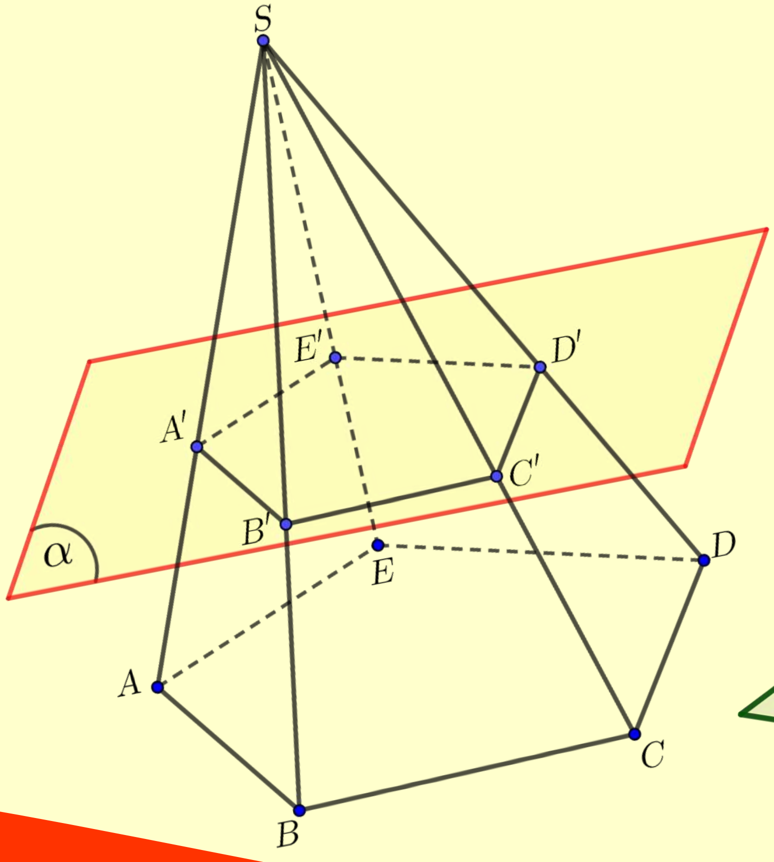
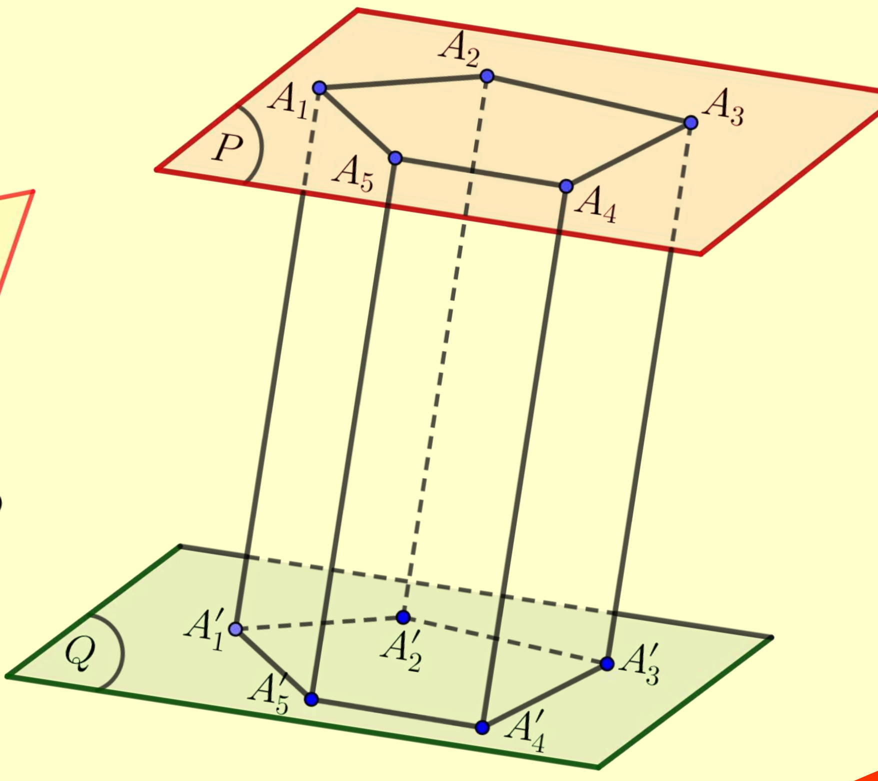
LÊ MINH TÂM

CHƯƠNG 01.

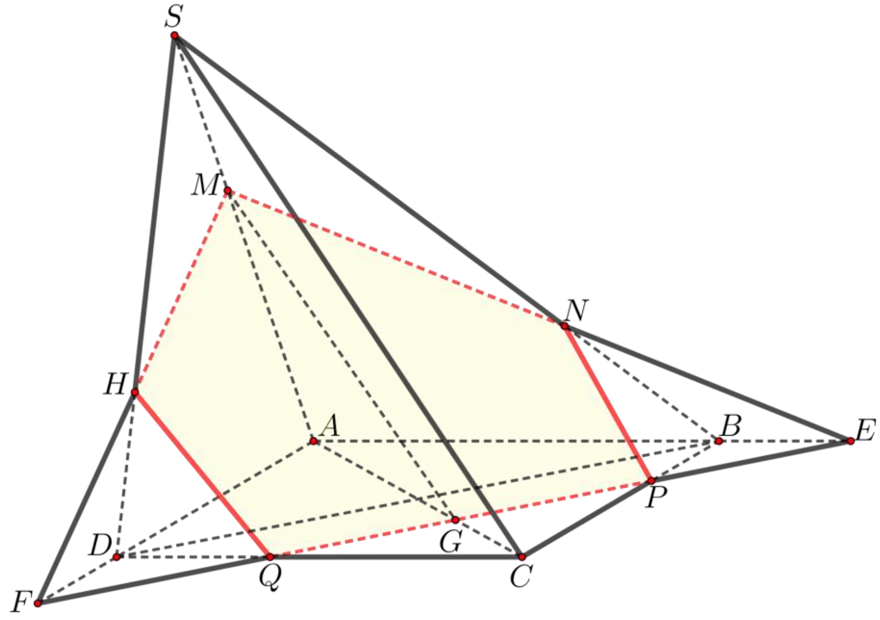
THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN





TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

MỤC LỤC



CHUYÊN ĐỀ

THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

Các định nghĩa.

– ***Hình chóp*** là hình có đáy là một đa giác và các mặt bên là các tam giác có chung một đỉnh.
– ***Hình lăng trụ*** là hình có hai đáy là hai đa giác bằng nhau nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau và các mặt bên đều là các hình bình hành.
– ***Hình hộp*** là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.

Thể tích khối chóp.

☑ ***Công thức tính thể tích khối chóp:***

$$\boxed{V = \frac{1}{3}.S.h}$$

Trong đó: S là diện tích đáy và h là chiều cao khối chóp (khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy).
Cách xác định đường cao khối chóp:

a. Chóp có cạnh bên vuông góc chiều cao chính là cạnh bên.
b. Chóp có hai mặt bên vuông góc đáy đường cao là giao tuyến của hai mặt bên vuông góc đáy.
c. Chóp có mặt bên vuông góc đáy: chiều cao của mặt bên vuông góc đáy.
d. Chóp đều chiều cao hạ từ đỉnh đến tâm đa giác đáy.
e. Chóp có hình chiếu vuông góc của một đỉnhlên xuống mặt đáy thuộc cạnh mặt đáy đường cao là từ đỉnh tới hình chiếu.

Thể tích khối lăng trụ.

☑ ***Công thức tính thể tích khối lăng trụ:***

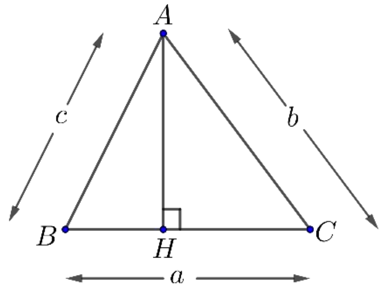
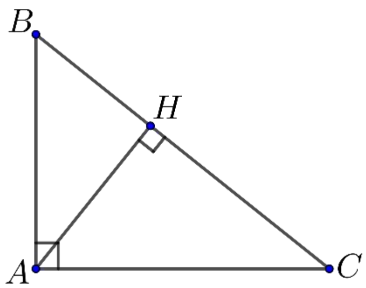
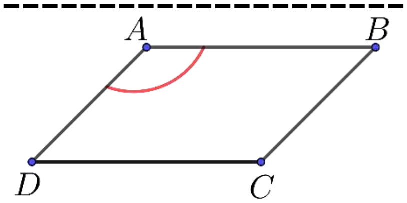
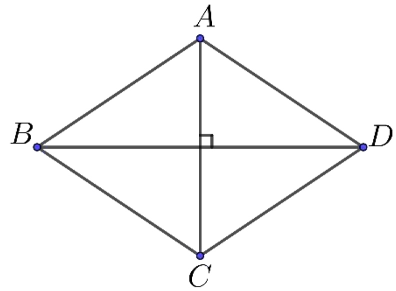
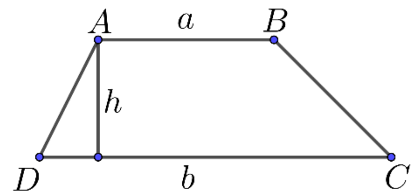
$$\boxed{V = S.h}$$

Trong đó: S là diện tích đáy và h là chiều cao khối chóp (khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy).

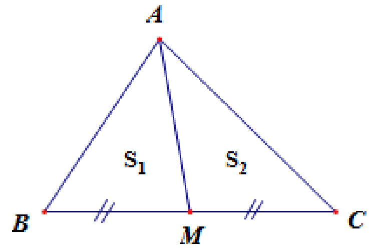
- ***Thể tích khối hộp chữ nhật:*** $V = a.b.c$.
- ***Thể tích khối lập phương:*** $V = a^3$.

Công thức diện tích đáy.

Ta có các đa giác thường gặp sau:

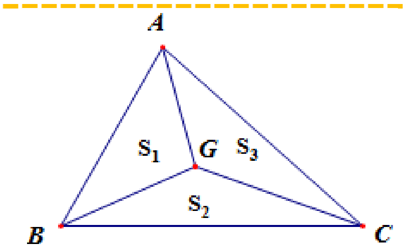
Tam giác  	$S=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b=\frac{1}{2}c.h_c$	
	$S=\frac{1}{2}ba.\sin A=\frac{1}{2}ca.\sin B=\frac{1}{2}ba.\sin C$	
	$S=\frac{abc}{4R}=2R^2.\sin A.\sin B.\sin C$ với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.	
	$S=p.r$ với p là nửa chu vi và r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC.	
	$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p=\frac{a+b+c}{2}$ hoặc $S=\frac{1}{4}\sqrt{\left[(a+b)^2-c^2\right]\left[c^2-(a-b)^2\right]}$	
	ΔABC vuông tại A: $S=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}BC.AH$.	
	ΔABC đều, cạnh x: $S=\frac{(x)^2\sqrt{3}}{4}$; Chiều cao tam giác đều $h=\frac{(x)\sqrt{3}}{2}$.	
Hình vuông cạnh x.	$S=(x)^2$	
Hình chữ nhật.	$S=(x).(y)$ ($x;y$: dài và rộng)	
Hình bình hành $ABCD$.	$S=AB.AD.\sin BAD$	
Hình thoi $ABCD$.	$S=AB.AD.\sin BAD=\frac{1}{2}AC.BD$	
Hình thang:	$S=\frac{1}{2}(a+b).h$ (a, b: hai đáy, h: chiều cao)	
Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc	$S=\frac{1}{2}AC.BD$	

Tỷ số diện tích



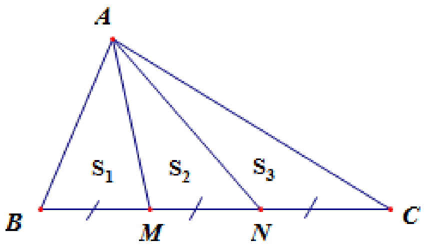
AM trung tuyến,

đặt $S_{ABC} = S \longrightarrow S_1 = S_2 = \dfrac{S}{2}$.



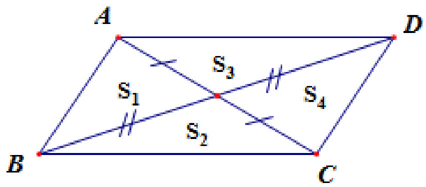
G là trọng tâm,

đặt $S_{ABC} = S \longrightarrow S_1 = S_2 = S_3 = \dfrac{S}{3}$.

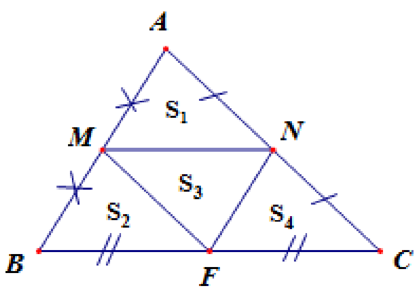


$NM = MN = NC$

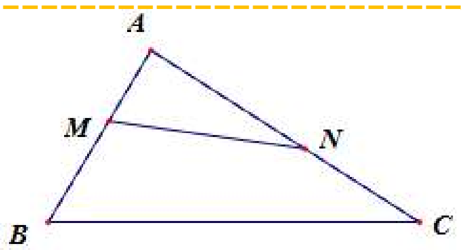
đặt $S_{ABC} = S \longrightarrow S_1 = S_2 = S_3 = \dfrac{S}{3}$.



$S_{ABCD} = S \longrightarrow S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \dfrac{S}{4}$.



$S_{ABC} = S \longrightarrow S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \dfrac{S}{4}$.



$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC}.$$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Dạng toán 1. CHÓP CÓ CẠNH BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY.

Phương pháp giải

Khối chóp có sẵn chiều cao và diện tích đáy.

Áp dụng công thức: $\boxed{V=\frac{1}{3}.S.h}$

☆ Ví dụ 01.

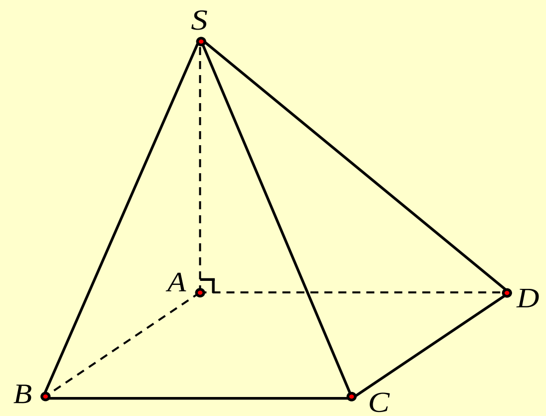
Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Biết SA vuông góc với $(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $\frac{a^3}{4}$.

B. $a^3\sqrt{3}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

D. $3a^3$.



Lời giải

Chọn D

Thể tích khối chóp $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

☆ Ví dụ 02.

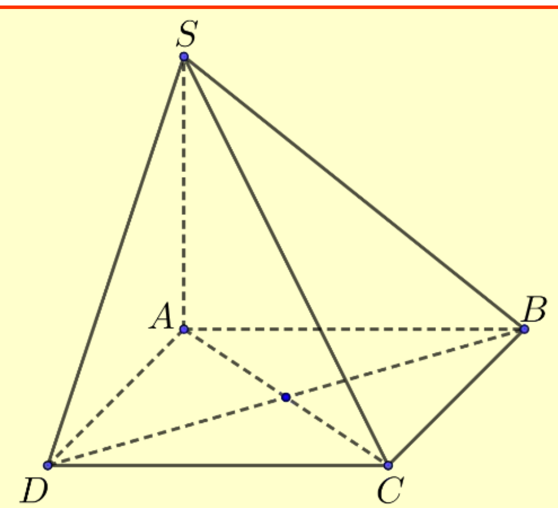
Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=2a$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng:

A. $\frac{4a^3}{3}$.

B. $2a^3$.

C. $\frac{a^3}{3}$.

D. $\frac{2a^3}{3}$.



Lời giải

Chọn D

$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABCD}\cdot SA=\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot 2a=\frac{2a^3}{3}$.

☆ Ví dụ 03.

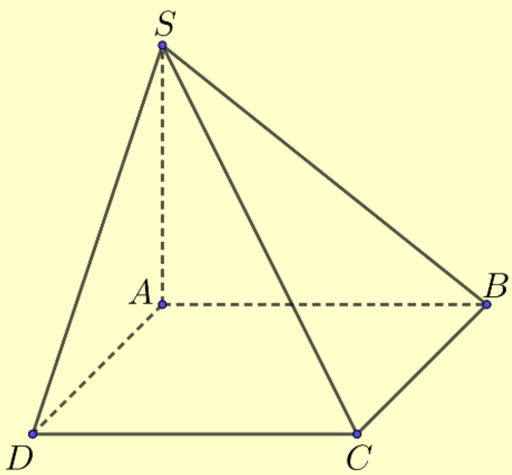
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a, BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

B. $a^3\sqrt{2}$.

C. $2a^3\sqrt{2}$.

D. $\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.



Lời giải

Chọn D

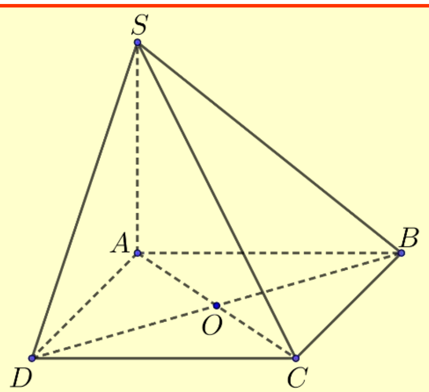
Diện tích đáy: $S_{ABCD} = AB.BC = 2a^2$. Thể tích: $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

☆ Ví dụ 04.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và có độ dài bằng $2a$. Thể tích khối tứ diện $S.BCD$ là:

A. $\dfrac{a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3}{8}$.

C. $\dfrac{a^3}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3}{3}$.



Lời giải

Chọn D

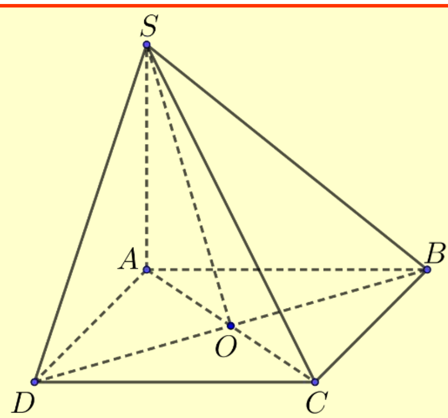
Ta có: $S_{\Delta BCD} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} = \dfrac{a^2}{2}$. Suy ra $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{\Delta BCD} = \dfrac{1}{3}.2a.\dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^3}{3}$.

☆ Ví dụ 05.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh $2a$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABO$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{12}$.

C. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **D.** $\dfrac{4a^3\sqrt{2}}{3}$.



Lời giải

Chọn A

Ta có: $AC = 2a.\sqrt{2} \Rightarrow OA = OB = \dfrac{AC}{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow S_{OAB} = \dfrac{1}{2}OA.OB = a^2$.

Vậy: $V_{S.OAB} = \dfrac{1}{3}SA.S_{OAB} = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{2}.a^2 = \dfrac{\sqrt{2}}{3}.a^3$.

Dạng toán 2. CHÓP CÓ MẶT BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY.

Phương pháp giải

Khối chóp có mặt bên vuông góc mặt phẳng đáy.

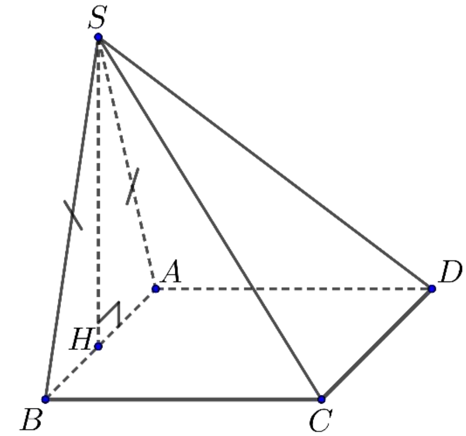
+ Áp dụng công thức: $\boxed{V = \dfrac{1}{3}.S.h}$.

+ Chiều cao khối chóp là đoạn thẳng từ đỉnh của chóp ta kẻ vuông góc vào giao tuyến của mặt bên và mặt đáy.

Một số kiểu thường gặp:

① Mặt bên (SAB) vuông với đáy $(ABCD)$ và SAB là tam giác đều cạnh $x \to SH \perp (ABCD) \to h = SH = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$ với H là trung điểm AB.

② Mặt bên (SAB) vuông với đáy $(ABCD)$ và SAB là tam giác cân tại $S \to SH \perp (ABCD) \to h = SH$ với H là trung điểm AB.



☆ Ví dụ 01.

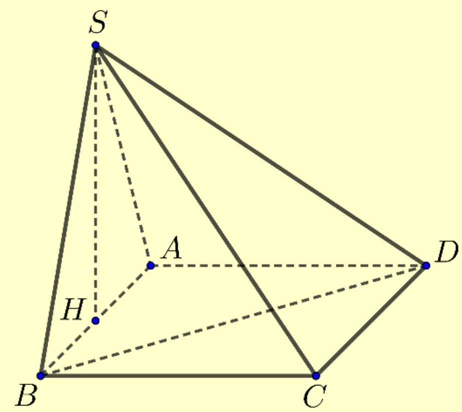
Hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình chữ nhật có $AB = 2a\sqrt{3}$; $AD = 2a$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối chóp $S.ABD$ là.

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a^3$.

B. $4\sqrt{3}a^3$.

C. $4a^3$.

D. $2\sqrt{3}a^3$.



Lời giải

Chọn D

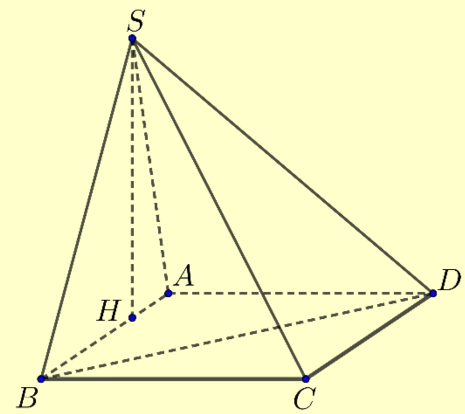
Gọi H là trung diểm của AB $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Tam giác SAB là tam giác đều cạnh $2a\sqrt{3}$ nên $SH = \dfrac{2a\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 3a$.

Vậy thể tích khối chóp $SABD$ là $V = \dfrac{1}{3}\cdot SH\cdot S_{ABD} = \dfrac{1}{3}\cdot 3a\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 2a\sqrt{3}\cdot 2a = 2\sqrt{3}a^3$.

✫ Ví dụ 02.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a; hình chiếu của S trên $(ABCD)$ trùng với trung điểm của cạnh AB; cạnh bên $SD=\dfrac{3a}{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ tính theo a bằng:



A. $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

C. $\dfrac{a^3\sqrt{7}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là trung điểm của AB nên $SH\perp(ABCD)$.

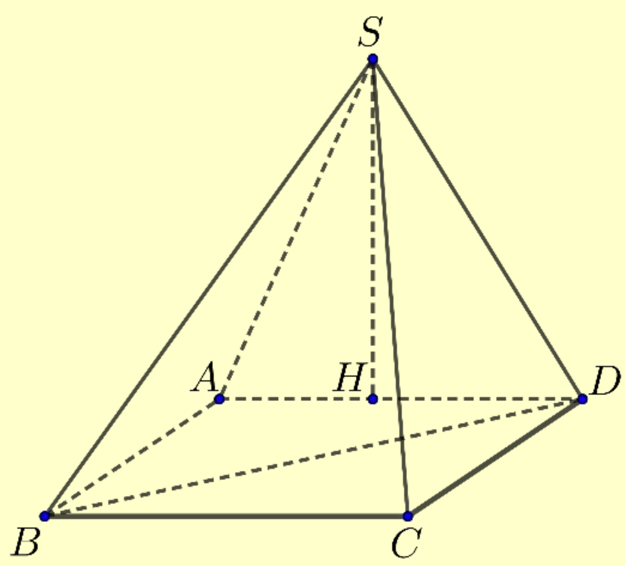
Lại có $DH=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}a$.

Xét tam giác SDH vuông tại HL.

$SH=\sqrt{SH^2-DH^2}=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}a\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2}=a\Rightarrow V=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SH=\dfrac{1}{3}a^3$.

✫ Ví dụ 03.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $(SAD)\perp(ABCD)$, $SA=SD$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ biết $SC=\dfrac{a\sqrt{21}}{2}$.



A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{7}}{2}$.

B. $V=2a^3$.

C. $V=\dfrac{a^3\sqrt{7}}{6}$.

D. $V=\dfrac{2a^3}{3}$.

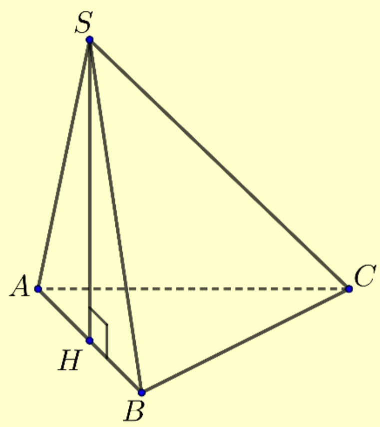
Lời giải

Chọn D

Ta có: $HC=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\Rightarrow SH=2a\Rightarrow V=\dfrac{1}{3}.a^2.2a=\dfrac{2a^3}{3}$.

✫ Ví dụ 04.

Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác vuông cân tại C và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABD), tam giác ABD là tam giác đều và có cạnh bằng $2a$. Tính thể tích của khối tứ diện $ABCD$.



A. $a^3\sqrt{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

C. $a^3\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

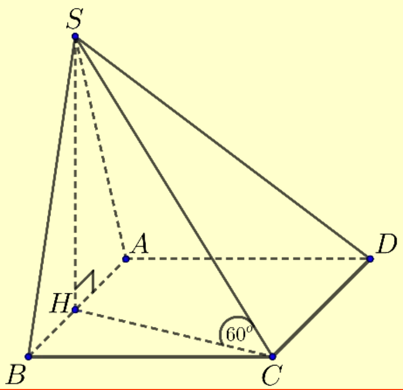
Chọn B

Gọi H là trung điểm của AB. Ta có $DH \perp (ABC)$ và $DH = a\sqrt{3}$.

ΔABC vuông cân tại $C \to 2CA^2 = AB^2 \Leftrightarrow AC = BC = a\sqrt{2} \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3}DH.S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

✫ Ví dụ 05.

Cho chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh $3a$. ΔSAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V $S.ABCD$, biết góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng 60^0



A. $V = 18a^3\sqrt{15}$ **B.** $V = 18a^3\sqrt{3}$.

C. $V = \frac{9a^3\sqrt{15}}{2}$. **D.** $V = 9a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $S_{ABCD} = (3a)^2 = 9a^2$

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

CH là hình chiếu vuông góc của SC trên $(ABCD)$

$\Rightarrow (SC,(ABCD)) = (SC,CH) = SCH = 60°$

Xét ΔSCH vuông tại H có

$CH = \sqrt{BC^2 + BH^2} = \frac{3a\sqrt{5}}{2}$, $SH = CH\tan SCH = \frac{3a\sqrt{15}}{2}$

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{9a^3\sqrt{15}}{2}$.

Dạng toán 3. CHÓP ĐỀU.

Phương pháp giải

Khối chóp có các cạnh bên bằng nhau

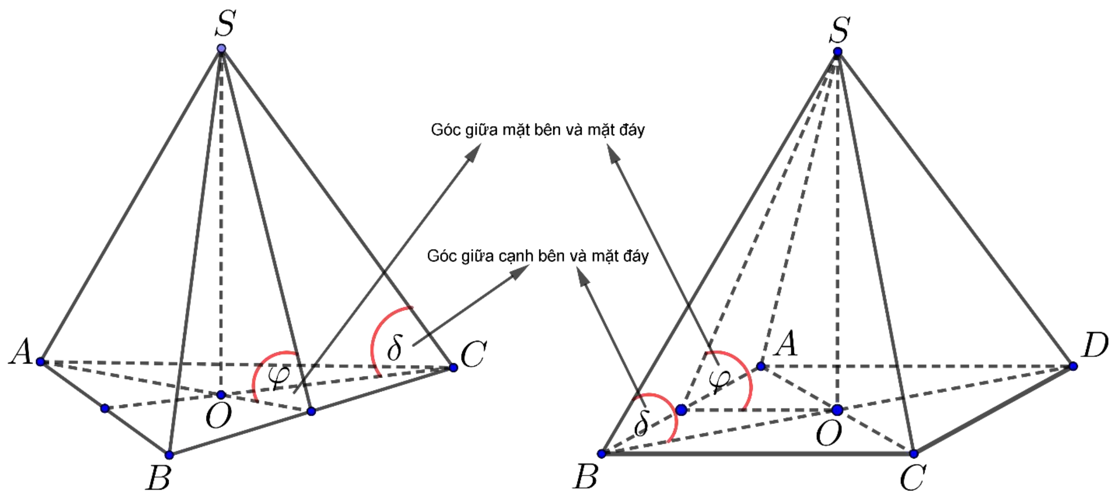
+ Áp dụng công thức: $\boxed{V=\frac{1}{3}.S.h}$.

+ Chiều cao khối chóp là đoạn thẳng từ đỉnh của chóp hạ vuông góc xuống tâm mặt đáy.

Một số kiểu thường gặp:

① Chóp đều $S.ABCD$, góc giữa mặt phẳng bên và mặt đáy là φ hoặc góc giữa cạnh bên và mặt đáy là δ.

② Chóp đều $S.ABC$, góc giữa mặt phẳng bên và mặt đáy là φ hoặc góc giữa cạnh bên và mặt đáy là δ.



Một số công thức tính nhanh:

Chóp đều cạnh x, đáy là tam giác	**Chóp đều cạnh x, đáy là tứ giác**
$V=\frac{(x)^3\sqrt{2}}{12}$.	$V=\frac{(x)^3\sqrt{2}}{6}$.
Chóp đều có cạnh bên bằng x, đáy là tam giác cạnh y.	Chóp đều có cạnh bên bằng x, đáy là tứ giác cạnh y.
$V=\frac{(y)^2\sqrt{3x^2-y^2}}{12}$.	$V=\frac{(y)^3\sqrt{4x^2-2y^2}}{6}$.
Chóp đều có các mặt bên cùng tạo với đáy một góc φ, đáy là tam giác cạnh x.	Chop đều có các mặt bên cùng tạo với đáy một góc φ, đáy là tứ giác cạnh x.
$V=\frac{(x)^3\tan\varphi}{24}$.	$V=\frac{(x)^3\tan\varphi}{6}$.

☆ Ví dụ 01.

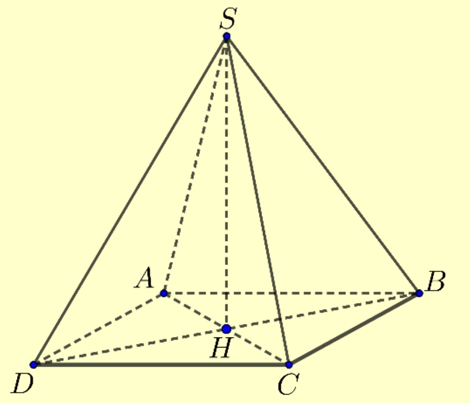
Tính chiều cao của hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b?

A. $\dfrac{\sqrt{4b^2+2a^2}}{2}$.

B. $\dfrac{\sqrt{4b^2-2a^2}}{2}$.

C. $\dfrac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2}$.

D. $\dfrac{\sqrt{4b^2+a^2}}{2}$.



Lời giải

Chọn B

Gọi H là tâm hình vuông $ABCD$,

Do S.ABCD là hình chóp tứ giác đều nên $SH\perp(ABCD)$.

Ta có $SH=\sqrt{SC^2-HC^2}=\sqrt{b^2-\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{4b^2-2a^2}}{2}$.

☆ Ví dụ 02.

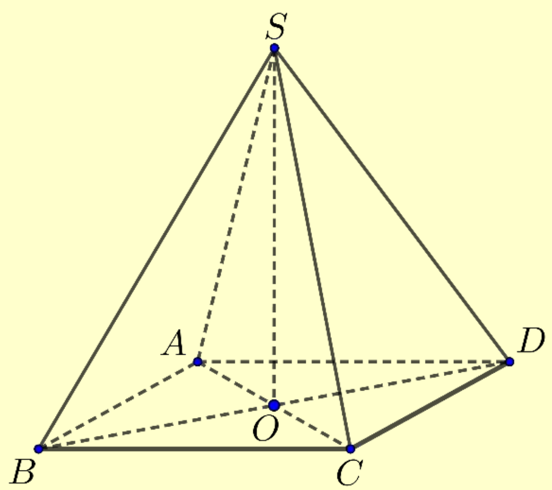
Tính thể tích của khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b là:

A. $\dfrac{a^2\sqrt{b^2-2a^2}}{6}$.

B. $\dfrac{a^2\sqrt{4b^2-2a^2}}{6}$.

C. $\dfrac{a^2\sqrt{4b^2+2a^2}}{6}$.

D. $\dfrac{a^2\sqrt{4b^2+a^2}}{6}$.



Lời giải

Chọn B

$S.ABCD$ là chóp tứ giác đều nên $SO\perp(ABCD)$.

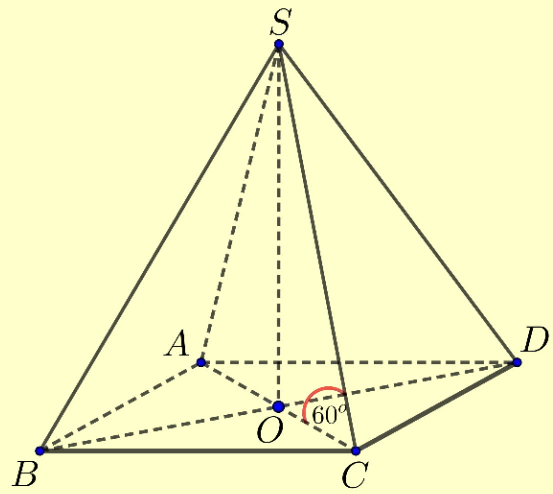
BD là đường chéo hình vuông cạnh a nên $BD=a\sqrt{2}\Rightarrow OB=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $SO=\sqrt{SB^2-OB^2}=\sqrt{b^2-\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{4b^2-2a^2}}{2}$.

$V=\dfrac{1}{3}.SH.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{4b^2-2a^2}}{2}.a^2=\dfrac{a^2\sqrt{4b^2-2a^2}}{6}$.

☆ Ví dụ 03.

Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên tạo với đáy một góc $60°$. Thể tích của hình chóp đều đó là:



A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

B. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

C. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

D. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

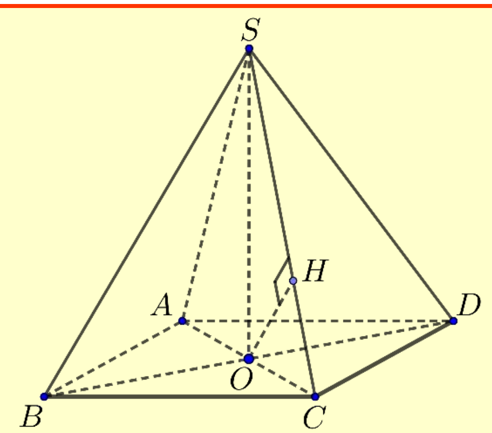
$\Rightarrow SCO = 60° \Rightarrow \tan 60° = \dfrac{SO}{OC} \Rightarrow SO = OC\sqrt{3} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}.\sqrt{3}$

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3}a\sqrt{\dfrac{3}{2}}.a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

☆ Ví dụ 04.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi điểm O là giao điểm của AC và BD. Biết khoảng cách từ O đến SC bằng $\dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.



A. $\dfrac{a^3}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3}{4}$.

C. $\dfrac{a^3}{8}$. **D.** $\dfrac{a^3}{12}$.

Lời giải

Chọn D

H là hình chiếu của O lên SC nên $OH = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$,

$ABCD$ là hình vuông có $OC = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

ΔSOC vuông tại O có OH là đường cao

$\longrightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OC^2} \longrightarrow SO = \dfrac{a}{2}$.

$\longrightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}.SO = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}S_{ABCD}.SO = \dfrac{a^3}{12}$.

✫ Ví dụ 05.

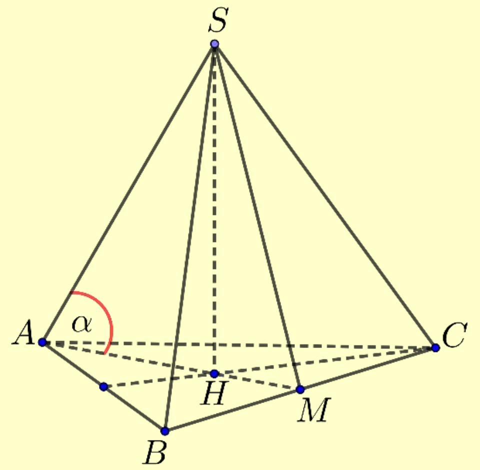
Một hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng b và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc α. Thể tích của hình chóp đó là

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}b^3\cos\alpha\sin\alpha$.

B. $\frac{3}{4}b^3\sin^2\alpha\cos\alpha$.

C. $\frac{3}{4}b^3\cos^2\alpha\sin\alpha$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{4}b^3\cos^2\alpha\sin\alpha$.



Lời giải

Chọn D

Xét tam giác ΔSHA vuông tại H, ta có: $\begin{cases} SH = SA\sin\alpha = b\sin\alpha \\ AH = SA\cos\alpha = b\cos\alpha \end{cases}$

$\Rightarrow AM = \frac{3}{2}AH = \frac{3}{2}b\cos\alpha$.

Mà: $AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow AB = \frac{2AM}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\cos\alpha$.

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.b\sin\alpha.\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}b\cos\alpha\right)^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}b^3\cos^2\alpha\sin\alpha.$$

Dạng toán 4. TỶ SỐ THỂ TÍCH.

Phương pháp giải

A. Cho khối chóp $S.ABC$ có $A';B';C'$ lần lượt là nằm trên $SA;SB;SC$ khi đó:

1. Nếu $A \equiv A'; B \equiv B'$ và $C \equiv C'$ thì

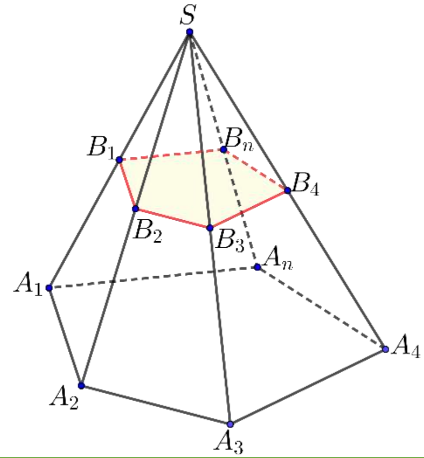
$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}$$ (Hai khối chóp chung đỉnh và chung mặt đáy).

2. Định lý SIMSON cho khối chóp tam giác

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}\cdot\frac{SB'}{SB}\cdot\frac{SC'}{SC}.$$

3. Cắt khối chóp bởi mặt phẳng song song với đáy sao cho $\frac{SB_1}{SA_1} = k$ thì

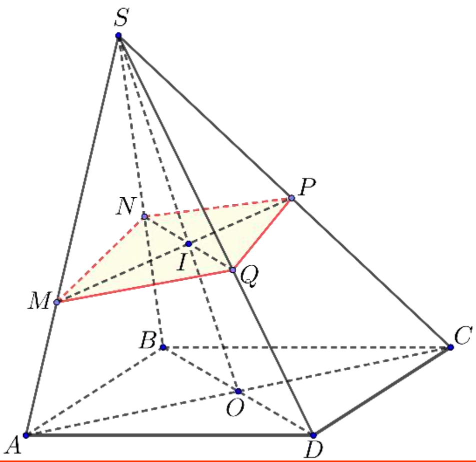
$$\frac{V_{S.B_1B_2...B_n}}{V_{S.A_1A_2...A_n}} = k^3$$



B. ***Mặt phẳng cắt các cạnh của khối chóp tứ giác*** $S.ABCD$ ***có đáy là hình bình hành lần lượt tại*** $M;N;P;Q$ ***sao cho*** $\frac{SM}{SA} = \alpha; \frac{SN}{SB} = \beta; \frac{SP}{SC} = \delta; \frac{SQ}{SD} = \lambda$***:***

$$\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\alpha.\beta.\gamma.\lambda}{4}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\lambda}\right)$$ **và**

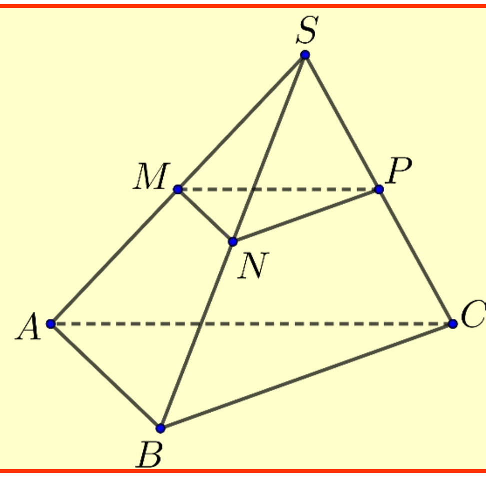
$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\lambda}.$$



☆ Ví dụ 01.

Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC. Tỉ số thể tích $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.MNP}}$ bằng

A. 12.
B. 2.
C. 8.
D. 3.



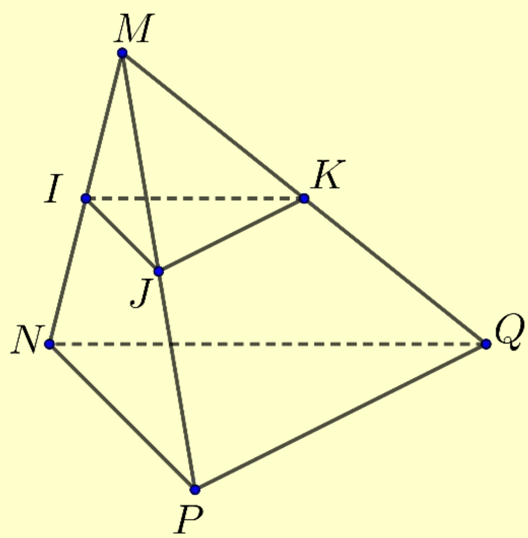
Lời giải

Chọn C

Ta có $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.MNP}} = \frac{SA}{SM}.\frac{SB}{SN}.\frac{SC}{SP} = 2.2.2 = 8$.

✫ Ví dụ 02.

