TỦ SÁCH LUYỆN THI

TOÀN CẢNH ĐỀ TOÁN TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN TRÊN TOÀN QUỐC

TOÁN 10 CHUYÊN

NĂM 2019-2020

TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

TOÀN CẢNH ĐỀ TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CÁC TRƯỜNG CHUYÊN TRÊN TOÀN QUỐC

NĂM HỌC 2019-2020

Mục lục

Chuyên đề 1 Căn bậc hai và bài toán liên quan

Câu 1. (Trường chuyên tỉnh Bình Thuận năm 2019-2020) Cho biểu thức

$$P=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}-\frac{\sqrt{x}+1}{5-\sqrt{x}}-\frac{5-9\sqrt{x}}{x-25} \text{ với } x\ge 0, x\ne 25.$$

a) Rút gọn biểu thức P.
b) Tìm tất cả các giá trị của x để $P<1$.

Lời giải

a) $P=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}-\frac{\sqrt{x}+1}{5-\sqrt{x}}-\frac{5-9\sqrt{x}}{x-25}=\frac{\sqrt{x}\left(5-\sqrt{x}\right)-\left(\sqrt{x}+1\right)\left(5+\sqrt{x}\right)+\left(5-9\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(5-\sqrt{x}\right)}$

$=\frac{\left(5\sqrt{x}-x\right)-\left(x+6\sqrt{x}+5\right)+\left(5-9\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(5-\sqrt{x}\right)}=\frac{-2x-10\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(5-\sqrt{x}\right)}=\frac{-2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+5\right)}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(5-\sqrt{x}\right)}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5}$

b) $P<1\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5}<1\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5}-1<0\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-\left(\sqrt{x}-5\right)}{\sqrt{x}-5}<0\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-5}<0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}-5<0\Leftrightarrow \sqrt{x}<5\Leftrightarrow 0\le x<25$

Vậy $0\le x<25$

Câu 2. (Trường chuyên tỉnh Bình Định vòng 2 năm 2019-2020) Rút gọn biểu thức:

$$A=\frac{\sqrt{2}\left(3+\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}+\frac{\sqrt{2}\left(3-\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}.$$

Lời giải

• $\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)=8-2\sqrt{6-2\sqrt{5}}+2\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{9-5}$

$=8-2\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}+2\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}-2=6-2\sqrt{5}+2+2\sqrt{5}+2=10.$

• $\sqrt{2}\left(3+\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)=4\left(3+\sqrt{5}\right)-\left(3+\sqrt{5}\right)\sqrt{6-2\sqrt{5}}=4\left(3+\sqrt{5}\right)-\left(3+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)$

$=12+4\sqrt{5}-2\sqrt{5}-2=10+2\sqrt{5}.$

• $\sqrt{2}\left(3-\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)=4\left(3-\sqrt{5}\right)+\left(3-\sqrt{5}\right)\sqrt{6+2\sqrt{5}}=4\left(3-\sqrt{5}\right)+\left(3-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+1\right)$

$=12-4\sqrt{5}+2\sqrt{5}-2=10-2\sqrt{5}.$

Do đó:

$$A=\frac{\sqrt{2}\left(3+\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)+\sqrt{2}\left(3-\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)}{\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)}=\frac{10+2\sqrt{5}+10-2\sqrt{5}}{10}=\frac{20}{10}=2.$$

Vậy $A=2$.

Cách khác:

Ta có:● $\dfrac{\sqrt{2}\left(3+\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}=\dfrac{6+2\sqrt{5}}{4+\sqrt{6+2\sqrt{5}}}=\dfrac{6+2\sqrt{5}}{4+\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}}=\dfrac{6+2\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}=2-\dfrac{4}{5+\sqrt{5}}$

● $\dfrac{\sqrt{2}\left(3-\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}=\dfrac{6-2\sqrt{5}}{4-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}=\dfrac{6-2\sqrt{5}}{4-\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}=\dfrac{6-2\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}=2-\dfrac{4}{5-\sqrt{5}}$

Do đó: $A=4-\left(\dfrac{4}{5+\sqrt{5}}+\dfrac{4}{5-\sqrt{5}}\right)=4-\dfrac{20-4\sqrt{5}+20+4\sqrt{5}}{25-5}=4-\dfrac{40}{20}=2$.

Vậy $A=2$.

Câu 3. (Trường chuyên tỉnh Bạc Liêu năm 2019-2020) Rút gọn biểu thức:

$$B=\left(13-4\sqrt{3}\right)\left(7+4\sqrt{3}\right)-8\sqrt{20+2\sqrt{43+24\sqrt{3}}}\ .$$

Lời giải

$B=\left(13-4\sqrt{3}\right)\left(7+4\sqrt{3}\right)-8\sqrt{20+2\sqrt{43+24\sqrt{3}}}$

$=91+52\sqrt{3}-28\sqrt{3}-48-8\sqrt{\left(\sqrt{13-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^2}$

$=43+24\sqrt{3}-8\left(\sqrt{13-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)$

$=43+24\sqrt{3}-8\left(\sqrt{\left(2\sqrt{3}-1\right)^2}+\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}\right)$

$=43+24\sqrt{3}-8\left(2\sqrt{3}-1+2+\sqrt{3}\right)$

$=35$

Câu 4. (Trường chuyên tỉnh Bắc Giang chuyên toán năm 2019-2020)

Cho x,y là các số thực dương và $P=\sqrt{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^2y}}+\sqrt{y+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{y^2x}}+\sqrt{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+1}$.

Chứng minh rằng $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+1=\sqrt[3]{P^2}$.

Lời giải

Đặt $a=\sqrt[3]{x};\ b=\sqrt[3]{y}\ (a,b>0)$, ta có

$$P=\sqrt{a^3+a^2+a^2b}+\sqrt{b^3+b^2+ab^2}+\sqrt{a+b+1}$$
$$=(a+b+1)\sqrt{a+b+1}$$.

$\sqrt[3]{P^2}=a+b+1=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+1$..

Câu 5. (Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh vòng 2 năm 2019-2020) Tính giá trị của biểu thức

$$A=\frac{x^4-2x^3+3x^2-38x+5}{\sqrt{x^2-4x+5}} \text{ khi } x=2+\sqrt{3}.$$

Lời giải

Ta có $x-2=\sqrt{3}\Rightarrow (x-2)^2=3\Rightarrow x^2-4x+1=0$.

$\sqrt{x^2-4x+5}=\sqrt{x^2-4x+1+4}=2$..

$x^4-2x^3+3x^2-38x+5$

$=(x^4-4x^3+x^2)+(2x^3-8x^2+2x)+(10x^2-40x+10)-5=-5\Rightarrow A=\frac{-5}{2}$.
.

Câu 6. (Trường chuyên tỉnh Bến Tre vòng 2 năm 2019-2020) Tính giá trị của biểu thức:

$$A=\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}-\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}.$$

Lời giải

Câu 7. (Trường chuyên tỉnh Cao Bằng vòng 2 năm 2019-2020)

Cho biểu thức $P=\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}\right):\left(1-\frac{2\sqrt{x}}{x+1}\right)$ với $x\ge 0,\ x\ne 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.
b) Tìm tất các giá trị của x để $P\ge 1$.

Lời giải

a).

Biến đổi được

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}=\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+1)}$$

Biến đổi được

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+1)}=\frac{x+1-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+1)}$$

$$1-\frac{2\sqrt{x}}{x+1}=\frac{x+1-2\sqrt{x}}{x+1}$$

$$P=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

b).

$$P\ge 1\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-1}\ge 1\Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\ge 0$$

TH1: $\begin{cases}2-\sqrt{x}\ge 0\\ \sqrt{x}-1>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}\le 2\\ \sqrt{x}>1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 4\\ x>1\end{cases}\Leftrightarrow 1<x\le 4$

TH2: $\begin{cases}2-\sqrt{x}\le 0\\ \sqrt{x}-1<0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}\ge 2\\ \sqrt{x}<1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 4\\ x<1\end{cases}$ (không xảy ra).

Vậy các giá trị x cần tìm là $1<x\le 4$.

Câu 8. (Trường chuyên tỉnh Cần thơ chuyên toán năm 2019-2020)

Cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}}+\sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}}.\left(1-\dfrac{1}{x-1}\right)$ trong đó $x>1, x\ne 2$.

a)Rút gọn biểu thức A

b)Tìm các giá trị nguyên của x để giá trị biểu thức A là số nguyên.

Lời giải

a)

$$A=\frac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}}+\sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}}.\left(1-\frac{1}{x-1}\right)$$

$$A=\frac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x^2-4x+4}}.\left(\frac{x-2}{x-1}\right)$$

$$A=\frac{\left|\sqrt{x-1}-1\right|+1+\sqrt{x-1}}{|x-2|}.\left(\frac{x-2}{x-1}\right)$$

Nếu $1<x<2$ thì $A=\dfrac{2}{1-x}$

Nếu $x>2$ thì $A=\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$

b)

- Nếu $1<x<2$ thì không có giá trị nguyên.
- Nếu $x>2$ thì $A=\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$

+ $\sqrt{x-1}=1\Leftrightarrow x=2\quad (l)$

+ $\sqrt{x-1}=2\Leftrightarrow x=5\quad (n)$

Câu 9. (Trường chuyên tỉnh DAK NONG vòng 2 năm 2019-2020) Cho biểu thức

$$P=\left(\frac{1}{a-1}+\frac{3\sqrt{a}+5}{a\sqrt{a}-a-\sqrt{a}+1}\right).\left(\frac{(\sqrt{a}+1)^2}{4\sqrt{a}}-1\right).$$

Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P.

Lời giải

$$P=\left(\frac{1}{a-1}+\frac{3\sqrt{a}+5}{(a-1)\left(\sqrt{a}-1\right)}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{a}-1\right)^2}{4\sqrt{a}}$$

Điều kiện: $a>0, a\neq 1$.

$$=\frac{4\left(\sqrt{a}+1\right)}{(a-1)\left(\sqrt{a}-1\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{a}-1\right)^2}{4\sqrt{a}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Câu 10. (Trường chuyên tỉnh Gia lai chuyên tin năm 2019-2020) Rút gọn biểu thức

$$P=\frac{3x+\sqrt{16x}-7}{x+2\sqrt{x}-3}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}-\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}\ (x\geq 0, x\neq 1).$$

Câu 11. (Trường chuyên tỉnh Gia Lai không chuyên năm 2019-2020)

Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{a-4}{\sqrt{a}+2}:\dfrac{a-4\sqrt{a}+4}{2\sqrt{a}-4}$, với $a\geq 0, a\neq 4$.

Câu 12. (Trường chuyên tỉnh Gia lai vòng 2 năm 2019-2020) Rút gọn biểu thức

$$A=\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}.$$

Lời giải

$$A=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}+\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

$$=\sqrt{3}+1+\sqrt{5}-1+\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

$$=\sqrt{3}+\sqrt{5}+\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2}$$

$$=2\sqrt{5}$$

Câu 13. (Trường chuyên tỉnh Hà Giang vòng 1 năm 2019-2020) Cho biểu thức

$$M=\left(\frac{3\sqrt{x}}{x+\sqrt{xy}+y}-\frac{3x}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right):\frac{(x-1)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{2x+2\sqrt{xy}+2y}$$

a) Rút gọn biểu thức *M.*

b) Tìm các số nguyên x sao cho biểu thức M có giá trị nguyên.

Lời giải

a).Điều kiện: $x\geq 0;\ y\geq 0;\ x\neq y;\ x\neq 1$

$$M=\frac{3\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)-3x+x+\sqrt{xy}+y}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}\cdot\frac{2\left(x+\sqrt{xy}+y\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)};$$

$$M=\frac{x-2\sqrt{xy}+y}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(x+\sqrt{xy}+y\right)}\cdot\frac{2\left(x+\sqrt{xy}+y\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}$$

$$M=\frac{2}{x-1}$$

b).Để M có giá trị nguyên khi x-1 là ước của 2.

Các ước nguyên của 2 là $\pm1;\pm2$.

Do đó ta có $\left[\begin{array}{l}x-1=1\\x-1=-1\\x-1=2\\x-1=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=0\\x=3\\x=-1\end{array}\right.$

Vì $x\geq0$; $x\neq1$ nên có $x=0$; $x=2$; $x=3$ thỏa mãn bài ra.

Câu 14. (Trường chuyên tỉnh Hà Nam chuyên toán năm 2019-2020) Cho biểu thức:

$$A=\frac{x+24}{x-\sqrt{x}-2}:\left[\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right], \text{(với } x\geq0,\ x\neq4, x\neq9\text{)}.$$

1. Rút gọn biểu thức A.
2. Tìm x để biểu thức A đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

1. Rút gọn biểu thức A.

$$A=\frac{x+24}{x-\sqrt{x}-2}:\left[\frac{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)-\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)+\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}\right]$$

$$A=\frac{x+24}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}:\left[\frac{(x-9)-(x-4)+\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}\right]$$

$$A=\frac{x+24}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}:\left[\frac{\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}\right]$$

$$A=\frac{x+24}{\sqrt{x}+1}$$

2) Tìm x để A đạt giá trị nhỏ nhất.

$$M=\frac{x+24}{\sqrt{x}+1}=\frac{x-1+25}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}-1+\frac{25}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}+1+\frac{25}{\sqrt{x}+1}-2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số ta có $\sqrt{x}+1+\frac{25}{\sqrt{x}+1}\geq10$

Do đó $M\geq8$.

Đẳng thức xảy ra khi $\left(\sqrt{x}+1\right)^2=25\Leftrightarrow\sqrt{x}+1=5\Leftrightarrow x=16$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M bằng 8, đạt được khi x=16.

Câu 15. (Trường chuyên tỉnh Hà Nam thi chung năm 2019-2020) Rút gọn các biểu thức sau:

1. $A = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{27} + \sqrt{12}$.

2. $B = \left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} + \dfrac{2a}{a+\sqrt{a}}\right) : \dfrac{1}{a-1}$, (với $a > 0, a \neq 1$).

Lời giải

1. $A = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{27} + \sqrt{12}$

$= 4\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$

$= 0$

2. $B = \left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} + \dfrac{2a}{a+\sqrt{a}}\right) : \dfrac{1}{a-1}$ với $a > 0, a \neq 1$

$$= \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} + \frac{2a}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}\right).(a-1)$$

$$= \frac{(\sqrt{a}+1)^2 + 2\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}.(a-1)$$

$= 3a + 1$

Câu 16. (Trường chuyên tỉnh Hòa Bình Chuyên Tin năm 2019-2020)

1)Tìm điều kiện xác định: $A = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} - \dfrac{2}{x-2}$

2)Rút gọn: $B = 5\sqrt{12} - \sqrt{27}$

3) Rút gọn: $C = \dfrac{a-1}{\sqrt{a}-1} - 1$

Lời giải

1..ĐK: $\begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$

2.. $B = 10\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

3..ĐK: $\begin{cases} a \geq 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$; $C = \sqrt{a} + 1 - 1 = \sqrt{a}$

Câu 17. (Trường chuyên tỉnh Hòa Bình Chuyên Toán năm 2019-2020) Cho biểu thức:

$$A = \frac{3a+\sqrt{9a}-3}{a+\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}-1} + \frac{1}{\sqrt{a}+2} - 1$$

1)Rút gọn biểu thức A.

2)Tìm giá trị của a để $|A| = 2$.

Lời giải

1).Điều kiện $a \geq 0$ và $a \neq 1$

$$A = \frac{3(a+\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-1)} - \frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}-1} + \frac{1}{\sqrt{a}+2} - 1$$

$$A = \frac{3(a+\sqrt{a}-1)-\left(\sqrt{a}-2\right)(\sqrt{a}+2)+\sqrt{a}-1-(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-1)}$$

$$A = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}$$

2).$|A| = \dfrac{\sqrt{a}+1}{\left|\sqrt{a}-1\right|}$ để $|A| = 2 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{a}+1}{\left|\sqrt{a}-1\right|} = 2$

Học sinh giải phương trình và tìm ra giá trị của $\left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=\dfrac{1}{9} \end{array}\right.$

Câu 18. (Trường chuyên tỉnh Hòa Bình dành cho tất cả các thí sinh năm 2019-2020) Rút gọn:

$$A = (\sqrt{5}-3)(\sqrt{5}+3)+6$$

Lời giải

a) Tìm được giao của (d) với Ox, Oy lần lượt tại A(1; 0) và B(0;-2) . Vẽ được đường thẳng (d)

b) $(d) \parallel (d') \Leftrightarrow \begin{cases} m-1=2 \\ 2m \neq -2 \end{cases} \Rightarrow m=3$

Câu 19. (Trường chuyên tỉnh Hưng Yên Vòng 2 năm 2019-2020)

a) Cho a là số thực khác 1 và -1. Rút gọn biểu thức $P = \dfrac{\left(\dfrac{a+1}{a-1}\right)^2+3}{\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^2+3} \div \dfrac{a^3+1}{a^3-1} - \dfrac{2a}{a-1}$.

b) Cho các số thực x, y, a thoản mãn $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{y^4x^2}}=a$ .Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}.$$

Lời giải

a) Ta có $P = \dfrac{\left(\dfrac{a+1}{a-1}\right)^2+3}{\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^2+3} \div \dfrac{a^3+1}{a^3-1} - \dfrac{2a}{a-1} = \dfrac{\dfrac{(a+1)^2+3(a-1)^2}{(a-1)^2}}{\dfrac{(a-1)^2+3(a+1)^2}{(a+1)^2}} \div \dfrac{(a+1)\left(a^2-a+1\right)}{(a-1)\left(a^2+a+1\right)} - \dfrac{2a}{a-1}$

$$= \frac{4\left(a^2-a+1\right)}{4\left(a^2+a+1\right)} \cdot \frac{(a+1)^2}{(a-1)^2} \cdot \frac{(a-1)\left(a^2+a+1\right)}{(a+1)\left(a^2-a+1\right)} - \frac{2a}{a-1} = \frac{a+1}{a-1} - \frac{2a}{a-1} = \frac{1-a}{a-1} = -1.$$

Vậy $P=-1$.

b) Đặt $s=\sqrt[3]{x^2}$ và $t=\sqrt[3]{y^2}$ thì đẳng thức đề bài có thể viết lại thành $\sqrt{s^3+s^2t}+\sqrt{t^3+t^2s}=a$.

Do $s,t\ge 0$ nên $\sqrt{s^3+s^2t}=s\sqrt{s+t}$, $\sqrt{t^3+t^2s}=t\sqrt{s+t}$.

Từ đó ta có $(s+t)\sqrt{s+t}=a$ hay $(s+t)^3=a^2$.

Suy ra $s+t=\sqrt[3]{a^2}$. Đây là kết quả cần chứng minh.

Câu 20. (Trường chuyên tỉnh Hải Dương chuyên toán năm 2019-2020)

Cho $P=1+\left(\dfrac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x}-\dfrac{2x\sqrt{x}-\sqrt{x}+x}{1-x\sqrt{x}}\right).\dfrac{x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}$ với $x\ge 0, x\ne 1, x\ne \dfrac{1}{4}$.

a) Rút gọn P.

b)Tìm các giá trị của x sao cho $P=\dfrac{4}{5}$.

Lời giải

$$P=1+\left(\frac{(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}-\frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(1-\sqrt{x})(x+\sqrt{x}+1)}\right).\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}-1}$$

$$P=1+\left(-\sqrt{x}+\frac{x(\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1}\right)$$

$$P=\frac{(1-\sqrt{x})(x+\sqrt{x}+1)+x(\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1}$$

$$=\frac{(1-\sqrt{x})x+1-x+x\sqrt{x}+x}{x+\sqrt{x}+1}=\frac{x+1}{x+\sqrt{x}+1}$$

$$P=\frac{4}{5}\Rightarrow \frac{x+1}{x+\sqrt{x}+1}=\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow x-4\sqrt{x}+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7-4\sqrt{3}\ \text{(thỏa mãn)}\\ x=7+4\sqrt{3}\ \text{(thỏa mãn)}\end{array}\right.$$

Vậy để $P=\dfrac{4}{5}$ thì $x=7\pm 4\sqrt{3}$

Câu 21. (Trường chuyên tỉnh Hải phòng vòng 2 năm 2019-2020) Cho biểu thức

$$P=\left(\frac{3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right):\frac{\sqrt{x}+3}{x-\sqrt{x}+1}\ \text{(với } x\ge 0\text{)}.$$

Rút gọn biểu thức P. Tìm các giá trị của x để $P\ge \dfrac{1}{5}$.

Lời giải

$$P=\frac{1}{x-\sqrt{x}+1}:\frac{\sqrt{x}+3}{x-\sqrt{x}+1}.$$

$=\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}$..

$P\ge\dfrac{1}{5}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}\ge\dfrac{1}{5}\Leftrightarrow\sqrt{x}\le2\Leftrightarrow x\le4$..

Vậy $0\le x\le4$ thỏa mãn bài toán..

Câu 22. (Trường chuyên tỉnh Hậu Giang chuyên toán năm 2019-2020) Cho biểu thức

$$A=\sqrt{2x+15-8\sqrt{2x-1}}.$$

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa.
b) Tìm x để $A=3$.

Lời giải

Ta có $A=\sqrt{2x+15-8\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2x-1-2.4.\sqrt{2x-1}+16}$

$=\sqrt{(\sqrt{2x-1}-4)^2}=\left|\sqrt{2x-1}-4\right|.$

Biểu thức A có nghĩa khi và chỉ khi $2x-1\ge0\Leftrightarrow x\ge\dfrac{1}{2}.$

$A=3\Leftrightarrow\left|\sqrt{2x-1}-4\right|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x-1}-4=3\\\sqrt{2x-1}-4=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x-1}=7\\\sqrt{2x-1}=1\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=25\\x=1\end{array}\right..$

Câu 23. (Trường chuyên tỉnh Hậu Giang chuyên toán năm 2019-2020)
Cho $x=1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$. Tính giá trị đúng của biểu thức $A=x^5-4x^4+x^3-x^2-2x+2019$.

Lời giải

Ta có $x=1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\Leftrightarrow(\sqrt[3]{2}-1)x=(\sqrt[3]{2}-1)(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$

$\Leftrightarrow(\sqrt[3]{2}-1)x=1\Leftrightarrow\sqrt[3]{2}x=x+1\Leftrightarrow x^3-3x^2-3x-1=0.$

Khi đó $A=x^5-4x^4+x^3-x^2-2x-1+2020$

$=(x^2-x+1)(x^3-3x^2-3x-1)+2020=2020.$

Câu 24. *(Trường chuyên tỉnh Kon Tum cho tất cả các thí sinh năm 2019-2020)*

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức $\dfrac{x+1}{x-3}$ có nghĩa.

b) Chứng minh đẳng thức $\left(1-\dfrac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right)\left(1-\dfrac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)=1-a\ \left(a\ge0,a\ne1\right).$

Lời giải

Điều kiện của x để biểu thức $\frac{x+1}{x-3}$ có nghĩa là $x-3\neq 0$.

$\Leftrightarrow x\neq 3$.

b).Chứng minh đẳng thức $\left(1-\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right)\left(1-\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)=1-a\ \ (a\geq 0, a\neq 1)$..

Ta có $\left(1-\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right)\left(1-\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)=\left(1-\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}+1}\right)\left(1-\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}{\sqrt{a}-1}\right)$.

$=\left(1-\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt{a}\right)$.

$=1-a$.

Câu 25. *(Trường chuyên tỉnh Kon Tum vòng 2 năm 2019-2020)*

1) Không dùng máy tính cầm tay, hãy tính giá trị biểu thức $P=\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}.\left(3+\sqrt{5}\right)}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$

2) Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức $Q=\frac{2x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$ tại $x=2020-2\sqrt{2019}$

Lời giải

1)

Không dùng máy tính cầm tay, hãy tính giá trị biểu thức $P=\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}.\left(3+\sqrt{5}\right)}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$

$$P=\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}.\left(3+\sqrt{5}\right).\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-1\right)}{8}$$

$$=\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}.\left(3\sqrt{5}+5-3-\sqrt{5}\right)}{8}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}.\left(2\sqrt{5}+2\right)}{8}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{5}-1\right).2.\left(\sqrt{5}+1\right)}{8}$$

$$=\frac{2.\left(5-1\right)}{8}=1$$

2)

Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức $Q=\frac{2x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$ tại $x=2020-2\sqrt{2019}$

Ta có $x=2020-2\sqrt{2019}=2019-2\sqrt{2019}+1=\left(\sqrt{2019}-1\right)^2$

$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2019} - 1$

$$Q = \frac{2x - 3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2} = \frac{\left(2\sqrt{x} + 1\right)\left(\sqrt{x} - 2\right)}{\sqrt{x} - 2}$$

$Q = 2\sqrt{x} + 1$

$\Rightarrow Q = 2\left(\sqrt{2019} - 1\right) + 1 = 2\sqrt{2019} - 1$

Câu 26. (Trường chuyên tỉnh Lào Cai Vòng 1 năm 2019-2020) Tính giá trị các biểu thức sau:
$a)$ $\sqrt{4} + 3$
b) $\sqrt{5} + \sqrt{(6 - \sqrt{5})^2}$

Lời giải

a). $\sqrt{4} + 3 = 2 + 3 = 5$

b). $\sqrt{5} + \sqrt{(6 - \sqrt{5})^2} = \sqrt{5} + \left|6 - \sqrt{5}\right|$

$= \sqrt{5} + 6 - \sqrt{5} = 6$

Câu 27. (Trường chuyên tỉnh Lào Cai Vòng 1 năm 2019-2020) Cho biểu thức

$$H = \frac{2x^2 + 2x}{x^2 - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \text{ (với } x \geq 0; x \neq 1\text{)}$$

a)Rút gọn biểu thức H.
b)Tìm tất cả các giá trị của x để $\sqrt{x} - H < 0$

Lời giải

a). $H = \dfrac{2x^2 + 2x}{x^2 - 1} + \dfrac{1}{\sqrt{x} + 1} - \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1} = \dfrac{2x(x + 1)}{(x - 1)(1 + x)} + \dfrac{1}{\sqrt{x} + 1} - \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1} = \dfrac{2x}{x - 1} + \dfrac{1}{\sqrt{x} + 1} - \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1}$

$= \dfrac{2x + \sqrt{x} - 1 - (\sqrt{x} + 1)}{x - 1} = \dfrac{2x - 2}{x - 1}$

$= \dfrac{2(x - 1)}{x - 1} = 2$

b). Ta có $\sqrt{x} - H < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 2 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4$

Mà $x \geq 0; x \neq 1$, suy ra: $0 \leq x < 4;\ x \neq 1$

Vậy: Với $0 \leq x < 4;\ x \neq 1$ thì $\sqrt{x} + H < 0$

Câu 28. (Trường chuyên tỉnh Lâm Đồng vòng 2 năm 2019-2020) Tính giá trị biểu thức

$$T = \left(2\sqrt{3} + 1\right)\left(3\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{13 - 4\sqrt{3}}\sqrt{19 + 6\sqrt{2}}.$$

Lời giải

Tính được $\sqrt{13 - 4\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 1$

và $\sqrt{19+6\sqrt{2}}=3\sqrt{2}-1$

Đưa được về dạng $T=\left[\left(2\sqrt{3}\right)^2-1^2\right]\left[\left(3\sqrt{2}\right)^2-1^2\right]$

Tính đúng kết quả T = 187

Câu 29. (Trường chuyên tỉnh Nam Định cho lớp chuyên KHTN năm 2019-2020)

Tìm điều kiện xác định của biểu thức $P=\dfrac{2019}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{3}{x-9}$.

Lời giải

Biểu thức xác định khi $\begin{cases} x\ge 0 \\ \sqrt{x}-3\ne 0 \\ x\ne 9 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x\ne 9. \end{cases}$.

Câu 30. (Trường chuyên tỉnh Nam Định cho lớp chuyên KHTN năm 2019-2020)

Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right):\left(\dfrac{a^2+a\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right)$ với $a>0,\ a\ne 1$.

1) Rút gọn biểu thức P.
2) Tìm các giá trị nguyên của a để P nhận giá trị là số nguyên.

Lời giải

1).Với $a>0,\ a\ne 1$ ta có $\dfrac{a^2+a\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}=a\sqrt{a}$. .

Và $\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}=\dfrac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2-\left(\sqrt{a}-1\right)^2+4\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}$.

$=\dfrac{4a\sqrt{a}}{a-1}$. .

Do đó $P=\dfrac{4a\sqrt{a}}{a-1}.\dfrac{1}{a\sqrt{a}}=\dfrac{4}{a-1}$. .

2).Với a nguyên thì P nhận giá trị là số nguyên khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} a-1=-4 \\ a-1=-2 \\ a-1=-1 \\ a-1=1 \\ a-1=2 \\ a-1=4 \end{array}\right.$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-3 \\ a=-1 \\ a=0 \\ a=2 \\ a=3 \\ a=5 \end{array}\right.$ Đối chiếu với điều kiện ta có $a=2, a=3, a=5$ (thỏa mãn)..

Câu 31. (Trường chuyên tỉnh Nam Định chuyên toán năm 2019-2020)

Cho $x=\sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}}+\sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$. Tính giá trị của biểu thức $P=x(2-x)$.

Lời giải

+ Có $x^2=\left(\sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}}+\sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}\right)^2=6+2\sqrt{3^2-\left(5+2\sqrt{3}\right)}=6+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

$=6+2\left(\sqrt{3}-1\right)=4+2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$.

+ Do $x>0$ nên $x=\sqrt{3}+1$.

+ Suy ra $(x-1)^2=3$ hay $x^2-2x=2$, do đó $P=-2$.

Câu 32. (Trường chuyên tỉnh Nam Định lớp chuyên KHXH năm 2019-2020) Tìm điều kiện xác định của biểu thức

$$P=\frac{2019}{\sqrt{x-3}}-\frac{3}{x-9}.$$

Lời giải

Biểu thức xác định khi $\begin{cases} x-3>0 \\ x\neq 9 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x\neq 9. \end{cases}$.

Câu 33. (Trường chuyên tỉnh Nam Định lớp chuyên KHXH năm 2019-2020) Cho biểu thức

$$P=\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right).\frac{1}{a\sqrt{a}} \text{ với } a>0,\ a\neq 1.$$

1) Rút gọn biểu thức P.

2) Tính giá trị của P khi $a=\sqrt{9+4\sqrt{2}}$.

Lời giải

1).Với $a>0, a\neq 1$ ta có $\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}=\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2-\left(\sqrt{a}-1\right)^2+4\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}$.

$=\frac{a+2\sqrt{a}+1-a+2\sqrt{a}-1+4\sqrt{a}\left(a-1\right)}{a-1}$.

$=\dfrac{4a\sqrt{a}}{a-1}$.

Do đó $P=\dfrac{4a\sqrt{a}}{a-1}.\dfrac{1}{a\sqrt{a}}=\dfrac{4}{a-1}$. .

2).Ta có $a=\sqrt{9+4\sqrt{2}}=\sqrt{\left(2\sqrt{2}+1\right)^2}=2\sqrt{2}+1$. .

Do đó $P=\sqrt{2}$. .

Câu 34. **(Trường chuyên tỉnh Ninh Bình chuyên toán năm 2019-2020)** Với $x>0$, xét hai biểu thức

$$A=\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \text{ và } B=\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}+\frac{2\sqrt{x}+9}{x+3\sqrt{x}}.$$

Tìm tất cả các giá trị của x để $\dfrac{A}{B}>\dfrac{5}{3}$.

Lời giải

$$B=\frac{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)+\left(2\sqrt{x}+9\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)}=\frac{x-9+2\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)}.$$

$$=\frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3}..$$

Với $x>0$ ta có: $\dfrac{A}{B}>\dfrac{5}{3}\Leftrightarrow\dfrac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}:\dfrac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}>\dfrac{5}{3}\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}>\dfrac{5}{3}$.

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x}+9>5\sqrt{x}$ (vì $3\sqrt{x}>0\ \forall x>0$) $\Leftrightarrow 2\sqrt{x}<9\Leftrightarrow 0<x<\dfrac{81}{4}$.

Vậy với $0<x<\dfrac{81}{4}$ thì $\dfrac{A}{B}>\dfrac{5}{3}$. .

Câu 35. **(Trường chuyên tỉnh Ninh Bình chuyên toán năm 2019-2020)** Rút gọn biểu thức

$$C=\frac{5\sqrt{6\sqrt{7-\sqrt{33+\sqrt{128}}}-1}}{3-\sqrt{2}}.$$

Lời giải

Ta có: $C=\dfrac{5\sqrt{6\sqrt{7-\sqrt{33+\sqrt{128}}}-1}}{3-\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{6\sqrt{7-\sqrt{(4\sqrt{2}+1)^2}}-1}}{3-\sqrt{2}}$.

$$=\frac{5\sqrt{6\sqrt{6-4\sqrt{2}}-1}}{3-\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{6\sqrt{(2-\sqrt{2})^2}-1}}{3-\sqrt{2}}.$$

$$=\frac{5\sqrt{11-6\sqrt{2}}}{3-\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}}{3-\sqrt{2}}.$$

$=\dfrac{5(3-\sqrt{2})}{3-\sqrt{2}}=5.$.

Câu 36. (Trường chuyên tỉnh Phú Yên Vòng 2 năm 2019-2020) Cho biểu thức

$$A=\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right):\left(\frac{x-2}{x-\sqrt{x}-2}-1\right).$$

a)Rút gọn biểu thức A.

b)Tìm x để $P=2A-\dfrac{1}{x}$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

a) **Rút gọn biểu thức *A*.**

Điều kiện: $x>0, x\neq 4, x\neq 9\cdot$

Ta có:

$$\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)-\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)+\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{x-9-(x-4)+\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}-2}\cdot$$

$$\frac{x-2}{x-\sqrt{x}-2}-1=\frac{x-2-\left(x-\sqrt{x}-2\right)}{x-\sqrt{x}-2}=\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}-2}=\frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}\cdot$$

Do đó $A=\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}:\dfrac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\cdot$

b) **Tìm x để $P=2A-\dfrac{1}{x}$ đạt giá trị lớn nhất.**

Ta có $P=\dfrac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}=2+\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}$

$$=-\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)^2+3\leq 3.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{1}{\sqrt{x}}=1\Leftrightarrow x=1.$

Vậy $\max P=3\Leftrightarrow x=1.$

Câu 37. (Trường chuyên tỉnh PTNK (VÒNG 1) năm 2019-2020) Tìm a, biết:

$$\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2-\left(\sqrt{a}-1\right)^2}{4\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}-\frac{\left(\sqrt{2a+1}+\sqrt{a+1}\right)\left(\sqrt{2a+1}-\sqrt{a+1}\right)}{a\left(\sqrt{a}+1\right)}=1.$$

Lời giải

Điều kiện: $a>0$ và $a\neq 1$. Ta có:

$$\left(\sqrt{a}+1\right)^2-\left(\sqrt{a}-1\right)^2=\left(a+1+2\sqrt{a}\right)-\left(a+1-2\sqrt{a}\right)=4\sqrt{a}$$

và

$$\left(\sqrt{2a+1}+\sqrt{a+1}\right)\left(\sqrt{2a+1}-\sqrt{a+1}\right)=\left(2a+1\right)-\left(a+1\right)=a.$$

Do đó, phương trình đã cho có thể được viết lại thành $\dfrac{1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}=1$.

Phương trình này tương đương với $\dfrac{\left(\sqrt{a}+1\right)-\left(\sqrt{a}-1\right)}{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}=1$ hay $\dfrac{2}{a-1}=1$.

Như thế, ta có $a-1=2$ hay $a=3$ (thỏa mãn).

Vậy có duy nhất một giá trị a thỏa mãn yêu cầu đề bài là $a=3$.

Câu 38. (Trường chuyên tỉnh Quảng Nam Vòng 2 năm 2019-2020) Cho biểu thức

$$A=\left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}+1}-\frac{2\sqrt{x}+8}{x\sqrt{x}+1}\right)\cdot\frac{x^2-x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} \text{ với } x\geq 0.$$

Rút gọn biểu thức A và tìm x để $A=6$.

Lời giải

Với $x\geq 0$, ta có:

$$\begin{aligned}
A&=\left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}+1}-\frac{2\sqrt{x}+8}{x\sqrt{x}+1}\right)\cdot\frac{x^2-x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}\\
&=\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)-2\sqrt{x}-8}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}\cdot\frac{x\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)+\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}+3}\\
&=\frac{x+3\sqrt{x}+2-2\sqrt{x}-8}{x\sqrt{x}+1}\cdot\frac{\left(x\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}+3}\\
&=\left(x+3\sqrt{x}-2\sqrt{x}-6\right)\cdot\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}\\
&=\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+3\right)\cdot\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}\\
&=\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\\
&=x-3\sqrt{x}+2
\end{aligned}$$

$A=6 \Leftrightarrow x-3\sqrt{x}+2=6 \Leftrightarrow x-3\sqrt{x}-4=0$

$\Leftrightarrow x+\sqrt{x}-4\sqrt{x}-4=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-4\right)\left(\sqrt{x}+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}-4=0 \ \left(\text{vì } \sqrt{x}+1>0 \ \forall x\geq 0\right)$

$\Leftrightarrow x=16$ (TMĐK)

Vậy với $x=16$ thì $A=6$.

Câu 39. (Trường chuyên tỉnh Quảng Ngãi chuyên toán năm 2019-2020) Cho biểu thức

$$P=\frac{2x+3}{\sqrt{x}}+\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\frac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x} \text{ với } x>0, x\neq 1.$$

Rút gọn và tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P

Lời giải

Cho biểu thức $P=\frac{2x+3}{\sqrt{x}}+\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\frac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x}$ với $x>0, x\neq 1$. Rút gọn và tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P

$$P=\frac{2x+3}{\sqrt{x}}+\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\frac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x}=\frac{2x+3}{\sqrt{x}}+\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}-\frac{\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}+1\right)}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{2x+3}{\sqrt{x}}+\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-\frac{\left(x\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{2x+3}{\sqrt{x}}+\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{2x+3}{\sqrt{x}}+\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-\frac{\left(x\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{2x+3}{\sqrt{x}}+\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{2x+3}{\sqrt{x}}+\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-\frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=\frac{2x+2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}+2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có $2\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\geq 2\sqrt{6} \Rightarrow P\geq 2+2\sqrt{6}$

Dấu bằng xảy ra khi $x=\frac{3}{2}(tmdk)$

Câu 40. (Trường chuyên tỉnh Quảng Ninh Vòng 2 năm 2019-2020) Cho biểu thức

$$A=\frac{-4x-9\sqrt{x}+3}{x+3\sqrt{x}+2}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} \text{ (với } x\geq 0\text{)}.$$

a) Rút gọn biểu thức A;

b) Tìm giá trị lớn nhất của A.

Lời giải

a). $A=\frac{-4x-9\sqrt{x}+3}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}+\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}-\frac{\left(2\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$

$$=\frac{\left(1-5\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{1-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}.$$

b). $A=\dfrac{1-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=-5+\dfrac{6}{\sqrt{x}+1}$. Với mọi $x\ge 0$ ta có: $\sqrt{x}+1\ge 1$ nên $\dfrac{6}{\sqrt{x}+1}\le 6$

Do đó $A=-5+\dfrac{6}{\sqrt{x}+1}\le 1$. Giá trị lớn nhất của A là 1 đạt được khi $x=0$.

Câu 41. (Trường chuyên tỉnh Sơn La Vòng 2 năm 2019-2020)

a)Rút gọn biểu thức:

$$A=\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}+\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right) \text{ (với } x\ge 0;\ x\ne 4;\ x\ne 9\text{)}$$

b)Cho $x=\dfrac{(\sqrt{3}-1)\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}{\sqrt{21+4\sqrt{5}}+3}$ hãy tính $B=(x^2+4x-2)^{2019}$

Lời giải

a) $A=\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right):\left(\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$ Với $x\ge 0; x\ne 4; x\ne 9$.

$$A=\frac{1}{\sqrt{x}+1}:\frac{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)-\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)+\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$A=\frac{1}{\sqrt{x}+1}:\frac{x-9-x+4+\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}:\frac{\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$A=\frac{1}{\sqrt{x}+1}:\frac{1}{\sqrt{x}-2}=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}.$$

b) Ta có

$$\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}=\sqrt[3]{(1+\sqrt{3})^3}=1+\sqrt{3}$$

$$\sqrt{21+4\sqrt{5}}=\sqrt{(2\sqrt{5}+1)^2}=2\sqrt{5}+1$$

Nên $x=\dfrac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{5}+4}=\dfrac{2}{2\sqrt{5}+4}=\sqrt{5}-2$

Vậy $B=(x^2+4x-2)^{2019}=(-1)^{2019}=-1$

Câu 42. (Trường chuyên tỉnh Thái Bình vòng 1 năm 2019-2020) Cho biểu thức:

$$P=\left(\frac{2}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{\sqrt{xy}\left(x+y\right)-xy}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}} \text{ (với } x>0; y>0\text{)}.$$

1. Rút gọn biểu thức *P*.
2. Biết $xy=16$. Tìm giá trị nhỏ nhất của *P*.

Lời giải

1.

$$P=\left(\frac{2}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{\sqrt{xy}\left(x+y\right)-xy}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}$$

$$=\frac{2\sqrt{xy}+y+x}{xy}\cdot\frac{\sqrt{xy}\left(x+y-\sqrt{xy}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x+y-\sqrt{xy}\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{xy}\cdot\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$$

Vậy $P=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$ với $x>0; y>0$.

2.Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}\ge 2\sqrt{\sqrt{xy}}=2\sqrt{\sqrt{16}}=4$$

$$\Rightarrow P\ge\frac{4}{\sqrt{16}}=1$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=4$

Vậy $\min P=1$ tại $x=y=4$.

Câu 43. (Trường chuyên tỉnh Thái Nguyên chuyên tin năm 2019-2020) Cho

$$x=\sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}+\sqrt[3]{70-\sqrt{4901}}.$$

Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy chứng minh x là số nguyên tố.

Lời giải

Ta có:

$$x=\sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}+\sqrt[3]{70-\sqrt{4901}}$$

$$\Rightarrow x^3=140+3\sqrt[3]{\left(70+\sqrt{4901}\right)\left(70-\sqrt{4901}\right)}\left(\sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}+\sqrt[3]{70-\sqrt{4901}}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^3=140-3x$$

$$\Leftrightarrow x^3+3x-140=0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)\left(x^2+5x+28\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=5 \quad \left(\text{do } x^2+5x+28=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{87}{4}>0\forall x\in\mathbb{R}\right)$$

Vì vậy x là số nguyên tố..

Câu 44. (Trường chuyên tỉnh Tiền Giang chuyên tin năm 2019-2020) Rút gọn biểu thức:

$$A=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.$$

Lời giải

Ta có $A>0 \Rightarrow A^2=8+2\sqrt{\left(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)\left(4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}$.

$A^2=8+2\sqrt{16-\left(10+2\sqrt{5}\right)}=8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}=8+2\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}$.

$A^2=8+2\left(\sqrt{5}-1\right)=6+2\sqrt{5}=\left(\sqrt{5}+1\right)^2$.

$\Rightarrow A=\sqrt{5}+1$..

Câu 45. (Trường chuyên tỉnh Tiền Giang Vòng 2 năm 2019-2020) Cho

$$x=\sqrt[3]{2+2\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-2\sqrt{3}}-1.$$

Tính giá trị biểu thức $P=x^3\left(x^2+3x+9\right)^3$

Lời giải

$x=\sqrt[3]{2+2\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-2\sqrt{3}}-1 \Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{2+2\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-2\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \left(x+1\right)^3=4-6\left(x+1\right) \Rightarrow x^3+3x^2+9x=-3$

$P=x^3\left(x^2+3x+9\right)^3=\left(x^3+3x^2+9x\right)^3$

$P=-27$

Câu 46. (Trường chuyên tỉnh Tuyên Quang chuyên toán năm 2019-2020) Tính tổng

$$S=\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{2019^2}+\sqrt{2019^2-2}}$$

Lời giải

Ta có: $S=\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{2019^2-2}+\sqrt{2019^2}}$

$\Rightarrow S=\dfrac{1-\sqrt{3}}{1-3}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{3-5}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{5-7}+\dots+\dfrac{\sqrt{2019^2-2}-\sqrt{2019^2}}{2019^2-2-2019^2}$

$\Rightarrow S=\dfrac{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{7}+\dots+\sqrt{2019^2-2}-\sqrt{2019^2}}{-2}$

$\Rightarrow S=\dfrac{1-\sqrt{2019^2}}{-2}=\dfrac{1-2019}{-2}=1009$

Vậy $S=1009$

Câu 47. (Trường chuyên tỉnh Tây Ninh Vòng 2 năm 2019-2020) Rút gọn biểu thức

$$T=\frac{\left(\sqrt{2a}-2\sqrt{2}\right)\left(a-1\right)}{a-\sqrt{a}-2} \text{ với } a>0, a\neq 4.$$

Lời giải

Rút gọn biểu thức $T=\dfrac{\left(\sqrt{2a}-2\sqrt{2}\right)(a-1)}{a-\sqrt{a}-2}$ với $a>0, a\neq 4$.

$\left(\sqrt{2a}-2\sqrt{2}\right)(a-1)=\sqrt{2}\left(\sqrt{a}-2\right)(a-1)$

$=\sqrt{2}\left(\sqrt{a}-2\right)\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)$

$a-\sqrt{a}-2=\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-2\right)$

Vậy $T=\sqrt{2}\left(\sqrt{a}-1\right)$.

Câu 48. (Trường chuyên tỉnh Vĩnh Long vòng 2 năm 2019-2020)

a) Cho biểu thức: $P=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{1}{x-\sqrt{x}}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$. Tìm điều kiện xác định của P và giá trị của x để $P=\dfrac{1}{2}$.

b) Rút gọn biểu thức $A=\sqrt[3]{46\sqrt{5}-61}+\sqrt{69-28\sqrt{5}}$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x>0$; $x\neq 1$.

$$P=\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}+\frac{1}{x-\sqrt{x}}\right):\frac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}=\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}+\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}\right).\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\sqrt{x}+1}.$$

$$=\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}.\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}.$$

$P=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2.\left(\sqrt{x}-1\right)=\sqrt{x}\Leftrightarrow\sqrt{x}=2\Leftrightarrow x=4$ (thỏa điều kiện).

