1-x_3} + ... + \sqrt{1-x_{1997}}$

trong đó $x_1, x_2, x_3, ..., x_{1997}$ là các biến số nhận giá trị thực dương và thỏa mãn điều kiện : $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{1997} = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của Q và các giá trị tương ứng của các biến của nó.

b. Giải hệ phương trình với các ẩn x, y, z:

$$\begin{cases} x+y+z=16 \\ x^2+y^2+z^2=18 \\ \sqrt{x^2}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=14 \end{cases}$$

Bài 3: Cho đường tròn tâm O bán kính R và một dây AB cố định có độ dài bằng a ($a < 2R$). Trên dây AB lấy một điểm P tùy ý rồi qua A và P vẽ đường tròn tâm C tiếp xúc với đường tròn (O) tại A; qua B và P vẽ đường tròn tâm D tiếp xúc với đường tròn (O) tại B; hai đường tròn này cắt nhau tại điểm thứ hai M.

a. Chứng minh rằng bốn điểm O, M, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

b. Cho điểm P di động trên dây AB :

1) Tìm quỹ tích điểm M.

2) Chứng minh rằng đường thẳng qua M và P luôn đi qua một điểm cố định N. Tìm giá trị lớn nhất của tích $PM.PN$.

Bài 4: Cho tứ giác lồi $ABCD$ có các cặp cạnh đối không song song. Dựng hình bình hành nội tiếp tứ giác $ABCD$ có hai cạnh liên tiếp tương ứng song song với hai đường thẳng giao nhau a và b cùng thuộc mặt phẳng $ABCD$.

BẢNG B

Ngày thi: 15-3-1997
Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 1: a. Tìm các cặp số tự nhiên có tích bằng 700 và có UCLN bằng 5.

b. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một bộ ba số tự nhiên lớn hơn 1 thỏa mãn tính chất: tích của hai số bất kì trong ba số đó cộng với 1 chia hết cho số còn lại.

Bài 2: a. Nếu $\sqrt{25-x^2} - \sqrt{15-x^2} = 2$ thì $\sqrt{25-x^2} + \sqrt{15-x^2}$ bằng bao nhiêu?

b. Cho phương trình với các ẩn là x *và* y :

$$x^2 + 2y^2 + 2xy - 10x - 12y + 22 = 0$$

Tìm nghiệm của phương trình sao cho:

1) $x + y$ đạt giá trị lớn nhất.

2) $x + y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 3: Cho tam giác ABC có diện tích là S và một hình chữ nhật $MNPQ$ nội tiếp trong tam giác đó (M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC, P và Q thuộc cạnh BC). Gọi diện tích của hình chữ nhật $MNPQ$ là S_1.

Chứng minh rằng : $S \geq 2S_1$

Bài 4: Cho hai đường tròn tâm O bán kính R và một dây AB cố định có độ dài là a ($a \geq 2R$). Trên dây AB lấy một điểm P tùy ý rồi qua A và P vẽ đường tròn tâm C tiếp xúc với đường tròn (O) tại A; qua B và P vẽ đường tròn tâm D tiếp xúc với đường tròn (O) tại B; hai đường tròn này cắt nhau tại điểm thứ hai M.

a. Chứng minh tứ giác $PCOD$ là hình bình hành và bốn điểm O, M, C, D, cùng nằm trên một đường tròn.

b. Cho điểm P di động trên dây AB :

1) Tìm quỹ tích điểm M.

2) Chứng minh rằng đường thẳng qua M và P luôn đi qua một điểm cố định N. Tìm giá trị lớn nhất của tích $PM.PN$.

ĐÁP ÁN

BẢNG A

Bài 1. a) Ta phải chứng minh số P không thuộc tập hợp số tự nhiên N với mọi giá trị thực dương của x, y, z, t.

Tách phần nguyên ta có :

$$P = \frac{2x+y+z}{x+y+z} + \frac{2y+z+t}{y+z+t} + \frac{2z+t+x}{z+t+x} + \frac{2t+x+y}{t+x+y}$$

$$= 4 + x\sqrt{x+y+z} + \frac{y}{y+z+t} + \frac{z}{z+t+x} \frac{t}{t+x+y}$$

Đạt $P_1 = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{y+z+t} + \frac{z}{z+t+x} + \frac{t}{t+x+y}$ áp dụng quy tắc so sánh các phân số có tử và mẫu đều dương, ta có:

$$\frac{x}{x+y+z+t} < \frac{x}{x+y+z} < \frac{x}{x+z}$$

$$\frac{y}{x+y+z+t} < \frac{y}{y+z+t} < \frac{y}{y+t}$$

$$\frac{z}{x+y+z+t} < \frac{z}{y+t+x} < \frac{z}{z+x}$$

$$\frac{t}{x+y+z+t} < \frac{t}{t+x+y} < \frac{t}{t+y}$$

Cộng các bất đẳng thức cùng chiều, ta có:

$$1 < P_1 < 2$$

$$5 < 4 + P_1 < 6$$

hay $\quad 5 < P < 6 \qquad (1)$

Từ bất đẳng thức (1), suy ra $P \in N$ với mọi $x, y, z, t > 0$ (đpcm).

b) Giả sử ba số tự nhiên phải tìm là a, b, c đều thuộc tập hợp N và thỏa mãn điều kiện:

$$(ab+1)\quad c, (ac+1)\quad b, (bc+1)\quad a \quad (1)$$

- Chúng ta nhận thấy rằng, các số a, b, c từng cặp nguyên tố cùng nhau. Thật vậy, giả sử $(a, b) > 1$ thì $(ac, b) = d > 1$, và khi đó số $(ac + 1) \vdots d$ nên $(ac + 1) \vdots b$ (vì d là ước của b). Điều này trái với giả thiết (1). Vậy $(a, b) = 1$.

Tương tự chứng minh, ta có : $(a, c) = 1$; $(b, c) = 1$.

vì a, b, c >1 nên từ đó dễ thấy các s≥' a, b, c là khác nhau.

- Xét số $S = ab + ac + bc + 1$

Vì $(ab + 1) \vdots C$ và $(ac + bc) \vdots c$ nên $S \vdots c$.

Tương tự, $S \vdots b, S \vdots a$

- Vì a, b, c là các số nguyên tố sánh đôi (đôi một nguyên tố cùng nhau) nên suy ra :

$S \vdots abc$. Vậy $S \geq abc$.