Cho tứ diện $MNPQ$. Gọi I; J; K lần lượt là trung điểm của các cạnh MN; MP; MQ. Tỉ số thể tích $\frac{V_{MIJK}}{V_{MNPQ}}$ bằng



A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{8}$

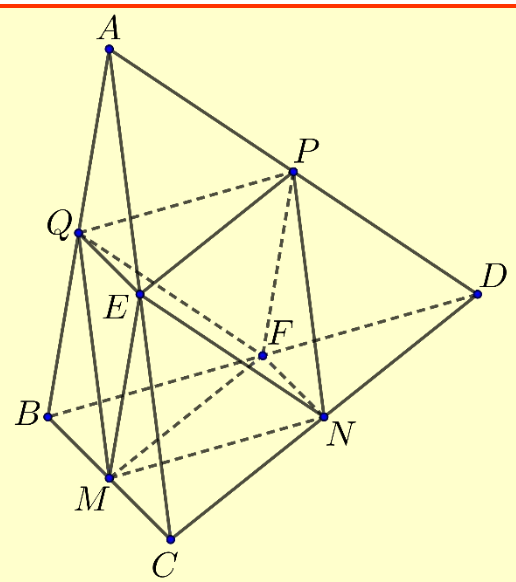
Lời giải

Chọn D

Ta có: $\frac{V_{M.IJK}}{V_{M.NPQ}}=\frac{MI}{MN}.\frac{MJ}{MP}.\frac{MK}{MQ}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

✫ Ví dụ 03.

Cho khối tứ diện có thể tích bằng V. Gọi V' là thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các trung điểm của các cạnh của khối tứ diện đã cho, tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.



A. $\frac{V'}{V}=\frac{2}{3}$.

B. $\frac{V'}{V}=\frac{5}{8}$.

C. $\frac{V'}{V}=\frac{1}{2}$.

D. $\frac{V'}{V}=\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1.

Đặc biệt hóa tứ diện cho là tứ diện đều cạnh a.

Hình đa diện cần tính có được bằng cách cắt 4 góc của tứ diện, mỗi góc cũng là một tứ diện đều có cạnh bằng $\frac{a}{2}$.

Do đó thể tích phần cắt bỏ là $V''=4.\frac{V}{8}=\frac{V}{2}$.

Vậy $V' = \frac{V}{2} \Leftrightarrow \frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$.

Cách 2.

Khối đa diện là hai khối chóp tứ giác có cùng đáy là hình bình hành úp lại.

Suy ra: $V' = 2V_{N.MEPF} = 4.V_{N.MEP} = 4.V_{P.MNE} = 4.\frac{1}{2}.\frac{1}{4}V = \frac{1}{2}V$

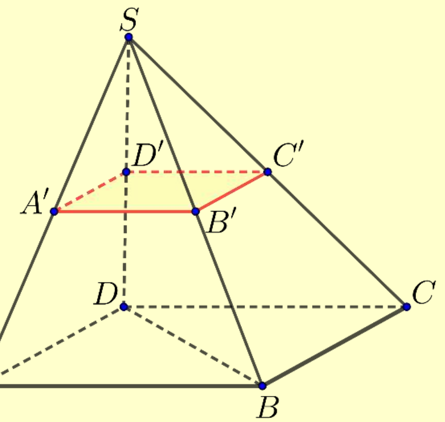
Cách 3.

Ta có $\frac{V'}{V} = \frac{V - V_{A.QEP} - V_{B.QMF} - V_{C.MNE} - V_{D.NPF}}{V}$

$= 1 - \frac{V_{A.QEP}}{V} - \frac{V_{B.QMF}}{V} - \frac{V_{C.MNE}}{V} - \frac{V_{D.NPF}}{V} = 1 - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

☆ Ví dụ 04.

Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C'D'$ và $S.ABCD$.



A. $\frac{1}{16}$ **B.** $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{8}$ **D.** $\frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn C

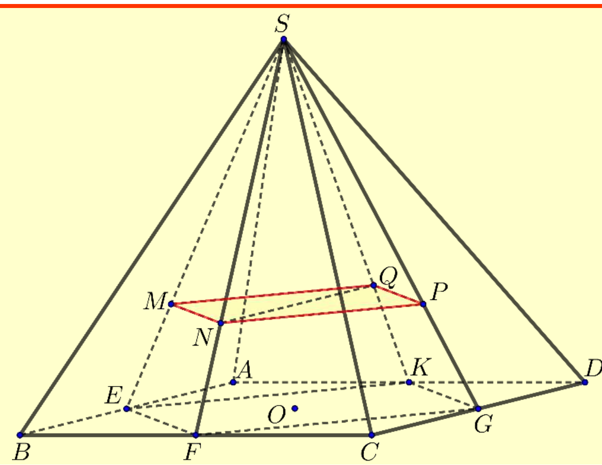
Ta có $\frac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.ABD}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SD'}{SD} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{16}$.

Và $\frac{V_{S.B'D'C'}}{V_{S.BDC}} = \frac{SB'}{SB}.\frac{SD'}{SD}.\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{V_{S.B'D'C'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{16}$.

Suy ra $\frac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.ABCD}} + \frac{V_{S.B'D'C'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{8}$.

☆ Ví dụ 05.

Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB,SBC,SCD,SDA. Gọi O là điểm bất kỳ trên mặt phẳng đáy $ABCD$. Biết thể tích khối chóp $OMNPQ$ bằng V. Tính thể tích khối chóp $SABCD$.



A. $\frac{27}{8}V$. **B.** $\frac{27}{2}V$.

C. $\frac{9}{4}V$. **D.** $\frac{27}{4}V$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(MNPQ)\,//\,(ABCD) \Rightarrow d\left(S,(MNPQ)\right) = 2d\left(O,(MNPQ)\right) \Rightarrow V_{SMNPQ} = 2V_{OMNPQ} = 2V$

$+\ \dfrac{V_{SMNQ}}{V_{SEFK}} = \dfrac{SM}{SE}.\dfrac{SN}{SF}.\dfrac{SQ}{SK} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{27} \Rightarrow V_{SMNQ} = \dfrac{8}{27}V_{SEFK}$.

$+\ \dfrac{V_{SNPQ}}{V_{SFGK}} = \dfrac{SN}{SF}.\dfrac{SP}{SG}.\dfrac{SQ}{SK} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{27} \Rightarrow V_{SNPQ} = \dfrac{8}{27}V_{SFGK}$.

$\Rightarrow V_{SMNQ} + V_{SNPQ} = \dfrac{8}{27}V_{SEFK} + \dfrac{8}{27}V_{SFGK} \Leftrightarrow V_{SMNPQ} = \dfrac{8}{27}V_{SEFGK} \Rightarrow V_{SEFGK}\ \dfrac{27}{8}V_{SMNPQ} = \dfrac{27}{4}V$.

Ta có: $\dfrac{S_{EBF}}{S_{ABC}} = \dfrac{\frac{1}{2}BE.BF.\sin B}{\frac{1}{2}BA.BC.\sin B} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow S_{EBF} = \dfrac{1}{4}S_{ABC} = \dfrac{1}{8}S_{ABCD}$.

Khi đó, $S_{EFGK} = S_{ABCD} - \left(S_{ABF} + S_{FCG} + S_{GDK} + S_{KAE}\right) = S_{ABCD} - 4S_{EBF}$

$\Rightarrow S_{EFGK} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$

Nên $\dfrac{V_{SEFGK}}{V_{SABCD}} = \dfrac{\frac{1}{3}d\left(S,(EFGK)\right)S_{EFGK}}{\frac{1}{3}d\left(S,(ABCD)\right)S_{ABCD}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow V_{SABCD} = 2V_{SEFGK} = \dfrac{27}{2}V$.

Dạng toán 5. TỔNG HIỆU THỂ TÍCH.

Phương pháp giải

Trong quá trình tính thể tích một khối đa diện lồng ghép trong khối chóp ta gặp khó khăn với cách tính thực tiếp thì khi đó:

❍ Ta có thể tách khối chóp ra thành các khối nhỏ và tính trực tiếp từng khối đã tách.

❍ Phần cần tính sẽ là phần khối chóp bỏ đi những khối nhỏ đã tính.

Ví dụ minh họa: Cho khối chóp $S.ABCD$, mặt phẳng (α) chia khối chóp thành 2 phần V_1; V_2. Tính thể tích khối V_2.

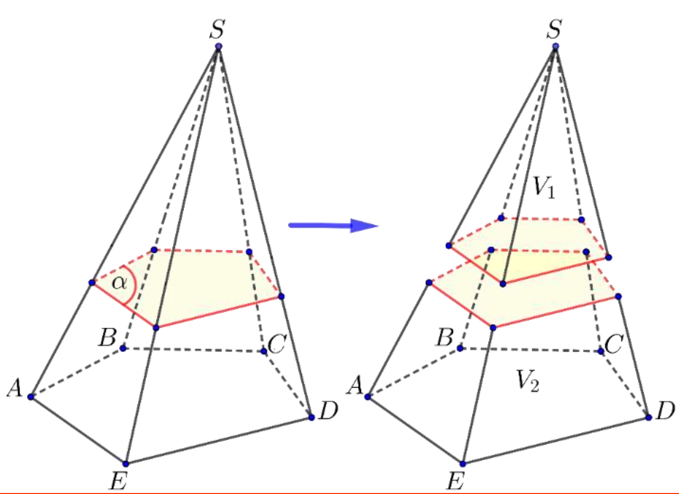
Giải.

Để tính trực tiếp thể tích khối V_2 ta sẽ khó áp dụng công thức vì thế ta sẽ cắt khối chóp thành hai phần:

+ V_1 là phần chứa đỉnh S.

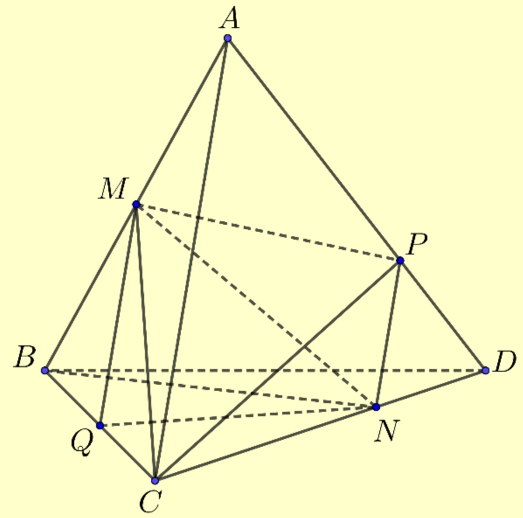
+ V_2 là phần dưới mặt phẳng (α).

Gọi thể tích khối chóp $S.ABCD$ là V, vậy $V = V_1 + V_2 \Rightarrow V_2 = V - V_1$.



✫ Ví dụ 01.

Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Trên AB và CD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{NC}=-2\overrightarrow{ND}$. Mặt phẳng (P) chứa MN và song song với AC chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích là V. Tính V.



A. $V=\dfrac{\sqrt{2}}{18}$. **B.** $V=\dfrac{11\sqrt{2}}{216}$.

C. $V=\dfrac{7\sqrt{2}}{216}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{2}}{108}$.

Lời giải

Chọn B

Từ N kẻ $NP//AC$, $N\in AD$

M kẻ $MQ//AC$, $Q\in BC$. Mặt phẳng (P) là $MPNQ$

Ta có $V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}AH.S_{ABCD}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$

$V=V_{ACMPNQ}=V_{AMPC}+V_{MQNC}+V_{MPNC}$

Ta có $V_{AMPC}=\dfrac{AM}{AB}.\dfrac{AP}{AD}.V_{ABCD}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}V_{ABCD}$

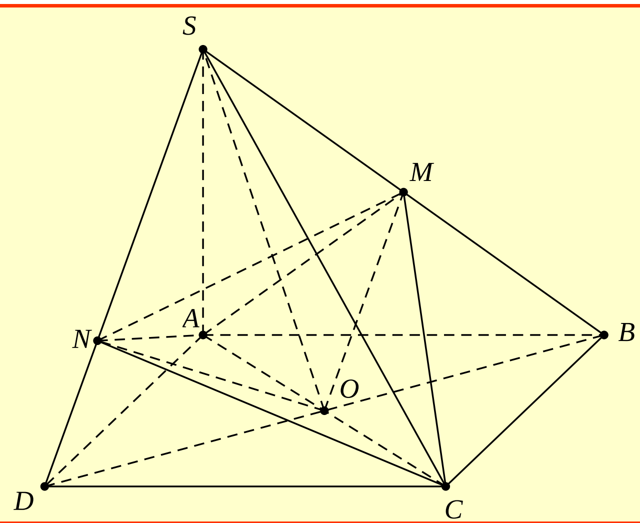
$V_{MQNC}=\dfrac{1}{2}V_{AQNC}=\dfrac{1}{2}\dfrac{CQ}{CB}.\dfrac{CN}{CD}.V_{ABCD}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}V_{ABCD}=\dfrac{1}{2}V_{ABCD}$

$V_{MPNC}=\dfrac{2}{3}V_{MPCD}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{3}V_{MACD}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{3}\dfrac{AM}{AB}.V_{ABCD}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{2}V_{ABCD}=\dfrac{1}{9}V_{ABCD}$

Vậy $V=\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}\right)V_{ABCD}\Rightarrow V=\dfrac{11}{18}V_{ABCD}=\dfrac{11\sqrt{2}}{216}$.

✫ Ví dụ 02.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA=a$ và $SA\perp(ABCD)$. Gọi M là trung điểm SB, N là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SN=2ND$. Tính thể tích V của tứ diện $ACMN$.



A. $V=\dfrac{a^3}{12}$. **B.** $V=\dfrac{a^3}{6}$.

C. $V=\dfrac{a^3}{8}$. **D.** $V=\dfrac{a^3}{36}$.

Lời giải

Chọn A

M là trung điểm SB, N là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SN=2ND$ nên

$\frac{SM}{SB}=\frac{1}{2},\frac{SN}{SD}=\frac{2}{3}$

Ta có: $V_{C.AMN}=2V_{O.AMN}=2\left(V_{S.ABD}-V_{S.AMN}-V_{M.AOB}-V_{N.AOD}\right)$

Lại có:

$$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SA.AB.AD=\frac{a^3}{3}\Rightarrow V_{S.ABD}=\frac{a^3}{6},\ V_{S.AOB}=V_{S.AOD}=\frac{a^3}{12}$$

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABD}}=\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SD}=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\Rightarrow V_{S.AMN}=\frac{1}{3}V_{S.ABD}=\frac{a^3}{18}$$

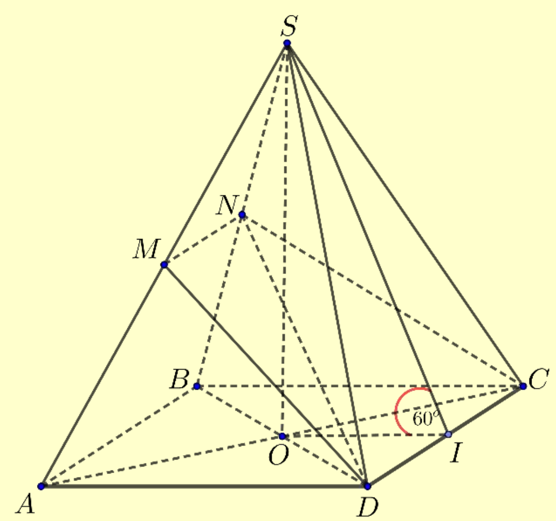
$$\frac{V_{M.AOB}}{V_{S.AOB}}=\frac{MB}{SB}=\frac{1}{2}\Rightarrow V_{M.AOB}=\frac{1}{2}V_{S.AOB}=\frac{a^3}{24}$$

$$\frac{V_{N.AOD}}{V_{S.AOD}}=\frac{ND}{SD}=\frac{1}{3}\Rightarrow V_{N.AOD}=\frac{1}{3}V_{S.AOD}=\frac{a^3}{36}$$

Do đó: $V_{C.AMN}=2V_{O.AMN}=2\left(\frac{a^3}{6}-\frac{a^3}{18}-\frac{a^3}{24}-\frac{a^3}{36}\right)=\frac{a^3}{12}$.

☆ Ví dụ 03.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với cạnh $AD=2CD$. Biết hai mặt phẳng (SAC), (SBD) cùng vuông góc với mặt đáy và đoạn $BD=6$; góc giữa (SCD) và mặt đáy bằng $60°$. Hai điểm M,N lần lượt là trung điểm của SA,SB. Thể tích khối đa diện $ABCDMN$ bằng



A. $\frac{108\sqrt{15}}{25}$. **B.** $\frac{128\sqrt{15}}{15}$.

C. $\frac{16\sqrt{15}}{15}$. **D.** $\frac{18\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $O=AC\cap BD$. Do $(SAC)\perp(ABCD),(SBD)\perp(ABCD)\Rightarrow SO\perp(ABCD)$.

Theo tính chất hình chữ nhật: $AD^2+CD^2=BD^2\Leftrightarrow 5CD^2=6^2\Leftrightarrow CD=\frac{6}{\sqrt{5}}$ và $AD=\frac{12}{\sqrt{5}}$.

Khi đó diện tích đáy: $S_{ABCD}=AD.CD=\frac{72}{5}$.

Gọi I là trung điểm của CD. Do $CD\perp SO,CD\perp OI\Rightarrow CD\perp(SOI)\Rightarrow CD\perp SI$

$\Rightarrow((SCD),(ABCD))=(SI,OI)=SIO=60°$.

Trong tam giác SOI vuông tại O, $OI = \frac{AD}{2} = \frac{6}{\sqrt{5}}, \widehat{SIO} = 60°$ có: $SO = OI.\tan 60° = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

Thể tích $S.ABCD$ là: $V = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}.\frac{72}{5}.\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{144\sqrt{15}}{25}$.

Ta có $V_{S.ABD} = V_{S.BCD} = \frac{V}{2}$.

Do $S_{\Delta SMN} = \frac{1}{4}S_{\Delta SAB} \Rightarrow V_{SMND} = \frac{1}{4}V_{SABD} = \frac{1}{8}V$.

Do N là trung điểm của $SB \Rightarrow d(N,(SCD)) = \frac{1}{2}d(B,(SCD)) \Rightarrow V_{SCDN} = \frac{1}{2}V_{SBCD} = \frac{1}{4}V$.

Ta có: $V_{S.CDMN} = V_{SMND} + V_{SCDN} = \frac{3}{8}V \Rightarrow V_{ABCDMN} = V - \frac{3}{8}V = \frac{5}{8}V = \frac{18\sqrt{15}}{5}$.

☆ Ví dụ 04.

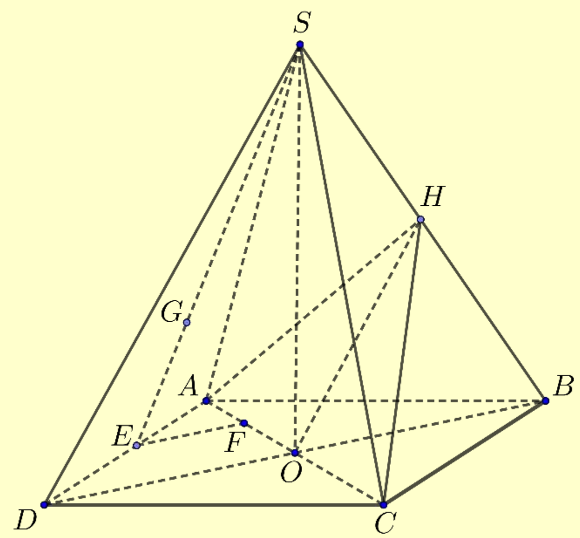
Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Biết rằng $SA = SC$, $SB = SD$ và $(SAB) \perp (SBC)$. G là trọng tâm tam giác (SAD). Tính thể tích V của tứ diện $GSAC$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{96}$

B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{48}$

C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$

D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$



Lời giải

Chọn B

Ta có $V_{GSAC} = \frac{1}{3}d(G,(SAC)).S_{\Delta SAC}$.

* Tính $S_{\Delta SAC}$?

Gọi $O = AC \cap BD$, do $\begin{cases} SA = SC \Rightarrow SO \perp AC \\ SB = SD \Rightarrow SO \perp BD \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Kẻ $OH \perp SB$, do $AC \perp (SBD)$ nên $SB \perp (AHC)$.

Suy ra $[(SAB),(SBC)] = (AH,CH) = \widehat{AHC} = 90^\circ$.

Do $OH \perp AC$ và OH là trung tuyến nên tam giác AHC vuông cân tại H.

Khi đó $OH = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}$ và $OB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Mà tam giác SOB vuông tại O có đường cao OH nên $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OB^2} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Vậy $S_{\Delta SAC}=\dfrac{1}{2}.SO.AC=\dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{6}}{4}.a=\dfrac{a^2\sqrt{6}}{8}$.

* Tính $d\left(E,(SAC)\right)$?

Gọi E là trung điểm của AD thì $\dfrac{d\left(G,(SAC)\right)}{d\left(E,(SAC)\right)}=\dfrac{SG}{SE}=\dfrac{2}{3}$.

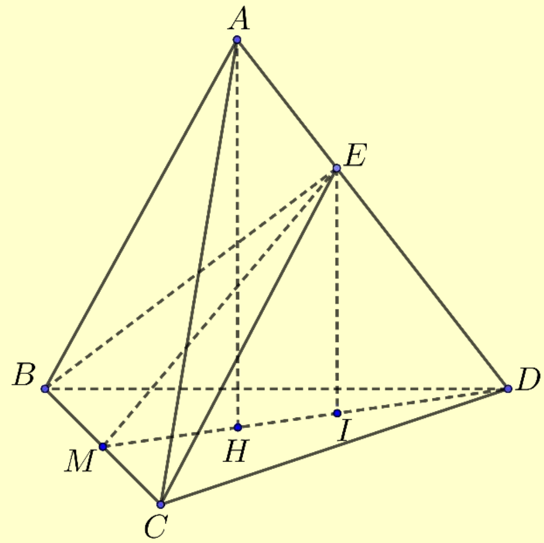
Gọi F là trung điểm của OA thì $EF\perp(SAC)\Rightarrow d\left(E,(SAC)\right)=EF=\dfrac{1}{2}OD=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra $d\left(G,(SAC)\right)=\dfrac{2}{3}d\left(E,(SAC)\right)=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Vậy $V_{G.SAC}=\dfrac{1}{3}d\left(G,(SAC)\right).S_{\Delta SAC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\dfrac{a^2\sqrt{6}}{8}=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{48}$.

☆ Ví dụ 05.

Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Mặt phẳng (P) chứa cạnh BC cắt cạnh AD tại E. Biết góc giữa hai mặt phẳng (P) và (BCD) có số đo là α thỏa mãn $\tan\alpha=\dfrac{5\sqrt{2}}{7}$. Gọi thể tích của hai tứ diện $ABCE$ và tứ diện $BCDE$ lần lượt là V_1 và V_2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.



A. $\dfrac{1}{8}$. **B.** $\dfrac{3}{5}$.

C. $\dfrac{5}{8}$. **D.** $\dfrac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi H, I lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, E trên mặt phẳng (BCD). Khi đó H, $I\in DM$ với M là trung điểm BC.

Ta tính được $AH=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, $DH=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $MH=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ta có góc giữa (P) với $(BCD)\Rightarrow\left((P),(BCD)\right)=EMD=\alpha$. Khi đó $\tan\alpha=\dfrac{EI}{MI}=\dfrac{5\sqrt{2}}{7}$.

Gọi $DE=x\Rightarrow\dfrac{DE}{AD}=\dfrac{EI}{AH}=\dfrac{DI}{DH}\Rightarrow\begin{cases}EI=\dfrac{DE.AH}{AD}=\dfrac{x.\dfrac{a\sqrt{6}}{3}}{a}=\dfrac{x\sqrt{6}}{3}\\ DI=\dfrac{DE.DH}{AD}=\dfrac{x.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}}{a}=\dfrac{x\sqrt{3}}{3}\end{cases}$.

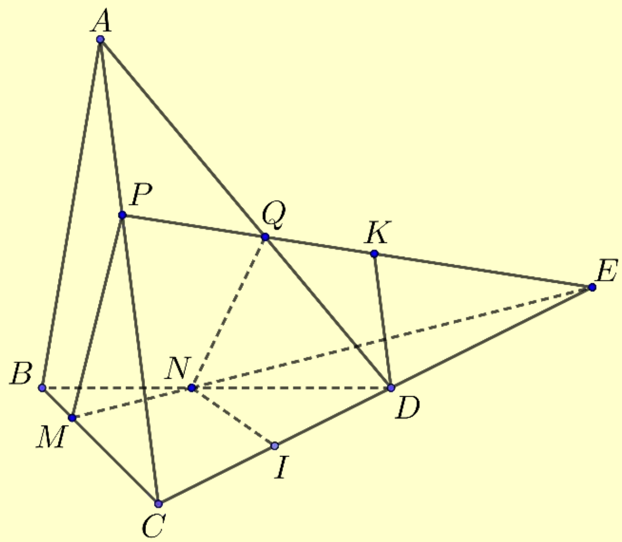
Khi đó $MI=DM-DI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}-\dfrac{x\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $\tan\alpha=\dfrac{EI}{MI}=\dfrac{5\sqrt{2}}{7}\Leftrightarrow\dfrac{\dfrac{x\sqrt{6}}{3}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}-\dfrac{x\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{7}\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{8}a$.

Khi đó: $\dfrac{V_{DBCE}}{V_{ABCD}}=\dfrac{DE}{AD}=\dfrac{5}{8}\Rightarrow\dfrac{V_{ABCE}}{V_{BCDE}}=\dfrac{3}{5}$.

☆ Ví dụ 06.

Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, BD, AC sao cho $BC=4BM$, $AC=3AP$, $BD=2BN$. Tính tỉ số thể tích hai phần của khối tứ diện $ABCD$ được phân chia bởi $\text{mp}(MNP)$.



A. $\dfrac{7}{13}$.

B. $\dfrac{7}{15}$.

C. $\dfrac{8}{15}$.

D. $\dfrac{8}{13}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $E=MN\cap CD$, $Q=EQ\cap AD$, do đó mặt phẳng (MNP) cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là tứ giác $MNQP$.

Gọi I là trung điểm CD thì $NI\parallel CB$ và $NI=\dfrac{1}{2}BC$,

Do $BC=4BM$ nên suy ra $NI=\dfrac{2}{3}MC$.

Bởi vậy $\dfrac{EN}{EM}=\dfrac{EI}{EC}=\dfrac{NI}{MC}=\dfrac{2}{3}$.

Từ I là trung điểm CD và $\dfrac{EI}{EC}=\dfrac{2}{3}$ suy ra $\dfrac{ED}{EC}=\dfrac{1}{3}$.

Kẻ $DK\parallel AC$ với $K\in EP$, ta có $\dfrac{EK}{EP}=\dfrac{KD}{AC}=\dfrac{ED}{EC}=\dfrac{1}{3}$.

Mặt khác $AC=3AP$ nên suy ra $\dfrac{KD}{AP}=\dfrac{2}{3}$. Do đó $\dfrac{QD}{QA}=\dfrac{QK}{QP}=\dfrac{KD}{AP}=\dfrac{2}{3}$.

Từ $\dfrac{QK}{QP}=\dfrac{2}{3}$ và $\dfrac{EK}{EP}=\dfrac{1}{3}$ suy ra $\dfrac{EQ}{EP}=\dfrac{3}{5}$.

Gọi V là thể tích khối tứ diện $ABCD$, V_1 là thể tích khối đa diện $ABMNQP$, V_2 là thể tích khối đa diện $CDMNQP$.

Ta có $\frac{S_{\Delta CMP}}{S_{\Delta CAB}}=\frac{CM}{CB}.\frac{CP}{CA}=\frac{3}{4}.\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\Rightarrow S_{\Delta CMP}=\frac{1}{2}S_{\Delta CAB}$.

Vì $\frac{ED}{EC}=\frac{1}{3}$ nên $d\left(E;\left(ABC\right)\right)=\frac{3}{2}d\left(D;\left(ABC\right)\right)$. Do đó :

$V_{E.CMP}=\frac{1}{3}S_{\Delta CMP}.d\left(E;\left(ABC\right)\right)=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}S_{\Delta CAB}.\frac{3}{2}.d\left(D;\left(ABC\right)\right)=\frac{3}{4}.\frac{1}{3}S_{\Delta CAB}.d\left(D;\left(ABC\right)\right)=\frac{3}{4}V$.

$\frac{V_{E.DNQ}}{V_{E.CMP}}=\frac{ED}{EC}.\frac{EN}{EM}.\frac{EQ}{EP}=\frac{1}{3}.\frac{2}{3}.\frac{3}{5}=\frac{2}{15}$, nên suy ra $V_{E.DNQ}=\frac{2}{15}V_{E.CMP}=\frac{2}{15}.\frac{3}{4}V=\frac{1}{10}V$.

Từ đó ta có $V_2=V_{E.CMP}-V_{E.DNQ}=\frac{3}{4}V-\frac{1}{10}V=\frac{13}{20}V$.

Và $V_1=V-V_2=V-\frac{13}{20}V=\frac{7}{20}V$.

Như vậy : $\frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{13}$

Dạng toán 6. THỂ TÍCH LĂNG TRỤ ĐỨNG.

Phương pháp giải

Áp dụng công thức chính: $\boxed{V=S.h}$.

Trong đó: S là diện tích đáy và h là chiều cao khối chóp (khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy).

❍ Tính được diện tích đáy ta xem lại "**Công thức tính diện tích đáy**"

❍ Lăng trụ đứng sẽ có các đường cao song song nhau, tùy vào trường hợp đề ra ta sẽ sử dụng đường cao hợp lý.

	Định nghĩa	*Tính chất*
Hình lăng trụ đứng	Là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.	Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là các hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.
Hình lăng trụ đều	Là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.	Các mặt bên của hình lăng trụ đều là các hình chữ nhật bằng nhau và vuông góc với mặt đáy.

Xem lại cách xác định góc giữa đường – mặt; mặt – mặt để tính được chiều cao.

☆ Ví dụ 01.

Khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a, đường cao bằng $a\sqrt{3}$ có thể tích bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $a^3\sqrt{3}$. **C.** $2a^3\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn B

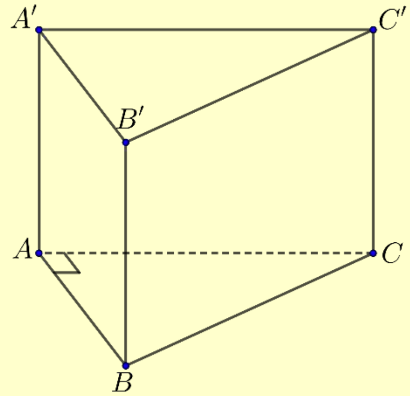
$V=S.h=a^2.a\sqrt{3}=a^3\sqrt{3}$.

☆ Ví dụ 02.

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA'=a$. Đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB=a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\frac{a^3}{3}$. **B.** $V=\frac{a^3}{6}$.

C. $V=\frac{a^3}{2}$. **D.** $V=a^3$.



Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A.

Suy ra thể tích của khối lăng trụ là $V=AA'.S_{ABC}=AA'.\frac{1}{2}.AB.AC=\frac{a^3}{2}$.

☆ Ví dụ 03.

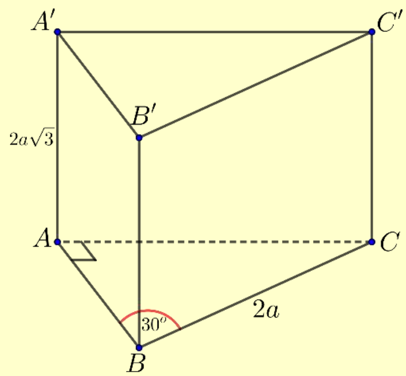
Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A; $BC=2a$; $ABC=30°$. Biết cạnh bên của lăng trụ bằng $2a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ là.

A. $2a^3\sqrt{3}$.

B. $3a^3$.

C. $3a^3$.

D. $6a^3$.



Lời giải

Chọn C

Xét tam giác ABC. vuông tại A có $AC=2a.\sin30^\circ=a$; $AB=2a.\cos30^\circ=a\sqrt{3}$..

Trong đó $h=AA'=2a\sqrt{3}$..

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$. Vậy $V_{lt}=3a^3$.

☆ Ví dụ 04.

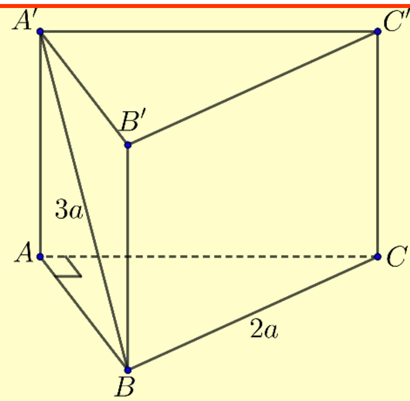
Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC=2a$, $A'B=3a$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng?

A. $2a^3$.

B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

C. $6a^3$.

D. $a^3\sqrt{7}$.



Lời giải

Chọn D

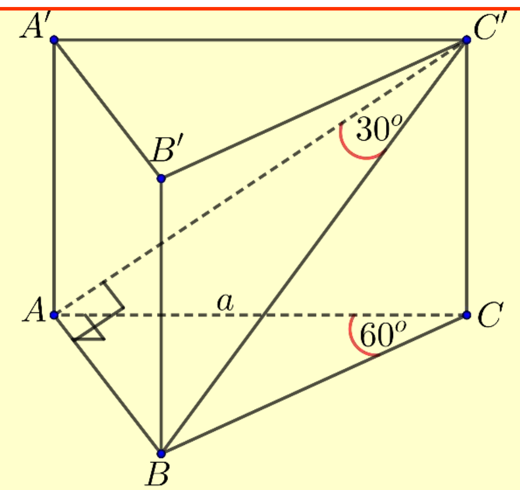
Tam giác ABC vuông cân tại $A \Rightarrow AB = AC = \dfrac{BC}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$..

Tam giác $A'AB$ vuông tại $A \Rightarrow A'A = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = \sqrt{9a^2 - 2a^2} = a\sqrt{7}$.

$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = A'A.S_{ABC} = a\sqrt{7}.\dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}.a\sqrt{2}.a\sqrt{2} = a^3\sqrt{7}$..

☆ Ví dụ 05.

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông ABC vuông tại A, $AC = a$, $ACB = 60^\circ$. Đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng $(A'C'CA)$ góc 30°. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.



A. $a^3\sqrt{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

C. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **D.** $2\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Chọn A

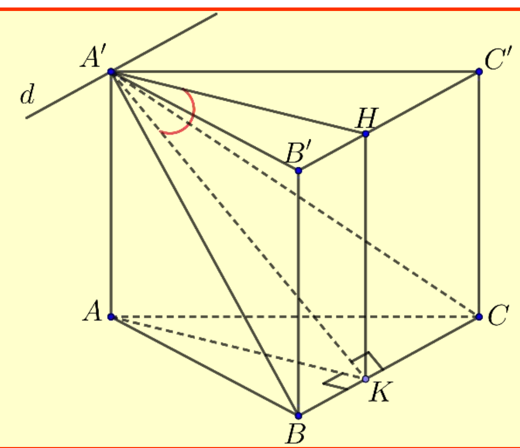
Ta có $AB = a\sqrt{3}$, dễ thấy góc giữa đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng $(A'C'CA)$ là góc $BC'A = 30^\circ$.

Suy ra $\tan 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{AC'} \Rightarrow AC' = 3a \Rightarrow C'C = 2\sqrt{2}a$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = 2\sqrt{2}a.\dfrac{1}{2}a.a\sqrt{3} = a^3\sqrt{6}$.

☆ Ví dụ 06.

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = 2a, AC = 3a$. Mặt phẳng $(A'BC)$ hợp với mặt phẳng $(A'B'C')$ một góc 60°. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.



A. $\dfrac{6a^3\sqrt{39}}{13}$. **B.** $\dfrac{18a^3\sqrt{39}}{13}$.

C. $\dfrac{9a^3\sqrt{39}}{26}$. **D.** $\dfrac{3a^3\sqrt{39}}{26}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases} A' \in (A'BC) \cap (A'B'C') \\ B'C' // BC \\ B'C' \subset (A'B'C'); BC \subset (A'BC) \end{cases} \Rightarrow (A'BC) \cap (A'B'C') = A'd // BC // B'C'$.

Dựng $A'H \perp B'C' \Rightarrow A'H \perp A'd$

Dựng $A'K \perp BC \Rightarrow A'K \perp A'd$.

Góc mặt phẳng $(A'BC)$ với mặt phẳng $(A'B'C')$ là $KA'H \Rightarrow KA'H = 60°$.

Ta có $A'H = \sqrt{\dfrac{A'B'^2.A'C'^2}{A'B'^2 + A'C'^2}} = \dfrac{6\sqrt{13}}{13}a$.

Ta có $BB' = HK = \tan 60°.A'H = \dfrac{6\sqrt{39}}{13}a$.

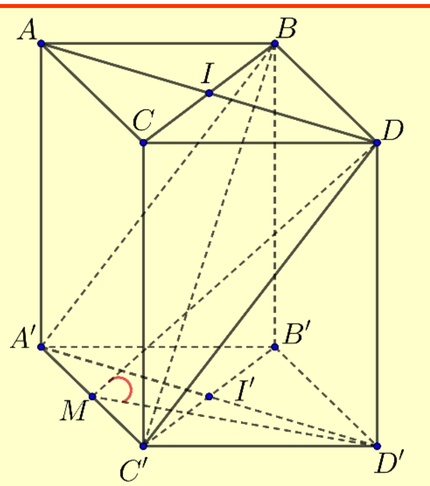
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = BB'.S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC.BB' = \dfrac{1}{2}2a.3a\dfrac{6\sqrt{39}}{13}a = \dfrac{18\sqrt{39}}{13}a^3$.

☆ Ví dụ 07.

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $BAC = 120°$, mặt phẳng $(A'B'C')$ tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. **B.** $V = \dfrac{3a^3}{8}$.

C. $V = \dfrac{9a^3}{8}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.



Lời giải

Chọn D

Gọi M, I, I' lần lượt là trung điểm của $A'C'$, BC, $B'C'$.

D là điểm đối xứng với A qua I, D' là điểm đối xứng với A' qua I'.

Khi đó mặt phẳng $(A'BC') \equiv (A'BDC')$.

$\Rightarrow$ góc giữa mặt phẳng $A'BC'$ với đáy là góc giữa mặt phẳng $(A'BDC')$ với đáy.

Ta có tứ giác $A'B'D'C'$ là hình thoi

Vì $B'A'C' = 120°$ nên tam giác $A'C'D'$ là tam giác đều cạnh bằng a $\Rightarrow D'M \perp A'C'$.

Mà $A'C' \perp DD'$

Nên $A'C' \perp DM$

Vậy góc giữa mặt phẳng $(A'BDC')$ với đáy là góc $DMD' = 60°$

Xét tam giác $A'C'D'$, có: $\begin{cases} D'M = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = C'I' \\ A'I' = \dfrac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow C'B' = a\sqrt{3}$

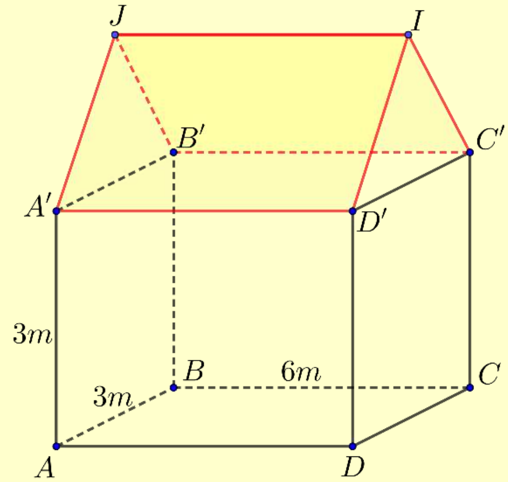
Xét tam giác MDD' vuông tại D' có $DMD' = 60°$ $\Rightarrow \triangle DMD'$ là nửa tam giác đều có đường cao DD' $\Rightarrow DD' = D'M.\sqrt{3} = \frac{3a}{2}$.

$S_{\triangle A'B'C'} = \frac{1}{2}A'I'.B'C' = \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3}S_{\triangle A'B'C'}.DD' = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{3a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

☆ Ví dụ 08.

Một nhà kho có dạng khối hộp chữ nhật đứng $ABCD.A'B'C'D'$, nền là hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3\,\text{m}$, $BC = 6\,\text{m}$, chiều cao $AA' = 3\,\text{m}$, chắp thêm một lăng trụ tam giác đều mà một mặt bên là $A'B'C'D'$ và $A'B'$ là một cạnh đáy của lăng trụ. Tính thể tích của nhà kho ?



A. $\frac{9(12+\sqrt{3})}{2}\,\text{m}^3$. **B.** $54\,\text{m}^3$.

C. $\frac{27(4+\sqrt{3})}{2}\,\text{m}^3$. **D.** $\frac{27\sqrt{3}}{2}\,\text{m}^3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có : $V_{kho} = V_{ABCD.A'B'C'D'} + V_{A'B'J.D'C'I}$

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB.AD.A'A = 3.3.6 = 54\text{m}^3$.

$V_{A'B'J.D'C'I} = S_{\Delta A'B'J}.A'D' = \left(3^2.\frac{\sqrt{3}}{4}\right).6 = \frac{27\sqrt{3}}{2}\,\text{m}^3$.

$\Rightarrow V_{kho} = \frac{27(4+\sqrt{3})}{2}\,\text{m}^3$

Dạng toán 7. THỂ TÍCH LĂNG TRỤ XIÊN.

Phương pháp giải

Áp dụng công thức chính: $\boxed{V = S.h}$.

Trong đó: S là diện tích đáy và h là chiều cao khối chóp (khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy).

❍ Tính được diện tích đáy ta xem lại "**Công thức tính diện tích đáy**"

❍ Lăng trụ xiên sẽ có các đường cao đề ra cụ thể.

Xem lại cách xác định góc giữa đường – mặt; mặt – mặt để tính được chiều cao.

☆ Ví dụ 01.

Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và thể tích bằng $3a^3$. Tính chiều cao h của lăng trụ đã cho.

A. $h = 9a$. **B.** $h = \frac{a}{3}$. **C.** $h = a$. **D.** $h = 3a$.

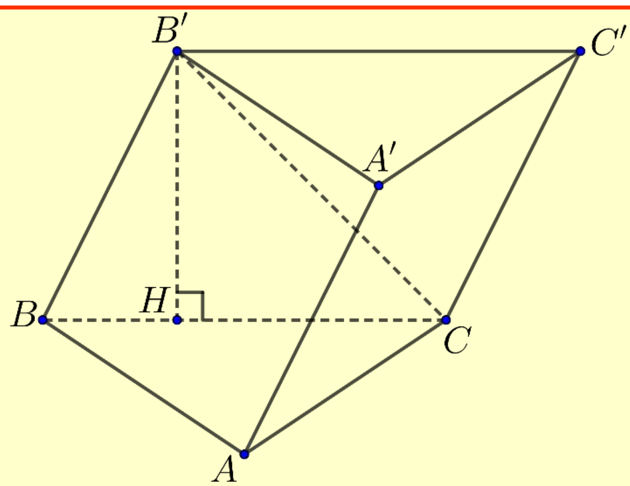
Lời giải

Chọn D

Ta có: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.h \Leftrightarrow h = \frac{V_{ABCD.A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{3a^3}{a^2} = 3a$.

☆ Ví dụ 02.

Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Độ dài cạnh bên bằng $4a$. Mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với đáy và $B'BC = 30°$. Thể tích khối chóp $A.CC'B'$ là:



A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là hình chiếu của B' trên BC. Từ giả thiết suy ra: $B'H \perp (ABC)$.

$S_{BB'C} = \frac{1}{2}BB'.BC.\sin B'BC = \frac{1}{2}4a.a.\sin 30° = a^2$.

Mặt khác: $S_{BB'C} = \frac{1}{2}B'H.BC \Rightarrow B'H = \frac{2S_{BB'C}}{BC} = \frac{2a^2}{a} = 2a$.

$V_{LT} = B'H.S_{ABC} = 2a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

$V_{A.CC'B'} = \frac{1}{2}V_{A.CC'B'B} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}V_{LT} = \frac{1}{3}V_{LT} = \frac{1}{3}.\frac{a^3\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

☆ Ví dụ 03.

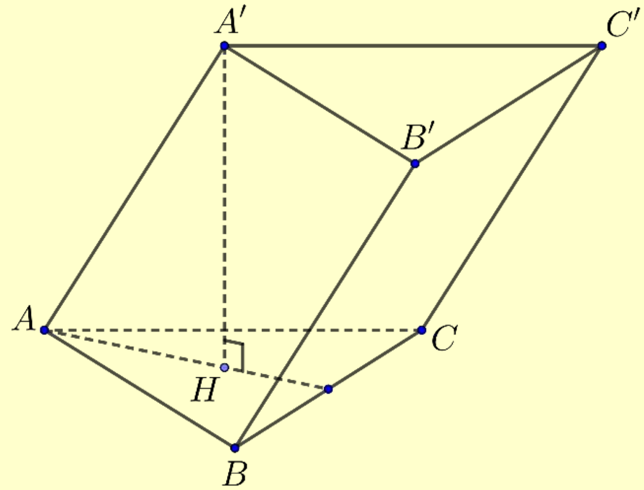
Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, biết $A'A = A'B = A'C = a$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$?

A. $\dfrac{3a^3}{4}$.

B. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

C. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

D. $\dfrac{a^3}{4}$.



Lời giải

Chọn B

Gọi H là trọng tâm tam giác ABC.

Theo giả thiết ta có ABC là tam giác đều cạnh bằng a và $A'A = A'B = A'C = a$ nên $A'.ABC$ là tứ diện đều cạnh $a \Rightarrow A'H \perp (ABC)$ hay $A'H$ là đường cao của khối chóp $A'.ABC$.

Xét tam giác vuông $A'HA$ ta có $A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}a.a.\sin 60^\circ = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

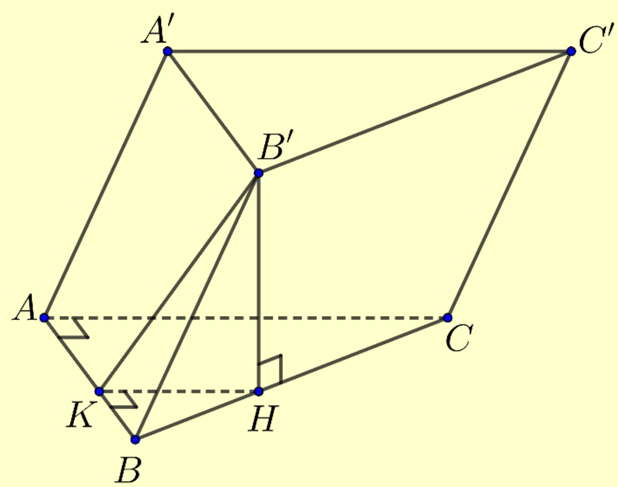
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

☆ Ví dụ 04.

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. cạnh $BC = 2a$ và $ABC = 60^\circ$. Biết tứ giác $BCC'B'$ là hình thoi có $B'BC$ nhọn. Biết $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC) và $(ABB'A')$ tạo với (ABC) góc 45°. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3}{3\sqrt{7}}$. **B.** $\dfrac{a^3}{\sqrt{7}}$.

C. $\dfrac{3a^3}{\sqrt{7}}$. **D.** $\dfrac{6a^3}{\sqrt{7}}$.



Lời giải

Chọn C

Do ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $BC = 2a$ và $ABC = 60^\circ$ nên $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B' lên $BC \Rightarrow H$ thuộc đoạn BC (do $B'BC$ nhọn)

$\Rightarrow B'H \perp (ABC)$ (do $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC)).

Kẻ HK song song AC $(K \in AB) \Rightarrow HK \perp AB$ (do ABC là tam giác vuông tại A).

$\Rightarrow \left[(ABB'A'),(ABC)\right] = B'KH = 45° \Rightarrow B'H = KH$ (1)

Ta có $\Delta BB'H$ vuông tại $H \Rightarrow BH = \sqrt{4a^2 - B'H^2}$ (2)

Mặt khác HK song song $AC \Rightarrow \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{HK}{AC} \Rightarrow BH = \dfrac{HK.2a}{a\sqrt{3}}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\sqrt{4a^2 - B'H^2} = \dfrac{B'H.2a}{a\sqrt{3}} \Rightarrow B'H = a\sqrt{\dfrac{12}{7}}$.

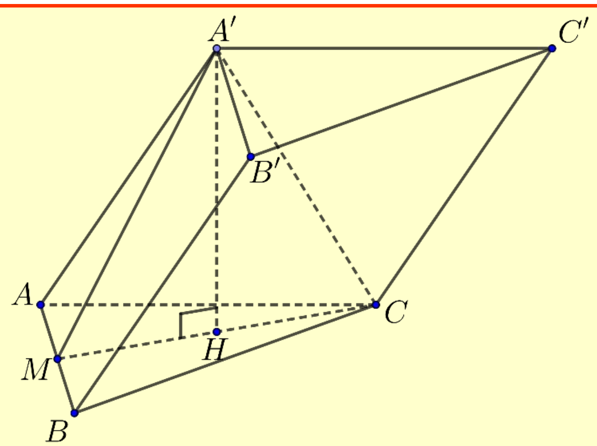
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.B'H = \dfrac{1}{2}AB.AC.B'H = \dfrac{3a^3}{\sqrt{7}}$.

☆ Ví dụ 05.

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $ABC = 30°$. Điểm M là trung điểm AB, tam giác $MA'C$ đều cạnh $2a\sqrt{3}$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\dfrac{72\sqrt{2}a^3}{7}$. **B.** $\dfrac{24\sqrt{3}a^3}{7}$.

C. $\dfrac{72\sqrt{3}a^3}{7}$. **D.** $\dfrac{24\sqrt{2}a^3}{7}$.



Lời giải

Chọn A

Gọi H là trung điểm của MC.

Ta có $\begin{cases} A'H \perp MC \\ (A'MC) \perp (ABC) \\ (A'MC) \cap (ABC) = MC \end{cases} \Rightarrow A'H \perp (ABC)$.

Tam giác $MA'C$ đều cạnh $2a\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} MC = 2a\sqrt{3} \\ A'H = 3a \end{cases}$

Đặt $AC = x > 0$, tam giác ABC vuông tại A có $ABC = 30° \Rightarrow \begin{cases} BC = 2x \\ AB = x\sqrt{3} \end{cases}$

Áp dụng công thức tính độ dài trung tuyến ta có

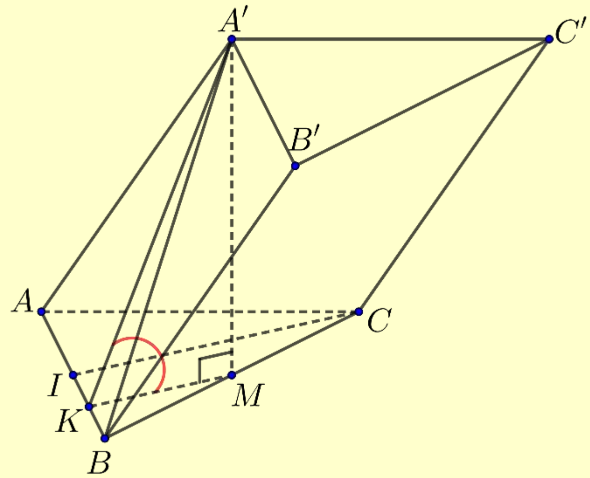
$$CM^2 = \frac{CA^2 + CB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow 12a^2 = \frac{x^2 + 4x^2}{2} - \frac{3x^2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{4a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

Suy ra $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{1}{2}.\dfrac{12a}{\sqrt{7}}.\dfrac{4a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \dfrac{24a^2\sqrt{3}}{7}$.

Do đó $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{ABC} = \dfrac{72a^3\sqrt{3}}{7}$.

✮ Ví dụ 06.

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh BC. Biết góc giữa hai mặt phẳng (ABA') và (ABC) bằng $45°$. Tính thể tích V của khối chóp $A.BCC'B'$.



A. $\frac{3}{2}a^3$. **B.** $V=a^3$.

C. $a^3\sqrt{3}$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $V_{ABC.A'B'C'}=V_{A.A'B'C'}+V_{A.BCC'B'}=V_{A'.ABC}+V_{A'.BCC'B'}$.

Mà $V_{A'.BCC'B'}=V_{A.BCC'B'}\Rightarrow V_{A.A'B'C'}=V_{A'.ABC}$.

Gọi M là trung điểm của BC, I là trung điểm của AB và K là trung điểm của IB.

Khi đó : $A'M\perp(ABC)$.

Mặt khác : $\left.\begin{matrix} MK // CI \\ CI\perp AB\end{matrix}\right\}\Rightarrow MK\perp AB$.

$MK\perp AB$, $A'M\perp AB\Rightarrow A'K\perp AB$.

Góc giữa hai mặt phẳng (ABA') và (ABC) chính là góc giữa $A'K$ và KM và bằng $\widehat{A'KM}=45°$ nên tam giác $A'KM$ vuông cân tại M.

Trong tam giác ABC : $MK=\frac{1}{2}CI=\frac{1}{2}.\frac{2a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông cân $A'KM$: $A'M=MK=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$V_{A'.ABC}=\frac{1}{3}.V_{ABC.A'B'C'}$.

$\Rightarrow V_{A'.BCC'B'}=V_{ABC.A'B'C'}-\frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}=\frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}=\frac{2}{3}.S_{\Delta ABC}.A'M=\frac{2}{3}.a^2\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=a^3$.

Dạng toán 8. THỂ TÍCH KHỐI LẬP PHƯƠNG – KHỐI HỘP.

Phương pháp giải

Áp dụng công thức chính: $\boxed{V = S.h}$.

Trong đó: S là diện tích đáy và h là chiều cao khối chóp (khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy).

- *Thể tích khối hộp chữ nhật:* $V = a.b.c$.
- *Thể tích khối lập phương cạnh a:* $V = a^3$.

	Định nghĩa	*Tính chất*
Hình hộp đứng	Là hình hộp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy	Có 2 đáy là hình bình hành, 4 mặt xung quanh là 4 hình chữ nhật.
Hình hộp chữ nhật	Là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.	Có 6 mặt là 6 hình chữ nhật.
Hình lập phương	Là hình hộp chữ nhật 2 đáy và 4 mặt bên đều là hình vuông	Có 6 mặt đều là hình vuông.

❍ Đường chéo hình hộp $= \sqrt{d^2 + r^2 + c^2}$ với $d; r; c$ là ba kích thước của hình hộp.

Hệ quả: Đường chéo hình lập phương $= a\sqrt{3}$ với a là cạnh của hình lập phương.

☆ Ví dụ 01.

Tổng diện tích các mặt của một hình lập phương bằng 150. Thể tích của khối lập phương đó là.

A. 200. **B.** 100. **C.** 625. **D.** 125.

Lời giải

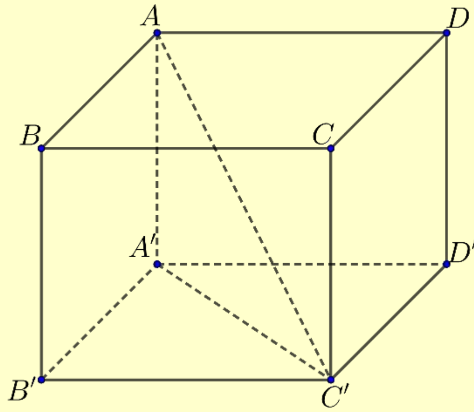
Chọn D

Gọi cạnh hình lập phương là a. Ta có $6a^2 = 150 \Leftrightarrow a = 5$.

Thể tích khối lập phương là $V = a^3 = 125$.

☆ Ví dụ 02.

Tính theo a thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AC' = a$.



A. $V = \dfrac{a^3}{27}$.

B. $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

C. $V = 3\sqrt{3}a^3$.

D. $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{9}$.

Lời giải

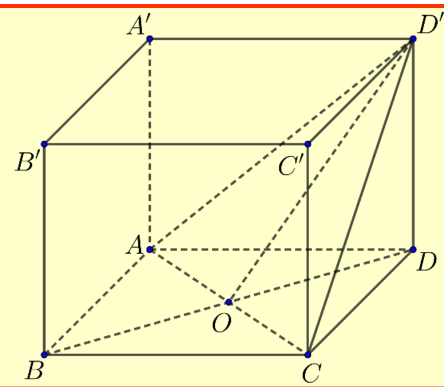
Chọn D

Ta có $AC' = AB\sqrt{3} \Rightarrow AB = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Thể tích khối lập phương là: $V = AB^3 = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{a^3}{3\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

☆ Ví dụ 03.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có diện tích tam giác ACD' bằng $a^2\sqrt{3}$. Tính thể tích V của hình lập phương.



A. $V = 3\sqrt{3}a^3$.

B. $V = 2\sqrt{2}a^3$.

C. $V = a^3$.

D. $V = 8a^3$.

Lời giải

Chọn B

Giả sử cạnh của hình lập phương có độ dài là x.

Ta có $AC = x\sqrt{2}$, $OD' = \sqrt{OD^2 + A'A^2} = \frac{x\sqrt{6}}{2}$

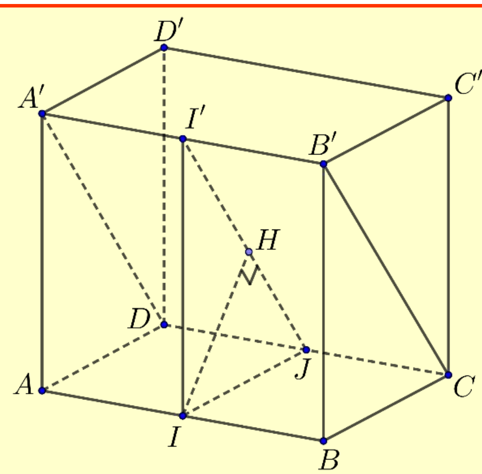
Diện tích tam giác ACD' là $S_{ACD'} = \frac{1}{2}OD'.AC = \frac{1}{2}x\sqrt{2}.\frac{x\sqrt{6}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó, ta có $a^2\sqrt{3} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a^2 = \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow x = a\sqrt{2}$.

Vậy $V = x^3 = 2a^3\sqrt{2}$.

☆ Ví dụ 04.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính thể tích V của hình lập phương biết rằng khoảng cách từ trung điểm I của AB đến mặt phẳng $(A'B'CD)$ bằng $\frac{a}{\sqrt{2}}$.



A. $V = \frac{a^3}{3}$.

B. $V = a^3\sqrt{2}$.

C. $V = 2a^3$.

D. $V = a^3$.

Lời giải

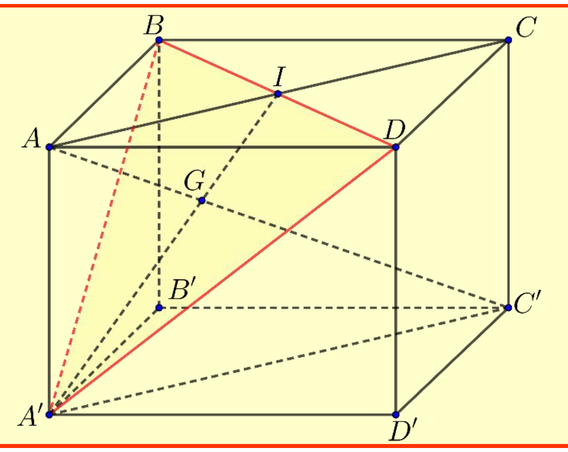
Chọn D

Gọi các điểm như hình vẽ bên trong đó $IH \perp I'J$.

Đặt cạnh $AB = x$ suy ra $IH = \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = a$. Vậy $V = a^3$.

✫ Ví dụ 05.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, khoảng cách từ C' đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{4a\sqrt{3}}{2}$. Tính theo a thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.



A. $V = 8a^3$.

B. $V = 3\sqrt{3}a^3$.

C. $V = 8\sqrt{3}a^3$.

D. $V = 216a^2$.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là giao điểm của AC và BD.

Trong mặt phẳng $(ACC'A')$; AC' cắt $A'I$ tại G.

Do AI song song AC' và $AI = \frac{1}{2}AC'$ nên $IG = \frac{1}{2}GA$.

Suy ra G là trọng tâm tam giác $A'BD$,

Mà tam giác $A'BD$ đều (có các cạnh là các đường chéo của những hình vuông bằng nhau)

Nên $GA' = GB = GD$ và $AA' = AB = AD$

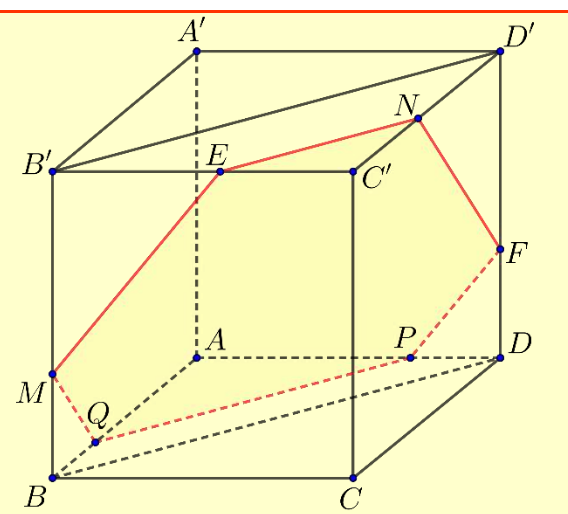
Suy ra $AG \perp (A'BD)$.

Do đó khoảng cách từ C' đến mặt phẳng $(A'BD)$ là $C'G$.

Mặt khác $C'G = \frac{2}{3}AC' = \frac{2}{3}AB\sqrt{3} = \frac{4a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AB = 2a$. Vậy $V = 8a^3$.

✫ Ví dụ 06.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm M, N, P theo thứ tự đó thuộc các cạnh BB', $C'D'$, DA sao cho $BM = C'N = DP = \frac{a}{3}$. Tìm diện tích thiết diện S của hình lập phương khi cắt bởi mặt phẳng (MNP).



A. $S = \frac{11\sqrt{3}a^2}{18}$. **B.** $S = \frac{5\sqrt{3}a^2}{18}$.

C. $S = \frac{13\sqrt{3}a^2}{18}$. **D.** $S = \frac{17\sqrt{3}a^2}{18}$.

Lời giải

Chọn A

❍ Ta có $\frac{BM}{C'N}=\frac{MB'}{ND'}=\frac{BB'}{C'D'}=1$, do đó theo định lý ta-let trong không gian thì BC', MN, $B'D'$ lần lượt cùng song song với một mặt phẳng.

❍ Mà $B'D'//\left(BC'D\right)$ và $BC'\subset\left(BC'D\right)$ nên ta có $MN//\left(BC'D\right)$.

❍ Chứng minh tương tự ta có $NP//\left(BC'D\right)$.

Do đó $\left(MNP\right)//\left(BC'D\right)$.

❍ Qua P, kẻ $PQ//BD, Q\in AB$. Qua N, kẻ $NF//C'D, F\in D'D$.

❍ Qua M, kẻ $ME//BC', E\in B'C'$.

Khi đó ta có thiết diện tạo bởi mặt phẳng $\left(MNP\right)$ với hình lập phương là lục giác $MENFPQ$.

Dễ thấy $EN=PF=MQ=\frac{a\sqrt{2}}{3}$, $NF=PQ=ME=\frac{2a\sqrt{2}}{3}$ và tam giác $BC'D$ là tam giác đều vì $BC'=BD=DC'=a\sqrt{2}$.

Do đó $ENF=NFP=FPQ=PQM=QME=MEN=60^\circ$

Suy ra: $EF^2=EN^2+NF^2-2.EN.NF.\cos 60^\circ=\frac{2}{3}a^2\Rightarrow EF=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

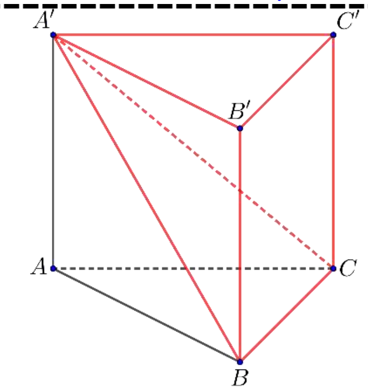
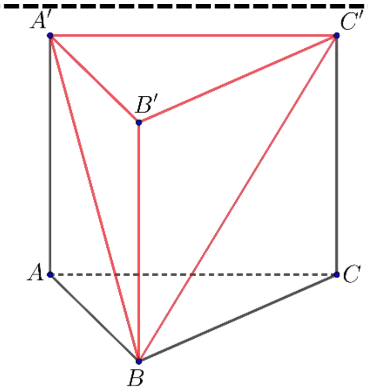
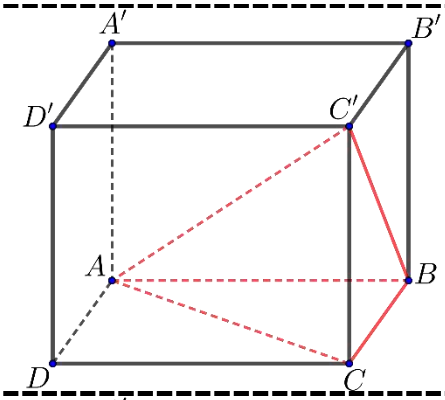
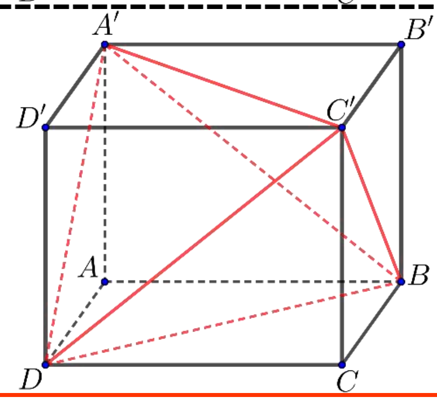
Tương tự thì $FQ=QE=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Ta có $S_{MENFPQ}=3.S_{ENF}+S_{EFQ}=3.\frac{1}{2}.\frac{2a\sqrt{2}}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{2a^2}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{18}a^2$.

Dạng toán 9. KHỐI ĐA DIỆN ĐƯỢC CẮT RA TỪ KHỐI LĂNG TRỤ.

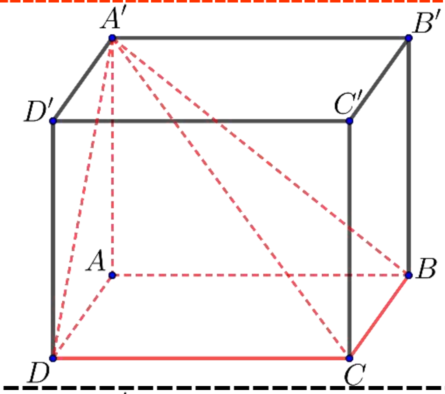
Phương pháp giải

A. *Một số mối liên hệ thường gặp giữa chóp – lăng trụ và chóp – thể tích:*

Mối liên hệ giữa		*Công thức*	*Hình minh họa*
Chóp	*Lăng trụ*	$V_{C(5d)} = \frac{2}{3} V_{L.Tr}$ *4 điểm thuộc mặt đáy*	
		$V_{C(4d)} = \frac{1}{3} V_{L.Tr}$ *3 điểm thuộc mặt đáy*	
Chóp	*Hình hộp*	$V_{C(4d)} = \frac{1}{6} V_{Hop}$ *Với 3 điểm thuộc đáy và 1 điểm thuộc mặt bên*	
		$V_{C(4d)} = \frac{1}{3} V_{Hop}$ *Với 3 điểm thuộc mặt chéo*	

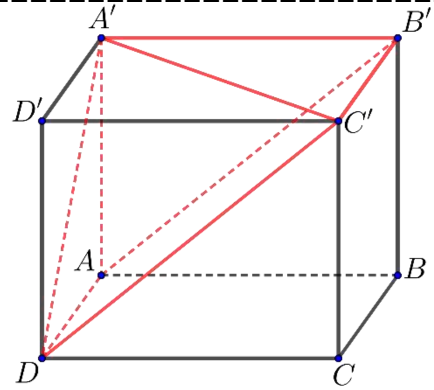
$$V_{C(5d)}=\frac{1}{3}V_{Hop}$$

Với 4 điểm thuộc mặt bên hoặc mặt đáy



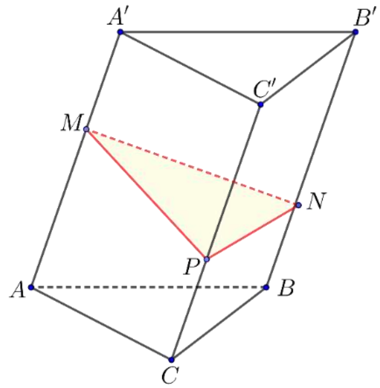
$$V_{C(5d)}=\frac{1}{3}V_{Hop}$$

Với 4 điểm thuộc mặt chéo



B. ***Mặt phẳng cắt các cạnh của khối lăng trụ tam giác*** $ABC.A'B'C'$ ***lần lượt tại*** $M;N;P$ ***sao cho*** $\frac{AM}{AA'}=\alpha;\frac{BN}{BB'}=\beta;\frac{CP}{CC'}=\delta$**:**

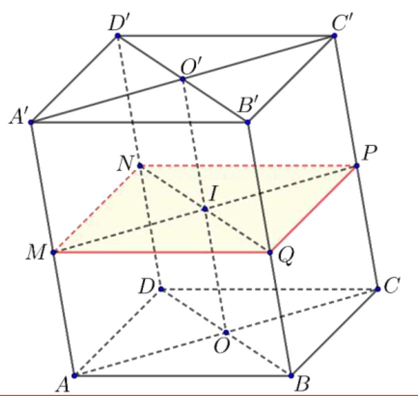
$$\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$



C. ***Mặt phẳng cắt các cạnh của khối hộp*** $ABCD.A'B'C'D'$ ***lần lượt tại*** $M;N;P;Q$ ***sao cho*** $\frac{AM}{AA'}=\alpha;\frac{BN}{BB'}=\beta;\frac{CP}{CC'}=\delta;\frac{DQ}{DD'}=\lambda$**:**

$$\frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}=\frac{\alpha+\beta+\gamma+\lambda}{4}$$

và $\alpha+\gamma=\beta+\lambda$.



☆ Ví dụ 01.

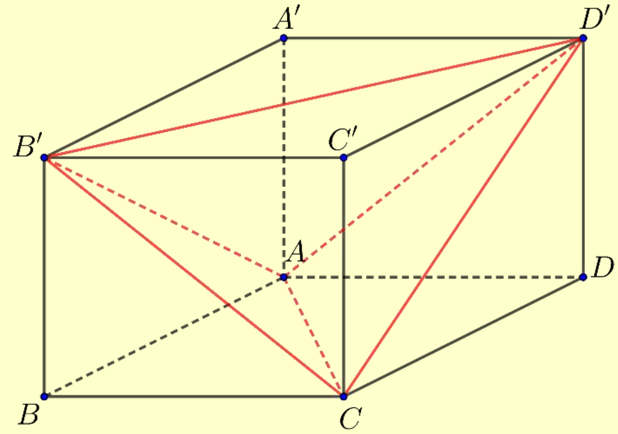
Hình lập phương $ABCDA'B'C'D'$ cạnh a. Tính thể tích khối tứ diện $ACB'D'$.

A. $\frac{a^3}{4}$.

B. $\frac{a^3}{2}$.

C. $\frac{a^3}{6}$.

D. $\frac{a^3}{3}$.



Lời giải

Chọn D

Ta có $V_{ACB'D'} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - \left(V_{B'.ABC} + V_{C.B'C'D'} + V_{D'.ACD} + V_{A.A'B'D'}\right)$.

Mà $V_{ABCD.A'B'C'D'} = a^3$ và $V_{B'.ABC} = V_{C.B'C'D'} = V_{D'.ACD} = V_{A.A'B'D'} = \frac{1}{3}.A'A.S_{A'B'D'} = \frac{1}{3}.a.\frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{6}a^3$.

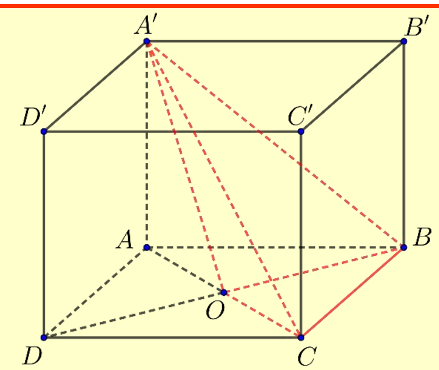
Do đó $V_{ACB'D'} = a^3 - \frac{4}{6}a^3 = \frac{a^3}{3}$.

☆ Ví dụ 02.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Thể tích của tứ diện $OA'BC$ bằng

A. $\frac{a^3}{6}$. **B.** $\frac{a^3}{4}$.

C. $\frac{a^3}{12}$. **D.** $\frac{a^3}{24}$.



Lời giải

Chọn C

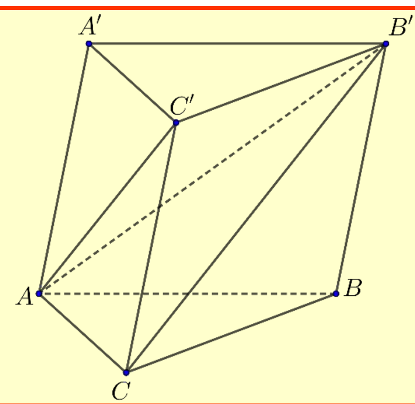
$$V_{O.A'BC} = V_{A'.OBC} = \frac{1}{6}AA'.OB.OC = \frac{1}{6}.a.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3}{12}$$

☆ Ví dụ 03.

Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Tính thể tích khối đa diện $ABCB'C'$.

A. $\frac{2V}{3}$. **B.** $\frac{V}{2}$.

C. $\frac{V}{4}$. **D.** $\frac{3V}{4}$.



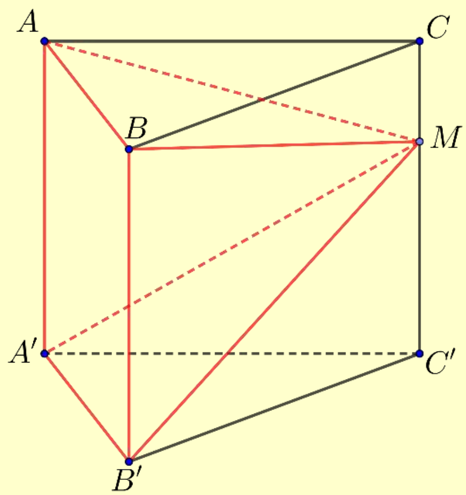
Lời giải

Chọn A

Ta có: $V_{ABCB'C'} = V_{B'ABC} + V_{C'B'AC} = \frac{V}{3} + \frac{V}{3} = \frac{2V}{3}$

☆ Ví dụ 04.

Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V. Gọi M là điểm bất kỳ trên đường thẳng CC'. Tính thể tích khối chóp $V_{M.ABB'A'}$ theo V.



A. $\frac{V}{3}$.

B. $\frac{2V}{9}$.

C. $\frac{2V}{3}$.

D. $\frac{V}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi h_1, h_2 lần lượt là đường cao của hai hình chóp $M.ABC$, $M.A'B'C'$ thì $h_1 + h_2 = h$ là đường cao của lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Ta có:

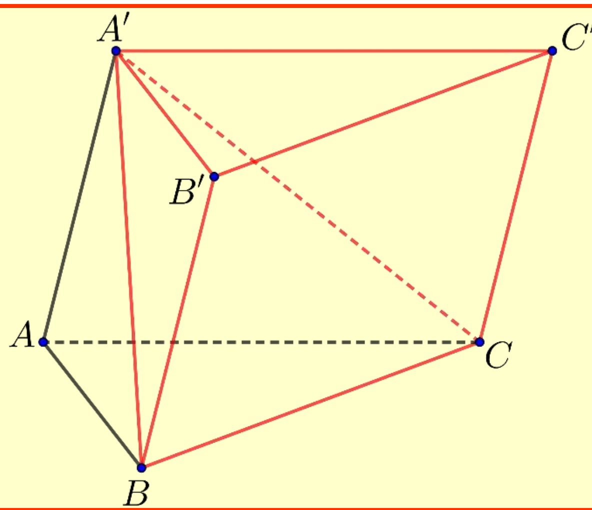
$V = V_{M.ABC} + V_{M.ABB'A'} + V_{M.A'B'C'}$

$= \frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.h_1 + V_{M.ABB'A'} + \frac{1}{3}.S_{\Delta A'B'C'}.h_2 \quad = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\left(h_1 + h_2\right) + V_{M.ABB'A'} = \frac{1}{3}V + V_{M.ABB'A'}$

Suy ra $V_{M.ABB'A'} = \frac{2V}{3}$.

☆ Ví dụ 05.

Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Tính tỉ số thể tích giữa khối đa diện $A'B'C'BC$ và khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.



A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{5}{6}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

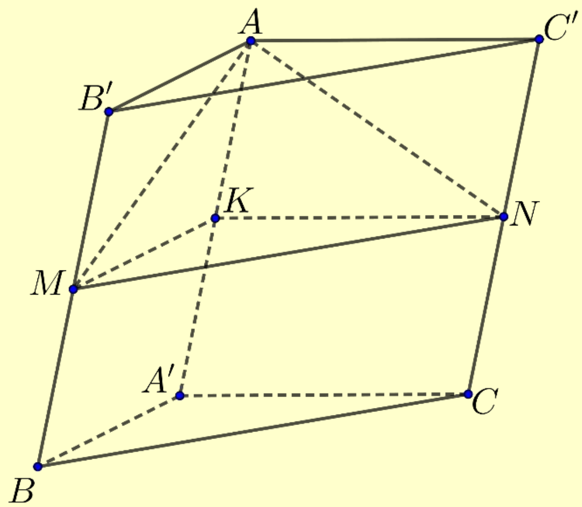
Chọn D

Ta có: $V_{A'.ABC}=\frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.d\left(A',\left(ABC\right)\right)$, $V_{A'B'C'.ABC}=S_{\Delta ABC}.d\left(A',\left(ABC\right)\right)\Rightarrow V_{A'.ABC}=\frac{1}{3}V_{A'B'C'.ABC}$.

Ta có: $V_{A'.ABC}+V_{A'B'C'BC}=V_{A'B'C'.ABC}\ \Rightarrow V_{A'B'C'BC}=\frac{2}{3}V_{A'B'C'.ABC}$.

☆ Ví dụ 06.

Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB' và CC'. Mặt phẳng $\left(AMN\right)$ chia khối lăng trụ thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện chứa đỉnh B' và V_2 là thể tích khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



A. $\frac{V_1}{V_2}=2$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{3}$.

C. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn A

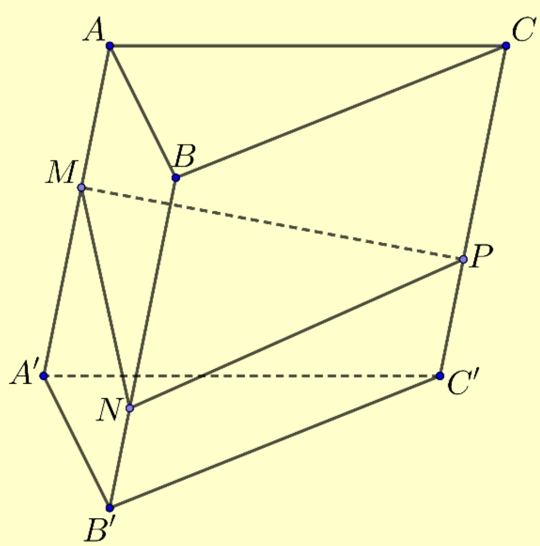
Gọi K là trung điểm của AA' và V, $V_{ABC.KMN}$, $V_{A.MNK}$ lần lượt là thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ khối lăng trụ $ABC.KMN$ và thể tích khối chóp $A.MNK$. Khi đó $V_2=V_{ABC.KMN}-V_{A.MNK}$.

Lại có $V_{ABC.KMN}=\frac{1}{2}V$; $V_{A.MNK}=\frac{1}{3}V_{ABC.KMN}=\frac{1}{6}V$ suy ra $V_2=\frac{1}{2}V-\frac{1}{6}V=\frac{1}{3}V$ từ đó ta có

$V_1=V-\frac{1}{3}V=\frac{2}{3}V$. Vậy $\frac{V_1}{V_2}=2$.

☆ Ví dụ 07.

Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 2018. Gọi M là trung điểm AA'; N,P lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BB', CC' sao cho $BN=2B'N$, $CP=3C'P$. Tính thể tích khối đa diện $ABC.MNP$.



A. $\frac{40360}{27}$.

B. $\frac{4036}{3}$.

C. $\frac{23207}{18}$.

D. $\frac{32288}{27}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\dfrac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{AM}{AA'}+\dfrac{BN}{BB'}+\dfrac{CP}{CC'}\right)=\dfrac{23}{36}$. Vậy $V_{ABC.MNP}=\dfrac{23207}{18}$.

☆ Ví dụ 08.

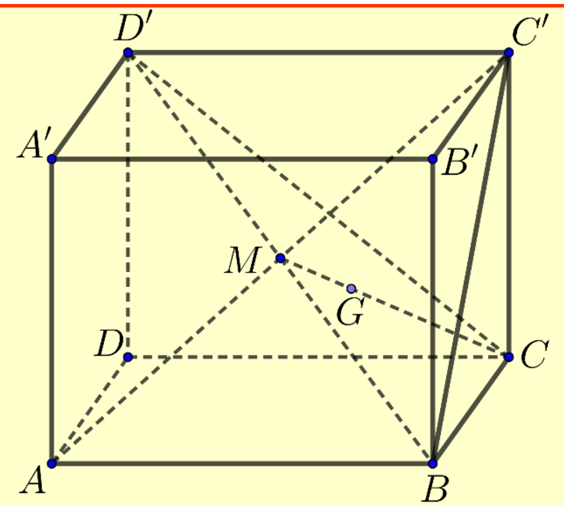
Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 1 và G là trọng tâm của tam giác BCD'. Thể tích V của khối chóp $G.ABC'$ là

A. $V=\dfrac{1}{3}$.

B. $V=\dfrac{1}{6}$.

C. $V=\dfrac{1}{12}$.

D. $V=\dfrac{1}{18}$.



Lời giải

Chọn D

Gọi M là trung điểm của BD' theo tính chất trọng tâm của G ta có $GM=\dfrac{1}{3}CM$

$\Rightarrow V_{G.ABC'}=\dfrac{1}{3}V_{C.ABC'}=\dfrac{1}{3}V_{A.BCC'}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{3}.AB.\dfrac{1}{2}CB.CC'=\dfrac{1}{18}AB.BC.CC'=\dfrac{1}{18}V_{ABCD.A'B'C'D'}=\dfrac{1}{18}$.

☆ Ví dụ 09.

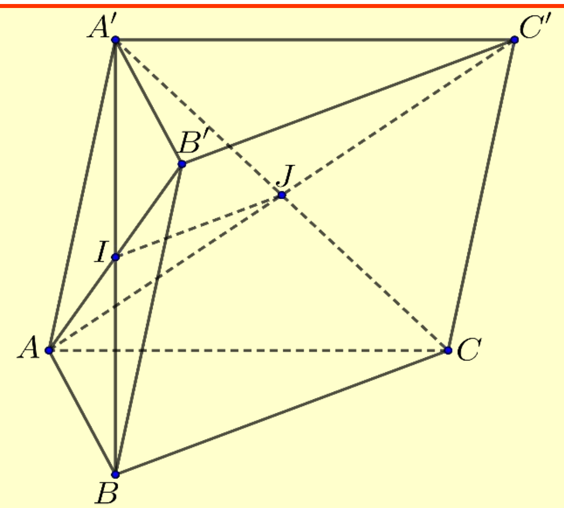
Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích $V=36\text{ cm}^3$. Mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'BC)$ chia khối lăng trụ thành 4 khối đa diện. Tính thể tích khối đa diện có chứa một mặt là hình bình hành $BCC'B'$.

A. 15 cm^3.

B. 9 cm^3.

C. 12 cm^3.

D. 18 cm^3.



Lời giải

Chọn A

Gọi $I=AB'\cap A'B$, $J=A'C\cap AC'$.

Ta có $V_{IJBB'C'C}=V_{A.BB'C'C}-V_{A.BCIJ}$.

Mặt khác $V_{A.A'B'C'}+V_{A.BCC'B'}=V_{ABC.A'B'C'}\Leftrightarrow V_{A.BCC'B'}=\dfrac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}=\dfrac{2}{3}V=24$.

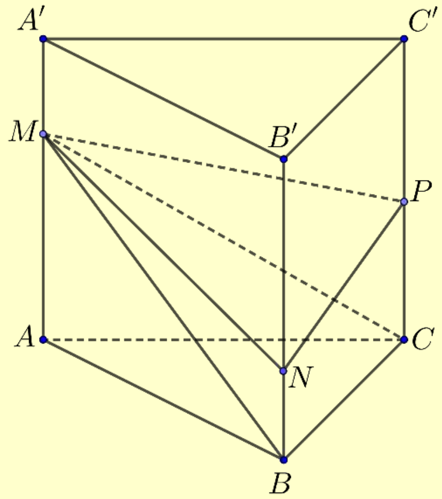
Ta lại có $\dfrac{V_{A.IJA'}}{V_{A.A'B'C'}}=\dfrac{AI}{AB'}.\dfrac{AJ}{AC'}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow V_{A.IJA'}=\dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{3}.36=3$.

$V_{A.IJBC}=V_{A'.ABC}-V_{A.IJA'}=\frac{1}{3}.36-3=9$.

Vậy $V_{IJBB'C'C}=24-9=15\ \left(\text{cm}^3\right)$.

✰ Ví dụ 10.

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $AM=2MA'$, $NB'=2NB$, $PC=PC'$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai khối đa diện $ABCMNP$ và $A'B'C'MNP$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



A. $\frac{V_1}{V_2}=2$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{2}$.

C. $\frac{V_1}{V_2}=1$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi V là thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Ta có $V_1=V_{M.ABC}+V_{M.BCPN}$.

$V_{M.ABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}.d\left(M,\left(ABC\right)\right)=\frac{1}{3}.\frac{2}{3}S_{ABC}.d\left(A',\left(ABC\right)\right)=\frac{2}{9}V$.