Vậy giá trị cần tìm là $x=4$.

b)

$$\sqrt[3]{46\sqrt{5}-61}=\sqrt[3]{\left(2\sqrt{5}\right)^3-3.\left(2\sqrt{5}\right)^2.1+3.2\sqrt{5}.1^2-1^3}=\sqrt[3]{\left(2\sqrt{5}-1\right)^3}=2\sqrt{5}-1.$$

$$\sqrt{69-28\sqrt{5}}=\sqrt{49-2.7.2\sqrt{5}+\left(2\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{\left(7-2\sqrt{5}\right)^2}=7-2\sqrt{5}.$$

$$A=\sqrt[3]{46\sqrt{5}-61}+\sqrt{69-28\sqrt{5}}=2\sqrt{5}-1+7-2\sqrt{5}=6.$$

Câu 49. (Trường chuyên tỉnh An Giang Vòng 2 năm 2019-2020) Rút gọn

$$A=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{1-\sqrt{3}}\right)^2.$$

Lời giải

$$A=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{1-\sqrt{3}}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2-4}{2\left(1+\sqrt{3}\right)}\right)^2-\left(\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2-4}{2\left(1-\sqrt{3}\right)}\right)^2.$$

$$=\left(\frac{2\sqrt{3}}{2\left(1+\sqrt{3}\right)}\right)^2-\left(\frac{-2\sqrt{3}}{2\left(1-\sqrt{3}\right)}\right)^2$$

$$=\frac{3}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}-\frac{3}{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}=\frac{3}{4+2\sqrt{3}}-\frac{3}{4-2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{12-6\sqrt{3}-12-6\sqrt{3}}{16-12}=-\frac{12\sqrt{3}}{4}=-3\sqrt{3}$$

Vậy $A=-3\sqrt{3}$.

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2-4}{2\left(1+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\sqrt{3}}{2\left(1+\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{1-\sqrt{3}}\right)=\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2-4}{2\left(1-\sqrt{3}\right)}=\frac{-2\sqrt{3}}{2\left(1-\sqrt{3}\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}.$$

$$\Rightarrow A=\left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^2-\left(-\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right)^2=\frac{3}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}-\frac{3}{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\frac{3}{4+2\sqrt{3}}-\frac{3}{4-2\sqrt{3}}=\frac{12-6\sqrt{3}-12-6\sqrt{3}}{16-12}=-\frac{12\sqrt{3}}{4}$$

Vậy $A=-3\sqrt{3}$.

Câu 50. (Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu thi chung năm 2019-2020) Rút gọn biểu thức

$$A=\left(3\sqrt{5}-\sqrt{27}-\sqrt{20}\right)\sqrt{5}+3\sqrt{15}.$$

Lời giải

$$A=\left(3\sqrt{5}-\sqrt{27}-\sqrt{20}\right)\sqrt{5}+3\sqrt{15}.$$

$$=\left(3\sqrt{5}-3\sqrt{3}-2\sqrt{5}\right)\sqrt{5}+3\sqrt{15}.$$

$$=\left(\sqrt{5}-3\sqrt{3}\right)\sqrt{5}+3\sqrt{15}.$$

$$=5-3\sqrt{15}+3\sqrt{15}=5.$$

Câu 51. (Trường chuyên tỉnh Bình Phước chuyên toán năm 2019-2020) Cho biểu thức

$$A = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} \quad \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4 \quad 2\sqrt{3}$.

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức A .

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 9 \end{cases}$

Ta có

$$A = \frac{x\sqrt{x} \quad 3 \quad 2x + 12\sqrt{x} \quad 18 \quad x \quad 4\sqrt{x} \quad 3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x} \quad 3)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x} \quad 3)(x+8)}{(\sqrt{x} \quad 3)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{x+8}{\sqrt{x}+1}$$

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4 \quad 2\sqrt{3}$.

Ta có :

$$x = \left(4 \quad 2\sqrt{3}\right) = (\sqrt{3} \quad 1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3} \quad 1$$

$A = \frac{4-2\sqrt{3}+8}{\sqrt{3}-1+1} = \frac{12-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \quad 2$

Câu 52. **(Trường chuyên tỉnh Long An chuyên toán dự bị năm 2019-2020)**

Cho biểu thức $P = \frac{x-2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} + \frac{x\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+2} - \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)(x-1)$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm tất cả số nguyên tố x để $P \leq 1$.

Lời giải

a)

$$\frac{x-2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}-3$$

$$\frac{x\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+2} = x-2\sqrt{x}+4$$

$$\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{-4\sqrt{x}}{x-1}$$

$$P = x-5\sqrt{x}+1$$

b) Tìm tất cả số nguyên tố x để $P \leq 1$

$P \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq 5$

$x = 2, x = 3, x = 5, x = 7, x = 11, x = 13, x = 17, x = 19, x = 23.$

Câu 53. (Trường chuyên tỉnh Long An chuyên toán năm 2019-2020)

Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}+\dfrac{2x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-\dfrac{2x-2}{\sqrt{x}+1}\right)\cdot\dfrac{1}{x-\sqrt{x}+1}$ với $x>0$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Chứng minh: $P\le 3$.

Lời giải

a). $\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)$

$$\frac{2x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-\frac{2x-2}{\sqrt{x}+1}=\left(2\sqrt{x}-1\right)-2\left(\sqrt{x}-1\right)$$

$$\frac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}+\frac{2x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-\frac{2x-2}{\sqrt{x}+1}=x+\sqrt{x}+1$$

$$P=\frac{x+\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}+1}$$

b). $P\le 3\Leftrightarrow x+\sqrt{x}+1\le 3\left(x-\sqrt{x}+1\right)$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x}-1\right)^2\ge 0$$

Câu 54. (Trường chuyên tỉnh Quảng Trị Vòng 2 năm 2019-2020) Cho biểu thức

$$A=\frac{2(x-1)}{\sqrt{x}+1}+\frac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}-\frac{2x-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\text{ với } x\ge 0,\ x\ne 1.$$

Tìm tất cả các giá trị của x để $A\le 0$.

Lời giải

$$A=2(\sqrt{x}-1)+x+\sqrt{x}-2\sqrt{x}$$

$$=x+\sqrt{x}-2=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)$$

$$(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)\le 0\Leftrightarrow \sqrt{x}-1\le 0\Leftrightarrow 0\le x\le 1.$$

Đối chiếu điều kiện giá trị cần tìm $0\le x<1$.

Câu 55. (Trường chuyên tỉnh Thừa Thiên Huế vòng 2 năm 2019-2020) Rút gọn biểu thức

$$\mathrm{P}=\frac{3\mathrm{x}+\sqrt{9\mathrm{x}}-3}{\mathrm{x}+\sqrt{\mathrm{x}}-2}-\frac{\sqrt{\mathrm{x}}+1}{\sqrt{\mathrm{x}}+2}-\frac{\sqrt{\mathrm{x}}-2}{\sqrt{\mathrm{x}}-1}.$$

Tìm x để $\mathrm{P}=3$.

Lời giải

Điều kiện: $\mathrm{x}\ge 0, \mathrm{x}\ne 1$. Ta có

$$\mathrm{P}=\frac{3\mathrm{x}+3\sqrt{\mathrm{x}}-3-(\sqrt{\mathrm{x}}+1)(\sqrt{\mathrm{x}}-1)-(\sqrt{\mathrm{x}}+2)(\sqrt{\mathrm{x}}-2)}{(\sqrt{\mathrm{x}}-1)(\sqrt{\mathrm{x}}+2)}$$

$$=\frac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}=\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}.$$

$P=3\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=3\Leftrightarrow\sqrt{x}=2\Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn điều kiện).

Câu 56. (Trường chuyên tỉnh Yên Bái vòng 2 năm 2019-2020) Cho biểu thức

$$A=\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right).\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right).$$

1. Tìm điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa. Rút gọn biểu thức A.
2. Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$.

$$A=\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right).\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$$

$$=\left(\frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right).\left(\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)-\left(x-\sqrt{x}+1\right)}{\left(x-\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}\right)$$

$$=\left(\frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right).\left(\frac{\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}+1}\right)=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$$

2. Ta có $A=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}=1-\frac{2}{\sqrt{x}}$

Suy ra A nhận giá trị nguyên khi và chỉ khi $\sqrt{x}$ là ước nguyên của 2.

Hay $\sqrt{x}\in\{-1;1;-2;2\}$.

Ta có: $\sqrt{x}=-1$ (Vô nghiệm).

$\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn).

$\sqrt{x}=2\Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn)

$\sqrt{x}=-2$ (Vô nghiệm).

Vậy để A nguyên thì $x\in\{1;4\}$.

Câu 57. (Trường chuyên tỉnh Chuyên ĐHSP vòng 1 năm 2019-2020)

Cho các số thực x, y, a thoản mãn $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{y^4x^2}}=a$.

Chứng minh rằng $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$.

Lời giải

Đặt $s=\sqrt[3]{x^2}$ và $t=\sqrt[3]{y^2}$ thì đẳng thức đề bài có thể viết lại thành $\sqrt{s^3+s^2t}+\sqrt{t^3+t^2s}=a$.

Do $s,t\ge 0$ nên $\sqrt{s^3+s^2t}=s\sqrt{s+t}, \sqrt{t^3+t^2s}=t\sqrt{s+t}$.

Từ đó ta có $(s+t)\sqrt{s+t}=a$ hay $(s+t)^3=a^2$.

Suy ra $s+t=\sqrt[3]{a^2}$. Đây là kết quả cần chứng minh.

Chuyên đề 2 Bất đẳng thức-Min-Max

Câu 1. (Trường chuyên tỉnh Bình Dương chuyên toán năm 2019-2020) Giả sử ba số thực a,b,c thỏa mãn điều kiện $a>0$, $b=3a^2$, $a+b+c=abc$. Chứng minh rằng: $a\ge\sqrt{\dfrac{1+2\sqrt{3}}{3}}$.

Lời giải

Ta thấy $3a^2=bc\Rightarrow 3a^3=abc\Rightarrow a^3=\dfrac{abc}{3}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si:

$$3a^2=bc\le\left(\frac{b+c}{2}\right)^2=\left(\frac{3a^3-a}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 3a^2\le\frac{\left(3a^3-a\right)^2}{4}$$

$$\Rightarrow 12a^2\le\left(3a^3-a\right)^2$$

$$\Rightarrow a^2\left(3a^2-1\right)^2\ge 12a^2$$

$$\Rightarrow \left(3a^2-1\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2\ge 0$$

$$\Rightarrow \left(3a^2-1+2\sqrt{3}\right)\left(3a^2-1-2\sqrt{3}\right)\ge 0$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3a^2-1-2\sqrt{3}\ge 0\\3a^2-1+2\sqrt{3}\ge 0\end{cases}\\\begin{cases}3a^2-1-2\sqrt{3}\le 0\\3a^2-1+2\sqrt{3}\le 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2\ge\dfrac{1-2\sqrt{3}}{3}\\a^2\ge\dfrac{1+2\sqrt{3}}{3}\end{cases}\\\begin{cases}a^2\le\dfrac{1-2\sqrt{3}}{3}\\a^2\le\dfrac{1+2\sqrt{3}}{3}\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow a^2\ge\frac{1+2\sqrt{3}}{3}$$

$\Rightarrow a \geq \sqrt{\frac{1+2\sqrt{3}}{3}}$ (Do $a > 0$).

Câu 2. (Trường chuyên tỉnh Bình Thuận chuyên toán năm 2019-2020) Cho các số dương x, y, z thỏa $xyz = \frac{1}{2}$.

Chứng minh rằng: $\frac{yz}{x^2(y+z)} + \frac{zx}{y^2(z+x)} + \frac{xy}{z^2(x+y)} \geq xy + yz + zx.$

Dấu "=" xảy ra khi nào ?

Lời giải

Ta sẽ chứng minh $\frac{yz}{x^2(y+z)} + \frac{zx}{y^2(z+x)} + \frac{xy}{z^2(x+y)} \geq \frac{1}{2}\frac{xy+yz+zx}{xyz}$.

Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$ thì bất đẳng thức trở thành

$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Ta có: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \geq a; \frac{b^2}{c+a} + \frac{c+a}{4} \geq b; \frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geq c.$

Cộng vế theo vế ta được đpcm.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

Câu 3. (Trường chuyên tỉnh Bình Thuận vòng 2 năm 2019-2020) Cho các số dương x, y, z thỏa $xyz = \frac{1}{2}$.

Chứng minh rằng: $\frac{yz}{x^2(y+z)} + \frac{zx}{y^2(z+x)} + \frac{xy}{z^2(x+y)} \geq xy + yz + zx.$

Dấu "=" xảy ra khi nào ?

Lời giải

Ta sẽ chứng minh $\frac{yz}{x^2(y+z)} + \frac{zx}{y^2(z+x)} + \frac{xy}{z^2(x+y)} \geq \frac{1}{2}\frac{xy+yz+zx}{xyz}$.

Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$ thì bất đẳng thức trở thành

$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Ta có: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \geq a; \frac{b^2}{c+a} + \frac{c+a}{4} \geq b; \frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geq c.$

Cộng vế theo vế ta được đpcm.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

Câu 4. (Trường chuyên tỉnh Bắc Giang chuyên toán năm 2019-2020) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $0 \le x \le 1;\ 0 < y \le 1;\ 0 < z \le 1$. Chứng minh rằng

$$x + y^2 + z^3 \le 1 + yz + \frac{x\left(y^3 + z^3 + xyz\right)}{yz}.$$

Lời giải

$0 \le (1-x)\left(1-y^2\right)\left(1-z^3\right) = 1 - x - y^2 - z^3 + xy^2 + y^2z^3 + xz^3 - xy^2z^3$..

Suy ra $x + y^2 + z^3 \le 1 + xy^2 + y^2z^3 + xz^3 - xy^2z^3 \le 1 + xy^2 + y^2z^3 + xz^3 \le 1 + xy + yz + zx\ (1)$. .

$y^3 + z^3 \ge (y+z)yz$

$$\Rightarrow 1 + yz + \frac{x\left(y^3 + z^3 + xyz\right)}{yz} \ge 1 + yz + \frac{x(y+z)yz}{yz} + x^2 = 1 + xy + yz + zx + x^2.$$

$$\ge 1 + xy + yz + zx\ (2).$$

Từ (1) và (2) ta có $x + y^2 + z^3 \le 1 + yz + \frac{x\left(y^3 + z^3 + xyz\right)}{yz}$.

Đẳng thức xảy ra khi $(x; y; z) = (0; 1; 1)$..

Câu 5. (Trường chuyên tỉnh DAK LAK vòng 2 năm 2019-2020)

1)Cho số thực dương x, chứng minh $\frac{x^3+1}{x+2} \ge \frac{7}{18}x^2 + \frac{5}{18}$.

2)Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$\frac{a^3+b^3}{a+2b} + \frac{b^3+c^3}{b+2c} + \frac{c^3+a^3}{c+2a} \ge 2$.

Lời giải

Câu 6. (Trường chuyên tỉnh Hà Nam chuyên toán năm 2019-2020) Cho các số thực dương a, b, c.

Chứng minh $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a+b+c}{\sqrt{3}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \ge 4$.

Lời giải

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{bc} + \frac{c^2}{ac} \ge \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ac} \text{ (bất đẳng thức B.C.S)}$$

$$S=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a+b+c}{\sqrt{3}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ge\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}+\frac{a+b+c}{\sqrt{3}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}+\frac{\sqrt{3}(a+b+c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}+\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}\right)(a+b+c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}+\frac{\sqrt{3}(a+b+c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}-\frac{2(a+b+c)}{\sqrt{3}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$(ab+bc+ca)^2(a^2+b^2+c^2)$$

$$\le\left[\frac{2(ab+bc+ca)+a^2+b^2+c^2}{3}\right]^3=\frac{(a+b+c)^6}{27}$$

$$\Rightarrow\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}+\frac{\sqrt{3}(a+b+c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\ge 2.\sqrt[4]{3}.\sqrt{\frac{(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}\ge 2.\sqrt[4]{3}.\sqrt[4]{27}=6$$

$$(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)\Rightarrow\frac{a+b+c}{\sqrt{3}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\le 1$$

$\Rightarrow S\ge 6-2=4$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Câu 7. (Trường chuyên tỉnh Hà Nam thi chung năm 2019-2020) Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}$.

Lời giải

Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}$.

Từ giả thiết: $1-\frac{1}{a+1}\ge\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\ge 2\sqrt{\frac{1}{(b+1)(c+1)}}$ (Côsi 2 số)

Tương tự: $1-\frac{1}{b+1}\ge\frac{1}{a+1}+\frac{1}{c+1}\ge 2\sqrt{\frac{1}{(a+1)(c+1)}}$;

$$1-\frac{1}{c+1}\geq\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\geq 2\sqrt{\frac{1}{(a+1)(b+1)}}$$

Nhân vế với vế các bất phương trình ta được:

$$\frac{a}{a+1}\cdot\frac{b}{b+1}\cdot\frac{c}{c+1}\geq 8\sqrt{\frac{1}{(a+1)^2(b+1)^2(c+1)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{abc}{(a+1)(b+1)(c+1)}\geq\frac{8}{(a+1)(b+1)(c+1)}\Rightarrow abc\geq 8$$

Với $a,b,c>0$ ta có: $(a+b)(a-b)^2\geq 0\Leftrightarrow a^3+b^3-a^2b-ab^2\geq 0$

$$\Leftrightarrow 3a^3\geq(2a-b)(a^2+ab+b^2)\Rightarrow\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}\geq\frac{2a-b}{3}$$

Tương tự: $\dfrac{b^3}{b^2+bc+c^2}\geq\dfrac{2b-c}{3}$; $\dfrac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\dfrac{2c-a}{3}$

Cộng vế theo vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}$$

Theo bất đẳng thức Côsi $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}\geq 6$ nên $P\geq 2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=2$.

Câu 8. (Trường chuyên tỉnh Hòa Bình dành cho tất cả các thí sinh năm 2019-2020) Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $a+b=4ab$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{4b^2+1}+\dfrac{b}{4a^2+1}\geq\dfrac{1}{2}$

Lời giải

Từ $a+b=4ab$

Áp dụng BDDT (AM- GM) ta có $ab\geq\dfrac{1}{4}$

Ta có $$\frac{a}{4b^2+1}+\frac{b}{4a^2+1}=\frac{a^2}{4ab^2+a}+\frac{b^2}{4a^2b+b}\geq\frac{(a+b)^2}{4ab(a+b)+(a+b)}$$
$$=\frac{a+b}{4ab+1}=\frac{4ab}{4ab+1}=1-\frac{1}{4ab+1}\geq\frac{1}{2}$$

Dấu đẳng thức sảy ra khi a= b= $\dfrac{1}{2}$.

Câu 9. (Trường chuyên tỉnh Kon Tum cho tất cả các thí sinh năm 2019-2020) Chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{400}}<38.$$

Lời giải

Chứng minh $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{400}}<38$.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{400}}=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{400}+\sqrt{400}}\right).$$

$$<2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{400}+\sqrt{399}}\right).$$

Ta có : $2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{400}+\sqrt{399}}\right)$

$$=\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+...+\sqrt{400}-\sqrt{399}\right).$$

$$=2\left(-\sqrt{1}+\sqrt{400}\right)=38$$

Vậy $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{400}}<38$.

Câu 10. (Trường chuyên tỉnh Kon Tum vòng 2 năm 2019-2020) Cho số thực x thỏa mãn $-1\le x\le 1$. Chứng minh rằng $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\ge 2-x^2$.

Lời giải

Cho số thực x thỏa mãn $-1\le x\le 1$. Chứng minh rằng $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\ge 2-x^2$.

Với $-1\le x\le 1$ ta có $0\ge -x^2 \Leftrightarrow 2+2\sqrt{1-x^2}\ge 2-x^2+2\sqrt{1-x^2}$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)^2\ge\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\ge 1+\sqrt{1-x^2}$$

Lại có : $0\le 1-x^2\le 1, \forall x\in[-1;1] \Rightarrow \sqrt{1-x^2}\ge 1-x^2 \Leftrightarrow 1+\sqrt{1-x^2}\ge 2-x^2$

Vậy $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\ge\sqrt{1-x^2}\ge 2-x^2, \forall x\in[-1;1]$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $\begin{cases}-x^2=0\\ \sqrt{1-x^2}=1-x^2\end{cases} \Leftrightarrow x=0$

Câu 11. (Trường chuyên tỉnh Nam Định cho lớp chuyên KHTN năm 2019-2020) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=2019xyz$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2+1+\sqrt{2019x^2+1}}{x}+\frac{y^2+1+\sqrt{2019y^2+1}}{y}+\frac{z^2+1+\sqrt{2019z^2+1}}{z}\le 2019.2020xyz.$$

Lời giải

Từ giả thiết ta có $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=2019$.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$x+\frac{1}{x}+\sqrt{2019+\frac{1}{x^2}}+y+\frac{1}{y}+\sqrt{2019+\frac{1}{y^2}}+z+\frac{1}{z}+\sqrt{2019+\frac{1}{z^2}}\le 2020(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}+\sqrt{2019+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{y}+\sqrt{2019+\frac{1}{y^2}}+\frac{1}{z}+\sqrt{2019+\frac{1}{z^2}}\le 2019(x+y+z)\quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Cô si ta có

$$VT(1)=\frac{1}{x}+\sqrt{2019+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{y}+\sqrt{2019+\frac{1}{y^2}}+\frac{1}{z}+\sqrt{2019+\frac{1}{z^2}}$$

$$=\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{y}+\sqrt{\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{y^2}}+\frac{1}{z}+\sqrt{\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{z^2}}.$$

$$=\frac{1}{x}+\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)}+\frac{1}{y}+\sqrt{\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}+\frac{1}{z}+\sqrt{\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{y}\right)}$$

$$\le 3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Ta cần chứng minh

$$3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\le 2019(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow 3\left(xy+yz+zx\right)\le\left(2019xyz\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 3\left(xy+yz+zx\right)\le\left(x+y+z\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 0\le\left(x-y\right)^2+\left(y-z\right)^2+\left(z-x\right)^2.$$

Điều phải chứng minh..

Câu 12. (Trường chuyên tỉnh Nam Định chuyên toán năm 2019-2020) Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $\left(a^4+b^4\right)\left(b^4+c^4\right)\left(c^4+a^4\right)=8$. Chứng minh rằng $\left(a^2-ab+b^2\right)\left(b^2-bc+c^2\right)\left(c^2-ca+a^2\right)\ge 1$.

Lời giải

+ Ta chứng minh kết quả $2\left(a^2-ab+b^2\right)^2\ge a^4+b^4$ (1).

Thật vậy, $(1)\Leftrightarrow 2\left(a^4+b^4+a^2b^2+2a^2b^2-2ab\left(a^2+b^2\right)\right)\ge a^4+b^4\Leftrightarrow\left(a^2+b^2-2ab\right)^2\ge 0$

$\Leftrightarrow(a-b)^4\ge 0$, bất đẳng thức đúng, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

+ Tương tự có (2): $2\left(b^2-bc+c^2\right)^2\ge b^4+c^4$, (3): $2\left(c^2-ca+a^2\right)^2\ge c^4+a^4$.

+ Thấy các vế của (1), (2), (3) đều không âm, nhân theo vế các bất đẳng thức này ta được

$$8\left(a^2-ab+b^2\right)^2\left(b^2-bc+c^2\right)^2\left(c^2-ca+a^2\right)^2\ge\left(a^4+b^4\right)\left(b^4+c^4\right)\left(c^4+a^4\right)=8$$

hay $\left(a^2-ab+b^2\right)^2\left(b^2-bc+c^2\right)^2\left(c^2-ca+a^2\right)^2\ge 1\,(*)$.

Do $a^2-ab+b^2,\ b^2-bc+c^2,\ c^2-ca+a^2\ge 0$ nên từ (*) suy ra

$\left(a^2-ab+b^2\right)\left(b^2-bc+c^2\right)\left(c^2-ca+a^2\right)\ge 1$, có Đpcm.

Câu 13. (Trường chuyên tỉnh Nam Định lớp chuyên KHXH năm 2019-2020) Cho x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z=\frac{3}{2}$. Chứng minh rằng

$$x+2xy+4xyz\le 2.$$

Lời giải

Theo bất đẳng thức Cô si ta có $x+2xy+4xyz=x+4xy\left(z+\frac{1}{2}\right)\le x+4x\frac{\left(y+z+\frac{1}{2}\right)^2}{4}=x+x\left(2-x\right)^2$. .

Với x,y,z không âm và $x+y+z=\frac{3}{2}\Rightarrow 0\le x\le\frac{3}{2}$.

Ta cần chứng minh $x+x\left(2-x\right)^2\le 2\Leftrightarrow\left(x-2\right)+x\left(2-x\right)^2\le 0\Leftrightarrow 1+x\left(x-2\right)\ge 0\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Câu 14. (Trường chuyên tỉnh Ninh Bình chuyên toán năm 2019-2020) Cho ba số thực dương x, y, z. Chứng minh $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 3\left(\frac{1}{x+2y}+\frac{1}{y+2z}+\frac{1}{z+2x}\right)$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải

Cho n số thực dương $x_1,x_2,...,x_n$ .Ta có $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\ge\frac{n^2}{x_1+x_2+...+x_n}$.

Đẳng thức xảy ra khi $x_1=x_2=...=x_n$.

(Học sinh không phải chứng minh, theo Công văn 1234).

Áp dụng, ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}\ge\frac{3^2}{x+y+y}=\frac{9}{x+2y}$. Đẳng thức xảy ra khi $x=y$..

Tương tự ta có:

* $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{y+2z}$. Đẳng thức xảy ra khi $y=z$.

* $\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\ge\frac{9}{z+2x}$. Đẳng thức xảy ra khi $z=x$..

Cộng theo từng vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9\left(\frac{1}{x+2y}+\frac{1}{y+2z}+\frac{1}{z+2x}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 3\left(\frac{1}{x+2y}+\frac{1}{y+2z}+\frac{1}{z+2x}\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z$..

Câu 15. (Trường chuyên tỉnh Phú Yên Vòng 2 năm 2019-2020) Cho a,b,c là các số thực dương thỏa

mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng $a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{c^2+1}+c\sqrt{a^2+1}\ge 2$.
Dấu "=" xảy ra khi nào?

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương $\left(a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{c^2+1}+c\sqrt{a^2+1}\right)^2\ge 4\quad(6)$.

Đặt $S=\left(a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{c^2+1}+c\sqrt{a^2+1}\right)^2$. Ta có

$$S=a^2(b^2+1)+b^2(c^2+1)+c^2(a^2+1)+2ab\sqrt{(b^2+1)(c^2+1)}$$
$$+2ac\sqrt{(b^2+1)(a^2+1)}+2bc\sqrt{(c^2+1)(a^2+1)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\sqrt{(b^2+1)(c^2+1)}=\sqrt{b^2c^2+b^2+c^2+1}\ge bc+1\quad(6.1)$$

$$\sqrt{(b^2+1)(a^2+1)}=\sqrt{b^2a^2+a^2+b^2+1}\ge ab+1\quad(6.2)$$

$$\sqrt{(a^2+1)(c^2+1)}=\sqrt{a^2c^2+a^2+c^2+1}\ge ac+1\quad(6.3).$$

Kết hợp (6.1), (6.2) và (6.3) ta được

$$S\ge a^2(b^2+1)+b^2(c^2+1)+c^2(a^2+1)+2ab(bc+1)+2ac(ab+1)+2bc(ac+1)$$
$$=(ab+bc+ca)^2+a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca).$$

Mặt khác, ta lại có $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$. Suy ra

$$S\ge(ab+bc+ca)^2+3(ab+ac+ca)=4$$

Vậy bất đẳng thức (6) đúng.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 16. (Trường chuyên tỉnh PTNK (VÒNG 2) năm 2019-2020) Cho a và b là hai số thực phân biệt thỏa mãn điều kiện $a^4-4a=b^4-4b$.

a) Chứng minh rằng $0<a+b<2$.

b) Biết rằng $a^4-4a=b^4-4b=k>0$. Chứng minh rằng $-\sqrt{k}<ab<0$.

Lời giải

a) Ta có $a^4-b^4=4(a-b)$, mà $a^4-b^4=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$ nên đẳng thức được viết lại thành $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)=4(a-b)$.

Mà $a\ne b$ nên $(a+b)(a^2+b^2)=4$. Vì $a^2+b^2>0$ (do a,b không thể đồng thời bằng 0) nên ta có $a+b>0$.

Ngoài ra, ta cũng có đánh giá $a^2+b^2>\dfrac{(a+b)^2}{2}$ (đẳng thức không xảy ra vì $a\ne b$)

Nên $4>\frac{(a+b)^3}{2}\Leftrightarrow(a+b)^3<8\Leftrightarrow a+b<2$.

Vậy ta được $0<a+b<2$.

b) Rõ ràng $ab\neq 0$, ta sẽ chứng minh a,b trái dấu. Ta xét hai trường hợp:

Nếu $a>0,b>0$ thì $a^4-4a=a\left(a^3-4\right)>0$ nên $a>\sqrt[3]{4}>1$. Tương tự thì $b>1$. Khi đó $a+b>2$, mâu thuẫn với a).

Nếu $a<0,b<0$ thì $a+b<0$, cũng mâu thuẫn với a).

Do đó a,b trái dấu và $ab<0$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a<0<b$ thì đặt $c=-a>0$, ta viết lại $c^4+4c=b^4-4b=k>0$. Từ đây dễ thấy $(b-c)\left(b^2+c^2\right)=4$ và $b\neq c$. Ta cần chứng minh $-\sqrt{k}<ab\Leftrightarrow-\sqrt{k}<-bc\Leftrightarrow bc<\sqrt{k}$.

Câu 17. (Trường chuyên tỉnh Quảng Ninh Vòng 2 năm 2019-2020) Cho các số thực a,b,c thỏa mãn: $|a|\le 1$, $|b|\le 1$, $|c|\le 1$ và $a+b+c=0$.
Chứng minh: $a^{2018}+b^{2019}+c^{2020}\le 2$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $(a+1)(b+1)(c+1)\ge 0$ và $(1-a)(1-b)(1-c)\ge 0$

suy ra $(a+1)(b+1)(c+1)+(1-a)(1-b)(1-c)\ge 0$

Rút gọn ta được: $-2(ab+bc+ba)\le 2$.

Mặt khác: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)\Rightarrow a^2+b^2+c^2\le 2$.

Vì $|a|\le 1\Rightarrow a^{2017}\le a^2$, $|b|\le 1\Rightarrow b^{2018}\le b^2$, $|c|\le 1\Rightarrow c^{2019}\le c^2$

Nên: $a^{2018}+b^{2019}+c^{2020}\le a^2+b^2+c^2\le 2$.

Dấu "=" xảy ra khi chẳng hạn $a=0,b=1,c=-1$.

Câu 18. (Trường chuyên tỉnh Sơn La Vòng 2 năm 2019-2020) Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn: $a+b+c\le 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{362}{ab+bc+ca}\ge 121$$

Lời giải

Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn: $a+b+c\le 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{362}{ab+bc+ca}\ge 121.$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{(a+b+c)}$ (*)

(học sinh chứng minh (*) bằng cách nhân chéo và áp dụng BĐT cauchy)

$$A=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{362}{ab+bc+ca}$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{360}{ab+bc+ca}$$

Ta có: $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\ge\frac{9}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}$

$$=\frac{9}{(a+b+c)^2}\ge\frac{9}{9}=1\quad(a+b+c\le 3)\quad(1)$$

Dấu bằng (1) xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

$$\frac{360}{ab+bc+ca}\ge\frac{3.360}{(a+b+c)^2}\ge 120 \text{ vì } \left(ab+bc+ca\le\frac{(a+b+c)^2}{3}\right)\quad(2)$$

Dấu bằng (2) xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Từ (1) và (2) suy ra

$$A=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{362}{ab+bc+ca}\ge 120+1=121.$$

Vậy $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{362}{ab+bc+ca}\ge 121$. *(đpcm)*

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 19. (Trường chuyên tỉnh Thái Nguyên chuyên toán năm 2019-2020) Cho $A=-a^2+4a-5$. Chứng minh $A<0\ \forall a\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Ta có: $A=-a^2+4a-5=-\left[(a-2)^2+1\right]=-(a-2)^2-1<0\ \forall a\in\mathbb{R}$.

Câu 20. (Trường chuyên tỉnh Tây Ninh Vòng 2 năm 2019-2020) Chứng minh $(x+y+z)^3+9xyz\ge 4(x+y+z)(xy+yz+zx)$ với x,y,z là các số thực không âm. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải

Chứng minh $(x+y+z)^3+9xyz\ge 4(x+y+z)(xy+yz+zx)\ (*)$ với x,y,z là các số thực không âm. Đẳng thức xảy ra khi nào?

$(*)\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3+3xyz-x^2y-x^2z-y^2x-y^2z-z^2x-z^2y\ge 0$.

$\Leftrightarrow x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y)\ge 0\ (**)$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $x\ge y\ge z\ge 0$.

Khi đó $(**)\Leftrightarrow z(z-x)(z-y)+(x-y)\left[x(x-z)-y(y-z)\right]\ge 0$ (hiển nhiên đúng)

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$ hoặc hai trong 3 số bằng nhau, số còn lại là 0.

Câu 21. (Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu thi chung năm 2019-2020) Cho các số thực dương x, y. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2} + \frac{\sqrt{xy}}{x+y}.$$

Lời giải

Áp dụng BĐT cô si ta có:

$$P = \sqrt{\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2} + \frac{\sqrt{xy}}{x+y} = \frac{x^2+y^2}{xy} + \frac{\sqrt{xy}}{x+y} = \frac{(x+y)^2}{xy} + 4 + \frac{\sqrt{xy}}{x+y} - 6$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{(x+y)^2}{xy}.4} + \frac{\sqrt{xy}}{x+y} - 6 = \frac{4(x+y)}{\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{xy}}{x+y} - 6$$

$$= \frac{(x+y)}{4\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{xy}}{x+y} + \frac{15(x+y)}{4\sqrt{xy}} - 6 \geq 2\sqrt{\frac{(x+y)}{4\sqrt{xy}}.\frac{\sqrt{xy}}{x+y}} + \frac{15.2\sqrt{xy}}{4\sqrt{xy}} - 6 = \frac{5}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y$.

Vậy min $P = \frac{5}{2}$..

Câu 22. (Trường chuyên tỉnh Long An chuyên toán năm 2019-2020) Cho các số thực a,b sao cho $a \geq 4; b \geq 6$. Chứng minh: $\sqrt{2a-4} + \sqrt{3b-9} + \frac{11a+7b}{2} \leq ab + 24$.

Lời giải

$$\sqrt{2a-4} = \sqrt{2(a-2)} \leq \frac{a-2+2}{2}; \sqrt{3b-9} = \sqrt{3(b-3)} \leq \frac{b-3+3}{2}$$

$$\sqrt{2a-4} + \sqrt{3b-9} \leq \frac{a+b}{2}$$

$$(a-4)(b-6) \geq 0 \Leftrightarrow 6a + 4b \leq ab + 24$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Câu 23. (Trường chuyên tỉnh Phú Thọ vòng 2 năm 2019-2020) Cho a,b,c là các số thực dương, chứng minh rằng $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} \geq \frac{4a}{a+c}$.

Lời giải

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} \geq \frac{4a}{a+c} \Leftrightarrow (ac+b^2)(a+c) \geq 4abc$$

Theo côsi

$ac + b^2 \geq 2\sqrt{ab^2c} > 0$

$a + c \geq 2\sqrt{ac} > 0$

$\Rightarrow \left(ac + b^2\right)\left(a + c\right) \geq 4abc.$

Câu 24. (Trường chuyên tỉnh Phú Thọ vòng 2 năm 2019-2020) Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n sao cho $\frac{n^{2019}}{2^n} < \frac{1}{2020}$

Lời giải

Ta chứng minh $n = 1000000000$ thỏa mãn

Thật vậy

$$\frac{\left(10^9\right)^{2019}}{2^{1000000000}} = \frac{10^{9.2019}}{2^{1000000000}} < \frac{\left(2^4\right)^{9.2019}}{2^{1000000000}} = \frac{2^{4.9.2019}}{2^{1000000000}} = \frac{1}{2^{999927316}} < \frac{1}{2020}.$$

Tiếp theo ta chứng minh nhận xét:

Nếu $n = a > 1000000000$ thỏa mãn, thì $n = 2a$ cũng thỏa mãn

Thật vậy

$$\frac{n^{2019}}{2^n} = \frac{(2a)^{2019}}{2^{2a}} = \frac{2^{2019}}{2^a}.\frac{a^{2019}}{2^a} < \frac{2^{2019}}{2^{1000000000}}.\frac{a^{2019}}{2^a} < \frac{a^{2019}}{2^a} < \frac{1}{2020}.$$

Từ nhận xét trên kết hợp với quy nạp, ta thấy $n = 2^k.10^9$ thỏa mãn bài toán với mọi $k \in \mathbb{N}$.

Vậy tồn tại vô số số nguyên dương n

Câu 25. (Trường chuyên tỉnh Quảng Bình chuyên toán năm 2019-2020)

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x + y + z = \sqrt{2}$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{2019x^2 + 2xy + 2019y^2} + \sqrt{2019y^2 + 2yz + 2019z^2} + \sqrt{2019z^2 + 2zx + 2019x^2} \geq 2\sqrt{2020}.$$

Lời giải

Đặt $S = \sqrt{2019x^2 + 2xy + 2019y^2} + \sqrt{2019y^2 + 2yz + 2019z^2} + \sqrt{2019z^2 + 2zx + 2019x^2}$

Ta có $2019x^2 + 2xy + 2019y^2 = 1009\left(x - y\right)^2 + 1010\left(x + y\right)^2 \geq 1010\left(x + y\right)^2$

Suy ra $\sqrt{2019x^2 + 2xy + 2019y^2} \geq \sqrt{1010}\left(x + y\right)$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Tương tự

$\sqrt{2019y^2 + 2yz + 2019z^2} \geq \sqrt{1010}\left(y + z\right).$

$\sqrt{2019z^2 + 2zx + 2019x^2} \geq \sqrt{1010}\left(z + x\right).$

Do đó $S \geq 2\sqrt{1010}\left(x + y + z\right) = 2\sqrt{2020}.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 26. (Trường chuyên tỉnh Quảng Trị Vòng 2 năm 2019-2020)Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a+b+c+2=abc$.

Chứng minh $\dfrac{1}{\sqrt{ab}}+\dfrac{1}{\sqrt{bc}}+\dfrac{1}{\sqrt{ca}} \le \dfrac{3}{2}$.

Lời giải

$a+b+c+2=abc \Leftrightarrow \dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{c+1}=1.$

Đặt $x=\dfrac{1}{a+1}, y=\dfrac{1}{b+1}, z=\dfrac{1}{c+1}$.

Ta có $x+y+z=1$ và $a=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{y+z}{x}, b=\dfrac{z+x}{y}, c=\dfrac{x+y}{z}$.

$$\frac{2}{\sqrt{ab}}+\frac{2}{\sqrt{bc}}+\frac{2}{\sqrt{ca}}=2\sqrt{\frac{xy}{(x+z)(y+z)}}+2\sqrt{\frac{yz}{(y+x)(z+x)}}+2\sqrt{\frac{xz}{(x+y)(z+y)}}$$

$$\le \frac{x}{x+z}+\frac{y}{y+z}+\frac{y}{y+x}+\frac{z}{z+x}+\frac{x}{x+y}+\frac{z}{z+y}=3.$$

Câu 27. (Trường chuyên tỉnh Thanh hóa chuyên toán năm 2019-2020) Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng ;

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}=1$$

Lời giải

Ta có

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{abc+ab+a}+\frac{abc}{a^2bc+abc+ab}$$
$$=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{ab+a+1}+\frac{1}{ab+a+1}=1 \quad (Do\, abc=1)$$

Câu 28.* *(Trường chuyên tỉnh Thừa Thiên Huế vòng 2 năm 2019-2020)

Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 2$. Chứng minh

$$\frac{x}{2x^2+y^2+5}+\frac{2y}{6y^2+z^2+6}+\frac{4z}{3z^2+4x^2+16} \le \frac{1}{2}.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm, ta có

$2x^2+y^2+5=(x^2+y^2)+(x^2+1)+4 \ge 2xy+2x+4=2(xy+x+2),$

$6y^2+z^2+6=(4y^2+z^2)+2(y^2+1)+4 \ge 4yz+4y+4=4(yz+y+1),$

$3z^2+4x^2+16=(z^2+4x^2)+2(z^2+4)+8 \ge 4zx+8z+8=4(zx+2z+2).$

Suy ra $\frac{x}{2x^2+y^2+5} \le \frac{x}{2(xy+x+2)}$,

$$\frac{2y}{6x^2+z^2+6} \le \frac{y}{2(yz+y+1)},$$

$$\frac{4z}{3z^2+4x^2+16} \le \frac{z}{zx+2z+2)}.$$

Cộng các bất đẳng thức theo vế, ta được

$$P \le \frac{x}{2(xy+x+2)} + \frac{y}{2(yz+y+1)} + \frac{z}{zx+2z+2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{xy+x+2} + \frac{y}{yz+y+1} + \frac{2z}{zx+2z+2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{xy+x+2} + \frac{xy}{xyz+xy+x} + \frac{2z}{zx+2z+xyz}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{xy+x+2} + \frac{xy}{xy+x+2} + \frac{2}{x+xy+2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}.$$

Câu 29. (Trường chuyên tỉnh Vĩnh Phúc vòng 2 năm 2019-2020)

Cho các số nguyên dương a,b,c thỏa mãn $abc \ge 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}} + \frac{b}{\sqrt{c+\sqrt{ab}}} + \frac{c}{\sqrt{a+\sqrt{bc}}} \ge \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Lời giải

Câu 30. (Trường chuyên tỉnh Yên Bái vòng 2 năm 2019-2020)

Cho 3 số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \ge \frac{3}{4}.$$

Lời giải

$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{1}{8}(1+b) + \frac{1}{8}(1+c) \ge \frac{3a}{4}$ dấu bằng xẩy ra khi $\begin{cases} b=c \\ 2a=1+b \end{cases}$

$\frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{1}{8}(1+c) + \frac{1}{8}(1+a) \ge \frac{3b}{4}$ dấu bằng xẩy ra khi $\begin{cases} a=c \\ 2b=1+c \end{cases}$

$\frac{c^3}{(1+a)(1+b)} + \frac{1}{8}(1+a) + \frac{1}{8}(1+b) \ge \frac{3c}{4}$ dấu bằng xẩy ra khi $\begin{cases} a=b \\ 2c=1+b \end{cases}$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}(a+b+c)\geq\frac{3}{4}(a+b+c)$$

$\Leftrightarrow\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\geq\frac{1}{2}(a+b+c)-\frac{3}{4}\geq\frac{3\sqrt[3]{abc}}{2}-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$ Dấu bằng xẩy ra khi $a=b=c=1$.

Câu 31. (Trường chuyên tỉnh Bình Định vòng 2 năm 2019-2020) Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn $xy+yz+zx-xyz=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}.$$

Lời giải

Để giải quyết bài toán trên ta cần chứng minh và sử dụng hai bổ đề sau:

Bổ đề 1. Với a, b, c là các số thực dương, khi đó $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bổ đề 2. Với a, b, c là các số thực dương m, n, p là số thực, khi đó $\frac{m^2}{a}+\frac{n^2}{b}+\frac{p}{c}\geq\frac{(m+n+p)^2}{a+b+c}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{m}{a}=\frac{n}{b}=\frac{p}{c}$. (Bất đẳng thức ***Cauchy–Schwarz*** dạng Engel).

● Ta có: $(*)\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, theo bổ đề 1 suy ra: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9\longrightarrow x+y+z\geq 9$.

● Theo bổ đề 2, ta có đánh giá sau: $P=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}=\frac{x+y+z}{2}\geq\frac{9}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}\\ x=y=z\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{9}{2}$ khi $x=y=z=3$.

Câu 32. (Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh vòng 2 năm 2019-2020) Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\sqrt{x^2-6x+25}+\sqrt{y^2-6y+25}+\sqrt{z^2-6z+25}.$$

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $0\leq x;y;z\leq 3$. Ta có $9(x^2-6x+25)=(x^2-30x+225)+8x^2-24x=(15-x)^2+8x(x-3)\leq(15-x)^2$ với $\forall x, 0\leq x\leq 3$

(do $0 \le x \le 3 \Rightarrow 8x(x-3) \le 0$, dấu bằng xảy ra khi $x=0$ hoặc $x=3$).

Do đó $\sqrt{9(x^2-6x+25)} \le 15-x$ hay $\sqrt{x^2-6x+25} \le \dfrac{15-x}{3}$ với $\forall x, 0 \le x \le 3$.

Tương tự $\sqrt{y^2-6y+25} \le \dfrac{15-y}{3}; \sqrt{z^2-6z+25} \le \dfrac{15-z}{3}$ với $\forall y,z: 0 \le y,z \le 3$.

Do đó, $M \le \dfrac{15-x+15-y+15-z}{3} = \dfrac{45-3}{3} = 14$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(x;y;z)=(3;0;0)$ hoặc $(x;y;z)=(0;3;0)$ hoặc $(x;y;z)=(0;0;3)$..

Ta có $5(x^2-6x+25)=(x^2-22x+121)+(4x^2-8x+4)$

$=(11-x)^2+4(x-1)^2 \ge (11-x)^2$ với $\forall x, 0 \le x \le 3$

(do $4(x-1)^2 \ge 0$, dấu bằng xảy ra khi $x=1$).

Do đó $\sqrt{5(x^2-6x+25)} \ge 11-x$ hay $\sqrt{x^2-6x+25} \ge \dfrac{11-x}{\sqrt{5}}$ với $\forall x, 0 \le x \le 3$.

Tương tự $\sqrt{y^2-6y+25} \ge \dfrac{11-y}{\sqrt{5}}; \sqrt{z^2-6z+25} \ge \dfrac{11-z}{\sqrt{5}}$ với $\forall y,z: 0 \le y,z \le 3$.

Do đó, $M \ge \dfrac{11-x+11-y+11-z}{\sqrt{5}} = \dfrac{33-3}{\sqrt{5}} = 6\sqrt{5}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Vậy $GTLN$ của M là 14 đạt được khi $(x;y;z)=(3;0;0)$ hoặc $(x;y;z)=(0;3;0)$ hoặc $(x;y;z)=(0;0;3)$ và $GTNN$ của M là $6\sqrt{5}$ đạt được khi $x=y=z=1$..

Câu 33. (Trường chuyên tỉnh Cao Bằng vòng 2 năm 2019-2020) Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $R=\dfrac{a}{1+b^2}+\dfrac{b}{1+c^2}+\dfrac{c}{1+a^2}$.

Lời giải

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $R=\dfrac{a}{1+b^2}+\dfrac{b}{1+c^2}+\dfrac{c}{1+a^2}$.

Ta có $\dfrac{a}{1+b^2}=a-\dfrac{ab^2}{1+b^2} \ge a-\dfrac{ab^2}{2b}=a-\dfrac{ab}{2}$

Tương tự $\dfrac{b}{1+c^2} \ge b-\dfrac{bc}{2}$; $\dfrac{c}{1+a^2} \ge c-\dfrac{ca}{2}$

Suy ra $R \geq a+b+c-\frac{1}{2}(ab+bc+ca)=3-\frac{1}{2}(ab+bc+ca)$

Mặt khác

$$3^2=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$
$$=\frac{a^2+b^2-2ab}{2}+\frac{b^2+c^2-2bc}{2}+\frac{c^2+a^2-2ca}{2}+3ab+3bc+3ca$$
$$=\frac{(a-b)^2}{2}+\frac{(b-c)^2}{2}+\frac{(c-a)^2}{2}+3(ab+bc+ca)$$
$$\geq 3(ab+bc+ca)$$
$$\Rightarrow ab+bc+ca\leq 3$$

Suy ra $R\geq 3-\frac{1}{2}.3=\frac{3}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức R là $\frac{3}{2}$.