- Không mất tính chất tổng quát, ta có thể giả thiết

$$2 \leq a < b < c$$

- giả sử $b \geq 4$. Thế thì ta có $c \geq 5$ và khi đó $abc \geq 2.4.5 = 40$. và $S = ab + ac + bc + 1 \leq$

$$\leq \frac{abc}{5} + \frac{abc}{4} + \frac{abc}{2} + 1 = abc - \frac{abc}{20} + 1 \leq$$

$$\leq abc - \frac{40}{20} + 1 < abc.$$

Điều này mâu thuẫn với điều ta đã biết ở trên $S \geq abc$.

Vậy $b < 4$. Từ đó suy ra chỉ có thể có $a = 2$, $b = 3$. Với $ab + 1$ c hay $2.3 + 1 = 7$, 7 c suy ra chỉ có thể $c = 7$. Bộ ba số 2, 3, 7 thỏa mãn đề bài đó là bộ số phải tìm.

Trong chứng minh, ta tìm được $a = 2$, $b = 3$ là duy nhất và từ đó cũng chỉ tìm được $c = 7$ duy nhất, do đó bộ ba số 2, 3, 7 là bộ số duy nhất tìm được thỏa mãn điều kiện bài toán (đpcm).

Bài 2: a) Theo giả thiết, các số $x_1, x_2, x_3, ..., x_{1997}$ đều dương và $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{1997} = 1$ nên ta có

$1 - x_1, 1 - x_2, 1 - x_3, ..., 1 - x_{1997} > 0$, do đó $Q > 0$. áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương $1 - x_i$ và $\frac{1996}{1997}$ (với $i = 1, 2, 3, ..., 1997$), ta có :

$$\sqrt{(1-x_1)\frac{1996}{1997}} \leq \frac{(1-x_1) + \frac{1996}{1997}}{2}$$

$$\sqrt{(1-x_2)\frac{1996}{1997}} \leq \frac{(1-x_2 + \frac{1996}{1997}}{2}$$

. . . .

$$\sqrt{(1-x_{1997})\frac{1996}{1997}} \leq \frac{(1-x_{1997}) + \frac{1996}{1997}}{2}$$

Cộng các vế tương ứng của 1997 bất đẳng thức cùng chiều ở trên, ta có :

$$\sqrt{\frac{1996}{1997}} \cdot Q \le \frac{1997-(x_1+x_2+...+x_{1997}) + 1997 \cdot \frac{1996}{1997}}{2}$$

hay $\sqrt{\frac{1996}{1997}} \cdot Q \le 1996$

Vậy : $Q \le \sqrt{1996.1997}$

Q đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi dấu đẳng thức ở 1997 bất đẳng thức trên cùng xảy ra. Khi đó $x_1, x_2, x_3, ..., x_{1997}$ là nghiệm của hệ phương trình sau :

$$1 - x_1 = \frac{1996}{1997}$$

$$1 - x_2 = \frac{1996}{1997}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$1 - x_{1997} = \frac{1996}{1997}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_{1997} = \frac{1}{1997}$ với $Q_{\max} = \sqrt{1996.1997}$

b) Giải hệ phương trình (323)

$$\begin{cases} x + y + z = 6 & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 18 & (2) \quad \text{(I)} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 4 & (3) \end{cases}$$

Lời giải

- Bình phương hai vế của phương trình (1) và sau đó trừ các vế cho nhau với phương trình (2) ta có :

$$xy + yz + xz = 9 \qquad (4)$$

- Bình phương hai vế phương trình (3) và sau đó trừ các vế cho nhau với phương trình (1) ta có :

$$\sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{yz} = 5 \qquad (5)$$

- Bình phương hai vế phương trình (5) và sau đó trừ các vế cho nhau với phương trình (4) ta được :

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})\sqrt{xyz} = 6 \qquad (6)$$

Theo phương trình (3) : $(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) = 4$

nên $\sqrt{xyz} = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow xyz = 4$.

Ta có hệ phương trình mới :

$$\begin{cases} x + y + z = 6 & (1) \\ xy + xz + y = 9 & (8) \quad \text{(II)} \\ xy = 4 & (9) \end{cases}$$

Từ (7) $\Rightarrow z = 6 - (x + y)$. Thay vào (8) và (9), ta có :

$$\begin{cases} xy + (x + y)[(6 - (x + y)] = 9 \\ xy\,[6 - x + y)] = 4 \end{cases}$$

$$xy = 9 - (x + y)[6 - (x + y)]$$

$$xu = \frac{4}{6 - (x + y)}$$

Từ đó có phương trình :

$$9 - (x + y)[6 - (x + y)] = \frac{4}{6 - (x + y)}$$

Đặt $x + y = X$, ta có :

$$9 - 6X + X^2 = \frac{4}{6 - X}$$

Rút gọn được phương trình :

$$X^3 - 12X^2 + 45X - 50 = 0$$

Ta hãy biến đổi vế trái :

$$X^3 - 12X^2 + 45X - 50 =$$

$$= (X^3 - 2X^2) - 10X^2 + 20X + 25X - 50 = 0$$

$$X^2(X - 2) - 10X(X - 2) + 25(X - 2) = 0$$

$$(X^2 - 10X + 25)(X - 2) = 0$$

$$(X - 5)^2(X - 2) = 0$$

Giải phương trình được : $X = 2$; $X = 5$.

*) Với $X = x + y = 2$, từ $x + y + = 6 \Rightarrow z = 4$ và từ $xyz = 4 \Rightarrow xy = 1$, và ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \end{matrix}$$

Ta được nghiệm $x = 1, y = 1, z = 4$.

*) Với $X = x + y = 5$, từ $x + y + z = 6 \Rightarrow z = 1$ và từ $xyz = 4 \Rightarrow xy = 4$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 4 \end{cases}$$

Giải hệ này được : $x = 1, y = 4$

$x = 4, y = 1$.

Tóm lại phương trình có 3 nghiệm :

1) $x = 1, y = 1, z = 4$

2) $x = 1, y = 4, z = 1$

3) $x = 4, y = 1, z = 1$.

Cách 2.

Từ hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y + z = 6 & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 18 & (2) \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 4 & (3) \text{ với } x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta có : $\begin{cases} x + y = 6 - z & (4) \\ x^2 + y^2 = 18 - z^2 & (5) \end{cases}$

hay $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = 36 - 12z + z^2 & (4') \\ x^2 + y^2 = 18 - z^2 & (5) \end{cases}$

Từ (4') và (5), ta có :

$2xy = (36 - 12z + z^2) - (18 - z^2) =$

$= 18 - 12z + 2z^2$ hay

$xy = 9 - 6z + z^2 = (z - 3)^2 \quad (6)$

suy ra $\sqrt{xy} = |z - 3| \quad (6')$

Từ (3), ta có : $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 - \sqrt{z} \quad (7)$

Bình phương hai vế ta có :

$x + y + 2\sqrt{xy} = 16 - 8\sqrt{z} + z \quad (8)$

Từ các phương trình (4), (6') và (8) ta có :

$(x + y) + 2\sqrt{xy} = (6 - z) + 2|z - 3| =$

$= 16 - 8\sqrt{z} + z (9)$

1) *Với* $z \geq 3$, từ (9) ta có : $6 - z + 2(z - 3) = 16 - 8z + z$. Rút gọn được : $\sqrt{z} = 2 \Rightarrow z = 4$.