$V_{M.A'B'C'}=\frac{1}{3}S_{A'B'C'}.d\left(M,\left(A'B'C'\right)\right)=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}S_{A'B'C'}.d\left(M,\left(A'B'C'\right)\right)=\frac{1}{9}V$.

Do $BCC'B'$ là hình bình hành và $NB'=2NB$, $PC=PC'$ nên $S_{B'C'PN}=\frac{7}{5}S_{BCPN}$.

Suy ra $V_{M.B'C'PN}=\frac{7}{5}V_{M.BCPN}$

Từ đó $V=V_{M.ABC}+V_{M.BCPN}+V_{M.A'B'C'}+V_{M.B'C'PN}$

$\Leftrightarrow V=\frac{2}{9}V+V_{M.BCPN}+\frac{1}{9}V+\frac{7}{5}V_{M.BCPN}\Leftrightarrow V_{M.BCPN}=\frac{5}{18}V$.

Như vậy $V_1=\frac{2}{9}V+\frac{5}{18}V=\frac{1}{2}V\Rightarrow V_2=\frac{1}{2}V$. Bởi vậy: $\frac{V_1}{V_2}=1$.

Dạng toán 10. MAX – MIN THỂ TÍCH.

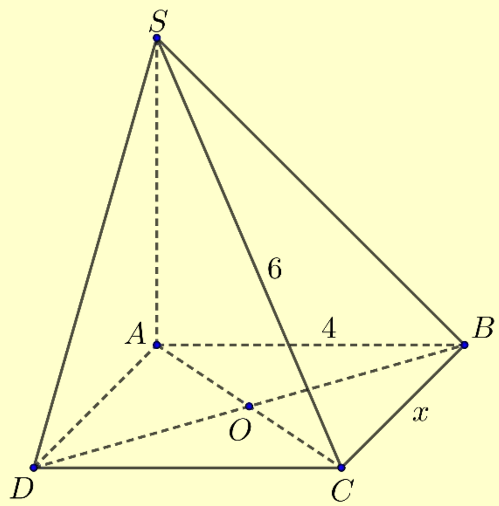
Phương pháp giải

Ta có thể dùng các phương pháp sau:

	Dạng	Dấu "=" xảy ra khi
BĐT *Bunyakovsky*	$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)\ge\left(ac+bd\right)^2$	$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$
	$\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)\ge\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2$	$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$
BĐT *AM – GM*	$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$	$a=b$
	$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1.a_2.....a_n}\quad\left(n\ge1\right)$	$a_1=a_2=...=a_n$
Khảo sát hàm số trên khoảng xác định	Tính đạo hàm rồi lập BBT, từ đó kết luận theo yêu cầu bài toán.	

☆ Ví dụ 01.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=4$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SC=6$. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp đã cho.



A. $V_{\max}=\frac{40}{3}$.

B. $V_{\max}=\frac{80}{3}$.

C. $V_{\max}=\frac{20}{3}$.

D. $V_{\max}=24$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1.

Đặt cạnh $BC=x>0$. Tam giác vuông ABC, có $AC^2=16+x^2$.

Tam giác vuông SAC, có $SA=\sqrt{SC^2-AC^2}=\sqrt{20-x^2}$.

Diện tích hình chữ nhật $S_{ABCD}=AB.BC=4x$.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\frac{4}{3}x\sqrt{20-x^2}$.

Áp dụng BĐT Côsi, ta có $x.\sqrt{20-x^2} \le \dfrac{x^2+\left(\sqrt{20-x^2}\right)^2}{2} = 10$.

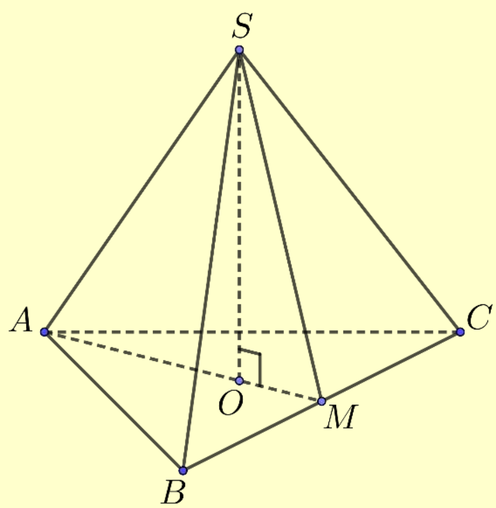
Suy ra $V_{S.ABCD} \le \dfrac{4}{3}.10 = \dfrac{40}{3}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=\sqrt{20-x^2} \Leftrightarrow x=\sqrt{10}$. Vậy $V_{\max} = \dfrac{40}{3}$.

Cách 2. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{4}{3}x\sqrt{20-x^2}$ trên $\left(0;2\sqrt{5}\right)$.

☆ Ví dụ 02.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều và có $SA=SB=SC=1$. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp đã cho.



A. $V_{\max} = \dfrac{1}{6}$.

B. $V_{\max} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

C. $V_{\max} = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

D. $V_{\max} = \dfrac{1}{12}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC.

Vì $S.ABC$ là hình chóp đều $\Rightarrow SO \perp (ABC)$.

Đặt $AB = x > 0$. Diện tích tam giác đều $S_{\Delta ABC} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow AM = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OA = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác vuông SOA, có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{1-\dfrac{x^2}{3}}$.

Khi đó $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SO = \dfrac{1}{3}.\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{12}.x^2\sqrt{3-x^2}$

Xét hàm $f(x)=\dfrac{1}{12}.x^2\sqrt{3-x^2}$ trên $\left(0;\sqrt{3}\right)$, ta được $\max\limits_{\left(0;\sqrt{3}\right)} f(x) = f\left(\sqrt{2}\right) = \dfrac{1}{6}$.

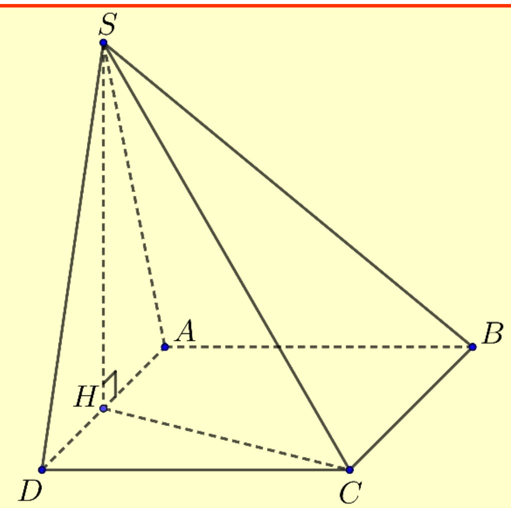
Cách 2. Ta có $x^2\sqrt{3-x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2.x^2.\left(6-2x^2\right)} \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\dfrac{x^2+x^2+6-2x^2}{3}\right)^3} = 2$.

✫ Ví dụ 03.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=4, SC=6$ và mặt bên (SAD) là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp đã cho.

A. $V_{\max}=\dfrac{40}{3}$. **B.** $V_{\max}=40$.

C. $V_{\max}=80$. **D.** $V_{\max}=\dfrac{80}{3}$.



Lời giải

Chọn D

Gọi H là trung điểm của $AD \Rightarrow SH \perp AD$. Mà $(SAD)\perp(ABCD)\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

Giả sử $AD=x>0$. Suy ra $HC=\sqrt{HD^2+CD^2}=\sqrt{\dfrac{x^2}{4}+16}$.

Tam giác vuông SHC, có $SH=\sqrt{SC^2-HC^2}=\sqrt{20-\dfrac{x^2}{4}}$.

Khi đó $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SH=\dfrac{1}{3}AB.AD.SH$

$=\dfrac{1}{3}.4.x\sqrt{20-\dfrac{x^2}{4}}=\dfrac{1}{3}\left(2x\sqrt{80-x^2}\right)\le\dfrac{1}{3}\left(x^2+80-x^2\right)=\dfrac{80}{3}$.

✫ Ví dụ 04.

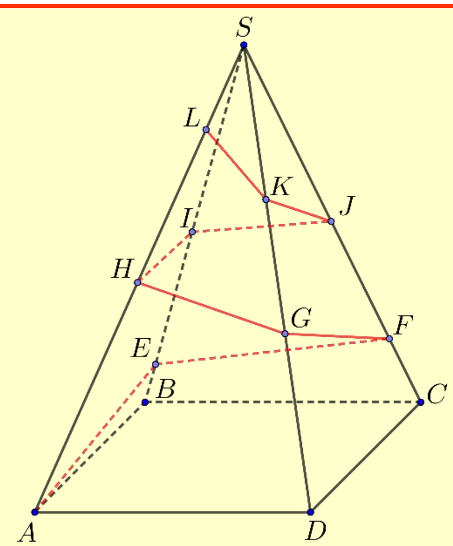
Người ta cần trang trí một kim tự tháp hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh bên bằng $200\,\text{m}$, góc $ASB=15^\circ$ bằng đường gấp khúc dây đèn led vòng quanh kim tự tháp $AEFGHIJKLS$. Trong đó điểm L cố định và $LS=40\,\text{m}$ (tham khảo hình vẽ). Hỏi khi đó cần dung ít nhất bao nhiêu mét dây đèn led để trang trí?

A. $40\sqrt{67}+40$ mét.

B. $20\sqrt{111}+40$ mét.

C. $40\sqrt{31}+40$ mét.

D. $40\sqrt{111}+40$ mét.

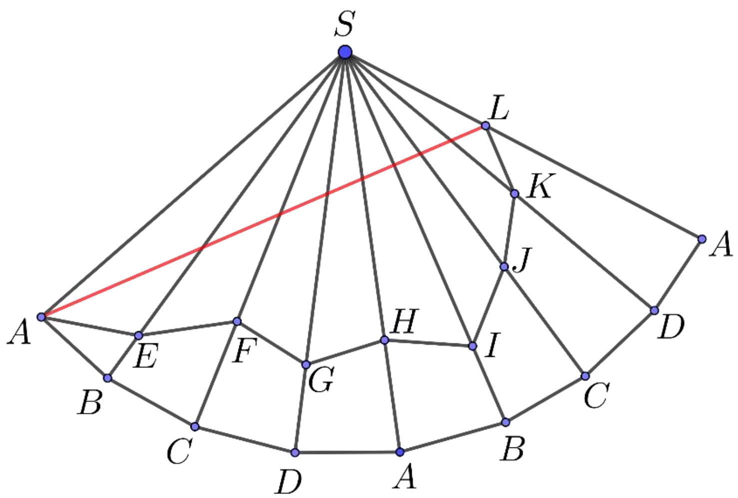


Lời giải

Chọn C

Ta sử dụng phương pháp trải đa diện

Cắt hình chóp theo cạnh bên SA rồi trải ra mặt phẳng hai lần, ta có hình vẽ sau



Từ đó suy ra chiều dài dây đèn led ngắn nhất là bằng $AL+LS$.

Từ giả thiết về hình chóp đều $S.ABCD$ ta có $ASL=120°$.

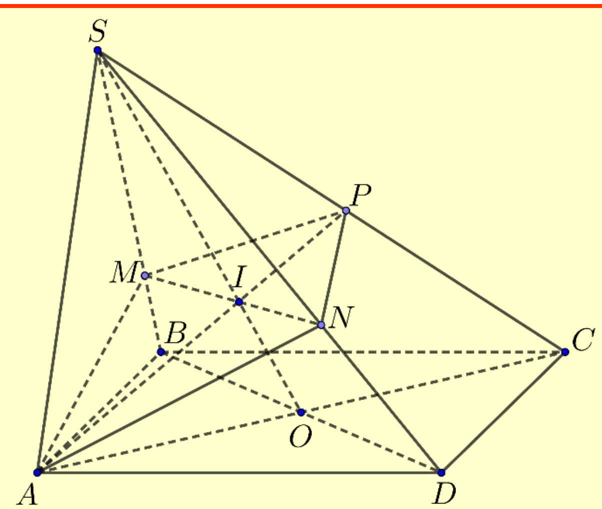
Ta có $AL^2=SA^2+SL^2-2SA.SL.\cos ASL=200^2+40^2-2.200.40.\cos 120°=49600$.

Nên $AL=\sqrt{49600}=40\sqrt{31}$.

Vậy, chiều dài dây đèn led cần ít nhất là $40\sqrt{31}+40$ mét.

☆ Ví dụ 05.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V. Điểm P là trung điểm của SC. Một mặt phẳng qua AP cắt hai cạnh SB và SD lần lượt tại M và N. Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $S.AMPN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V}$.



A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{8}$.

C. $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $x=\frac{SM}{SB}$, $y=\frac{SN}{SD}$, $(0<x,y\le 1)$.

Ta có $\frac{V_1}{V}=\frac{V_{S.AMP}+V_{S.ANP}}{V}=\frac{V_{S.AMP}}{2V_{S.ABC}}+\frac{V_{S.ANP}}{2V_{S.ADC}}=\frac{1}{2}\left(\frac{SM}{SB}.\frac{SP}{SC}+\frac{SN}{SD}.\frac{SP}{SC}\right)=\frac{1}{4}(x+y)$ (1)

Lại có $\frac{V_1}{V}=\frac{V_{S.AMN}+V_{S.PMN}}{V}=\frac{V_{S.AMN}}{2V_{S.ABD}}+\frac{V_{S.PMN}}{2V_{S.CBD}}=\frac{1}{2}\left(\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SD}+\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SD}.\frac{SP}{SC}\right)=\frac{3}{4}xy$ (2).

Suy ra $\frac{1}{4}(x+y)=\frac{3}{4}xy\Rightarrow x+y=3xy\Rightarrow y=\frac{x}{3x-1}$.

Từ điều kiện $0<y\le 1$, ta có $\frac{x}{3x-1}\le 1$, hay $x\ge\frac{1}{2}$.

Thay vào (2) ta được tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V}=\frac{3}{4}.\frac{x^2}{3x-1}$.

Đặt $f(x)=\frac{3}{4}.\frac{x^2}{3x-1}, x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$, ta có $f'(x)=\frac{3}{4}.\frac{3x^2-2x}{(3x-1)^2}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=0 & (L)\\ x=\frac{2}{3} & (N)\end{array}\right.$.

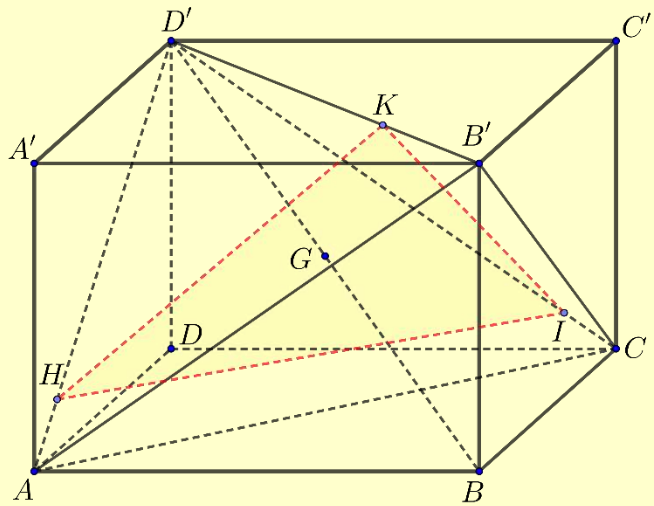
$f\left(\frac{1}{2}\right)=f(1)=\frac{3}{8}$, $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$, do đó $\min\frac{V_1}{V}=\min\limits_{x\in\left[\frac{1}{2};1\right]}f(x)=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$.

☆ Ví dụ 06.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a, AD=a\sqrt{2}, AA'=a\sqrt{3}$. Gọi G là trung điểm của BD', mặt phẳng (P) đi qua G và cắt các tia $AD', CD', D'B'$ tương ứng tại ba điểm phân biệt H, I, K. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{1}{D'H^2}+\frac{1}{D'K^2}+\frac{1}{D'I^2}$.

A. $T=\frac{1}{3a^2}$. **B.** $T=\frac{4}{a^2}$.

C. $T=\frac{4}{3a^2}$. **D.** $T=\frac{1}{12a^2}$.



Lời giải

Chọn C

Đặt $\frac{D'H}{D'A}=x, \frac{D'I}{D'C}=y, \frac{D'K}{D'B'}=z$.

ta có $\overrightarrow{D'G}=\frac{1}{2}\overrightarrow{D'B}=\frac{1}{2}\overrightarrow{D'A}+\frac{1}{2}\overrightarrow{D'C}+\frac{1}{2}\overrightarrow{D'D}$

Ta có $\overrightarrow{D'H}=x\overrightarrow{D'A}=x\left(\overrightarrow{D'D}+\overrightarrow{D'A}\right)\Rightarrow\frac{1}{x}\overrightarrow{D'H}=\overrightarrow{D'D}+\overrightarrow{D'A}$

$\overrightarrow{D'I}=y\overrightarrow{D'C}=y\left(\overrightarrow{D'D}+\overrightarrow{D'C'}\right)\Rightarrow\frac{1}{y}\overrightarrow{D'I}=\overrightarrow{D'D}+\overrightarrow{D'C'}$

$\overrightarrow{D'K}=z\overrightarrow{D'A}=z\left(\overrightarrow{D'A'}+\overrightarrow{D'C'}\right)\Rightarrow\frac{1}{z}\overrightarrow{D'K}=\overrightarrow{D'A'}+\overrightarrow{D'C'}$

$\Rightarrow\overrightarrow{D'G}=\frac{1}{4x}\overrightarrow{D'H}+\frac{1}{4y}\overrightarrow{D'I}+\frac{1}{4z}\overrightarrow{D'K}$

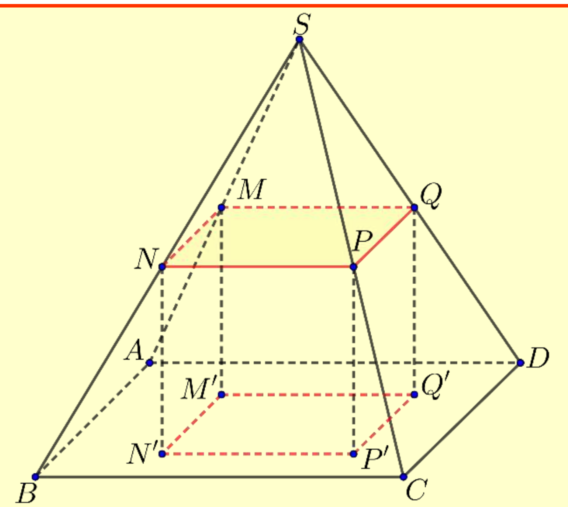
Do $\overrightarrow{DG},\overrightarrow{DH},\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DK}$ không đồng phẳng nên $\frac{1}{4x}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{4z}=1\Rightarrow\frac{D'A}{D'H}+\frac{D'C}{D'I}+\frac{D'B}{D'K}=4$

$\Rightarrow 4^2=\left(\frac{D'A}{D'H}+\frac{D'C}{D'I}+\frac{D'B}{D'K}\right)^2\le\left(\frac{1}{D'H^2}+\frac{1}{D'I^2}+\frac{1}{D'K^2}\right)\left(D'A^2+D'C^2+D'B'^2\right)$

$\Rightarrow T\ge\frac{16}{D'A^2+D'C^2+D'B'^2}=\frac{16}{12a^2}=\frac{4}{3a^2}$

✫ Ví dụ 07.

Cho hình chóp $S.ABCD$. Một mặt phẳng song song mặt đáy cắt các cạnh $SA;SB;SC;SD$ lần lượt tại M,N,P,Q. Gọi M',N',P',Q' lần lượt là hình chiếu của M,N,P,Q lên mặt đáy. Tìm tỉ số $\dfrac{SM}{SA}$ để thể tích khối đa điện $MNPQ.M'N'P'Q'$ lớn nhất.



A. $\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{2}{3}$.

C. $\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{1}{3}$

Lời giải

Chọn B

Đặt $\dfrac{SM}{SA}=x$. Suy ra $\dfrac{SN}{SB}=\dfrac{SP}{SC}=\dfrac{SQ}{SD}=x$.

Gọi h,h' lần lượt là chiều cao hình chóp và chiều cao khối đa diện $MNPQ.M'N'P'Q'$.

Do $MN//AB$ nên ta có $\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{MN}{AB}\Leftrightarrow x=\dfrac{MN}{AB}\Leftrightarrow MN=x.AB$.

Tương tự ta có $BC=x.NP$

Ta có $S_{MNP}=x^2.S_{ABC}\Leftrightarrow S_{MNPQ}=x^2S_{ABCD}$ (Vì tam giác ΔMNP đồng dạng tam giac ABC)

Mặt khác ta có $\dfrac{AM}{AS}=\dfrac{h'}{h}\Leftrightarrow\dfrac{SA-SM}{SA}=\dfrac{h'}{h}\Leftrightarrow 1-x=\dfrac{h'}{h}\Leftrightarrow h'=(1-x)h$

Ta có $V_{MNPQ.M'N'P'Q'}=h'.S_{MNPQ}=(1-x)h.x^2.S_{ABCD}=(1-x)x^2.h.S_{ABCD}$

Do h,S_{ABCD} không thay đổi nên $V_{MNPQ.M'N'P'Q'}$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $(1-x)x^2$ đạt lớn nhất.

Ta có $(1-x)x^2=4.(1-x)\dfrac{x}{2}\dfrac{x}{2}\le 4.\dfrac{\left(1-x+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}\right)^3}{27}=\dfrac{4}{27}$

Dấu $=$ xảy ra khi và chỉ khi $1-x=\dfrac{x}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$.

III. BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

Câu 1. Hình lăng trụ tam giác có tất cả bao nhiêu cạnh?

A. 12. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

Lăng trụ tam giác có 9 cạnh.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA=3a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$

A. $3a^3$. **B.** $\frac{a^3}{9}$. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** a^3.

Lời giải

Chọn D

Diện tích đáy: $S_{ABCD}=a^2$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V=\frac{1}{3}a^2.3a=a^3$.

Câu 3. Cho hình chóp có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $4a$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{4}{3}a^3$. **B.** $16a^3$. **C.** $4a^3$. **D.** $\frac{16}{3}a^3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $B=a^2, h=4a \Rightarrow V=\frac{1}{3}B.h=\frac{1}{3}a^2.4a=\frac{4}{3}a^3$.

Câu 4. Một khối lăng trụ có diện tích đáy 3 và có thể tích bằng 6 thì chiều cao bằng :

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Chiều cao của khối lăng trụ bằng $h=\frac{V}{S}=\frac{6}{3}=2$.

Câu 5. Cho khối chóp có diện tích đáy $B=3$ và thể tích bằng 6. Chiều cao của khối chóp bằng

A. 6. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 12.

Lời giải

Chọn B

Ta có thể tích khối chóp $V=B.h \Rightarrow h=\frac{V}{B}=\frac{6}{3}=2$.

Câu 6. Cho khối hộp chữ nhật có ba kích thước $2;4;6$. Thể tích của khối hộp đã cho bằng

A. 8. **B.** 16. **C.** 48. **D.** 12.

Lời giải

Chọn A

Thể tích của khối hộp đã cho là $V=2.4.6=48$.

Câu 7. Cho khối chóp có đáy là tam giác đều cạnh a và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích V của khối chóp bằng

A. $V=\frac{a^3}{2}$. **B.** $V=a^3$. **C.** $V=\frac{3a^3}{4}$. **D.** $V=\frac{a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích đáy bằng $B=S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin A=\frac{1}{2}a.a.\sin 60^\circ=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối chóp là $V=\frac{1}{3}Bh=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}a\sqrt{3}=\frac{a^3}{4}$.

Câu 8. Hình chóp $S.ABC$ có chiều cao $h=a$, diện tích tam giác ABC là $3a^2$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3}{2}$. **B.** a^3. **C.** $3a^3$. **D.** $\frac{3}{2}a^3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $V=\frac{1}{3}B.h=\frac{1}{3}.3a^2.a=a^3$.

Câu 9. Chiều cao của khối lăng trụ có thể tích bằng $V=12$, diện tích đáy $B=4$ là

A. 8. **B.** 9. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $V=B.h\Rightarrow h=\frac{V}{B}=\frac{12}{4}=3$.

Câu 10. Thể tích khối hộp chữ nhật có ba kích thước lần lượt a, b, c là

A. $V=a^3bc$. **B.** $V=\frac{1}{3}abc$. **C.** $V=abc$. **D.** $V=\frac{1}{2}abc$.

Lời giải

Chọn C

Thể tích khối hộp chữ nhật có ba kích thước lần lượt a, b, c là $V=abc$.

Câu 11. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $2a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Thể tích khối lăng trụ đã cho là $V=B.h=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.2a=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 12. Một hình hộp chữ nhật có ba kích thước là a, $2a$ và $3a$. Thể tích của khối hộp chữ nhật đó bằng

A. a^3. **B.** $3a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** $6a^3$.

Lời giải

Chọn D

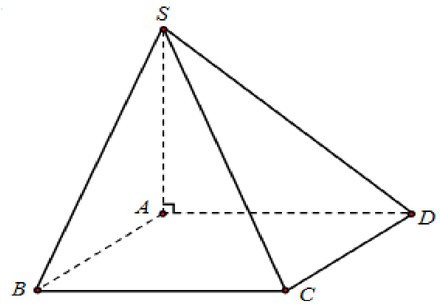
Thể tích khối hộp chữ nhật là: $V=6a^3$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = 3a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với $(ABCD)$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a^3\sqrt{2}$. **C.** $3a^3\sqrt{2}$. **D.** $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



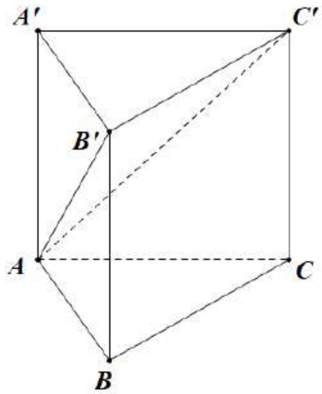
Thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}.a^2.3a\sqrt{2} = a^3\sqrt{2}$.

Câu 14. Mặt phẳng $(AB'C')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành các khối đa diện nào?

A. Hai khối chóp tam giác.
B. Một khối chóp tam giác và một khối chóp ngũ giác.
C. Một khối chóp tam giác và một khối chóp tứ giác.
D. Hai khối chóp tứ giác.

Lời giải

Chọn C



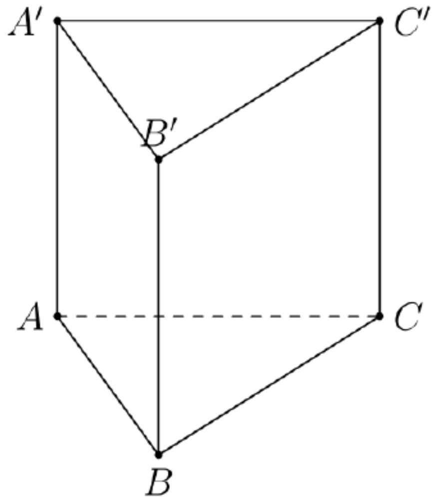
Mặt phẳng $(AB'C')$ chia khối lăng trụ thành hai khối đó là chóp tam giác $A.A'B'C'$ và chóp tứ giác $A.B'C'CB$.

Câu 15. Cho khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng a. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

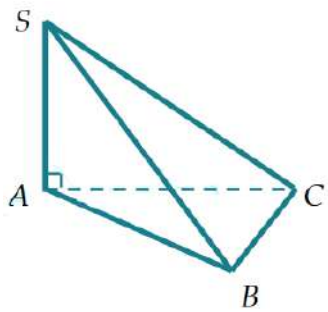
Chọn A



Trong ΔABC ta có $S_{ABC} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ tam giác đều là $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = 2a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A. $AB = 2a; AC = a; SA = 3a; SA \perp (ABC)$. Thể tích của hình chóp là



A. $V = 3a^3$. **B.** $V = 6a^3$. **C.** $V = 2a^3$. **D.** $V = a^3$.

Lời giải

Chọn D

Thể tích khối chóp $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}.AB.AC.SA = \dfrac{1}{6}.2a.a.3a = a^3$.

Câu 17. Tính thể tích V của khối chóp có chiều cao bằng $5\,\text{cm}$ và diện tích đáy bằng $12\,\text{cm}^2$.

A. $V = 60\,\text{cm}^3$. **B.** $V = 20\,\text{cm}^3$. **C.** $V = 30\,\text{cm}^3$. **D.** $V = 40\,\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích của khối chóp cần tìm là: $V = \dfrac{1}{3}Bh = \dfrac{1}{3}.5.12 = 20\left(\text{cm}^3\right)$

Câu 18. Cho hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông cạnh a, chiều cao bằng $2a$. Tính thể tích hình hộp chữ nhật.

A. $2a^3$. **B.** $6a^3$. **C.** $\dfrac{2a^3}{3}$. **D.** $2a^2$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích hình hộp chữ nhật là $V = B.h = a^2.2a = 2a^3$.

Câu 19. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy là 8,chiều cao là 6. Tính thể tích khối lăng trụ

A. 16. **B.** 36. **C.** 48. **D.** 24.

Lời giải

Chọn C

$V = B.h = 6.8 = 48$.

Câu 20. Cho khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **D.** a^3.

Lời giải

Chọn B

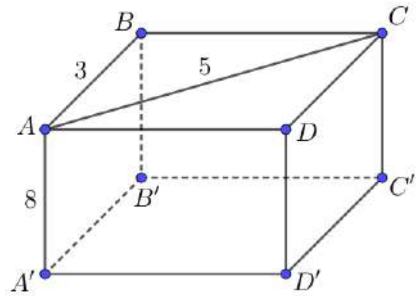
Ta có diện tích đáy $B = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.Suy ra thể tích khối lăng trụ là $V = B.h = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 21. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 3$, $AC = 5$, $AA' = 8$. Thể tích của khối hộp đã cho bằng

A. 120. **B.** 32. **C.** 96. **D.** 60.

Lời giải

Chọn C



Áp dụng định lý Pytago cho tam giác vuông ABC, ta có $BC = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

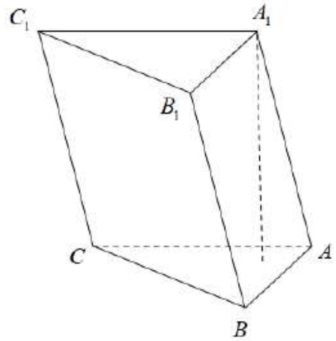
Khi đó, thể tích của khối hộp chữ nhật là $V = AB.BC.AA' = 3.4.8 = 96$.

Câu 22. Cho khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có thể tích bằng 18, thể tích khối chóp $A_1.ABC$ bằng

A. 6. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A



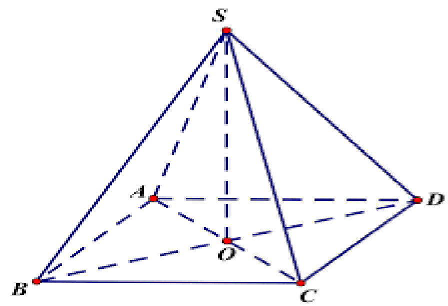
- Ta có: $V_{A_1.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{ABC}.d\left(A_1.\left(ABC\right)\right) = \dfrac{1}{3}.V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{1}{3}.18 = 6$.

Câu 23. Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng 2 và cạnh bên bằng $\sqrt{6}$. Thể tích khối chóp bằng

A. 8. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C



- Áp dụng công thức: $V=\frac{1}{3}Bh$
- Đáy là hình vuông nên: $B=2^2=4\,;h=SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{6-2}=2$
- $V=\frac{1}{3}.4.2=\frac{8}{3}$.

Câu 24. Thể tích V của khối chóp có diện tích đáy bằng $6a^2$ và chiều cao bằng a là

A. $V=12a^3$. **B.** $V=6a^3$. **C.** $V=18a^3$. **D.** $V=2a^3$.

Lời giải

Chọn D

Thể tích của khối chóp cần tìm là $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}.6a^2.a=2a^3$.

Câu 25. Cho một khối chóp có diện tích đáy $B=6a^2$, chiều cao $h=3a$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $6a^3$. **B.** $18a^3$. **C.** $9a^3$. **D.** $54a^3$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối chóp đã cho là $V=\frac{1}{3}Bh=\frac{1}{3}6a^2.3a=6a^3$.

Câu 26. Số cạnh của hình bát diện đều là

A. 8. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 20.

Lời giải

Chọn B

Câu 27. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $B=8$ và chiều cao $h=6$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng:

A. 48. **B.** 16. **C.** 24. **D.** 14.

Lời giải

Chọn A

Thể tích của khối lăng trụ đã cho là: $V=B.h=8.6=48$.

Câu 28. Thể tích của khối chóp có diện tích đáy B, chiều cao h là

A. $B.h$. **B.** $\frac{1}{2}B.h$. **C.** $\frac{1}{3}B.h$. **D.** $\frac{4}{3}B.h$.

Lời giải

Chọn C

Thể tích của khối chóp có diện tích đáy B, chiều cao h là $\frac{1}{3}B.h$.

Câu 29. Cho khối chóp có chiều cao $h=3$ và diện tích đáy $B=2$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 12. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Thể tích của khối chóp là: $V=\frac{1}{3}Bh=\frac{1}{3}.2.3=2$.

Câu 30. Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AC'=a\sqrt{3}$.

A. $V=a^3$. **B.** $V=\frac{a^3}{4}$. **C.** $V=\frac{3\sqrt{6}a^3}{4}$. **D.** $V=3\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $AC'=a\sqrt{3}\Leftrightarrow AB.\sqrt{3}=a\sqrt{3}\Rightarrow AB=a\Rightarrow V=a^3$.

Câu 31. Cho khối chóp có diện tích đáy $B=6$ và chiều cao $h=10$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. 6. **B.** 24. **C.** 10. **D.** 20.

Lời giải

Chọn D

Thể tích của khối chóp là $V=\frac{1}{3}B.h=\frac{1}{3}.6.10=20$.

Câu 32. Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy bằng B và chiều cao bằng h là:

A. $V=Bh$. **B.** $V=\frac{1}{3}Bh$. **C.** $V=\frac{1}{2}Bh$. **D.** $V=\frac{4}{3}Bh$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối lăng trụ đã cho là $V=Bh$.

Câu 33. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA=3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $3a^3$. **B.** a^3. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** $6a^3$.

Lời giải

Chọn B

- Ta có $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA$ là đường cao của hình chóp.
- Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.3a.a^2=a^3$.

Câu 34. Cho khối lăng trụ tam giác đều có độ dài tất cả các cạnh bằng 3. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{27\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{27\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích khối lăng trụ tam giác cạnh bằng 3là: $V=\frac{3^2\sqrt{3}}{4}.3=\frac{27\sqrt{3}}{4}$.

Câu 35. Thể tích của khối lập phương cạnh a bằng

A. a^2. **B.** a^3. **C.** a^4. **D.** a^5.

Lời giải

Chọn B

Thể tích của khối lập phương cạnh a là a^3.

Câu 36. Thể tích khối lập phương có cạnh $2\sqrt{3}$ bằng

A. $24\sqrt{3}$. **B.** $54\sqrt{2}$. **C.** 8. **D.** $18\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối lập phương có cạnh $2\sqrt{3}$ là $V=\left(2\sqrt{3}\right)^3=24\sqrt{3}$ (đvtt).

Câu 37. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $B=5$ và chiều cao $h=6$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. 15 **B.** 30 **C.** 150 **D.** 10

Lời giải

Chọn B

Thể tích của khối lăng trụ đã cho là: $V=B.h=5.6=30$

Câu 38. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $S=6$ và chiều cao $h=10$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. 20. **B.** 40. **C.** 30. **D.** 60.

Lời giải

Chọn D

Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng $V=S.h=6.10=60$.

Câu 39. Một khối lăng trụ có diện tích đáy bằng 6 và chiều cao bằng 5. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng:

A. 90. **B.** 30. **C.** 10. **D.** 15.

Lời giải

Chọn B

Ta có thể tích khối lăng trụ đã cho là: $V=6\text{x}5=30$

Câu 40. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA=3a$ và SA vuông góc với đáy. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $3a^3$. **B.** a^3. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** $6a^3$.

Lời giải

Chọn B

$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}Bh=\frac{1}{3}.a^2.3a=a^3$.

Câu 41. Thể tích của khối lăng trụ có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B là

A. $\frac{1}{3}Bh$. **B.** $\frac{1}{6}Bh$. **C.** Bh. **D.** $3Bh$.

Lời giải

Chọn C

Thể tích khối lăng trụ là $V = Bh$

Câu 42. Khối lăng trụ có diện tích đáy là S, chiều cao h có thể tích V là

A. $V = Sh^2$ **B.** $V = \frac{1}{2}Sh$ **C.** $V = Sh$ **D.** $V = \frac{1}{3}Sh$

Lời giải

Chọn C

Ta có $V = Sh$

Câu 43. Thể tích khối lăng trụ được tính theo công thức nào sau đây?

A. $V = \frac{1}{3}B.h$. **B.** $V = B.h$. **C.** $V = \frac{1}{2}B.h$. **D.** $V = \frac{1}{6}B.h$.

Lời giải

Chọn B

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác,diện tích đáy bằng $a^2\sqrt{3}$ và thể tích bằng a^3. Tính chiều cao h của hình chóp đã cho.

A. $h = \frac{\sqrt{3}a}{6}$. **B.** $h = \frac{\sqrt{3}a}{2}$. **C.** $\sqrt{3}a$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $V = \frac{1}{3}h.S_{\Delta ABC} \Rightarrow h = \frac{3V}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3a^3}{a^2\sqrt{3}} = \sqrt{3}a$.

Câu 45. Thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $2a$ là

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $V = a^3\sqrt{3}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: Diện tích đáy $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Suy ra: $V = AA'.S_{ABC} = 2a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (SBCD)$ và $SA = 2a$, diện tích tứ giác là $ABCD$ bằng $3a^2$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $2a^3$. **B.** $6a^2$. **C.** $6a^3$. **D.** $2a^2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}.3a^2.2a = 2a^3$.

Câu 47. Tính thể tích của một khối lăng trụ biết khối lăng trụ đó có đường cao bằng $3a$, diện tích mặt đáy bằng $4a^2$.

A. $4a^3$. **B.** $4a^2$. **C.** $12a^3$. **D.** $12a^2$.

Lời giải

Chọn C

Gọi S là diện tích mặt đáy, h là độ dài đường cao của khối trụ đã cho.

Khi đó thể tích của khối lăng trụ đã cho là $V = S.h = 4a^2.3a = 12a^3$.

Câu 48. Tính thể tích V của khối chóp có diện tích đáy bằng 12 và chiều cao bằng 4 là

A. $V = 8$. **B.** $V = 48$. **C.** $V = 24$. **D.** $V = 16$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $V = \frac{1}{3}.12.4 = 16$.

Câu 49. Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = a$.

A. $V = \frac{a^3}{6}$. **B.** $V = \frac{a^3}{3}$. **C.** $V = \frac{a^3}{2}$. **D.** $V = a^3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $V = Bh = a^2.a = a^3$.

Câu 50. Một khối lăng trụ có diện tích đáy bằng 3 và chiều cao bằng 4. Thể tích của khối lăng trụ đó bằng

A. 4. **B.** 12. **C.** 36. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

$V = S.h = 3.4 = 12$.

Câu 51. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC vuông tại A và có $AB = 3a, AC = 4a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $18a^3$. **B.** $6a^3$. **C.** $36a^3$. **D.** $2a^3$.

Lời giải

Chọn B

$V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}3a.4a.3a = 6a^3$

Câu 52. Một khối lăng trụ có chiều cao bằng 6 và diện tích đáy bằng $2\sqrt{14}$. Thể tích của khối lăng trụ đó bằng

A. $2\sqrt{14}$. **B.** $4\sqrt{14}$. **C.** $6\sqrt{14}$. **D.** $12\sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn D

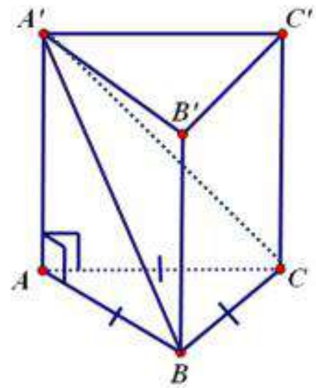
Thể tích cuả khối lăng trụ $V = Bh = 2\sqrt{14}.6 = 12\sqrt{14}$ (đvtt)

Câu 53. Mặt phẳng $(A'BC)$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành các khối đa diện nào?

A. Hai khối chóp tam giác.
B. Một khối chóp tam giác và một khối chóp tứ giác.
C. Hai khối chóp tứ giác.
D. Một khối chóp tam giác và một khối chóp ngũ giác.

Lời giải

Chọn B



Mặt phẳng $(A'BC)$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành một khối chóp tam giác $A'.ABC$ và một khối chóp tứ giác $A'.BB'C'C$

Câu 54. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC cân tại A, $BAC = 30°$, $AB = a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $SA = 2a\sqrt{2}$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Diện tích đáy bằng $B = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}a.a.\sin 30° = \frac{a^2}{4}$.

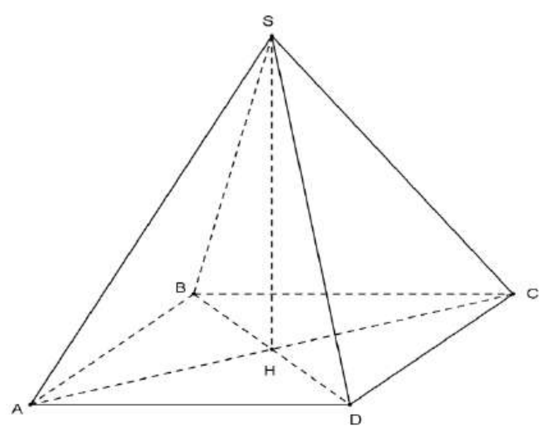
Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}B.SA = \frac{1}{3}\frac{a^2}{4}2a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Câu 55. Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho:

A. $V = \frac{\sqrt{14}a^3}{6}$. **B.** $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$. **C.** $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{2}$. **D.** $V = \frac{\sqrt{14}a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Xét hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm H cạnh a

Từ gt$\Rightarrow SH \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$; $AH = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$

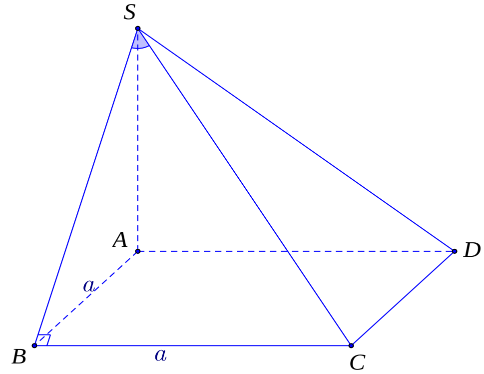
Vậy thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ là: $V = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{14}}{2}.a^2 = \frac{\sqrt{14}a^3}{6}$.

Câu 56. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc mới mặt phẳng đáy, SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc $30°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$

A. $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **C.** $\sqrt{2}a^3$. **D.** $\dfrac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Do đó góc giữa SC với mặt phẳng (SAB) là góc $BSC = 30°$.

Trong tam giác BSC vuông tại B, ta có $\tan 30° = \dfrac{BC}{SB} \Rightarrow SB = \dfrac{BC}{\tan 30°} = a\sqrt{3}$.

$SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SA = \dfrac{1}{3}.a^2.a\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 57. Khối chóp tam giác có thể tích là: $\dfrac{2a^3}{3}$ và chiều cao $a\sqrt{3}$. Tìm diện tích đáy của khối chóp tam giác đó.

A. $\sqrt{3}a^2$. **B.** $2\sqrt{3}a^2$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}a^2}{3}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}a^2}{9}$.

Lời giải

Chọn C

$V_{chóp} = \dfrac{2a^3}{3} = \dfrac{1}{3}.h.S_{đáy} = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{3}.S_{đáy} \Rightarrow S_{đáy} = \dfrac{2\sqrt{3}a^2}{3}$.

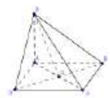
Vậy diện tích đáy của khối chóp tam giác đấy là $\dfrac{2\sqrt{3}a^2}{3}$.

Câu 58. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $SBD = 60°$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{2a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3}{3}$. **D.** a^3.

Lời giải

Chọn C



- Do tứ giác $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a nên $BD = a\sqrt{2}$ và $S_{ABCD} = a^2$.
- Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB, SA \perp AD$.

Ta có $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2}; SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} \Rightarrow SB = SD$. Mà $SBD = 60° \Rightarrow \Delta SBD$ đều.

Suy ra $SB = BD = a\sqrt{2} \Rightarrow SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a$

- Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{a^3}{3}$.

Câu 59. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SC tạo với đáy một góc bằng $60°$ Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{6}a^3}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{9}$. **C.** $\sqrt{6}a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn D

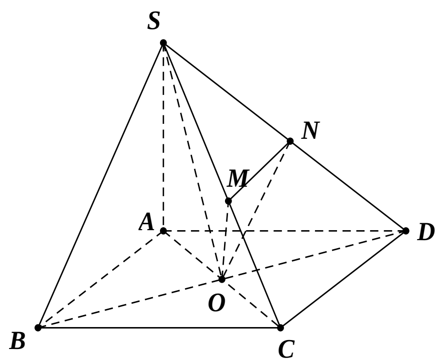
- Áp dụng công thức: $V = \frac{1}{3}Bh$
- Với: $B = S_{ABCD} = a^2$, $h = SA = AC.\tan 60° = a\sqrt{2}.\sqrt{3} = a\sqrt{6}$
- Vậy: $V = \frac{1}{3}.a^2.a\sqrt{6} = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$

Câu 60. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC, SD. Thể tích khối tứ diện $SOMN$ bằng

A. $\frac{a^3}{16}$. **B.** $\frac{a^3}{8}$. **C.** $\frac{3a^3}{8}$. **D.** $\frac{3a^3}{16}$.

Lời giải

Chọn A



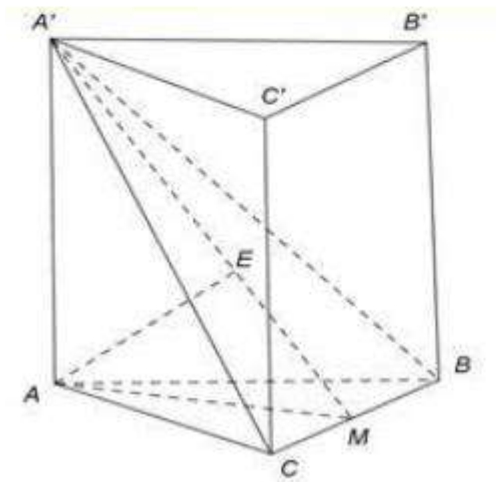
- Ta có: $V_{S.OCD}=\frac{1}{4}.V_{S.ABCD}=\frac{1}{4}.\frac{1}{3}.SA.S_{ABCD}=\frac{1}{4}.\frac{1}{3}.3a.a^2=\frac{a^3}{4}$
- Lại có: $\frac{V_{S.OMN}}{V_{S.OCD}}=\frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\Rightarrow V_{S.OMN}=\frac{1}{4}V_{S.OCD}=\frac{1}{4}.\frac{a^3}{4}=\frac{a^3}{16}$

Câu 61. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy là $2a$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng a. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $2\sqrt{2}a^3$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn B



- Gọi M là trung điểm của $B'C'$
- Ta có $B'C'\perp A'M$, vì ΔABC đều và $B'C'\perp AA'$ nên $B'C'\perp(AA'M)$.
- Dựng $A'E\perp AM$, khi đó $A'E\perp(AB'C')$, do đó $d(A';(AB'C'))=A'E=a$
- $\Delta AA'M$ vuông tại A' với đường cao $A'H$ nên

$$\frac{1}{A'H^2}=\frac{1}{AA'^2}+\frac{1}{A'M^2}\Leftrightarrow\frac{1}{AA'^2}=\frac{1}{A'E^2}-\frac{1}{A'M^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{(a\sqrt{3})^2}\Rightarrow AA'=\frac{a\sqrt{6}}{2}$$

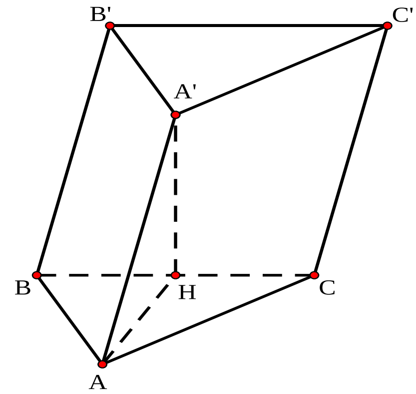
- Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V=\frac{a\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$

Câu 62. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a$, cạnh bên bằng $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh BC. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{14}}{4}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{14}}{12}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm của cạnh $BC \Rightarrow A'H \perp (ABC)$

ΔABC vuông cân tại A $\Rightarrow BC = a\sqrt{2} \Rightarrow AH = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{14}}{2}$

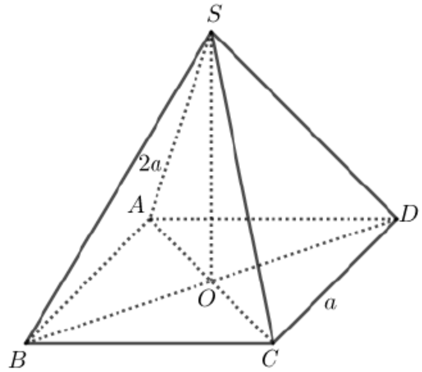
$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = \dfrac{a\sqrt{14}}{2}.\dfrac{1}{2}a^2 = a^3\dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

Câu 63. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = 2a$. Thể tích của khối chóp.

A. $\dfrac{\sqrt{14}}{6}a^3$. **B.** $2a^3$. **C.** $\dfrac{\sqrt{14}a^3}{2}$. **D.** $a^3.\sqrt{\dfrac{7}{2}}$.

Lời giải

Chọn A



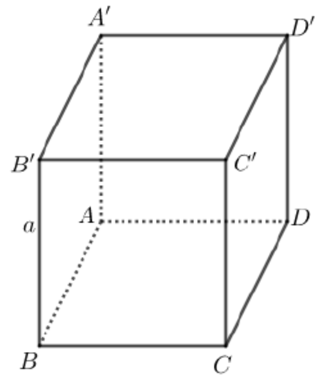
- Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$
- Ta có: $OA = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}.a\sqrt{2}$
- $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{14}}{2}$
- Vậy thể tích khối chóp là: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SO.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{14}}{2}.a^2 = \dfrac{\sqrt{14}}{6}a^3$.

Câu 64. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Thể tích khối tứ diện $ABDB'$ bằng

A. $\frac{a^3}{6}$. **B.** $\frac{2a^3}{3}$. **C.** $\frac{a^3}{2}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



◆ Ta có: $V_{ABDB'} = \frac{1}{3}.B'B.S_{\Delta ABD} = \frac{1}{3}.B'B.\frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{6}.a.a^2 = \frac{a^3}{6}$.

Câu 65. Lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ cạnh $AB = a$, góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Hỏi thể tích lăng trụ.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{3a^3}{4}$. **C.** $\frac{a^3}{4}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $AA' \perp mp(ABC) \Rightarrow A$ là hình chiếu vuông góc của A' trên $mp(ABC)$ do đó

$(A'B,(ABC)) = A'BA = 60^0 \Rightarrow AA' = AB\tan 60^0 = a\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác ABC: $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3a^3}{4}$

Câu 66. Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy $a = 3$ và chiều cao $h = 5$. Thể tích của khối chóp bằng

A. 15π **B.** 15 **C.** 45 **D.** 45π

Lời giải

Chọn B

Do khối chóp tứ giác đều nên đáy của khối chóp là hình vuông có cạnh đáy là $a = 3$.

Diện tích đáy của khối chóp là: $B = a^2 = 3^2 = 9$.

Chiều cao của khối chóp là: $h = 5$.

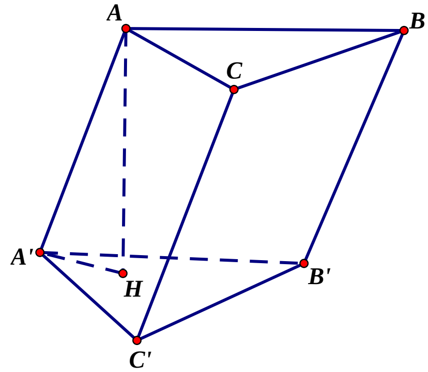
Vậy thể tích của khối chóp bằng: $V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}.9.5 = 15$.

Câu 67. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $AA' = 2a$ và tạo với mặt phẳng đáy một góc bằng 60^0, diện tích tam giác ABC bằng a^2. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** a^3. **C.** $\sqrt{3}a^3$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Giả sử đường cao là AA'. Vì cạnh bên AA' tạo với đáy một góc 60^0 nên $AA'H = 60^0$. Xét tam giác vuông $AA'H$

$$\sin 60^0 = \frac{AH}{AA'} \Rightarrow AH = a\sqrt{3}$$

Vậy thể tích lăng trụ là:

$$V = a^2.a\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}$$

Câu 68. Biết rằng thể tích của một khối lập phương bằng 27. Tính tổng diện tích các mặt của hình lập phương đó.

A. 27 **B.** 16 **C.** 54 **D.** 36

Lời giải

Chọn C

◆ Thể tích khối lập phương cạnh $x \Rightarrow V = x^3 = 27 \Rightarrow x = 3$.

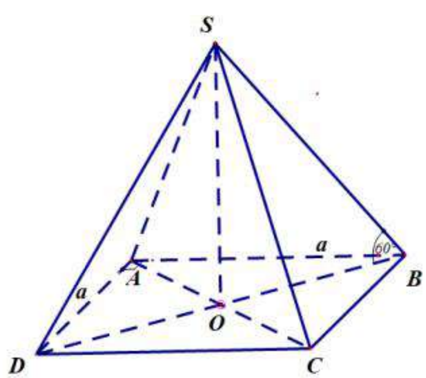
Diện tích các mặt (diện tích toàn phần) hình lập phương là $3.3.6 = 54$.

Câu 69. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên tạo với đáy một góc 60°. Thể tích của hình chóp đều đó là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



◆ Đáy $ABCD$ là hình vuông nên diện tích đáy là $B = a^2$ (đvdt).

◆ Gọi O là tâm của đáy $SO \perp (ABCD)$ $\Rightarrow OB$ là hình chiếu vuông góc của SB lên mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow$ góc giữa cạnh bên SB và đáy là góc $SBO = 60^\circ$.

$\Rightarrow h = SO = OB.\tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2}.\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

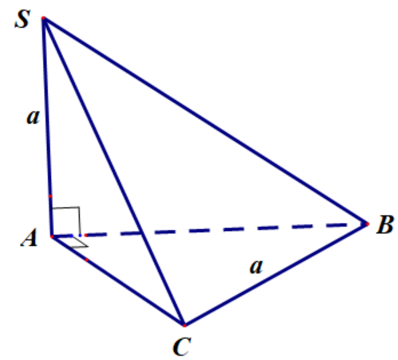
◆ Vậy thể tích khối chóp là $V=\frac{1}{3}Bh=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$ (đvtt).

Câu 70. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, tam giác ABC vuông cân tại A, $SA=BC=a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3}{12}$. **B.** $V=\frac{a^3}{4}$. **C.** $V=2a^3$. **D.** $V=\frac{a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn A



◆ Đáy ABC là tam giác vuông cân tại A nên $AB=AC=\frac{BC}{\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$\Rightarrow B=S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{a^2}{4}$ (đvdt).

◆ Vậy thể tích khối chóp là $V=\frac{1}{3}Bh=\frac{1}{3}S_{ABC}.SA=\frac{a^3}{12}$ (đvtt).

Câu 71. Diện tích toàn phần của một hình lập phương bằng $96\left(cm^2\right)$. Khối lập phương đã cho có thể tích bằng

A. $84\left(cm^3\right)$. **B.** $48\left(cm^3\right)$. **C.** $64\left(cm^3\right)$. **D.** $91\left(cm^3\right)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi x $(x>0)$ là cạnh của hình lập phương.

$S_{tp}=6x^2=96\Leftrightarrow x=4$.

Vậy $V=4^3=64\left(cm^3\right)$.

Câu 72. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OB=OC=a\sqrt{6}$, $OA=a$. Thể tích khối tứ diện đã cho bằng:

A. $3a^3$. **B.** $2a^3$. **C.** $6a^3$. **D.** a^3.

Lời giải

Chọn D

Do tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau nên thể tích khối tứ diện $OABC$ là: $V_{OABC}=\frac{1}{6}OA.OB.OC=\frac{1}{6}a.a\sqrt{6}.a\sqrt{6}=a^3$.

Câu 73. Cho khối tứ diện đều có cạnh bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích của khối tứ diện đã cho bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là trọng tâm của $\Delta BCD \Rightarrow AH \perp (BCD)$

Gọi M là giao điểm của BH và CD ta có: $BM = \frac{a\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2} \Rightarrow BH = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3}.\frac{3a}{2} = a$

Xét ΔABH vuông tại H có: $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 3a^2 - a^2 = 2a^2 \Rightarrow AH = a\sqrt{2}$

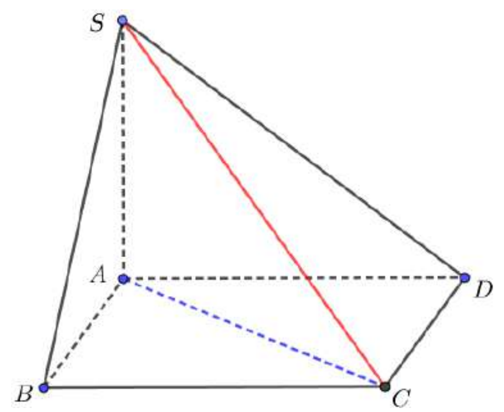
Ta có: $V_{ABCD} = \frac{1}{3}AH.S_{BCD} = \frac{1}{3}.a\sqrt{2}.\frac{\left(a\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 74. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, biết $AB = a, AD = a\sqrt{3}, SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy và SC tạo với đáy một góc 60^o. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $6a^3$. **B.** $a^3\sqrt{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2a^3$.

Lời giải

Chọn D



Ta có AC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng đáy

$\Rightarrow \left(SC,(ABCD)\right) = (SC, AC) = SCA = 60^o \Rightarrow SA = AC.\tan 60^o = 2a\sqrt{3}$.

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}.\left(a.a\sqrt{3}\right).2a\sqrt{3} = 2a^3$.

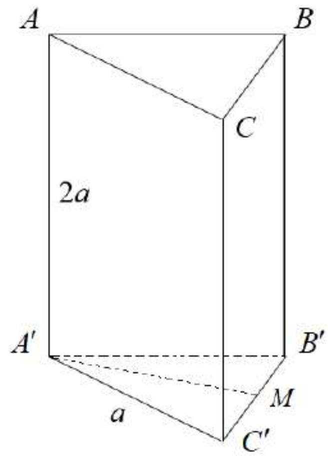
Vậy thể tích của khối chóp $S.ABCD$ $2a^3$.

Câu 75. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA' = 2a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **C.** $\sqrt{3}a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của $B'C'$.

Diện tích tam giác $A'B'C'$ là: $S_{A'B'C'} = \frac{1}{2}.A'M.B'C' = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V = S_{A'B'C'}.AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.2a = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 76. Cho khối tứ diện $ABCD$ và gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB, khi đó mặt phẳng (P) chứa cạnh CM, song song với BD chia khối tứ diện $ABCD$ thành

A. Một khối tứ diện và một khối lăng trụ.

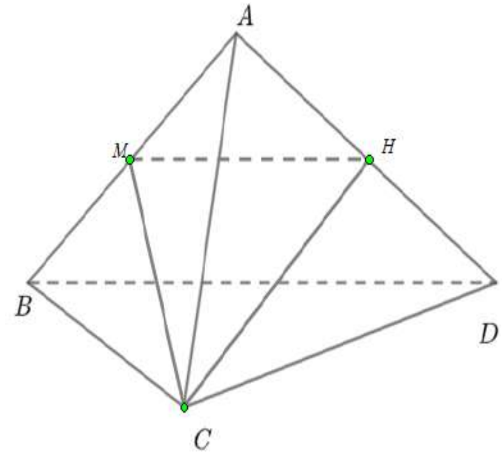
B. Hai khối chóp tứ giác.

C. Một khối tứ diện và một khối chóp tứ giác.

D. Hai khối tứ diện.

Lời giải

Chọn C



Ta có khi đó mặt phẳng (P) chứa cạnh CM, song song với BD nên giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABD) là đường thẳng đi qua M và song song với BD, cắt AD tại H.

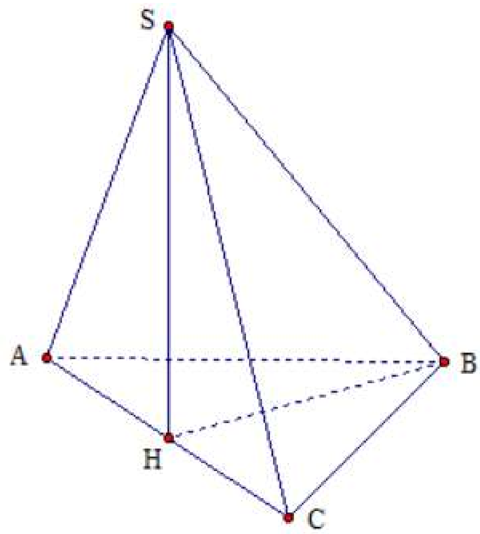
Khi đó mặt phẳng $(P) \equiv (CMH)$. Vậy mặt phẳng (P) chia khối tứ diện $ABCD$ thành khối tứ diện $AMCH$ và khối chóp tứ giác $C.MHDB$

Câu 77. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $\sqrt{3}$, tam giác SAC đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của AC, hai tam giác SAC và ABC là hai tam giác đều, bằng nhau và $HS = HB = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$.

Ba đường thẳng AC, HS, HB đôi một vuông góc với nhau, suy ra:

$V_{S.ABC} = \frac{1}{6}AC.HB.HS = \frac{1}{6}\sqrt{3}.\frac{3}{2}.\frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 78. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = AC = 2a, AB = a$ và $BAC = 60°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{2a^3}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **D.** $\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin BAC = \frac{1}{2}.a.2a.\sin 60° = \frac{\sqrt{3}a^2}{2}$.

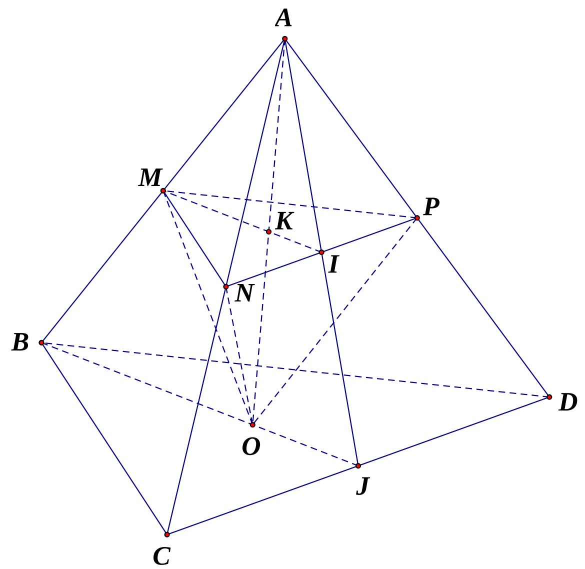
Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABC} = \frac{1}{3}.2a.\frac{\sqrt{3}a^2}{2} = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 79. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M,N,P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, AD và O là trọng tâm tam giác BCD. Tính tỉ số thể tích $\frac{V_{OMNP}}{V_{ABCD}}$.

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{12}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Dễ thấy $(MNP)//(BCD)$. Do M,N,P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, AD cho nên

$d\left(A;(MNP)\right)=d\left(O;(MNP)\right)\Rightarrow V_{OMNP}=V_{AMNP}$.

$\dfrac{V_{OMNP}}{V_{ABCD}}=\dfrac{V_{AMNP}}{V_{ABCD}}=\dfrac{AM}{AB}\cdot\dfrac{AN}{AC}\cdot\dfrac{AP}{AD}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$.

Câu 80. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $V=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Vì tam giác ABC đều cạnh a, suy ra $S_{ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Chiều cao của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $AA'=a$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $V=S_{ABC}.AA'=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Câu 81. Tính thể khối đa diện $ABCD$, biết $AB,\ AC,\ AD$ đôi một vuông góc và có độ dài lần lượt là 2, 3,4?

A. 8. **B.** 24. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Do $AB,\ AC,\ AD$ đôi một vuông góc nên $AD\perp(ABC)$ suy ra AD là đường cao của khối đa diện $ABCD$. Không mất tính tổng quát ta chọn $AB=2, AC=3, AD=4$.

Ta có $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC=3$.

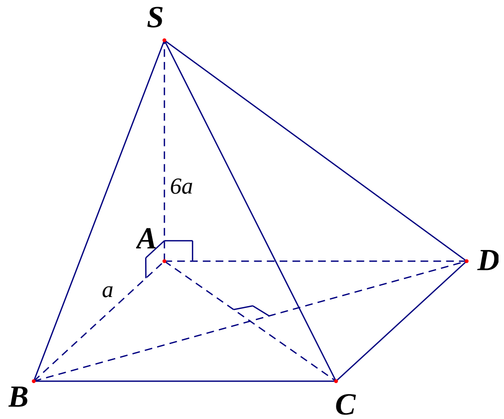
Vậy $V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}AD.S_{ABC}=4$ (đvtt).

Câu 82. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA=6a$. Thể tích khối chóp là

A. a^3. **B.** $2a^3$. **C.** $3a^3$. **D.** $6a^3$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA$ là chiều cao của hình chóp.

Diện tích đáy: $S_{ABCD}=a^2$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$: $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.S_{ABCD}.SA=\frac{1}{3}.a^2.6a=2a^3$.

Câu 83. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ tất cả các cạnh bằng $\sqrt{2}a$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}a^3$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{6}a^3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $B=S_{\Delta ABC}=\left(\sqrt{2}a\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2;h=AA'=\sqrt{2}a.$

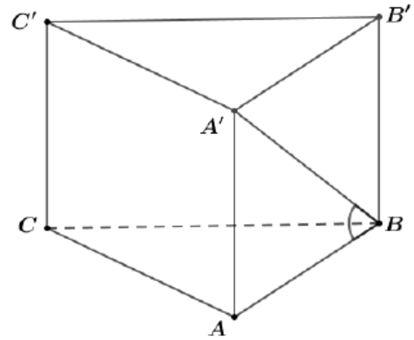
Do đó thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $B.h=a^2.\frac{\sqrt{3}}{2}.\sqrt{2}a=\frac{\sqrt{6}}{2}a^3$.

Câu 84. Cho khối lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $BC=2BA=2a$. Biết $A'B$ hợp với mặt phẳng (ABC) một góc $60°$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $2a^3\sqrt{3}$. **B.** $a^3\sqrt{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Hình chiếu của $A'B$ lên (ABC) là AB, do đó góc giữa $A'B$ và (ABC) là $A'BA = 60°$.

Tam giác $A'BA$ vuông tại A nên $AA' = AB\tan 60° = a\sqrt{3}$.

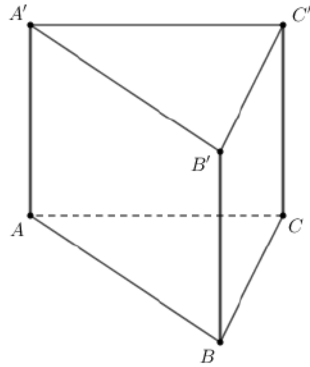
Do đó thể tích khối lăng trụ là $V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \cdot AA' = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a \cdot a\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}$.

Câu 85. Tính thể tích khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$, biết mặt bên của khối lăng trụ là hình vuông và có chu vi bằng 8.

A. $V = 4\sqrt{3}$. **B.** $V = 2\sqrt{6}$. **C.** $V = 2\sqrt{3}$. **D.** $V = 16\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $ABB'A'$ là hình vuông cạnh a có chu vi bằng $4a = 8 \Leftrightarrow a = 2 = AB = AA'$.

Tam giác ABC đều cạnh 2 nên có $S_{ABC} = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$.

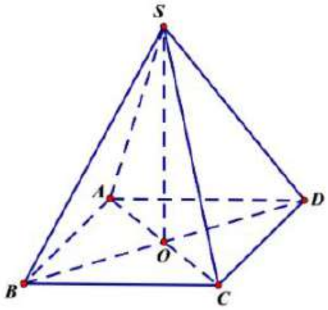
Vậy thể tích của khối lăng trụ là $V = AA'.S_{ABC} = 2\sqrt{3}$.

Câu 86. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng $6a$. Thể tích của khối chóp trên bằng

A. $36\sqrt{3}a^3$. **B.** $108\sqrt{2}a^3$. **C.** $18\sqrt{2}a^3$. **D.** $36\sqrt{2}a^3$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $AC = 6a\sqrt{2} \Rightarrow OC = 3a\sqrt{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = 3a\sqrt{2}$.

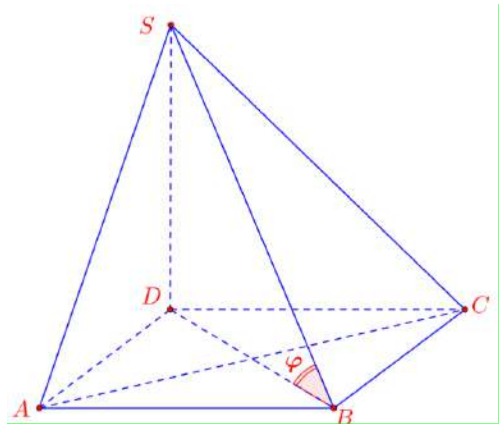
Khi đó thể tích khối chóp đã cho là $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}.3a\sqrt{2}.36a^2 = 36\sqrt{2}a^3$.

Câu 87. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $SAB = SCB = 90^\circ$, $AB = a, BC = 2a$. Biết rằng góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng 60°, thể tích khối chóp đã cho bằng

A. a^3. **B.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{5}}{6}$.

Lời giải

Chọn C



- Ta có $SAB = SCB = 90^\circ \Rightarrow SA \perp AB, SC \perp CB$
- Giả sử D là hình chiếu của S lên $(ABC) \Rightarrow SD \perp (ABC) \Rightarrow SD \perp AB, SD \perp BC$

$\Rightarrow \begin{cases} CB \perp (SCD) \\ AB \perp (SAD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CB \perp CD \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow ABCD$ là hình chữ nhật

Ta có: BD là hình chiếu của SD lên mặt phẳng $(ABCD)$

$(SB;(ABCD)) = (SB;BD) = SBD = \varphi = 60^\circ$; $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}$

$\Rightarrow SD = BD\tan 60^\circ = a\sqrt{15}$

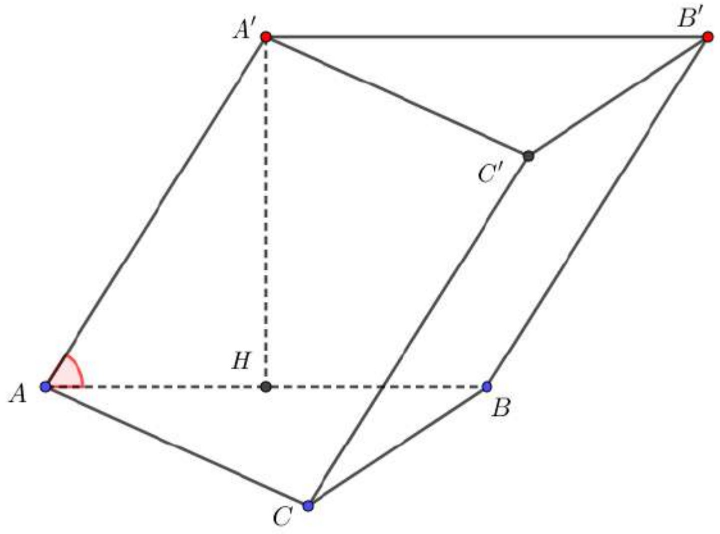
- Vậy thể tích khối chóp đã cho bằng $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SD.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.a\sqrt{15}.\frac{1}{2}.a.2a = \frac{a^3\sqrt{15}}{3}$

Câu 88. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm cạnh AB, góc giữa AA' và mặt đáy của hình lăng trụ đã cho bằng 60^o. Tính thể tích V của khối chóp $A'.BCC'B'$.

A. $V = \frac{a^3}{4}$. **B.** $V = \frac{a^3}{8}$. **C.** $V = \frac{3a^3}{4}$. **D.** $V = \frac{3a^3}{8}$.

Lời giải.

Chọn A



Ta có: $AA',(ABC)=(AA',AH)=A'AH=60^o \Rightarrow A'H=AH.\tan 60^o=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=S_{\Delta ABC}.A'H=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3a^3}{8}$.

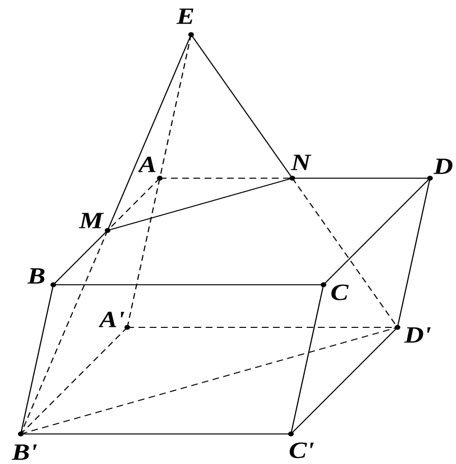
$\Rightarrow V_{A.BCC'B'}=V_{ABC.A'B'C'}-V_{A.A'B'C'}=V_{ABC.A'B'C'}-\dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}=\dfrac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}=\dfrac{a^3}{4}$. Vậy $V=\dfrac{a^3}{4}$.

Câu 89. Một khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 2019. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Mặt phẳng $(MB'D')$ chia khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thành hai khối đa diện. Tính thể tích phần khối đa diện chứa đỉnh A.

A. $\dfrac{4711}{4}$. **B.** $\dfrac{5045}{6}$. **C.** $\dfrac{4711}{8}$. **D.** $\dfrac{10090}{17}$.

Lời giải

Chọn C



- Gọi $B'M \cap A'A=E$; $ED' \cap AD=N$.
- Ta có: M là trung điểm của AB.

$\Rightarrow M$ là trung điểm của EB'.

$\Rightarrow N$ là trung điểm của ED' và AD.

- Ta có: $\dfrac{V_{E.AMN}}{V_{E.A'B'D'}}=\dfrac{EA}{EA'}.\dfrac{EM}{EB'}.\dfrac{EN}{ED}=\dfrac{1}{8}$.

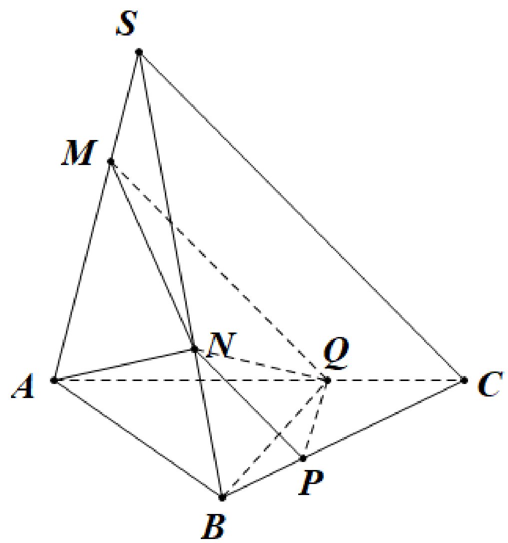
$\Rightarrow V_{AMN.A'B'D'}=\frac{7}{8}V_{E.A'B'D'}=\frac{7}{8}.2.V_{A.A'B'D'}=\frac{7}{8}.2.\frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'}=\frac{7}{24}V_{ABCD.A'B'C'D'}=\frac{4711}{8}$.

Câu 90. Cho khối tứ diện $SABC$, M và N là các điểm thuộc các cạnh SA và SB sao cho $MA=2SM$, $SN=2NB$, (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SC. Kí hiệu (H_1) và (H_2) là các khối đa diện có được khi chia khối tứ diện $SABC$ bởi mặt phẳng (α), trong đó (H_1) chứa điểm S, (H_2) chứa điểm A; V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của (H_1) và (H_2). Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$

A. $\frac{5}{4}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Mặt phẳng (α) qua MN và song song với SC cắt BC và AC lần lượt tại P và Q thỏa mãn $MQ \parallel SC$ và $NP \parallel SC$.

Gọi V là thể tích của khối tứ diện $SABC$. Xét $V_2=V_{MNABPQ}=V_{N.ABPQ}+V_{Q.AMN}$.

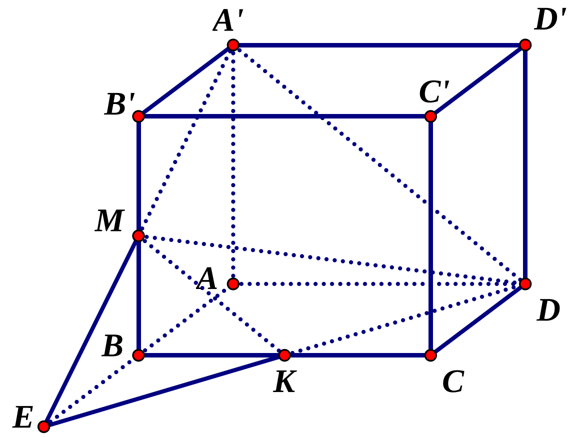
$\frac{V_2}{V}=\frac{V_{N.ABPQ}}{V}+\frac{V_{Q.AMN}}{V}=\left(1-\frac{CQ}{CA}.\frac{CP}{CB}\right).\frac{BN}{BS}+\frac{AM}{AS}.\frac{SN}{SB}.\frac{QA}{CA}=\frac{5}{9}\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{4}{5}$.

Câu 91. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 1. Gọi M là trung điểm cạnh BB'. Mặt phẳng $(MA'D)$ cắt cạnh BC tại K. Thể tích khối đa diện lồi $A'B'C'D'MKCD$ bằng

A. $\frac{7}{24}$. **B.** $\frac{7}{17}$. **C.** $\frac{1}{24}$. **D.** $\frac{17}{24}$.

Lời giải

Chọn D



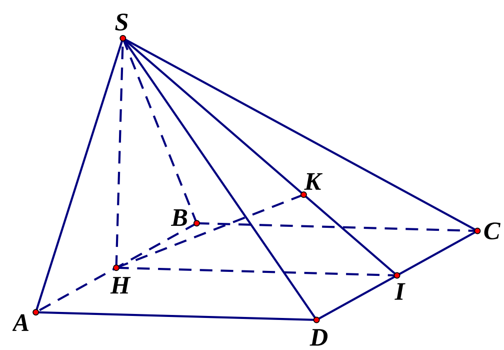
- Kéo dài $A'M$ và AB cắt nhau tại E. Suy ra $K = DE \cap BC$.
- Dễ thấy B là trung điểm EA và K là trung điểm BC
- Có $V_{A'B'C'D'MKCD} = V - V_{A'ADMBK} = V - \left(V_{A'.ADE} - V_{M.BEK}\right) = 1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\right) = 1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}$.

Câu 92. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{3\sqrt{7}a}{7}$. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $V = \frac{2}{3}a^3$. **B.** $V = \frac{3}{2}a^3$. **C.** $V = a^3$. **D.** $V = \frac{1}{3}a^3$.

Lời giải

Chọn B



- Gọi H, I lần lượt là trung điểm của AB và CD, K là hình chiếu của H trên SI ta có $SH \perp (ABCD)$; $HK \perp (SCD)$ và $HK = \frac{3\sqrt{7}a}{7}$.
- Đặt $AB = 2x \Rightarrow SH = x\sqrt{3}$. Vì tam giác SHI vuông tại H nên $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2}$.

Suy ra $\frac{7}{9a^2} = \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{4x^2} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

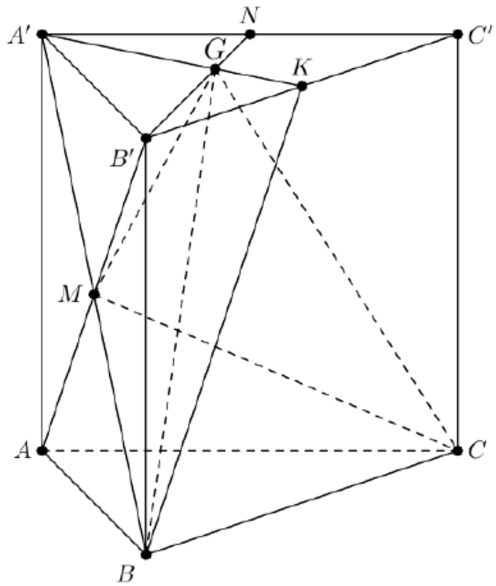
- Diện tích đáy $S = \left(a\sqrt{3}\right)^2 = 3a^2$; chiều cao $h = SH = \frac{3}{2}a$
- Vậy thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3}S.h = \frac{3a^3}{2}$.

Câu 93. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích V. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'B'C'$, M là tâm của mặt bên $ABB'A'$. Tính thể tích của khối tứ diện $GMBC$ theo V.

A. $\frac{2}{9}V$. **B.** $\frac{1}{9}V$. **C.** $\frac{1}{3}V$. **D.** $\frac{1}{6}V$.

Lời giải

Chọn B



- Ta có: $V_{C.BKA'} = V_{C.BMG} + V_{C.MGA'} + V_{C.BGK}$.
- Khi đó: $V_{C.BKA'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{ABCA'} - V_{C'.CKA'} - V_{B'.BKA'} = V - \frac{1}{3}V - \frac{1}{6}V - \frac{1}{6}V = \frac{1}{3}V$.
- Khi đó: $V_{C.MGA'} = \frac{1}{3}\mathrm{d}\left(C;\left(A'MG\right)\right).S_{\Delta A'MG}$

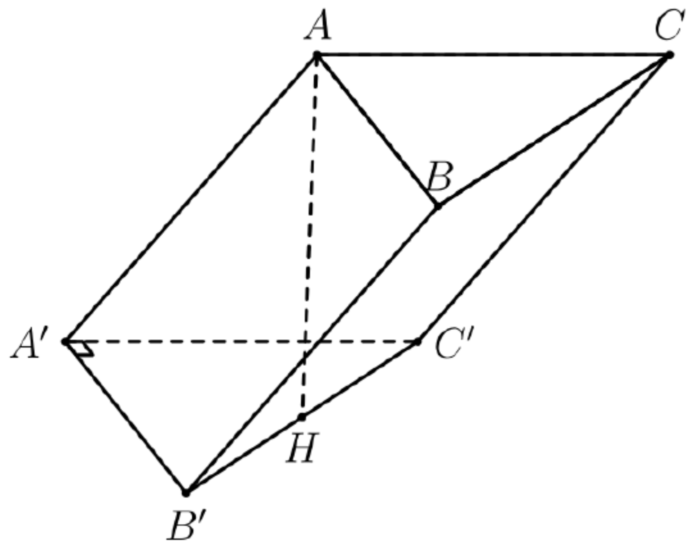
$= \frac{1}{3}\mathrm{d}\left(C;\left(A'MG\right)\right).\frac{1}{3}S_{\Delta A'BK} = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}\mathrm{d}\left(C;\left(A'MG\right)\right).S_{\Delta A'BK} = \frac{1}{3}V_{CA'BK} = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}V = \frac{1}{9}V$.

$V_{C.BGK} = \frac{1}{3}\mathrm{d}\left(C;\left(BGK\right)\right).S_{\Delta BGK} = \frac{1}{3}\mathrm{d}\left(C;\left(BGK\right)\right).\frac{1}{3}S_{\Delta A'BK}$

$= \frac{1}{3}.\frac{1}{3}\mathrm{d}\left(C;\left(A'BK\right)\right).S_{\Delta A'BK} = \frac{1}{3}V_{CA'BK} = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}V = \frac{1}{9}V$.

- Vậy ta có $V_{C.BMG} = V_{C.BKA'} - V_{C.MGA'} - V_{C.BGK} = \frac{1}{3}V - \frac{1}{9}V - \frac{1}{9}V = \frac{1}{9}V$.

Câu 94. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $AA' = 2a$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng $\left(A'B'C'\right)$ trùng với trung điểm H của đoạn $B'C'$ (tham khảo hình vẽ dưới đây). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC' bằng



A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{15}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Vì $AA'//BB'$ nên $d_{(AA',BC')}=d_{(AA',(BB'C'C))}=d_{(A',(BB'C'C))}$.

Trong $\Delta A'B'C'$ có $B'C'=\sqrt{A'B'^2+A'C'^2}=2a\Rightarrow A'H=a$.

Trong $\Delta AA'H$ có $AH=\sqrt{AA'^2-A'H^2}=a\sqrt{3}$.

Trong ΔAHC có $CH=\sqrt{AC^2+AH^2}=a\sqrt{6}$.

Trong $\Delta C'HC$ có $S_{C'HC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{a^2\sqrt{15}}{4}\Rightarrow S_{BCC'B'}=a^2\sqrt{15}$.

Thể tích lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'}=AH.S_{A'B'C'}=a\sqrt{3}.\frac{1}{2}.a.a\sqrt{3}=\frac{3a^3}{2}$.

Mà $V_{A'.BB'C'C}=\frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}\Leftrightarrow\frac{1}{3}.d_{(A',(BB'C'C))}.S_{BB'C'C}=a^3\Leftrightarrow d_{(A',(BB'C'C))}=\frac{3a^3}{a^2\sqrt{15}}=\frac{a\sqrt{15}}{5}$.

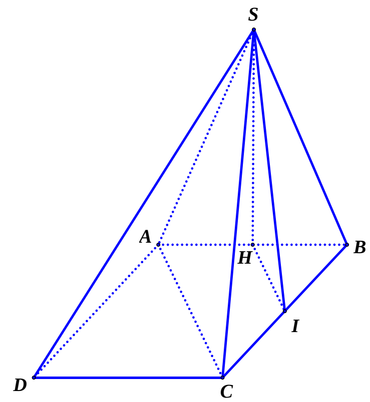
Câu 95. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt bên SAB là tam giác đều cạnh $\sqrt{3}a$. ABC là tam giác vuông tại A có cạnh $AC=a$, góc giữa AD và (SAB) bằng $30°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **D.** a^3.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:



Từ giả thiết bài toán ta có $\widehat{ABC} = 30°$.