Câu 34. (Trường chuyên tỉnh Chuyên ĐHSP vòng 1 năm 2019-2020)

Cho các số thực x, y thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=xy(x-2)(y+6)+13x^2+4y^2-26x+24y+46.$$

Lời giải

Biểu thức P có thể được viết lại dưới dạng $P=x(x-2)y(y+6)+13x(x-2)+4y(y+6)+46$.

Đặt $a=x(x-2)=(x-1)^2-1$ và $b=y(y-+6)=(y+3)^2-9$ thì ta có

$P=ab+13a+4b+46=(a+4)(b+13)-6$

$=\left[(x-1)^2+3\right]\left[(y+3)^2+4\right]-6\geq 3.4-6$

$=6$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$ và $y=-3$. Vậy $\min P=6$.

Câu 35. (Trường chuyên tỉnh Cần thơ chuyên toán năm 2019-2020)

a)Cho a,b,c là các số thực bất kì và x,y,z là các số dương. Chứng minh:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

b)Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P=\frac{a^3+8}{a^3(b+c)}+\frac{b^3+8}{b^3(a+c)}+\frac{c^3+8}{c^3(a+b)}$ với a,b,c là số dương thỏa mãn $abc=1$.

Lời giải

a)

Ta có $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}$ Đẳng thức xãy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$

$\Rightarrow \frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ Đẳng thức xãy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$

b) Ta có

$$\frac{3a}{a^3(b+c)}+\frac{3b}{b^3(a+c)}+\frac{3c}{c^3(a+b)}\ge\frac{3(ab+bc+ca)^2}{2(a+b+c)}$$

$$P\ge\frac{3(ab+bc+ca)^2}{2(a+b+c)}+3(bc+ca+ad)\ge\frac{27}{2}$$

Vậy GTNN là $\frac{27}{2}$ khi $a=b=c=1$

Câu 36. (Trường chuyên tỉnh DAK NONG vòng 2 năm 2019-2020) Cho hai số thực a, b thỏa mãn $1\le a\le 2,\ 1\le b\le 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(a+\frac{2}{b}\right)\left(b+\frac{2}{a}\right)$.

Lời giải

Biến đổi $P=ab+\frac{4}{ab}+4\ge 2\sqrt{ab\frac{4}{ab}}+4=8$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}ab=2\\1\le a,b\le 2\end{cases}$.

Mặt khác $1\le a\le 2,\ 1\le b\le 2$ suy ra $1\le ab\le 4\Leftrightarrow(ab-1)(ab-4)\le 0\Leftrightarrow(ab)^2\le 5ab-4$.

Khi đó $P=\frac{(ab)^2+4ab+4}{ab}\le\frac{5ab-4+4ab+4}{ab}=9$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}ab=1\\ab=4\end{array}\right.\\1\le a,b\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b=2\\a=b=1\end{array}\right.$.

Vậy $P_{\min}=8$ khi $ab=2$ và $1\le a,b\le 2$ và $P_{Max}=9$ khi $a=b=1$ hoặc $a=b=2$.

Câu 37. (Trường chuyên tỉnh Gia lai vòng 2 năm 2019-2020) Cho các số dương x, y, z thoả mãn điều kiện $xy+yz+zx=5$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $3x^2+3y^2+z^2$.

Lời giải

Với hai số dương x, y ta có $(x-y)^2\ge 0$.

Suy ra $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\ge xy$, đẳng thức xảy ra khi $x=y$.

Tương tự ta có $y^2+\frac{z^2}{4}\ge zy$; $\frac{z^2}{4}+x^2\ge zx$, các đẳng thức xảy ra khi $x=y=\frac{z}{2}$

Suy ra $\frac{3x^2}{2}+\frac{3y^2}{2}+\frac{z^2}{2}\ge xy+yz+zx$, đẳng thức xảy ra khi $x=y=\frac{z}{2}$

Hay $3x^2+3y^2+z^2\ge 10$, đẳng thức xảy ra khi $x=y=1, z=2$. Vậy GTNN cần tìm là 10, đạt được khi $x=y=1, z=2$.

Câu 38. (Trường chuyên tỉnh HCM năm 2019-2020) Cho x, y, z là các số thực thuộc đoạn $\left[0;2\right]$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$.

a)Chứng minh rằng $x^2+y^2+z^2<6$.

b)Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^3+y^3+z^3-3xyz$.

Lời giải

a)Do $x,y,z\in\left[0,2\right]$ nên ta có $x^2\le 2x; y^2\le 2y; z^2\le 2z$, suy ra

$x^2+y^2+z^2\le 2\left(x+y+z\right)=6$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x,y,z\in\left\{0,2\right\} \\ x+y+z=3 \end{cases}$, tuy nhiên điều này lại không thể xảy ra, do đó ta được

$x^2+y^2+z^2<6$ □

b)Đặt $t=xy+yz+zx$. Áp dụng hằng đẳng thức quen thuộc

$x^3+y^3+z^3-3xyz=\left(x+y+z\right)\left[\left(x+y+z\right)^2-3\left(xy+yz+zx\right)\right]$

Suy ra $P=9\left(3-t\right)$ (1)

Mặt khác, do $x,y,z\in\left[0,2\right]$ nên ta có

$\left(x-2\right)\left(y-2\right)\left(z-2\right)\le 0$

$\Rightarrow xyz+4\left(x+y+z\right)-2\left(xy+yz+zx\right)-8\le 0$

$\Rightarrow xyz+4\le 2t$ (do $x+y+z=3$)

$\Rightarrow t\ge 2$ (do $xyz\ge 0$) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $P\le 9$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\left(x,y,z\right)$ là hoán vị của $\left(0,1,2\right)$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 9 □

Câu 39. (Trường chuyên tỉnh Hà Giang vòng 1 năm 2019-2020)

Giả sử x và y là hai số thỏa mãn $x>y$ và $x.y=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$.

Lời giải

$$M=\frac{x^2+y^2}{x-y}=\frac{x^2-2xy+y^2+2xy}{x-y}=\frac{(x-y)^2+2xy}{x-y}$$

Do $x>y$ và $x.y=1$ nên $M=\dfrac{(x-y)^2}{x-y}+\dfrac{2xy}{x-y}=x-y+\dfrac{2.1}{x-y}$

Vì $x > y \Rightarrow \begin{cases} x - y > 0 \\ \dfrac{2}{x-y} > 0 \end{cases}$ do đó $M = x - y + \dfrac{2.1}{x-y} \geq 2\sqrt{(x-y)\left(\dfrac{2}{x-y}\right)} = 2\sqrt{2}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x - y = \dfrac{2}{x-y} \Leftrightarrow x - y = \sqrt{2}$

Giải hpt $\begin{cases} x - y = \sqrt{2} \\ x.y = 1 \end{cases}$ ta được $x = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$; $y = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

Vậy M có giá trị nhỏ nhất là $2\sqrt{2}$ khi $x = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$; $y = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

Câu 40. (Trường chuyên tỉnh Hà Nội chuyên tin năm 2019-2020)

Cho các số thực dương a, b, c thay đổi và thoả mãn $ab + bc + ca + abc = 4$.

1) Chứng minh $\dfrac{1}{a+2} + \dfrac{1}{b+2} + \dfrac{1}{c+2} = 1$.

2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)+4}} + \frac{1}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)+4}} + \frac{1}{\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)+4}}.$$

Lời giải

1.

Có: $\dfrac{1}{a+2} + \dfrac{1}{b+2} + \dfrac{1}{c+2} = 1$

$\Leftrightarrow (a+2)(b+2) + (b+2)(c+2) + (c+2)(a+2) = (a+2)(b+2)(c+2) \quad (1)$

$\mathrm{VT} = ab + bc + ca + 4(a+b+c) + 12$

$\mathrm{VP} = 8 + 4(a+b+c) + 2(ab+bc+ca) + abc$

Từ đó: $(1) \Leftrightarrow ab + bc + ca + abc = 4$. Suy ra đpcm.

2..Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)+4}} + \frac{1}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)+4}} + \frac{1}{\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)+4}}.$$

Có: $2\left(a^2+b^2\right) \geq (a+b)^2 \Rightarrow \sqrt{2\left(a^2+b^2\right)} \geq a + b$

Do đó $\dfrac{1}{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)+4}} \leq \dfrac{1}{a+b+4}$

Chứng minh tương tự suy ra $P \le \dfrac{1}{a+b+4} + \dfrac{1}{b+c+4} + \dfrac{1}{c+a+4}$.

Mặt khác: $\dfrac{1}{a+b+4} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a+2} + \dfrac{1}{b+2}\right)$,

Chứng minh tương tự suy ra $P \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a+2} + \dfrac{1}{b+2} + \dfrac{1}{c+2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Vậy P đạt giá trị lớn nhất là $\dfrac{1}{2}$ khi $a = b = c = 1$.

Câu 41. (Trường chuyên tỉnh Hà nội chuyên toán năm 2019-2020) Cho biểu thức $K = ab + 4ac - 4bc$, với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + 2c = 1$.

1) Chứng minh $K \ge -\dfrac{1}{2}$.

2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức K.

Lời giải

1..Chứng minh $K \ge -\dfrac{1}{2}$

$K \ge -4bc$ (vì $ab \ge 0, ac \ge 0$)

$\Rightarrow K \ge -2b.2c \ge -2.\dfrac{(b+2c)^2}{4} = -\dfrac{(1-a)^2}{2}$

Chứng minh được $0 \le a \le 1 \Rightarrow (1-a)^2 \le 1$

$\Rightarrow K \ge -\dfrac{(1-a)^2}{2} \ge -\dfrac{1}{2}$.

2..Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức K.

$K \le 2ab + 4ac$ (vì $ab \le 2ab;\ -4bc \le 0$)

$K \le 2a(b+2c) \le 2.\dfrac{(a+b+2c)^2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

$K = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow c = 0;\ a = b = \dfrac{1}{2}$

GTLN của $K = \dfrac{1}{2}$, khi $a = b = \dfrac{1}{2}, c = 0$

Câu 42. (Trường chuyên tỉnh Hà Tĩnh vòng 2 năm 2019-2020) Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{2}{3}\left(a^3+b^3+c^3\right)+a^2+b^2+c^2-(a+1)(b+1)(c+1).$$

Lời giải

Ta có: $a^2\ge a^2-(b-c)^2=(a-b+c)(a+b-c)=(6-2b)(6-2c)>0$ (do a,b,c là ba cạnh của một tam giác).

Tương tự có: $b^2\ge(6-2c)(6-2a)>0;\quad c^2\ge(6-2a)(6-2b)>0.$

Do đó ta có $abc\ge(6-2a)(6-2b)(6-2c)=216-72(a+b+c)+24(ab+bc+ca)-8abc$

$\Leftrightarrow abc\ge-24+\frac{8}{3}(ab+bc+ca).$

$$P=\frac{2}{3}\left(a^3+b^3+c^3\right)+a^2+b^2+c^2-(a+1)(b+1)(c+1)$$
$$\ge 2abc+a^2+b^2+c^2-(abc+ab+bc+ca+a+b+c+1)$$
$$=abc+a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)-7=abc+(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)-7.$$

$$P\ge-24+\frac{8}{3}(ab+bc+ca)+36-3(ab+bc+ca)-7=5-\frac{1}{3}(ab+bc+ca).$$

Mặt khác $3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2\Rightarrow ab+bc+ca\le\frac{36}{3}=12.$

Suy ra $P\ge5-\frac{12}{3}=1$. Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}a+b+c=6\\a=b=c\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=2.$

Giá trị nhỏ nhất của P bằng 1 khi $a=b=c=2$.

Câu 43. (Trường chuyên tỉnh Hòa Bình Chuyên Tin năm 2019-2020)

Cho các số thực dương $x;y$ thỏa mãn $x+y\le1$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\sqrt{1+x^2y^2}$$

Lời giải

Từ gt suy ra $1\ge x+y\ge2\sqrt{xy}\Rightarrow xy\le\frac{1}{4}$

Ta có: $P=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\sqrt{1+x^2y^2}\ge\frac{2}{\sqrt{xy}}\sqrt{1+x^2y^2}=2\sqrt{\frac{1}{xy}+xy}$

$$=2\sqrt{xy+\frac{1}{16xy}+\frac{15}{16xy}}\ge2\sqrt{2\sqrt{\frac{xy}{16xy}}+\frac{15}{6}.4}=2\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{15}{4}}=\sqrt{17}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$

Vậy $\min P=\sqrt{17}$ khi $x=y=\frac{1}{2}$

Câu 44. (Trường chuyên tỉnh Hòa Bình Chuyên Toán năm 2019-2020) Cho các số dương x, y, z thỏa mãn: $xy + xz + 4yz = 32$

Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P = x^2 + 16y^2 + 16z^2$

Lời giải

Ta có $\frac{x^2}{2} + 8y^2 \geq 2.\frac{x}{\sqrt{2}}.2\sqrt{2}y = 4xy$; $\frac{x^2}{2} + 8z^2 \geq 2.\frac{x}{\sqrt{2}}.2\sqrt{2}z = 4xz$; $8(z^2 + y^2) \geq 16xy$

Vậy $x^2 + 16y^2 + 16z^2 \geq 4(xy + xz + 4yz) = 4.32 = 128$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}y \\ \frac{x}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}z \\ y = z \end{cases}$

Câu 45. (Trường chuyên tỉnh Hưng Yên Vòng 2 năm 2019-2020) Cho các số thực x, y thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = xy(x-2)(y+6) + 13x^2 + 4y^2 - 26x + 24y + 46.$$

Lời giải

Biểu thức P có thể được viết lại dưới dạng $P = x(x-2)y(y+6) + 13x(x-2) + 4y(y+6) + 46$.

Đặt $a = x(x-2) = (x-1)^2 - 1$ và $b = y(y-+6) = (y+3)^2 - 9$ thì ta có

$P = ab + 13a + 4b + 46 = (a+4)(b+13) - 6$

$= \left[(x-1)^2 + 3\right]\left[(y+3)^2 + 4\right] - 6 \geq 3.4 - 6$

$= 6$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$ và $y = -3$. Vậy $\min P = 6$.

Câu 46. (Trường chuyên tỉnh Hải Dương chuyên toán năm 2019-2020) Cho a, b, c là các số thực không âmthỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = a\sqrt{b^3+1} + b\sqrt{c^3+1} + c\sqrt{a^3+1}.$$

Lời giải

Vì a, b, c là các số thực không âmnên ta có $a\sqrt{b^3+1} = a\sqrt{(b+1)(b^2-b+1)} \leq a.\frac{b+1+b^2-b+1}{2} = a + \frac{ab^2}{2}$

Tương tự:

$b\sqrt{c^3+1} \leq b + \frac{bc^2}{2}$

$c\sqrt{a^3+1} \leq c + \frac{ca^2}{2}$

Do đó: $P \le a+b+c+\dfrac{ab^2+bc^2+ca^2}{2}=3+\dfrac{ab^2+bc^2+ca^2}{2}$

Vì vai trò của a, b, c như nhau nên giả sử

$a \le b \le c \Rightarrow (b-a)(b-c) \le 0 \Leftrightarrow b^2+ac \le ab+bc$

$\Rightarrow ab^2+a^2c \le a^2b+abc$

$\Rightarrow ab^2+a^2c+bc^2 \le a^2b+abc+bc^2=b(a^2+ac+c^2)$

Vì $ac \ge 0$ nên

$\Rightarrow ab^2+a^2c+bc^2 \le b(a^2+ac+c^2) \le b(a^2+2ac+c^2)=b(a+c)^2$

$$b(a+c)^2=4.b.\frac{a+c}{2}.\frac{a+c}{2} \le 4.\left(\frac{b+\frac{a+c}{2}+\frac{a+c}{2}}{3}\right)^3=4.\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=4$$

Suy ra $ab^2+a^2c+bc^2 \le 4 \Rightarrow P \le 5$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 5 khi a=0, b=1, c=2 và các hoán vị.

Câu 47. (Trường chuyên tỉnh Hải phòng vòng 2 năm 2019-2020) Cho $x;y;z$ là ba số thực dương thỏa mãn $x(x-z)+y(y-z)=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^3}{x^2+z^2}+\frac{y^3}{y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+4}{x+y}.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi $\dfrac{x^3}{x^2+z^2}=x-\dfrac{xz^2}{x^2+z^2} \ge x-\dfrac{xz^2}{2xz}=x-\dfrac{z}{2}$.

Tương tự $\dfrac{y^3}{y^2+z^2} \ge y-\dfrac{z}{2}$. Suy ra $P \ge x+y-z+\dfrac{x^2+y^2+4}{x+y}$..

Theo gt $z=\dfrac{x^2+y^2}{x+y} \Rightarrow P \ge x+y+\dfrac{4}{x+y} \ge 4$..

Vậy $P_{\min}=4 \Leftrightarrow x=y=z=1$. .

Câu 48. (Trường chuyên tỉnh Khánh Hòa Vòng 2 năm 2019-2020)

a) Chứng minh rằng với mọi số thực a,b luôn có: $a^2+b^2 \ge \dfrac{1}{2}(a+b)^2$ và $ab \le \dfrac{1}{4}(a+b)^2$

b) Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $5(x^2+y^2+z^2)-9x(y+z)-18yz=0$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q=\dfrac{2x-y-z}{y+z}$

Lời giải

a)Ta chứng minh bằng phép biến đổi tương đương

Xét: $a^2+b^2 \ge \dfrac{1}{2}(a+b)^2$

$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 \geq a^2 + 2ab + b^2$

$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \quad \text{(luon dung)}$

Vậy: $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b$

Xét: $ab \leq \frac{1}{4}(a+b)^2$

$\Leftrightarrow 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2$

$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \quad \text{(luon dung)}$

Vậy: $ab \leq \frac{1}{4}(a+b)^2$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b$

b) Có: $5(x^2 + y^2 + z^2) - 9x(y+z) - 18yz = 0$

$\Leftrightarrow 5x^2 + 5(y^2 + z^2) - 9x(y+z) - 18yz = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 9x(y+z) = -5(y^2+z^2) + 18yz$

Mà theo câu a. Có: $y^2 + z^2 \geq \frac{1}{2}(y+z)^2 \Leftrightarrow -5(y^2+z^2) \leq \frac{-5}{2}(y+z)^2$

và $yz \leq \frac{1}{4}(y+z)^2 \Leftrightarrow 18yz \leq \frac{9}{2}(y+z)^2$

Nên: $-5(y^2+z^2) + 18yz \leq 2(y+z)^2$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 9x.(y+z) \leq 2(y+z)^2$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 9x.(y+z) - 2(y+z)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 10x.(y+z) + x.(y+z) - 2(y+z)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow (x - 2.(y+z)).(5x + (y+z)) \leq 0$

$\Leftrightarrow x - 2.(y+z) \leq 0$ (do $5x + y + z > 0$)

Hay $x \leq 2.(y+z)$

Có: $Q = \frac{2x - y - z}{y+z} = \frac{2x}{y+z} - 1 \leq \frac{2.2.(y+z)}{y+z} - 1 = 3$

$\Rightarrow Q_{max} = 3$. Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases} y = z \\ x = 2.(y+z) \end{cases} \Leftrightarrow x = 4y = 4z$

Vậy $Q_{max} = 3$ khi $x = 4y = 4z$

Câu 49. (Trường chuyên tỉnh Lâm Đồng vòng 2 năm 2019-2020) Cho a, b, c là ba số thực thỏa mãn điều kiện a + b + c =10. Tính giá trị nhỏ nhất của $M = a^2 + b^2 + c^2$.

Lời giải

Biến đổi được biểu thức M về dạng:

$M=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

Chứng tỏ được: $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2$

Suy ra được $M\ge 10^2-2M$

Tính được $M_{\min}=\dfrac{100}{3}$ đạt được khi $a=b=c=\dfrac{10}{3}$

Câu 50. (Trường chuyên tỉnh Nghệ An chuyên toán năm 2019-2020) Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=a+b+c+2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{c^2+a^2}}$.

Lời giải

Từ đẳng thức $abc=a+b+c+2\Leftrightarrow \dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}+\dfrac{2}{abc}=1$

Đặt $\dfrac{1}{a}=\dfrac{x}{y+z};\dfrac{1}{b}=\dfrac{y}{z+x};\dfrac{1}{c}=\dfrac{z}{x+y}(x,y,z>0)$

Ta có: $P=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{c^2+a^2}}\le\dfrac{1}{\sqrt{2ab}}+\dfrac{1}{\sqrt{2bc}}+\dfrac{1}{\sqrt{2ca}}$

Mặt khác: $\dfrac{1}{\sqrt{2ab}}=\sqrt{\dfrac{xy}{(x+z)(y+z)}}.\dfrac{1}{\sqrt{2}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x+z}+\dfrac{y}{y+z}\right).\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Tương tự thì ta cũng có:

$$\dfrac{1}{\sqrt{2bc}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{y+x}+\dfrac{z}{z+x}\right).\dfrac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\dfrac{1}{\sqrt{2ca}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{y+z}+\dfrac{x}{y+x}\right).\dfrac{1}{\sqrt{2}}$$

Cộng vế theo vế ta có: $P\le\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$. Hay là $a=b=c=2$

Câu 51. (Trường chuyên tỉnh Quảng Nam Vòng 2 năm 2019-2020) Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\dfrac{(1+a)^2+b^2+5}{ab+a+4}+\dfrac{(1+b)^2+c^2+5}{bc+b+4}+\dfrac{(1+c)^2+a^2+5}{ca+c+4}.$$

Lời giải

Dễ chứng minh các bất đẳng thức:

$x^2+y^2\ge 2xy$; $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\ge\dfrac{4}{x+y}$ với $x,y>0$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y$

Áp dụng các bất đẳng thức trên, ta có:

$$\frac{(1+a)^2+b^2+5}{ab+a+4}=\frac{a^2+b^2+2a+6}{ab+a+4}\ge\frac{2ab+2a+6}{ab+a+4}=\frac{2(ab+a+4)-2}{ab+a+4}$$

$$=2-\frac{2}{ab+a+4}=2-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{(ab+a+1)+3}\ge 2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{11}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{ab+a+1}$$

Tương tự:

$$\frac{(1+b)^2+c^2+5}{bc+b+4}\ge\frac{11}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{bc+b+1}$$

$$\frac{(1+c)^2+a^2+5}{ca+c+4}\ge\frac{11}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{ca+c+1}$$

$$\Rightarrow P\ge\frac{11}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}\right)$$

Vì $abc=1$ nên:

$$\frac{1}{bc+b+1}=\frac{a}{abc+ab+a}=\frac{a}{ab+a+1}$$

$$\frac{1}{ca+c+1}=\frac{ab}{a^2bc+abc+ab}=\frac{ab}{ab+a+1}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}=\frac{1}{ab+a+1}+\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{ab+a+1}$$

$$=1$$

$$\Rightarrow P\ge\frac{11}{2}-\frac{1}{2}=5$$

Dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=c\\ab+a+1=bc+b+1=ca+c+1=3\Leftrightarrow a=b=c=1\\abc=1\end{cases}$$

Vậy $\min P=5\Leftrightarrow a=b=c=1$

Câu 52. (Trường chuyên tỉnh Thái Bình vòng 1 năm 2019-2020) Xét các số thực $a;b;c$ $(a\ne 0)$ sao cho phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm $m;n$ thỏa mãn: $0\le m\le 1;0\le n\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q=\frac{2a^2-ac-2ab+bc}{a^2-ab+ac}$$

Lời giải

Vì phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm $m;n$ nên áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có:

$$\begin{cases} m+n=-\dfrac{b}{a} \\ mn=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Vì $a\neq 0$ nên:

$$Q=\frac{2a^2-ac-2ab+bc}{a^2-ab+ac}=\frac{(a-b)(2a-c)}{a^2-ab+ac}=\frac{\left(1-\dfrac{b}{a}\right)\left(2-\dfrac{c}{a}\right)}{1-\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}}=\frac{(1+m+n)(2-mn)}{1+m+n+mn}$$

Vì $0\leq m\leq 1;0\leq n\leq 1$

$\Rightarrow mn\leq m$; $mn\leq n$; $mn\leq 1$; $1+m+n>0$

$\Rightarrow 2-mn\geq 1$; $mn\leq \frac{1}{3}(1+m+n)$

$$\Rightarrow Q\geq \frac{1+m+n}{1+m+n+\frac{1}{3}(1+m+n)}=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=n=1\Leftrightarrow a=c=-\dfrac{b}{2}$

Vậy $\min Q=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow a=c=-\dfrac{b}{2}$

Câu 53. (Trường chuyên tỉnh Thái Bình vòng 2 năm 2019-2020)

Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $\begin{cases} 0<a,b,c<\dfrac{1}{2} \\ 2a+3b+4c=3 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P=\frac{2}{a(3b+4c-2)}+\frac{9}{b(4a+8c-3)}+\frac{8}{c(2a+3b-1)}$$

Lời giải

Ta có:

$$P=\frac{2}{a(1-2a)}+\frac{3}{b(1-2b)}+\frac{4}{c(1-2c)}$$
$$=\frac{2a}{a^2(1-2a)}+\frac{3b}{b^2(1-2b)}+\frac{4c}{c^2(1-2c)}$$

Áp dụng bất đẳng thức AG – GM, ta có:

$$a^2(1-2a)\leq\left[\frac{a+a+1-2a}{3}\right]^3=\frac{1}{27}$$

Tương tự : $b^2(1-2b) \le \frac{1}{27}; c^2(1-2c) \le \frac{1}{27}$

Suy ra: $P \ge 27(2a+3b+4c) = 81$. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 81

Câu 54. (Trường chuyên tỉnh Tiền Giang Vòng 2 năm 2019-2020)
Cho hai số dương x, y thỏa mãn $x\left(x^3+y^3\right)+6xy\left(x+y-2\right)=\left(x+y\right)^2\left(xy+4\right)$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1\right)$$

Lời giải

Đặt $S=x+y, P=x.\mathrm{y}, \mathrm{S}>0, \mathrm{P}>0$

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{S^2-2P}{P}+1\right)\Rightarrow P=\frac{S^2}{2T+1}$$

$$2\left(x^3+y^3\right)+6xy\left(x+y-2\right)=\left(x+y\right)^2\left(xy+4\right)$$
$$\Leftrightarrow 2S^3-12P=S^2\left(P+4\right)$$

$$\Leftrightarrow 2S^3-12\frac{S^2}{2T+1}=S^2\left(\frac{S^2}{2T+1}+4\right)$$

$$\Leftrightarrow S^2-2\left(2T+1\right)S+8T+16=0(1)$$

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \ge 0 \Leftrightarrow 4T^2-4T-15 \ge 0 \Rightarrow T \ge \frac{5}{2}$

Vậy $\min T=\frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} S=6 \\ P=6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3+\sqrt{3} \\ y=3-\sqrt{3} \end{array}\right.$ hoặc $\left[\begin{array}{l} x=3-\sqrt{3} \\ y=3+\sqrt{3} \end{array}\right.$

Câu 55. (Trường chuyên tỉnh Tuyên Quang chuyên toán năm 2019-2020) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}}+\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{b}+3\sqrt{c}}+\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{c}+3\sqrt{a}}.$$

Lời giải

Ta có: $P=\frac{a^2}{a+3\sqrt{ab}}+\frac{b^2}{b+3\sqrt{bc}}+\frac{c^2}{c+3\sqrt{ca}}$

Theo bất đẳng thức Bunhiacốpxki (dạng phân thức). Ta có:

$$P=\frac{a^2}{a+3\sqrt{ab}}+\frac{b^2}{b+3\sqrt{bc}}+\frac{c^2}{c+3\sqrt{ca}} \ge \frac{\left(a+b+c\right)^2}{a+b+c+3\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)}$$

$$P=\frac{a^2}{a+3\sqrt{ab}}+\frac{b^2}{b+3\sqrt{bc}}+\frac{c^2}{c+3\sqrt{ca}}\geq\frac{16}{4+3\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)}$$

(do $a+b+c=4$)

Theo bất đẳng thức Cô-si. Ta có:

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$; $b+c\geq 2\sqrt{bc}$; $c+a\geq 2\sqrt{ca}$

$\Rightarrow 2a+2b+2c\geq 2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}$

$\Rightarrow \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\leq a+b+c=4\Rightarrow P\geq\dfrac{16}{4+3.4}=1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a;b;c>0\\a+b+c=4\\a=b=c\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{4}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1 khi $a=b=c=\dfrac{4}{3}$

Câu 56. (Trường chuyên tỉnh Vĩnh Long vòng 2 năm 2019-2020) Cho x,y,z là các số thực dương

a) Chứng minh rằng $x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{3}(x+y+z)^2$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x+y+z$. Biết $x(x+1)+y(y+1)+z(z+1)\leq 18$.

Lời giải

a) Ta có $x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{3}(x+y+z)^2\Leftrightarrow(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0$ luôn đúng.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$.

b) Từ giả thiết ta có được: $\left(x^2+y^2+z^2\right)+(x+y+z)\leq 18$.

Mặt khác $x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{3}(x+y+z)^2$.

Từ đó ta được: $\frac{1}{3}(x+y+z)^2+(x+y+z)\leq 18\Leftrightarrow 0<x+y+z\leq 6$.

Vậy $\text{Max}P=6\Leftrightarrow x=y=z=2$.

Câu 57. (Trường chuyên tỉnh Bình Phước chuyên toán năm 2019-2020)

a)Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn $xy\leq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\leq\frac{2}{1+\sqrt{xy}}.$$

b)Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $(x+y)^3+4xy\leq 12$.
Tìm giá trị lớn nhất của $P=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+2018xy$.

Lời giải

a)Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn $xy\leq 1$. Chứng minh rằng:

$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\leq\frac{2}{1+\sqrt{xy}}$.

Ta có $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\leq\frac{2}{1+\sqrt{xy}}\Leftrightarrow\frac{1}{1+x}\quad\frac{1}{1+\sqrt{xy}}+\frac{1}{1+y}\quad\frac{1}{1+\sqrt{xy}}\leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{xy}\quad x}{(1+x)(1+\sqrt{xy})}+\frac{\sqrt{xy}\quad y}{(1+y)(1+\sqrt{xy})}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{y}\quad \sqrt{x}}{1+\sqrt{xy}}.\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\quad \frac{\sqrt{y}}{1+y}\right)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{y}\quad \sqrt{x}\right)^2\left(\sqrt{xy}\quad 1\right)}{(1+x)(1+y)\left(1+\sqrt{xy}\right)}\leq 0$$

Bất đẳng thức này luôn đúng với $x, y > 0: xy \leq 1$. Do đó bất đẳng thức ban đầu luôn đúng.

b)Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $(x+y)^3+4xy \leq 12$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+2018xy$.

Ta có $12 \geq (x+y)^3+4xy \geq \left(2\sqrt{xy}\right)^3+4xy$ (Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số không âm x, y).

Đặt $t=\sqrt{xy}, t>0$, khi đó ta có

$$12 \geq 8t^3+4t^2 \Leftrightarrow 2t^3+t^2\quad 3 \leq 0 \Leftrightarrow (t\quad 1)(2t^2+3t+3) \leq 0.$$

Vì $2t^2+3t+3>0$ với mọi t nên $t\quad 1 \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 1$ hay $0 < xy \leq 1$

Áp dụng ý a) ta có

$$P \leq \frac{2}{1+\sqrt{xy}}+2018xy$$

Đặt $t=\sqrt{xy}, 0<t\leq 1$ ta được $P \leq \frac{2}{1+t}+2018t^2$

Ta chứng minh GTLN của $P=2019$, thật vậy ta chứng minh BĐT sau luôn đúng

$$\frac{2}{1+t}+2018t^2\quad 2019 \leq 0 \Leftrightarrow (t\quad 1)(2018t^2+4036t+2017) \leq 0$$

Bất đẳng thức sau luôn đúng với $0<t\leq 1$.

Dấu " = " xảy ra khi $\begin{cases} t=1 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$.

Vậy GTLN của $P=2019$ đạt được khi $x=y=1$.

Câu 58. (Trường chuyên tỉnh Long An chuyên toán dự bị năm 2019-2020) Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=\frac{x+16}{\sqrt{x}+3}$$

Lời giải

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{x+16}{\sqrt{x}+3}$

Điều kiện : $x \geq 0$

$$P=\frac{x+16}{\sqrt{x}+3}=\sqrt{x}+3+\frac{25}{\sqrt{x}+3}-6$$

$$\sqrt{x}+3+\frac{25}{\sqrt{x}+3}\geq 2\sqrt{\left(\sqrt{x}+3\right).\frac{25}{\sqrt{x}+3}}=10$$

Suy ra $P \geq 4$

Kết luận giá trị nhỏ nhất của P là 4 ($P = 4 \Leftrightarrow x = 4$)

Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $12a$, gọi E là trung điểm của CD, gọi F là điểm thuộc cạnh CB sao cho $CF = 4a$. Các điểm G và H theo thứ tự di chuyển trên các cạnh AB và AD sao cho GH song song EF. Xác định vị trí của điểm G sao cho tứ giác $EFGH$ có diện tích lớn nhất.

Chuyên đề 3 Phương trình

Câu 1. (Trường chuyên tỉnh Bình Dương chuyên toán năm 2019-2020) Giải phương trình: $\left(x^2+x+1\right)\left(\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{3x-2}+1\right)=9$

Lời giải

Ta có:

$$\left(x^2+x+1\right)\left(\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{3x-2}+1\right)=9$$

$$\Rightarrow\left(x^2+x+2\right)\left[\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^2+\sqrt[3]{3x-2}+1\right]=9$$

$$\Rightarrow\left(x^2+x+2\right)\left(\sqrt[3]{3x-2}-1\right)\left[\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^2+\sqrt[3]{3x-2}+1\right]=9\left(\sqrt[3]{3x-2}-1\right)$$

$$\Rightarrow\left(x^2+x+2\right)\left[\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^3-1\right]=9\left(\sqrt[3]{3x-2}-1\right)$$

$$\Rightarrow\left(x^2+x+2\right)(3x-3)=9\left(\sqrt[3]{3x-2}-1\right)$$

$$\Rightarrow\left(x^2+x+2\right)(x-1)-3\left(\sqrt[3]{3x-2}-1\right)=0$$

$$\Rightarrow x^3-1-3\sqrt[3]{3x-2}+3=0$$

$$\Rightarrow x^3-3\sqrt[3]{3x-2}+2=0 \qquad (*)$$

Đặt $\sqrt[3]{3x-2}=t\Rightarrow t^3=3x-2$.

$$(*)\Rightarrow\begin{cases}x^3-3t+2=0\\ t^3=3x-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^3-3t+2=0 & (1)\\ t^3-3x+2=0 & (2)\end{cases}$$

Lấy $(1)-(2)$, ta được:

$$x^3-t^3-3t+3x=0$$

$$\Rightarrow(x-t)\left(x^2+xt+t^2\right)+3(x-t)=0$$

$$\Rightarrow(x-t)\left(x^2+xt+t^2+3\right)=0$$

$$\Rightarrow(x-t)\left[x^2+t.x+\left(t^2+3\right)\right]=0$$

+) $x=t\Rightarrow x=\sqrt[3]{3x-2}$

$\Rightarrow x^3 = 3x - 2$

$\Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$

$\Rightarrow x^3 - x - 2x + 2 = 0$

$\Rightarrow x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = 0$

$\Rightarrow x(x-1)(x+1) - 2(x-1) = 0$

$\Rightarrow (x-1)[x(x+1) - 2] = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1\ (kép) \\ x = -2 \end{array}\right.$$

$x^2 + t.x + (t^2 + 3) = 0$

$\Delta = t^2 - 4.1.(t^2 + 3) = -3t^2 - 12 < 0$

Vậy $x^2 + t.x + (t^2 + 3) = 0$ vô nghiệm.

Vậy $S = \{-2;\ 1\}$.

Câu 2. (Trường chuyên tỉnh Bình Thuận năm 2019-2020) Giải phương trình $x^2 + \dfrac{4}{x^2} - 4x + \dfrac{8}{x} = 9$.

Lời giải

Với điều kiện $x \neq 0$, ta viết lại phương trình thành:

$$x^2 + \frac{4}{x^2} - 4\left(x - \frac{2}{x}\right) = 9 \Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{x}\right)^2 - 4\left(x - \frac{2}{x}\right) - 5 = 0 \quad (*)$$

Đặt $t = x - \dfrac{2}{x}$, phương trình (*) trở thành: $t^2 - 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 5 \end{array}\right.$

Với $t = -1$, ta có $x - \dfrac{2}{x} = -1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Với $t = 5$, ta có $x - \dfrac{2}{x} = 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$

Vậy phương trình có các nghiệm $-2; 1; \dfrac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$.

Câu 3. (Trường chuyên tỉnh Bạc Liêu năm 2019-2020) Giải phương trình: $2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1}$.

Lời giải

ĐK: $x^3 + 1 \geq 0$

$$2\left(x^2+2\right)=5\sqrt{x^3+1}$$

$$\Leftrightarrow\ 2\left(x^2-x+1+x+1\right)=5\sqrt{\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}$$

$$\Leftrightarrow\ 2.\frac{x+1}{x^2-x+1}-5\sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}}+2=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x+1}}=2\\ \sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x+1}}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

* Trường hợp 1: $\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x+1}}=2\ \Leftrightarrow\ 4x^2-5x+3=0$ (vô nghiệm)

* Trường hợp 2: $\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x+1}}=\dfrac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ x^2-5x-3=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5-\sqrt{37}}{2}\\ x=\dfrac{5+\sqrt{37}}{2}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm : $x=\dfrac{5-\sqrt{37}}{2}$; $x=\dfrac{5+\sqrt{37}}{2}$

Câu 4. (Trường chuyên tỉnh Bắc Giang chuyên toán năm 2019-2020) Giải phương trình $x^2-5x+1+\sqrt{x^4+7x^2+1}=0.$

Lời giải

Nhận xét $x>0$.

Chia cả hai vế cho $x>0$ ta được

$$x+\frac{1}{x}-5+\sqrt{x^2+7+\frac{1}{x^2}}=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)-5+\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5}=0..$$

Đặt $t=x+\dfrac{1}{x}$ $\left(t\ge 2\right)$ ta được phương trình $t-5+\sqrt{t^2+5}=0$.

$$\sqrt{t^2+5}=5-t\Leftrightarrow\begin{cases}t\le 5\\ t^2+5=\left(5-t\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow t=2..$$

Giải $x+\dfrac{1}{x}=2$ được nghiệm $x=1$. Kết luận..

Câu 5. (Trường chuyên tỉnh Bến Tre vòng 2 năm 2019-2020) Giải phương trình: $\dfrac{x}{\sqrt{x+10}}=\sqrt{x+1}-1$.

Lời giải

Câu 6. (Trường chuyên tỉnh Cần thơ chuyên toán năm 2019-2020) Giải phương trình $\sqrt{2x^2+3x+2}+\sqrt{4x^2+6x+21}=11$

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{2x^2+3x+2},t>0$

Phương trình trở thành $t+\sqrt{2t^2+17}=11$

$\Leftrightarrow\begin{cases}t\le 11\\ t^2+22t-104=0\end{cases}\Leftrightarrow t=4$

Với $t=4$

ta có $\sqrt{2x^2+3x+2}=4\Leftrightarrow x=2,x=\dfrac{-7}{2}$

Tập nghiệm $S=\left\{\dfrac{-7}{2};2\right\}$

Câu 7. (Trường chuyên tỉnh DAK LAK vòng 2 năm 2019-2020) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4-(m-1)x^2+m^2-m-1=0$ có đúng ba nghiệm phân biệt.

Lời giải

Câu 8. (Trường chuyên tỉnh DAK LAK vòng 2 năm 2019-2020) Giải phương trình: $x+2\sqrt{7-x}=2\sqrt{x-1}+\sqrt{-x^2+8x-7}+1$.

Lời giải

Câu 9. (Trường chuyên tỉnh DAK NONG vòng 2 năm 2019-2020) Giải phương trình $(x-2)^2(x-1)(x-3)=12$.

Lời giải

PT biến đổi thành $(x^2-4x+4)(x^2-4x+3)=12$.

Đặt $t=x^2-4x+4=(x-2)^2\ge 0$, phương trình trở thành

$t^2-t-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\,(n)\\ t=-3\,(l)\end{array}\right.$.

Với $t=4$, ta được $x^2-4x+4=4\Leftrightarrow x^2-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=4\end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=0,\ x=4$.

Câu 10. (Trường chuyên tỉnh Gia lai vòng 2 năm 2019-2020) Giải phương trình $\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}-2=2\sqrt{(x-1)(5-x)}$.

Lời giải

ĐK: $x-1\ge 0;5-x\ge 0$.

Đặt $t=\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x},t\ge 0$. Khi đó $t^2=4+2\sqrt{(x-1)(5-x)}$.

Phương trình trở thành $t-2=t^2-4$

Giải phương trình, kết hợp $t \ge 0$ ta nhận nghiệm $t = 2$

Do đó $\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện, ta được nghiệm cần tìm là $x=1; x=5$.

Câu 11. (Trường chuyên tỉnh Hà Nội chuyên tin năm 2019-2020) Giải phương trình $x^2-1=\sqrt{x+1}$.

Lời giải

ĐKXĐ: $x \ge -1$.

$x^2-1=\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \sqrt{x+1}\left[(x-1)\sqrt{x+1}-1\right]=0$

TH1 : $\sqrt{x+1}=0 \Leftrightarrow x=-1$ (TM ĐKXĐ)

TH2 : $\begin{cases} x \ge 1 \\ (x^2-2x+1)(x+1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x^3-x^2-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x(x^2-x-1)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x^2-x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (TM ĐKXĐ)

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-1;\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Câu 12. (Trường chuyên tỉnh Hà Tĩnh vòng 2 năm 2019-2020) Cho phương trình $(x-1)^4+(x-3)^4+8(x-1)^2(x-3)^2-2m=0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình có nhiều hơn hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

Đặt $a=x-2 \Rightarrow x-1=a+1; x-3=a-1$.

Phương trình trở thành: $(a+1)^4+(a-1)^4+8(a+1)^2(a-1)^2-2m=0$

$\Leftrightarrow (a^4+4a^3+6a^2+4a+1)+(a^4-4a^3+6a^2-4a+1)+8(a^2-1)^2-2m=0$

$\Leftrightarrow 10a^4-4a^2+10-2m=0 \Leftrightarrow 5a^4-2a^2+5-m=0$ (1).

Đặt $a^2=t \ge 0$ khi đó (1) trở thành $5t^2-2t+5-m=0$ (2).

Phương trình đã cho có nhiều hơn hai nghiệm phân biệt khi chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 không âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - 25 + 5m > 0 \\ S = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{2}{5} > 0 \\ P = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5-m}{5} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m - 24 > 0 \\ \dfrac{5-m}{5} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{24}{5} < m \le 5.$$

Vậy phương trình có nhiều hơn 2 nghiệm khi $\dfrac{24}{5} < m \le 5$.

Câu 13. (Trường chuyên tỉnh Hải Dương chuyên toán năm 2019-2020) Giải phương trình: $8x^2 - 12x - 1 = \sqrt{8x+5}$.

Lời giải

Giải phương trình $8x^2 - 12x - 1 = \sqrt{8x+5}$ (1)

Điều kiện: $x \ge -\dfrac{5}{8}$

Ta có

$$8x^2 - 12x - 1 = \sqrt{8x+5} \Leftrightarrow 16x^2 - 24x - 2 = 2\sqrt{8x+5}$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 - 16x + 4 = 8x + 5 + 2\sqrt{8x+5} + 1$$

$$\Leftrightarrow (4x-2)^2 = (\sqrt{8x+5} + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x - 2 = \sqrt{8x+5} + 1 \\ 4x - 2 = -\sqrt{8x+5} - 1 \end{array}\right.$$

+) $4x - 2 = \sqrt{8x+5} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{8x+5} = 4x - 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{3}{4} \\ x = \dfrac{2 \pm \sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$$

+) $4x - 2 = -\sqrt{8x+5} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{8x+5} = 1 - 4x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{1}{4} \\ 16x^2 - 16x - 4 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{1}{4} \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}; x = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$

Câu 14. (Trường chuyên tỉnh Hậu Giang chuyên toán năm 2019-2020) Giải phương trình $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x = 2(\sqrt{x^2 - x + 1} - 1)$.

Lời giải

Viết lại phương trình đã cho thành: $x^4-2x^3+2x^2-x+2=2\sqrt{x^2-x+1}$ (*)

(*) $\Leftrightarrow x^2(x^2-2x+1)+x^2-x+1-2\sqrt{x^2-x+1}+1=0 \Leftrightarrow (x^2-x)^2+(\sqrt{x^2-x+1}-1)^2=0$ (**)

Đặt $t=\sqrt{x^2-x+1}\geq 0$. Ta suy ra $x^2-x=t^2-1$.

Khi đó, (**) trở thành $(t^2-1)^2+(t-1)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2-1=0 \\ t-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=1$ (nhận)

$t=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1}=1 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=1$.

Câu 15. (Trường chuyên tỉnh Khánh Hòa Vòng 2 năm 2019-2020) Giải phương trình: $\dfrac{2x^2-3x+10}{x+2}=3\sqrt{\dfrac{x^2-2x+4}{x+2}}$

Lời giải

$\dfrac{2x^2-3x+10}{x+2}=3\sqrt{\dfrac{x^2-2x+4}{x+2}}$ ĐK: $x+2\neq 0$ và $\dfrac{x^2-2x+4}{x+2}\geq 0$ (*)

Phương trình tương đương:

$$2x-7+\frac{24}{x+2}=3.\sqrt{x-4+\frac{12}{x+2}}$$

$$\Leftrightarrow 2x-8+\frac{24}{x+2}+1=3.\sqrt{x-4+\frac{12}{x+2}}$$

Đặt $t=x-4+\dfrac{12}{x+2}$.

(**) $\Rightarrow 2t+1=3.\sqrt{t}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t+1\geq 0 \\ 9t=4t^2+4t+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\geq \dfrac{-1}{2} \\ 4t^2-5t+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\geq \dfrac{-1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow t=1 \text{ hoặc } t=\frac{1}{4}.$$

Khi $t=1$ thì $x-4+\dfrac{12}{x+2}=1$

$\Rightarrow (x-4)(x+2)-(x+2)+12=0$

$\Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=2 & (n) \\ x=1 & (n) \end{array}\right.$ (do ĐK (*))

Khi $t=\dfrac{1}{4}$ thì $x-4+\dfrac{12}{x+2}=\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow 4(x-4)(x+2)-(x+2)+48=0$

$\Leftrightarrow 4x^2-9x+14=0$ (Vô nghiệm)

Vậy $S=\{1;2\}$

Câu 16. (Trường chuyên tỉnh Nam Định chuyên toán năm 2019-2020) Giải phương trình $x^3+\sqrt{(x+1)^3}=9x+8$.