Thay $z = 4$ vào (4) và (6), được hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$

Hệ này có nghiệm $x = y = 1$.

Hệ phương trình đã cho có nghiệm ($x_1 = 1$, $y_1 = 1$, $z_1 = 4$)

2) *Với* $0 \leq z < 3$

Từ phương trình (9) ta có : $6 - z + 2(3 - z) = 16 - 8\sqrt{z} + z$

Rút gọn được : $z - 2\sqrt{z} + 1 = 0$

$(\sqrt{z} - 1)^2 = 0 \Rightarrow z = 1$

Thay $z = 1$ vào hệ (4) và (6) ta có :

$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 4 \end{cases}$

Hệ này có nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$

Hệ phương trình đã cho có các nghiệm : ($x_2 = 1, y_2 = 4, z_2 = 1$) ($x_3 = 4, y_3 = 1, z_3 = 1$)

Lời giải bài 4

1) Hai đường tròn (O) và (C) tiếp xúc nhau tại A nên ba điểm A, C, O thẳng hàng.

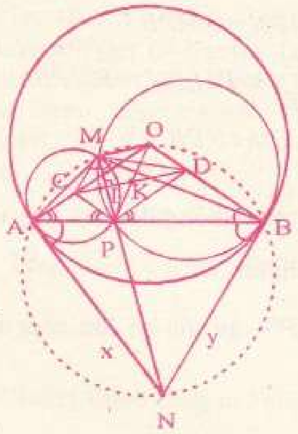
- Tương tự có : B, D, O thẳng hàng. ΔACP, ΔPDB cân và ΔAOB cân, từ đó dễ dàng suy ra

$\hat{}CAP = \hat{}CPA = \hat{}DPB = \hat{}DBP$

và do đó : $PC // OB$; $PD // AO$.

Vậy $PCOD$ là hình bình hành.

$PO \cap CD = K$ và $\begin{cases} PK = KO \\ CK = DK \end{cases}$



$CD \perp MP$ ở I với $IM = IP$ vậy IK là đường trung bình của ΔPMO suy ra $CD // MO$, $MCDO$ là hình thang.

Mặt khác $CO = PD$

$PD = DM$ (cùng bán kính của (D).

Vậy $MCDO$ là hình thang cân do đó 4 điểm M, C, D, O cùng thuộc một đường tròn.

2) a) $\widehat{MAP} = \widehat{DCP}$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm chắn cùng một cung) $\widehat{MBP} = \widehat{CDP}$

Vậy $\Delta AMB \sim \Delta CPD \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{CPD} = \widehat{COD} =$ (const)

Khi P di động trên AB, AMB luôn không đổi. Suy ra M nằm trên cung chứa góc AOB.

Khi $P \equiv A$ thì $M \equiv A$; Khi $P \equiv B$ thì $M \equiv B$. Đảo lại, lấy M' trên cung chứa góc AOB (qua 3 điểm A, O, B) Dựng đường tròn (C) qua M' tiếp xúc với (O) tại A, đường tròn (C) cắt AB ở P. Dựng đường tròn qua M, P, B ta phải chứng minh đường tròn này tiếp xúc với (O) ở B.

Thật vậy : Từ A và B dựng hai tiếp tuyến Ax, By của đường tròn (O), ta có : $\widehat{AM'P} = \widehat{PAx}$ (góc giữa dây cung và tiếp tuyến)

$\widehat{PAx} = \widehat{PBy}$ (vì Ax, By là hai tiếp tuyến của (O)).

$\widehat{AM'P} = \widehat{PBy}$

Suy ra Ax, By, MP cùng cắt nhau tại N.

$\widehat{PMB} = \widehat{PBN} \Rightarrow BN$ cũng là tiếp tuyến của đường tròn tâm D qua MPB vậy (O) và (D) tiếp nhau tại B (đpcm).

b) $\left.\begin{array}{l} \widehat{AMP} = \dfrac{1}{2}\widehat{ACP} \\ \widehat{BMP} = \dfrac{1}{2}\widehat{PDB} \\ \text{mà } \widehat{ACP} = \widehat{PDB} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{AMP} = \widehat{BMP}$

$\Rightarrow MP$ qua trung điểm N của cung AB.

Ta có : $\Delta APN \sim \Delta MPB$

$$\frac{AP}{MP} = \frac{PN}{PB} \Rightarrow PM.PN = PA.PB$$

gọi $PA = x$, ta có $PB = a - x$

$$PM.PN = x(a - x)$$

x và $a - x$ có tổng không đổi nên tích $x(a - x)$ lớn nhất khi và chỉ khi $x = a - x \Rightarrow x = \frac{a}{2}$

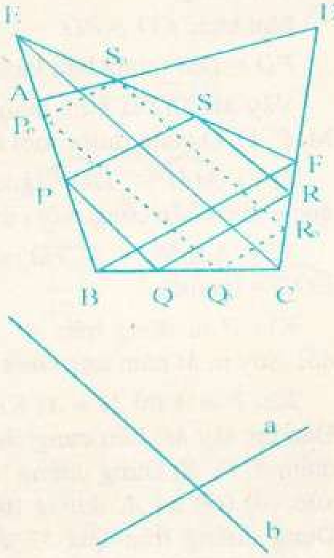
Vậy $PM.PN$ đạt giá trị lớn nhất khia $AP = \frac{a}{2} = \left(\frac{AB}{2}\right)$

$$\underset{(max)}{PM.PN} = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}.$$

Bài 4:

1. Phân tích:

Ta hãy dựng hình bình hành có 3 đỉnh P, Q, R ở trên 3 cạnh liên tiếp của tứ giác : AB, BC, CD có các cạnh tương ứng song song với hai đường thẳng a, b cho trước (xem hình vẽ).



Từ B và C kẻ BF, CE tương ứng song song với a, b cho trước : BF // a, CE // b. Giả sử FE cắt AB kéo dài ở E. Vì PQ // CE và QR // BF, nên ta có :

$$\frac{PQ}{CE} = \frac{BQ}{BC} = \frac{FR}{FC}$$

Vì $RS = PQ$ (2 cạnh đối của hình bình hành), nên thay đổi PQ bằng RS, ta có : $\frac{RS}{CE} = \frac{FR}{FE}$ (*). Đẳng thức (*) chứng tỏ rằng điểm $S \in EF$.