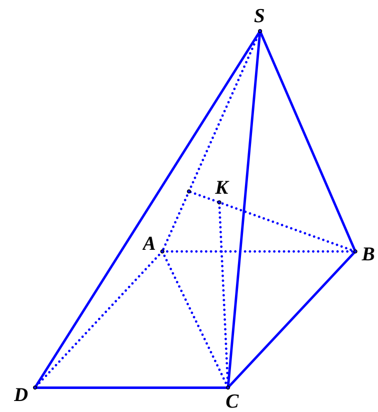
Gọi H, I lần lượt là trung điểm của AB, BC khi đó $\left(AD,(SAB)\right) = \left(BI,(SAB)\right) = 30° = \widehat{HBI}$.

Từ đó ta có HB là hình chiếu của IB lên mặt phẳng (SAB) mà $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp BI$.

Vậy $SH \perp (ABCD)$.

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.\left(a\sqrt{3}.a\right).\frac{a\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Cách 2:



Gọi K là hình chiếu của C lên (SAB), khi đó $\left(AD,(SAB)\right) = \left(BC,(SAB)\right) = \widehat{CBK} = 30°$.

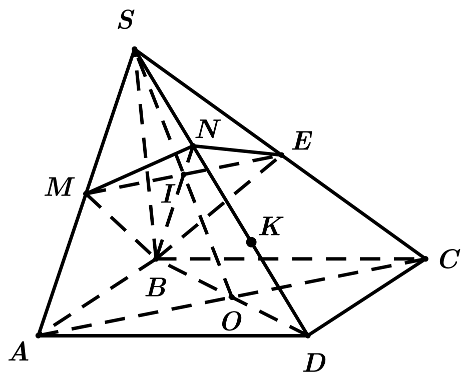
$\Rightarrow CK = BC\sin 30° = a \Rightarrow V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABC} = 2.\frac{1}{3}.CK.S_{SAB} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 96. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi N là một điểm thuộc cạnh SD sao cho $DN = 2SN$. Mặt phẳng (P) qua BN, song song với AC cắt SA, SC lần lượt tại M, E. Biết khối chóp đã cho có thể tích V. Tính theo V thể tích khối chóp $S.BMNE$.

A. $\frac{V}{6}$. **B.** $\frac{V}{12}$. **C.** $\frac{V}{4}$. **D.** $\frac{V}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $O = AC \cap BD, I = SO \cap ME$, khi đó (P) chính là mặt phẳng $(BMNE)$.

Gọi K là trung điểm ND, ta có $OK // BN \Rightarrow IN // OK$ hay I là trung điểm SO. Do $ME // AC$ nên M, E lần lượt là trung điểm SA và SC.

Ta thấy $\dfrac{V_{S.BMN}}{V_{S.BAD}} = \dfrac{SB}{SB}.\dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SD} = 1.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$, tương tự $\dfrac{V_{S.BNE}}{V_{S.BDC}} = \dfrac{1}{6}$.

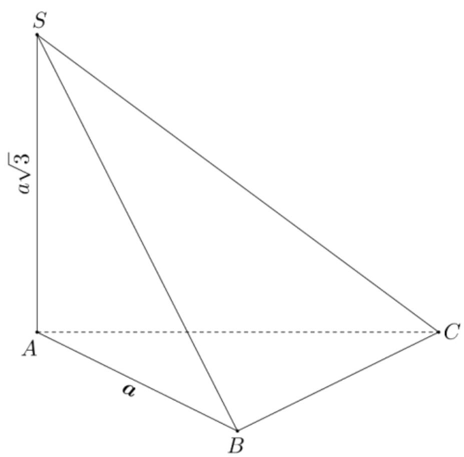
Do đó $\dfrac{1}{6} = \dfrac{V_{S.BMN} + V_{S.BNE}}{V_{S.BAD} + V_{S.BDC}} = \dfrac{V_{S.BMNE}}{V_{S.ABCD}}$ hay $V_{S.BMNE} = \dfrac{V}{6}$.

Câu 97. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), ΔABC vuông tại B, $AB = a$, ΔSBC cân. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Vì $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB$ và $SA \perp AC$

ΔABC vuông tại $B \Rightarrow AC > BC$; ΔSAC vuông tại $A \Rightarrow SC > AC \Rightarrow SC > BC$ (1)

Lại có: $SC^2 = SA^2 + AC^2$; $SB^2 = SA^2 + AB^2$, mà $AC > AB$ (do ΔABC vuông tại B)

$\Rightarrow SC^2 > SB^2 \Rightarrow SC > SB$ (2)

Từ (1), (2) và ΔSBC cân $\Leftrightarrow \Delta SBC$ cân tại B. Khi đó $BC = SB$

Ta lại có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = \sqrt{4a^2} = 2a \Rightarrow BC = 2a$

$\Rightarrow$ Diện tích ΔABC là $\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot a\cdot 2a=a^2$

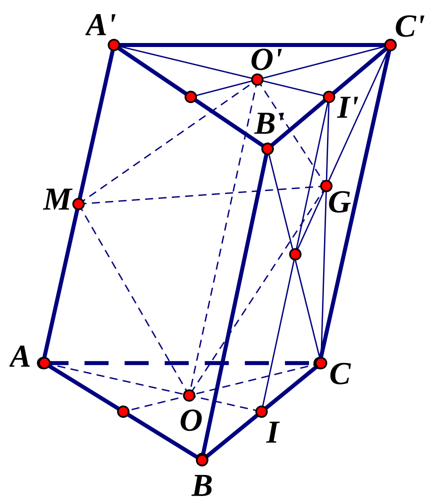
Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V=\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot a\sqrt{3}=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 98. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC) là tâm O của tam giác ABC. Gọi O' là tâm của tam giác $A'B'C'$, M là trung điểm của AA', G là trọng tâm tam giác $B'C'C$. Biết $V_{O'.OMG}=a^3$. Tính chiều cao h của lăng trụ.

A. $h=24a\sqrt{3}$. **B.** $h=36a\sqrt{3}$. **C.** $h=9a\sqrt{3}$. **D.** $h=18a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I và I' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$. Ta có $AA'//(OO'G)$

suy ra $V_{O'.OMG}=V_{M.OO'G}=V_{A.OO'G}=V_{G.AOO'}=\frac{1}{2}V_{G.AOO'A'}==\frac{1}{2}.\frac{2}{3}V_{G.AII'A'}=\frac{1}{3}V_{G.AII'A'}$

$=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}V_{C'.AII'A'}=\frac{1}{9}.\frac{2}{3}V_{AIC.A'I'C'}=\frac{2}{27}V_{AIC.A'I'C'}=a^3\Rightarrow V_{AIC.A'I'C'}=\frac{27}{2}a^3$

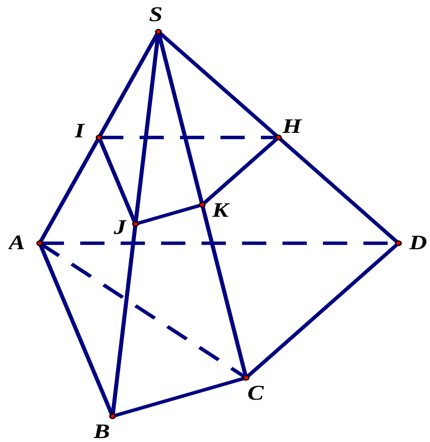
hay $\frac{1}{2}h.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{27}{2}a^3\Leftrightarrow h.\frac{\sqrt{3}}{4}=27a\Leftrightarrow h=\frac{27.4.a}{\sqrt{3}}=36a\sqrt{3}$.

Câu 99. Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi I,J,K,H lần lượt là trung điểm của các cạnh SA,SB,SC,SD. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết rằng thể tích khối chóp $S.IJKH$ là 1.

A. 4. **B.** 2. **C.** 16. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\frac{V_{S.IJK}}{V_{S.ABC}}=\frac{SI}{SA}.\frac{SJ}{SB}.\frac{SK}{SC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

$\Rightarrow V_{S.IJK}=\frac{1}{8}.V_{S.ABC}\left(1\right)$

$\frac{V_{S.IKH}}{V_{S.ACD}}=\frac{SI}{SA}.\frac{SK}{SC}.\frac{SH}{SD}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

$\Rightarrow V_{S.IKH}=\frac{1}{8}.V_{S.ACD}\left(2\right)$

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)\Rightarrow V_{S.IJKH}=V_{S.IJK}+V_{S.IKH}=\frac{1}{8}\left(V_{S.ABC}+V_{S.ACD}\right)=\frac{1}{8}.V_{S.ABCD}\Rightarrow\frac{V_{S.IJKH}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{8}$

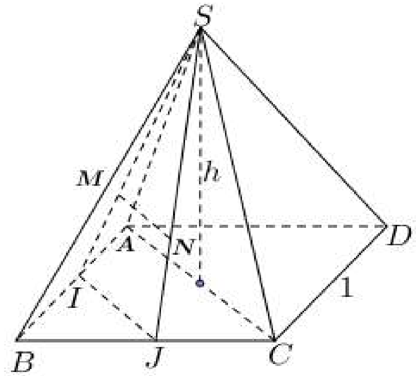
Khi đó $V_{S.ABCD}=8.V_{S.IJKH}=8$.

Câu 100. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB,SBC,SCD,SDA. Biết thể tích khối chóp $S.MNPQ$ là V, khi đó thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{27V}{4}$. **B.** $\left(\frac{9}{2}\right)^2V$. **C.** $\frac{9V}{4}$. **D.** $\frac{81V}{8}$

Lời giải

Chọn A



Giải bài toán trong trường hợp đặc biệt. Ta có hình vuông cũng là một hình bình hành đặc biệt nên xem đáy $ABCD$ là hình vuông.

Khi đó, khối chóp $S.ABCD$ là chóp đều và có chiều cao h, cạnh đáy $AB=1$.

Suy ra, khối chóp $S.MNPQ$ có chiều cao bằng $\frac{2}{3}h$ và cạnh đáy $MN=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

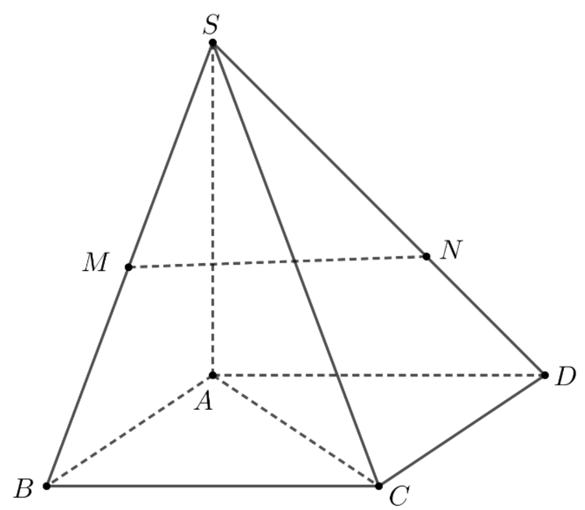
Xét tỉ số $\frac{V_{S.ABCD}}{V_{S.MNPQ}}=\frac{3}{2}.\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{27}{4}\Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{27}{4}V$.

Câu 101. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA=a$ và SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của SB, N thuộc cạnh $SN=2ND$. Tính V của khối tứ diện $ACMN$.

A. $V=\frac{1}{36}a^3$. **B.** $V=\frac{1}{12}a^3$. **C.** $V=\frac{1}{8}a^3$. **D.** $V=\frac{1}{6}a^3$.

Lời giải

Chọn B



$V_{ACMN}=V_{S.ABCD}-V_{SAMN}-V_{DNAC}-V_{BAMC}-V_{SMCN}$. Ta có

$\frac{V_{SAMN}}{V_{SABD}}=\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SD}=\frac{1}{3}\Rightarrow V_{SAMN}=\frac{1}{6}V_{SABCD}$

$\frac{V_{DACN}}{V_{DACS}}=\frac{ND}{SD}=\frac{1}{3}\Rightarrow V_{SAMN}=\frac{1}{6}V_{SABCD}$

$\frac{V_{BACM}}{V_{BACS}}=\frac{BM}{BS}=\frac{1}{2}\Rightarrow V_{SAMN}=\frac{1}{4}V_{SABCD}$

$\frac{V_{SMCN}}{V_{SBCD}}=\frac{SM}{BS}.\frac{SN}{SD}=\frac{1}{3}\Rightarrow V_{SAMN}=\frac{1}{6}V_{SABCD}$

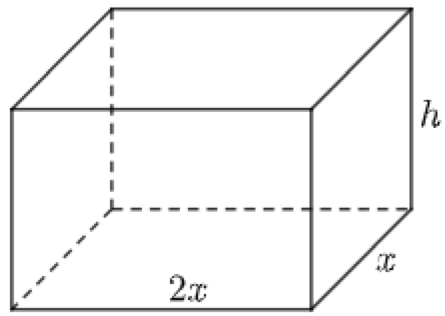
Vậy $V_{ACMN}=\frac{1}{4}V_{SABCD}=\frac{1}{12}a^3$.

Câu 102. Ông An muốn xây một bể nước dạng hình hộp chữ nhật có nắp với dung tích 3 mét khối. Đáy bể là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng cho mỗi mét vuông. Hỏi chi phí thấp nhất ông An cần bỏ ra để xây bể nước là bao nhiêu?

A. 6490123 đồng. **B.** 7500000 đồng. **C.** 6500000 đồng. **D.** 5151214 đồng.

Lời giải

Chọn A



Gọi $x\left(x>0\right)$ là chiều rộng của đáy bể, suy ra chiều dài của đáy bể là $2x$ và gọi h là chiều cao của bể.

Diện tích xây dựng là diện tích toàn phần của bể $S=2.2xh+2.xh+2.2x.x=4x^2+6xh\ \left(1\right)$

Ta có $V=3=2x.x.h\Rightarrow h=\dfrac{3}{2x^2}\left(2\right)$. Thay $\left(2\right)$ vào $\left(1\right)$, ta được hàm $S\left(x\right)=4x^2+\dfrac{9}{x}$, với $x>0$

Ta có $S\left(x\right)=4x^2+\dfrac{9}{x}=4x^2+\dfrac{9}{2x}+\dfrac{9}{2x}\geq 3\sqrt[3]{4x^2.\dfrac{9}{2x}.\dfrac{9}{2x}}=3\sqrt[3]{81}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $4x^2=\dfrac{9}{2x}\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt[3]{9}}{2}$.

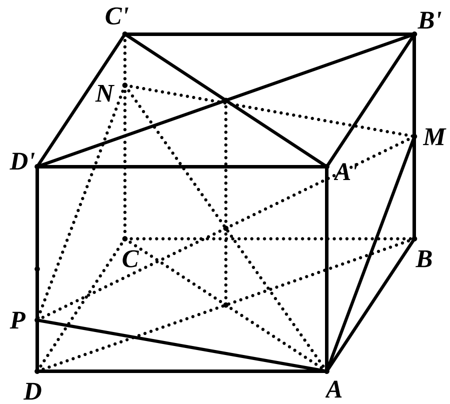
Khi đó chi phí thấp nhất là $3\sqrt[3]{81}\times 500000\approx 6490123$ (đồng).

Câu 103. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $2a$, gọi M là trung điểm của BB' và P thuộc cạnh DD' sao cho $DP=\dfrac{1}{4}DD'$. Mặt phẳng $\left(AMP\right)$ cắt CC' tại N. Thể tích khối đa diện $AMNPBCD$ bằng

A. $3a^3$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{11}}{3}$. **C.** $2a^3$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{9}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $b=\dfrac{BM}{BB'}$; $c=\dfrac{CN}{CC'}$; $d=\dfrac{DP}{DD'}$ ta có $c=b+d=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$.

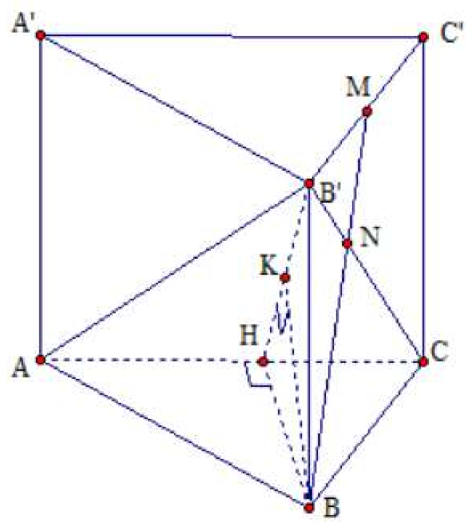
$V_{AMNPBCD}=\dfrac{b+c+d}{4}.V_{ABCD.A'B'C'D'}=\dfrac{3}{8}.\left(2a\right)^3=3a^3$.

Câu 104. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BAC = 60°$, $AB = 3a$ và $AC = 4a$. Gọi M là trung điểm của $B'C'$, biết khoảng các từ M đến mặt phẳng $(B'AC)$ bằng $\frac{3a\sqrt{15}}{10}$. Thể tích khối lăng trụ bằng

A. $7a^3$. **B.** $27a^3$. **C.** $4a^3$. **D.** $9a^3$.

Lời giải

Chọn B



Gọi N là giao điểm của BM và $B'C$ .Ta có $\frac{MN}{BN} = \frac{B'M}{BC} = \frac{1}{2}$, suy ra:

$d\left(B;\left(AB'C\right)\right) = 2d\left(M;\left(AB'C\right)\right) = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$

Từ B kẻ đường cao BH của tam giác ABC, kẻ BK vuông góc với đường thẳng HB'. Khi đó $BK = d\left(B;\left(AB'C\right)\right) = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$.

Mặt khác $BH = AB.\sin HAB = 3a.\sin 60° = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác HBB' vuông tại B có đường cao BK:

$\frac{1}{B'B^2} = \frac{1}{BK^2} - \frac{1}{BH^2} = \frac{25}{9a^2.15} - \frac{4}{9.a^2.3} = \frac{1}{27a^2} \Leftrightarrow B'B = 3a\sqrt{3}$.

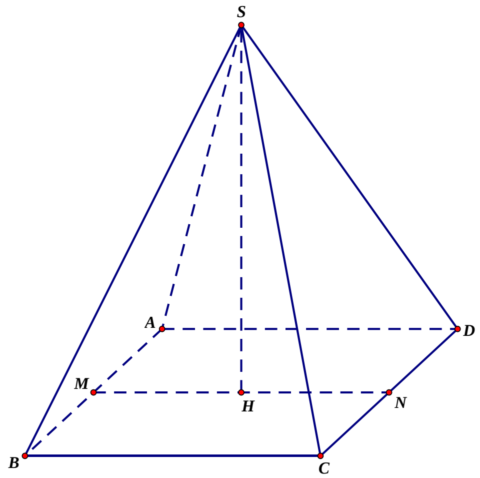
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = BB'.S_{\Delta ABC} = BB'.\frac{1}{2}AB.AC.\sin 60° = 27a^3$.

Câu 105. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = SB$, $SC = SD$, $(SAB) \perp (SCD)$ và tổng diện tích hai tam giác SAB và SCD bằng $\frac{7a^2}{10}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{4a^3}{15}$. **B.** $V = 20a^3$. **C.** $V = \frac{12a^3}{25}$. **D.** $V = \frac{4a^3}{25}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD.

Ta có: $\begin{cases} SM \perp AB & (\Delta SAB \text{ cân}) \\ SN \perp CD & (\Delta SCD \text{ cân}) \end{cases} \Rightarrow (SMN) \perp (ABCD)$

Kẻ $SH \perp MN \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow h = SH$

$MSN = 90^0$ (vì $(SAB) \perp (SCD) \Rightarrow ((SAB),(SCD)) = 90^0$

$\Rightarrow h = SH = \dfrac{SM.SN}{MN}$

Mặt khác ta có: $S_{\Delta SAB} + S_{\Delta SCD} = \dfrac{1}{2}(AB.SM + CD.SN) = \dfrac{1}{2}(SM + SN) = \dfrac{7a^2}{10}$

$\Rightarrow SM + SN = \dfrac{7a^2}{5}$.

Ta lại có: $SM^2 + SN^2 = MN^2 \Rightarrow SM.SN = \dfrac{(SM+SN)^2 - (SM^2 + SN^2)}{2} = \dfrac{12a^2}{25}$

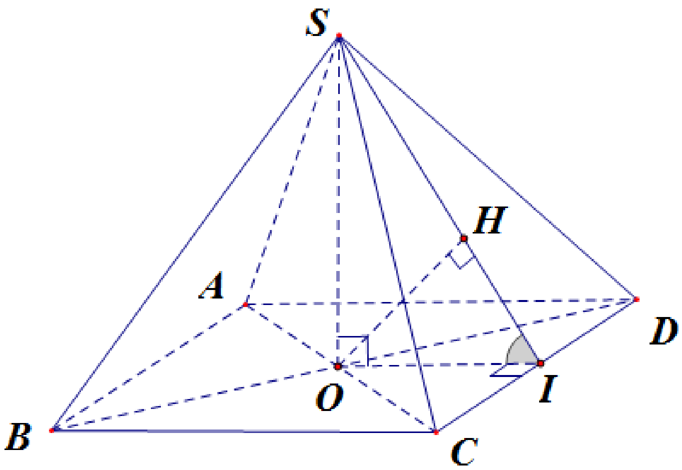
Có: $SH = \dfrac{12}{25}a$. Vậy: $V = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABCD}.SH = \dfrac{4a^3}{25}$.

Câu 106. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ với O là tâm đáy. Khoảng cách từ O đến mặt bên bằng 1 và góc giữa mặt bên với đáy bằng 45^0. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $V = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. **B.** $V = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V = 2\sqrt{3}$. **D.** $V = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của $CD \Rightarrow OI \perp CD, CD = 2OI$.

Kẻ $OH \perp SI$ tại $H \Rightarrow OH \perp (SCD) \Rightarrow d(O,(SCD)) = OH = 1$.

Ta có $\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ SI \subset (SCD), SI \perp CD \\ OI \subset (ABCD), OI \perp CD \end{cases} \Rightarrow ((SCD),(ABCD)) = (SI, OI) = SIO = 45^0$.

Xét tam giác vuông $HIO \Rightarrow OI = \dfrac{OH}{\sin SIO} = \dfrac{1}{\sin 45^0} = \sqrt{2} \Rightarrow CD = 2OI = 2\sqrt{2}$.

Ta có ΔSIO là tam giác vuông cân tại $O \Rightarrow SO = OI = \sqrt{2}$.

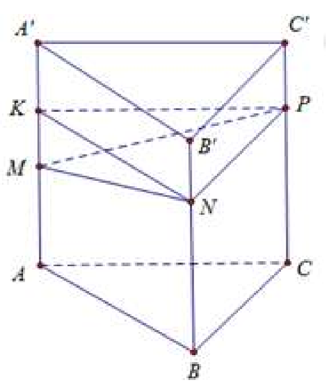
Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}(CD)^2.SO = \dfrac{1}{3}\left(2\sqrt{2}\right)^2.\sqrt{2} = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$.

Câu 107. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh $AA'; BB'; CC'$ sao cho $\dfrac{AM}{AA'} = \dfrac{1}{2}; \dfrac{BN}{BB'} = \dfrac{CP}{CC'} = \dfrac{2}{3}$. Thể tích khối đa diện $ABC.MNP$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}V$ **B.** $\dfrac{9}{16}V$ **C.** $\dfrac{20}{27}V$. **D.** $\dfrac{11}{18}V$.

Lời giải

Chọn D



Gọi K là hình chiếu của P trên AA'.

Khi đó $V_{ABC.KPN} = \dfrac{2}{3}V$

$V_{M,KPN}=\frac{1}{3}MK.S_{\Delta KNP}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right).AA'.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{18}V$.

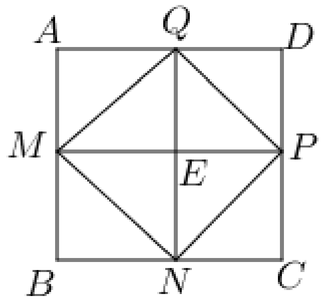
Do đó $V_{ABC.MNP}=\frac{2}{3}V-\frac{1}{18}V=\frac{11}{18}V$

Câu 108. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Các điểm M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của AB,BC,CD,DA. Điểm E thuộc miền trong của hình vuông $ABCD$. Biết rằng $V_{S.EMAQ}=75, V_{S.EMBN}=42, V_{S.EQDP}=60$. Thể tích khối chóp $S.EPCN$ nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(35;40)$. **B.** $(25;30)$. **C.** $(30;35)$. **D.** $(20;25)$.

Lời giải

Chọn B



Ta thấy rằng: $S_{EMQ}+S_{ENP}=S_{EPQ}+S_{EMN}\Rightarrow S_{AEMQ}+S_{CENP}=S_{EQDP}+S_{EMBN}$

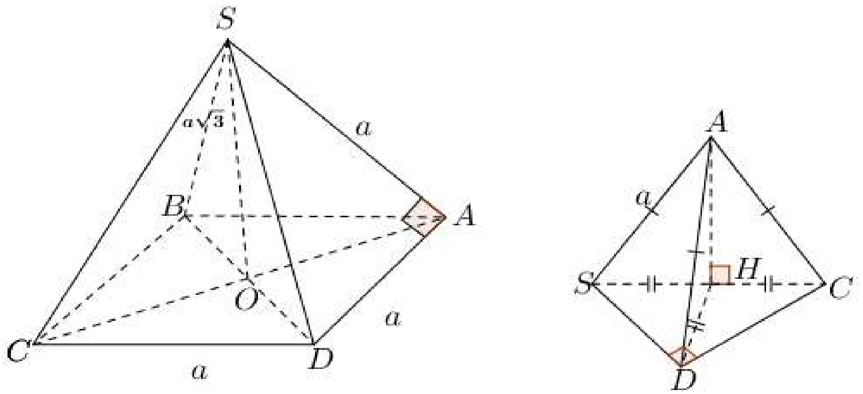
Do đó, $V_{S.AEMQ}+V_{S.CENP}=V_{S.EQDP}+V_{S.EMBN}\Rightarrow V_{S.CENP}=42+60-75=27\in(25;30)$.

Câu 109. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a. Biết rằng $SA=a, SA\perp AD, SB=a\sqrt{3}, AC=a$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng.

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $O=AC\cap BD\Rightarrow BD=2BO=a\sqrt{3}$. Ta có $SD=\sqrt{SA^2+AD^2}=a\sqrt{2}$

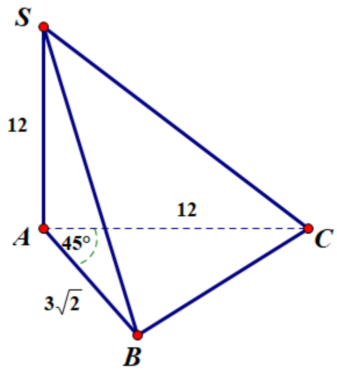
Suy ra: $SO^2=\frac{SB^2+SD^2}{2}-\frac{BD^2}{4}=\frac{3a^2+2a^2}{2}-\frac{3a^2}{4}=\frac{7a^2}{4}$.

Lại có: $SO^2=\frac{SA^2+SC^2}{2}-\frac{AC^2}{4}=\frac{a^2+SC^2}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{7a^2}{4}\Rightarrow SC=a\sqrt{3}$.

Xét ΔSCD vuông tại D vì $SC^2 = SD^2 + DC^2$ và $AS = AD = AC$ nên hình chiếu của A lên (SCD) là điểm H trung điểm SC.

Do đó, $V_{A.SDC} = V_{S.ADC} = \frac{1}{3}.AH.S_{\Delta SDC} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12} \Rightarrow V_{S.ABCD} = 2V_{S.ADC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

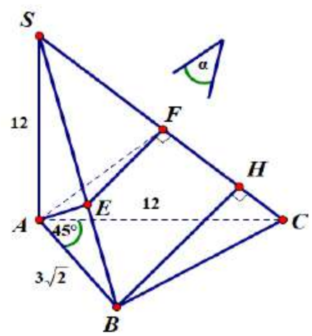
Câu 110. Cho khối chóp $S.ABC$, đáy ABC là tam giác có $AB = 3\sqrt{2}$, $AC = 12$, $BAC = 45^0$, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = 12$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua đỉnh A vuông góc với cạnh SC, mặt phẳng (α) chia khối chóp $S.ABC$ thành 2 khối đa diện có thể tích V_1, V_2 (trong đó V_1 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh S). Tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng



A. $\frac{2}{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A



- Gọi $F = (\alpha) \cap SC \Rightarrow AF \perp SC$.
- Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên SC, kẻ $EF // BH$ với $E \in SB \Rightarrow (\alpha) \equiv (AFE)$.
- $SB = 9\sqrt{2}; SC = 12\sqrt{2}; BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 45^0} = 3\sqrt{10}$.
- Tam giác SBC có

$SB^2 - SH^2 = BC^2 - HC^2 \Leftrightarrow \left(9\sqrt{2}\right)^2 - SH^2 = \left(3\sqrt{10}\right)^2 - \left(12\sqrt{2} - SH\right)^2 \Rightarrow SH = \frac{15\sqrt{2}}{2}$.

- Do tam giác SAC vuông cân tại A nên $SC = 12\sqrt{2} \Rightarrow SF = \frac{12\sqrt{2}}{2}$.
- Ta lại có $\frac{SE}{SB} = \frac{SF}{SH} = \frac{\frac{12\sqrt{2}}{2}}{\frac{15\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{5}$.

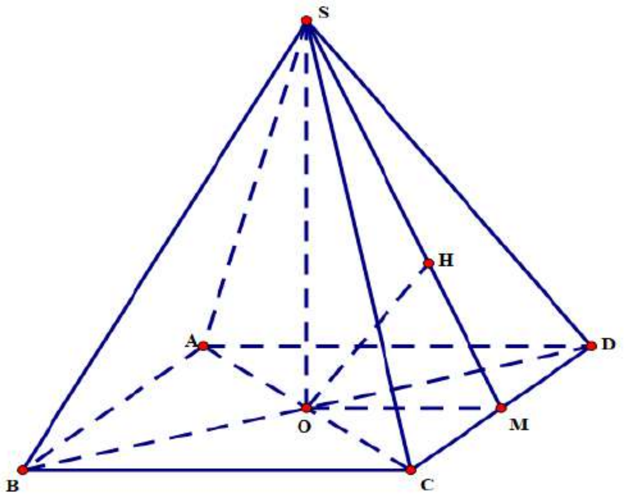
- $\dfrac{V_1}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SE}{SB}.\dfrac{SF}{SC} = \dfrac{4}{5}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow \dfrac{V_3}{V_{S.ABC}} = \dfrac{3}{5}$. Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{2}{3}$.

Câu 111. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có mặt bên (SCD) hợp với mặt đáy một góc $45°$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\dfrac{4a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $2a^3\sqrt{3}$. **D.** $a^3\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm cạnh SC, khi đó: $SM \perp CD$ tại M trong (SCD) và $OM \perp CD$ tại M trong $(ABCD)$.

Khi đó: $((SCD),(ABCD)) = (SM,OM) = SMO = 45°$. Suy ra: ΔSOM vuông cân tại O.

Trong (SOM), dựng $OH \perp SM$ tại H.

Ta có: $a\sqrt{3} = d(A,(SCD)) = 2d(O,(SCD)) = 2OH \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

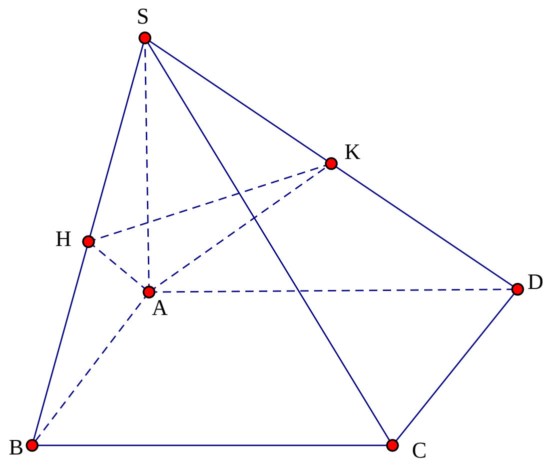
Suy ra: $SO = OM = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SO.AD^2 = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\left(2.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 = a^3\sqrt{6}$.

Câu 112. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB,SD. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (AHK) bằng 30^0. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{9}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $BC\perp AB$ và $BC\perp SA$ suy ra $BC\perp\left(SAB\right)\Rightarrow BC\perp AH$.

Mặt khác $AH\perp SB$ suy ra $AH\perp\left(SBC\right)\Rightarrow SC\perp AH$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $AK\perp\left(SCD\right)\Rightarrow SC\perp AK$.

Vậy $SC\perp\left(AHK\right)$.

Mà $SA\perp\left(ABCD\right)$.

Do đó góc giữa hai mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ và $\left(AHK\right)$ là góc giữa hai đường thẳng SA và SC (theo định nghĩa góc giữa hai mặt phẳng) và bằng ASC. Vậy $ASC=30^0$.

Xét tam giác SAC có $\cos ASC=\frac{SA}{SC}=\frac{SA}{\sqrt{SA^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow SA=a\sqrt{6}$.

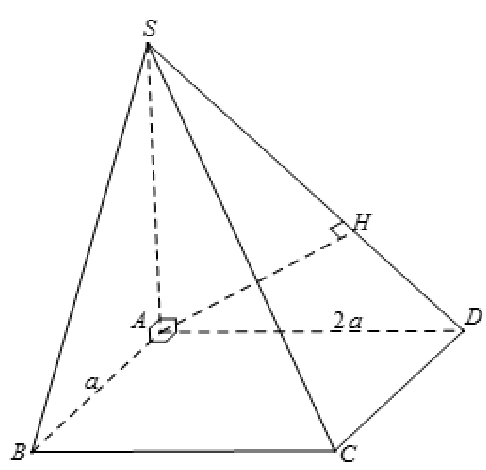
$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.a\sqrt{6}.a^2=\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 113. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=a$, $AD=2a$, SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến $\left(SCD\right)$ bằng $\frac{a}{2}$. Tính thể tích khối chóp theo a.

A. $\frac{4\sqrt{15}}{45}a^3$. **B.** $\frac{4\sqrt{15}}{15}a^3$. **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{15}a^3$. **D.** $\frac{2\sqrt{5}}{45}a^3$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ $AH \perp SD$ (1).

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$ (2).

Từ (1), (2) ta có $AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A,(SCD)) = AH \Rightarrow AH = \frac{a}{2}$.

Trong ΔSAD ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow SA = \frac{AH.AD}{\sqrt{AD^2 - AH^2}} = \frac{\frac{a}{2}\cdot 2a}{\sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}}} = \frac{2a\sqrt{15}}{15}$.

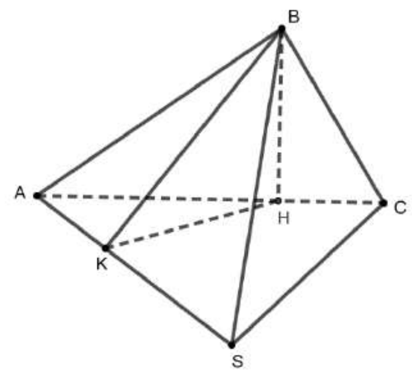
Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3}SA.AB.AD = \frac{1}{3}\cdot\frac{2a\sqrt{15}}{15}.a.2a = \frac{4\sqrt{15}}{45}a^3$.

Câu 114. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{6}$, $AD = \sqrt{3}$, tam giác SAC nhọn và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết hai mặt phẳng (SAB), (SAC) tạo với nhau góc α thỏa mãn $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ và cạnh $SC = 3$. Thể tích khối $S.ABCD$ bằng:

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



$V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABC} = 2V_{B.SAC}$. Kẻ BH vuông góc với AC tại H.

Ta có: $AC = 3, BH = \sqrt{2}$, $HC = 1 \Rightarrow KH = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

$\sin SAC = \frac{KH}{HA} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \cos SAC = \frac{1}{3}$.

$SC^2 = SA^2 + AC^2 - 2AS.AC.\cos SAC \Rightarrow SA = 2$.

$S_{SAC} = \frac{1}{2}SA.AC.\sin SAC = \frac{1}{2}.2.3.\frac{2\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$.

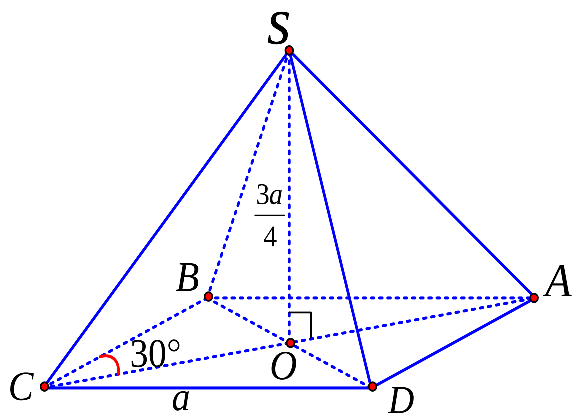
Vậy $V_{S.ABCD} = 2.\frac{1}{3}.2\sqrt{2}.\sqrt{2} = \frac{8}{3}$.

Câu 115. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a, góc $BCA = 30°$, $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \frac{3a}{4}$. Khi đó thể tích của khối chóp là

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Theo giả thiết $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a, góc $BCA = 30°$ nên $BCD = 60°$; ΔBCD đều suy ra $BD = a$, $CO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AC = 2CO = a\sqrt{3}$.

Ta có $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD = \frac{1}{2}.a.a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD}$ với $SO = \frac{3a}{4}$ suy ra

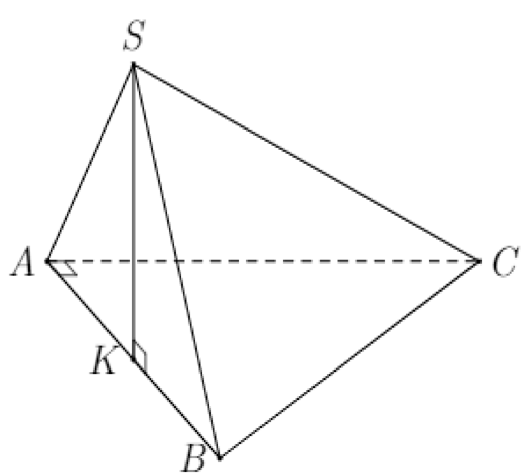
$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3a}{4}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 116. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và có $AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính thể tích V của khối khóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{2a^3\sqrt{6}}{12}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi K là trung điểm của đoạn AB. Vì ΔSAB là tam giác đều nên $SK \perp AB$.
$(SAB) \perp (ABC)$ theo giao tuyến AB.

$SK \perp (ABC) \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SK.S_{\Delta ABC}$.

ΔABC vuông tại A có $AB = a, BC = a\sqrt{3} \Rightarrow AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB.AC = \frac{1}{2} a.a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

ΔSAB là tam giác đều $\Rightarrow SK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

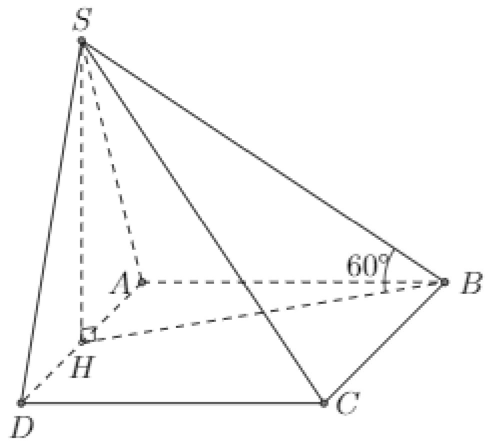
$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SK.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 117. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm cạnh AD, cạnh bên SB hợp với đáy một góc $60°$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{2}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{4}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của $AD \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow BH$ là hình chiếu vuông góc của SB trên $(ABCD)$.

$\Rightarrow SBH = (SB,(ABCD)) = 60°$.

ΔABH vuông tại $A \Rightarrow BH = \sqrt{AB^2 + AH^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

ΔSBH vuông tại $H \Rightarrow SH = HB.\tan 60° = \frac{a\sqrt{15}}{2}$.

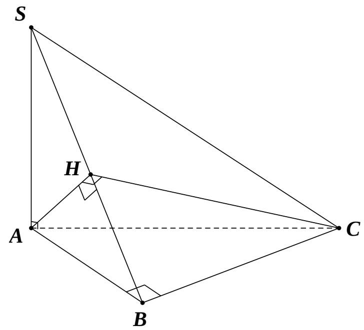
$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}$.

Câu 118. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $SA \perp (ABC)$, $AB = a$. Biết góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (SBC) bằng $30°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3}{6}$. **B.** $\frac{a^3}{3}$. **C.** a^3. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Từ A kẻ $AH \perp SB$ tại B.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.

Lại có $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Từ đó suy ra $(AC,(SBC)) = (AC, HC) = ACH = 30°$.

Tam giác ABC vuông cân tại B nên $AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

Xét ΔAHC vuông tại H: $AH = AC.\sin ACH = a\sqrt{2}.\sin 30° = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét ΔSAB vuông tại A: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow SA = a$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB^2 = \frac{a^2}{2}$.

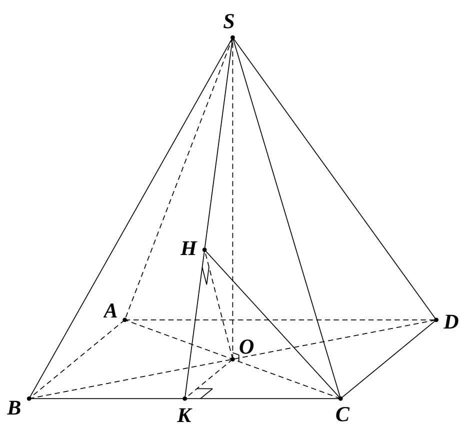
Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{a^3}{6}$.

Câu 119. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$. Góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (SBC) bằng $30°$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $4a^3$. **B.** $\frac{4}{3}a^3$. **C.** $\frac{2\sqrt{6}a^3}{9}$. **D.** $\frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình vuông $ABCD$. Suy ra $SO \perp (ABCD)$.

Gọi K là trung điểm của $BC \Rightarrow OK \perp BC$. Từ O kẻ $OH \perp SK$ tại H.

Ta có $\begin{cases} BC \perp OK \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOK) \Rightarrow BC \perp OH$.

Lại có $\begin{cases} OH \perp SK \\ OH \perp BC \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SBC)$.

Suy ra $(AC,(SBC)) = (OC,(SBC)) = (OC,HC) = OCH = 30°$.

Ta có $OC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}.AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

Xét ΔOHC vuông tại $H : OH = OC.\sin OCH = a\sqrt{2}.\sin 30° = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét ΔSOK vuông tại $O : \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OK^2} \Rightarrow \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow SO = a$.

Diện tích hình vuông $ABCD : S_{ABCD} = AB^2 = (2a)^2 = 4a^2$.