Lời giải

+ Điều kiện xác định: $x\ge -1$.

+ Phương trình cho tương đương với $(x+1)\left[x^2-x-8+\sqrt{x+1}\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x^2-x-8+\sqrt{x+1}=0\end{array}\right.$.

+ Ta có $x^2-x-8+\sqrt{x+1}=0\Leftrightarrow(x-3)\left[x+2+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}\right]=0$ (1)

Do $x+2+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}>0,\forall x\ge -1$ nên $(1)\Leftrightarrow x=3$.

+ Tập nghiệm của phương trình là $\{-1;3\}$.

Câu 17. (Trường chuyên tỉnh Quảng Nam Vòng 2 năm 2019-2020) Giải phương trình $x^2-\sqrt{x^2-4x}=4(x+3)$.

Lời giải

$x^2-\sqrt{x^2-4x}=4(x+3)\Leftrightarrow(x^2-4x)-\sqrt{x^2-4x}-12=0$ (1)

Đặt $\sqrt{x^2-4x}=y$ $(y\ge 0)$. Phương trình (1) trở thành:

$y^2-y-12=0$ (2)

Giải phương trình (2) được:

$y_1=4$ (TMĐK) ; $y_2=-3$ (loại)

Với $y=4$ thì:

$\sqrt{x^2-4x}=4\Leftrightarrow x^2-4x=16\Leftrightarrow(x-2)^2=20\Leftrightarrow x=2\pm 2\sqrt{5}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=2\pm 2\sqrt{5}$.

Câu 18. (Trường chuyên tỉnh Quảng Ngãi chuyên toán năm 2019-2020) Giải phương trình $2x^2+\sqrt{x^2-2x-19}=4x+74$

Lời giải

Điều kiện $x^2-2x-19\ge 0$

$2(2x^2-2x-19)+\sqrt{x^2-2x-19}-36=0$

Đặt $t=\sqrt{x^2-2x-19},t\ge 0$

Phương trình tương đương với $2t^2+t-36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4(n) \\ t=-\dfrac{9}{2}(l) \end{array}\right.$

$t=4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x-19}=4 \Leftrightarrow x^2-2x-19=16 \Leftrightarrow x^2-2x-35=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=-5 \end{array}\right.$

Thay vào điều kiện ta thấy hai nghiệm thỏa mãn

Vậy $S=\{-5;7\}$

Câu 19. (Trường chuyên tỉnh Quảng Ninh Vòng 2 năm 2019-2020) Giải phương trình: $\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}-\sqrt{(x+1)(4-x)}=1$.

Lời giải

$\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}-\sqrt{(x+1)(4-x)}=1$ (1) Điều kiện $-1\le x\le 4$

Đặt $\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}=t\ge 0 \Rightarrow \sqrt{(x+1)(4-x)}=\dfrac{t^2-5}{2}$.

Pt (1) trở thành: $t-\dfrac{t^2-5}{2}=1$. Tính được $t_1=-1$ (loại), $t_2=3$ (TM).

$t_2=3$ biến đổi pt được $\sqrt{(x+1)(4-x)}=\dfrac{3^2-5}{2}=2 \Leftrightarrow -x^2+3x=0$

Tính được $x_1=0$; $x_2=3$ (tmđk). Vậy tập nghiệm của pt là $S=\{0;3\}$.

Câu 20. (Trường chuyên tỉnh Sơn La Vòng 2 năm 2019-2020) Giải phương trình: $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$

Lời giải

Giải phương trình : $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$.

ĐK: $x^2-3x+5\ge 0$. Đặt $t=\sqrt{x^2-3x+5}$ $(t\ge 0)$

Phương trình trở thành: $t^2+t-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-4\,(KTM) \end{array}\right.$

Với $t=3$ ta có $\sqrt{x^2-3x+5}=3 \Leftrightarrow x^2-3x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=4 \end{array}\right.$ (TMĐK)

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=-1$ và $x=4$.

Câu 21. (Trường chuyên tỉnh Thái Bình vòng 2 năm 2019-2020) Giải phương trình: $\sqrt{x+2}-2\sqrt{x-1}=3x-3\cdot\sqrt{(x+2)(x-1)}$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 1$

$\sqrt{x+2}-2\sqrt{x-1}=3x-3\cdot\sqrt{(x+2)(x-1)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}-2\sqrt{x-1}=(x+2)+2(x-1)-3\cdot\sqrt{(x+2)(x-1)}$ Ta được phương trình:

Dăt $a=\sqrt{x+2}; b=\sqrt{x-1} (a;b\ge 0)$

$a-2b=a^2+2b^2-3ab$

$\Leftrightarrow (a-2b)(a-b-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2b \\ a=b+1 \end{array}\right.$

Với $a=2b \Rightarrow \sqrt{x+2}=2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x=2$

Với $a=b+1$

$\Rightarrow \sqrt{x+2}=\sqrt{x-1}+1 \Leftrightarrow x+2=x+2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x=2$

Vậy phương trình có nghiệm $x=2$.

Câu 22. (Trường chuyên tỉnh Thái Nguyên chuyên toán năm 2019-2020) Giải phương trình $x^3+2=3\sqrt[3]{3x-2}$.

Lời giải

Đặt $\sqrt[3]{3x-2}=t$. Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3+2=3t \\ t^3+2=3x \end{cases} \Rightarrow x^3+3x=t^3+3t \Leftrightarrow (x-t)\left(x^2+tx+t^2+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-t)\left[\left(x+\frac{t}{2}\right)^2+\frac{3t^2}{4}+3\right]=0 \Leftrightarrow x=t \quad \left(\text{vì} \left(x+\frac{t}{2}\right)^2+\frac{3t^2}{4}+3>0\right)$$

Với $x=t$ ta có: $x^3-3x+2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là $x=1$ và $x=-2$.

Câu 23. (Trường chuyên tỉnh Tiền Giang chuyên tin năm 2019-2020) Giải phương trình: $x\sqrt{10-x^2}\left(x+\sqrt{10-x^2}\right)=12$.

Lời giải

Đặt $y=\sqrt{10-x^2}, y\ge 0$.

Ta có hệ $\begin{cases} xy(x+y)=12 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$..

Đặt $S=x+y, P=xy$

Hệ trở thành $\begin{cases} SP=12 \quad (1) \\ S^2-2P=10 \quad (2) \end{cases}$

$S=0$ không thỏa hệ nên $(1) \Leftrightarrow P=\dfrac{12}{S}$.

Thay vào (2), ta có $S^2-\dfrac{24}{S}=10$..

$\Leftrightarrow S^3-10S-24=0 \Leftrightarrow S=4 \Rightarrow P=3$.

x,y là nghiệm phương trình $X^2-4X+3=0$, suy ra $(x;y)=(1;3)$ hoặc $(x;y)=(3;1)$. Vậy tập nghiệm là $S=\{1;3\}$..

Câu 24. (Trường chuyên tỉnh Tuyên Quang chuyên toán năm 2019-2020) Giải phương trình $\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-x}=x-2+2\sqrt{-2x^2+11x-5}$;

Lời giải

Giải phương trình: $\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-x}=x-2+2\sqrt{-2x^2+11x-5}$ (2)

Phương trình xác định $\Leftrightarrow \begin{cases}2x-1\ge 0\\5-x\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\le x\le 5$

Khi đó phương trình (2) $\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}+\sqrt{5-x}=x-2+2\sqrt{(2x-1)(5-x)}$

Đặt $\begin{cases}\sqrt{2x-1}=a\\\sqrt{5-x}=b\end{cases}$ $(a;b\ge 0) \Rightarrow x+4=a^2+b^2 \Rightarrow x-2=a^2+b^2-6$

Ta có phương trình: $a+b=a^2+b^2-6+2ab \Leftrightarrow (a+b)^2-(a+b)-6=0$

$\Leftrightarrow (a+b-3)(a+b+2)=0 \Leftrightarrow a+b-3=0$ (do $a+b+2>0,\forall a;b\ge 0$)

$\Leftrightarrow a+b=3 \Leftrightarrow a^2+b^2+2ab=9 \Leftrightarrow x+4+2\sqrt{(2x-1)(5-x)}=9$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(2x-1)(5-x)}-(5-x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{5-x}\left(2\sqrt{2x-1}-\sqrt{5-x}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{5-x}=0 \Leftrightarrow x=5 \text{ (thoûa maõn)}\\4(2x-1)=5-x \Leftrightarrow 9x=9 \Leftrightarrow x=1 \text{ (thoûa maõn)}\end{array}\right.$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{1;5\}$

Câu 25. (Trường chuyên tỉnh Tây Ninh Vòng 2 năm 2019-2020) Giải phương trình $x^4+x^2-20=0$

Lời giải

Giải phương trình $x^4+x^2-20=0$

Đặt $t=x^2, t\ge 0$, phương trình đã cho trở thành $t^2+t-20=0$ (1)

$\Delta=b^2-4ac=81$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $t=4$ (nhận); $t=-5$ (loại)

Với $t=4$ tìm được $x=\pm 2$. Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=\pm 2$

Câu 26. (Trường chuyên tỉnh Vĩnh Long vòng 2 năm 2019-2020) Giải phương trình $4x^2+2x+\frac{21}{4x^2+2x+1}=9$.

Lời giải

$$4x^2+2x+\frac{21}{4x^2+2x+1}=9\ (*)$$

Đặt $t=4x^2+2x$, $t\neq -1$. Ta có $(*)\Leftrightarrow t+\frac{21}{t+1}=9\Leftrightarrow t^2-8t+12=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=6\\ t=2\end{array}\right.$

$$t=6\Leftrightarrow 4x^2+2x-6=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=-\frac{3}{2}\end{array}\right.$$

$$t=2\Leftrightarrow 4x^2+2x-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\\ x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm $S=\left\{-\frac{3}{2};-1;\frac{1}{2};1\right\}$.

Câu 27. (Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu thi chung năm 2019-2020) Giải phương trình $4x^2+\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}+x}-3=0$.

Lời giải

$$4x^2+\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}+x}-3=0.$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+2x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)-3=0\Leftrightarrow 2x^2+2x\sqrt{x^2+1}-3=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\sqrt{x^2+1}=2\\ x+\sqrt{x^2+1}=-2\end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le 2\\ x^2+1=x^2-4x+4\end{cases}\\ \begin{cases} x\le -2\\ x^2+1=x^2+4x+4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le 2\\ x=\frac{3}{4}\end{cases}\\ \begin{cases} x\le -2\\ x=\frac{-3}{4}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{3}{4}.$$

Câu 28. (Trường chuyên tỉnh Bình Phước chuyên toán năm 2019-2020) Giải phương trình $x+\sqrt{4\quad x^2}=2+3x\sqrt{4\quad x^2}$.

Lời giải

Điều kiện: $\ 2\le x\le 2$ (*).

Đặt $t=x+\sqrt{4\quad x^2}\Rightarrow x\sqrt{4\quad x^2}=\frac{t^2-4}{2}$.

Phương trình (1) trở thành

$$3t^2\quad 2t\quad 8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2\\ t=\frac{4}{3}\end{array}\right.$$

Với $t = 2$ ta có

$$x + \sqrt{4 \quad x^2} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 2x^2 \quad 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right. \text{(thỏa mãn đk (*)).}$$

Với $t = \frac{-4}{3}$ ta có

$$x + \sqrt{4 \quad x^2} = \frac{-4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{-4}{3} \\ 2x^2 + \frac{8}{3}x \quad \frac{20}{9} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-2-\sqrt{14}}{3} \text{ (thỏa mãn đk (*)).}$$

Câu 29. (Trường chuyên tỉnh Long An chuyên toán năm 2019-2020)

Giải phương trình: $\dfrac{x}{x^2-x-2}+\dfrac{3x}{x^2+x-2}=2$.

Lời giải

$x=0$ không phải là nghiệm của phương trình

$$\frac{x}{x^2-x-2}+\frac{3x}{x^2+x-2}=2 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1-\frac{2}{x}}+\frac{3}{x+1-\frac{2}{x}}=2$$

Đặt $t=x-\dfrac{2}{x}$ $(t\neq 1, t\neq -1)$, tìm được $t=0; t=2$

Tìm được nghiệm của phương trình đã cho:

$x=\sqrt{2}; x=-\sqrt{2}; x=1-\sqrt{3}; x=1+\sqrt{3}$

Câu 30. (Trường chuyên tỉnh Quảng Bình chuyên toán năm 2019-2020) Giải phương trình $x^2-x-4=2\sqrt{x-1}\left(1-x\right)$.

Lời giải

Điều kiện $x\geq 1$.

$$x^2-x-4=2\sqrt{x-1}\left(1-x\right) \Leftrightarrow x(x-1)+2\sqrt{x-1}\left(x-1\right)-4=0 \ (1)$$

Đặt $y=\sqrt{x-1}, y\geq 0$.

Phương trình (1) trở thành

$$(y^2+1)y^2+2y.y^2-4=0 \Leftrightarrow y^4+2y^3+y^2-4=0$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(y^3+3y^2+4y+4)=0 \Leftrightarrow y=1 \text{ vì } y\geq 0.$$

Suy ra $\sqrt{x-1}=1 \Leftrightarrow x=2$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Câu 31. (Trường chuyên tỉnh Quảng Bình chuyên toán năm 2019-2020) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2-5y+3+6\sqrt{y^2-7x+4}=0 \\ y(y-x+2)=3x+3 \end{cases}.$$

Lời giải

$$\begin{cases} x^2-5y+3+6\sqrt{y^2-7x+4}=0 \ (1) \\ y(y-x+2)=3x+3 \ \ (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $y^2-7x+4\geq 0.$

$$(2)\Leftrightarrow (y+3)(y-x-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-3 \\ y=x+1 \end{array}\right.$$

Với $y=-3$, từ (1) ta có $x^2+18+6\sqrt{13-7x}=0$ (vô nghiệm)

Với $y=x+1$, từ (1) ta có $\left(x^2-5x+5\right)+6\sqrt{x^2-5x+5}-7=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+5=-7 \\ x^2-5x+5=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+12=0 \text{ (VN)} \\ x^2-5x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right..$$

Với $x=1\Rightarrow y=2$ (TMĐK), với $x=4\Rightarrow y=5$ (TMĐK).

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm (1;2) và (4;5).

Câu 32. (Trường chuyên tỉnh Quảng Trị Vòng 2 năm 2019-2020) Giải phương trình $x^6+\left(x^3-3\right)^3=3x^5-9x^2-1.$

Lời giải

$$x^6+\left(x^3-3\right)^3=3x^5-9x^2-1\Leftrightarrow \left(x^2\right)^3+\left(x^3-3\right)^3+1=3x^2\left(x^3-3\right)$$

Đặt: $x^2=a,\ x^3-3=b$

Ta có phương trình: $a^3+b^3+1=3ab\Leftrightarrow \left(a+b\right)^3+1-3ab\left(a+b\right)-3ab=0$

$$\Leftrightarrow \left(a+b+1\right)\left[\left(a+b\right)^2-\left(a+b\right)+1\right]-3ab\left[\left(a+b\right)+1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left(a+b+1\right)\left(a^2+b^2-ab-a-b+1\right)=0$$

+) $a^2+b^2-ab-a-b+1=0\Leftrightarrow \left(a-b\right)^2+\left(a-1\right)^2+\left(b-1\right)^2=0\Leftrightarrow a=b=1$

$\Rightarrow x^2=x^3-1=1$ (VN)

+) $a+b+1=0\Rightarrow x^2+x^3-3+1=0\Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(x^2+2x+2\right)=0\Leftrightarrow x=1.$

Vậy phương trình có nghiệm $x=1$.

Câu 33. (Trường chuyên tỉnh Vĩnh Phúc vòng 2 năm 2019-2020) Giải phương trình $x^2-2x-2\sqrt{x^2-2x+2}-1=0$

Lời giải

Câu 34. (Trường chuyên tỉnh Vĩnh Phúc vòng 2 năm 2019-2020) Giải phương trình $\dfrac{1}{2x^2-x+1}+\dfrac{3}{2x^2-x+3}=\dfrac{10}{2x^2-x+7}$

Lời giải

Câu 35. (Trường chuyên tỉnh Yên Bái vòng 2 năm 2019-2020) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-y+xy=1 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$

Lời giải

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-y+xy=1 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x-y=S \\ xy=P \end{cases}$ hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} S+P=1 \\ S^2+2P=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=1-S \\ S^2+2(1-S)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=1-S \\ S^2-2S=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P=1-S \\ \left[\begin{array}{l} S=0 \\ S=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S=0 \\ P=1 \end{cases} \\ \begin{cases} S=2 \\ P=-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Với $\begin{cases} S=0 \\ P=1 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} x-y=0 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{cases}$

Suy ra $(x;y)=(1;1),(-1;-1)$

Với $\begin{cases} S=2 \\ P=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=2 \\ xy=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2 \\ x(x-2)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2 \\ x^2-2x+1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=1 \end{cases}$ Suy ra $(x;y)=(1;-1)$

Vậy hệ phương trình có nghiệm

$(x;y)=(1;1),(-1;-1),(1;-1)$

Câu 36. (Trường chuyên tỉnh Chuyên ĐHSP vòng 2 năm 2019-2020) Cho các đa thức $P(x)=m_1x^2+n_1x+k_1$, $Q(x)=m_2x^2+n_2x+k_2$, $R(x)=m_3x^2+n_3x+k_3$

với m_i, n_i, k_i là các số thực và $m_i>0, i=1,2,3$. Giả sử phương trình $P(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt a_1, a_2; phương trình $Q(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt b_1, b_2; phương trình $R(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt c_1, c_2 thỏa mãn

$P(c_1)+Q(c_1)=P(c_2)+Q(c_2)$,

$P(b_1)+R(b_1)=P(b_2)+R(b_2)$,

$Q(a_1)+R(a_1)=Q(a_2)+R(a_2)$.

Chứng minh rằng $a_1+a_2=b_1+b_2=c_1+c_2$.

Lời giải

Sử dụng định lý Vieta, ta có $S_1=a_1+a_2=-\dfrac{n_1}{m_1}$, $S_2=b_1+b_2=-\dfrac{n_2}{m_2}$, $S_3=c_1+c_2=-\dfrac{n_3}{m_3}$.

Ta có $P(c_1)-P(c_2)=m_1(c_1^2-c_2^2)+n_1(c_1-c_2)=(c_1-c_2[m_1(c_1+c_2)+n_1])=m_1(c_1-c_2)(S_3-S_1)$.

Tương tự, ta cũng có $Q(c_1)-Q(c_2)=m^2(c_1-c_2)(S_3-S_2)$.

Do $P(c_1)-P(c_2)+Q(c_1)-Q(c_2)=0$ và $c_1\neq c_2$ nên từ hai biến đổi trên, ta suy ra

$m_1(S_3-S_1)+m_2(S_3-S_2)=0$. (1)

Chứng minh tương tự ta cũng có

$m_2(S_1-S_2)+m_3(S_1-S_3)=0$. (2)

$m_3(S_2-S_3)+m_1(S_2-S_1)=0$. (3)

Từ (1), (2) và (3), có thể thấy vai trò của S_1, S_2, S_3 là như nhau. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $S_1=\max\{S_1, S_2, S_3\}$. Khi đó, ta có $S_1-S_2\geq 0$ và $S_1-S_3\geq 0$. Lại có $m_2, m_3>0$ nên $VT_{(2)}\geq 0$. Để xảy ra dấu đẳng thức như (2) thì dấu bằng trong các đánh giá phải xảy ra, tứ ta phải có $S_1=S_2=S_3$. Đây chính là kết quả cần chứng minh.

Câu 37. (Trường chuyên tỉnh Bình Thuận năm 2019-2020) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2-2mx+m^2-m+1=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa $x_2^2-2x_1^2+6mx_1=19$.

Lời giải

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta'\geq 0 \Leftrightarrow m\geq 1$ (1).

Áp dụng định lý Viet ta có:

$x_1+x_2=2m$
$x_1x_2=m^2-m+1$

Đồng thời x_1 là nghiệm nên $x_1^2-2mx_1=-m^2+m-1$. Khi đó

$$x_2^2-2x_1^2+6mx_1=19 \Leftrightarrow x_2^2+x_1^2-3x_1^2+6mx_1-19=0$$

$$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2-3(x_1^2-2mx_1)-19=0$$

$$\Leftrightarrow 5m^2-m-18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-\dfrac{9}{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow m=2$$

Vậy $m=2$.

Câu 38. (Trường chuyên tỉnh Bạc Liêu năm 2019-2020) Cho phương trình $2018x^2-(m-2019)x-2020=0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn:
$\sqrt{x_1{}^2+2019}-x_1=\sqrt{x_1{}^2+2019}+x_2$.

Lời giải

Do a,c < 0 nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m. Ta có: $\sqrt{x_1^2+2019}-x_i=\sqrt{x_2^2+2019}+x_2$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{x_1^2+2019}-\sqrt{x_2^2+2019}=x_2+x_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2+2019}-\sqrt{x_2^2+2019}}=x_2+x_1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x_1+x_2=0 \\ \sqrt{x_1^2+2019}-\sqrt{x_2^2+2019}=x_1-x_2 \end{array}\right.$$

* Trường hợp 1: $x_1+x_2=0$

$\Leftrightarrow$ m – 2019 = 0

$\Leftrightarrow$ m = 2019

* Trường hợp 2: Không xảy ra do: $\sqrt{x_1^2+2019}>|x_1|$; $\sqrt{x_2^2+2019}>|x_2|$

Vậy m = 2019.

Câu 39. (Trường chuyên tỉnh Bến Tre vòng 2 năm 2019-2020) Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+m^2-2m-3=0(1)$, với m là tham số.

a) Chứng tỏ rằng phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Khi phương trình (1) có hai nghiệm x_1 và x_2 sao cho biểu thức $x_1^2+x_2^2+5x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tham số m là một phân số tối giản $\frac{p}{q}$ (p,q là các số nguyên, $q\neq 0$). Hãy tính $T=\frac{p+q}{p^2+q^2}$.

Lời giải

Câu 40. (Trường chuyên tỉnh Cao Bằng vòng 2 năm 2019-2020) Cho phương trình $x^2-(m+2)x+m=0$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện

$x_1^2+(m+2)x_2-5x_1x_2=6$.

Lời giải

Cho phương trình $x^2-(m+2)x+m=0$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^2+(m+2)x_2-5x_1x_2=6$ (3)

vì $\Delta=(m+2)^2-4m=m^2+4>0,\forall m$ nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Khi đó $x_1^2-(m+2)x_1+m=0\Leftrightarrow x_1^2=(m+2)x_1-m$

Thay vào (3) ta được

$$(m+2)x_1-m+(m+2)x_2-5x_1x_2=6$$

$$\Leftrightarrow (m+2)(x_1+x_2)-5x_1x_2-m=6\ (4)$$

Theo định lí Vi-et ta có $x_1 + x_2 = m + 2,\ x_1x_2 = m$

Thay vào (4) ta được $(m+2)(m+2) - 5m - m = 6$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 - \sqrt{3} \\ m = 1 + \sqrt{3} \end{array}\right. \text{ (tm)}$$

Vậy $m = 1 - \sqrt{3}$ và $m = 1 + \sqrt{3}$ là các giá trị cần tìm

Câu 41. (Trường chuyên tỉnh Chuyên ĐHSP vòng 1 năm 2019-2020) Cho các đa thức $P(x) = x^2 + ax + b$, $Q(x) = x^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các số thực..

a) Tìm tất cả các giá trị của a, b để 1 và a là nghiệm của phương trình $P(x) = 0$.

b) Giả sử phương trình $P(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $Q(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 sao cho $P(x_3) + P(x_4) = Q(x_1) + Q(x_2)$. Chứng minh rằng $|x_1 - x_2| = |x_3 - x_4|$.

Lời giải

a) Để 1 và a là nghiệm thì ta phải có $P(1) = 1 + a + b = 0$, $P(a) = a^2 + a^2 + b = 0$.

Rút $b = -1 - a$ từ phương trình đầu, thay vào phương trình sau, ta được $2a^2 - a - 1 = 0$.

Từ đó $a = 1$ hoặc $a = -\frac{1}{2}$, tương ứng $b = -2$ hoặc $b = -\frac{1}{2}$.

Vậy có hai cặp (a,b) thỏa mãn điều kiện đề bài là $(1;-2)$ và $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

b) Do x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $P(x) = 0$ nên $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)$.

Tương tự, ta cũng có $Q(x) = (x - x_3)(x - x_4)$.

Điều kiện đề bài có thể viết lại thành $(x_3 - x_1)(x_3 - x_2 + x_1 - x_4) + (x_4 - x_1 + x_2 - x_3)(x_4 - x_2) = 0$.

Hay $(x_3 - x_2 + x_1 - x_4)(x_3 - x_1 + x_2 - x_4) = 0$.

Một cách tương đương, ta có $(x_1 - x_2)^2 = (x_3 - x_4)^2$ hay $|x_1 - x_2| = |x_3 - x_4|$.

Đây chính là kết quả cần chứng minh.

Bình luận. Định lý về khai triển đa thức theo các nghiệm mà ta đã dùng $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ là một tính chất quan trọng của đa thức. Nếu không biết định lý này, ta vẫn giải được bài toán bằng các phép biến đổi, nhưng sẽ vất vả hơn.

Ở câu a), đề bài không nói a khác 1 nên nếu thí sinh dùng định lý Vieta sẽ bị thiếu nghiệm.

Câu 42. (Trường chuyên tỉnh DAK NONG vòng 2 năm 2019-2020) Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 4m = 0$ (x là ẩn, m là tham số) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 - x_1^2 = x_2^3 - x_2^2$.

Lời giải

Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 khi

$$\Delta' = (m+1)^2 - 4m = (m-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}.$$

Theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m+2 \\ x_1x_2=4m \end{cases}$.

Theo đề $x_1^3-x_1^2=x_2^3-x_2^2 \Leftrightarrow x_1^3-x_2^3=x_1^2-x_2^2$

$$\Leftrightarrow (x_1-x_2)\left[(x_1+x_2)^2-x_1x_2-(x_1+x_2)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1-x_2=0 \\ (x_1+x_2)^2-x_1x_2-(x_1+x_2)=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta'=0 \\ (2m+2)^2-4m-2m-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ 4m^2+2m+2=0\,(vo\,nghiem) \end{array}\right. \Leftrightarrow m=1$$

Vậy $m=1$ thỏa mãn bài toán.

Câu 43. (Trường chuyên tỉnh Gia lai chuyên tin năm 2019-2020) Cho phương trình bậc hai $x^2-mx+m-1=0$, với m là tham số.

a) Giải phương trình đã cho khi $m=4$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{2019}$.

Câu 44. (Trường chuyên tỉnh Hà Nam thi chung năm 2019-2020) Giải phương trình $2x^2-3x-5=0$.

Lời giải

Giải phương trình $2x^2-3x-5=0$.

Ta có $a-b+c=2+3-5=0$

Vậy phương trình có nghiệm là $x_1=-1,\ x_2=\frac{5}{2}$

Câu 45. (Trường chuyên tỉnh Hòa Bình Chuyên Tin năm 2019-2020) Giải phương trình: $x-5\sqrt{x-1}-7=0$

Lời giải

$$x-5\sqrt{x-1}-7=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x-1}+1)(\sqrt{x-1}-6)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=6 \Leftrightarrow x=37$$

Câu III

Câu 46. (Trường chuyên tỉnh Hòa Bình dành cho tất cả các thí sinh năm 2019-2020) Cho phương trình $2x^2-6x+2m-5=0$

1) Giải phương trình với $m=2$.

2) Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=6$.

Lời giải

Điều kiện để phương trình có 2 nghiệm là: $\Delta' = 19 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{19}{4}$.

Theo hệ thức Vietta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1.x_2 = \frac{2m-5}{2} \end{cases}$.

Ta có $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 6 \Rightarrow x_1 + x_2 = 6x_1x_2 \Rightarrow 3 = 3(2m-5) \Rightarrow m = 3$ (TM)

KL:....

Câu 47. (Trường chuyên tỉnh Hưng Yên Vòng 2 năm 2019-2020) Cho các đa thức $P(x) = x^2 + ax + b$, $Q(x) = x^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các số thực..

a) Tìm tất cả các giá trị của a, b để 1 và a là nghiệm của phương trình $P(x) = 0$.

b) Giả sử phương trình $P(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $Q(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 sao cho $P(x_3) + P(x_4) = Q(x_1) + Q(x_2)$. Chứng minh rằng $|x_1 - x_2| = |x_3 - x_4|$.

Lời giải

a) Để 1 và a là nghiệm thì ta phải có $P(1) = 1 + a + b = 0$, $P(a) = a^2 + a^2 + b = 0$.

Rút $b = -1 - a$ từ phương trình đầu, thay vào phương trình sau, ta được $2a^2 - a - 1 = 0$.

Từ đó $a = 1$ hoặc $a = -\frac{1}{2}$, tương ứng $b = -2$ hoặc $b = -\frac{1}{2}$.

Vậy có hai cặp (a,b) thỏa mãn điều kiện đề bài là $(1;-2)$ và $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

b) Do x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $P(x) = 0$ nên $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)$.

Tương tự, ta cũng có $Q(x) = (x - x_3)(x - x_4)$.

Điều kiện đề bài có thể viết lại thành $(x_3 - x_1)(x_3 - x_2 + x_1 - x_4) + (x_4 - x_1 + x_2 - x_3)(x_4 - x_2) = 0$.

Hay $(x_3 - x_2 + x_1 - x_4)(x_3 - x_1 + x_2 - x_4) = 0$.

Một cách tương đương, ta có $(x_1 - x_2)^2 = (x_3 - x_4)^2$ hay $|x_1 - x_2| = |x_3 - x_4|$.

Đây chính là kết quả cần chứng minh.

Bình luận. Định lý về khai triển đa thức theo các nghiệm mà ta đã dùng $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ là một tính chất quan trọng của đa thức. Nếu không biết định lý này, ta vẫn giải được bài toán bằng các phép biến đổi, nhưng sẽ vất vả hơn.

Ở câu a), đề bài không nói a khác 1 nên nếu thí sinh dùng định lý Vieta sẽ bị thiếu nghiệm.

Câu 48. (Trường chuyên tỉnh Hải phòng vòng 2 năm 2019-2020) Cho phương trình $x^2 + 4x - m = 0$ (1) (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)(x_1^2 + x_2^2) = 4(m+2)$.

Lời giải

PT đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 4 + m > 0 \Leftrightarrow m > -4$.

Áp dụng hệ thức Vi-et: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1x_2 = -m \end{cases}$..

$gt \Leftrightarrow \dfrac{4(16+2m)}{m} = 4(m+2) \quad (m \neq 0)$.

$\Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 4$..

Kết hợp với điều kiện $m > -4; m \neq 0$ ta được $m = 4$ thỏa mãn..

Câu 49. (Trường chuyên tỉnh Hậu Giang chuyên toán năm 2019-2020) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 + 2mx + m + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 2\sqrt{10}$.

Lời giải

Phương trình $x^2 + 2mx + m + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$\Delta' = m^2 - m - 2 > 0$.

$\Leftrightarrow \left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4} > 0 \Leftrightarrow \left|m - \dfrac{1}{2}\right| > \dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m - \dfrac{1}{2} > \dfrac{3}{2} \\ m - \dfrac{1}{2} < -\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -1 \end{array}\right. \ (1)$

Với điều kiện (1), giả sử x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho.

Theo hệ thức Vi-et, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1.x_2 = m + 2 \end{cases}$.

Khi đó $|x_1 - x_2| = 2\sqrt{10} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 40 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 40 = 0$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 48 = 0 \Leftrightarrow m = 4$ (nhận) hoặc $m = -3$ (nhận).

Câu 50. *(Trường chuyên tỉnh Kon Tum cho tất cả các thí sinh năm 2019-2020)* Cho phương trình $x^2 - 2mx + 4m - 4 = 0$ (1), m là tham số

a) Tìm điều kiện m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Tìm giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + 2mx_2 - 8m + 5 = 0$

Lời giải

a). $\Delta' = (-m)^2 - (4m - 4) = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi : $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m \neq 2$

*b).*Với $m \neq 2$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo hệ thức Vi ét ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1.x_2 = 4m - 4 \end{cases}$.

Do *x1* là nghiệm của phương trình nên thỏa $x_1^2 + 2mx_1 + 4m - 4 = 0$

$\Rightarrow x_1^2 = 2mx_1 - 4m + 4$ *(*).*

Ta có $x_1^2 + 2mx_2 - 8m + 5 = 0 \Leftrightarrow 2mx_1 - 4m + 4 + 2mx_2 - 8m + 5 = 0$ *(do (*))*

$\Leftrightarrow 2m(x_1 + x_2) - 12m + 9 = 0 \Leftrightarrow 2m.2m - 12m + 9 = 0$ (hệ thức vi ét).

$\Leftrightarrow 4m^2 - 12m + 9 = 0 \Leftrightarrow (2m-3)^2 = 0 \Leftrightarrow 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$ (thỏa mãn)

Vậy $m = \frac{3}{2}$ là giá trị cần tìm..

Câu 51. (Trường chuyên tỉnh Lào Cai Vòng 1 năm 2019-2020)

a)Giải phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$

b) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2 thỏa mãn: $(x_1 - x_2)^2 + 6m = x_1 - 2x_2$.

Lời giải

a).Giải pt: $x^2 - 3x + 2 = 0$

Ta có : $\Delta = (-3)^2 - 4.2 = 9 - 8 = 1 > 0$

Suy ra pt có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{3+1}{2} = 2;\ x_2 = \frac{3-1}{2} = 1$

b).Ta có: $\Delta' = \left[-(m-1)\right]^2 - m^2 = (m-1)^2 - m^2 = -2m + 1$

Pt có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow -2m + 1 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$

Áp dụng hệ thức Vi ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 2 \quad (1) \\ x_1.x_2 = m^2 \quad (2) \end{cases}$

Theo đề bài, ta có:

$(x_1 - x_2)^2 + 6m = x_1 - 2x_2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1.x_2 + 6m = x_1 - 2x_2$

$\Leftrightarrow 4(m-1)^2 - 4m^2 + 6m = x_1 - 2x_2$

$\Leftrightarrow x_1 - 2x_2 = -2m + 4$ (3)

Từ (1) và (3) ta có hệ pt: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 2 \\ x_1 - 2x_2 = -2m + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{4m-6}{3} \\ x_1 = \frac{2m}{3} \end{cases}$

Thay vào (2), ta được:

$\frac{4m-6}{3}.\frac{2m}{3}=m^2 \Leftrightarrow 9m^2=8m^2-12m \Leftrightarrow m^2+12m=0$

$\Leftrightarrow m(m+12)=0 \Leftrightarrow m=0; m=-12$ (thỏa mãn $m<\frac{1}{2}$)

Vây: $m=0;\ m=-12$

Câu 52. (Trường chuyên tỉnh Lâm Đồng vòng 2 năm 2019-2020)
Cho phương trình $x^2+2(a+b)x+4ab=0$ (x là ẩn số; a, b là các tham số). Tìm điều kiện của a và b để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt, trong đó có ít nhất một nghiệm dương.

Lời giải

Tìm được điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Trong đó:

Tính được $\Delta^{'}=(a-b)^2$

Suy ra: $a\neq b$

Lập luận được trường hợp thứ nhất: Phương trình có hai nghiệm trái dấu, suy ra: ab < 0;

Lập luận được trường hợp thứ hai: Phương trình có hai nghiệm cùng dương, suy ra: $\begin{cases} ab>0 \\ a+b<0 \end{cases}$

Kết luận được ở cả hai trường hợp là $a\neq b$ và trong hai số a, b có ít nhất một số âm

Câu 53. (Trường chuyên tỉnh Nam Định cho lớp chuyên KHTN năm 2019-2020) Cho phương trình $x^2+2(m-2)x-m^2-5=0$ (với m là tham số).

a) Giải phương trình với $m=0$.
b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 (giả sử $x_1<x_2$) thỏa mãn $|x_1|-|x_2+1|=5$.

Lời giải

a).Với $m=0$, phương trình trở thành $x^2-4x-5=0$.

Phương trình có hai nghiệm $x=-1, x=5$..

b). Ta có $\Delta'=\left(m-2\right)^2+m^2+5>0\ \forall m$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt với mọi m. .

Mặt khác $x_1.x_2=-m^2-5<0,\ x_1<x_2 \Rightarrow x_1<0<x_2$. .

Khi đó $|x_1|-|x_2+1|=5 \Leftrightarrow -x_1-x_2-1=5 \Leftrightarrow x_1+x_2=-6 \Leftrightarrow -2\left(m-2\right)=-6 \Leftrightarrow m=5$. .

Câu 54. (Trường chuyên tỉnh Nam Định lớp chuyên KHXH năm 2019-2020) Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+2m-6=0$ (với m là tham số).

a) Giải phương trình với $m=3$.
b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1{}^2+x_2{}^2=32$.

Lời giải

a).Với $m=3$, phương trình trở thành $x^2-4x=0$. .

Phương trình có hai nghiệm $x=0, x=4.$.

b). Ta có $\Delta'=(m-1)^2-2m+6=(m-2)^2+3>0\forall m$, nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m. .

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2(m-1) \\ x_1x_2=2m-6 \end{cases}$.

Khi đó $x_1^2+x_2^2=32 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=32.$.

$\Leftrightarrow (2(\mathrm{m}-1))^2-2(2m-6)=32 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=4. \end{array}\right.$ KL.

Câu 55. (Trường chuyên tỉnh PTNK (VÒNG 1) năm 2019-2020) Cho phương trình (ẩn x, tham số m):

$x^2-(2m+1)x-12=0$. (1)

a)Với các giá trị nào của số thực m thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 sao cho $x_1+x_2-2x_1x_2=25$?

b)Tìm tất cả các giá trị của số thực m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^2-x_2^2-7(2m+1)=0$.

Lời giải

Phương trình (1) là phương trình bậc hai ẩn x có các hệ số tương ứng $a=1$, $b=-(2m+1)$ và $c=-12$. Do a và c trái dấu nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 trái dấu nhau. Theo Viet, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m+1 \\ x_1x_2=-12 \end{cases}$.

a)Do $x_1+x_2-2x_1x_2=25$ nên ta có $2m+1+24=25$, tức $m=0$.

Vậy có duy nhất một giá trị m thỏa mãn yêu cầu này là $m=0$.

b)Ta có $x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)=(2m+1)(x_1-x_2)$. Dó đó, để thỏa mãn yêu cầu đều bài thì ta phải có $(2m+1)(x_1-x_2-7)=0$, tức $m=-\dfrac{1}{2}$ hoặc $x_1-x_2=7$.

Ở trường hợp thứ hai, do $x_1+x_2=2m+1$ nên ta có $x_1=m+4$ và $x_2=m-3$.

Từ đây, do $x_1x_2=-12$ nên $(m+4)(m-3)=-12$, tức $m(m+1)=0$. Suy ra $m=0$ hoặc $m=-1$.

Vậy có ba giá trị m thỏa mãn yêu cầu này là $m=0$, $m=-1$ và $m=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 56. (Trường chuyên tỉnh PTNK (VÒNG 2) **năm 2019-2020)** Cho phương trình $ax^2+bx+c=0$ (1) thỏa mãn các điều kiện: $a>0$ và $2\sqrt{|ac|}<\sqrt{|b|}<a+c$.

a) Chứng minh rằng phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 và

$(1-x_1)(1-x_2)>0$ và $(1+x_1)(1+x_2)>0$.

b) Biết rằng $a>c$. Chứng minh rằng $-1<x_1, x_2<1$.

Lời giải

a) Có: $|b| > 2\sqrt{|ac|}$ nên $b^2 > 4ac$.

Suy ra $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Có $|b| < a+c \Leftrightarrow -a-c < b < a+c \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c>0 \\ a-b+c>0 \end{cases}$

Suy ra $(1-x_1)(1-x_2) = 1-(x_1+x_2)+x_1x_2 = 1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a} = \frac{a+b+c}{a} > 0$

Và $(1+x_1)(1+x_2) = 1+(x_1+x_2)+x_1x_2 = 1-\frac{b}{a}+\frac{c}{a} = \frac{a-b+c}{a} > 0$.

b) Có $(1-x_1)(1-x_2) > 0$

Xét trường hợp: $\begin{cases} x_1 > 1 \\ x_2 > 1 \end{cases} \Rightarrow x_1x_2 > 1 \Rightarrow \frac{c}{a} > 1 \Rightarrow c > a$

Mâu thuẫn với giả thiết $a > c$.

Vậy $x_1, x_2 < 1$.

Có $(1+x_1)(1+x_2) > 0$

Xét trường hợp: $\begin{cases} x_1 < -1 \\ x_2 < -1 \end{cases} \Rightarrow x_1x_2 > 1 \Rightarrow \frac{c}{a} > 1 \Rightarrow c > a$

Mâu thuẫn với giả thiết $a > c$.

Vậy $x_1, x_2 > -1$.

Câu 57. (Trường chuyên tỉnh Sơn La Vòng 2 năm 2019-2020) Cho phương trình: $x^2 - mx + m - 1 = 0$. (1)

a)Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt.

b)Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1), đặt $A = \frac{4x_1x_2+6}{x_1^2+x_2^2+2(1+x_1x_2)}$

Với giá trị nào của m thì biểu thức A đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Cho phương trình: $x^2 - mx + m - 1 = 0$.

a) Tìm m đề PT có hai nghiệm dương phân biệt.

PT có hai nghiệm dương phân biệt khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)^2 > 0 \\ m-1 > 0 \\ m > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m > 1 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \neq 2.$

b) Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Đặt $A=\dfrac{4x_1x_2+6}{x_1^2+x_2^2+2(1+x_1x_2)}$. Với giá trị nào của m thì biểu thức A đạt giá trị nhỏ nhất?

Ta có: $\Delta=(m-2)^2\ge 0;\forall m.$

Theo hệ thức Vi-et: $\begin{cases}x_1+x_2=m\\ x_1x_2=m-1\end{cases}$, từ đó biểu thức viết thành $A=\dfrac{4m+2}{m^2+2}$

$$A=\frac{4m+2}{m^2+2}=\frac{(m+2)^2}{m^2+2}-1\ge -1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -1 đạt được khi $m=-2.$

Câu 58. **(Trường chuyên tỉnh Tiền Giang chuyên tin năm 2019-2020)** Cho phương trình: $x^2-2x+4m=0\quad(1)$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn 4.

Lời giải

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn 4 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ x_1<x_2<4\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ x_1+x_2-8<0\\ (x_1-4)(x_2-4)>0\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ S-8<0\\ P-4S+16>0\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1-4m>0\\ -6<0\\ 4m+8>0\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{1}{4}\\ m>-2\end{cases}\Leftrightarrow -2<m<\frac{1}{4}..$$

Câu 59. **(Trường chuyên tỉnh Tiền Giang chuyên tin năm 2019-2020)** Cho phương trình $x^2-2(m-3)x+m^2-1=0\quad(1)$, với m là tham số. Tìm giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^3+x_2^3=x_1^2x_2+x_1x_2^2$.

Lời giải

Cho phương trình $x^2-2(m-3)x+m^2-1=0\quad(1)$, với m là tham số. Tìm giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^3+x_2^3=x_1^2x_2+x_1x_2^2$..

Phương trình (1) có hai nghiệm x_1,x_2 $\Leftrightarrow\Delta'\ge 0\Leftrightarrow -6m+10\ge 0\Leftrightarrow m\le\dfrac{5}{3}$..

Theo định lý Vi-et: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 2(m-3) \\ P = x_1x_2 = m^2 - 1 \end{cases}$.

$x_1^3 + x_2^3 = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 \Leftrightarrow S^3 - 3PS = PS \Leftrightarrow S^3 - 4PS = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S = 0 \\ S^2 - 4P = 0 \end{array}\right.$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ -24m + 40 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = \dfrac{5}{3} \end{array}\right.$, loại $m = 3$. Vậy $m = \dfrac{5}{3}$..

Câu 60. (Trường chuyên tỉnh Tiền Giang Vòng 2 năm 2019-2020) Cho phương trình $x^2 + 5x + 4 - 9m = 0$ (1), với m là tham số. Tìm giá trị của m để (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1\left(x_1^2 - 1\right) - x_2\left(8x_2^2 + 1\right) = 5$

Lời giải

Phương trình (1) có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{1}{4}$

Theo định lí Vi-et $\begin{cases} x_1 + x_2 = -5 \\ x_1.x_2 = 4 - 9m \end{cases}$

$$x_1\left(x_1^2 - 1\right) - x_2\left(8x_2^2 + 1\right) = 5 \Leftrightarrow x_1^3 - 8x_2^3 - \left(x_1 + x_2\right) = 5 \Leftrightarrow x_1^3 - 8x_2^3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2x_2$$

Suy ra : $\begin{cases} x_1 + x_2 = -5 \\ x_1.x_2 = 4 - 9m \\ x_1 = 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{10}{3} \\ x_2 = -\dfrac{5}{3} \\ x_1x_2 = 4 - 9m \end{cases}$

Suy ra $4 - 9m = \dfrac{50}{9} \Rightarrow m = -\dfrac{14}{81}$ (thỏa điều kiện)

Vậy $m = -\dfrac{14}{81}$

Câu 61. (Trường chuyên tỉnh Tuyên Quang chuyên toán năm 2019-2020) Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 4$ (1) (m là tham số).

a) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

b) Với giá trị nào của m thì phương trình (1) có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn:

$x_1 + x_2 = \dfrac{x_1^2}{x_2} + \dfrac{x_2^2}{x_1}$

Lời giải

a)

Phương trình: $x^2 - 2mx + m - 4$ (1)

Phương trình (1) là phương trình bậc hai của x có:

$$\Delta' = (-m)^2 - 1.(m-4) = m^2 - m + 4$$

$$\Rightarrow \Delta' = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0 \text{ với mọi m}$$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

b)

Với mọi m phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2.

Theo định lí Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = m-4 \end{cases}$

Ta lại có:

$$x_1 + x_2 = \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1x_2} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{(x_1+x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)}{x_1x_2}$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)\left(\frac{x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2}{x_1x_2} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow (x_1+x_2).\frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1x_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \text{ hoặc } \frac{(x_1-x_2)^2}{x_1x_2}$$

- TH1: $x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0$
- TH2: $\frac{(x_1-x_2)^2}{x_1x_2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1x_2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ x_1x_2 \ne 0 \end{cases}$ (vô nghiệm vì $\Delta' > 0, \forall m$)

Vậy với $m = 0$ thì thì phương trình (1) có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn:

$$x_1 + x_2 = \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$$

Câu 62. (Trường chuyên tỉnh Tây Ninh Vòng 2 năm 2019-2020) Cho hai phương trình $x^2 + 6ax + 2b = 0$ và $x^2 + 4bx + 3a = 0$ với a, b là các số thực. Chứng minh nếu $3a + 2b \ge 2$ thì ít nhất một trong hai phương trình đã cho có nghiệm.