Ngược lại nếu lấy S' $\in EF$ làm đỉnh, dựng tứ giác $S'P'Q'R'$ có $S'P'$ // BF, $P'Q'$ // CE, $Q'R'$ // BF sao cho $P \in AB$, $Q \in BC$, $R \in CD$ thì ta có : $\frac{S'P'}{BF} = \frac{P'E}{BE} = \frac{Q'C}{BC} = \frac{Q'R'}{BF}$ (**)

Từ đẳng thức (**) suy ra $S'P' = Q'R'$. Từ các điều kiện $\begin{cases} S'P' \,//\, Q'R' \text{ (vì cùng // } BF) \\ S'P' = Q'R' \end{cases}$ suy ra $P'Q'R'S'$ là hình bình hành.

2. Cách dựng :

Từ B kẻ BF // a được $F \in CD$.

Từ C kẻ CE // b được $E \in AB$ hoặc AB kéo dài.

Nối EF, EF cắt AD ở S_o.

Từ $S_o \in AD$, kẻ S_oP_o // BF từ P_o kẻ P_oQ_o // CE; Từ $Q_o \in BC$ kẻ Q_oR_o // BF. Nối R_o với S_o được $P_oQ_oR_oS_o$ là hình bình hành phải dựng.

3. Chứng minh: (tương tự phần đảo của phần phân tích)

4. *Biện luận :* Bài toán dựng được chỉ khi tồn tại điểm $S_o \in AD$ và $P_o \in AB$. Do đó :

1) Nếu EF cắt AB ở phần ngoài đoạn AB kéo dài và $P_o \in AB$ thì bài toán có một nghiệm.

2) Khi chỉ có một đường thẳng song song với đường chéo của tứ giác (a // BD thì $F \equiv D$) thì hình bình hành suy biến thành đoạn thẳng BD. Bài toán vô nghiệm.

3) Khi a, b tương ứng song song với hai đường chéo thì bài toán vô số nghiệm. Lúc đó $FE \equiv AD$, ta có vô số điểm $S_o \in AD$ là giao của FE và AD.

BẢNG B

Bài 1a (bảng B)

Gọi hai số phải tìm là a và b, theo giả thiết ta có :

$$a.b = 700, \text{ UCLN}(a; b) = 5.$$

Từ giả thiết ta có : $a = 5a_1$

$$b = 5b_1$$

với UCLN $(a_1, b_1) = 1$

Vì $a.b = 700$ nên $5^2a_1.b_1 = 700$.

$$a_1b_1 = \frac{700}{25} = 28$$

Vì $28 = 1.28 = 2.14 = 4.7$,

do $(a_1, b_1) = 1$ nên chỉ có thể

$$a_1b_1 = 1.28 \quad (1)$$

$$a_1b_1 = 4.7 \quad (2)$$

Từ (1) suy ra : $a_1 = 1$, $b_1 = 28 \Rightarrow a = 5$, $b = 140$.

Từ (2) suy ra : $a_1 = 4$, $b_1 = 7 \Rightarrow a = 20$; $b = 35$.

Vậy các cặp số cần tìm là : $a = 5$, $b = 140$. hoặc $a = 20$, $b = 35$.

Bài 1b (xem đáp án bảng A).

Bài 2(a):

1) Điều kiện : $\begin{cases} 25 - x^2 \geq 0 \\ 15 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow |x| \leq \sqrt{15} \Rightarrow$ $-\sqrt{15} \leq x \leq \sqrt{15}$

*) Đặt $A = \sqrt{25 - x^2}$; $B = \sqrt{15 - x^2}$, ta có : $A^2 - B^2 = (25 - x^2) - (15 - x^2) = 10$ hay $(A + B)(A - B) = 10$ Nếu $A - B = 2$ thì $A + b = \frac{10}{2} = 5$ hay $\sqrt{25 - x^2} + \sqrt{15 - x^2} = 5$.

2) Tính x

Từ $\begin{cases} A - B = 2 \\ A + B = 2 \end{cases} \Rightarrow 2A = 7 \Rightarrow A = \frac{7}{2}$.

Vì $A \geq 0$ nên $A^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$ hay $25 - x^2 = \frac{49}{2}$

Rút gọn : $x^2 = \frac{51}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{51}}{2}$

Vì $-\sqrt{51} \leq \frac{\pm\sqrt{51}}{2} \leq \sqrt{15}$ nên $x = \frac{\pm\sqrt{51}}{2}$.

Đáp số : $\begin{cases} \sqrt{25 - x^2} + \sqrt{15 - x^2} = 5 \\ x = \pm\frac{\sqrt{51}}{2} \end{cases}$

Bài 2b)

Cho phương trình bậc hai có 2 ẩn số là x và y:

$$x^2 + 2y^2 - 2xy - 10x - 12y + 22 = 0$$

Tìm nghiệm của phương trình sao cho :

1) $A = x + y$ đạt giá trị lớn nhất;

2) $A = x + y$ đạt giá trị nhỏ nhất

Lời giải

Trước hết ta biến đổi phương trình về dạng thích hợp :

$x^2 + 2y^2 + 2xy - 10x - 12y + 22 =$
$(x^2 + y^2 + 2xy - 10x - 10y + 25) +$
$+ (y^2 - 2y + 1) - 4 =$
$= (x + y - 5)^2 + (y - 1)^2 - 4 = 0$ (1)

Từ đó ta có :

$$(x + y - t)^2 = 4 - (y - 1)^2 \leq 4$$

hay : $|x + y - 5| \leq 2$, và ta có :

$$-2 \leq x + y - 5 \leq 2,$$
$$3 \leq x + y \leq 7$$

a) Vậy tổng $A = x + y$ lớn nhất bằng 7, khi đó $y - 1 = 0$ hay $y = 1$.

Vậy ta có $\begin{cases} x + y = 7 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A_{max} = 7$.

b) Tổng $A = x + y$ nhỏ nhất bằng 3, khi đó $y - 1 = 0$ hay $y = 1$

Từ $\begin{cases} x + y = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A_{min} = 3$.

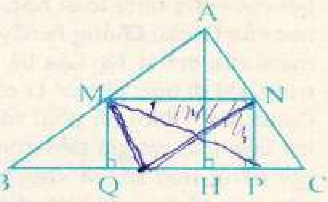
Trả lời: Với nghiệm $\begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases}$ thì $A = x + y$ đạt giá trị lớn nhất : $A_{max} = 7$

Với nghiệm $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ thì $A = x + y$ đạt giá trị nhỏ nhất : $A_{min} = 3$.