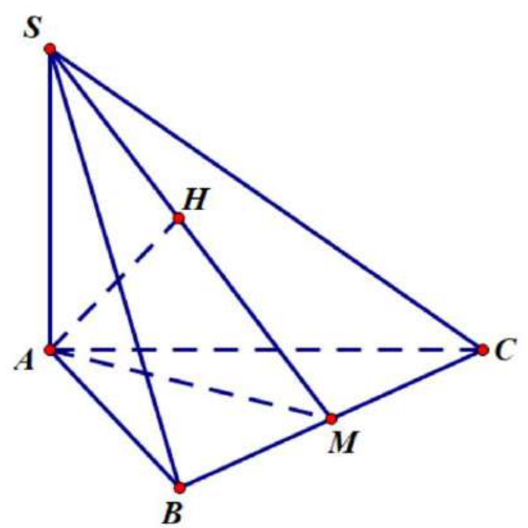
Thể tích khối chóp $S.ABCD : V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}.4a^2.a = \frac{4}{3}a^3$.

Câu 120. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{3}$, góc giữa SA mặt phẳng (SBC) bằng 45^0. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** a^3.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của BC

Do tam giác ABC đều nên $AM \perp BC$

$\left.\begin{matrix} AM \perp BC \\ SA \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAM)$

Kẻ $AH \perp SM$

Ta có $\left.\begin{matrix} BC \perp AH \\ SM \perp AH \end{matrix}\right\} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow (SA,(SBC)) = (SA,SH) = ASH = 45^0$

Suy ra ΔASM vuông cân tại A

Ta c $SA = AM = a\sqrt{3}$

Suy ra $AB = BC = AC = 2a$

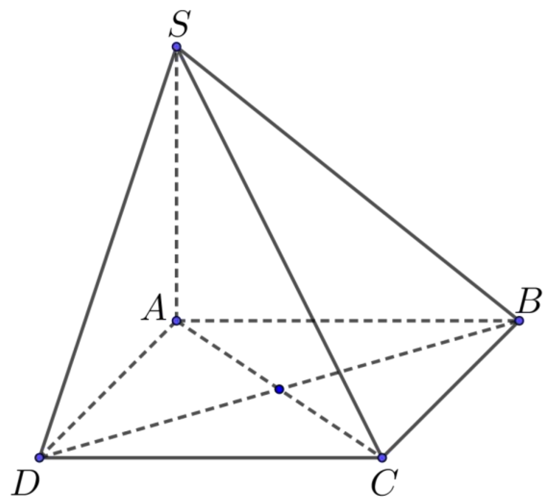
Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC}.SA = a^3$.

Câu 121. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, cạnh bên SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc $30°$. Thể tích của khối chóp đó bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

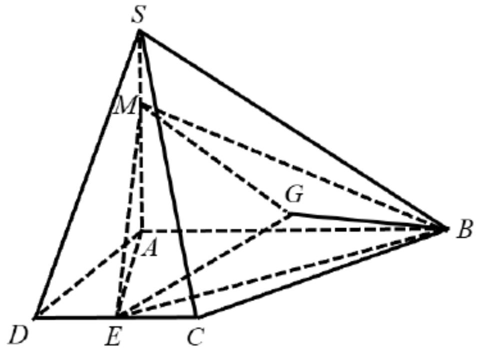


Vì $BC \perp SA$ và $BC \perp AB$ nên $BC \perp (SAB)$. Từ đó $(SC,(SAB)) = (SC,SB) = BSC = 30°$

Trong tam giác SCB, ta có $\tan 30° = \frac{a}{SB} \Leftrightarrow SB = a\sqrt{3}$; $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$

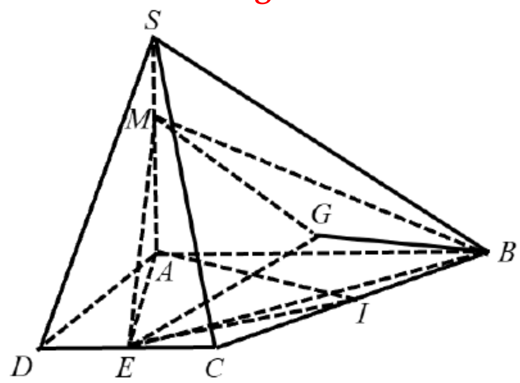
Vậy thể tích khối chóp là $V_{SABCD} = \frac{1}{3} SA.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

Câu 122. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D. Biết $AB = 4a, AD = CD = 2a$. Cạnh bên $SA = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi G là trọng tâm tam giác SBC, M là điểm sao cho $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MS}$ và E là trung điểm cạnh CD (tham khảo hình vẽ). Tính thể tích V của khối đa diện $MGABE$.



A. $\frac{27a^3}{8}$. **B.** $\frac{10a^3}{3}$. **C.** $\frac{13a^3}{4}$. **D.** $\frac{25a^3}{9}$.

Lời giải



Chọn B

Ta có $V_{MGABE}=V_{GABE}+V_{GABM}+V_{GAEM}$.

$S_{ABE}=\frac{1}{2}.2a.4a=4a^2\Rightarrow V_{GABE}=\frac{1}{3}V_{SABE}=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}S_{ABE}.SA=\frac{1}{9}.4a^2.3a=\frac{4a^3}{3}$.

$S_{ABM}=\frac{1}{2}.4a.2a=4a^2\Rightarrow V_{GABM}=\frac{1}{3}V_{CABM}=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}S_{ABM}.DA=\frac{1}{9}.4a^2.2a=\frac{8a^3}{9}$.

Gọi I là trung điểm của BC.

$AE=\sqrt{4a^2+a^2}=a\sqrt{5}$; $EI=\frac{BD}{2}=\frac{\sqrt{16a^2+4a^2}}{2}=a\sqrt{5}$.

$AI^2=\frac{AC^2+AB^2}{2}-\frac{BC^2}{4}=\frac{8a^2+16a^2}{2}-\frac{8a^2}{4}=10a^2\Rightarrow AI=a\sqrt{10}$.

Dựng $EH\perp AI\Rightarrow H$ là trung điểm của AI.

$EH=\sqrt{5a^2-\left(\frac{a\sqrt{10}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{10}}{2}$; $S_{AEI}=\frac{1}{2}EH.AI=\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{10}}{2}.a\sqrt{10}=\frac{5}{2}a^2$.

$V_{GAEM}=\frac{2}{3}V_{IAEM}=\frac{2}{3}V_{MAEI}=\frac{2}{3}.\frac{1}{3}S_{AEI}.MA=\frac{2}{9}.\frac{5}{2}a^2.2a=\frac{10a^3}{9}$.

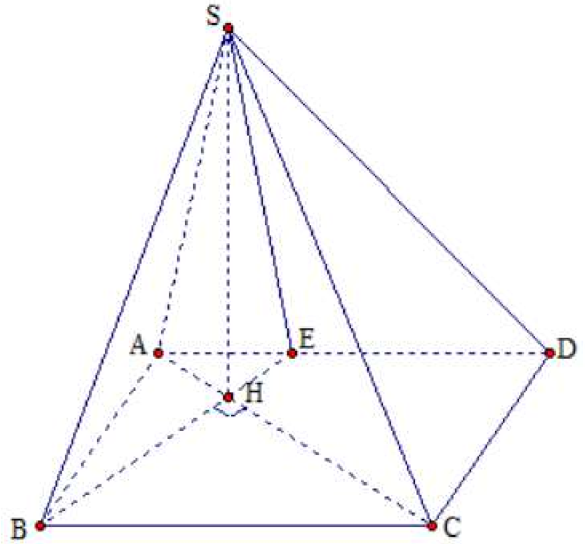
Vậy $V_{MGABE}=\frac{4a^3}{3}+\frac{8a^3}{9}+\frac{10a^3}{9}=\frac{10a^3}{3}$.

Câu 123. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. E là điểm trên cạnh AD sao cho BE vuông góc với AC tại H và $AB>AE$, cạnh SH vuông góc với mặt phẳng đáy, góc $BSH=45°$. Biết $AH=\frac{2a}{\sqrt{5}}$, $BE=a\sqrt{5}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{5}}{15}$. **B.** $\frac{16a^3}{3\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{32a^3}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{8a^3\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Đặt $AE = x$, $AB = y$ $(y > x)$.

Tam giác ABE vuông tại A, có đường cao AH. Áp dụng các hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

+) $\begin{cases} BE^2 = AE^2 + AB^2 \\ \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AE^2} + \dfrac{1}{AB^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2 = x^2 + y^2 \\ \dfrac{5}{4a^2} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5a^2 \\ xy = 2a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3a \\ xy = 2a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = 2a \end{cases}$.

+) $BH = \dfrac{AB^2}{BE} = \dfrac{4a^2}{a\sqrt{5}} = \dfrac{4\sqrt{5}a}{5} \Rightarrow EH = BE - BH = a\sqrt{5} - \dfrac{4\sqrt{5}a}{5} = \dfrac{\sqrt{5}a}{5}$.

Tam giác SHB vuông cân tại H (có $BSH = 45°$), suy ra: $SH = \dfrac{4\sqrt{5}a}{5}$.

+) $\dfrac{BC}{EA} = \dfrac{BH}{EH} = 4 \Rightarrow BC = 4a$.

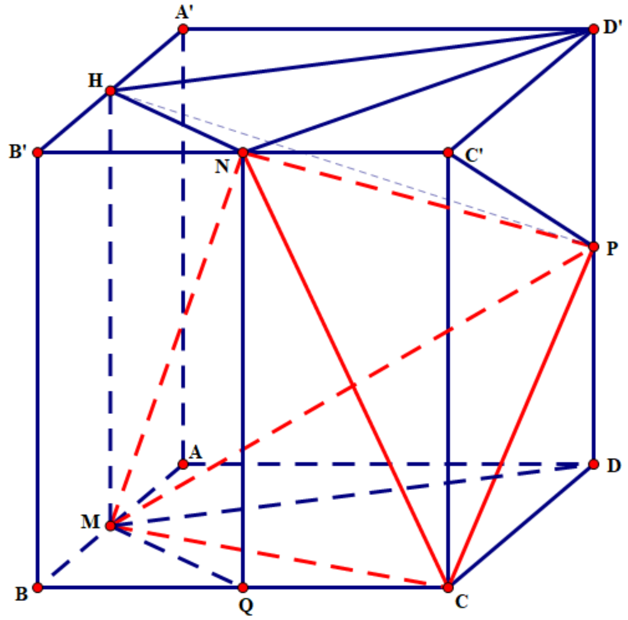
Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{6}.SH.AB.BC = \dfrac{1}{6}.\dfrac{4\sqrt{5}a}{5}.2a.4a = \dfrac{16\sqrt{5}a^3}{15}$.

Câu 124. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng V. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, $B'C'$, DD'. Gọi thể tích khối tứ diện $CMNP$ là V', khi đó tỉ số $\dfrac{V'}{V}$ bằng

A. $\dfrac{1}{16}$. **B.** $\dfrac{3}{16}$. **C.** $\dfrac{1}{64}$. **D.** $\dfrac{3}{64}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $V = V' + V_{B'HN.BMQ} + V_{A'HD'.AMD} + V_{N.MQC} + V_{P.NCC'} + V_{P.D'C'N} + V_{P.D'HN} + V_{P.HNM} + V_{P.MDC}$.

Gọi S là diện tích đáy và h là chiều cao khối hộp.

Xét: $V_{B'HN.BMQ} = \frac{1}{8}Sh$, $V_{A'HD'.AMD} = \frac{1}{4}Sh$, $V_{N.MQC} = \frac{1}{24}Sh$, $V_{P.NCC'} = \frac{1}{12}Sh$, $V_{P.D'C'N} = \frac{1}{24}Sh$,

$V_{P.D'HN} = \frac{1}{16}Sh$, $V_{P.HNM} = V_{D'.HNM} = V_{M.HND'} = \frac{1}{8}Sh$, $V_{P.MDC} = \frac{1}{12}Sh$.

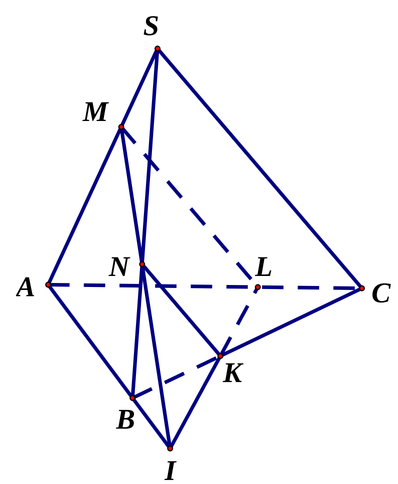
Suy ra: $V = V' + \frac{13}{16}V \Leftrightarrow V' = \frac{3}{16}V \Leftrightarrow \frac{V'}{V} = \frac{3}{16}$.

Câu 125. Cho tứ diện $SABC$ và hai điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh SA, SB sao cho $\frac{SM}{AM} = \frac{1}{2}$, $\frac{SN}{BN} = 2$. Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm M, N và song song với cạnh SC cắt AC, BC lần lượt tại L, K. Gọi V, V' lần lượt là thể tích các khối đa diện $SCMNKL$, $SABC$. Tỉ số $\frac{V}{V'}$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{4}{9}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là giao điểm của AB, MN, KL.

Do $ML \parallel SC$ và $NK \parallel SC$ nên ta có $\frac{AM}{AS}=\frac{AL}{AC}=\frac{2}{3}$ và $\frac{BN}{BS}=\frac{BK}{BC}=\frac{1}{3}$.

Ta có $\frac{MA}{MS}.\frac{NS}{NB}.\frac{IB}{IA}=1$ suy ra $\frac{IB}{IA}=\frac{1}{4}$.

Ta có $\frac{CL}{CA}.\frac{BA}{BI}.\frac{KI}{KL}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}.\frac{3}{1}.\frac{KI}{KL}=1 \Leftrightarrow KL=KI$ suy ra $\Rightarrow MN=NI$ hay $\frac{IN}{IM}=\frac{IK}{IL}=\frac{1}{2}$.

Xét hình chóp $IAML$ ta có $\frac{V_{I.BNK}}{V_{I.AML}}=\frac{IB.IN.IK}{IA.IM.IL}=\frac{1}{4}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$.

Mặt khác ta có $V_{IAML}=\frac{1}{3}d\left(I;(AML)\right).S_{\Delta AML}=\frac{1}{3}.\frac{4}{3}d\left(B;(AML)\right).\frac{2}{3}.\frac{2}{3}S_{\Delta SAC}=\frac{16}{27}V_{SABC}$.

Suy ra $\frac{V_{I.BNK}}{V_{SABC}}=\frac{1}{16}.\frac{16}{27}=\frac{1}{27}$. Suy ra $V_{I.BNK}=\frac{1}{27}.V' \Rightarrow V_{BNKAML}=\frac{16}{27}V'-\frac{1}{27}.V'=\frac{5}{9}V'$.

Ta có $V_{SCMNKL}=V'-V_{BNKAML}=V'-\frac{5}{9}V'=\frac{4}{9}V'$.

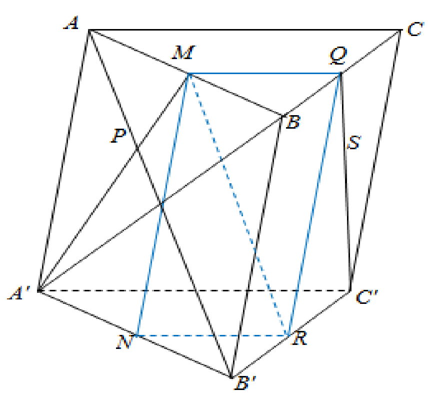
Từ đó ta có $\frac{V}{V'}=\frac{4}{9}$.

Câu 126. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, Q, R lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, $A'B'$, BC, $B'C'$ và P, S lần lượt là trọng tâm của các tam giác $AA'B$, $CC'B$. Tỉ số thể tích khối đa diện $MNRQPS$ và khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{5}{54}$. **C.** $\frac{1}{10}$. **D.** $\frac{2}{27}$.

Lời giải

Chọn B



◆ Đặt: $V=V_{ABC.A'B'C'}$; $V_{B'.AA'C'C}=\frac{1}{3}S_{AA'C'C}.\mathrm{d}\left(B',\left(AA'C'C\right)\right)=\frac{2}{3}V$

$V_{B'.MNRQ}=\frac{1}{3}.S_{MNRQ}.\mathrm{d}\left(B',\left(MNRQ\right)\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}S_{AA'C'C}\right).\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(B',\left(AA'C'C\right)\right)\right)$

$=\left(\frac{1}{3}.S_{AA'C'C}.\mathrm{d}\left(B',\left(AA'C'C\right)\right)\right).\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.\frac{2}{3}V=\frac{1}{6}V$

$V_{P.MNRQ}=\frac{1}{3}.V_{A'.MNRQ}=\frac{1}{3}.V_{B'.MNRQ}=\frac{1}{3}.\frac{1}{6}V=\frac{1}{18}V$

◆ $V_{A.BB'C'C}=\frac{1}{3}S_{BB'C'C}.\mathrm{d}\left(A,\left(BB'C'C\right)\right)=\frac{2}{3}V$

$S_{\triangle QRC'} = \frac{1}{2}S_{QRC'C} = \frac{1}{4}S_{BB'C'C}$; $S_{\triangle QRS} = \frac{1}{3}S_{QRC'} = \frac{1}{3}.\frac{1}{4}S_{BB'C'C} = \frac{1}{12}S_{BB'C'C}$

$V_{A.QRS} = \frac{1}{3}S_{\triangle QRS}.\mathrm{d}\left(A,\left(QRS\right)\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{12}S_{BB'C'C}\right).\left(\mathrm{d}\left(A,\left(BB'C'C\right)\right)\right)$

$= \left(\frac{1}{3}.S_{BB'C'C}.\mathrm{d}\left(A,\left(BB'C'C\right)\right)\right).\frac{1}{12} = \frac{1}{12}.\frac{2}{3}V = \frac{1}{18}V$

$V_{P.QRS} = \frac{PB'}{AB'}.V_{A.QRS} = \frac{2}{3}.\frac{1}{18}V = \frac{1}{27}V$

- $V_{MNRQPS} = V_{P.MNRQ} + V_{P.QRS} = \frac{1}{18}V + \frac{1}{27}V = \frac{5}{54}V$

Vậy: $\frac{V_{MNRQPS}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{5}{54}$.

Câu 127. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = CB = 2, AC = 1$. Một mặt phẳng (P) cắt các đường thẳng AA', BB', CC' lần lượt tại M, N, P sao cho tam giác MNP đều. Gọi φ là góc tạo bởi mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC), khi đó

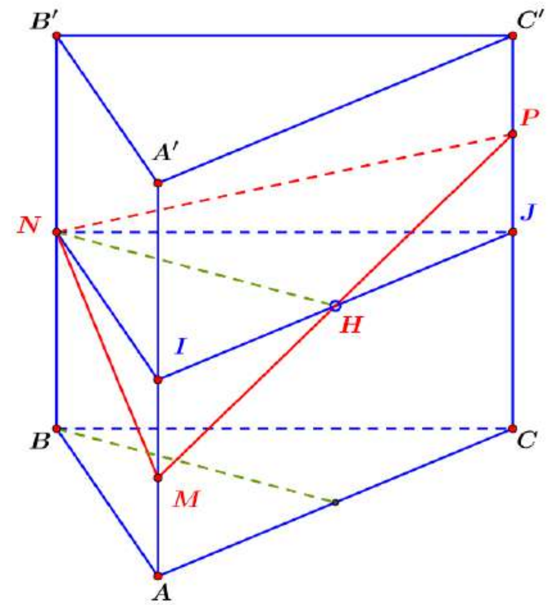
A. $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $AB = CB = 2, AC = 1 \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại $B \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.d(B;(AC)).AC = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Ta có: Mặt phẳng (P) cắt các đường thẳng AA', BB', CC' lần lượt tại M, N, P; Gọi mặt phẳng (α) qua N song song với mặt đáy cắt AA', CC' lần lượt tại I, J; Gọi H là giao điểm của IJ và MP thì H là trung điểm của IJ và MP.



Ta đặt: $MN = x > 0 \Rightarrow IM = \sqrt{x^2 - 4} = PJ$, $MH = \sqrt{IM^2 + \frac{1}{4}} = \sqrt{x^2 - \frac{15}{4}}$.

Mà H là trung điểm IJ nên H cũng là trung điểm $MP \Rightarrow MP = 2MH = \sqrt{4x^2 - 15}$.

Do đề cho tam giác MNP đều nên ta có phương trình: $MP = MN \Leftrightarrow x = \sqrt{4x^2 - 15} \Leftrightarrow x = \sqrt{5}$.

Suy ra $S_{\Delta MNP} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{5\sqrt{3}}{4}$.

Đến đây ta nhận thấy, do ΔABC là hình chiếu của ΔMNP lên mặt phẳng đáy nên suy ra:

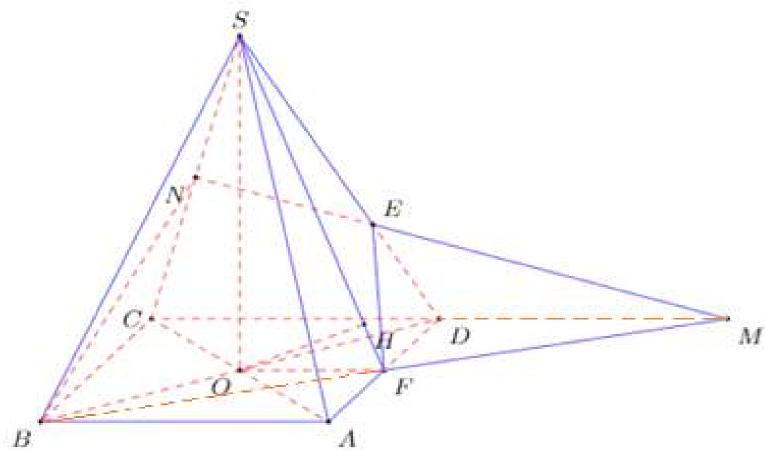
$\cos\varphi = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MNP}} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}.\dfrac{4}{5\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 128. Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $2a$. Gọi M là điểm đối xứng của C qua D, N là trung điểm của SC. Mặt phẳng (BMN) chia khi chóp đã cho thành 2 phần. Thể tích của phần chứa đỉnh S bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{14}a^3}{32}$. **B.** $\dfrac{5\sqrt{14}a^3}{72}$. **C.** $\dfrac{7\sqrt{14}a^3}{96}$. **D.** $\dfrac{7\sqrt{14}a^3}{72}$.

Lời giải

Chọn D



Giả sử các điểm như hình vẽ. $F = (BMN) \cap AD$; Kẻ $OH \perp SF$;

Gọi $E = SD \cap MN \Rightarrow E$ là trọng tâm ΔSCM, $DF // BC \Rightarrow F$ là trung điểm BM.

Ta có: $SO = \sqrt{SD^2 - DO^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{14}}{2}$

$\Rightarrow SF = \sqrt{SO^2 + OF^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{14}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$

- $d(M;(SBC)) = 4.d(O;(SAD)) = 4OH = 4\dfrac{SO.OF}{SF} = \dfrac{2a\sqrt{210}}{15}$; $S_{\Delta SAD} = \dfrac{1}{2}.SF.AD = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{4}$.
- $\dfrac{V_{MEFD}}{V_{MNBC}} = \dfrac{ME}{MN}.\dfrac{MF}{MB}.\dfrac{MD}{MC} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6} \Rightarrow V_{MEFD} = \dfrac{1}{6}.V_{MNBC}$

$\Rightarrow V_{BFDCNE} = \dfrac{5}{6}.V_{MNBC} = \dfrac{5}{6}.\dfrac{1}{3}.d(M;(SBC)).\dfrac{1}{2}.S_{\Delta SBC} = \dfrac{5}{6}.\dfrac{1}{3}.4OH.\dfrac{1}{2}.S_{\Delta SAD} = \dfrac{5a^3\sqrt{14}}{72}$.

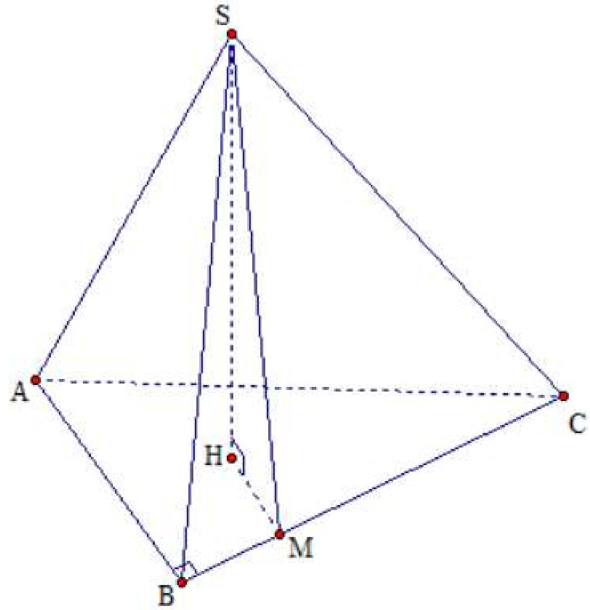
$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SO.S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{14}}{6} \Rightarrow V_{SABFEN} = V_{S.ABCD} - V_{BFDCNE} = \dfrac{7a^3\sqrt{14}}{72}$.

Câu 129. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = 3a$, $BC = 4a$, $CA = 5a$, các mặt bên tạo với đáy góc $60°$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) thuộc miền trong của tam giác ABC. Tính thể tích hình chóp $S.ABC$.

A. $2a^3\sqrt{3}$. **B.** $6a^3\sqrt{3}$. **C.** $12a^3\sqrt{3}$. **D.** $2a^3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $AC^2 = 25a^2 = 9a^2 + 16a^2 = AB^2 + BC^2$, vậy tam giác ABC vuông tại B.

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC). Vì các mặt bên tạo với đáy góc $60°$ suy ra: $d(H;AC) = d(H;BC) = d(H;AB)$ và H thuộc miền trong của tam giác ABC nên H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Từ H kẻ đường thẳng vuông góc với BC tại M, suy ra:

$$\begin{cases} BC \perp HM \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHM) \Rightarrow BC \perp SM.$$

Suy ra: $SMH = ((SBC);(ABC)) = 60°$.

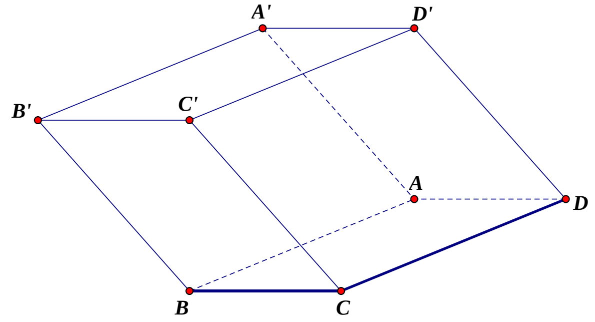
Đoạn HM là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC, suy ra:

$$HM = \frac{S_{\Delta ABC}}{p} = \frac{AB.BC}{AB + BC + CA} = \frac{3a.4a}{3a + 4a + 5a} = \frac{12a^3}{12a} = a.$$

$SH = HM.\tan 60° = a\sqrt{3}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{6}AB.BC.SH = \frac{1}{6}.3a.4a.a\sqrt{3} = 2a^3\sqrt{3}$.

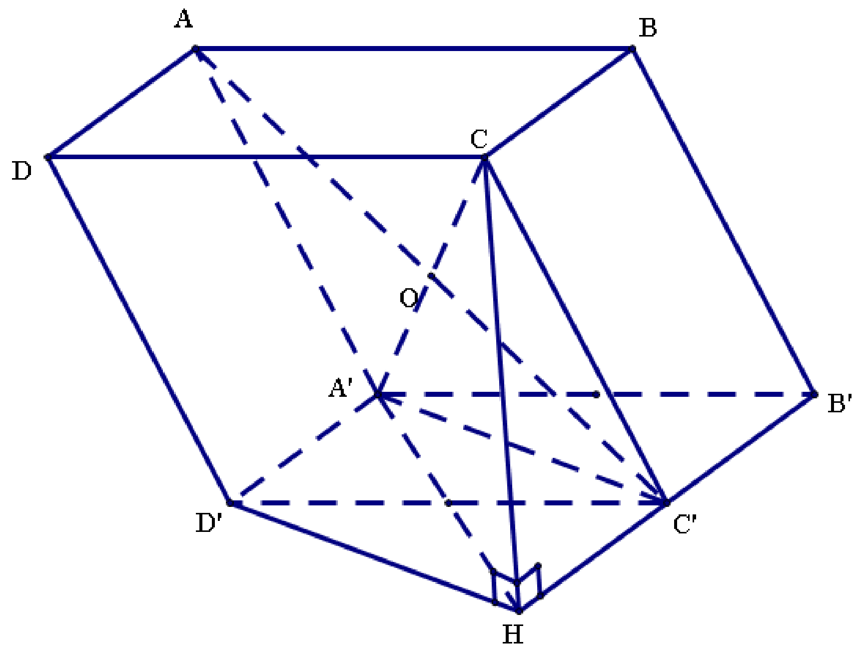
Câu 130. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ đáy là hình bình hành. Với $AC = BC = a$, $CD = a\sqrt{2}, AC' = a\sqrt{3}, CA'B' = A'D'C = 90^0$. Thể tích khối tứ diện $BCDA'$ là



A. $\frac{a^3}{6}$. **B.** a^3. **C.** $\frac{2a^3}{3}$. **D.** $\sqrt{6}\,a^3$.

Lời giải

Chọn A



Ta có tam giác ABC vuông cân tại C

Gọi O là trung điểm của $AC' \Rightarrow OC' = OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Gọi H là chân đường cao hạ từ C'xuống mặt $(A'B'C'D')$.

Ta có: $\begin{cases} A'D' \perp CH \\ A'D' \perp D'C \end{cases} \Rightarrow A'D' \perp HD'$.

Lại có: $\begin{cases} A'B' \perp A'C \\ A'B' \perp CH \end{cases} \Rightarrow A'B' \perp A'H$.

Ta có: $A'H \perp A'B' \Rightarrow HA'B' = 90^0; A'D'\text{H} = 90^0$. Tam giác $A'D'H$ vuông cân tại D'

Giả sử $CH = x \Rightarrow CA' = \sqrt{x^2 + 2a^2}$

$CC'^2 = x^2 + a^2$

$C'O = \frac{CC'^2 + C'A'^2}{2} - \frac{CA'^2}{4} \Leftrightarrow \frac{3a^2}{4} = \frac{x^2 + a^2 + a^2}{2} - \frac{x^2 + 2a^2}{4} = \frac{x^2 + 2a^2}{4}$

$x^2 + 2a^2 = 3a^2 \Rightarrow x = a = CH$

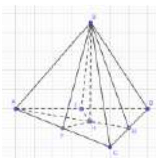
$V_{BCDA'}=\frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D}=\frac{1}{6}.CH.S_{ABCD}=\frac{a^3}{6}$.

Câu 131. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều có cạnh $\sqrt{6}$. Biết rằng các mặt bên của hình chóp có diện tích bằng nhau và một trong các cạnh bên bằng $3\sqrt{2}$. Tính thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.ABC$.

A. 4. **B.** 3. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên $mp\left(ABC\right)$. E,F,M lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên AB,AC,BC

Khi đó ta có $AB\perp SE, AC\perp SF, BC\perp SM$.

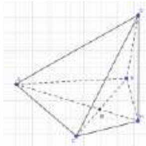
Vì $S_{\triangle SAB}=S_{\triangle ASAC\triangle}=S_{\triangle SBC}$, $AB=AC=BC=\sqrt{6}$ suy ra $SE=SF=SM$

$\Rightarrow\triangle SHE=\triangle SHF=\triangle SHM\Rightarrow HE=HF=HM$ nên H là tâm đường tròn nội tiếp hoặc H là tâm đường tròn bàng tiếp góc A hoặc B, hoặc C của $\triangle ABC$.

Trường hợp 1: H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Do $\triangle ABC$ đều nên H cũng là trọng tâm $\triangle ABC$ và $S.ABC$ là hình chóp đều.

Ta có $HA=\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}.\sqrt{6}=\sqrt{2}, SH=\sqrt{SA^2-HA^2}=\sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{2}^2}=4$. $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{6}^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH.S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}4.\frac{3\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.



Trường hợp 2: H là tâm đường tròn bàng tiếp $\triangle ABC$. Giả sử H là tâm đường tròn bàng tiếp góc A.

Ta có $HBC = 60^0$, $HM = BM\tan 60^0 = \dfrac{\sqrt{6}}{2}.\sqrt{3} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AH = AM + HM = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$,

$HB = \dfrac{BI}{\cos 60^0} = \sqrt{6}$. Hình chóp $S.ABC$ có một cạnh bên bằng $3\sqrt{2} \Rightarrow SB = SC = 3\sqrt{2}$ (Vì

$SA > AH = 3\sqrt{2}$) suy ra $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2 - \sqrt{6}^2} = 2\sqrt{3}$,

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3}2\sqrt{3}.\dfrac{3\sqrt{3}}{2} = 3$.

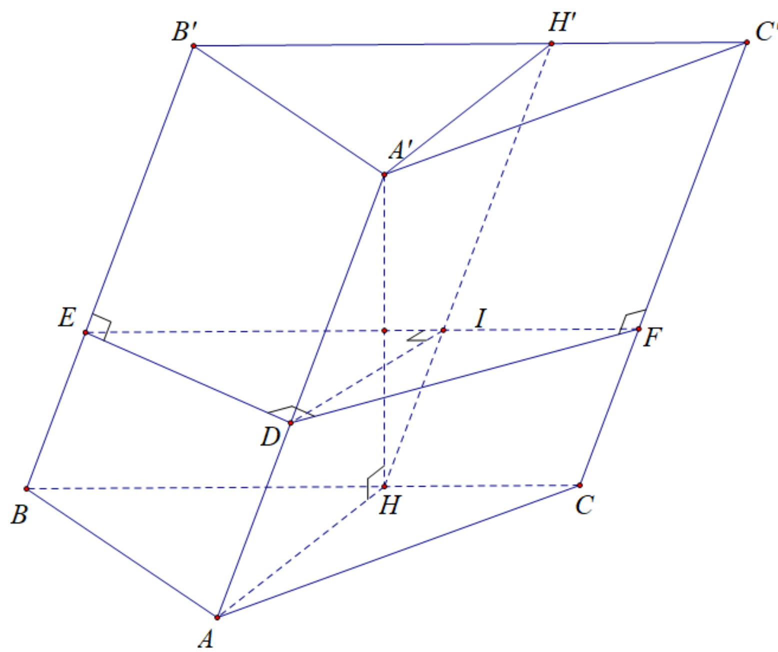
Vậy thể tích khói chóp $S.ABC$ nhỏ nhất bằng 3.

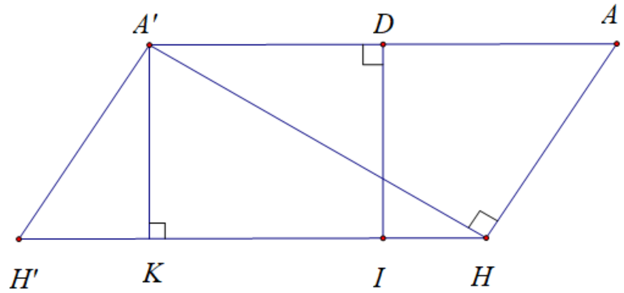
Câu 132. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm của BC. Mặt phẳng (P) vuông góc với các cạnh bên và cắt các cạnh bên của hình lăng trụ lần lượt tại D, E, F. Biết mặt phẳng $(ABBA')$ vuông góc với mặt phẳng $(ACC'A')$ và chu vi của tam giác DEF bằng 4, thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $12\left(10-7\sqrt{2}\right)$. **B.** $4\left(10+7\sqrt{2}\right)$. **C.** $6\left(10-7\sqrt{2}\right)$. **D.** $12\left(10+7\sqrt{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A





Gọi H và H' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$.

Khi đó ta có $\begin{cases} BC \perp A'H \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp AA' \Rightarrow BC \perp BB', BC \perp CC'$,

Suy ra $BB'C'C$ là hình chữ nhật.

Vì $E \in BB'$, $F \in CC'$, và $EF \perp BB'$, $EF \perp CC'$ (do $EF \subset (P)$ vuông góc với các cạnh bên của lăng trụ),

Suy ra $EF // BC$ và $EF = BC = a$ (giả sử cạnh đáy của lăng trụ là a).

Gọi I là trung điểm của $HH' \Rightarrow I$ cũng là trung điểm của EF.

Kẻ $ED \perp AA'$, $D \in AA'$, suy ra $DF \perp AA'$.

Do $(ABB'A') \perp (ACC'A')$ nên suy ra $ED \perp DF$. Hơn nữa dễ thấy $DE = DF$, nên ΔDEF vuông cân tại D. Suy ra $2ED^2 = EF^2 = a^2 \Rightarrow ED = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chu vi ΔDEF bằng $DE + DF + EF = a\sqrt{2} + a = 4 \Rightarrow a = 4\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

Xét hình bình hành $AA'H'H$, kẻ $A'K \perp HH'$. Ta thấy, $ID \perp AA' \Rightarrow ID \perp HH'$,

Suy ra $A'K // ID \Rightarrow A'K = ID = \dfrac{EF}{2} = \dfrac{a}{2}$ (do ΔDEF vuông cân tại D).

Khi đó, ta có diện tích hình bình hành $AA'H'H$ bằng: $A'K.AA' = A'H.AH$

$\Rightarrow \dfrac{a}{2}.AA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.A'H \Rightarrow AA' = \sqrt{3}A'H$.

Mà $AA'^2 = A'H^2 + AH^2 \Rightarrow 2A'H^2 = AH^2 = \dfrac{3a^2}{4} \Rightarrow A'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

$S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{ABC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

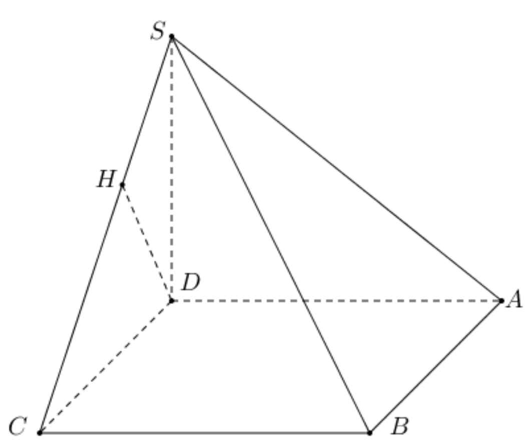
Với $a = 4\left(\sqrt{2} - 1\right)$ thì $V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{4\left(\sqrt{2}-1\right)}{2\sqrt{2}}.\dfrac{16\left(\sqrt{2}-1\right)^2.\sqrt{3}}{4} = 12\left(10 - 7\sqrt{2}\right)$.

Câu 133. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. $SAB = SCB = 90^o$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **D.** $a^3\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C



Dựng điểm D sao cho $ABCD$ là hình vuông.

Ta có $AB \perp SA, AB \perp AD \Rightarrow AB \perp SD$

$BC \perp SC, BC \perp CD \Rightarrow BC \perp SD$

Suy ra $SD \perp (ABCD)$.

Vì $AD // (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = d(D,(SBC))$.

Kẻ $DH \perp SC \Rightarrow DH \perp (SBC) \Rightarrow d(D,(SBC)) = DH = a\sqrt{2}$.

Đặt $AB = x$.

$$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{DC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{SD^2} = \frac{1}{DH^2} - \frac{1}{DC^2} = \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 2a^2}{2a^2x^2} \Rightarrow SD = \frac{ax\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}.SD.S_{ABC} = \frac{1}{3}\frac{ax\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 - a^2}}.\frac{1}{2}x^2 = \frac{a\sqrt{2}}{6}.\frac{x^3}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ với $x > a$.

$$f'(x) = \frac{2x^4 - 3x^2a^2}{(x^2 - a^2)\sqrt{(x^2 - a^2)}},\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

x	a		$\frac{a\sqrt{6}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	

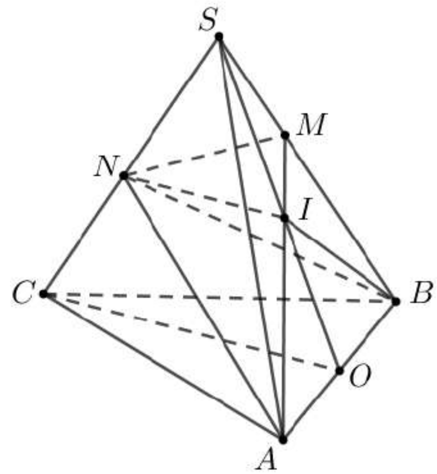
Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{6}.\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 134. Cho hình chóp $S.ABC$, O là trung điểm của AB. Điểm M di động trên cạnh SB. Đặt $\dfrac{SM}{SB} = x$. Mặt phẳng qua A, M song song với OC, cắt SC tại N. Thể tích khối chóp $ABMN$ lớn nhất khi

A. $x = \sqrt{3} - 1$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = 3 - \sqrt{5}$. **D.** $x = -1 + \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Trong mặt phẳng (SAB), gọi I là giao điểm của SO và AM.

Mặt phẳng qua A, M, song song với SO, cắt (SOC) theo giao tuyến là đường thẳng qua I, đường thẳng đó cắt SC tại N.

Áp dụng định lý Menelauyt đối với tam giác SOB và bộ ba điểm thẳng hàng A, I, M ta có $\frac{SM}{MB}\cdot\frac{BA}{AO}\cdot\frac{OI}{IS}=1 \Rightarrow \frac{SI}{OI}=\frac{SM}{MB}\cdot\frac{BA}{AO}=\frac{2x}{1-x} \Rightarrow \frac{SN}{CN}=\frac{2x}{1-x} \Rightarrow \frac{NS}{CS}=\frac{2x}{x+1}$.

Thể tích khối chóp $V_{ABMN}=V_{N.ABM}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABM}\cdot d\left(N,(ABM)\right)$

$=\frac{1}{3}\cdot(1-x)S_{SAB}\cdot\frac{2x}{x+1}d\left(C,(SAB)\right)=(1-x)\frac{2x}{x+1}V_{S.ABC}$

$=\left[-2(x+1)-\frac{4}{x+1}+6\right]V_{S.ABC}\le\left[-2\sqrt{2(x+1)\cdot\frac{4}{x+1}}+6\right]V_{S.ABC}=\left(6-4\sqrt{2}\right)V_{S.ABC}$

Do đó thể tích khối chóp $ABMN$ lớn nhất bằng $\left(6-4\sqrt{2}\right)V_{S.ABC}$ khi

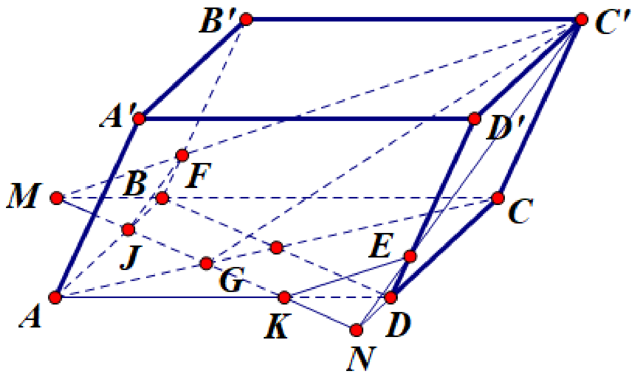
$2(x+1)=\frac{4}{x+1}\Rightarrow x+1=\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}-1$.