Lời giải

Cho hai phương trình $x^2 + 6ax + 2b = 0$ và $x^2 + 4bx + 3a = 0$ với a, b là các số thực. Chứng minh nếu $3a + 2b \ge 2$ thì ít nhất một trong hai phương trình đã cho có nghiệm.

$\Delta_1' = 9a^2 - 2b, \Delta_2' = 4b^2 - 3a$

$$\Delta_1' + \Delta_2' = (3a-1)^2 + (2b-1)^2 + 3a + 2b - 2$$

Do $3a + 2b \ge 2$ nên $\Delta_1' + \Delta_2' \ge 0$

Suy ra có ít nhất một trong hai giá trị Δ_1', Δ_2' không âm hay ít nhất một trong hai phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 63. (Trường chuyên tỉnh Vĩnh Long vòng 2 năm 2019-2020) Cho phương trình $x^2-(3m-2)x+2m^2-5m-3=0$, x là ẩn, m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có ít nhất một nghiệm dương.

Lời giải

$\Delta=(3m-2)^2-4(2m^2-5m-3)=m^2+8m+16=(m+4)^2\geq 0,\forall m$.

Do đó, phương trình luôn có nghiệm.

Giải tìm được các nghiệm là $x_1=2m+1;x_2=m-3$.

Phương trình có ít nhất một nghiệm dương khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}x_1>0\\x_2>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m+1>0\\m-3>0\end{array}\right.\Leftrightarrow m>-\dfrac{1}{2}$.

Câu 64. (Trường chuyên tỉnh An Giang Vòng 2 năm 2019-2020)Phương trình $x^2-(\sqrt{3}+\sqrt{2})x+\sqrt{6}=0$ có các nghiệm đều là nghiệm của phương trình $x^4+bx^2+c=0$ $(*)$. Tìm $b;c$ và giải phương trình $(*)$ ứng với $b;c$ vừa tìm được.

Lời giải

Xét phương trình $x^2-(\sqrt{3}+\sqrt{2})x+\sqrt{6}=0$

Dễ thấy phương trình có hai nghiệm $x=\sqrt{3};x=\sqrt{2}$

do tổng $S=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ và tích $P=\sqrt{3}.\sqrt{2}=\sqrt{6}$

(hoặc giải phương trình bậc hai)

Thay hai nghiệm vào phương trình $x^4+bx^2+c=0$ ta được hệ

$$\begin{cases}9+3b+c=0\\4+2b+c=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}3b+c=-9\\2b+c=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-5\\-10+c=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-5\\c=6\end{cases}$$

Vậy $b=-5,\ c=6$ thì nghiệm của phương trình bậc hai là nghiệm của phương trình $(*)$

Với $b=-5,c=6$ ta có phương trình là $x^4-5x^2+6=0(*)$.

Đặt $t=x^2,(ĐK\ t\geq 0)$ ta được phương trình $(*)$ trở thành

$t^2-5t+6=0$

$\Rightarrow t=2;t=3$

$t=2\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

$t=3\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

Phương trình $x^4-5x^2+6=0$ có bốn nghiệm phân biệt là

$x=\pm\sqrt{2};x=\pm\sqrt{3}$

Câu 65. (Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu thi chung năm 2019-2020) Giải phương trình $x^2-6x+5=0$.

Lời giải

$x^2-6x+5=0$..

$\Delta'=b'^2-ac=\left(-3\right)^2-1.5=4\ (\Delta=16)$

Phương trình có hai nghiệm $x_1=1, x_2=5$..

Câu 66. (Trường chuyên tỉnh Bình Phước chuyên toán năm 2019-2020) Cho phương trình x^2 $(m+2)x+3m\quad 3=0$ (1) với m là tham số. Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 sao cho x_1,x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông với cạnh huyền có độ dài bằng 5.

Lời giải

Yêu cầu bài toán suy ra phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn và $x_1^2+x_2^2=25$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \quad > 0 \\ P>0 \\ S>0 \\ x_1^2+x_2^2=25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} (m\quad 4)^2>0 \\ 3m\quad 3>0 \\ m+2>0 \\ m^2\quad 2m\quad 15=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} m\neq 4 \\ m>1 \\ m>\quad 2 \\ m=5 \text{ hoặc } m=\quad 3 \end{cases} \Leftrightarrow m=5 \text{ (thử lại thấy thỏa mãn).}$$

Vậy $m=5$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 67. (Trường chuyên tỉnh Long An chuyên toán dự bị năm 2019-2020) Cho phương trình $\left(m-1\right)x^2-2\left(m-3\right)x+m-4=0$.

Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 bé hơn 2.

Lời giải

Cho phương trình $\left(m-1\right)x^2-2\left(m-3\right)x+m-4=0$.

Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 bé hơn 2.

$\Delta'=\left[-\left(m-3\right)\right]^2-\left(m-1\right)\left(m-4\right)=-m+5$

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 bé hơn 2 $\Leftrightarrow\begin{cases} m\neq 1 \\ \Delta'\geq 0 \\ \left(x_1-2\right)+\left(x_2-2\right)<0 \\ \left(x_1-2\right)\left(x_2-2\right)>0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ -m+5 \geq 0 \\ (x_1-2)+(x_2-2)<0 \\ (x_1-2)(x_2-2)>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \leq 5 \\ \dfrac{-2(m+1)}{m-1}<0 \\ \dfrac{m+4}{m-1}>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \leq 5 \\ \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>1 \end{array}\right. \\ \dfrac{m+4}{m-1}>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \leq 5 \\ \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m<-4 \\ m>1 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-4 \\ 1<m \leq 5 \end{array}\right.$$

Câu 68. (Trường chuyên tỉnh Long An chuyên toán năm 2019-2020) Cho phương trình: $x^2-x+m-2=0$ (m là tham số).

a) Tìm tất cả tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

b) Khi phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2, tìm tất cả tham số m để $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}=\dfrac{5}{4}$.

Lời giải

a). $\Delta = 9-4m$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$

$$\Leftrightarrow m<\frac{9}{4}$$

b)

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}=\frac{5}{4}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-2(m-2)}{(m-2)^2}=\dfrac{5}{4}$

$\Leftrightarrow 5(m-2)^2+8(m-2)-4=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\dfrac{12}{5} \end{array}\right.$

Kết luận : $m=0$

Câu 69. (Trường chuyên tỉnh Quảng Bình chuyên toán năm 2019-2020) Cho $\overline{abc}$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ không có nghiệm hữu tỉ.

Lời giải

Giả sử phương trình $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm hữu tỉ, khi đó $\Delta=b^2-4ac=m^2,(m\in\mathbb{N})$.

Suy ra $b^2>m^2$ hay $b>m$. (1)

Ta có $4a.\overline{abc}=4a(100a+10b+c)=400a^2+40ab+4ac$

$=(400a^2+40ab+b^2)-(b^2-4ac)=(20a+b)^2-m^2$

$=(20a+b+m)(20a+b-m)$

Do $\overline{abc}$ là số nguyên tố nên $(20a+b+m)\vdots\overline{abc}$ hoặc $(20a+b-m)\vdots\overline{abc}$, suy ra $20a+b+m\geq\overline{abc}$ (2)

Từ (1) ta có $20a+2b=20a+b+b>20a+b+m$

Từ (2) ta có $20a+b+m\geq 100a+10b+c>100a+10b$

Do đó

$20a+2b>100a+10b\Leftrightarrow 2(10a+b)>10(10a+b)\Leftrightarrow 2>10$ (vô lý)

Vậy Δ không thể là số chính phương nên phương trình $ax^2+bx+c=0$ không có nghiệm hữu tỉ.

Câu 70. (Trường chuyên tỉnh Quảng Trị Vòng 2 năm 2019-2020) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2-2(m+1)x-2=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1<x_2$ và $|x_1|-|x_2|=-4$.

Lời giải

Vì $ac=-2<0$ nên PT có hai nghiệm phân biệt và vì $x_1<x_2$ nên $x_1<0<x_2$

do đó $-x_1-x_2=-4\Leftrightarrow x_1+x_2=4$. Theo định lí Vi et $x_1+x_2=2(m+1)$.

Nên $2(m+1)=4\Leftrightarrow m=1$.

Câu 71. (Trường chuyên tỉnh Thừa Thiên Huế vòng 2 năm 2019-2020) Cho phương trình (ẩn x) $x^2+(m-1)x+m-6=0$. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức $A=(x_1^2-4)(x_2^2-4)$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải

$\Delta = (m-1)^2 - 4(m-6) = m^2 - 6m + 25 = (m-3)^2 + 16 > 0\ \forall m$. Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Viết lại $A = x_1^2 x_2^2 - 4(x_1^2 + x_2^2) + 16 = x_1^2 x_2^2 - 4(x_1 + x_2)^2 + 8x_1x_2 + 16$.
Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = -(m-1),\ x_1 x_2 = m-6$.

Do đó $A = (m-6)^2 - 4(m-1)^2 + 8(m-6) + 16 = -3m^2 + 4m$.

Ta có $A = -3\left(m - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} \le \frac{4}{3}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = \frac{2}{3}$.

Vậy khi $m = \frac{2}{3}$ thì A có giá trị lớn nhất bằng $\frac{4}{3}$.

Câu 72. (Trường chuyên tỉnh Yên Bái vòng 2 năm 2019-2020) Tìm m để phương trình $x^2 + 2mx - 2m - 6 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 11$.

Lời giải

Ta có : Phương trình $x^2 + 2mx - 2m - 6 = 0$ có hai nghiệm khi và chỉ khi

$\Delta' = m^2 + 2m + 6 > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 + 5 > 0$ với mọi m.

Khi đó phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Ta có : $x_1^2 + x_2^2 = 11 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 11$

$\Leftrightarrow 4m^2 + 2(2m+6) = 11 \Leftrightarrow 4m^2 + 4m + 1 = 0$

$\Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

Vậy $m = -\frac{1}{2}$.

Câu 73. (Trường chuyên tỉnh Hòa Bình dành cho tất cả các thí sinh năm 2019-2020) Tìm x biết: $4x + 2 = 0$

Lời giải

a) $4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}$

b) $A = (\sqrt{5})^2 - 3^2 + 6$
$= 5 - 9 + 6 = 2$

Câu 74. (Trường chuyên tỉnh Thanh hóa chuyên toán năm 2019-2020) Giải phương trình : $\sqrt{2x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = 3x$

Lời giải

Do VT > 0 suy ra VP > 0 $\Rightarrow x > 0$

$\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=3x$

$\Leftrightarrow \dfrac{(2x^2+x+1)-(x^2-x+1)}{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x-1}}=3x \quad (Do\ \sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\neq 0, \forall x>0)$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+2\text{x}}{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x-1}}=3x$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=\dfrac{x+2}{3}$

Kết hợp: $\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=3x$

$\Rightarrow 2\sqrt{2x^2+x+1}=\dfrac{10x+2}{3}$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{2x^2+x+1}=5x+1$

$\Leftrightarrow 9(2x^2+x+1)=25x^2+10x+1$

Giải phương trình trên ta được: x = 1 (thỏa mãn đk)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là x = 1

Câu 75. (Trường chuyên tỉnh Phú Thọ vòng 2 năm 2019-2020) Giải phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}=1.$

Lời giải

Điều kiện xác định $\begin{cases} x\geq 0 \\ x\neq 1 \end{cases}.$

Phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{2\sqrt{x}}{x-1}=1 <=> x-2\sqrt{x}-1=0.$

Đặt $\sqrt{x}=t\left(t\geq 0; t\neq 1\right)$ ta có $t^2-2t-1=0 \Leftrightarrow t=1+\sqrt{2}$ (do $t\geq 0$).

Khi đó $x=\left(1+\sqrt{2}\right)^2=3+2\sqrt{2}.$

=> Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=6+2\sqrt{5}.$

Câu 76. *(Trường chuyên tỉnh Thừa Thiên Huế vòng 2 năm 2019-2020)* Giải phương trình $\sqrt{\text{x}+3+3\sqrt{2\text{x}-3}}+\sqrt{\text{x}-1+\sqrt{2\text{x}-3}}=2\sqrt{2}.$

Lời giải

Điều kiện: $\text{x}\geq \dfrac{3}{2}.$

$(1)\Leftrightarrow \sqrt{2\text{x}+6+6\sqrt{2\text{x}-3}}+\sqrt{2\text{x}-2+2\sqrt{2\text{x}-3}}=4$

$\Leftrightarrow \sqrt{2\text{x}-3+6\sqrt{2\text{x}-3}+9}+\sqrt{2\text{x}-3+2\sqrt{2\text{x}-3}+1}=4$

$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{2\text{x}-3}+3)^2}+\sqrt{(\sqrt{2\text{x}-3}+1)^2}=4$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-3}+3+\sqrt{2x-3}+1=4$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x-3}=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$ (thỏa mãn điều kiện).

Câu 77. (Trường chuyên tỉnh Bình Định vòng 2 năm 2019-2020) Giải phương trình sau: $3\sqrt{8x^2+3}-8x=6\sqrt{2x^2-2x+1}-1$.

Lời giải

Có $(*)\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{8x^2+3}-2\sqrt{2x^2-2x+1}\right)-(8x-1)=0 \Leftrightarrow \dfrac{3(8x-1)}{\sqrt{8x^2+3}+2\sqrt{2x^2-2x+1}}-(8x-1)=0$

$\Leftrightarrow (8x-1)\left(\dfrac{3}{\sqrt{8x^2+3}+2\sqrt{2x^2-2x+1}}-1\right)=0 \ (1).$

Vì: $\sqrt{8x^2+3}\geq\sqrt{3}>1,7$ và $2\sqrt{2x^2-2x+1}=2\sqrt{\left(\sqrt{2}x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\dfrac{1}{2}}=\sqrt{2}>1,4$, suy ra

$\sqrt{8x^2+3}+2\sqrt{2x^2-2x+1}>3 \longrightarrow \dfrac{3}{\sqrt{8x^2+3}+2\sqrt{2x^2-2x+1}}-1<0$

Do đó $(1)\Leftrightarrow 8x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{8}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=\dfrac{1}{8}$.

Câu 78. (Trường chuyên tỉnh HCM năm 2019-2020) Giải phương trình: $5\sqrt{x-1}-\sqrt{x+7}=3x-4$.

Lời giải

ĐKXĐ: $x\geq 1$.

Khi đó, ta có:

$5\sqrt{x-1}-\sqrt{x+7}=3x-4$

$\Leftrightarrow \dfrac{25(x-1)-(x+7)}{5\sqrt{x-1}+\sqrt{x+7}}-(3x-4)=0$

$\Leftrightarrow (3x-4)\left(\dfrac{8}{5\sqrt{x-1}+\sqrt{x+7}}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x-4=0\\ \dfrac{8}{5\sqrt{x-1}+\sqrt{x+7}}-1=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{4}{3}\\ 5\sqrt{x-1}+\sqrt{x+7}=8 \quad (*)\end{array}\right.$

Xét phương trình (*):

$(*) \Leftrightarrow 25(x-1)+x+7+10\sqrt{(x-1)(x+7)}=64$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{x^2+6x-7}=41-13x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 41-13x \geq 0 \\ 25(x^2+6x-7)=(41-13x)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{41}{13} \\ 144x^2-1216x+1856=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{41}{13} \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{58}{9} \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=2$

Thử lại, ta được tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$ □

Câu 79. (Trường chuyên tỉnh Hà nội chuyên toán năm 2019-2020) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x^2+5x}\right)=5.$

Lời giải

ĐKXĐ: $x \geq 0$; Phương trình $\Leftrightarrow 1+\sqrt{x^2+5x}=\sqrt{x+5}+\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+5}-1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)=0$

TH1: $\sqrt{x+5}-1=0 \Leftrightarrow x=-4$ (loại)

TH2: $\sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow x=1$ (TM ĐKXĐ).

Tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

Câu 80. (Trường chuyên tỉnh Hải Dương chuyên toán năm 2019-2020) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2-2y-14-2\sqrt{2y+1}=0 \\ (x-y)(x^2+xy+y^2+12)=6(x^2+y^2)+16 \end{cases}$

Lời giải

$\begin{cases} x^2+y^2-2y-14-2\sqrt{2y+1}=0;(1) \\ (x-y)(x^2+xy+y^2+12)=6(x^2+y^2)+16;(2) \end{cases}$

ĐK: $2y+1 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -\dfrac{1}{2}$

$(x-y)(x^2+xy+y^2+12)=6(x^2+y^2)+16$

$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2)+12(x-y)=6(x^2+y^2)+16$

$\Leftrightarrow x^3-y^3+12(x-y)=6(x^2+y^2)+16$

$\Leftrightarrow x^3-6x^2+12x-8=y^3+6y^2+12y+8 \Leftrightarrow (x-2)^3=(y+2)^3$

$\Leftrightarrow x-2=y+2 \Leftrightarrow x=y+4$

Thế vào phương trình (1), ta có:

$(y+4)^2+y^2-2y-14-2\sqrt{2y+1}=0$

$\Leftrightarrow 2y^2+6y-2\sqrt{2y+1}+2=0 \Leftrightarrow y^2+3y-\sqrt{2y+1}+1=0,(*)$

Đặt $t=\sqrt{2y+1},(t\geq 0) \Rightarrow 2y=t^2-1$

(*) trở thành t

$(t^2-1)^2+6(t^2-1)-4t+4=0 \Leftrightarrow t^4+4t^2-4t-1=0$

$\Leftrightarrow (t-1)(t^3+t^2+5t+1)=0$

Vì t $\geq$ 0 nên t = 1

Với t=1 $\Rightarrow \sqrt{2y+1}=1 \Leftrightarrow y=0 \Rightarrow x=4$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm (x;y)=(4;0)

Câu 81. (Trường chuyên tỉnh Hải phòng vòng 2 năm 2019-2020) Giải phương trình $2x^2+3x-2=(2x-1)\sqrt{2x^2+x-3}$.

Lời giải

ĐKXĐ: $x\geq 1$ hoặc $x\leq -\dfrac{3}{2}$.

$PT \Leftrightarrow (2x-1)(x+2)=(2x-1)\sqrt{2x^2+x-3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1=0\\ x+2=\sqrt{2x^2+x-3}\end{array}\right.$..

$2x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ (không thỏa mãn ĐKXĐ)..

$x+2=\sqrt{2x^2+x-3} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -2\\ 2x^2+x-3=x^2+4x+4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -2\\ x^2-3x-7=0\end{cases}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x_1=\dfrac{3+\sqrt{37}}{2};x_2=\dfrac{3-\sqrt{37}}{2}$ (thỏa mãn ĐKXĐ)..

Câu 82. (Trường chuyên tỉnh Nam Định cho lớp chuyên KHTN năm 2019-2020) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{4-x}+2\right)=-2x$.

Lời giải

Điều kiện xác định $-4\leq x\leq 4$. .

Khi đó phương trình đã cho tương đương với $\frac{x\left(\sqrt{4-x}+2\right)}{\sqrt{x+4}+2}=-2x$.

$\Leftrightarrow x\left(\sqrt{4-x}+2+2\left(\sqrt{x+4}+2\right)\right)=0$.

$\Leftrightarrow x=0\left(tm\right)$ (vì $\sqrt{4-x}+2+2\left(\sqrt{x+4}+2\right)>0$ với $-4\le x\le 4$).

Vậy phương trình có nghiệm $x=0$. .

Câu 83. (Trường chuyên tỉnh Nam Định lớp chuyên KHXH năm 2019-2020) Giải phương trình $2x\sqrt{x-1}=5\left(x-1\right)$.

Lời giải

Điều kiện xác định $x\ge 1$. .

Khi đó phương trình đã cho tương đương với $\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}=0\\ 5\sqrt{x-1}=2x\end{array}\right.$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ 4x^2-25x+25=0\end{array}\right.$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\frac{5}{4}\\ x=5\end{array}\right.$. Đối chiếu điều kiện, phương trình đã cho có ba nghiệm $x=1,\ x=5, x=\frac{5}{4}$. .

Câu 84. (Trường chuyên tỉnh Nghệ An chuyên toán năm 2019-2020) Giải phương trình $x^3-x^2+12x\sqrt{x-1}+20=0$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 1$

$\left(1\right)\Leftrightarrow x^2\left(x-1\right)-12x\sqrt{x-1}+20=0$

$\Leftrightarrow \left(x\sqrt{x-1}-2\right)\left(x\sqrt{x-1}-10\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\sqrt{x-1}=2\\ x\sqrt{x-1}=10\end{array}\right.$

TH1: $x\sqrt{x-1}=2\Leftrightarrow x^3-x^2=4\Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn điều kiện)

TH2: $x\sqrt{x-1}=10\Leftrightarrow x^3-x^2=100\Leftrightarrow x=5$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=2$ và $x=5$.

Câu 85. (Trường chuyên tỉnh Ninh Bình chuyên toán năm 2019-2020) Giải phương trình $x^2+7x+14=3\sqrt{(2x+5)(x^2+3x+4)}$.

Lời giải

Cách 1: Điều kiện: $x\ge\frac{-5}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$\left(x^2+3x+4\right)+2\left(2x+5\right)=3\sqrt{\left(2x+5\right)\left(x^2+3x+4\right)}$..

Đặt: $\begin{cases} u=\sqrt{x^2+3x+4} \\ v=\sqrt{2x+5} \end{cases}$ $\left(u,v\geq 0\right)$.

Phương trình trở hành: $u^2+2v^2=3uv$

$\Leftrightarrow u^2-3uv+2v^2=0 \Leftrightarrow \left(u-v\right)\left(u-2v\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u=2v \end{array}\right.$..

Với $u=v$, ta có

$\sqrt{x^2+3x+4}=\sqrt{2x+5} \Leftrightarrow x^2+3x+4=2x+5 \Leftrightarrow x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ (N)..

Với $u=2v$, ta có

$\sqrt{x^2+3x+4}=2\sqrt{2x+5} \Leftrightarrow x^2-5x-16=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{89}}{2}\left(N\right)$.

Tập nghiệm của phương trình đã cho $S=\left\{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{5-\sqrt{89}}{2};\dfrac{5+\sqrt{89}}{2}\right\}$..

Cách 2: Điều kiện: $x\geq\dfrac{-5}{2}$.

Ta có: $x^2+7x+14=(x+\dfrac{7}{2})^2+\dfrac{7}{4}>0\ \forall x\geq\dfrac{-5}{2}$..

Ta có: $x^2+7x+14=3\sqrt{\left(2x+5\right)\left(x^2+3x+4\right)} \Leftrightarrow (x^2+7x+14)^2=9(2x+5)(x^2+3x+4)$

$\Leftrightarrow x^4-4x^3-22x^2-11x+16=0$.

$\Leftrightarrow (x^2+x-1)(x^2-5x-16)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-1=0 \\ x^2-5x-16=0 \end{array}\right.$..

* $x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ (N).

* $x^2-5x-16=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{89}}{2}\left(N\right)$.

Tập nghiệm của phương trình đã cho $S=\left\{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{5-\sqrt{89}}{2};\dfrac{5+\sqrt{89}}{2}\right\}$..

Câu 86. (Trường chuyên tỉnh Phú Yên Vòng 2 năm 2019-2020) Giải phương trình $x^2+6x+8=3\sqrt{x+2}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x\geq -2$.

Với điều kiện xác định trên, phương trình đã cho được viết lại như sau

$$x^2+6x+5=3\left(\sqrt{x+2}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+5)-\frac{3(x+1)}{\sqrt{x+2}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left[(x+5)-\frac{3}{\sqrt{x+2}+1}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x+5=\dfrac{3}{\sqrt{x+2}+1} \quad (*) \end{array}\right.$$

Vì $-1>-2$ nên $x=-1$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

Xét phương trình (*), với $x\geq -2$, ta có $\begin{cases} x+5\geq 3, \\ \dfrac{3}{\sqrt{x+2}+1}\leq 3 \end{cases}$. Do đó, phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x=-2$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=-1, x=-2$.

Câu 87. (Trường chuyên tỉnh PTNK (VÒNG 1) năm 2019-2020)
Giải phương trình: $\left(\sqrt{x+2}-x\right)\left(\sqrt{2x-5}-1\right)=0$.

Lời giải

Điều kiện: $x\geq \frac{5}{2}$. Từ phương trình đã cho, ta thấy có hai trường hợp xảy ra:

Trường hợp 1: $\sqrt{x+2}-x=0$. Trong trường hợp này, ta có $x+2=x^2$, hay $(x+1)(x-2)=0$, tức $x=-1$ hoặc $x=2$, vô lý vì $x\geq \frac{5}{2}$.

Trường hợp 2: $\sqrt{2x-5}-1=0$. Trong trường hợp này, ta có $2x-5=1$, tức $x=3$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$.

Câu 88. (Trường chuyên tỉnh Tiền Giang Vòng 2 năm 2019-2020) Giải phương trình: $x^2+6x+5=\sqrt{x+7}$

Lời giải

(Điều kiện $x\geq -7$)

$$x^2+6x+5=\sqrt{x+7} \Leftrightarrow (x-3)^2-(x+7)+x+3-\sqrt{x+7}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+3-\sqrt{x+7}\right)\left(x+3+\sqrt{x+7}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3-\sqrt{x+7}=0(1) \\ x+3+\sqrt{x+7}+1=0(2) \end{array}\right.$$

$$(1) \Leftrightarrow x+3=\sqrt{x+7} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -3 \\ x+7=x^2+6x+9 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{-5+\sqrt{17}}{2}$$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x+7} = -x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -4 \\ x^2+7x+9=0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-7-\sqrt{13}}{2}$$

Phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{-5+\sqrt{17}}{2}$; $x = \dfrac{-7-\sqrt{13}}{2}$

Câu 89. (Trường chuyên tỉnh Yên Bái vòng 2 năm 2019-2020) Giải phương trình $8x^2+3x+7=6x\sqrt{x+8}$.

Lời giải

$$8x^2+3x+7=6x\sqrt{x+8}$$

$$\Leftrightarrow 9x^2-6x\sqrt{x+8}+x+8=x^2-2x+1$$

$$\Leftrightarrow \left(3x-\sqrt{x+8}\right)^2=(x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-\sqrt{x+8}=x-1 \\ 3x-\sqrt{x+8}=-x+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+8}=2x+1 \\ \sqrt{x+8}=4x-1 \end{array}\right.$$

Với $\sqrt{x+8}=2x+1 \Leftrightarrow x+8=(2x+1)^2$ ĐK $\left(2x+1\ge 0 \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{1}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow 4x^2+3x-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{7}{4} \quad (loại) \end{array}\right.$$

Với $\sqrt{x+8}=4x-1 \Leftrightarrow x+8=(4x-1)^2$ ĐK $\left(4x-1\ge 0 \Leftrightarrow x \ge \dfrac{1}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow 16x^2-9x-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{7}{16} \quad (loại) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=1$.

Câu 90. (Trường chuyên tỉnh Chuyên ĐHSP vòng 2 năm 2019-2020) Cho hai số thực phân biệt a và b thỏa mãn điều kiện $a^3+b^3=a^2b^2(ab-3)$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b-ab$.

Lời giải

Nếu $a=0$ thì ta có $b^3=0$ suy ra $b=0=a$, vô lý vì $a\ne b$. Do đó $a\ne 0$. Chứng minh tương tự, ta cũng có $b\ne 0$. Từ đó giả thiết của bài toán có thể được viết lại thành $\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}=1-\dfrac{3}{ab}$.

Đặt $x=\dfrac{1}{a}$ và $y=\dfrac{1}{b}$ thì ta có $x\ne y$ và $x^3+y^3=1-3xy$.

Sử dụng kết quả quen thuộc $A^3+B^3+C^3=(A+B+C)\left(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA\right)$, ta được

$$0=x^3+y^3-1+3xy=x^3+y^3+(-1)^3-3.x.y.(-1)=(x+y-1)\left(x^2+y^2+1-xy+x+y\right).$$

Mặt khác ta lại có $x^2+y^2+1-xy+x+y=\frac{1}{2}\left[\left(x+1\right)^2+\left(y+1\right)^2+\left(x-y\right)^2\right]>0$.

Nên từ kết quả ở trên, ta suy ra $x+y=1$, tức là $a+b=ab$. Vậy $T=0$.

Chuyên đề 4 Hệ phương trình

Câu 1. (Trường chuyên tỉnh Bình Thuận vòng 2 năm 2019-2020) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x^2+xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=185\\(x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=65\end{cases}$.

Lời giải

$$\begin{cases}(x^2+xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=185 & (1)\\(x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=65 & (2)\end{cases}.$$

Cộng (1) và (2) theo vế, ta được: $2(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=250 \Leftrightarrow x^2+y^2=25$

Thay lại vào phương trình (1), ta được: $(25+xy)\sqrt{25}=185 \Leftrightarrow xy=12$

Ta có hệ: $\begin{cases}x^2+y^2=25\\xy=12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+\dfrac{144}{x^2}=25\\y=\dfrac{12}{x}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^4-25x^2+144=0\\y=\dfrac{12}{x}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2=9\\x^2=16\end{array}\right.\\y=\dfrac{12}{x}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3,y=4\\x=-3,y=-4\\x=4,y=3\\x=-4,y=-3\end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm: $(3;4),(-3;-4),(4;3),(-4;-3)$ (3;4)

Câu 2. (Trường chuyên tỉnh Hà Nam thi chung năm 2019-2020) Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x-y=5\\5x+2y=1\end{cases}$

.

Lời giải

Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x-y=5\\5x+2y=1\end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}11x=11\\5x+2y=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\5x+2y=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y) = (1;-2)$

Câu 3. (Trường chuyên tỉnh Bình Thuận chuyên toán năm 2019-2020) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x^2+xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2} = 185 \\ (x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2} = 65 \end{cases}$.

Lời giải

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x^2+xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2} = 185 & (1) \\ (x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2} = 65 & (2) \end{cases}$.

Cộng (1) và (2) theo vế, ta được: $2(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2} = 250 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 25$

Thay lại vào phương trình (1), ta được: $(25+xy)\sqrt{25} = 185 \Leftrightarrow xy = 12$

Ta có hệ: $\begin{cases} x^2+y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \dfrac{144}{x^2} = 25 \\ y = \dfrac{12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 25x^2 + 144 = 0 \\ y = \dfrac{12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 = 9 \\ x^2 = 16 \end{array}\right. \\ y = \dfrac{12}{x} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, y = 4 \\ x = -3, y = -4 \\ x = 4, y = 3 \\ x = -4, y = -3 \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm: $(3;4),(-3;-4),(4;3),(-4;-3)(3;4)$

Câu 4. (Trường chuyên tỉnh Bạc Liêu năm 2019-2020) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{2x+y} = 5 \\ \sqrt{2x+y} + x - y = 2 \end{cases}$.

Lời giải

CƠ SỞ BỒI DƯỠNG VĂN HÓA
BÌNH MINH

Điều kiện: $\begin{cases} 7x+y \geq 0 \\ 2x+y \geq 0 \end{cases}$ $(*)$

Đặt $u = \sqrt{7x+y}$, $v = \sqrt{2x+y}$ (với $u, v > 0$

Hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} u + v = 5 & (1) \\ v + x - y = 2 & (2) \end{cases}$$

Ta thấy: $u^2 - v^2 = 5x$ .Kết hợp với (1) suy ra: $v = \dfrac{5-x}{2}$ thay vào (2) ta được $x = 2y - 1$ (3)

Thay (3) vào (2) ta có $\sqrt{5y-2} = 3 - y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \le 3 \\ 5y - 2 = (3-y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le 3 \\ y^2 - 11y + 11 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \le 3 \\ \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{11-\sqrt{77}}{2} \\ y = \dfrac{11+\sqrt{77}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow y = \dfrac{11-\sqrt{77}}{2} \Rightarrow x = 10 - \sqrt{77} \text{ (thỏa (*))}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là: $\left(10-\sqrt{77}; \dfrac{11-\sqrt{77}}{2}\right)$

Câu 5. (Trường chuyên tỉnh DAK LAK vòng 2 năm 2019-2020) Tìm tất cả các cặp số hữu tỉ $(x;y)$ thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} 4x^3 - y^3 + x + 4y = 0 \\ 10x^2 - 7xy + 2y^2 = 9 \end{cases}$.

Lời giải

Câu 6. (Trường chuyên tỉnh DAK NONG vòng 2 năm 2019-2020) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + 3y^2 + x = 3 \\ x^2 + xy - 2y^2 = 0 \end{cases}$.

Lời giải

Phương trình (2) $\Leftrightarrow (x^2 - y^2) + y(x-y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+2y) = 0$,

ta được $x = y$ hoặc $x = -2y$.

* Với $x = y$, thế vào (1) ta có: $4x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = \dfrac{3}{4}$.

Khi đó $x = y = -1,\ x = y = \dfrac{3}{4}$.

* Với $x = -2y$, thế vào (1) ta có $y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = -1$ hoặc $y = 3$

Nếu $y = -1 \Rightarrow x = 2$. Nếu $y = 3 \Rightarrow x = -6$.

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm: $(-1;-1)$; $\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{3}{4}\right)$; $(2;-1)$; $(-6;3)$.

Câu 7. (Trường chuyên tỉnh Gia lai chuyên tin năm 2019-2020) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + x = y^2 + y \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$.

Câu 8. (Trường chuyên tỉnh HCM năm 2019-2020) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2(x+y)-xy=4 \\ xy(x+y-4)=-2 \end{cases}$.

Lời giải

Đặt $S=x+y, P=xy\ (S^2 \ge 4P)$

Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} 2S-P=4 \\ SP-4P=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=2S-4 \\ S(2S-4)-4(2S-4)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=2S-4 \\ 2S^2-12S+18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=2 \\ S=3 \end{cases}$$

Khi đó x,y là hai nghiệm của phương trình: $t^2-3t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \end{array}\right.$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x,y)=(1,2)$; $(x,y)=(2,1)$ □

Câu 9. (Trường chuyên tỉnh Hà Giang vòng 1 năm 2019-2020) Giải hệ phương trình:
$\begin{cases} \dfrac{1}{x-2}-\dfrac{3}{y+1}=8 \\ \dfrac{1}{x-2}+\dfrac{5}{y+1}=16 \end{cases}$

Lời giải

Nội dung

Điều kiện: $x \ne 2; y \ne -1$. Đặt $\begin{cases} u=\dfrac{1}{x-2} \\ v=\dfrac{1}{y+1} \end{cases}$;

Hệ đã cho trở thành $\begin{cases} u-3v=8 \\ u+5v=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8v=8 \\ u+5v=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=1 \\ u=11 \end{cases}$

Thay trở lại phép đặt ta có $\begin{cases} \dfrac{1}{x-2}=11 \\ \dfrac{1}{y+1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=\dfrac{1}{11} \\ y+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{23}{11} \\ y=0 \end{cases}$

Đối chiếu với đk, hệ đã cho có nghiệm là $\left(\dfrac{23}{11};0\right)$.

Câu 10. (Trường chuyên tỉnh Hòa Bình Chuyên Tin năm 2019-2020) Giải hệ phương trình:
$\begin{cases} \dfrac{3x+5}{x+1}-\dfrac{3}{y-4}=-2 \\ \dfrac{4}{x+1}+\dfrac{y+1}{y-4}=24 \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} \dfrac{3x+5}{x+1} - \dfrac{3}{y-4} = -2 \\ \dfrac{4}{x+1} + \dfrac{y+1}{y-4} = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{3}{y-4} = -5 \\ \dfrac{4}{x+1} + \dfrac{5}{y-4} = 23 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1} = a \\ \dfrac{1}{y-4} = b \end{cases}$, tìm được $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$; tìm được $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{13}{3} \end{cases}$, KL ...

Câu 11. (Trường chuyên tỉnh Hòa Bình Chuyên Toán năm 2019-2020) Giải hệphương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x + y + xy = 7 \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x + y + xy = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 10\ (1) \\ (x+y) + xy = 7\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 10 \\ (x+y) = 7 - xy \end{cases}$$

$TH1: \begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases} \Rightarrow (x;y) = (3;1); (x;y) = (1;3)$

$TH2: \begin{cases} x + y = -6 \\ xy = 13 \end{cases}$ (II)

Hệ phương trình (II) vô nghiệm

KL:.......

Câu 12. (Trường chuyên tỉnh Hậu Giang chuyên toán năm 2019-2020) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{4x+y} + \sqrt{x+2y} = 5 \\ \dfrac{5}{3}x - \dfrac{1}{6}y + \sqrt{x+2y} = 2 \end{cases}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{4x+y} \ge 0 \\ v = \sqrt{x+2y} \ge 0 \end{cases}$.

Ta có $\dfrac{5}{3}x - \dfrac{1}{6}y = \dfrac{1}{2}(4x+y) - \dfrac{1}{3}(x+2y)$.

Hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} u + v = 5 & (1) \\ \dfrac{1}{2}u^2 - \dfrac{1}{3}v^2 + v = 2 & (2) \end{cases}$

Từ (1), ta suy ra $u = 5 - v$. Thay $u = 5 - v$ vào (2), ta có $\dfrac{1}{6}v^2 - 4v + \dfrac{21}{2} = 0$

$\Leftrightarrow v = 3$ hoặc $v = 21$.

Với $v=21 \Rightarrow u=-16$ (loại).

Với $v=3 \Rightarrow u=2$. Ta có hệ $\begin{cases}\sqrt{4x+y}=2\\ \sqrt{x+2y}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x+y=4\\ x+2y=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{1}{7}\\ y=\dfrac{32}{7}\end{cases}$.

Câu 13. (Trường chuyên tỉnh Kon Tum vòng 2 năm 2019-2020) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2-y^2-6=0\\ (x+y-1)^2-\left(\dfrac{2}{x-y}\right)^2-3=0\end{cases}$ (I)

Lời giải

Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2-y^2-6=0\\ (x+y-1)^2-\left(\dfrac{2}{x-y}\right)^2-3=0\end{cases}$ (I)

Ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases}(x-y)(x+y)=6\\ (x+y-1)^2-\dfrac{4}{(x-y)^2}-3=0\end{cases}$

Đặt $\Leftrightarrow \begin{cases}a=x+y\\ b=x-y\end{cases}$ $(b\neq 0)$

khi đó (I) $\Leftrightarrow \begin{cases}ab=6\\ (a-1)^2-\dfrac{4}{b^2}-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{b}=\dfrac{a}{6} & (1)\\ (a-1)^2-\dfrac{4a^2}{36}=3 & (2)\end{cases}$

Từ (2) ta có phương trình $\Leftrightarrow 9(a-1)^2-a^2=27 \Leftrightarrow 8a^2-18a-18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=3\\ a=\dfrac{-3}{4}\end{array}\right.$

Với $a=3$ ta có $b=2$ suy ra $\begin{cases}x+y=3\\ x-y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{5}{2}\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Với $a=\dfrac{-3}{4}$ ta có $b=-8$ suy ra $\begin{cases}x+y=\dfrac{-3}{4}\\ x-y=-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{-35}{8}\\ y=\dfrac{29}{8}\end{cases}$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{-35}{8};\dfrac{29}{8}\right);(x;y)=\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2}\right)$

Câu 14. (Trường chuyên tỉnh Nghệ An chuyên toán năm 2019-2020) Giải hệ phương trình

$\begin{cases}(x+1)(xy+1)=6\\ x^2(y^2+y+1)=7\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình $(1) \Leftrightarrow \begin{cases}x^2y+xy+x=5\\ x^2y+x^2y^2+^2=7\end{cases}$

Đặt $xy=a$, $x=b$. Ta có:

Hệ phương trình trở thành $\begin{cases}ab+a+b=5\\ ab+a^2+b^2=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}ab+a+b=5\\ (a+b)^2-ab=7\end{cases}$

$\Rightarrow (a+b)^2+a+b-5=7 \Leftrightarrow (a+b)^2+(a+b)-12=0$

$\Leftrightarrow (a+b-3)(a+b+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a+b=3\\ a+b=-4\end{array}\right.$

TH1: $a+b=3$ suy ra $ab=2$

$\Rightarrow a,b$ là nghiệm của phương trình $X^2-3X+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}X=1\\ X=2\end{array}\right.$

$\Rightarrow (a;b)=(1;2);(2;1)$

$\Rightarrow (x;y)=\left(2;\frac{1}{2}\right);(1;2)$

TH2: $a+b=-4$ suy ra $ab=9$

$\Rightarrow a,b$ là nghiệm của phương trình: $X^2+4X+9=0$ (phương trình vô nghiệm)

Câu 15. (Trường chuyên tỉnh Ninh Bình chuyên toán năm 2019-2020) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{x^2}{y^2+2y+1}+\dfrac{y^2}{x^2+2x+1}=\dfrac{8}{9}\\ 5xy-4x-4y=4\end{cases}$.

Lời giải

Cách 1: Điều kiện: $x\neq -1; y\neq -1$.

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{y^2+2y+1}+\dfrac{y^2}{x^2+2x+1}=\dfrac{8}{9}\\ 5xy-4x-4y=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\dfrac{x}{y+1}\right)^2+\left(\dfrac{y}{x+1}\right)^2=\dfrac{8}{9}\\ 9xy=4(x+1)(y+1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\dfrac{x}{y+1}\right)^2+\left(\dfrac{y}{x+1}\right)^2=\dfrac{8}{9}\\ \dfrac{2xy}{(x+1)(y+1)}=\dfrac{8}{9}\end{cases}..$$

Đặt $a=\frac{x}{y+1}; b=\frac{y}{x+1}$, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases}a^2+b^2=\dfrac{8}{9}\\ 2ab=\dfrac{8}{9}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2=2ab\\ 2ab=\dfrac{8}{9}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a-b)^2=0\\ 2ab=\dfrac{8}{9}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=b=\dfrac{2}{3}\\ a=b=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right...$$

Với $a=b=\frac{2}{3}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{y+1}=\frac{2}{3}\\ \frac{y}{x+1}=\frac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=2y+2\\3y=2x+2\end{cases}\Leftrightarrow x=y=2\ (N)$..

Với $a=b=-\frac{2}{3}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{y+1}=-\frac{2}{3}\\ \frac{y}{x+1}=-\frac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=-2y-2\\3y=-2x-2\end{cases}\Leftrightarrow x=y=-\frac{2}{5}\ (N)$.

Hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $(x;y)\in\left\{(2;2),\left(-\frac{2}{5};-\frac{2}{5}\right)\right\}$..

Cách 2: Điều kiện: $x\neq-1;y\neq-1$. $\begin{cases}\frac{x^2}{y^2+2y+1}+\frac{y^2}{x^2+2x+1}=\frac{8}{9}\\5xy-4x-4y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\frac{x}{y+1}\right)^2+\left(\frac{y}{x+1}\right)^2=\frac{8}{9}\\x(5y-4)=4y+4\ (*)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\frac{x}{y+1}\right)^2+\left(\frac{y}{x+1}\right)^2=\frac{8}{9}\\x=\frac{4y+4}{5y-4}\end{cases}.$$

(vì $y=\frac{4}{5}$ thì pt (*) trở thành $0x=\frac{36}{5}$ (vô nghiệm) nên hpt không có nghiệm $\left(x;\frac{4}{5}\right)$) .

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\frac{4}{5y-4}\right)^2+\left(\frac{5y-4}{9}\right)^2=\frac{8}{9}\\x=\frac{4y+4}{5y-4}\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\frac{4}{5y-4}\right)^2-2\cdot\frac{4}{5y-4}\cdot\frac{5y-4}{9}+\left(\frac{5y-4}{9}\right)^2=0\\x=\frac{4y+4}{5y-4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\frac{4}{5y-4}-\frac{5y-4}{9})^2=0\\x=\frac{4y+4}{5y-4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(5y-4)^2=36\\x=\frac{4y+4}{5y-4}\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=2\\y=\frac{-2}{5}\end{array}\right.\\x=\frac{4y+4}{5y-4}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}(N)\\\begin{cases}x=\frac{-2}{5}\\y=\frac{-2}{5}\end{cases}(N)\end{array}\right..$$

Hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $(x;y)\in\left\{(2;2),\left(-\frac{2}{5};-\frac{2}{5}\right)\right\}$..

Câu 16. (Trường chuyên tỉnh Phú Yên Vòng 2 năm 2019-2020) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+2y=(x+2)(y+2) \\ \left(\dfrac{x}{y+2}\right)^2+\left(\dfrac{y}{x+2}\right)^2=1 \end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện xác định của hệ phương trình $\begin{cases} x\neq -2, \\ y\neq -2. \end{cases}$

Với điều kiện xác định trên, hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y+2}+\dfrac{y}{x+2}=1 \\ \left(\dfrac{x}{y+2}\right)^2+\left(\dfrac{y}{x+2}\right)^2=1 \end{cases} \qquad (2.2)$$

Đặt $a=\dfrac{x}{y+2}, b=\dfrac{y}{x+2}$. Khi đó, hệ phương trình (2.2) trở thành

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a^2+b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ (a+b)^2-2ab=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ ab=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \end{array}\right..$$

Với $a=0, b=1$, ta có $\begin{cases} \dfrac{x}{y+2}=0 \\ \dfrac{y}{x+2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$.

Với $a=1,\ b=0$, ta có $\begin{cases} \dfrac{x}{y+2}=1 \\ \dfrac{y}{x+2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(0;2),(2;0)$.

Câu 17. (Trường chuyên tỉnh Vĩnh Long vòng 2 năm 2019-2020) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-2xy-6=6y+2x \\ \dfrac{3x^2}{y+1}=4-x \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện $y\neq -1$

Ta có $\begin{cases} x^2-2xy-6=6y+2x \\ \dfrac{3x^2}{y+1}=4-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{y+1}-2x=6 \\ 3.\dfrac{x^2}{y+1}+x=4 \end{cases}$

Giải hệ trên, ta được $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y+1}=2 \\ x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$

Câu 18. (Trường chuyên tỉnh Long An chuyên toán dự bị năm 2019-2020) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y+2}=-2 \\ \dfrac{1}{x+2}-\dfrac{3}{y}=4 \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x \neq 0; x \neq -2; y \neq 0; y \neq -2$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y+2}=-2 \\ \dfrac{1}{x+2}-\dfrac{3}{y}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5y=2 \\ 3x+y+2xy=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2+5y}{3} \\ 5y^2+11y+6=0 \end{cases}$$

$$5y^2+11y+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=-\dfrac{6}{5} \end{array}\right.$$

Hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(-1;-1)$, $\left(\dfrac{-4}{3};\dfrac{-6}{5}\right)$

Câu 19. (Trường chuyên tỉnh Thanh hóa chuyên toán năm 2019-2020) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{2} \\ xy+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=5 \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{2} \\ xy+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=5 \end{cases}$ (Điều kiện: $x,y \neq 0$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2y + 2xy^2 + 2x + 2y - 9xy = 0 \\ x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 - 5xy = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy(x+y) + 2(x+y) - 9xy = 0 & (1) \\ (x+y)^2 + x^2y^2 - 7xy + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Trừ từng vế của phương trình (2) cho phương trình (1) ta được :

$$(x+y)^2 - 2xy(x+y) + x^2y^2 - 2(x+y) + 2xy + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+y-xy-1)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x+y-xy-1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(y-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \end{array}\right.$$

+) Với $x = 1 \Rightarrow y = 2$ hoặc $y = \frac{1}{2}$.