Bài 3 (bảng B)

Ta phải chứng minh $S \geq 2S_1$.

Thật vậy, hạ đường cao $AH \perp BC$,



Ta có :

$S = \frac{1}{2} AH . BC$; $S_1 = MN.MQ$

Vì $MNPQ$ là hình chữ nhật nên $MQ \perp BC$. Mặt khác $AH \perp BC$, suy ra $MQ // AH$.

Từ đó ta có : $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}$ (1) (vì $MN // BC$)

$\frac{MQ}{AH} = \frac{BM}{AB}$ (2) (vì $MQ // AH$.

Suy ra :

$\frac{MN}{BC} . \frac{MQ}{AH} = \frac{AM}{AB} . \frac{BM}{AB} = \frac{1}{AB^2}(AM.BM)$

$\leq \frac{1}{AB^2}\left(\frac{AM + BM}{2}\right)^2$

hay $\frac{MN.MQ}{BC.AH} \leq \frac{1}{AB^2} . \frac{AB^2}{4} = \frac{1}{4}$

vậy $MN.MQ \leq \frac{BC.AH}{4}$

hay $S_1 \leq \frac{S}{2}$. Vậy $S \geq 2S_1$ (đpcm).

Dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $AM = BM$. Lúc đó MN là đường trung bình của ΔABC.

Bài 4: (xem đáp án ở bảng A)

NGUYỄN HỮU THẢO
(Bộ Giáo dục & Đào tạo)

TIỂU SỬ CÁC NHÀ TOÁN HỌC

K.F. GAUSS - ÔNG VUA CỦA TOÁN HỌC

(1777 - 1855)

LÂU đài toán học hiện nay thật là đồ sộ mà ít có ai có thể đi khắp được các phòng của nó. Lâu đài ấy được xây dựng trên những cột trụ vững vàng. Một trong những cột trụ sừng sững trong số ấy là K.F. Gauss.

Ông vua của toán học này sinh ở Gottingen năm 1777 và ba thập kỉ sau, thế giới toán học nói nhiều đến trường đại học Gottingen, đến nước Đức bởi các công trình toán học, vật lí học và thiên văn học của Gauss. Chúng ta hãy trở lại đầu thập kỉ tám mươi của thế kỉ 18. Cậu bé Gauss đã biết làm tính trước khi đi học. Người ta còn kể lại một giai thoại Gauss lúc 3 tuổi đã phát hiện ra giúp bố một lần khi ông tính sai giá tiền công. Một giai thoại khác nổi tiếng hơn kể về chuyện Gauss, cậu học sinh vừa học số học đã tính được rất nhanh tổng của các số tự nhiên từ 1 đến 100. 15 tuổi Gauss vào học ở trường Trung học hoàng gia Brunswick nhờ sự tài trợ của quận công Brunswick là K.W.Ferdinand. Gauss nắm rất vững các ngôn ngữ cổ và đã từng mơ ước trở thành triết gia. Nhưng toán học vẫn hấp dẫn cậu học sinh trung học yêu toán này. 18 tuổi Gauss vào học đại học ở Gottingen và một năm sau cậu sinh viên này đã trở nên nổi tiếng sau khi giải được phương trình $x^{17} - 1 = 0$ và từ đó dựng được đa giác đều 17 cạnh bằng thước thẳng và compa. Gauss bộc lộ một trí nhớ siêu việt và khả năng tính toán tuyệt vời. Nhờ đó ngay từ những năm học trung học Gauss đã nắm vững các ý tưởng của Euler, Lagrange, Newton. Gauss đã độc lập với A.M. Legendre tìm ra **phương pháp bình phương tối thiểu** ngay từ những năm 18 đến 21 tuổi. Năm 1795 Gauss viết luận án tiến sĩ và đã đưa ra **quy luật thuận nghịch bậc hai** thuộc lí thuyết đại số. Lí thuyết số hiện đại, mà một đỉnh cao của nó là góp phần giải được bài toán lớn Fecma, có thể nói được khởi thủy từ năm 1801. Đó là năm mà tác phẩm **Disquisitiones Arithemeticae** của Gauss được công bố. Như vậy có thể nói được rằng Gauss là một trong những thủy tổ của lí thuyết số. ông còn có nhiều công trình về số phức, sự tương đẳng, hình học hypecbolic, lí thuyết các mặt cong... 32 tuổi, Gauss trở thành giáo sư toán học và thiên văn học của đại học Gottingen kiêm giám đốc đài thiên văn ở đấy.

Người ta từng bảo rằng Gauss tìm ra các hành tinh chỉ bằng cách gọt bút chì. Chuyện kể rằng nhà thiên văn Piazzi và Olbergs đang quan sát tiểu hành tinh Ceres (do Piazzi tìm ra) thì bị mất hút tăm tích của nó. May thay 1801 Gauss đã đưa ra **phương pháp** tính toán quỹ đạo của các hành tinh và Piazzi, Olbergs cùng các nhà thiên văn khác hướng ống kính về phía mà Gauss đã chỉ ra bằng tính toán đã tìm lại được tiểu hành tinh 'bị đánh mất'. Cần nói thêm là lúc đó Gauss mới 24 tuổi. Môn cơ học thiên thể ra đời không thể quên ghi công khai sáng của Gauss bởi công trình **Lí thuyết chuyển động của các thiên thể** vào năm ông 32 tuổi. Cùng với các công trình toán học, các công trình thiên văn học, vật lí học trở thành các cành nhánh khổng lồ của **cây đại thụ của Gottingen: Gauss**. Sẽ thật là thú vị khi ta biết rằng Gauss còn là người chỉ huy việc lập bản đồ ở vương quốc Hanover bằng phương pháp tam giác đạc. Hình dạng gần chính xác của trái đất chúng ta cũng được Gauss vẽ ra hoàn chỉnh bởi cây bút sáng tạo ra những công trình trắc địa cao cấp. Kính phát tín hiệu đo, phương pháp xử lí kết quả đo và nhiều định lí cơ bản trong lí thuyết sai số thuộc phương pháp tính được khai sinh vào thập kỉ 20 của thế kỉ 19 vẫn bởi bộ óc và bàn tay thiên tài ấy. Vật lí học còn ghi dấu ấn của Gauss trong công trình **Cường độ từ lực Trái đất đưa về độ đo tuyệt đối** và từ đó thời gian tính bằng giây, độ dài tính bằng milimet và khối lượng tính bằng gam trở thành 3 đơn vị cơ bản của các đơn vị đo. 1833 với máy điện báo, 1839 với **Lí thuyết tổng quát về các lực hút và đẩy tác dụng tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách,** 1840 với lí thuyết dựng ảnh trong các quang hệ phức tạp, 1845 với tốc độ hữu hạn của sự truyền tương tác điện từ... Năm 1837 từ kế dây treo và 1839 thì công trình **Lí thuyết tổng quát về địa từ** gây tiếng vang lớn. Tên ông trở thành đơn vị đo vécto cảm ứng từ.