Câu 135. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD. Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm C', G và song song với đường thẳng BD, chia khối hộp thành hai phần có thể thể tích V_1, V_2 $(V_1<V_2)$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

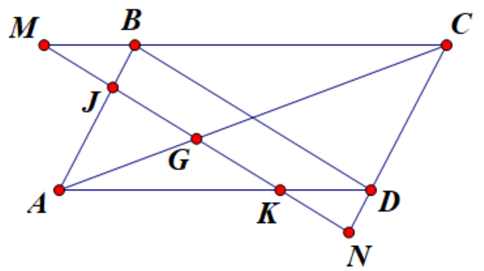
A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{17}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{31}{77}$.

Lời giải

Chọn D



- Gọi V là thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$
- Dựng $\Delta = (P) \cap (ABCD)$, ta có $\Delta // BD$ (do $(P) // BD$. Gọi M, J, K, N lần lượt là giao điểm của Δ với BC, AB, AD, DC và F, E lần lượt là giao điểm của MC' với BB' và NC' với DD'.



- Ta có $\frac{CM}{CB} = \frac{CN}{CD} = \frac{4}{3}$. Suy ra $S_{CMN} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 .S_{CBD} = \frac{16}{9} S_{CBD}$.

Mặt khác $\frac{JB}{JA} = \frac{JM}{JK} = \frac{1}{2}$. Suy ra $S_{JBM} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 .S_{JAK} = \frac{1}{4} S_{JAK}$.

Mà $\frac{AJ}{AB} = \frac{AK}{AD} = \frac{2}{3}$. Suy ra $S_{AJK} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 .S_{ABD} = \frac{4}{9} S_{ABD}$. Suy ra $S_{JBM} = \frac{1}{4}.\frac{4}{9} S_{ABD} = \frac{1}{9} S_{ABD}$.

- Tương tự $S_{NKD} = \frac{1}{9} S_{ABD}$.
- Ta lại có $\frac{d\left(C',(ABCD)\right)}{d\left(F,(ABCD)\right)} = \frac{MC'}{MF} = 4 \Rightarrow h = d\left(C',(ABCD)\right) = 4d\left(F,(ABCD)\right)$.
- Tương tự $h = d\left(C',(ABCD)\right) = 4d\left(E,(ABCD)\right)$
- Thể tích $V_1 = V_{C'.CMN} - V_{F.MBJ} - V_{E.KDN} = \frac{1}{3}.\frac{16}{9} S_{BCD}.h - 2.\frac{1}{3}.\frac{1}{9} S_{BCD}.\frac{1}{4} h = \frac{31}{54} S_{BCD}.h$

$= \frac{31}{108} S_{ABCD}.h = \frac{31}{108} V \Rightarrow V_2 = \frac{77}{108} V$.

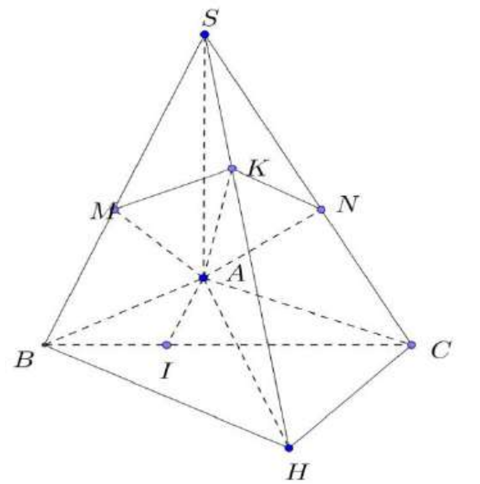
Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{31}{77}$.

Câu 136. Cho khối chóp $S.ABC$. Có $AB = 2, AC = 3$ và $BAC = 120°, SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A trên SB và SC. Biết góc giữa mặt phẳng (ABC) và (AMN) bằng $60°$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\sqrt{57}$. **B.** $3\sqrt{57}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{57}}{3}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{57}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Ttrong mặt phẳng (ABC): Kẻ $HC \perp AC, HB \perp AB$.

$\Rightarrow HB \perp (SAB), HC \perp (SAC)$

$\Rightarrow AM \perp (SBH),\ AN \perp (SCH) \Rightarrow SH \perp (AMN)$

Mà $SA \perp (ABC), ASH < 90°$

$\Rightarrow ((AMN),(ABC)) = (SA,SH) = ASH$

$\Rightarrow ASH = 60°; BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos 120°} = \sqrt{19}$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin 120° = \frac{1}{2}.2.3.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AI = \frac{2S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$$

$$AH = \frac{AB}{\sin BCA} = \frac{AB}{\frac{AI}{AC}} = \frac{AB.AC}{AI} = \frac{2.3}{\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{19}}} = \frac{2\sqrt{19}}{\sqrt{3}}$$

$$SA = \frac{AH}{\tan 60°} = \frac{\frac{2\sqrt{19}}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{19}}{3} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{2\sqrt{19}}{3}.\frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{57}}{3}$$

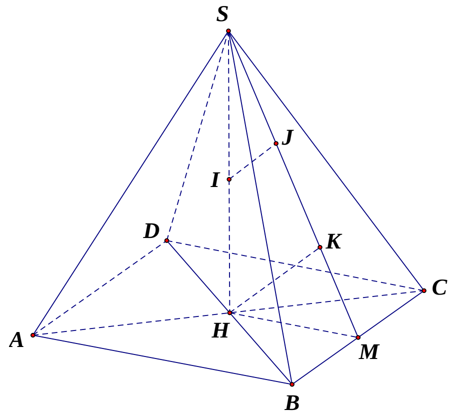
Câu 137. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi SH là chiều cao của hình chóp, khoảng cách từ trung điểm I của SH đến mặt bên (SBC) bằng b. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{ab}{3\sqrt{a^2 - 16b^2}}$. **B.** $V = \dfrac{2a^3b}{3\sqrt{a^2 - 16b^2}}$.

C. $V = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}$. **D.** $V = \dfrac{2ab}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}$.

Lời giải

Chọn B



Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều suy ra H là tâm của hình vuông $ABCD$.
Gọi M là trung điểm BC, K là hình chiếu vuông góc của H lên SM.

Ta có: $\left.\begin{matrix} BC \perp SH \\ BC \perp HM \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SHM)$.

$\Rightarrow (SBC) \perp (SHM)$, mà $HK \perp SM \Rightarrow HK \perp (SBC)$.

Suy ra $HK = 2IJ = 2b$, ta có.

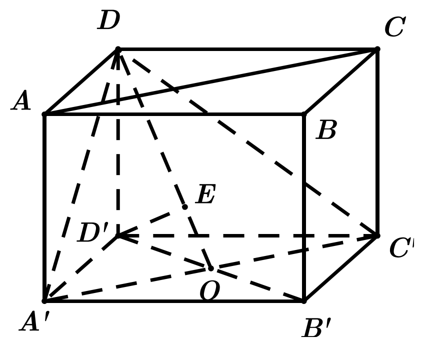
$SH = \sqrt{\dfrac{HK^2.HM^2}{HM^2 - HK^2}} = \dfrac{2ab}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}$. Vậy $V = \dfrac{2a^3b}{3\sqrt{a^2 - 16b^2}}$.

Câu 138. Cho khối lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông; khoảng cách và góc giữa hai đường thẳng AC và DC' lần lượt bằng $\dfrac{3\sqrt{7}a}{7}$ và φ với $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $3a^3$. **B.** $9a^3$. **C.** $3\sqrt{3}a^3$. **D.** $\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Chọn B



- $d(AC, DC') = d(AC, (A'C'D)) = d(A, (A'C'D)) = d(D', (A'C'D)) = \dfrac{3a}{\sqrt{7}}$.
- $\varphi = A'C'D$ với $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.
- Đặt $DD' = x, D'E = \dfrac{3a}{\sqrt{7}}$, ta có $\dfrac{1}{DD'^2} + \dfrac{1}{D'O^2} = \dfrac{1}{D'E^2} = \dfrac{7}{9a^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{D'O^2} = \dfrac{7}{9a^2}$

$\Rightarrow D'O = \dfrac{3ax}{\sqrt{7x^2 - 9a^2}} \Rightarrow DO = \sqrt{\dfrac{9a^2x^2}{7x^2 - 9a^2} + x^2} = \dfrac{x^2.\sqrt{7}}{\sqrt{7x^2 - 9a^2}}$

và $\tan\varphi = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\varphi} - 1} = \sqrt{7}$.

Khi đó $\tan\varphi = \dfrac{DO}{OC'} = \dfrac{x\sqrt{7}}{3a} = \sqrt{7} \Rightarrow x = 3a$.

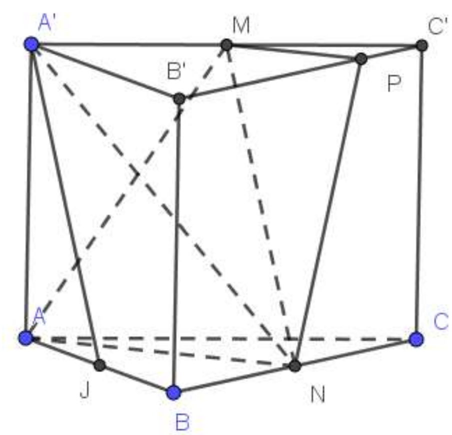
Vì $AA' = 3a$ và $AB = \dfrac{3ax\sqrt{2}}{\sqrt{7x^2 - 9a^2}} = a\sqrt{3}$ nên $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA'.S_{ABCD} = 9a^3$.

Câu 139. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy tam giác vuông cân tại C. $BA = 2a$ và góc tạo bởi (ABC') và (ABC) bằng 60^o. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'C'$ và BC. Mặt (AMN) chia khối lăng trụ thành hai phần. Tìm thể tích phần nhỏ.

A. $\dfrac{7\sqrt{3}a^3}{24}$. **B.** $\dfrac{7\sqrt{6}a^3}{24}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ $MP // A'B'$

Góc tạo bởi (ABC') và (ABC) là góc $C'JC = 60^0$ với J là trung điểm AB.

$CC' = CJ.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}CJ.AB = a^2$

$S_1 = S_{ACN} = \dfrac{1}{2}S_{ABC} = \dfrac{1}{2}a^2$

$S_2 = S_{C'MP} = \dfrac{1}{4}S_{ABC} = \dfrac{1}{2}C'M.C'P = \dfrac{1}{8}a^2$

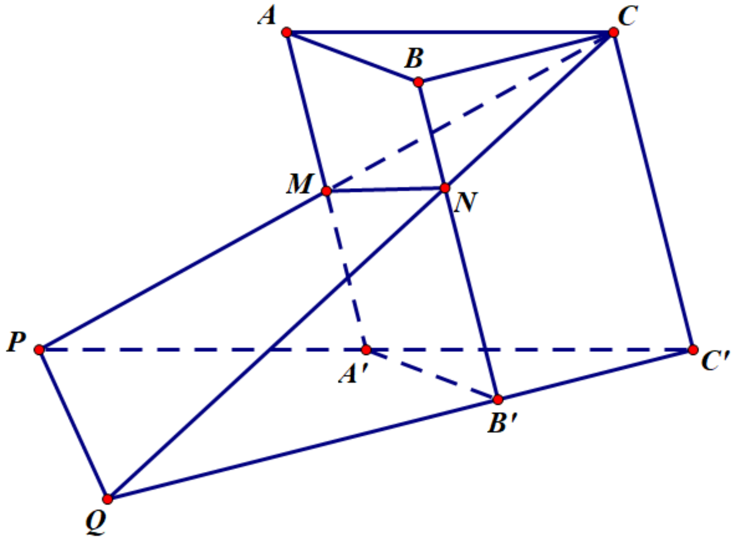
$V = \dfrac{CC'}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right) = \dfrac{7\sqrt{3}a^3}{24}$

Câu 140. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 2. Gọi M, N là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AA', BB' sao cho M là trung điểm của AA' và $BN = \dfrac{1}{2}B'N$. Đường thẳng CM cắt đường thẳng $A'C'$ tại điểm P, đường thẳng CN cắt đường thẳng $A'B'$ tại Q. Tính thể tích của khối đa diện $A'MPB'NQ$ bằng.

A. $\dfrac{13}{18}$. **B.** $\dfrac{23}{9}$. **C.** $\dfrac{21}{9}$. **D.** $\dfrac{7}{18}$.

Lời giải

Chọn B



Đặt $S = S_{\Delta A'B'C'}$ và $h = d(C,(A'B'C'))$ ta có $V_{ABC.A'B'C'} = hS = 2$.

Trong mặt phẳng $\left(AA'C'C\right)$ ta có $\begin{cases} A'M = \frac{1}{2}CC' \\ A'M // CC' \end{cases}$ nên ta có A' là trung điểm của PC'.

Tương tự trong mặt mặt phẳng $\left(BCC'B'\right)$ ta có $C'B' = \frac{1}{3}C'Q$.

Từ đây ta có diện tích tam giác $C'PQ$ là $S_{\Delta C'PQ} = 6S$ do vậy thể tích khối tứ diện $CC'PQ$ là $V_{CC'PQ} = \frac{1}{3}h.6S = 2hS = 4$.

Trong khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ ta có $\frac{V_{CABMN}}{V_{CAB.C'A'B'}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 0}{3} = \frac{5}{18}$ suy ra

$V_{CABMN} = \frac{5}{18}.V_{CAB.C'A'B'} = \frac{5}{9}$ do đó thể tích khối $A'B'C'MNC$ bằng $2 - \frac{5}{9} = \frac{13}{9}$.

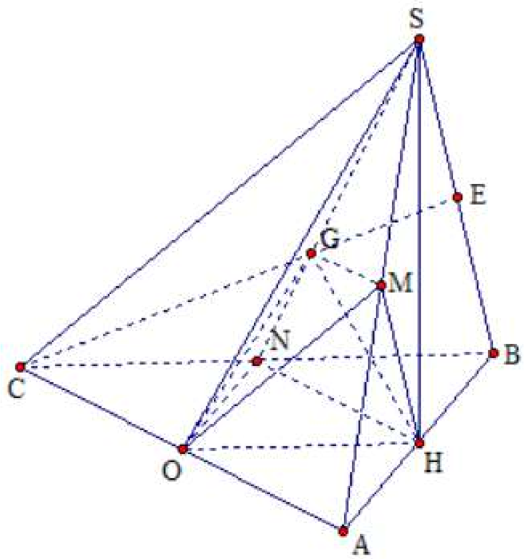
Do vậy thể tích của khối đa diện $A'MPB'NQ$ bằng $4 - \frac{13}{9} = \frac{23}{9}$.

Câu 141. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H,M,O lần lượt là trung điểm các cạnh AB, SA, AC và G là trọng tâm tam giác SBC. Thể tích khối tứ diện $GHMO$ bằng

A. $\frac{3a^3}{64}$. **B.** $\frac{3a^3}{128}$. **C.** $\frac{a^3}{128}$. **D.** $\frac{a^3}{64}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi N, E lần lượt là trung điểm của CB và SB.

Ta có: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{8}$.

+) $S_{OAHN} = \frac{1}{2}S_{\Delta ABC} \Rightarrow V_{S.OAHN} = \frac{1}{2}V_{S.ABC} = \frac{a^3}{16}$, $V_{S.AHN} = V_{S.OAN} = \frac{1}{2}V_{S.AHNO} = \frac{a^3}{32}$.

+) $\frac{V_{S.GMH}}{V_{S.NAH}} = \frac{SG}{SN}.\frac{SM}{SA}.\frac{SH}{SH} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.GMH} = \frac{1}{3}V_{S.NAH} = \frac{a^3}{96}$.

+) $\frac{V_{S.GMO}}{V_{S.NAO}} = \frac{SG}{SN}.\frac{SM}{SA}.\frac{SO}{SO} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.GMH} = \frac{1}{3}V_{S.OAH} = \frac{a^3}{96}$.

+) $V_{G.ONH} = \frac{1}{3}d\left(G;\left(ABC\right)\right).S_{\Delta ONH} = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}SH.\frac{1}{4}S_{\Delta ABC} = \frac{1}{12}.\frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{12}V_{S.ABC} = \frac{a^3}{96}$.

+) $V_{M.OAH} = \frac{1}{3}d\left(M;\left(ABC\right)\right).S_{\Delta OAH} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}SH.\frac{1}{4}S_{\Delta ABC} = \frac{1}{8}.\frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{8}V_{S.ABC} = \frac{a^3}{64}$.

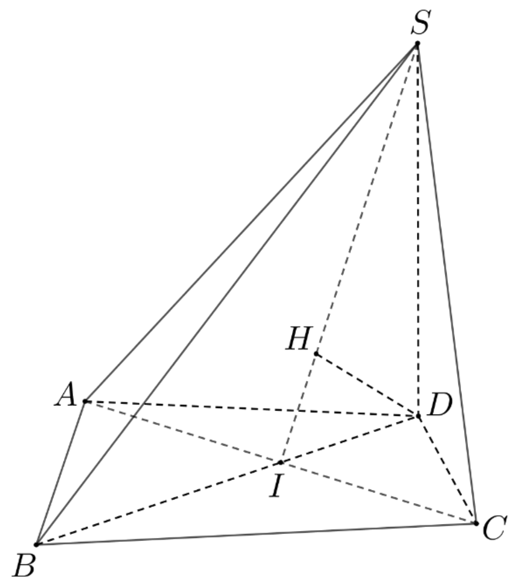
Vậy $V_{GMOHN} = V_{S.HNO} - V_{S.GMH} - V_{S.GMO} - V_{G.HNO} - V_{G.HAO} = \frac{a^3}{16} - 3.\frac{a^3}{96} - \frac{a^3}{64} = \frac{a^3}{64}$.

Câu 142. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = BC = a$, góc $ABC = 120°$, $SAB = SCB = 90°$ và khoảng cách từ B đến mặt phẳng $\left(SAC\right)$ bằng $\frac{2a}{\sqrt{21}}$. Tính thể tích khối $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{10}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{10}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{5}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi D là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$.

Có $\begin{cases} BC \perp SC \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp CD$.

Có $\begin{cases} AB \perp SD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp AD$.

Gọi I là giao điểm của BD và AC (BD là đường phân giác của góc ABC)

$BD = \dfrac{BC}{\cos 60°} = 2a$; $BI = BC \cdot \cos 60° = \dfrac{a}{2}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên SI.

$\begin{cases} \left(SAC\right) \perp \left(SBC\right) \\ \left(SAC\right) \cap \left(SBC\right) = SI \\ DH \perp SI \end{cases} \Rightarrow DH \perp \left(SAC\right)$ hay $DH = d\left(D;\left(SAC\right)\right)$

Ta có: $d\left(D;\left(SAC\right)\right) = \dfrac{DI}{BI} \cdot d\left(B;\left(SAC\right)\right) = 3 \cdot \dfrac{2a}{\sqrt{21}} = \dfrac{6a}{\sqrt{21}} = DH$.

Suy ra: $SD = \dfrac{DI \cdot DH}{\sqrt{DI^2 - DH^2}} = \dfrac{\dfrac{3a}{2} \cdot \dfrac{6a}{\sqrt{21}}}{\sqrt{\dfrac{9a^2}{4} - \dfrac{12a^2}{7}}} = \dfrac{6a\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} SD \cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{6a\sqrt{5}}{5} \cdot \dfrac{1}{2} a \cdot a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{10}$.

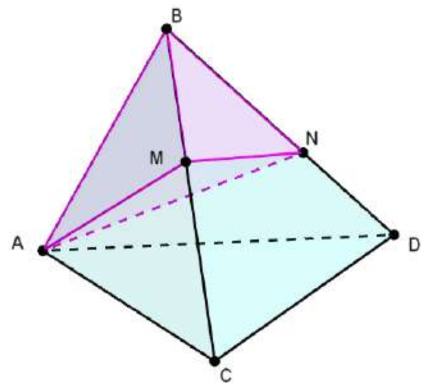
Câu 143. Cho tứ diện $ABCD$. Hai điểm M, N lần lượt di động trên hai đoạn thẳng BC và BD sao cho $2.\dfrac{BC}{BM} + 3.\dfrac{BD}{BN} = 10$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của các khối tứ diện $ABMN$ và $ABCD$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{3}{8}$. **B.** $\dfrac{2}{7}$. **C.** $\dfrac{6}{25}$. **D.** $\dfrac{5}{8}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1



• Vì $M \in BC$, $N \in BD$ nên ta đặt $\dfrac{BD}{BN} = a$ $(a > 1)$.

Suy ra $1 < \dfrac{BC}{BM} = \dfrac{10 - 3a}{2} = 5 - \dfrac{3}{2}a \Rightarrow 1 < a < \dfrac{8}{3}$.

• $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{V_{ABMN}}{V_{ABCD}} = \dfrac{BM}{BC} \cdot \dfrac{BN}{BD} = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{5 - \dfrac{3}{2}a} = \dfrac{1}{5a - \dfrac{3}{2}a^2}$.

• $\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)_{\min} \Leftrightarrow \left(5a - \dfrac{3}{2}a^2\right)_{max}$. Tìm $\max\limits_{\left(1;\frac{8}{3}\right)} \left(5a - \dfrac{3}{2}a^2\right)$.

• Xét hàm số $f(a) = 5a - \dfrac{3}{2}a^2, a \in \left(1; \dfrac{8}{3}\right)$; $f'(a) = 5 - 3a$; $f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{5}{3}$.

a	$-\infty$	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{3}$	$+\infty$
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		$\nearrow$	$\frac{25}{6}$	$\searrow$	

• Suy ra $\max\limits_{\left(1;\frac{8}{3}\right)} f(a) = \dfrac{25}{6}$.

• Vậy $\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)_{\min} = \dfrac{6}{25}$.

Cách 2

• $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{V_{ABMN}}{V_{ABCD}} = \dfrac{S_{BMN}}{S_{BCD}} = \dfrac{\frac{1}{2}.BM.BN.\sin B}{\frac{1}{2}.BC.BD.\sin B} = \dfrac{BM.BN}{BC.BD}$.

• $\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)_{\min} \Leftrightarrow \left(\dfrac{BM.BN}{BC.BD}\right)_{\min} \Leftrightarrow \left(\dfrac{BC.BD}{BM.BN}\right)_{max}$.

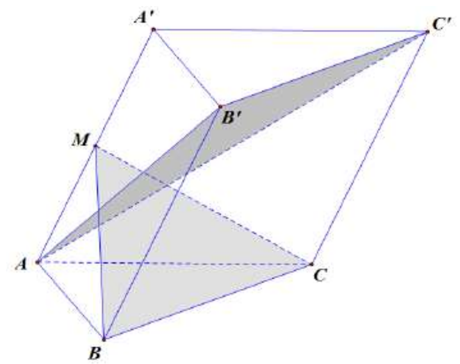
• Theo giả thiết; $10 = \dfrac{2.BC}{BM} + \dfrac{3.BD}{BN} \geq 2.\sqrt{\dfrac{2.BC}{BM} \cdot \dfrac{3.BD}{BN}} = 2.\sqrt{6.\dfrac{BC}{BM} \cdot \dfrac{BD}{BN}}$.

$\Rightarrow 5 \geq \sqrt{6.\dfrac{BC.BD}{BM.BN}} \Leftrightarrow \dfrac{BC.BD}{BM.BN} \leq \dfrac{25}{6}$.

• Do đó $\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)_{\min} = \dfrac{6}{25}$.

• Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2.BC}{BM} = \dfrac{3.BD}{BN} \\ 2.\dfrac{BC}{BM} + 3.\dfrac{BD}{BN} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BM = \dfrac{2}{5}.BC \\ BN = \dfrac{3}{5}.BD \end{cases}$.

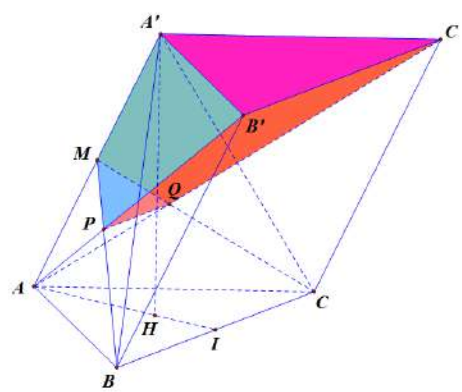
Câu 144. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2, $A'A = A'B = A'C = 2$, M là trung điểm của AA'. Tính thể tích phần chung của 2 khối đa diện $A'M.BCC'B'$ và $A.A'B'C'$.



A. $\dfrac{17\sqrt{2}}{27}$. **B.** $\dfrac{17\sqrt{3}}{18}$. **C.** $\dfrac{17\sqrt{3}}{27}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



• Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC). Vì $A'A = A'B = A'C$ nên H trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cũng là trọng tâm tam giác ABC. Gọi I là trung điểm BC.

• Ta có:

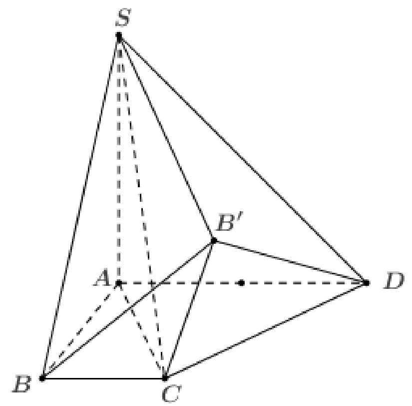
$AI = \sqrt{3} \Rightarrow AH = \dfrac{2}{3}AI = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{4 - \dfrac{12}{9}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$;

$V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{ABC} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}.\sqrt{3} = 2\sqrt{2}$; $V_{A.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$;

• Gọi $P = AB' \cap BM$; $Q = AC' \cap CM$. Khi đó phần chung của 2 khối đa diện $A'M.BCC'B'$ và $A.A'B'C'$ là khối đa diện $MPQ.A'B'C'$.

◆ Ta có: $\frac{V_{A.MPQ}}{V_{A.A'B'C'}}=\frac{AM}{AA'}.\frac{AP}{AB'}.\frac{AQ}{AC'}=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{18}\Rightarrow V_{MPQ.A'B'C'}=\frac{17}{18}V_{A.A'B'C'}=\frac{17}{18}.\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{17\sqrt{2}}{27}$.

Câu 145. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB=BC=a$, $AD=2a$, SA vuông góc với đáy, $SA=a\sqrt{2}$. Gọi B' là điểm đối xứng của B qua mặt phẳng (SCD). Tính thể tích khối đa diện $SB'.ABCD$ bằng



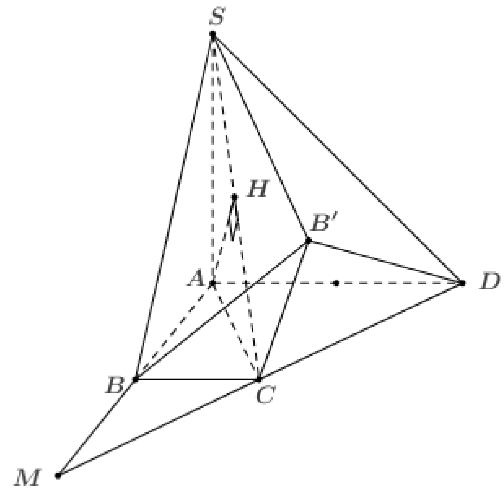
A. $\frac{5\sqrt{2}a^3}{6}$. **B.** $\frac{7\sqrt{2}a^3}{3}$. **C.** $\sqrt{2}a^3$. **D.** $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $V_{SB'.ABCD}=V_{S.ABCD}+V_{B'SCD}=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}+\frac{1}{3}S_{SCD}.d\left(B',(SCD)\right)$

$=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}+\frac{1}{3}S_{SCD}.d\left(B,(SCD)\right)$ (vì B' là điểm đối xứng của B qua mặt phẳng (SCD))



+ $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.a\sqrt{2}.\frac{(a+2a)a}{2}=\frac{a^3}{\sqrt{2}}$

+ Gọi M là giao điểm của AB và CD, dễ dàng chứng minh được B là trung điểm của MA

$\Rightarrow d\left(B,(SCD)\right)=\frac{1}{2}d\left(A,(SCD)\right)=\frac{1}{2}AH$

Lại có tam giác SAC vuông cân tại A (vì $SA=AC=a\sqrt{2}$)

$\Rightarrow d\left(B,(SCD)\right)=\frac{1}{2}d\left(A,(SCD)\right)=\frac{1}{2}AH=\frac{1}{4}SC=\frac{1}{4}.2a=\frac{a}{2}$

$$\Rightarrow V_{B'.SCD}=\frac{1}{3}.S_{SCD}.d\left(B',(SCD)\right)=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.SC.CD.\frac{a}{2}=\frac{1}{6}.2a.a\sqrt{2}.\frac{a}{2}=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}=\frac{a^3}{3\sqrt{2}}$$

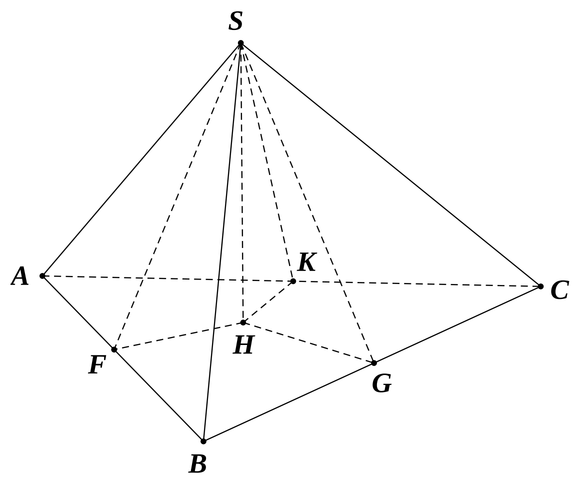
$$V_{SB'.ABCD}=V_{S.ABCD}+V_{B'SCD}=\frac{a^3}{\sqrt{2}}+\frac{a^3}{3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}.$$

Câu 146. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{\sqrt{6}}{4}$, khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCA) bằng $\frac{\sqrt{15}}{10}$, khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{\sqrt{30}}{20}$ và hình chiếu vuông góc của S xuống đáy nằm trong tam giác ABC. Tính thể tích khối chóp $V_{S.ABC}$.

A. $\frac{1}{24}$. **B.** $\frac{1}{12}$. **C.** $\frac{1}{36}$. **D.** $\frac{1}{48}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu của S trên (ABC). F,G,K lần lượt là hình chiếu của H trên AB,BC,CA.

Đặt $V=V_{S.ABC};h=SH$

Ta có $3V=h.S_{\Delta ABC}=d\left(A,(SBC)\right).S_{\Delta SBC}=d\left(B,(SAC)\right).S_{\Delta SAC}=d\left(C,(SAB)\right).S_{\Delta SAB}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}h=\frac{\sqrt{6}}{4}.\frac{1}{2}.SF=\frac{\sqrt{15}}{10}.\frac{1}{2}.SG=\frac{\sqrt{30}}{20}.\frac{1}{2}.SK$$

$$\Rightarrow SF=h\sqrt{2};SG=h\sqrt{5};SK=h\sqrt{10}\Rightarrow HF=h;HG=2h;HK=3h.$$

Mặt khác $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta HAB}+S_{\Delta HBC}+S_{\Delta HCA}\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}HF+\frac{1}{2}HG+\frac{1}{2}HK\Leftrightarrow h=\frac{\sqrt{3}}{12}$.

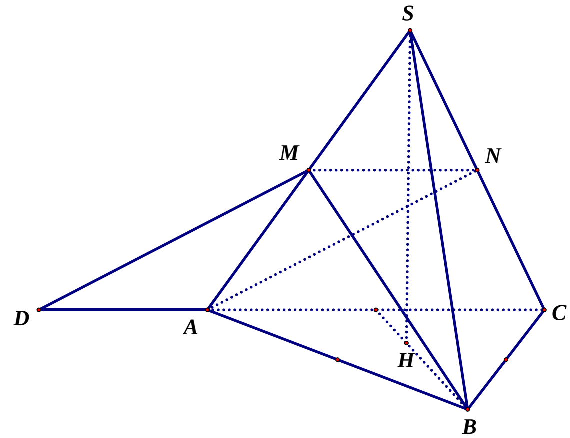
Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{12}.\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{48}$.

Câu 147. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, cạnh đáy bằng a. Các điểm M,N lần lượt là trung điểm của SA,SC. Biết rằng BM vuông góc với AN. Thể tích của khối chóp bằng

A. $\frac{\sqrt{7}}{24}a^3$. **B.** $\frac{\sqrt{7}}{8}a^3$. **C.** $\frac{\sqrt{14}}{8}a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{14}}{24}a^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi D sao cho $MNAD$ là hình bình hành. BM vuông góc với AN nên tam giác DMB vuông cân tại M. Suy ra: $BM=\frac{BD}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{a^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}{\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{14}}{4}$.

Gọi cạnh $SA=x,\ x>0$. BM là đường trung tuyến tam giác SAB nên ta có:

$$BM^2=\frac{2\left(BA^2+BS^2\right)-SA^2}{4}\Leftrightarrow\left(\frac{a\sqrt{14}}{4}\right)^2=\frac{2\left(a^2+x^2\right)-x^2}{4}\Leftrightarrow x=\frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

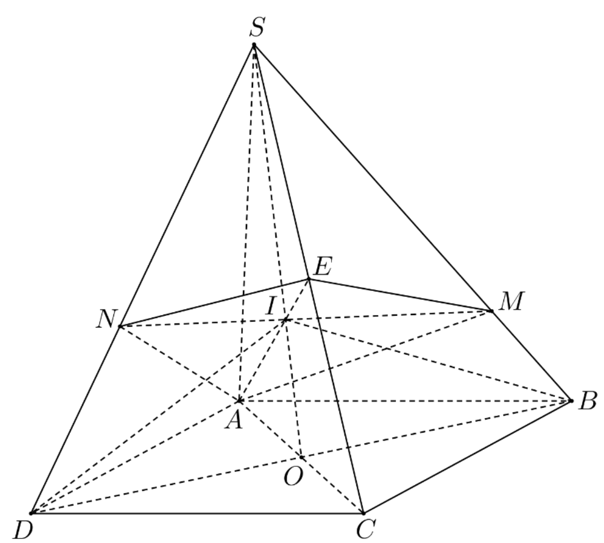
$SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\frac{a\sqrt{42}}{6}$. Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{42}}{6}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{14}}{24}$.

Câu 148. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, có thể tích bằng $24\,\text{cm}^3$. Gọi E là trung điểm SC. Một mặt phẳng chứa AE cắt các cạnh SB và SD lần lượt tại M và N. Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.AMEN$.

A. $9\,\text{cm}^3$. **B.** $8\,\text{cm}^3$. **C.** $6\,\text{cm}^3$. **D.** $7\,\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn B



Mặt đáy $(ABCD)$ là hình bình hành $\Rightarrow\Delta ADC$ và ΔABC có cùng diện tích

$\Rightarrow V_{S.ADC}=V_{S.ABC}$ (hai khối chóp có cùng chiều cao và có diện tích mặt đáy bằng nhau).

Mà $V_{S.ABCD}=V_{S.ADC}+V_{S.ABC}=24\,\text{cm}^3 \Rightarrow V_{S.ADC}=V_{S.ABC}=\dfrac{V_{S.ABCD}}{2}=\dfrac{24}{2}=12\ (\text{cm}^3)$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD; I là giao điểm của SO và AE $\Rightarrow I$ là trọng tâm của ΔSAC và I thuộc MN. Gọi $\dfrac{SM}{SB}=a$ và $\dfrac{SN}{SD}=b$ $(a>0;\ b>0)$.

Ta có: $\dfrac{V_{S.ANE}}{V_{S.ADC}}=\dfrac{SA}{SA}\cdot\dfrac{SN}{SD}\cdot\dfrac{SE}{SC}=1\cdot b\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{b}{2}$ và $\dfrac{V_{S.AME}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SA}{SA}\cdot\dfrac{SM}{SB}\cdot\dfrac{SE}{SC}=1\cdot a\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{V_{S.ANE}}{12}=\dfrac{b}{2}$ và $\dfrac{V_{S.AME}}{12}=\dfrac{a}{2}$ $\Rightarrow V_{S.ANE}=6b\ (\text{cm}^3)$ và $V_{S.AME}=6a\ (\text{cm}^3)$.

Do đó: $V_{S.AMEN}=V_{S.AME}+V_{S.ANE}=6a+6b=6(a+b)\ (\text{cm}^3)$.

Mặt khác: ΔISM và ΔISB có chung chiều cao kẻ từ I và có đáy $\dfrac{SM}{SB}=a \Rightarrow a=\dfrac{S_{ISM}}{S_{ISB}}$.

Mà I là trọng tâm của $\Delta SAC \Rightarrow \dfrac{SI}{SO}=\dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{S_{ISB}}{S_{SOB}}=\dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{S_{ISM}}{S_{SOB}}=\dfrac{2a}{3}$.

Chứng minh tương tự ta có: $\dfrac{S_{ISN}}{S_{SOD}}=\dfrac{2b}{3}$.

O là trung điểm của $DB \Rightarrow S_{SOB}=S_{SOD}=\dfrac{S_{SDB}}{2}$ hay $S_{SDB}=2S_{SOB}=2S_{SOD}$

$$\Rightarrow \frac{2a}{3}+\frac{2b}{3}=\frac{S_{ISM}}{S_{SOB}}+\frac{S_{ISN}}{S_{SOD}}=\frac{2S_{ISM}}{2S_{SOB}}+\frac{2S_{ISN}}{2S_{SOD}}=\frac{2\left(S_{ISM}+S_{ISN}\right)}{S_{SDB}}=\frac{2S_{SNM}}{S_{SDB}}$$

$$\Rightarrow a+b=\frac{3S_{SNM}}{S_{SDB}}=\frac{3SN\cdot SM\cdot\sin MSN}{SD\cdot SB\cdot\sin BSD}=3\cdot\frac{SN}{SD}\cdot\frac{SM}{SB}=3ab.$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có: $ab\le\dfrac{(a+b)^2}{4} \Rightarrow a+b=3ab\le\dfrac{3(a+b)^2}{4}$

$\Rightarrow 3(a+b)\ge 4$ (do $a+b>0$) $\Rightarrow a+b\ge\dfrac{4}{3} \Rightarrow 6(a+b)\ge 8$ hay $V_{S.AMEN}\ge 8\ (\text{cm}^3)$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{SM}{SB}=\dfrac{SN}{SD}=\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow MN$ đi qua I và $MN \parallel BD$.

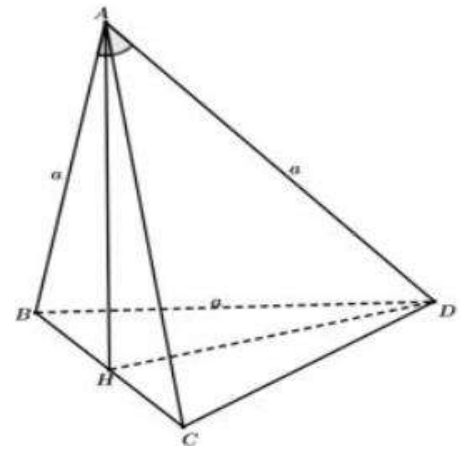
Vậy giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.AMEN$ là $8\,\text{cm}^3$.

Câu 149. Tứ diện $ABCD$ có $AB=AC=AD=a, BAC=120^0, BAD=60^0$ và tam giác BCD là tam giác vuông tại D. Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu của A lên (BCD).

Dễ thấy, $\Delta AHB = \Delta AHC = \Delta AHD \Rightarrow HB = HC = HD$.

Do đó, H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD $\Rightarrow H$ là trung điểm của BC.

Xét tam giác ABC, có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos BAC = a^2 + a^2 - 2a.a.\cos 120^\circ = 3a^2$.

$\Rightarrow BC = a\sqrt{3} \Rightarrow BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét ΔAHB vuông tại H, có $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{a}{2}$.

Xét ΔBDC vuông tại D, có $CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

Xét ΔABD, có $AB = AD = a$ và $BAD = 60^\circ \Rightarrow \Delta ABD$ là tam giác đều cạnh $a \Rightarrow BD = a$.

$\Rightarrow S_{\Delta BDC} = \dfrac{1}{2}.a.a\sqrt{2} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$ (đvdt).

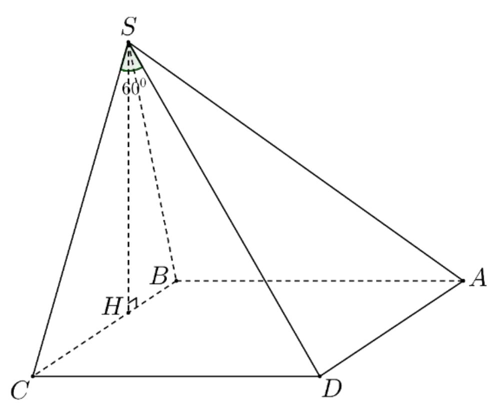
Vậy $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}AH.S_{\Delta BCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$ (đvtt).

Câu 150. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $3a$, tam giác SBC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, đường thẳng SD tạo với mặt phẳng (SBC) một góc $60°$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $2a^3\sqrt{6}$. **B.** $a^3\sqrt{6}$. **C.** $3a^3\sqrt{2}$. **D.** $a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Kẻ $SH \perp BH, H \in BC$.

Ta có $\begin{cases}(SBC)\perp(ABCD)\\(SBC)\cap(ABCD)=BC\Rightarrow SH\perp(ABCD).\\SH\perp BC\end{cases}$

Mà $\begin{cases}CD\perp BC\\CD\perp SH\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SBC)$ và $SD\cap(SBC)=\{S\}$.

Suy ra SC là hình chiếu của SD lên (SBC).

Khi đó $(SD,(SBC))=(SD,SC)=CSD=60°$.

Tam giác SCD vuông tại C có $SC=\dfrac{CD}{\tan 60°}=\dfrac{3a}{\sqrt{3}}=a\sqrt{3}$.

Tam giác SBC vuông tại S có $SB=\sqrt{BC^2-SC^2}=a\sqrt{6}$.

Mà $SH=\dfrac{SB.SC}{BC}=\dfrac{a\sqrt{6}.a\sqrt{3}}{3a}=a\sqrt{2}$.

Vậy thể tích của khối chóp đã cho là $V=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.a\sqrt{2}.(3a)^2=3a^3\sqrt{2}$ (đvtt).

------------------ HẾT ------------------

IV. BẢNG ĐÁP ÁN THAM KHẢO.

BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	D	A	A	B	C	D	B	D	C
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	D	B	C	A	D	B	A	C	B
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
C	A	C	D	A	B	A	C	A	A
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
D	A	B	B	B	A	B	D	B	B
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	C	B	C	B	A	C	D	D	B
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
B	D	B	C	A	B	C	C	D	A
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
B	C	A	A	B	B	C	C	C	A
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
C	D	D	D	A	C	B	B	B	A
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
D	B	A	B	C	D	C	A	C	B
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
D	B	B	D	B	A	C	B	D	A
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
B	A	A	B	D	B	D	B	C	A
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
D	A	A	B	B	C	B	A	B	D
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
D	B	B	B	B	B	C	D	A	A
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
B	A	C	D	D	C	B	B	A	B
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
D	B	C	A	D	D	D	B	D	C