+) Với $y = 1 \Rightarrow x = 2$ hoặc $x = \frac{1}{2}$.

Các giá trị x, y tìm được đều thỏa mãn điều kiện.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y) \in \left\{(1;2);(1;\frac{1}{2});(2;1);(\frac{1}{2};1)\right\}$

Câu 20. (Trường chuyên tỉnh Thừa Thiên Huế vòng 2 năm 2019-2020) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3(x-y) + x^2y^2 = 1 \\ x^2(xy+3) - 3xy = 3 \end{cases}$.

Lời giải

Viết lại hệ $\begin{cases} x^4 - 2x^3y + x^2y^2 + x^3y = 1 \\ x^3y + 3(x^2 - xy) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - xy)^2 + x^3y = 1 \\ x^3y + 3(x^2 - xy) = 3 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = x^2 - xy \\ v = x^3y \end{cases}$, ta có hệ $\begin{cases} u^2 + v = 1 & (1) \\ v + 3u = 3 & (2) \end{cases}$.

Từ (2) ta có $v = 3 - 3u$. Thay vào (1) ta được $u^2 - 3u + 2 = 0 \Leftrightarrow u = 1, u = 2$.

Với $u = 1$ thì $v = 0$. Ta có $\begin{cases} x^2 - xy = 1 \\ x^3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$.

Hệ có hai nghiệm $(x;y) = (1;0), (-1;0)$.

Với $u = 2$ thì $v = -3$. Ta có $\begin{cases} x^2 - xy = 2 \\ x^3y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{3}{x^2} = 2 \\ x^2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 2x^2 + 3 = 0 \\ x^2y = -3 \end{cases}$.

Hệ này vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x;y)=(1;0),(-1;0)$.

Câu 21. (Trường chuyên tỉnh Gia Lai không chuyên năm 2019-2020) Không sử dụng máy tính bỏ túi, giải hệ phương trình $\begin{cases}2x+y=4\\3x-2y=-1\end{cases}$.

Câu 22. (Trường chuyên tỉnh Lào Cai Vòng 1 năm 2019-2020)

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+y=5\\2x-y=1\end{cases}$

b) Tìm tham số a để hệ phương trình $\begin{cases}x-y=a\\7x-2y=5a-1\end{cases}$ có nghiệm duy nhất (x; y) thỏa mãn $y=2x$.

Lời giải

a).Giải hệ pt: $\begin{cases}x+y=5\\2x-y=1\end{cases}$

$\begin{cases}3x=6\\y=5-x\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$

Vây: Hệ pt có nghiệm duy nhất là (2; 3)

b). $\begin{cases}x-y=a\\7x-2y=5a-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-2y=2a\\7x-2y=5a-1\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}5x=3a-1\\y=x-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3a-1}{5}\\y=\dfrac{3a-1}{5}-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3a-1}{5}\\y=\dfrac{-2a-1}{5}\end{cases}$

Ta có: $y=2x\Leftrightarrow\dfrac{-2a-1}{5}=2.\dfrac{3a-1}{5}\Leftrightarrow-2a-1=6a-2\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{8}$

Câu 23. (Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu thi chung năm 2019-2020) Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x-y=5\\x+2y=18\end{cases}$.

Lời giải

$\begin{cases}3x-y=5\\x+2y=18\end{cases}$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}6x-2y=10\\x+2y=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x=28\\x+2y=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=7\end{cases}$..

Câu 24. (Trường chuyên tỉnh Quảng Ngãi chuyên toán năm 2019-2020) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+3y-6x=0 \\ 9x^2-6xy^2+y^4-3y+9=0 \end{cases}$$

Lời giải

Cộng vế theo vế hai phương trình ta được

$$9x^2-6xy^2+y^4+x^2-6x+9=0 \Leftrightarrow (3x-y)^2+(x-3)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y^2=3x \end{cases}$$

$\Rightarrow (x;y)=(3;3)$ hoặc $(x;y)=(3;-3)$

Thử lại ta thấy nghiệm $(x;y)=(3;3)$ thỏa mãn hệ phương trình.

Câu 25. (Trường chuyên tỉnh Bắc Giang chuyên toán năm 2019-2020) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-2y^2+xy+2x+4y=0 \\ \sqrt{5x+1}+3\sqrt{y-1}=x^2-y+6 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện $x \ge -\dfrac{1}{5}; y \ge 1$..

$x^2-2y^2+xy+2x+4y=0 \Leftrightarrow (x+2y)(x-y+2)=0 \quad (1)$..

Từ điều kiện suy ra $x+2y>0$ nên $(1) \Leftrightarrow x-y+2=0$..

Thế $y=x+2$ được phương trình

$\sqrt{5x+1}+3\sqrt{x+1}=x^2-x+4$..

$$\sqrt{5x+1}+3\sqrt{x+1}=x^2-x+4$$
$$\Leftrightarrow x^2-3x+\left[(x+1)-\sqrt{5x+1}\right]+\left[(x+3)-3\sqrt{x+1}\right]=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-3x+\frac{x^2-3x}{x+1+\sqrt{5x+1}}+\frac{x^2-3x}{x+3+3\sqrt{x+1}}=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-3x)\left(1+\frac{1}{x+1+\sqrt{5x+1}}+\frac{1}{x+3+3\sqrt{x+1}}\right)=0 \quad (2).$$

Nhận xét $1+\dfrac{1}{x+1+\sqrt{5x+1}}+\dfrac{1}{x+3+3\sqrt{x+1}}>0,\ \forall x \ge -\dfrac{1}{5}$ nên từ (2) được $x^2-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Kết luận được hai nghiệm $(x;y)$ của hệ là $(0;2)$ và $(3;5)$.

Chú ý: Nếu sau bước (*) học sinh giải phương trình, nhân liên hợp chỉ tìm được một nhân tử x hoặc x-3 và kết luận luôn nghiệm thì phần còn lại chỉ chấm 0,5 điểm..

Câu 26. (Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh vòng 2 năm 2019-2020) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2+2xy+4=2x+5y \\ 5x^2+7y-18=\sqrt{x^4+4} \end{cases}$.

Lời giải

$$\begin{cases} y^2 + 2xy + 4 = 2x + 5y\,(1) \\ 5x^2 + 7y - 18 = \sqrt{x^4 + 4}\,(2) \end{cases}$$

ĐK: $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(1) \Leftrightarrow y^2 - y + 2x(y-1) + 4(1-y) = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y+2x-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = 4 - 2x \end{array}\right..$$

Với $y = 1$ thay vào (2) ta được

$$5x^2 - 11 = \sqrt{x^4 + 4} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \ge \dfrac{11}{5} \\ 24x^4 - 110x^2 + 117 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{55 + \sqrt{217}}{24} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{55 + \sqrt{217}}{24}}.$$

Với $y = 4 - 2x$ thay vào (2) ta được $5x^2 + 28 - 14x - 18 = \sqrt{x^4 + 4}$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 2) + \sqrt{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)} - 6(x^2 - 2x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 2\sqrt{x^2 - 2x + 2} \\ \sqrt{x^2 + 2x + 2} = -3\sqrt{x^2 - 2x + 2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 4(x^2 - 2x + 2)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5 - \sqrt{7}}{3} \Rightarrow y = \dfrac{2 + 2\sqrt{7}}{3} \\ x = \dfrac{5 + \sqrt{7}}{3} \Rightarrow y = \dfrac{2 - 2\sqrt{7}}{3} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$\left(\sqrt{\frac{55 + \sqrt{217}}{24}}; 1\right); \left(-\sqrt{\frac{55 + \sqrt{217}}{24}}; 1\right); \left(\frac{5 - \sqrt{7}}{3}; \frac{2 + 2\sqrt{7}}{3}\right); \left(\frac{5 + \sqrt{7}}{3}; \frac{2 - 2\sqrt{7}}{3}\right)..$$

Câu 27. (Trường chuyên tỉnh Cao Bằng vòng 2 năm 2019-2020) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - y = y^2 - x \\ x^2 - x = y + 3 \end{cases}$$

Lời giải

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - y = y^2 - x & (1) \\ x^2 - x = y + 3 & (2) \end{cases}$.

Phương trình (1) tương đương với $(x - y)(x + y + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = -x - 1 \end{array}\right.$

Với $y=x$ thế vào (2): $x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$

ta được hai nghiệm của hệ là $(-1;-1)$ và $(3;3)$

Với $y=-x-1$ thế vào (2): $x^2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{2} \\ x=\sqrt{2} \end{array}\right.$

ta được hai nghiệm của hệ là $\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}-1\right)$ và $\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}-1\right)$

Vậy hệ đã cho có bốn nghiệm là $(-1;-1)$, $(3;3)$, $\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}-1\right)$ và $\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}-1\right)$

Câu 28. (Trường chuyên tỉnh Cần thơ chuyên toán năm 2019-2020) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+xy=1 \\ x+y-xy=2y^2-x^2 \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy=1 & (1) \\ x+y-xy=2y^2-x^2 & (2) \end{cases}$$

$(2) \Leftrightarrow x+y-xy=2y^2-x^2 \Leftrightarrow (x+y)(x-2y+1)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases}$

Ta kết hợp với (1) ta có

TH1 $\begin{cases} x^2+y^2+xy=1 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

TH2 $\begin{cases} x^2+y^2+xy=1 \\ x-2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{3}{7} \\ y=\dfrac{5}{7} \end{cases}$

Câu 29. (Trường chuyên tỉnh Gia lai vòng 2 năm 2019-2020) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x^2+y^2)(x+y+2)=4(y+2) \\ x^2+y^2+(y+2)(x+y+2)=4(y+2) \end{cases}$.

Lời giải

$$\begin{cases} (x^2+y^2)(x+y+2)=4(y+2) & (1) \\ x^2+y^2+(y+2)(x+y+2)=4(y+2) & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có $y+2=\dfrac{x^2+y^2}{4}.(x+y+2)$, thay vào (2) ta được

$$x^2+y^2+\frac{x^2+y^2}{4}(x+y+2)^2=(x^2+y^2)(x+y+2)$$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2)\left[(x+y+2)^2-4(x+y+2)+4=0\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=0 \\ x+y+2=2 \end{array}\right.$

TH1: $x^2+y^2=0$ hợp với (1) ta suy ra hệ phương trình vô nghiệm.

TH2: $x+y=0$ hợp với (1) ta suy ra hệ phương trình có hai nghiệm $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}; \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$

Câu 30. (Trường chuyên tỉnh Hà Nam chuyên toán năm 2019-2020) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy^2+4y^2+8=x(x+2) \\ x+y+3=3\sqrt{2y-1} \end{cases}$.

Lời giải

$\begin{cases} xy^2+4y^2+8=x(x+2)\,(1) \\ x+y+3=3\sqrt{2y-1}\,(2) \end{cases}$

Điều kiện: $y \ge \frac{1}{2}$

Phương trình $(1) \Leftrightarrow (x+4)(y^2-x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=y^2+2 \end{array}\right.$

Thế x= -4 vào (2) ta được $y-1=3\sqrt{2y-1} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 1 \\ (y-1)^2=9(2y-1) \end{cases} \Leftrightarrow y=10+3\sqrt{10}$

Với $x=y^2+2$, thay vào phương trình (2) ta được:

$y^2+y+5=3\sqrt{2y-1}\,(3)$

$y^2+y+5=(y^2-y+1)+(2y-1)+5>(2y-1)+5$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$(2y-1)+5 \ge 2\sqrt{5(2y-1)} > 3\sqrt{2y-1}$

Do đó phương trình (3) vô nghiệm

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(-4;10+3\sqrt{10})$

Câu 31. (Trường chuyên tỉnh Hà Nội chuyên tin năm 2019-2020) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2+x-y=0 \\ x^2+x+1=y^2 \end{cases}$.

Lời giải

$2x^2-3xy+y^2+x-y=0 \Leftrightarrow (2x-y+1)(x-y)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=2x+1 \end{array}\right.$.

TH1: $\begin{cases} y=x \\ x^2+x+1=y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=-1.$

TH2: $\begin{cases} y = 2x+1 \\ x^2+x+1 = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x+1 \\ 3x^2+3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y = 1 \\ x = -1, y = -1 \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm là $S = \{(0;1),(-1;-1)\}$.

Câu 32. (Trường chuyên tỉnh Hà nội chuyên toán năm 2019-2020) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+7 = 4y^2+4y \\ x^2+3xy+2y^2+x+y = 0 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+7 = 4y^2+4y \\ (x+y)(x+2y+1) = 0 \end{cases}$

TH1: $\begin{cases} x+2y+1 = 0 \\ 8 = 0 \end{cases}$. Hệ phương trình vô nghiệm.

TH2: $\begin{cases} x+y = 0 \\ 3x^2-4x-7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{7}{3} \end{array}\right. \end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = \dfrac{7}{3} \\ y = -\dfrac{7}{3} \end{cases}$.

Câu 33. (Trường chuyên tỉnh Hà Tĩnh vòng 2 năm 2019-2020) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2 = 5 \\ x^3+2y^3+(x-5)^2+(y+5)^2 = 55. \end{cases}$

Lời giải

HPT đã cho tương đương $\begin{cases} x^2+y^2 = 5 \\ x^3+2y^3+x^2+y^2-10x+10y+50 = 55 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 5 \\ x^3+2y^3 = 10x-10y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 5 \\ x^3+2y^3 = 2.5.(x-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 5 & (1) \\ x^3+2y^3 = 2(x-y)(x^2+y^2) & (2). \end{cases}$

Từ (2) ta có: $x^3-2x^2y+2xy^2-4y^3 = 0 \Leftrightarrow (x-2y)(x^2+2y^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2y = 0 \\ x^2+2y^2 = 0. \end{array}\right.$

TH1. $\begin{cases} x^2+y^2 = 5 \\ x^2+2y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 5 \\ y^2 = -5 \end{cases}$ vô nghiệm.

TH2. $\begin{cases} x = 2y \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 5y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -1 \\ x = -2. \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1. \end{cases}$

Câu 34. (Trường chuyên tỉnh Hải phòng vòng 2 năm 2019-2020) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y\sqrt{y} = 9 \\ x^2 + 2y = x + 4\sqrt{y} \end{cases}$.

Lời giải

ĐKXĐ: $y \geq 0$. Lấy phương trình thứ nhất trừ đi ba lần phương trình thứ hai:

$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 8 - 12\sqrt{y} + 6y - y\sqrt{y} \Leftrightarrow (x-1)^3 = (2-\sqrt{y})^3 \Leftrightarrow x - 1 = 2 - \sqrt{y}$..

+ Thế $\sqrt{y} = 3 - x$ vào PT thứ nhất: $x^3 + (3-x)^3 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(1;4), (2;1)$ (TMĐKXĐ).

Câu 35. (Trường chuyên tỉnh Nam Định cho lớp chuyên KHTN năm 2019-2020) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-y)^2 + 4 = 3y - 5x + 2\sqrt{(x+1)(y-1)} \\ \dfrac{3xy - 5y - 6x + 11}{\sqrt{x^3+1}} = 5. \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} (x-y)^2 + 4 = 3y - 5x + 2\sqrt{(x+1)(y-1)} & (1) \\ \dfrac{3xy - 5y - 6x + 11}{\sqrt{x^3+1}} = 5 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện $\begin{cases} x > -1 \\ y \geq 1. \end{cases}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x-y+2)^2 + \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{y-1}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow y = x + 2$.

Thế vào phương trình (2) ta có

$$3x^2 - 5x + 1 = 5\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-x+1} - 2\sqrt{x+1}\right)\left(3\sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x+1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1} = 2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5+\sqrt{37}}{2} \\ x = \dfrac{5-\sqrt{37}}{2}. \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $(x;y)$ của hệ phương trình là $\left(\frac{5+\sqrt{37}}{2};\frac{9+\sqrt{37}}{2}\right),\left(\frac{5-\sqrt{37}}{2};\frac{9-\sqrt{37}}{2}\right)$.

.

Câu 36. (Trường chuyên tỉnh Nam Định chuyên toán năm 2019-2020) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=3+x^2y^2\\ \dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}+3=x^3y^3\end{cases}$.

Lời giải

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=3+x^2y^2 \quad (1)\\ \dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}+3=x^3y^3 \quad (2)\end{cases}$$

+ Điều kiện xác định: $x\neq 0$ và $y\neq 0$.

+ Ta có $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+3=x^3y^3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^3+\left(\frac{1}{y}\right)^3+(-xy)^3=3.\frac{1}{x}.\frac{1}{y}.(-xy)$.

Sử dụng hằng đẳng thức $a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{a+b+c}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$ ta thu được

$$(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{y}=-xy\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-xy=0\end{array}\right..$$

+ *Trường hợp 1:* $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}=-xy \Leftrightarrow \begin{cases}x=y\\1=-x^2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$. Thử vào (1) thấy không thỏa mãn.

+ *Trường hợp 2:* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-xy=0\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=xy\Leftrightarrow x+y=(xy)^2$.

Có $(1)\Leftrightarrow x^2+y^2=3x^2y^2+x^4y^4\Leftrightarrow(x+y)^2-2xy=3x^2y^2+x^4y^4$ hay có

$x^4y^4-2xy=3x^2y^2+x^4y^4\Leftrightarrow xy(3xy+2)=0\Leftrightarrow xy=-\frac{2}{3}$ (do có điều kiện $xy\neq 0$).

Vậy $\begin{cases}x+y=(xy)^2\\xy=-\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=\dfrac{4}{9}\\xy=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$, dẫn đến x,y là các nghiệm của phương trình $t^2-\frac{4}{9}t-\frac{2}{3}=0$ hay phải có $(x;y)$ là $\left(\frac{2+\sqrt{58}}{9};\frac{2-\sqrt{58}}{9}\right)$ hoặc $\left(\frac{2-\sqrt{58}}{9};\frac{2+\sqrt{58}}{9}\right)$.

+ Kết luận: Hệ cho có đúng hai nghiệm $(x;y)$ là $\left(\dfrac{2+\sqrt{58}}{9};\dfrac{2-\sqrt{58}}{9}\right),\left(\dfrac{2-\sqrt{58}}{9};\dfrac{2+\sqrt{58}}{9}\right)$.

Câu 37. (Trường chuyên tỉnh Nam Định lớp chuyên KHXH năm 2019-2020) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2-4y+3-xy+x=0 \\ \sqrt{y}-2\sqrt{5-y}+x^2+3y-13=0. \end{cases}$

Lời giải

Xét hệ $\begin{cases} y^2-4y+3-xy+x=0 & (1) \\ \sqrt{y}-2\sqrt{5-y}+x^2+3y-13=0 & (2) \end{cases}$

Điều kiện xác định $0\le y\le 5$.

Khi đó phương trình (1) $\Leftrightarrow (y-1)(y-3)-x(y-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ x=y-3. \end{array}\right.$

Với $y=1$ thế vào phương trình (2) ta được $x^2=13 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{13}.$.

Với $x=y-3$ thế vào phương trình (2) ta được

$\sqrt{y}-2\sqrt{5-y}+y^2-3y-4=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{5(y-4)}{\sqrt{y}+2\sqrt{5-y}}+(y+1)(y-4)=0$

$\Leftrightarrow (y-4)\left[\dfrac{5}{\sqrt{y}+2\sqrt{5-y}}+y+1\right]=0$

$\Leftrightarrow y=4 \Rightarrow x=1.$

(vì $\dfrac{5}{\sqrt{y}+2\sqrt{5-y}}+y+1>0$ với mọi $0\le y\le 5$)

Đối chiếu điều kiện vậy nghiệm (x,y) của hệ phương trình là $\left(\pm\sqrt{13};1\right)$, $(1;4)$..

Câu 38. (Trường chuyên tỉnh Quảng Nam Vòng 2 năm 2019-2020) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+4x+2y=3 \\ x^2+7y^2-4xy+6y=13. \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} x^2+y^2+4x+2y=3 \\ x^2+7y^2-4xy+6y=13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x+4+y^2+2y+1=8 \\ x^2-4xy+4y^2+3y^2+6y+3=16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2+(y+1)^2=8 & (1) \\ (x-2y)^2+3(y+1)^2=16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+2)^2+2(y+1)^2=16 \\ (x-2y)^2+3(y+1)^2=16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(x+2)^2-(x-2y)^2-(y+1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2-(x-2y)^2+(x+2)^2-(y+1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-2y+2)(2y+2)+(x+y+3)(x-y+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)(4y+4)+(x+y+3)(x-y+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)(x+5y+7)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=y-1 & (2) \\ x=-5y-7 & (3) \end{array}\right.$$

Thay (2) vào (1) được:

$$(y-1+2)^2+(y+1)^2=8 \Leftrightarrow 2(y+1)^2=8 \Leftrightarrow (y+1)^2=4$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \Rightarrow x=0 \\ y=-3 \Rightarrow x=-4 \end{array}\right.$$

Thay (3) vào (1) được:

$$(-5y-7+2)^2+(y+1)^2=8 \Leftrightarrow 26(y+1)^2=8 \Leftrightarrow (y+1)^2=\frac{4}{13}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1+\frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow x=-2-\frac{10}{\sqrt{13}} \\ y=-1-\frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow x=-2+\frac{10}{\sqrt{13}} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là

$$(x;y)\in\left\{(0;1),(-4;-3),\left(-2-\frac{10}{\sqrt{13}};-1+\frac{2}{\sqrt{13}}\right),\left(-2+\frac{10}{\sqrt{13}};-1-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)\right\}.$$

Câu 39. (Trường chuyên tỉnh Thái Bình vòng 1 năm 2019-2020) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3-y^3+(x-1)y^2-(y+1)x^2=0 \\ x^2+4\sqrt{y+4}=2x+y+7 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} x^3-y^3+(x-1)y^2-(y+1)x^2=0 & (1) \\ x^2+4\sqrt{y+4}=2x+y+7 & (2) \end{cases} \text{(ĐK: } y\ge -4\text{)}$$

$(1) \Leftrightarrow x^3 - y^3 + (x-1)y^2 - (y+1)x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - (y+1)x^2 + (x-1)y^2 - y^3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x-y-1) + y^2(x-1-y) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2)(x-y-1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=0 \\ x-y-1=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=0 \\ x=y+1 \end{array}\right.$

Dễ thấy x = y = 0 không là nghiệm của phương trình (2)

Thay x = y + 1 vào phương trình (2) được:

$(y+1)^2 + 4\sqrt{y+4} = 2(y+1) + y + 7$

$\Leftrightarrow y^2 + 2y + 1 + 4\sqrt{y+4} = 2y + 2 + y + 7$

$\Leftrightarrow y^2 = y - 4\sqrt{y+4} + 8$

$\Leftrightarrow y^2 = y + 4 - 4\sqrt{y+4} + 4$

$\Leftrightarrow y^2 = \left(\sqrt{y+4} - 2\right)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \sqrt{y+4} - 2 \\ y = -\sqrt{y+4} + 2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y + 4 - \sqrt{y+4} - 2 = 0 \\ y + 4 + \sqrt{y+4} - 6 = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{y+4}+1\right)\left(\sqrt{y+4}-2\right) = 0 \\ \left(\sqrt{y+4}+3\right)\left(\sqrt{y+4}-2\right) = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \sqrt{y+4} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{y+4} = 2$

$\Leftrightarrow y = 0$ (TMĐK)

Với $y = 0 \Rightarrow x = 1$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là (x; y) = (1; 0)

Câu 40. (Trường chuyên tỉnh Thái Bình vòng 2 năm 2019-2020) Giải hệ phương trình:
$\begin{cases} y + 2\cdot\sqrt{x^2+y} = 4x + 3 \\ (x-3)\sqrt{y+4} + (y-4)\sqrt{x-1} + 2 = 0 \end{cases}$

Lời giải

* Điều kiện: $x \ge 1; y \ge -4; x^2 + y \ge 0$. Biến đổi phương trình (1):

$(1) \Leftrightarrow x^2 + y + 2\cdot\sqrt{x^2+y} + 1 = x^2 + 4x + 4$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+y}+1)^2 = (x+2)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+y} = x+1 \\ \sqrt{x^2+y} = -x-3 \text{ (loaiđo } x \geq 1)\end{array}\right.$

Với $\sqrt{x^2+y} = x+1 \Leftrightarrow y = 2x+1$ thay vào (2) ta được:

$(x-3)\sqrt{2x+5} + (2x-3)\sqrt{x-1} + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(\sqrt{2x+5}-3) + (2x-3)(\sqrt{x-1}-1) + 5x - 10 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{(x-3)(2x-4)}{\sqrt{2x+5}+3} + \frac{(2x-3)(x-2)}{\sqrt{x-1}+1} + 5(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{2x-6}{\sqrt{2x+5}+3} + \frac{2x-3}{\sqrt{x-1}+1} + 5\right] = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{2x-6}{\sqrt{2x+5}+3} + 2 + \frac{2x-3}{\sqrt{x-1}+1} + 3\right] = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{2x+2\sqrt{2x+5}}{\sqrt{2x+5}+3} + \frac{2x+3\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}\right] = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$

Do $\frac{2x+2\sqrt{2x+5}}{\sqrt{2x+5}+3} + \frac{2x+3\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1} > 0, \forall x \geq 1$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$

Câu 41. (Trường chuyên tỉnh Tiền Giang Vòng 2 năm 2019-2020) Giải hệ phương trình:
$\begin{cases} (3x-y-1)\sqrt{y+1} + 3x - 1 = y\sqrt{3x-y} \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

Lời giải

$\begin{cases} (3x-y-1)\sqrt{y+1} + 3x - 1 = y\sqrt{3x-y}(1) \\ x^2 + y^2 = 5(2) \end{cases}$

Điều kiện $3x - y >\geq 0; y \geq 0$

$(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{3x-y}-1\right)\left(\sqrt{y+1}+1\right)\left(\sqrt{3x-y}-\sqrt{y+1}+2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{3x-y} - 1 = 0(3) \\ \sqrt{3x-y} - \sqrt{y+1} + 2 = 0(4)\end{array}\right.$

$(3) \Leftrightarrow y = 3x - 1$ thế vào (2), ta được

$$x^2+(3x-1)^2=5 \Leftrightarrow 10x^2-6x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=2 \\ x=-\dfrac{2}{5} \Rightarrow y=-\dfrac{11}{5} \end{array}\right.$$

Loại nghiệm $(x;y)=\left(-\dfrac{2}{5};-\dfrac{11}{5}\right)$

$$(4) \Leftrightarrow \sqrt{3x-y}+\frac{3-y}{2+\sqrt{y+1}}=0(5)$$

Từ (2), ta có: $|y| \le \sqrt{5}<3 \Rightarrow 3-y>0 \Rightarrow (5)$ vô nghiệm

Vậy tập nghiệm $S=\{(1;2)\}$

Câu 42. (Trường chuyên tỉnh Tuyên Quang chuyên toán năm 2019-2020)Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2\sqrt{x+y}+2\sqrt{x-y}=4+\sqrt{x^2-y^2} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2 \end{cases}$.

Lời giải

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{x+y}+2\sqrt{x-y}=4+\sqrt{x^2-y^2} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2 \end{cases}$

ĐKXĐ: $x \ge y \ge 0$. Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x+y} \\ b=\sqrt{x-y} \end{cases}$ ($a \ge b \ge 0$). Ta có: $2a+2b=4+ab$

$$\Leftrightarrow (ab-2a)-(2b-4)=0 \Leftrightarrow a(b-2)-2(b-2)=0 \Leftrightarrow (a-2)(b-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+y}=2 \Leftrightarrow x+y=4 \\ b-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-y}=2 \Leftrightarrow x-y=4 \end{array}\right.$$

- TH1: $\begin{cases} x+y=4 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ x+y+2\sqrt{xy}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ \sqrt{xy}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$

(do $x \ge y \ge 0$)

- TH2: $\begin{cases} x-y=4 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+4 \\ x+y+2\sqrt{xy}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+4 \\ y+\sqrt{xy}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$

(do $x \ge y \ge 0$)

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$

Câu 43. (Trường chuyên tỉnh Tây Ninh Vòng 2 năm 2019-2020) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-5xy+x-5y^2=42 \\ 7xy+6y^2+42=x \end{cases}$.

Lời giải

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 5xy + x - 5y^2 = 42 & (1) \\ 7xy + 6y^2 + 42 = x & (2) \end{cases}$.

Lấy $(1)+(2)$ ta được $(x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -y$

Thay $x = -y$ vào (1) ta được $x^2 + x - 42 = 0$

Giải phương trình trên ta được $x = -7; x = 6$

Với $x = -7$ ta có $y = 7$; Với $x = 6$ ta có $y = -6$.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là $(-7;7)$ và $(6;-6)$.

Câu 44. (Trường chuyên tỉnh Bình Phước chuyên toán năm 2019-2020) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3 + 2x^2y \quad xy = y^2 \quad x \quad y \\ \quad 2x^3 \quad xy + x^2 = 4 \end{cases}$.

Lời giải

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow (x+y)(2x^2 \quad y + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \quad x \\ y = 2x^2 + 1 \end{array}\right.$$

□□Với $y = \quad x$

$$(2) \Leftrightarrow (x \quad 1)(x^2 + 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = \quad 1$$

□□Với $y = 2x^2 + 1$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 \quad x \quad 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{17}}{2}, x = \frac{1 \quad \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow y = 10 + \sqrt{17}$$

$$x = \frac{1 \quad \sqrt{17}}{2} \Rightarrow y = 10 \quad \sqrt{17}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là

$$(1; \quad 1), \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}; 10 + \sqrt{17}\right), \left(\frac{1 \quad \sqrt{17}}{2}; 10 \quad \sqrt{17}\right).$$

Câu 45. (Trường chuyên tỉnh Vĩnh Phúc vòng 2 năm 2019-2020) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x+3y+2} - 3\sqrt{y} = \sqrt{x+2} \\ y^2 + xy + x^2 = 4y + 1 \end{cases}$

Lời giải

Câu 46. (Trường chuyên tỉnh Bình Định vòng 2 năm 2019-2020) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 13 \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 \end{cases}$.

Lời giải

Có $\begin{cases} x^2+xy+y^2=13 \\ x^4+x^2y^2+y^4=91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=13-xy \\ \left(x^2+y^2\right)^2-x^2y^2=91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=13-xy \\ 169-26xy+x^2y^2-x^2y^2=91 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=10 \\ xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4-10x^2+9=0 \\ y=\dfrac{3}{x}\ (x\neq 0) \end{cases} \quad (I).$

Giải hệ (I) ta tìm được $(x;y)=(1;3),(-1;-3),(3;1),(-3;-1)$.

Câu 47. (Trường chuyên tỉnh Lâm Đồng vòng 2 năm 2019-2020)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=4 \\ x^3+y^3=4x^2+4y^2-12 \end{cases}$.

Lời giải

Biến đổi được phương trình $x^3+y^3=4x^2+4y^2-12$ về dạng

$(x+y)(x^2+y^2-xy)=4x^2+4y^2-12$

Suy ra được: xy = 3

Qui việc tìm x, y về giải phương trình: $t^2-4t+3=0$

Tìm được 2 cặp nghiệm: (x = 1; y = 3); (x = 3; y = 1);

Câu 48. (Trường chuyên tỉnh PTNK (VÒNG 1) năm 2019-2020) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+y+3}=\sqrt{2x+3y+1} \\ x(y+1)-4(x+y)+54=0 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x+y+3\geq 0$ và $2x+3y+1\geq 0$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ, ta có $x+y+3=2x+3y+1$, tức $x=2-2y$.

Từ đây và các điều kiện $x+y+3\geq 0, 2x+3y+1\geq 0$, ta phải có $5-2y\geq 0$ và $5-y\geq 0$, tức $y\leq \dfrac{5}{2}$.

Bây giờ, thay $x=2-2y$ vào phương trình thứ hai của hệ, ta được:
$(2-2y)(y+1)-4(2-y)+54=0$ hay $-2(y+4)(y-6)=0$.

Do $y\leq \dfrac{5}{2}$ nên từ đây, ta có $y=-4$ (tương ứng $x=10$). Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x,y)=(10,-4)$.

Câu 49. (Trường chuyên tỉnh Quảng Ninh Vòng 2 năm 2019-2020)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2=(2-y)(2+y) \\ 2x^3=(x+y)(4-xy) \end{cases}$.

Lời giải

$\begin{cases} x^2=(2-y)(2+y) \\ 2x^3=(x+y)(4-xy) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4 & (1) \\ 2x^3=(x+y)(4-xy) & (2) \end{cases}$

Thế $4=x^2+y^2$ từ phương trình (1) vào phương trình (2) ta được:

$2x^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)\Leftrightarrow x^3=y^3\Leftrightarrow x=y$.

Thay $x=y$ vào phương trình (1) ta được: $x^2=2\Leftrightarrow\ x=\pm\sqrt{2}$.

Hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là: $(\sqrt{2};\sqrt{2});(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$.

Câu 50. (Trường chuyên tỉnh Quảng Trị Vòng 2 năm 2019-2020) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+6y=13\\2x^2=(x+2y-3)(2-x)\end{cases}$.

Lời giải

$$\begin{cases}x+6y=13\\2x^2=(x+2y-3)(2-x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{13-x}{6}\\2x^2=\left(x+2.\dfrac{13-x}{6}-3\right)(2-x)\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{13-x}{6}\\2x^2=\dfrac{2(4-x^2)}{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{13-x}{6}\\x=\pm1\end{cases}.$$

Vậy nghiệm $(x;\ y)$ của hệ phương trình là: $(1;\ 2)$, $\left(-1;\ \dfrac{7}{3}\right)$.

Câu 51. (Trường chuyên tỉnh Thái Nguyên chuyên tin năm 2019-2020) Giải hệ phương trình $\begin{cases}8x^3-y=y^3-2x\\x^2+y^2=x+2y\end{cases}$.

Lời giải

Ta có

$$(1)\Leftrightarrow 8x^3-y^3-y+2x=0$$
$$\Leftrightarrow(2x-y)(4x^2+2xy+y^2+1)=0$$
$$\Leftrightarrow(2x-y)\left[(x+y)^2+3x^2+1\right]=0$$
$$\Leftrightarrow y=2x\quad\left(\text{do }(x+y)^2+3x^2+1>0\right)$$

Thay $y=2x$ vào (2) ta có phương trình: $x^2+4x^2=x+4x\Leftrightarrow 5x^2-5x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$

Với $x=0$ ta có $y=0$

Với $x=1$ ta có $y=2$.

Câu 1. (Trường chuyên tỉnh Bình Dương chuyên toán năm 2019-2020) Cho parabol $(P): y=2ax^2\ (a>0)$ và đường thẳng $d: y=4x-2a^2$. Tìm a để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt M,N có hoành độ x_M, x_N sao cho $K=\dfrac{8}{x_M+x_N}+\dfrac{1}{2x_Mx_N}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Phương trình hoành độ của (P) và d là:

$$2ax^2=4x-2a^2 \Leftrightarrow 2ax^2-4x+2a^2=0 \qquad (*)$$

Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt M,N thì $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt , nghĩa là

$$\Delta>0 \Rightarrow (-4)^2-4.2a.2a^2>0$$

$$\Rightarrow 16-16a^3>0$$

$$\Rightarrow 1-a^3>0$$

$$\Rightarrow (1-a)(1+a+a^2)>0$$

$$\Rightarrow (1-a)\left[\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}\right]>0$$

$$\Rightarrow 0<a<1$$

Ngoài ra, ta có:

$$x_M=\frac{4+\sqrt{16-16a^3}}{2.2a}=\frac{1+\sqrt{1-a^3}}{a}$$

$$x_N=\frac{4-\sqrt{16-16a^3}}{2.2a}=\frac{1-\sqrt{1-a^3}}{a}$$

$$x_M+x_N=\frac{1+\sqrt{1-a^3}}{a}+\frac{1-\sqrt{1-a^3}}{a}=\frac{2}{a}$$

$$2x_M.x_N=2.\frac{1+\sqrt{1-a^3}}{a}.\frac{1-\sqrt{1-a^3}}{a}=2a$$

Mà $K=\dfrac{8}{x_M+x_N}+\dfrac{1}{2x_Mx_N}=\dfrac{8}{\frac{2}{a}}+\dfrac{1}{2a}=4a+\dfrac{1}{2a}\overset{BĐT\ Cô-si}{\geq}2\sqrt{4a.\dfrac{1}{2a}}=2\sqrt{2}$

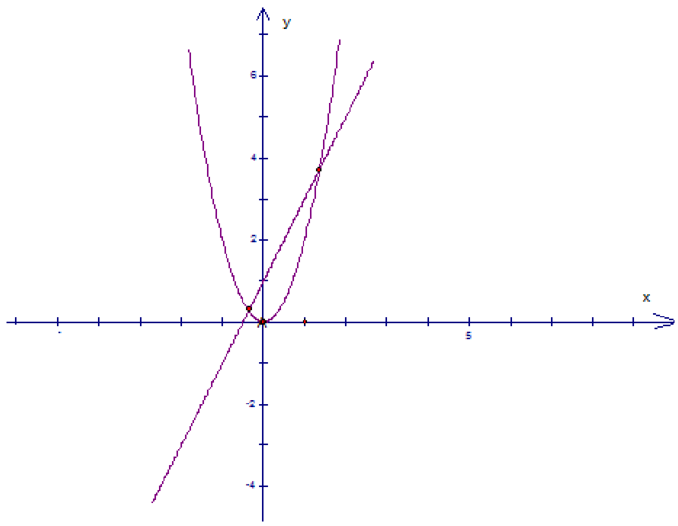
Do đó K đạt giá trị nhỏ nhất, ngĩa là

$$4a+\frac{1}{2a}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow 8a^2-4\sqrt{2}a+1=0 \Leftrightarrow a=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Vậy $a=\frac{\sqrt{2}}{4}$ thì thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 2. (Trường chuyên tỉnh Bắc Giang chuyên toán năm 2019-2020) Cho parabol $(P): y=2x^2$ và đường thẳng $d: y=2x+m-1$, với m là tham số.
a) Khi $m=2$, hãy vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một mặt phẳng tọa độ; đồng thời tìm tọa độ các giao điểm của hai đồ thị trên.
b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol (P) cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\left||x_1|-|x_2|\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải



a).

Vẽ đúng hai đồ thị, parabol đi qua ít nhất ba điểm có tọa độ cụ thể (trong đó có tọa độ đỉnh), đường thẳng đi qua ít nhất hai điểm có tọa độ cụ thể.

Chú ý: Nếu học sinh vẽ đúng dáng điệu parabol và đường thẳng nhưng không ghi đủ tọa độ theo yêu cầu thì mỗi đồ thị thiếu tọa độ trừ 0,25 điểm..

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị: $2x^2=2x+1 \Leftrightarrow 2x^2-2x-1=0.$.

Giải phương trình được nghiệm $x_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}; x_2=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\cdot$.

Kết luận tọa độ giao điểm $A\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; 2+\sqrt{3}\right)$; $B\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; 2-\sqrt{3}\right)$.

b).Phương trình hoành độ giao điểm $2x^2-2x-m+1=0$; $\Delta=2m-1>0 \Leftrightarrow m>\frac{1}{2}\cdot$.

$\left||x_1|-|x_2|\right|=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2-2|x_1x_2|=\frac{1}{2}\cdot$.

Áp dụng Viet, được phương trình $1+(m-1)-|m-1|=\frac{1}{2}\cdot$.

Giải phương trình được $m=\frac{3}{4}\cdot$.

Câu 3. (Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh vòng 2 năm 2019-2020) Cho hai hàm số $y = x^2$ và $y = (m-1)x - 1$ (với m là tham số) có đồ thị lần lượt là (P) và d. Tìm m để (P) cắt d tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ sao cho $y_1^3 - y_2^3 = 18(x_1^3 - x_2^3)$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là $x^2 - (m-1)x + 1 = 0$ (1).

(P) cắt d tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \Delta = (m-1)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow |m-1| > 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < -1 \end{array}\right. \ (*).$$

Áp dụng ĐL Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = m - 1$; $x_1x_2 = 1$..

Từ giả thiết ta có $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$.

Khi đó $y_1^3 - y_2^3 = 18(x_1^3 - x_2^3) \Leftrightarrow x_1^6 - x_2^6 = 18(x_1^3 - x_2^3) \Leftrightarrow (x_1^3 - x_2^3)(x_1^3 + x_2^3 - 18) = 0$ (2).

Do $x_1 \neq x_2$ nên $(2) \Leftrightarrow x_1^3 + x_2^3 - 18 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) - 18 = 0$.

Do đó,

$(m-1)^3 - 3(m-1) - 18 = 0 \Leftrightarrow (m-1-3)\left[(m-1)^2 + 3(m-1) + 6\right] = 0 \Leftrightarrow m = 4$ (t/m (*))..

Câu 4. (Trường chuyên tỉnh Gia lai chuyên tin năm 2019-2020) Cho (P) là đồ thị của hàm số $y = x^2$ và (d) là đồ thị của hàm số $y = -x + 2$. Tìm a và b để đồ thị (Δ) của hàm số $y = ax + b$ song song với (d) và cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng -1.

Câu 5. (Trường chuyên tỉnh Gia lai vòng 2 năm 2019-2020) Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x + m - 2$, với m là tham số. Xác định giá trị của m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là $x^2 = 2x + m - 2$

(P) cắt d tại hai điểm phân biệt khi $x^2 - 2x - m + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt

Hay $\Delta = 4m - 4 > 0$

$\Leftrightarrow m > 1$.

Câu 6. (Trường chuyên tỉnh Hà Nam chuyên toán năm 2019-2020) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình $y = 4mx - 3m^2 - 2m + 3$ và parabol (P) có phương trình $y = x^2$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2

sao cho $P=\dfrac{4x_1.x_2-2m}{x_1+x_2+2}$ có giá trị nguyên.

Lời giải

$$x^2=4mx-3m^2-2m+3\Leftrightarrow x^2-4mx+3m^2+2m-3=0$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$\Delta'=m^2-2m+3=\left(m-1\right)^2+2>0\forall m$

Suy ra (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.

Theo định lý Viet, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=4m\\ x_1.x_2=3m^2+2m-3\end{cases}$

$P=\dfrac{4x_1.x_2-2m}{x_1+x_2+2}=\dfrac{4(3m^2+2m-3)-2m}{4m+2}$

$=\dfrac{12m^2+6m-12}{4m+2}=\dfrac{6m^2+3m-6}{2m+1}$

$P=3m-\dfrac{6}{2m+1}$

$P\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow(2m+1)\,|\,6$

Mà 2m+1 là số lẻ $\Rightarrow(2m+1)\in\left\{\pm1;\pm3\right\}$

$2m+1=1\Rightarrow m=0\Rightarrow P=-6$

$2m+1=-1\Rightarrow m=-1\Rightarrow P=3$

$2m+1=3\Rightarrow m=1\Rightarrow P=1$

$2m+1=-3\Rightarrow m=-2\Rightarrow P=-4$

Vậy $m\in\left\{0;-1;1;-2\right\}$.

Câu 7. (Trường chuyên tỉnh Hà Nam thi chung năm 2019-2020) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y=x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y=mx+3$ (với m là tham số).

1. Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A và B.

2. Gọi x_1,x_2 lần lượt là hoành độ của A và B. Tính tích các giá trị của m để $2x_1+x_2=1$.

Lời giải

1. Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A và B, $\forall m\in\mathbb{R}$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-mx-3=0$

$\Delta=m^2+12$

Do $m^2\geq0,\forall m\in\mathbb{R}$ nên $m^2+12>0,\forall m\in\mathbb{R}$.

Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

2. Gọi x_1,x_2 lần lượt là hoành độ của A và B. Tính tích các giá trị của m để $2x_1+x_2=1$.

Theo Viet ta có $\begin{cases}x_1+x_2=m & (1)\\ x_1x_2=-3 & (2)\end{cases}$

Kết hợp (1) với $2x_1 + x_2 = 1$ ta được $\begin{cases} x_1 = 1 - m \\ x_2 = 2m - 1 \end{cases}$

Thay vào (2) ta được $(1-m)(2m-1) = -3$

$\Leftrightarrow -2m^2 + 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow m_1 = -\dfrac{1}{2}, m_2 = 2$

Vậy $m_1m_2 = -1$. (Học sinh có thể dùng Viet)

Câu 8. (Trường chuyên tỉnh Hòa Bình Chuyên Toán năm 2019-2020) Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y = 2x^2$ và đường thẳng (d): $y = 3x + 2m - 1$.Tìm m để (d) cắt (P) tại 2 điểm nằm về 2 phía của đường thẳng Oy.

Lời giải

Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình $2x^2 - 3x - 2m + 1 = 0$

Để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm nằm về hai phía của đường thẳng Oy

Khi và chỉ khi $-2(2m-1) < 0 \Leftrightarrow -4m + 2 < 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{2}$.

Câu 9. (Trường chuyên tỉnh Khánh Hòa Vòng 2 năm 2019-2020) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho (P) $y = x^2$ và đường thẳng (d) $y = 2mx + 2m + 3$

a) Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

b) Gọi y_1, y_2 lần lượt là tung độ các giao điểm của đường thẳng (d) và (P). Tìm tất cả các giá trị m để $y_1 + y_2 \le 5$.

Lời giải

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d)

$x^2 = 2mx + 2m + 3$

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx - 2m - 3 = 0 \quad (*)$

Có: $\Delta' = m^2 + 2m + 3 = (m+1)^2 + 2 > 0, \forall m \in R$

Vì thế: phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt

Hay: (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

b) Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ hai giao điểm của (d) và (P)

Khi đó: $\begin{cases} y_1 = 2m.x_1 + 2m + 3 \\ y_2 = 2m.x_2 + 2m + 3 \end{cases}$ và x_1, x_2 chính là hai nghiệm của $(*)$

Theo Vi-ét, có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1.x_2 = -2m - 3 \end{cases}$

Có: $y_1 + y_2 \le 5$

$\Leftrightarrow 2m.x_1 + 2m + 3 + 2m.x_2 + 2m + 3 \le 5$

$\Leftrightarrow 2m.(x_1 + x_2) + 4m + 6 \le 5$

$\Leftrightarrow 2m.2m + 4m + 6 - 5 \le 0$

$\Leftrightarrow 4m^2 + 4m + 1 \le 0$

$\Leftrightarrow (2m+1)^2 \le 0$

$\Leftrightarrow 2m + 1 = 0$ (do $(2m+1)^2 \ge 0, \forall m \in R$)

$\Leftrightarrow m = \frac{-1}{2}$

Vậy $m = \frac{-1}{2}$.

Câu 10. (Trường chuyên tỉnh Kon Tum vòng 2 năm 2019-2020) Cho parapol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + m^2 + 1$, m là tham số. Tìm m để đường thẳng (d) cắt parapol (P) tại hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ sao cho $\frac{y_A}{x_B} + \frac{y_B}{x_A} = \frac{-38}{5}$.