Người đời còn tốn nhiều giấy bút để viết về cuộc đời và những cống hiến kinh ngạc của ông. Bởi người ta khó mà tìm thấy một địa hạt toán học nào vắng bóng dáng ông.

Chỉ đáng tiếc rằng ông cũng đã từng nghiên cứu hình học phi Oclit như Lôbasepxki nhưng ngại không công bố các phát minh ấy vì sợ những kẻ dốt nát không hiểu sẽ cười cợt, chế nhạo.

Ngọc nào mà chẳng có vết. Dẫu có điều ấy Gauss vẫn mãi mãi trở thành một cột mốc vĩ đại trên con đường nhận thức của nhân loại. Dân tộc Đức vĩ đại có quyền tự hào vì thế giới không có nhiều người như Gauss. Có chăng, chỉ có Newton, Euler và vài người khác.

14.11.1997

VŨ KIM THỦY

Giáo sư HOÀNG TỤY - Một nhà toán học lớn của Việt Nam

KỲ LAM

Nhân dịp Giáo sư Hoàng Tụy 70 tuổi, Tạp chí Toán học và tuổi trẻ xin chúc mừng giáo sư. Chúng tôi trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc bài viết của Kỳ Lam về Giáo sư Hoàng Tụy.

MỌI người chúng ta đều ít nhiều nghe đến danh tiếng giáo sư Hoàng Tụy. Năm 1996 ông là một trong những nhà khoa học đầu tiên được Nhà nước ta trao tặng giải thưởng Hồ Chí Minh. Nhưng ít ai biết đến công lao của ông đối với sự phát triển toán học Việt Nam và những thành tựu toán học của ông.

Giáo sư Hoàng Tụy sinh năm 1927 ở làng Xuân Đài, nay là xã Điện Quang, thuộc huyện Điện Bàn, tỉnh Quảng Nam. Ông sinh ra trong một gia đình quan lại có họ với Hoàng Diệu, tổng đốc Hà Nội, người đã anh dũng chỉ huy quân dân bảo vệ thành Hà Nội khi giặc Pháp đánh Hà Nội lần đầu tiên và tự vẫn khi thành Hà Nội thất thủ.

Hồi còn nhỏ giáo sư Hoàng Tụy nổi tiếng là học giỏi. Khi thi lấy bằng tú tài ở Huế năm 1946, ông đạt được số điểm cao nhất của kì thi. Sau đó ông ra Hà Nội xin vào học ở trường Đại học Hà Nội. Chưa được hai tháng thì cuộc kháng chiến chống Pháp bùng nổ. Phải quay trở về quê nhà nhưng ông vẫn không quên mua một số sách để tự học. Những năm đầu của cuộc kháng chiến chống Pháp ông dạy học ở vùng tự do Quảng Ngãi. Khi đó ông đã viết một cuốn sách hình học cho học sinh phổ thông. Cuốn sách này được chính quyền kháng chiến Liên khu 5 in năm 1949 và có lẽ đó là cuốn sách giáo khoa đầu tiên được in ở vùng tự do. Trong những năm 50 đây là một cuốn sách giáo khoa rất được học sinh yêu thích. Năm 1951 ông nghe nói là giáo sư Lê Văn Thiêm, người Việt Nam đầu tiên có học vị tiến sĩ về toán học, đã từ châu Âu trở về nước tham gia kháng chiến và đang dạy học ở chiến khu Việt Bắc. Vì vậy ông đi bộ từ miền Nam ra miền Bắc để được học đại học với giáo sư Lê Văn Thiêm. Do các lớp đại học chưa mở nên ông được cử đi dạy học ở Khu học xá trung ương đóng tại Nam Ninh, Trung Quốc. Tại đây ông tự học tiếng Nga để có thể đọc một số cuốn sách toán học hiện đại của Liên xô nhằm nâng cao trình độ của mình.

Kháng chiến thành công, giáo sư Hoàng Tụy được phân công dạy toán ở trường Đại học Hà Nội do giáo sư Lê Văn Thiêm làm hiệu trưởng. Năm 1955, mới 28 tuổi, ông được chính chính phủ đã cử làm trưởng ban trù bị cải cách giáo dục phổ thông. Cuối năm 1957 ông được cử đi thực tập một năm ở trường Đại học tổng hợp quốc gia Mát-xcơ-va. Chỉ sau một thời gian ngắn ông đã chứng minh được nhiều kết quả đủ cho một luận án phó tiến sĩ. Vì vậy ông được ở lại thêm vài tháng để bảo vệ luận án và công bố các kết quả nghiên cứu của mình. Trở về Hà Nội đầu năm 1959 ông được bổ nhiệm làm chủ nghiệm khoa Toán trường Đại học tổng hợp. Từ năm 1980 đến 1990 ông là viện trưởng Viện toán học, Viện khoa học Việt Nam. ông là một trong những người sáng lập ra Hội toán học Việt Nam. Cùng với giáo sư Tạ Quang Bửu và giáo sư Lê Văn Thiêm ông đã góp phần xây dựng nên một nền toán học Việt Nam phát triển như ngày hôm nay.

Các lĩnh vực nghiên cứu của Giáo sư Hoàng Tụy rất rộng. Khởi đầu ông nghiên cứu giải tích thực. Sau đó ông chuyển sang nghiên cứu vận trù vì ông nghĩ rằng môn này có lợi cho việc ứng dụng toán học vào thực tế ở Việt Nam. Có thể hiểu vận trù là việc đưa ra các lời giải tối ưu cho một vấn đề nào đó. Ông đã liên hệ với những nhà toán học nổi tiếng như Kantorovich (Liên Xô, giải Nôbel về kinh tế) và Hoa La Canh (Trung Quốc) để có thể đi sâu vào lĩnh vực vận trù học. Từ *vận trù* chính là do ông phiên âm từ tiếng Hoa sang tiếng Việt. Có thể coi ông là người đầu tiên giới thiệu môn *vận trù* vào Việt Nam. Chủ tịch Hồ Chí Minh, cựu thủ tướng Phạm Văn Đồng và nhiều nhà lãnh đạo khác đã nhiều lần gặp ông để tham vấn về việc ứng dụng vận trù vào các vấn đề thực tiễn. Nhiều học trò của ông nay đã trở thành những chuyên gia về vận trù có tiếng trên thế giới.