Lời giải

Cho parapol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + m^2 + 1$, m là tham số. Tìm m để đường thẳng (d) cắt parapol (P) tại hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ sao cho $\frac{y_A}{x_B} + \frac{y_B}{x_A} = \frac{-38}{5}$.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa (d) và (P) là

$x^2 = 2x + m^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m^2 - 1 = 0$

Phương trình bậc hai có $ac = -m^2 - 1 < 0$ với mọi m nên luôn có hai nghiệm phân biệt khác 0 với mọi m. Do đó (d) luôn cắt parapol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ với mọi m

$x_A; x_B$ là các nghiệm khac 0 của phương trình $x^2 - 2x - m^2 - 1 = 0$.

Áp dụng hệ thức Vi et ta có : $\begin{cases} x_A + x_B = 2 \\ x_A.x_B = -m^2 - 1 \end{cases}$

Do $\frac{y_A}{x_B} + \frac{y_B}{x_A} = \frac{-38}{5} \Leftrightarrow 5(y_A.x_A + y_B.x_B) = -38.x_A.x_B$

$\Leftrightarrow 5(x_A^3 + x_B^3) = -38.x_A.x_B \Leftrightarrow 5\left[(x_A + x_B)^3 - 3x_A.x_B(x_A + x_B)\right] = -38.x_A.x_B$

$\Leftrightarrow 5\left[8 - 6(-m^2 - 1)\right] = -38.(-m^2 - 1)$

$\Leftrightarrow 8m^2 = 32 \Leftrightarrow m = \pm 2$

Vậy $m = 2$ và $m = -2$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 11. (Trường chuyên tỉnh Lào Cai Vòng 1 năm 2019-2020)
Cho đường thẳng *(d)*: $y = x - 1$ và Parabol *(P)*: $y = 3x^2$
a) Tìm tọa độ điểm A thuộc Parabol *(P)*, biết điểm A có hoành độ $x = -1$.
b) Tìm b để đường thẳng *(d)* và đường thẳng *(d')*: $y = \frac{1}{2}x + b$ cắt nhau tại một điểm trên trục hoành.

Lời giải

a).Vì điểm A thuộc Parabol *(P)*: $y = 3x^2$ có hoành độ $x = -1$

thay $x = -1$ vào hàm số $y = 3x^2$, ta được: $y = 3(-1)^2 = 3$

Vậy: Điểm A(-1; 3)

b).Xét đt *(d)*: $y = x - 1$

Cho $y = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow$ đt (d) cắt trục hoành tại điểm (1; 0)

Để đường thẳng *(d)* và đường thẳng *(d')*: $y = \frac{1}{2}x + b$ cắt nhau tại một điểm trên trục hoành thì điểm (1; 0) thuộc đường thẳng *(d')*: $y = \frac{1}{2}x + b$

Ta có: $\frac{1}{2}.1 + b = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}$

Vậy: $b = -\frac{1}{2}$

Câu 12. (Trường chuyên tỉnh Lâm Đồng vòng 2 năm 2019-2020) Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị là (P) và hàm số $y = 6x + m + 4$ có đồ thị là (d). Tìm m để (P) và (d) tiếp xúc với nhau.

Lời giải

Viết được phương trình hoành độ giao điểm:

$2x^2 = 6x + m + 4$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x - m - 4 = 0$

Lập luận để có $\Delta' = 0 \Rightarrow (-3)^2 - 2(-m-4) = 0$

Tính được $m = \frac{-17}{2}$

Câu 13. (Trường chuyên tỉnh Quảng Nam Vòng 2 năm 2019-2020) Cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + m - 2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt lần lượt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 < 3$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$-x^2 = x + m - 2 \Leftrightarrow x^2 + x + m - 2 = 0$ (1)

Ta có: $\Delta = 1-4(m-2) = 9-4m$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{9}{4}$ (2)

Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1x_2 = m-2 \end{cases}$

Theo đề bài:

$x_1^2 + x_2^2 < 3 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 < 3$

$\Rightarrow 1-2(m-2) < 3 \Leftrightarrow 5-2m < 3 \Leftrightarrow m > 1$ (3)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow 1 < m < \dfrac{9}{4}$ là giá trị cần tìm.

Câu 14. (Trường chuyên tỉnh Thái Bình vòng 1 năm 2019-2020) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $(d_1): y = (m^2+1)x - 2m$ và $(d_2): y = (m+3)x - m - 2$ (m là tham số).

1. Tìm m để (d_1) song song với (d_2).
2. Chứng minh: với mọi m đường thẳng (d_2) luôn đi qua một điểm cố định.
3. Tìm m để $(d_1),(d_2)$ cắt nhau tại $M(x_M; y_M)$ thỏa mãn $A = 2020x_M(y_M+2)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

1. (d_1) song song với (d_2) $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2+1 = m+3 \\ -2m \neq -m-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 = 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 2 \end{array} \right. \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$

Vậy $m = -1$ là giá trị cần tìm.

2. Giả sử đường thẳng (d_2) luôn đi qua điểm cố định $T(x_0; y_0)$

Khi đó:

$y_0 = (m+3)x_0 - m - 2 \ \forall m$

$\Leftrightarrow y_0 = mx_0 + 3x_0 - m - 2 \ \forall m$

$\Leftrightarrow y_0 - 3x_0 + 2 = mx_0 - m \ \forall m$

$\Leftrightarrow y_0 - 3x_0 + 2 = (x_0 - 1)m \ \forall m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 1 = 0 \\ y_0 - 3x_0 + 2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases}$

Vậy đường thẳng (d_2) luôn đi qua điểm cố định $T(1;1)$ (đpcm)

3.(d1) cắt (d2) $\Leftrightarrow m^2+1\neq m+3 \Leftrightarrow m^2-m-2\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -1 \\ m=2 \end{cases}$

Vì $(d_1),(d_2)$ cắt nhau tại $M(x_M;y_M)$ nên x_M là nghiệm của phương trình:

$$(m^2+1)x_M-2m=(m+3)x_M-m-2$$
$$\Leftrightarrow (m^2-m-2)x_M=m-2$$
$$\Leftrightarrow (m+1)(m-2)x_M=m-2$$
$$\Leftrightarrow x_M=\frac{1}{m+1} \text{ (do } m\neq -1; m\neq 2)$$

Thay $x_M=\frac{1}{m+1}$ vào phương trình (d2) được:

$$y_M=\frac{m+3}{m+1}-m-2=1+\frac{2}{m+1}-m-2=\frac{2}{m+1}-(m+1)=2x_M-\frac{1}{x_M}$$

Do đó:

$$A=2020x_M\left(2x_M-\frac{1}{x_M}+2\right)=1010\left(4x_M^2-2+4x_M\right)$$
$$=1010\left[\left(2x_M+1\right)^2-3\right]\geq 1010.(-3)=-3030$$

Dấu "=" xảy ra

$$\left(2x_M+1\right)^2=0\Leftrightarrow x_M=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{1}{m+1}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow m=-3 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy $\min A=-3030 \Leftrightarrow m=-3$

Câu 15. (Trường chuyên tỉnh Thái Nguyên chuyên toán năm 2019-2020) Cho hàm số $y=f(x)=\left(-m^2+4m-5\right)x^2$. Hãy so sánh $f(2019)$ và $f(2020)$.

Lời giải

Theo ý a ta có: $-m^2+4m-5<0\ \forall m\in\mathbb{R}$.

Vậy hàm số $y=f(x)=\left(-m^2+4m-5\right)x^2$ nghịch biến với $x>0$, đồng biến với $x<0$.

Do đó $f(2019)>f(2020)$.

Câu 16. (Trường chuyên tỉnh Tiền Giang chuyên tin năm 2019-2020) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y=\frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $d_1: y=2x$.

a) Tìm tọa độ hai điểm A,B thuộc (P) $(x_A>x_B)$ sao cho tam giác OAB vuông cân tại O.

b) Viết phương trình của đường thẳng d_2, biết d_2 song song với d_1 và d_2 có duy nhất một điểm chung với (P).

Lời giải

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y=\frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $d_1: y=2x$.

a) Tìm tọa độ hai điểm A,B trên (P) $(x_A > x_B)$ sao cho tam giác OAB vuông cân tại O..

Lấy $A\left(a;\frac{a^2}{2}\right), a>0$ thuộc (P)..

Vì tam giác OAB vuông cân tại O nên B đối xứng với A qua Oy. Do đó $B\left(-a;\frac{a^2}{2}\right)$..

Ta có $OA^2+OB^2=AB^2 \Leftrightarrow 2\left(a^2+\frac{a^4}{4}\right)=4a^2 \Leftrightarrow a^4-4a^2=0$.

$\Rightarrow a=2$. Vậy $A(2;2), B(-2;2)$..

b) Viết phương trình của đường thẳng d_2, biết d_2 song song với d_1 và d_2 có duy nhất một điểm chung với (P)..

$d_2 // d_1: y=2x \Rightarrow d_2: y=2x+b, b\neq 0$..

Phương trình hoành độ giao điểm của d_2 và (P):

$\frac{1}{2}x^2=2x+b \Leftrightarrow x^2-4x-2b=0 \quad (1)$.

d_2 có duy nhất một điểm chung với (P) $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta'=0$.

$\Leftrightarrow 4+2b=0 \Leftrightarrow b=-2$ (nhận)

Vậy $d_2: y=2x-2$..

Câu 17. **(Trường chuyên tỉnh Tiền Giang Vòng 2 năm 2019-2020)** Cho parabol (P): $y=2x^2$, các đường thẳng (d_1): $y=-\frac{1}{4}x$. Viết phương trình đường thẳng (d_2), biết d_2 vuông góc với d_1 và d_2 cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $\sqrt{5}AB=\sqrt{17}OI$, với I là trung điểm của đoạn AB.

Lời giải

Vì d_2 vuông góc với d_1 nên d_2: y = 4x+ b

Phương trình hoành độ giao điểm giữa d_2 và (P) :

$2x^2=4x+b \Leftrightarrow 2x^2-4x-b=0 (1)$

d_2 cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'=4+2b>0 \Leftrightarrow b>-2$

Gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ với x_1, x_2 là nghiệm của (!)

Ta có: $x_1+x_2=2 \Rightarrow x_I=1; y_I=\frac{y_1+y_2}{2}=2(x_1+x_2)+b=4+b$

Vậy $I(1;4+b)$

Suy ra: $OI^2 = b^2 + 8b + 17, AB = \sqrt{17(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{17(4+2b)}$

$\sqrt{5}AB = \sqrt{17}OI \Leftrightarrow 5(4+2b) = b^2 + 8b + 17$

$\Leftrightarrow b^2 - 2b - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-1 \\ b=3 \end{array}\right.$ (thỏa điều kiện)

Vậy d_2: y = 4x – 1 hoặc d_2: y = 4x + 3

Câu 18. (Trường chuyên tỉnh An Giang Vòng 2 năm 2019-2020) Cho hàm số $y = ax^2\,(a \neq 0)$ có đồ thị (P).

a) Xác định hệ số a biết đồ thị (P) đi qua điểm $A\left(\sqrt{5};\sqrt{50}\right)$. Vẽ đồ thị hàm số ứng với a vừa tìm được.

b) Với giá trị a vừa tìm ở trên, cho biết điểm $M(m;n)$ thuộc đồ thị (P). Hỏi điểm $N(n;m)$ có thuộc đồ thị (P) được hay không? Tìm điểm đó nếu có (m,n là hai số khác 0).

Lời giải

a)

Đồ thị hàm số $y = ax^2$ đi qua điểm $A\left(\sqrt{5};\sqrt{50}\right)$

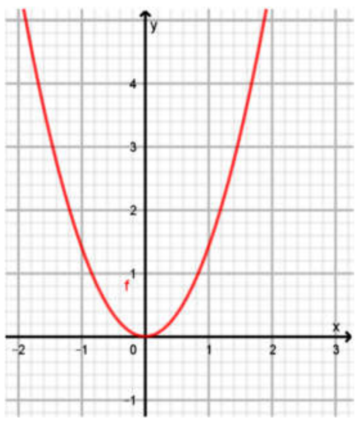
$\sqrt{50} = a.\sqrt{5}^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{2}$

Vậy $a = \sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{2}x^2$.*(đồ thị 0,5đ)*

Bảng giá trị

x	-1	0	1
$y = \sqrt{2}x^2$	$\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$

Đồ thị như hình vẽ



b) Điểm $M(m;n)$ thuộc đồ thị $\Rightarrow n = \sqrt{2}m^2\,(1)$

Giả sử điểm $N(n;m)$ thuộc đồ thị $\Rightarrow m = \sqrt{2}n^2\,(2)$

Lấy (1) trừ (2) ta được $n-m=\sqrt{2}\left(m^2-n^2\right)$

$\left(n-m\right)\left(1+\sqrt{2}\left(n+m\right)\right)=0$

+ TH1: Nếu $n-m=0 \Leftrightarrow n=m$ thay vào (1) ta được

$n=\sqrt{2}n^2 \Rightarrow n=0; n=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

+TH2: Nếu $1+\sqrt{2}\left(n+m\right)=0 \Rightarrow 1+\sqrt{2}n+\sqrt{2}m=0$

$\Rightarrow n=-\frac{\sqrt{2}}{2}-m$

Thay vào (1) ta được

$-\frac{\sqrt{2}}{2}-m=\sqrt{2}m^2 \Rightarrow \sqrt{2}m^2+m+\frac{\sqrt{2}}{2}=0$

Phương trình vô nghiệm

Vậy $m=n=\frac{\sqrt{2}}{2}$ thì điểm $M\left(m,n\right)$ thuộc đồ thị $\left(P\right)$ khi đó điểm $N\left(n;m\right)$ thuộc $\left(P\right)$.

Câu 19. (Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu thi chung năm 2019-2020) Cho hàm số $y=-\frac{1}{2}x^2$ có đồ thị $\left(P\right)$ và đường thẳng $\left(d\right): y=\left(m-1\right)x-m-3$ (với m là tham số).

a)Vẽ $\left(P\right)$.

b)Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\left(P\right)$ và $\left(d\right)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A,B có hoành độ tương ứng x_A,x_B sao cho biểu thức $Q=x_A^2+x_B^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

a).Lấy đúng tọa độ 3 điểm thuộc $\left(P\right)$ (*Hoặc lập đúng bảng giá trị*)

Vẽ đúng đồ thị đi qua các điểm đã chọn.

b).Xét pt hoành độ giao điểm của $\left(P\right)$ và $\left(d\right)$:

$-\frac{1}{2}x^2=\left(m-1\right)x-m-3 \Leftrightarrow x^2+2\left(m-1\right)x-2m-6=0$.

$\Delta'=\left(m-1\right)^2-1\left(-2m-6\right)=m^2+7>0, \forall m$

Vậy $\left(P\right)$ và $\left(d\right)$ luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A,B với mọi m ..

Theo định lý vi-ét ta có:

$\begin{cases} x_A+x_B=-2m+2 \\ x_Ax_B=-2m-6 \end{cases} \Rightarrow Q=x_A^2+x_B^2=\left(x_A+x_B\right)^2-2x_Ax_B \quad =4m^2-4m+16$.

$=\left(2m-1\right)^2+15 \geq 15$

Vậy $MinQ = 15$ đạt được khi $m = \frac{-1}{2}$.

Câu 20. (Trường chuyên tỉnh Quảng Bình chuyên toán năm 2019-2020) Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng d đi qua điểm $M(0;1)$ có hệ số góc k.

a) Chứng minh rằng đường thẳng d luôn cắt (P) tại hai điểm A, B phân biệt với mọi giá trị k.

b) Chứng minh ΔOAB là tam giác vuông với mọi giá trị k (O là gốc tọa độ).

Lời giải

a)

Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(0;1)$ có hệ số góc k: $y = kx + 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P): $x^2 - kx - 1 = 0$ (1).

Phương trình (1) có $\Delta = k^2 + 4 > 0, \forall k$.

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt hay đường thẳng d luôn cắt (P) tại hai điểm A, B phân biệt với mọi giá trị k.

b)

Gọi $A(x_1; x_1^2)$ và $B(x_2; x_2^2)$. Khi đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1), suy ra $x_1.x_2 = -1$.

Phương trình đường thẳng OA: $y = x_1.x$

Phương trình đường thẳng OB: $y = x_2.x$

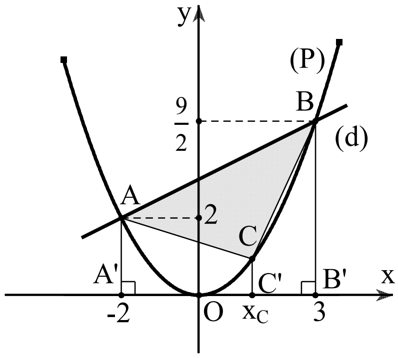
Do $x_1.x_2 = -1$ nên $OA \perp OB$. Vậy ΔOAB là tam giác vuông.

Câu 21. *(Trường chuyên tỉnh Thừa Thiên Huế vòng 2 năm 2019-2020)* Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = \frac{1}{2}x + 3$. Gọi $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ (với $x_A < x_B$) là các giao điểm của (P) và (d), $C(x_C; y_C)$ là điểm thuộc (P) sao cho $x_A < x_C < x_B$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác ABC.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + 3 \Leftrightarrow x = -2, x = 3.$$



Các giao điểm là $A(-2;2)$ và $B\left(3;\frac{9}{2}\right)$..

Gọi $C\left(x_C;\frac{x_C^2}{2}\right)$ với $-2<x_C<3$. Gọi A', B', C' theo thứ tự là hình chiếu của A, B, C trên trục hoành.

Ta có

$$S_{ABC}=S_{ABB'A'}-S_{ACC'A'}-S_{BCC'B'}=\frac{1}{2}\left(2+\frac{9}{2}\right)\cdot 5-\frac{1}{2}\left(2+\frac{x_C^2}{2}\right)\cdot(x_C+2)-\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}+\frac{x_C^2}{2}\right)(3-x_C)$$

$$=-\frac{5}{4}x_C^2+\frac{5}{4}x_C+\frac{15}{2}.$$

Ta có $S_{ABC}=\frac{125}{16}-\frac{5}{4}\left(x_C-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{125}{16}$.

Vậy diện tích tam giác ABC lớn nhất bằng $\frac{125}{16}$ khi $x_C=\frac{1}{2}$.

Câu 22. (Trường chuyên tỉnh Bến Tre vòng 2 năm 2019-2020) Tìm các giá trị của tham số m sao cho $y=\left(\sqrt{m^2-5}-2\right)x+3$ là một hàm số nghịch biến.

Lời giải

Câu 23. (Trường chuyên tỉnh Cần thơ chuyên toán năm 2019-2020) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $(d_1): y=m^2x-m^4+2$ và $(d_2): y=\frac{m^2}{m^2+1}x+2$ (m là tham số thực khác 0). Tìm tất cả giá trị của tham số m để (d_1) và (d_2) cắt nhau tại một điểm A duy nhất sao cho diện tích hình thang $ABHK$ bằng $\frac{15}{2}$. Biết $B(-1;2)$ và hai điểm H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B và A lên trục hoành.

Lời giải

Ta có phương trình hoành độ giao điểm

$\frac{m^2}{m^2+1}x+2=m^2x-m^4+2\Leftrightarrow x=m^2+1$

Ta có điểm $A\left(m^2+1;m^2+2\right)$

$BH=2, AK=m^2+2, HK=m^2+2$

Ta có $S_{\Delta AHK}=\frac{15}{2}\Leftrightarrow m^4+6m^2-7=0\Leftrightarrow m=\pm 1$

Câu 24. (Trường chuyên tỉnh DAK LAK vòng 2 năm 2019-2020) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y=(m-2)x+2$ với m là tham số và $m\ne 2$. Tìm tất cả các giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d) bằng $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Câu 25. (Trường chuyên tỉnh Gia Lai không chuyên năm 2019-2020) Cho đường thẳng $(d): y=2x-1$. Xác định giá trị của a và b để đường thẳng $(\Delta): y=ax+b$ đi qua điểm $A(1;-2)$ và song song với đường thẳng (d).

Giải phương trình $\sqrt{x^2+3}=5-3x$.

(2,0 điểm)

Cho phương trình $x^2+2(m-2)x+m^2-3m-1=0$, với m là tham số.

a) Giải phương trình đã cho khi $m=1$.

b) Xác định giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1^2-x_1x_2+x_2^2=9$.

(1,0 điểm)

Quãng đường AB dài 180 km. Cùng một lúc, hai ô tô khởi hành từ A đến B. Mỗi giờ ô tô thứ nhất chạy nhiều hơn ô tô thứ hai 10 km nên ô tô thứ nhất đến B trước ô tô thứ hai 36 phút. Tính vận tốc trung bình của mỗi ô tô.

(3,0 điểm)

Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài (O). Đường thẳng AO cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và C ($AB < AC$). Qua A vẽ một đường thẳng không đi qua điểm O, cắt đường tròn (O) tại hai điểm D và E ($AD < AE$). Đường thẳng vuông góc với AO tại A cắt đường thẳng CE tại F.

a) Chứng minh tứ giác $ABEF$ nội tiếp đường tròn.

b) Gọi M là giao điểm của đường thẳng FB và đường tròn (O) (M không trùng B). Chứng minh AC là đường trung trực của đoạn thẳng DM.

c) Chứng minh $CE.CF+AD.AE=AC^2$.

---------Hết---------

Họ và tên thí sinh:......................................; SBD.............; Phòng thi số........

Chữ ký của giám thị 1.........................; Chữ ký của giám thị 2........................

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN
GIA LAI	NĂM HỌC 2019 - 2020
	Môn thi: Toán (không chuyên)
ĐỀ CHÍNH THỨC	**Thời gian làm bài:** 120 phút

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM

(Hướng dẫn chấm có 02 trang)

I.Hướng dẫn chung.

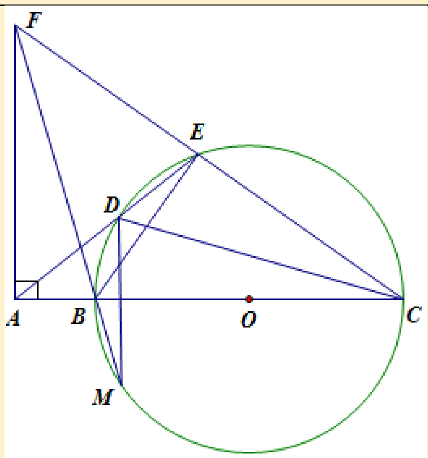
Nếu học sinh giải cách khác hướng dẫn chấm nhưng giải đúng thì vẫn được điểm tối đa.

Điểm toàn bài của thí sinh không làm tròn.

II.Đáp án – Thang điểm.

Câu	Đáp án	Điểm
1 *(2 điểm)*	a. $\begin{cases}2x+y=4\\3x-2y=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x+2y=8\\3x-2y=-1\end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases}7x=7\\3x-2y=-1\end{cases}$	0,25

	$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 3x-2y=-1 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;\ y)=(1;2)$.	0,25
	b. $P=\dfrac{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)}{\sqrt{a}+2}:\dfrac{(\sqrt{a}-2)^2}{2(\sqrt{a}-2)}$	0,25
	$=(\sqrt{a}-2):\dfrac{\sqrt{a}-2}{2}$	0,25
	$=(\sqrt{a}-2).\dfrac{2}{\sqrt{a}-2}$	0,25
	$=2$.	0,25
2 *(2 điểm)*	a. Ta có $\Delta//d$ nên $a=2$ (1)	0,5
	Δ qua $A(1;-2)$ nên $-2=a+b$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) ta được $a=2;b=-4$.	0,25
	b. $\sqrt{x^2+3}=5-3x \Rightarrow x^2+3=(5-3x)^2$	0,25
	$\Rightarrow 8x^2-30x+22=0$	0,25
	$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=11/4 \end{array}\right.$	0,25
	Thử lại chỉ có $x=1$ thỏa mãn phương trình đã cho. Vậy phương trình có một nghiệm là $x=1$.	0,25
3 *(2 điểm)*	a. Khi $m=1$ phương trình đã cho trở thành $x^2-2x-3=0$.	0,25
	Ta có $\Delta=16$	0,25
	Nên phương trình có hai nghiệm là $x=-1;x=3$.	0,5
	b. Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 khi $\Delta'=5-m>0 \Leftrightarrow m<5$.	0,25
	Áp dụng định lý Vi-ét, ta được $x_1+x_2=-2(m-2);\ x_1x_2=m^2-3m-1$.	0,25
	Ta có $x_1^2-x_1x_2+x_2^2=9 \Leftrightarrow m^2-7m+10=0$.	0,25
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=5 \end{array}\right.$. Kết hợp với điều kiện $m<5$, ta được giá trị cần tìm là $m=2$.	0,25
4 *(1*	Gọi $x\ \ (km/h)$ là vận tốc trung bình của ô tô thứ nhất. Điều kiện $x>10$. Vận tốc trung bình của ô tô thứ hai là $x-10\ \ (km/h)$.	0,25

điểm)	Thời gian ô tô thứ nhất đi từ A đến B là $\frac{180}{x}$ (h). Thời gian ô tô thứ hai đi từ A đến B là $\frac{180}{x-10}$ (h).	0,25
	Theo đề ra ta có phương trình $\frac{180}{x-10}-\frac{180}{x}=\frac{36}{60}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=60\\x=-50\end{array}\right.$.	0,25
	Vậy vận tốc trung bình của ô tô thứ nhất là $60\ (km/h)$, vận tốc trung bình của ô tô thứ hai là $50\ (km/h)$.	0,25
	 **a.** Ta có $\widehat{BAF}=\widehat{BEF}=90^0$	0,5
	Vậy tứ giác $ABEF$ nội tiếp đường tròn.	0,5
5 *(3 điểm)*	**b.** Ta có $\widehat{AFB}=\widehat{AEB}$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung)..	0,25
	$\widehat{AEB}=\widehat{FMD}$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung).	0,25
	Nên $\widehat{AFB}=\widehat{FMD}$. Suy ra $AF//MD$.	0,25
	Mà $AF\perp AC$ nên $MD\perp AC$. Vậy AC là đường trung trực của đoạn thẳng DM.	0,25
	c. ΔCAF đồng dạng ΔCEB nên $\frac{AC}{EC}=\frac{CF}{CB}$ hay $CE.CF=CA.CB$	0,25
	ΔABE đồng dạng ΔADC nên $\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AC}$ hay $AD.AE=AB.AC$	0,25
	Do đó $CE.CF+AD.AE=CA.CB+AB.AC$	0,25
	$=AC(CB+AB)=AC^2$	0,25

……….Hết……….

Câu 26. (Trường chuyên tỉnh Hà Giang vòng 1 năm 2019-2020) Xác định hàm số $y=ax+b$ biết đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1;\ 1)$ và có hệ số góc là -6.

Lời giải

Theo giả thiết có $a=$ -6.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1;\ 1)$ nên có $1 = -6.1 + b$, suy ra $b = 7$.

Vậy hàm số đó là $y=-6x+7$.

Câu 27. (Trường chuyên tỉnh Hòa Bình Chuyên Tin năm 2019-2020) Tìm m để đường thẳng $(d): y = 3x + 2m$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2.

Lời giải

Thay $x = -2, y = 0$ tìm được $m = 3$

Câu 28. (Trường chuyên tỉnh Hòa Bình dành cho tất cả các thí sinh năm 2019-2020) Cho đường thẳng $(d): y = 2x - 2$

a) Vẽ đường thẳng (d) trong hệ trục tọa độ Oxy.

b) Tìm m để đường thẳng $(d'): y = (m-1)x + 2m$ song song với đường thẳng (d).

Lời giải

Với $m = 2 \Rightarrow 2x^2 - 6x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{3-\sqrt{11}}{2}; x_2 = \dfrac{3+\sqrt{11}}{2}$.

Câu 29. *(Trường chuyên tỉnh Kon Tum cho tất cả các thí sinh năm 2019-2020)* Xác định hệ số a và b của hàm số $y = ax + b$ biết đồ thị của nó là đường thẳng *(d)* song song với đường thẳng $y = -3x + 2019$ và đi qua điểm $M(2;1)$.

Lời giải

Vì đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = -3x + 2019$ nên $a = -3, b \neq 2019$.

$M \in d: y = -3x + b \Rightarrow 1 = -3.2 + b$.

$\Rightarrow b = 7$ (thỏa mãn).

Câu 30. (Trường chuyên tỉnh Nam Định cho lớp chuyên KHTN năm 2019-2020) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = (m^2 - 1)x + 7$ và đường thẳng $y = 3x + m + 5$ (với $m \neq \pm 1$) là hai đường thẳng song song.

Lời giải

Với $m \neq \pm 1$, ta có đường thẳng $y = (m^2 - 1)x + 7$ và đường thẳng $y = 3x + m + 5$ là hai đường thẳng song song khi và chỉ khi $\begin{cases} m^2 - 1 = 3 \\ 7 \neq m + 5. \end{cases}$.

Tìm được $m = -2$ (thỏa mãn)..

Câu 31. (Trường chuyên tỉnh Nam Định lớp chuyên KHXH năm 2019-2020) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = (m^2 - 1)x + 7$ và đường thẳng $y = 8x + m + 4$ (với $m \neq \pm 1$) là hai đường thẳng song song.

Lời giải

Với $m \neq \pm 1$, ta có đường thẳng $y = (m^2 - 1)x + 7$ và đường thẳng $y = 8x + m + 4$ là hai đường thẳng song song khi và chỉ khi $\begin{cases} m^2 - 1 = 8 \\ 7 \neq m + 4 \end{cases}$.

Tìm được $m = -3$ (thỏa mãn)..

Câu 32. (Trường chuyên tỉnh Quảng Ngãi chuyên toán năm 2019-2020) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $(d): y = (m+2)x - m + 1$ và $(d'): x + (m+2)y = m + 2$ trong đó m là tham số. Chứng minh rằng giao điểm của hai đường thẳng nói trên thuộc một đường cố định khi m thay đổi.

Lời giải

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $(d): y=(m+2)x-m+1$ và $(d'): x+(m+2)y=m+2$ trong đó m là tham số. Chứng minh rằng giao điểm của hai đường thẳng nói trên thuộc một đường cố định khi m thay đổi.

Nhận xét $A(1;3)\in(d)$; $B(0;1)\in(d')$

Với $m=-2$ thì : $(d): y=3$ và $(d'): x=0$ vuông góc với nhau

Với $m\neq -2$ thì : $(d'): y=-\dfrac{1}{m+2}x+1$

Khi đó ta có $a.a'=(m+2)\left(-\dfrac{1}{m+2}\right)=-1\Rightarrow(d)\perp(d')$

Vậy $(d)\perp(d')$ với mọi m

Vậy giao điểm của hai đường thẳng nói trên nhìn đoạn AB cố định dưới một góc vuông nên thuộc đường tròn đường kính AB khi m thay đổi.

Câu 1. (Trường chuyên tỉnh Bình Thuận năm 2019-2020) Tổng của chữ số hàng trăm và chữ số hàng đơn vị của một số có ba chữ số là 14. Nếu viết số đó theo thứ tự ngược lại thì được số mới nhỏ hơn số ban đầu là 396. Tìm số đó biết rằng chữ số hàng chục nhỏ hơn chữ số hàng đơn vị là 1 đơn vị.

Lời giải

Gọi số cần tìm là $\overline{abc}$ $(a,b,c \in \mathbb{N}; 1 \le a \le 9; b,c \le 9)$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a+c=14 \\ \overline{abc}-\overline{cba}=396 \\ c-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=14 \\ (100a+10b+c)-(100c+10b+a)=396 \\ c-b=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+c=14 \\ 99a-99c=396 \\ b-c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=9 \\ b=4 \\ c=5 \end{cases}$$

Vậy số cần tìm là 945.

Câu 2. (Trường chuyên tỉnh Bạc Liêu năm 2019-2020) Một người mang trứng ra chợ bán. Tổng số trứng bán ra được tính như sau: Ngày thứ nhất bán được 8 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại. Ngày thứ hai bán được 16 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại. Ngày thứ ba bán được 24 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại. Cứ như vậy cho đến ngày cuối cùng thì bán hết trứng. Biết số trứng bán được mỗi ngày đều bằng nhau. Hỏi tổng số trứng người đó bán được là bao nhiêu và bán hết trong mấy ngày ?

Lời giải

Gọi x là số trứng bán được $\left(x \in N, x > 8\right)$, thì:

Số trứng bán được trong ngày thứ nhất là : $8+\dfrac{x-8}{8}$

Số trứng bán được trong ngày thứ hai là : $16+\dfrac{x-\left(16+8+\dfrac{x-8}{8}\right)}{8}$

Theo bài ra ta có phương trình :

$$8+\frac{x-8}{8}=16+\frac{x-\left(16+8+\dfrac{x-8}{8}\right)}{8}$$

Giải phương trình ta được: x = 392.

Vậy tổng số trứng bán được là 392 trứng

Số trứng bán được mỗi ngày là $8+\dfrac{392-8}{8}=56$

Số ngày là 392 : 56 = 7 ngày

Câu 3. (Trường chuyên tỉnh Cao Bằng vòng 2 năm 2019-2020) Một nhà toán học trẻ chưa đến 40 tuổi, khi được hỏi: bao nhiêu tuổi, đã trả lời như sau: "Tổng, hiệu, tích, thương của tuổi tôi và tuổi con trai tôi cộng lại bằng 216". Hỏi nhà toán học trẻ bao nhiêu tuổi?

Lời giải

Một nhà toán học trẻ chưa đến 40 tuổi, khi được hỏi: bao nhiêu tuổi, đã trả lời như sau: "Tổng, hiệu, tích, thương của tuổi tôi và tuổi con trai tôi cộng lại bằng 216". Hỏi nhà toán học trẻ bao nhiêu tuổi?

Gọi a là số tuổi của nhà toán học trẻ và b là số tuổi của con trai ông. Điều kiện $a,b\in\mathbb{N}^*,\ a<40$.

Theo bài ra ta có phương trình $(a+b)+(a-b)+ab+\dfrac{a}{b}=216$

$\Leftrightarrow 2ab+ab^2+a=216b$

$\Leftrightarrow a(b+1)^2=216b$ (1)

Vì $(b+1,b)=1$ nên a chia hết cho b

$\Rightarrow a=kb,\ k\in\mathbb{N}^*$ thay vào (1) ta được $\Leftrightarrow kb(b+1)^2=216b\Leftrightarrow k(b+1)^2=216$

$\Rightarrow (b+1)^2$ vừa là số chính phương lớn hơn 1 vừa là ước của $216=6.4.9=6.36$

Ta có bảng sau

$(b+1)^2$	4	9	36
b	1	2	5
k	54	24	6
$a=kb$	54 (loại)	48 (loại)	30 (tm)

Vậy nhà toán học trẻ 30 tuổi.

Câu 4. (Trường chuyên tỉnh Chuyên ĐHSP vòng 1 năm 2019-2020) Trên quãng đường dài 20 km, tại cùng một thời điểm, bạn An đi bộ từ A đến B và bạn Bình đi bộ từ B đến A. Sau 2 giờ kể từ lúc xuất phát, An và Bình gặp nhau tại C và cùng nghỉ lại 15 phút (vận tốc của An trên quãng đường AC không thay đổi, vận tối của Bình trên quãng đường BC không thay đổi). Sau khi nghỉ, An đi tiếp đến B với vận tốc nhỏ hơn vận tốc của An trên quáng đường AC là 1 km/h, Bình đi tiếp đến A với vận tốc lớn hơn vận tốc của Bình trên quãng đường BC là 1 km/h. Biết rằng An đến B sớm hơn so với Bình đến A là 48 phút. Hỏi vận tốc của An trên quãng đường AC là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi a (km/h) là vận tốc của An khi đi trên quãng đường AC, b (km/h) là vận tốc của Bình khi đi trên quãng đường BC. Rõ ràng $a>1, b>0$.

Ta thấy, độ dài quãng đường AC là $2a$ (km) và độ dài quãng đường BC là $2b$ (km).

Do $AC+BC=AB$ nên ta có $2a+2b=20$, tức $a+b=10$ (1)

Thời gian An đi trên quãng đường BC là $\dfrac{2b}{a-1}$ (giờ).

Thời gian Bình đi trên quãng đường AC là $\dfrac{2a}{b-1}$ (giờ).

Do An đến B sớm hơn so với Bình đến A là $\dfrac{4}{5}$ (giờ) (48 phút = $\dfrac{4}{5}$ giờ)

Nên $\dfrac{2a}{b+1}-\dfrac{2b}{a-1}=\dfrac{4}{5}$ hay $\dfrac{a}{b+1}+1-1-\dfrac{b}{a-1}=\dfrac{2}{5}$.

Một cách tương đương, ta có $\dfrac{a+b+1}{b+1}-\dfrac{a+b-1}{a-1}=\dfrac{2}{5}$. (2)

Từ (1), ta có $b=10-a$.

Thay vào phương trình (2), ta được $\dfrac{11}{11-a}-\dfrac{9}{a-1}=\dfrac{2}{5}$, hay $(a+44)(a-6)=0$.

Do $a>1$ nên ta có $a=6$, suy ra $b=4$ (thỏa mãn).

Vậy vận tốc của An trên quãng đường AC là 6 (km/h).

Câu 5. (Trường chuyên tỉnh Cần thơ chuyên toán năm 2019-2020) Anh Bình vừa tốt nghiệp đại học loại xuất sắc nên được nhiều công ty mời về làm việc, trong đó có công ty A và công ty B. Để thu hút người tài, cả hai công ty đưa ra hình thức trả lương trong thời gian thử việc như sau:

Công ty A: Anh Bình được nhận 1400 USD ngay sau kí hợp đồng thử việc và mỗi tháng được trả lương 1700 USD.

Công ty B: Anh Bình được nhận 2400 USD ngay sau kí hợp đồng thử việc và mỗi tháng được trả lương 1500 USD.
Em hãy tư vấn giúp Anh Bình lựa chọn công ty thử việc sao cho tổng số tiền nhận được là nhiều nhất. Biết thời gian thử việc của cả hai công ty đều từ 3 tháng đến 8 tháng.

Lời giải

Gọi x là số tháng thử việc của anh Bình $(x\in\mathbb{N}, 3\le x\le 8)$

Công ty A trả là $f(x)=1400+1700x$

Công ty B trả là $g(x)=2400+1500x$

Ta có $1400+1700x=2400+1500x \Leftrightarrow x=5$
Vẽ biểu đồ ta thấy
Thử việc 5 tháng thì công ty A và công ty B đều được.
Thử việc từ 3 đến 5 tháng chọn công ty A
Thử việc từ 5 đến 8 tháng chọn công ty B

Câu 6. (Trường chuyên tỉnh DAK NONG vòng 2 năm 2019-2020) Quãng đường từ Gia Nghĩa đến thành phố Buôn Ma Thuột dài 120 km. Một người dự định đi xe máy từ Gia Nghĩa đến thành phố Buôn Ma Thuột với vận tốc không đổi. Sau khi đi được 45 phút, người ấy dừng lại nghỉ 15 phút. Để đến thành phố Buôn Ma Thuột đúng thời gian đã dự định, người đó phải tăng vận tốc thêm 5 km/h trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc của người đi xe máy theo dự định ban đầu.

Lời giải

Gọi x (km/h) là vận tốc dự định; $x>0$.

Thời gian đi dự định : $\dfrac{120}{x}(h)$

Quãng đường đi được sau 45 phút : $\dfrac{3}{4}x$ (km).

Quãng đường còn lại: $120-\dfrac{3}{4}x$ (km).

Thời gian đi quãng đường còn lại : $\dfrac{120-\dfrac{3}{4}x}{x+5}(h)$

Theo đề bài ta có PT: $\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{120-\dfrac{3}{4}x}{x+5}=\dfrac{120}{x}$

$\Leftrightarrow x^2+20x-2400=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=40(n) \\ x=-60(l) \end{array}\right.$

Vậy vận tốc dự định : 40 km/h.

Câu 7. (Trường chuyên tỉnh Gia lai chuyên tin năm 2019-2020) Năm nay tổng số tuổi của Nam và mẹ là 36 tuổi, hai năm sau tuổi của mẹ gấp 3 lần tuổi của Nam. Hỏi năm nay Nam bao nhiêu tuổi ?

Câu 8. (Trường chuyên tỉnh Hà Giang vòng 1 năm 2019-2020) Hai vòi nước cùng chảy vào bể không có nước và chảy đầy bể mất 1 giờ 48 phút. Nếu chảy riêng, vòi thứ nhất chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 1 giờ 30 phút. Hỏi nếu chảy riêng, mỗi vòi sẽ chảy đầy bể trong bao lâu?

Lời giải

Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy riêng làm đầy bể là $x\,(x>\dfrac{9}{5}$, giờ)

thì thời gian vòi thứ hai chảy riêng làm đầy bể là $x+\dfrac{3}{2}$ (giờ).

Do đó trong 1 giờ vòi thứ nhất chảy được $\dfrac{1}{x}$ bể, vòi thứ hai chảy được $\dfrac{1}{x+\dfrac{3}{2}}=\dfrac{2}{2x+3}$ bể.

Cả hai vòi cùng chảy làm đầy bể trong 1 giờ 48 phút hay $\dfrac{9}{5}$ giờ thì trong 1 giờ chảy được $\dfrac{5}{9}$ bể. Theo bài ra ta có phương trình: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{2x+3}=\dfrac{5}{9}$

$\Leftrightarrow 10x^2-21x-27=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-\dfrac{18}{20} \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện ta thấy $x=3$ thỏa mãn.

Vậy thời gian vòi thứ nhất chảy riêng làm đầy bể là 3 (giờ)

thời gian vòi thứ hai chảy riêng làm đầy bể là $\dfrac{9}{2}$ (giờ) hay 4,5 (giờ).

Câu 9. (Trường chuyên tỉnh Hòa Bình Chuyên Tin năm 2019-2020) Cho một hình chữ nhật, nếu tăng mỗi cạnh của nó lên 2cm thì diện tích của nó tăng lên 44cm², nếu giảm chiều dài đi 2cm và giảm chiều rộng đi 1cm thì diện tích của nó giảm đi 26cm². Tính diện tích của hình chữ nhật đã cho.

Lời giải

Gọi chiều dài của hình chữ nhật là x (cm, $x > 2$)

Gọi chiều rộng của hình chữ nhật là y (cm, $y > 1$)

Lập được hệ $\begin{cases}(x+2)(y+2) = xy+44\\(x-2)(y-1) = xy-26\end{cases}$

Giải được nghiệm $\begin{cases}x = 12\\y = 8\end{cases}$

Kết luận: ...

Câu 10. (Trường chuyên tỉnh Hòa Bình Chuyên Toán năm 2019-2020) Một đoàn xe vận tải nhận chuyên chở 84 tấn hàng. Hôm làm việc do có 7 xe được bổ sung thêm vào đoàn xe nên mỗi xe được chở bớt đi 1 tấn hàng so với dự định ban đầu. Biết khối lượng hàng mỗi xe chuyên chở như nhau, hỏi đoàn xe ban đầu có bao nhiêu chiếc?

Lời giải

Gọi x là số lượng xe ban đầu của đoàn ($x \in N^*$) : x (chiếc)

Ban đầu mỗi xe phải chở số tấn hàng là $\frac{84}{x}$ (tấn)

Sau khi bổ xung thêm 7 xe, mỗi xe phải chở số tấn hàng là $\frac{84}{x+7}$ (tấn)

Theo bài ra ta có phương trình $\frac{84}{x} - \frac{84}{x+7} = 1$

Học sinh giải phương trình và kết luận được số lượng xe của đoàn lúc ban đầu là 21 (chiếc)

Câu 11. (Trường chuyên tỉnh Hòa Bình dành cho tất cả các thí sinh năm 2019-2020) Bác Bình dự định trồng 300 cây cam theo nguyên tắc trồng thành các hàng, mỗi hàng có số cây bằng nhau. Nhưng khi thực hiện bác Bình đã trồng thêm 2 hàng, mỗi hàng thêm 3 cây so với dự kiến ban đầu nên đã trồng được tất cả 391 cây. Tính số cây trên một hàng mà bác Bình dự kiến trồng ban đầu.

Lời giải

Gọi số hàng cây là y và số cây trong một hàng là x .

Từ giả thiết ta có hệ phương trình $\begin{cases}xy = 300\\(x+3)(y+2) = 391\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy = 300\\3y+2x = 85\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 20\\y = 15\end{cases}$.

KL....

Câu 12. (Trường chuyên tỉnh Hưng Yên Vòng 2 năm 2019-2020) Trên quãng đường dài 20 km, tại cùng một thời điểm, bạn An đi bộ từ A đến B và bạn Bình đi bộ từ B đến A. Sau 2 giờ kể từ lúc xuất phát, An và Bình gặp nhau tại C và cùng nghỉ lại 15 phút (vận tốc của An trên quãng đường AC không thay đổi, vận tối của Bình trên quãng đường BC không thay đổi). Sau khi nghỉ, An đi tiếp đến B với vận tốc nhỏ hơn vận tốc của An trên quáng đường AC là 1 km/h, Bình đi tiếp đến A với vận tốc lớn hơn vận tốc của Bình trên quãng đường BC là 1 km/h. Biết rằng An đến B sớm hơn so với Bình đến A là 48 phút. Hỏi vận tốc của An trên quãng đường AC là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi a (km/h) là vận tốc của An khi đi trên quãng đường AC, b (km/h) là vận tốc của Bình khi đi trên quãng đường BC. Rõ ràng $a>1, b>0$.

Ta thấy, độ dài quãng đường AC là $2a$ (km) và độ dài quãng đường BC là $2b$ (km).

Do $AC+BC=AB$ nên ta có $2a+2b=20$, tức $a+b=10$ (1)

Thời gian An đi trên quãng đường BC là $\frac{2b}{a-1}$ (giờ).

Thời gian Bình đi trên quãng đường AC là $\frac{2a}{b-1}$ (giờ).

Do An đến B sớm hơn so với Bình đến A là $\frac{4}{5}$ (giờ) (48 phút $=\frac{4}{5}$ giờ)

Nên $\frac{2a}{b+1}-\frac{2b}{a-1}=\frac{4}{5}$ hay $\frac{a}{b+1}+1-1-\frac{b}{a-1}=\frac{2}{5}$.

Một cách tương đương, ta có $\frac{a+b+1}{b+1}-\frac{a+b-1}{a-1}=\frac{2}{5}$. (2)

Từ (1), ta có $b=10-a$.

Thay vào phương trình (2), ta được $\frac{11}{11-a}-\frac{9}{a-1}=\frac{2}{5}$, hay $(a+44)(a-6)=0$.

Do $a>1$ nên ta có $a=6$, suy ra $b=4$ (thỏa mãn).

Vậy vận tốc của An trên quãng đường AC là 6 (km/h).

Câu 13. (Trường chuyên tỉnh Kon Tum cho tất cả các thí sinh năm 2019-2020) Ông Khôi sở hữu một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi là $100m$. Ông ta định bán mảnh đất đó với giá thị trường là 15 triệu đồng cho một mét vuông. Hãy xác định giá tiền của mảnh đất đó biết rằng chiều dài gấp bốn lần chiều rộng.