Giáo sư Hoàng Tụy đã công bố hơn 100 công trình nghiên cứu ở các tạp chí toán học quốc tế về rất nhiều bài giảng và sách chuyên khảo. ông là nhà toán học đầu tiên thấy được tầm quan trọng của vấn đề cực tiểu lõm trong vận trù. Năm 1963 ông đề ra một thuật toán, ngày nay được gọi là nhát cắt Tụy, và nhiều phương pháp khác để giải quyết bài toán cực tiểu lõm. Các phương pháp này đã góp phần thúc đẩy sự phát triển của một chuyên ngành mới là tối ưu toàn cục. Nhiều nhà toán học quốc tế coi ông là một trong những cha đẻ của chuyên ngành này. Ông thường xuyên được mời đến báo cáo ở nhiều trường đại học và viện nghiên cứu danh tiếng trên thế giới. Tại nhiều hội nghị quốc tế, ông được mời vào ban chương trình hay đọc báo cáo mời toàn thể. ông tham gia vào ban biên tập nhiều tạp chí toán học quốc tế như Mathematical Programming, Optimization, Journal of Global Optimization, Acta Mathematica Vietnamica, Vietnam Journal of Mathematics. Đặc biệt, năm 1995 ông đã được Học viện công nghệ Linkoping, Thụy Điển, tặng bằng tiến sĩ danh dự. Có lẽ ông là nhà khoa học Việt Nam đầu tiên có được một vinh dự như vậy.

***

Năm 1997 giáo sư Hoàng Tụy tròn 70 tuổi. Để kỉ niệm sự kiện này, Viện toán học tổ chức một hội nghị quốc tế về Giải tích ứng dụng và tối ưu vào cuối tháng 12/1997 với sự tham gia của khoảng 25 nhà toán học nước ngoài. Trước đó, vào tháng 8/1997, Học viện công nghệ Linkoping đã tổ chức riêng một hội nghị về Tối ưu toàn cục để mừng giáo sư Hoàng Tụy 70 tuổi với sự tham gia của nhiều chuyên gia quốc tế hàng đầu. Tạp chí Acta Mathematica Vietnamica đã dành hai số của năm 1997 để đăng hơn 30 bài báo của các nhà toán học nước ngoài và trong nước gửi đăng nhân dịp này.

Theo lẽ thường tuổi 70 là tuổi nghỉ ngơi, vui thú với bạn bè và con cháu, nhưng giáo sư Hoàng Tụy vẫn miệt mài nghiên cứu toán học. Nếu chúng ta đến thăm ông tại nhà riêng lúc này thì gần như chắc chắn sẽ thấy ông đang bên bàn làm việc. Sức sáng tạo toán học của ông làm ngay cả những chuyên gia đầu ngành kinh ngạc. Cũng như những năm trước, số lượng công trình nghiên cứu của ông được công bố năm nay trong các tạp chí quốc tế vẫn đứng ở một trong những vị trí đầu bảng ở Việt Nam. Theo quan niệm của giới toán học thế giới thì hễ ai có được hai bài báo đăng trong tạp chí quốc tế sẽ được coi là một nhà toán học. Nếu xét như vậy thì giáo sư Hoàng Tụy đã bằng 50 nhà toán học và cứ mỗi năm ông lại là một nhà toán học mới, trẻ mãi không già.

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC *(Tiếp theo trang 16)*

b) Xét hàm số $f(x) = \mathrm{tg}x - x$ $(0 \le x \le \pi/4)$ Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 \ge 0$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trong $[0, \pi/4]$

$\Rightarrow f(x) \ge f(0) = 0 \Rightarrow \mathrm{tg}x = x$

$$I_n = \int_0^{\pi/4} x\mathrm{tg}^n x\,dx > \int_0^{\pi/4} x\,.\,x^n dx = \frac{1}{n+2} x^{n+2} \Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{n+2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+2} \Rightarrow \text{đpcm}$$

Câu Vb : a) $J = \int_0 x(1-x^2)^n dx$

$$= -\frac{1}{2}\int_0 (1-x^2)^n d(1-x^2) = -\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{x+1}}{n+1}\Big|_0^1$$

$$\Rightarrow J = \frac{1}{2(n+1)}$$

Ghi chú : Nếu thí sinh đổi biến $x = \sin t$ hoặc $x = \cos t$ mà có kết quả đúng cho điểm tối đa.

b) Ta có khai triển Niutơn:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \dots + C_n^n x^n \Rightarrow$$

$$(1-x^2)^n = C_n^0 + C_n^1(-x^2) + C_n^2(-x^2)^2 + C_n^3(-x^2)^3 + \dots + C_n^n(-x^2)^n$$

$$\Rightarrow x(1-x^2)^n = xC_n^0 - x^3C_n^1 + x^5C_n^2 - x^7C_n^3 + \dots + \dots + (-1)^n x^{2n+1} C_n^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0 x(1-x^2)^n dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 C_n^0 - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 C_n^1 + \frac{x^6}{6}\Big|_0^1 C_n^2 - \frac{x^8}{8}\Big|_0^1 C_n^3 + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+2}\Big|_0^1 C_n^n$$

Vậy : $\dfrac{1}{2(n+1)} =$

$$= \frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 - \frac{1}{8}C_n^3 + \dots\cos\frac{(-1)^n}{2n+2}C_n^n$$

$\Rightarrow$ đpcm

TOÁN HỌC CÓ KHÔ KHAN KHÔNG?

Chúng tôi muốn "khai trương" Câu lạc bộ của chúng ta bằng một câu hỏi như trên... Mong rằng với sự ủng hộ của các bạn, Câu lạc bộ của những người yêu toán sẽ thật là vui vẻ, bổ ích và trẻ trung. Sau những phút giờ suy nghĩ căng thẳng, chúng ta hãy cùng vào Câu lạc bộ nhé!

NGHE CÁC NHÀ TOÁN ĐỌC THƠ

Trong Câu lạc bộ của chúng ta, chúng tôi muốn đặt hẳn một bàn tròn để "Nghe các nhà Toán đọc thơ", mong các bạn khắp nơi nhiệt tình gửi Thơ về. Để khai trương bàn tròn, xin giới thiệu với các bạn hai bài thơ của hai nhà toán học quen biết : GS Văn Như Cương và PTS. Lê Quốc Hán.

VĂN NHƯ CƯƠNG

TOÁN VÀ HOA

Em cầm hoa tươi đặt cạnh bàn
Mong rằng Toán học bớt khô khan ?
Em ơi! Trong Toán nhiều công thức
Cũng đẹp như Hoa... lại chẳng tàn!

LÊ QUỐC HÁN

MUỘN

Gặp nhau cuối độ thu tàn
cành si lại thả lá vàng trên tay
Tóc xưa xanh một màu mây
nay thành mưa trắng rơi đầy áo nhau.
Lung liêng giải yếm bắc cầu
Chỉ tơ đã mục còn khâu làm gì ?
Xin đừng ướt đỏ đôi mi
kẻo mai ngập hết đường đi lối về.

ĐÔNG, 1993

LTS: *Bài thơ rút từ tập thơ "Lời khấn nguyện" - NXB Hội Nhà văn - Hà Nội - 1996 do tác giả gửi tặng Tòa soạn.*

HỌA THƠ KIỂU TOÁN

Hãy bắt đầu bằng một câu thơ mở đầu truyện Kiều của Đại thi hào Nguyễn Du:

Trăm năm trong cõi người ta
Chữ tài, chữ mệnh khéo là ghét nhau

Chúng tôi xin ghi lại số chữ cái dùng trong mỗi tiếng ở câu thơ trên (tạm gọi là *chìa khóa toán học*):

4 3 5 3 5 2
3 3 3 4 4 2 4 4

Các bạn hãy họa lại câu thơ trên (theo kiểu riêng của con nhà Toán) sao cho *chìa khóa toán học không thay đổi*.

Chẳng hạn:

Toán Thơ quyện mãi trong ta
Yêu Thơ, say Toán khéo mà... ngất ngây!

Các câu thơ hay nhất, vui nhất sẽ được giới thiệu trên tạp chí ! Hạn nhận bài đến ngày 15 tháng 2 năm 1998 theo dấu Bưu điện.

LÊ THỐNG NHẤT

VÔ LÍ! KHÔNG CÓ LẼ...

Vợ tôi là giáo viên. Bà ấy về hưu được mấy năm, có tham gia công tác kế hoạch hóa gia đình ở phường. Một hôm, đi vận động sinh đẻ có kế hoạch về, mặt hầm hầm.

- Ông có biết ông Ba Gàn ở đầu đường không? 60 tuổi rồi, thiếu 1 đầy một tá rồi mà còn cãi chày, cãi cối! Ông ấy nói rằng số người trên Trái đất ngày xưa đông hơn bây giờ nhiều!.

- Lí luận của ông ta ra sao?

- Ông ấy hỏi tôi dạy toán có biết phép tính lũy thừa không, rồi lí luận toán học với tôi như thế này:

25 năm trước, bà có hai tổ tiên là cha và mẹ

50 trước bà có 4 tổ tiên là ông bà nội ngoại

75 năm trước bà có 8 tổ tiên là ông bà cố nội (của ông nội), ông bà cố nội (của bà nội), ông bà cố ngoại (của ông ngoại), ông bà cố ngoại (của bà ngoại).

... Vân vân và vân vân...

Như thế, cứ lùi lại 25 năm thì số tổ tiên lại tăng gấp hai.

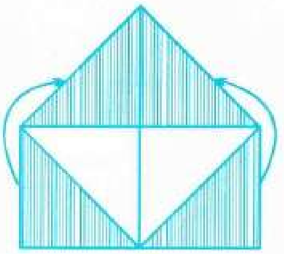
Thế thì 2000 năm trước bà có 2^{80} tổ tiên. Thế mà $2^{80} \approx 12.10^{23} = 1$ triệu 2 trăm ngàn tỉ tỉ tiền bối.

Giải trí TOÁN HỌC

Giải đáp bài

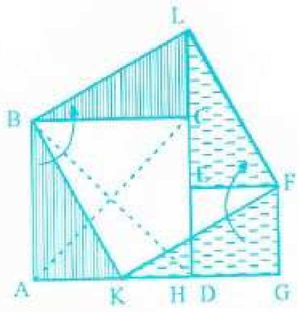
CẮT VÀ GHÉP BA HÌNH VUÔNG

Cắt và ghép hai hình vuông nhỏ thành một hình vuông lớn hơn như hình 1. Gọi hình vuông đó là *ABCD*. Gọi hình vuông thứ ba còn lại là *EFGH*. Ta xếp hai hình vuông này sít liền nhau như hình 2.



Hình 1

Trên cạnh *AD* lấy điểm K sao cho *AK* = *HG* (cạnh của hình vuông nhỏ). Cắt hai hình vuông ghép với nhau này theo hai đường *BK* và *FK*. Sau đó ghép như hình vẽ ta được tứ giác *BKFL* là hình thoi có một góc vuông. Vậy ta được hình vuông từ cắt và ghép ba hình vuông nhỏ bằng nhau (Của *Nguyễn Mạnh Tùng*, 8B, Nguyễn Trãi, **Hải Dương**).



Hình 2

- Các bạn *Nguyễn Mạnh Tuấn*, 6A, Thanh Dương, Thanh Cương, **Nghệ An**. *Đào Văn Nam*, 8A, Sao Khuê, Thường Tín, **Hà Tây**. *Nguyễn Khánh An* (A_6, Trần Đăng Ninh, **Nam Định**. *Lê Quang Trung*, 10A, Tam Nông, Phú Thọ. *Nguyễn Ái Phương*, 10A, Phú Lộc, **Thừa Thiên - Huế**, *Ngô Thu Hương*, 11TN, Năng Khiếu, **Hưng Yên**. *Lê Xuân Dũng*, 11A, Lương Đắc Bằng, **Hoằng Hóa, Thanh Hóa** cũng có các đáp án tốt.

BÌNH PHƯƠNG

NHỮNG NĂM NÀO

Từ khi thành lập kinh thành Thăng Long (1010) đến hết thế kỉ 20, những năm nào ứng với một số chia hết cho 54 và khi quay ngược các chữ số của mỗi số đó đi 180° thì các chữ số lộn ngược vẫn là các chữ số bình thường?

NGÔ HÂN
(Bắc Ninh)

Số người trên Trái đất bây giờ mới có 6 tỉ, ăn thua gì với ngày xưa! Ngày xưa người ta vẫn sống tốt đẹp, vui vẻ, cần gì phải kế hoạch hóa cho tốn xăng dầu!

Thật nghe mà tức như bò đá! Vô lí! Không có lẽ...

- Thế bà trả lời ra sao?

- Còn biết trả lời ra sao nữa! ông viết sách Toán đã nhiều, ông đi mà lí luận với ông ấy.

Thưa các bạn, tôi cũng không biết lí luận ra sao với ông Ba Gàn cho sáng mắt sáng lòng. Mong các bạn chỉ cho. Cám ơn nhiều nhiều.

PHAN THANH QUANG
(Thành phố Hồ Chí Minh)

ISSN : 0866 - 0835
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT47M7

Sắp chữ tại Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 1998

Giá : 3.000đ
Ba nghìn đồng