Lời giải

Gọi chiều rộng của mảnh đất là x *(m, $0<x<50$)*

Chiều dài của mảnh đất là *$4x$ (m)*.

Chi vi mảnh đất là $100m$: $(x+4x).2=100 \Leftrightarrow 5x=50 \Leftrightarrow x=10$

Vậy chiều rộng của mảnh đất là $10m$, chiều dài mảnh đất là $40m$.

Diện tích mảnh đất là : 40.10 = $400m^2$.

Giá tiền của mảnh đất : 400x150000000 = 6000000000 đồng = 6 tỷ (đồng).

Câu 14. (Trường chuyên tỉnh PTNK (VÒNG 1) năm 2019-2020) Từ ngày $1/1/2019$ đến ngày $20/5/2019$, giá bán lẻ xăng RON 95 có đúng bốn lần tăng và một lần giảm. Các thời điểm thay đổi giá xăng RON 95 trong năm 2019 (tính đến ngày $20/5/2019$) được cho bởi bảng sau (giá xăng được tính theo đơn vị đồng, giá được niêm yết cho 1 lít xăng):

Ngày	1/1	2/3	2/4	17/4	2/5	17/5
Giá	17600	18540	20030	21230	...	21590

Từ 16 giờ chiều $2/5/2019$, giá bán lẻ 1 lít xăng RON 95 tăng thêm khoảng 25% so với giá 1 lít xăng RON 95 ngày $1/1/2019$. Nếu ông A mua 100 lít xăng RON 95 ngày $2/1/2019$ thì cũng với số tiền đó ông A sẽ mua được bao nhiêu lít xăng RON 95 vào ngày $3/5/2019$? Cũng trong hai ngày đó ($2/1$ và $3/5$), ông B đã mua tổng cộng 200 lít xăng RON 95 với tổng số tiền là 3850000 đồng, hỏi ông B đã mua bao nhiêu lít xăng RON 95 vào ngày $3/5/2019$?

Lời giải

Ở trường hợp của ông A: Theo giả thiết, ta thấy giá bán lẻ một lít xăng RON 95 từ 16 giờ chiều ngày $2/5/2019$ là $17600(1+0,25)=22000$ (đồng). Khi ông A mua 100 lít xăng RON 95 vào ngày $2/1/2019$ thì do trong khoảng thời gian gian chưa có điều chỉnh giá nên giá một lít xăng RON 95 chính là giá niêm yết ngày $1/1/2019$, suy ra số tiền ông A đã bỏ ra là $17600.100=1760000$ (đồng).
Tương tự như trên, giá xăng RON 95 vào ngày $3/5/2019$ chính là giá niêm yết lúc 16 giờ chiều ngày $2/5/2019$. Do đó, với cùng số tiền đã bỏ ra để mua 100 lít xăng RON 95 vào ngày $2/1/2019$ thì vào ngày $3/5/2019$, ông A chỉ có thể mua được $176000 \div 22000 = 80$ lít xăng RON 95.
Ở trường hợp ông B: Gọi x là số lít xăng RON 95 mà ông B đã mua trong ngày $2/1/2019$, y là số lít xăng RON 95 mà ông B đã mua trong ngày $3/5/2019$. Rõ ràng $x,y\ge 0$. Theo đề bài, ta có: $\begin{cases}x+y=200\\17600x+22000y=3850000\end{cases}$. Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases}x+y=200\\4x+5y=875\end{cases}$.
Do $4x+5y=4(x+y)+y=800+y$ nên ta có $y=75$, từ đó suy ra $x=125$ (thỏa mãn). Vậy số lít xăng RON 95 mà ông B đã mua vào ngày $3/5/2019$ là 75 lít.

Câu 15. (Trường chuyên tỉnh Thái Bình vòng 1 năm 2019-2020) Hai lớp 9A và 9B của một trường quyên góp sách ủng hộ. Trung bình mỗi bạn lớp 9A ủng hộ 5 quyển, mỗi bạn lớp 9B ủng hộ 6 quyển nên cả hai lớp ủng hộ 493 quyển. Tính số học sinh mỗi lớp biết tổng số học sinh của hai lớp là 90.

Lời giải

Gọi số học sinh của lớp 9A và 9B lần lượt là x, y.

ĐK: $x, y \in N^*$; $x, y < 90$.

Vì tổng số học sinh của hai lớp là 90 nên ta có phương trình: $x + y = 90$ (1)

Số sách lớp 9A ủng hộ là 5x (quyển)

Số sách lớp 9B ủng hộ là 6y (quyển)

Vì cả hai lớp ủng hộ 493 quyển nên ta có phương trình: $5x + 6y = 493$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}x+y=90\\5x+6y=493\end{cases}$

Giải hệ phương trình được $\begin{cases}x=47\\y=43\end{cases}$ (TMĐK)

Vậy lớp 9A có 47 học sinh, lớp 9B có 43 học sinh.

Câu 16. (Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu thi chung năm 2019-2020)Một thửa ruộng hình chữ nhật có độ dài đường chéo là $40m$, chiều dài hơn chiều rộng $8m$. Tính diện tích thửa ruộng đó.

Lời giải

Gọi x (m) là chiều rộng của thửa ruộng$(x>0)$.

Chiều dài của thửa ruộng là $x+8$.

Theo đề bài ta có phương trình:

$$x^2+(x+8)^2=1600$$

$$\Leftrightarrow x^2+8x-768=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=24(n) \\ x=-32(l) \end{array}\right..$$

Vậy chiều rộng là $24m$; chiều dài $32m$.

Diện tích của thửa ruộng là: $24.32=768(m^2)$.

Chuyên đề 7 Hình học

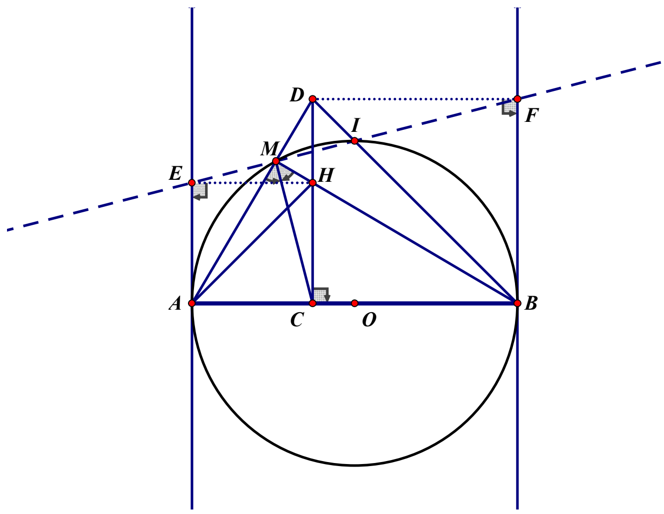
Câu 1. (Trường chuyên tỉnh Bình Dương chuyên toán năm 2019-2020) Cho điểm M thuộc nữa đường tròn (O) đường kính AB $(M \neq A, M \neq B, MA < MB)$. Tia phân giác của góc AMB cắt AB tại C. Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với AB cắt các đường thẳng AM, BM theo thứ tự tại D, H.

a)Chứng minh rằng: $CA = CH$.

b)Gọi E là hình chiếu vuông góc của H trên tiếp tuyến tại A của (O), F là hình chiếu vuông góc của D trên tiếp tại B của. Chứng minh rằng: E, M, F thẳng hàng.

c)Gọi S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích của các tứ giác $ACHE$ và $BCDF$. Chứng minh rằng: $CM^2 < \sqrt{S_1 \cdot S_2}$.

Lời giải



a)Tứ giác $AMHC$ nội tiếp đường tròn (Vì $\widehat{AMH} = \widehat{AMH} = 90^\circ$)

$\Rightarrow HAC = CMH = 45^\circ$ (Hai góc cùng chắn cung $\overset{\frown}{HC}$)

$\Rightarrow \Delta ACH$ vuông cân.

$\Rightarrow AC = CH$

b)Tứ giác $MHCA$ thuộc đường tròn đường kính AH, mà $EACH$ là hình vuông.

$\Rightarrow EACH$ thuộc đường tròn đường kính AH

$\Rightarrow EACHM$ nội tiếp đường tròn

Vì $EACH$ là hình vuông nên $CE = AH$

$\Rightarrow EC$ cũng là đường kính.

$\Rightarrow EM \perp MC$ (1)

Ta lại có: $\widehat{HMI} = \widehat{HDI} = \widehat{HAC} = \widehat{CMH}$ (do các tứ giác $MHID, MACH$ nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{CMH} = \widehat{HMI} = 45^\circ$

$\Rightarrow MC\perp MI \quad (2)$

Từ $(1),(2)\Rightarrow M,I,E$ thẳng hàng.

Chứng minh tương tự, ta được M,I,F thẳng hàng.

Vậy M,I,E,F thẳng hàng.

c)Các tứ giác $EACH$, $FDCB$ là hình vuông.

$\Rightarrow S_1\cdot S_2=AC^2\cdot CB^2\Rightarrow\sqrt{S_1\cdot S_2}=AC\cdot CB$

$\Rightarrow AC\cdot CB=(AO-OC)(OB+OC)=(R-OC)(R+OC)=R^2-OC^2=OM^2-OC^2 \quad \Rightarrow CM^2<OM^2-OC^2$ (đúng vì ΔMCO tù tại C)

Vậy $CM^2<\sqrt{S_1\cdot S_2}$.

Câu 2. **(Trường chuyên tỉnh Bình Thuận chuyên toán năm 2019-2020)** Cho ΔABC cân tại $A\left(\widehat{A}<90^o\right)$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là điểm trên

cung AB không chứa C (D khác A và B). Hai dây AD và BC kéo dài cắt nhau tại E. Đường thẳng qua E và song song với CD cắt AB kéo dài tại F. Vẽ tiếp tuyến FG với đường tròn (O) (G là tiếp điểm).

a) Chứng minh $FG=FE$.

b) Từ trung điểm I của cạnh BC kẻ $IJ\perp AC\,(J\in AC)$. Gọi H là trung điểm của IJ. Chứng minh $AH\perp BJ$.

Lời giải

a) Do $EF//CD$ nên $\widehat{FEB}=\widehat{ECD}$ (so le trong)

$=\widehat{BAD}$ (tứ giác $ACBD$ nội tiếp)

$\Rightarrow\Delta EBF\sim\Delta AEF\,(g.g)\Rightarrow\dfrac{EF}{AF}=\dfrac{BF}{EF}\Rightarrow EF^2=AF.BF\,(1)$

Tương tự, $\Delta FBG\sim\Delta FGA\,(g.g)\Rightarrow FG^2=AF.BF\,(2)$

Từ $(1),(2)\Rightarrow FG=FE$

b) Gọi K là giao điểm của AH và BJ.

Ta sẽ chứng minh $\Delta AIH\sim\Delta BCJ$

Mà $\widehat{AIH}=\widehat{BCJ}$ (cùng phụ $=\widehat{IAC}$)

Nên cần chứng minh $\dfrac{AI}{IH}=\dfrac{BC}{CJ}$

hay cần chứng minh $AI.CJ=IH.BC\Leftrightarrow AI.CJ=\dfrac{1}{2}IJ.2IC\Leftrightarrow AI.CJ=IJ.IC$

$\Leftrightarrow\dfrac{AI}{IC}=\dfrac{IJ}{CJ}$, điều này đúng vì cùng bằng $\tan\widehat{ACI}$.

Do đó, ta đã có $\Delta AIH \sim \Delta BCJ(c.g.c) \Rightarrow \widehat{IAH} = \widehat{JBC} \Rightarrow ABIK$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\widehat{AKB} = \widehat{AIB} = 90^o$ hay $AH \perp BJ$.

Câu 3. (Trường chuyên tỉnh Bình Thuận vòng 2 năm 2019-2020) Cho ΔABC cân tại $A\left(\widehat{A} < 90^o\right)$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là điểm trên

cung AB không chứa C (D khác A và B). Hai dây AD và BC kéo dài cắt nhau tại E. Đường thẳng qua E và song song với CD cắt AB kéo dài tại F. Vẽ tiếp tuyến FG với đường tròn (O) (G là tiếp điểm).

a) Chứng minh $FG = FE$.

b) Từ trung điểm I của cạnh BC kẻ $IJ \perp AC\,(J \in AC)$. Gọi H là trung điểm của IJ. Chứng minh $AH \perp BJ$.

Lời giải

a) Do $EF//CD$ nên $\widehat{FEB} = \widehat{ECD}$ (so le trong)

$= \widehat{BAD}$ (tứ giác $ACBD$ nội tiếp)

$\Rightarrow \Delta EBF \sim \Delta AEF(g.g) \Rightarrow \dfrac{EF}{AF} = \dfrac{BF}{EF} \Rightarrow EF^2 = AF.BF\,(1)$

Tương tự, $\Delta FBG \sim \Delta FGA(g.g) \Rightarrow FG^2 = AF.BF\,(2)$

Từ $(1),(2) \Rightarrow FG = FE$

b) Gọi K là giao điểm của AH và BJ.

Ta sẽ chứng minh $\Delta AIH \sim \Delta BCJ$

Mà $\widehat{AIH} = \widehat{BCJ}$ (cùng phụ $= \widehat{IAC}$)

Nên cần chứng minh $\dfrac{AI}{IH} = \dfrac{BC}{CJ}$

hay cần chứng minh $AI.CJ = IH.BC \Leftrightarrow AI.CJ = \dfrac{1}{2}IJ.2IC \Leftrightarrow AI.CJ = IJ.IC$

$\Leftrightarrow \dfrac{AI}{IC} = \dfrac{IJ}{CJ}$, điều này đúng vì cùng bằng $\tan\widehat{ACI}$.

Do đó, ta đã có $\Delta AIH \sim \Delta BCJ(c.g.c) \Rightarrow \widehat{IAH} = \widehat{JBC} \Rightarrow ABIK$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\widehat{AKB} = \widehat{AIB} = 90^o$ hay $AH \perp BJ$.

Câu 4. (Trường chuyên tỉnh Bình Thuận năm 2019-2020) Cho tam giác nhọn $ABC(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác $BCEF$ nội tiếp.

b) Gọi I là trung điểm của cạnh BC , K là điểm đối xứng của H qua I. Chứng minh ba điểm A,O,K thẳng hàng.

c) Chứng minh $AK \perp EF$.

d) Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có $\tan B.\tan C = 3$ thì $OH // BC$.

Lời giải

a) Ta có: $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^o$ nên tứ giác $BCEF$ nội tiếp.

b) Vì I là trung điểm của $BKCH$ là hình bình hành nên

$\widehat{BKC} = \widehat{BHC} \Rightarrow \widehat{BKC} + \widehat{BAC} = 180^o \Rightarrow K \in (O)$.

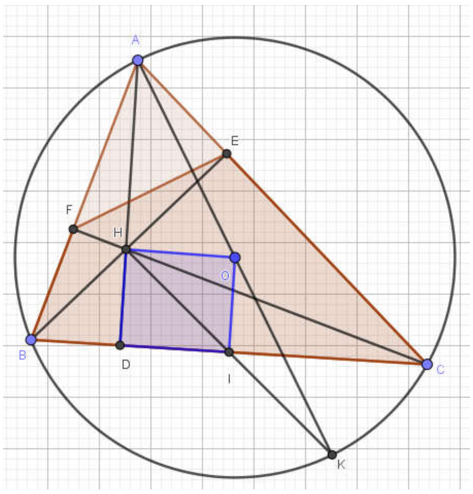
Hơn nữa, $BKCH$ là hình bình hành nên $KC // BH \Rightarrow KC \perp AC \Rightarrow AK$ là đường kính của đường tròn (O) hay A,O,K thẳng hàng.

c) Kẻ tiếp tuyến Ax của đường tròn (O) như hình vẽ.

Ta có: $\widehat{xAB} = \widehat{ACB}(1)$ (góc giữa tiếp tuyến và dây cung)

Mặt khác, tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}(2)$

Từ $(1),(2) \Rightarrow \widehat{xAB} = \widehat{AFE}$, mà chúng ở vị trí so le trong nên $Ax // EF$.



Do Ax là tiếp tuyến nên $Ax \perp AK$.

Từ đó $EF \perp AK$.

d)

Ta có: $\tan B.\tan C = 3 \Rightarrow \frac{AD}{BD}.\frac{AD}{CD} = 3$.

Mà $\Delta BHD \sim \Delta ACD(g-g) \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{HD}{CD}$

$\Rightarrow BD.CD = AD.HD$

nên $\frac{AD.AD}{AD.HD} = 3 \Rightarrow AD = 3HD \Rightarrow AH = 2HD$.

Hơn nữa, $AH = 2OI$ (OI là đường trung bình tam giác AHK).

do đó $HD = OI \Rightarrow HOID$ là hình chữ nhật, suy ra $OH // DI$ hay $OH // BC$.

Câu 5. (Trường chuyên tỉnh Bình Định vòng 2 năm 2019-2020) Cho đường tròn tâm O, bán kính R và đường tròn tâm I bán kính r $(r < R)$ tiếp xúc trongtại A. Đường thẳng nối hai tâm cắt đường tròn tâm I tại B và đường tròn tâm O tại C. Đường trung trực của đoạn thẳng BC cắt đường tròn O tại M, N và cắt BC tại P. Nối AM cắt đường tròn tâm I tại E.

a) Chứng minh tứ giác $MEBP$ nội tiếp và $\widehat{AMO} = \widehat{NMC}$.

b) Chứng minh N, B, E thẳng hàng và $IP = R$, $OP = r$.

c) Chứng tỏ PE là tiếp tuyến của đường tròn tâm I.

Lời giải

a) Vì: $\widehat{MPB} = 90°$ (do $MP \perp AC$).

$\widehat{AEB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Suy ra $\widehat{MPB} + \widehat{AEB} = 180°$ $\Rightarrow$ tứ giác $MEBP$ nội tiếp.

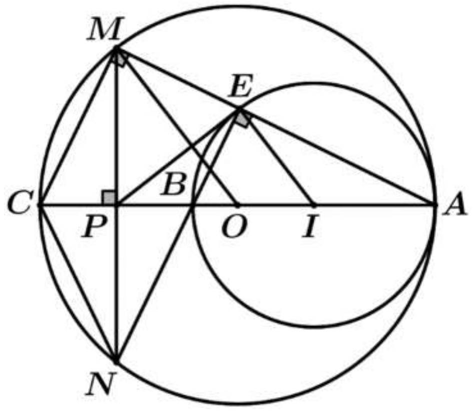
b) ● Có $CM \mathbin{//} BE$ (vì $CM \perp AM$ và $BE \perp AM$) (1).

Chứng minh được tứ giác $BMCN$ là hình thoi $\Rightarrow MC \mathbin{//} BN$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra N, B, E thẳng hàng.

● Có $IO = R - r$ và $BC = 2R - 2r \Rightarrow CP = R - r$, suy ra $OP = r$.

Có $IP = IO + OP = R - r + r = R$.



c) Chứng minh được: $\widehat{PEB} = \widehat{AEI}$, mà $\widehat{IEA} + \widehat{IEB} = 90°$ nên $\widehat{PEB} + \widehat{IEB} = 90°$ hay $PE \perp EI$.

Do đó PE là tiếp tuyến của đường tròn tâm I.

Câu 6. (Trường chuyên tỉnh Bạc Liêu năm 2019-2020) Cho ΔABC không cân, biết ΔABC ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của BC, CA, AB với đường tròn (I). Gọi M là giao điểm của đường thẳng EF và đường thẳng BC, biết AD cắt đường tròn (I) tại điểm N $(N \neq D)$, gọi K là giao điểm của AI và EF.

a) Chứng minh rằng AK.AI = AN.AD và các điểm I, D, N, K cùng thuộc một đường tròn.
b) Chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn (I).

Lời giải

a) Ta có: AE, AF là hai tiếp tuyến của đường tròn (I), suy ra: AE = AF, AI là phân giác của góc EAF.

ΔAEF cân tại A, AI là đường phân giác do đó AI là đường cao của tam giác AEF

ΔEAI vuông tại E, EK là đường cao suy ra $AE^2 = AK.AI$

Xét ΔAEN và ΔADE có $\widehat{EAN}$ chung.

$\widehat{AEN} = \widehat{ADE}$. (Hệ quả góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

Do đó: $\Delta AEN \# \Delta ADE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AD}=\dfrac{AN}{AE} \Rightarrow AE^2 = AN.AD$

Ta có: AK.AI = AN.AD (cùng bằng AE^2)

Xét ΔANK và ΔAID có:

$\widehat{KAN}$ chung.

$\dfrac{AN}{AI}=\dfrac{AK}{AD}$ (Do AK.AI = AN.AD)

Do đó: $\Delta ANK \# \Delta AID$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AKN}=\widehat{ADI}$

Do đó: DNKI nội tiếp

Vậy bốn điểm I,D,N,K cùng thuộc một đường tròn.

b) Do MD là tiếp tuyến của (I) nên MD ⊥ ID.

Tứ giác MKID có $\widehat{MKI}+\widehat{MDI}=90^0+90^0=180^0$

Do đó: MIKD nội tiếp, suy ra M,N,K,I,D cùng thuộc một đường tròn.

Suy ra: $\widehat{MNI}=\widehat{MKI}=90^0$

Ta có: MN ⊥ IN $\left(N \in (I)\right)$

Vậy MN là tiếp tuyến của đường tròn (I)

Câu 7. (Trường chuyên tỉnh Bạc Liêu năm 2019-2020) Cho đường tròn $(O;R)$ và hai điểm B, C cố định sao cho góc $\widehat{BOC}=120^0$. Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho ΔABC nhọn. Gọi E là điểm đối xứng với B qua AC và F là điểm đối xứng với C qua AB. Các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE, ΔACF cắt nhau tại K $(K \neq A)$. Gọi H là giao điểm của BE và CF.

a) Chứng minh KA là phân giác trong góc $\widehat{BKC}$ và tứ giác BHCK nội tiếp.
b) Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác BHCK lớn nhất, tính diện tích lớn nhất của tứ giác BHCK theo R.

Lời giải

a) Ta có: $\widehat{AKB}=\widehat{AEB}$ (cùng chắn $\widehat{AB}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB

Mà $\widehat{ABE}=\widehat{AEB}$ (tính chất đối xứng) suy ra $\widehat{AKB}=\widehat{ABE}$ (1)

Ta có: $\widehat{AKC}=\widehat{AFC}$ (Cùng chắn cung $\widehat{AC}$ của đường tròn ngoại tiếp ΔAFC)

Mà $\widehat{ACF}=\widehat{AFC}$ (tính chất đối xứng) suy ra $\widehat{AKC}=\widehat{ACF}$ (2)

Mặt khác $\widehat{ABE}=\widehat{ACF}$ (Cùng phụ $\widehat{BAC}$) (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{AKB} = \widehat{AKC}$ hay KA là phân giác tron của $\widehat{BKC}$

Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của BE với AC và CF với AB

Ta có: $\widehat{BOC} = 120^0$ nên $BC = R\sqrt{3}$, $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = 60^0$.

Trong tam giác vuông ABP có: $\widehat{APB} = 90^0, \widehat{BAC} = 60^0$, suy ra $\widehat{ABP} = 30^0$. Hay $\widehat{ABE} = \widehat{ACF} = 30^0$.

Tứ giác APHQ có: $\widehat{AQH} + \widehat{APH} = 180^0$

Suy ra $\widehat{PAQ} + \widehat{PHQ} = 180^0 \Rightarrow \widehat{PHQ} = 120^0 \Rightarrow \widehat{BHC} = 120^0$ (đối đỉnh)

Ta có: $\widehat{AKC} = \widehat{ABE} = 30^0$, $\widehat{AKB} = \widehat{ACF} = \widehat{ABE} = 30^0$.

Mà $\widehat{BKC} = \widehat{AKC} + \widehat{AKB} = \widehat{AFC} + \widehat{AEB} = \widehat{ACF} + \widehat{ABE} = 60^0$

Suy ra: $\widehat{BHC} + \widehat{BKC} = 180^0$.

Do đó tứ giác BHKC nội tiếp.

b) Gọi (O') là đường tròn đi qua bốn điểm B,H,C,K. Ta có dây $BC = R\sqrt{3}$ $\widehat{BKC} = 60^0 = \widehat{BAC}$ nên bán kính đường tròn (O') bằng bán kính R của đường tròn (O) .

Gọi M là giao điển AH và BC suy ra MH ⊥ BC; Kẻ KN vuông góc BC $(N \in BC)$, gọi I là giao điểm HK và BC.

Ta có: $S_{BHCK} = S_{BHC} + S_{BCK} = \frac{1}{2}BC.HM + \frac{1}{2}.BC.KN = \frac{1}{2}BC(HM + KN)$

$S_{BHCK} \le \frac{1}{2}BC(HI + KI) = \frac{1}{2}BC.KH$ (Do $HM \le HI, KN \le KI$)

Ta có: KH là dây cung của đường tròn $(O';R)$.

Suy ra $KH \le 2R$ (không đổi), nên S_{BHCK} lớn KH = 2R và HM + KN = HK = 2R .

Gía trị lớn nhất $S_{BHCK} = \frac{1}{2}R\sqrt{3}2R = \sqrt{3}R^2$

Khi HK là đường kính của đường tròn (O') thì M,N,I trùng nhau; suy ra I là trung điểm của BC nên ΔABC cân tại A; Khi đó A là điểm chính giữa của cung lớn BC.

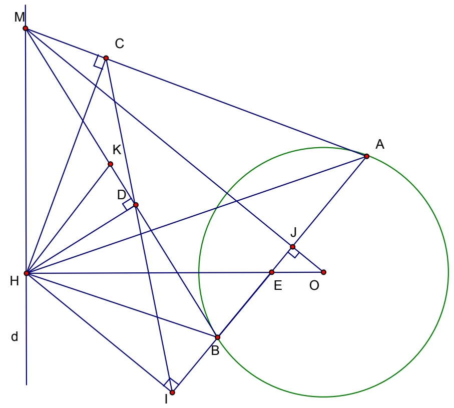
Câu 8. (Trường chuyên tỉnh Bắc Giang chuyên toán năm 2019-2020) Cho đường tròn (O) và đường thẳng d không có điểm chung. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên d. Từ điểm M trên d (khác điểm H) kẻ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm, tia MB nằm giữa hai tia MA và MH). Gọi C, D lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên các đường thẳng MA, MB.

a) Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng AB và OH. Chứng minh $OE.OH = OB^2$.

b) Gọi I là hình chiếu vuông góc của H trên đường thẳng AB. Chứng minh ba điểm I, C, D thẳng hàng.

c) Chứng minh $\dfrac{AM}{HC} + \dfrac{AB}{HI} = \dfrac{MB}{HD}$.

Lời giải



a). $AB \cap MO = J$. Chứng minh hai tam giác $OJE; OHM$ đồng dạng. .

Suy ra $OE.OH = OJ.OM$.

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông MBO có $OB^2 = OJ.OM$.

Vậy $OE.OH = OB^2$. .

b). Tứ giác $AMBO$ nội tiếp đường tròn đường kính MO;

Tứ giác $AMHO$ nội tiếp đường tròn đường kính MO; .

Do đó tứ giác $AMHB$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{CMH} = \widehat{IBH}$ (1). .

Tứ giác $CMHD$ nội tiếp nên $\widehat{CDM} = \widehat{CHM}$.

Tứ giác $BDHI$ nội tiếp nên $\widehat{BDI} = \widehat{BHI}$. .

Xét hai tam giác vuông MCH và BIH, kết hợp (1) suy ra $\widehat{CHM} = \widehat{BHI}$. .

Do đó $\widehat{CDM} = \widehat{BDI}$, kết luận C, D, I thẳng hàng..

c).Lấy điểm K trên đoạn MB sao cho $\widehat{MHK} = \widehat{AHB}$. .

Chứng minh hai tam giác $MHK; AHB$ đồng dạng. .

Suy ra $\dfrac{KM}{HD} = \dfrac{AB}{HI}$ $(1)\cdot$.

Chứng minh hai tam giác $BKH; AMH$ đồng dạng..

Suy ra $\dfrac{BK}{HD} = \dfrac{AM}{HC}$ $(2)\cdot$.

Từ (1) và (2), thu được $\frac{AM}{HC}+\frac{AB}{HI}=\frac{KM}{HD}+\frac{KB}{HD}=\frac{MB}{HD}$, điều phải chứng minh..

Câu 9. (Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh vòng 2 năm 2019-2020) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB<AC$. Các đường cao AD,BE,CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $DHEC$, trên cung nhỏ EC của đường tròn (O) lấy điểm I (khác điểm E) sao cho $IC>IE$. Đường thẳng DI cắt đường thẳng CE tại điểm N, đường thẳng EF cắt đường thẳng CI tại điểm M.

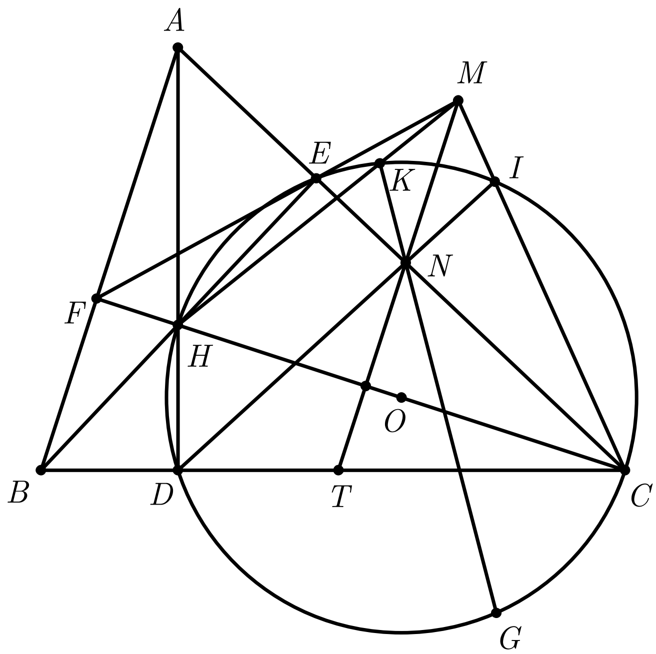
a) Chứng minh rằng $NI.ND=NE.NC$.

b) Chứng minh rằng đường thẳng MN vuông góc với đường thẳng CH.

c) Đường thẳng HM cắt đường tròn (O) tại điểm K (khác điểm H), đường thẳng KN cắt đường tròn (O) tại điểm G (khác điểm K), đường thẳng MN cắt đường thẳng BC tại điểm T. Chứng minh rằng ba điểm H,T,G thẳng hàng.

Lời giải

a).



Vẽ hình đúng ý a).

Xét ΔNDE và ΔNCI có:

$\widehat{END}=\widehat{INC}$ (đối đỉnh)

$\widehat{EDN}=\widehat{ICN}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{EI}$)

Suy ra $\Delta NDE \backsim \Delta NCI$ (g.g) nên $\frac{ND}{NC}=\frac{NE}{NI}$.

$\Rightarrow NI.ND=NE.NC$..

b)..

Do các tứ giác $BFEC$, $DEIC$, $ABDE$ nội tiếp nên:

$\widehat{AFE} = \widehat{ACB} = \widehat{DIE}$.

$\widehat{MEC} = \widehat{ABC} = \widehat{DEC} = \widehat{DIC} \Rightarrow$ Tứ giác $MENI$ nội tiếp..

$\Rightarrow \widehat{DIE} = \widehat{EMN} \Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{EMN} \Rightarrow MN \,//\, AB$.

Mà $CH \perp AB \Rightarrow CH \perp MN$..

c)..

Xét $\Delta ENM, \Delta TNC$ có

$\widehat{EMN} = \widehat{EIN} = \widehat{NCT}, \widehat{ENM} = \widehat{TNC} \Rightarrow \Delta ENM \backsim \Delta TNC$ (g.g).

$\Rightarrow \dfrac{NE}{NT} = \dfrac{NM}{NC} \Rightarrow NC.NE = NM.NT \; (1)$.

Xét $\Delta ENK, \Delta GNC$ có $\widehat{KEN} = \widehat{CGN}, \widehat{ENK} = \widehat{GNC} \Rightarrow \Delta ENK \backsim \Delta GNC$ (g.g).

$\Rightarrow \dfrac{NE}{NG} = \dfrac{NK}{NC} \Rightarrow NC.NE = NG.NK \; (2)$..

Từ $(1),(2)$ suy ra $NM.NT = NG.NK \Rightarrow \dfrac{NK}{NT} = \dfrac{NM}{NG} \Rightarrow \Delta TGN \backsim \Delta KMN$.

$\Rightarrow \widehat{KMN} = \widehat{TGN} \; (3)$.

Mà $\widehat{KMN} = \widehat{HCK}$ (cùng phụ với $\widehat{KHC}$) $\Rightarrow \widehat{KMN} = \widehat{HGN} \; (4)$.

Từ (3) và (4) ta có $\widehat{TGN} = \widehat{HGN} \Rightarrow H, T, G$ thẳng hàng..

Câu 10. (Trường chuyên tỉnh Bến Tre vòng 2 năm 2019-2020) Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$ và C là một điểm thuộc đường tròn (O) (C khác A và khác B). Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB có chứa điểm C kẻ tia Ax tiếp xúc với (O) tại A và tia By tiếp xúc với (O) tại B. Tiếp tuyến của (O) tại C cắt tia Ax, By lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh rằng $CM.CN = AM.BN$.

b) Trên tia BC lấy điểm D sao cho $BA = BD$. Tia AD cắt cung nhỏ AC tại I. Chứng minh rằng diện tích tam giác ABD gấp đôi diện tích tam giác ABI.

c) Tính tỉ số giữa diện tích tam giác AOI và diện tích tứ giác $IOBD$, biết diện tích tam giác IBD bằng $\dfrac{R^2}{2}$.

d) Tìm diện tích nhỏ nhất của các hình thang vuông $ABNM$ khi C thay đổi trên đường tròn (O).

Lời giải

Câu 11. (Trường chuyên tỉnh Cao Bằng vòng 2 năm 2019-2020) Cho tam giác nhọn ABC có ba đường cao AA', BB', CC' và trực tâm H. Lấy điểm D sao cho tứ giác $BHCD$ là hình bình hành.

Chứng minh rằng:

a) $ABDC$ là tứ giác nội tiếp.

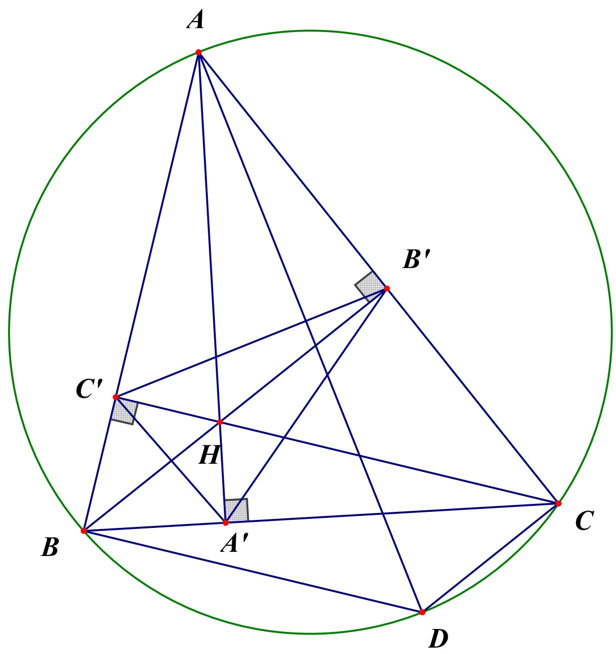
b) $\dfrac{BC.HA'+CA.HB'+AB.HC'}{BC.AA'+CA.BB'+AB.CC'}=\dfrac{1}{3}$

c) H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A'B'C'$.

Lời giải

a).

Học sinh vẽ đúng hình



Vì $\begin{cases} CD \parallel BH \\ BH \perp AC \end{cases} \Rightarrow CD \perp AC \Rightarrow \widehat{ACD}=90^0$ (1)

Vì $\begin{cases} BD \parallel CH \\ CH \perp AB \end{cases} \Rightarrow BD \perp AB \Rightarrow \widehat{ABD}=90^0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ABD}+\widehat{ACD}=180^o$.

Tứ giác $ABDC$ nội tiếp đường tròn đường kính AD.

b). $\dfrac{BC.HA'+CA.HB'+AB.HC'}{BC.AA'+CA.BB'+AB.CC'}=\dfrac{1}{3}$

Gọi S là diện tích của tam giác ABC.

Khi đó $BC.AA'+CA.BB'+AB.CC'=2S+2S+2S=6S$

$BC.HA'+CA.HB'+AB.HC'=2S_{\Delta HBC}+2S_{\Delta HCA}+2S_{\Delta HAB}$

$S_{\Delta HBC}+S_{\Delta HCA}+S_{\Delta HAB}=S \Rightarrow BC.HA'+CA.HB'+AB.HC'=2S$

Vậy $\dfrac{BC.HA'+CA.HB'+AB.HC'}{BC.AA'+CA.BB'+AB.CC'}=\dfrac{2S}{6S}=\dfrac{1}{3}$

c). H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A'B'C'$.

Trước hết ta chứng minh AA' là đường phân giác của góc $\widehat{B'A'C'}$

Tứ giác $HA'CB'$ là tứ giác nội tiếp (vì có hai góc đối diện cùng là góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{HA'B'} = \widehat{HCB'}$ (3) (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HB')

Tương tự $HA'BC'$ cũng là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{HA'C'} = \widehat{HBC'}$ (4) (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HC')

Vì $\widehat{HCB'} = \widehat{HBC'}$ (5)(cùng phụ với góc $\widehat{BAC}$)

Từ (3), (4), (5) suy ra $\widehat{HA'B'} = \widehat{HA'C'}$

$\Rightarrow AA'$ là đường phân giác của góc $\widehat{B'A'C'}$

Tương tự BB' cũng là đường phân giác của góc $\widehat{A'B'C'}$.

$\Rightarrow H$ là giao điểm của hai đường phân giác trong của tam giác $A'B'C'$.

Vậy H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A'B'C'$.

Câu 12. (Trường chuyên tỉnh Chuyên ĐHSP vòng 1 năm 2019-2020) Cho đường tròn (O), bán kính R, ngoại tiếp tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi AA_1, BB_1, CC_1 là các đường cao của tam giác ABC (A_1 thuộc BC, B_1 thuộc CA, C_1 thuộc AB). Đường thẳng A_1C_1 cắt đường tròn (O) tại A' và C' (A_1 nằm giữa A' và C_1). Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A' và C' cắt nhau tại B'.

a) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng $HC_1.A_1C = A_1C_1.HB_1$.

b) Chứng minh rằng ba điểm B, B', O thẳng hàng.

c) Khi tam giác ABC là tam giác đều, hãy tính $A'C'$ theo R.

Lời giải

a) Hai tam giác AB_1H và AA_1C có $\angle AB_1H = \angle AA_1C = 90^0$ và chung góc $\angle HAB_1$ nên đồng dạng với nhau (g-g). Từ đó suy ra $\frac{HB_1}{A_1C} = \frac{AH}{AC}$. (1)

Tứ giác AC_1A_1C có $\angle AC_1C = \angle AA_1C = 90^0$ nên nội tiếp.

Suy ra $\angle HC_1A_1 = \angle CAH$ (cùng chắn cung A_1C của đường tròn (AC_1A_1C)) và $HA_1C_1 = \angle HCA$ (cùng chắn cung AC_1 của đường tròn (AC_1A_1C)).

Từ đó, ta có $\Delta C_1A_1H \# \Delta ACH$ (g-g). Suy ra $\frac{HC_1}{A_1C_1} = \frac{HA}{AC}$. (2)

Từ (1) và (2), ta được $\frac{HB_1}{A_1C} = \frac{HC_1}{A_1C_1}$ hay $HB_1.A_1C_1 = HC_1.A_1C$.

Đây chính là kết quả cần chứng minh.

b) Theo tính chất của tiếp tuyến, ta có $OB' \perp A'C'$. (3)

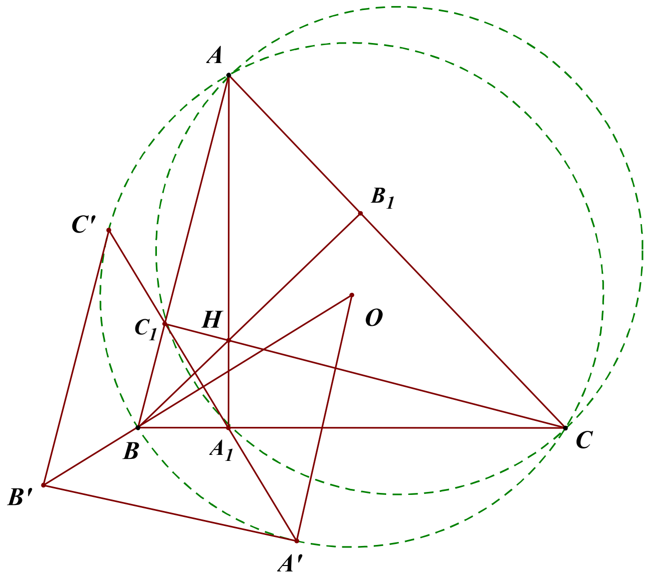
Ta sẽ chứng minh $OB \perp A'C'$, hay $OB \perp A_1C_1$.

Do tam giác OBC cân tại O nên $\angle OBA_1 = \dfrac{180^0 - \angle BOC}{2} = \dfrac{180^0 - 2\angle BAC}{2} = 90^0 - \angle BAC$.

Mặt khác, do tứ giác AC_1AC nội tiếp nên $\angle C_1A_1B = \angle BAC$ (cùng bù với $\angle C_1A_1C$).

Kết hợp với kết quả ở trên, ta được $\angle OBA_1 = \angle C_1A_1B = 90^0 - \angle BAC = 90^0$.

Do đó $OB \perp A_1C_1$, hay $OB \perp A'C'$. Kết hợp với (3), ta suy ra B, B', O thẳng hàng.



c) Khi tam giác ABC đều thi BO đi qua B_1, B_1 là trung điểm của AC và $A'C' \perp BO$.

Gọi K là giao điểm BO và $A'C_1$ thì K là trung điểm của $A'C'$.

Do tam giác AB_1C_1 đều và $OB \perp A_1C_1$ nên K cũng là trung điểm của A_1C_1.

Do tam giác ABC đều nên O cũng là trọng tâm của tam giác. Suy ra $OC_1 = \dfrac{1}{2}OC = \dfrac{1}{2}R$.

Mặt khác, sử dụng hệ thức lượng trong tam giác OC_1B vuông tại C_1 có C_1K là đường cao, ta có $OC_1^2 = OK.OB$. Suy ra $OK = \dfrac{OC_1^2}{OB} = \dfrac{1}{4}R$.

Từ đây, sử dụng định lý Pythagoras trong tam giác $A'KO$ vuông tại K, ta có

$$A'K = \sqrt{OA'^2 - OK^2} = \sqrt{R^2 - \frac{1}{16}R^2} = \frac{R\sqrt{15}}{4}.$$

Vậy $A'C' = 2A'K = \dfrac{R\sqrt{15}}{4}$.

Câu 13. (Trường chuyên tỉnh Chuyên ĐHSP vòng 2 năm 2019-2020) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) và $AB > AC$. Gọi D, E lần lượt là chân đường cao của tam giác ABC hạ từ A, B. Gọi F là chân đường vuông góc hạ từ B lên đường thẳng AO.

a) Chứng minh rằng B, D, E, F là bốn đỉnh của một hình thang cân.

b) Chứng minh rằng EF đi qua trung điểm của BC.

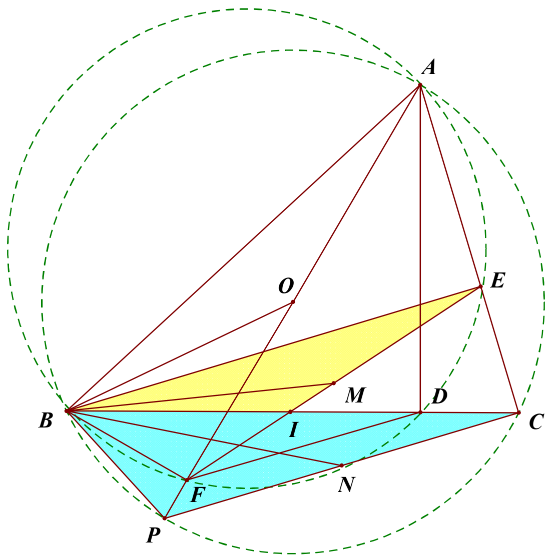
c) Gọi P là giao điểm thứ hai của đường thẳng AO và đường tròn (O), M và N lần lượt là trung điểm của EF và CP. Tính số đo góc BMN.

Lời giải.

a) Ta có $\angle AFB = \angle ADB = \angle AEB = 90^0$ nên năm điểm A, B, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

Lại có $\angle DAE = 90^0 - \angle ACB$ và $\angle FAB = \angle OAB = \dfrac{180^0 - \angle AOB}{2} = \dfrac{180^0 - 2\angle ACB}{2} = 90^0 - \angle ACB$

Nên $\angle FAB = \angle DAE$. Đây là góc nội tiếp chắn các cung tương ứng là BF và DE của đường tròn $(ABFDE)$, do đó $FB = DE$. Tứ giác $BFDE$ nội tiếp và có $BF = DE$ nên là hình thang cân.



b) Gọi I là giao điểm của EF và BC. Do tứ giác $BFDE$ là hình thang cân nên $BI = IE$. Suy ra tam giác BIE cân tại I. Từ đó, ta có $\angle IBE = \angle IEB$.

Lại có $\angle IBE = 90^0 - \angle ICE$ và $\angle IEB = 90^0 - \angle IEC$ nên $\angle ICE = \angle IEC$. Suy ra tam giác IEC cân tại I, tức ta có $IC = IE = IB$. Vậy EF đi qua trung điểm I của BC.

c) Do tứ giác $ABFE$ nội tiếp nên $\angle BFE = 180^0 - \angle BAC$.

Lại có $\angle BPC = 180^0 - \angle BAC$ (do tứ giác $APBC$ nội tiếp) nên $\angle BFE = \angle BPC$. (1)

Do $BFDE$ là hình thang cân nên $DF // BE$. Mà $BE \perp AC$ nên $DF \perp AC$.

Lại có $PC \perp AC$ nên $DF // PC$. Suy ra $\angle BCP = \angle BDF = \angle BEF$ (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra $\Delta BEF \# \ \Delta BCP$ (g-g).

Lại có M là trung điểm của EF và N là trung điểm của CP nên từ kết quả trên, ta cũng suy ra $\Delta BEM \# \ \Delta BCN$. Từ đó, ta có $\Delta NBC \# \ \Delta MBE$. (3) và $\dfrac{BN}{BM} = \dfrac{BC}{BE}$. (4)

Từ (3), ta suy ra $\angle CBE = \angle MBN$. Kết hợp với (4), ta được $\Delta BMN \# \ \Delta BEC$.

Do đó $\angle BMN = \angle BEC = 90^0$.

Câu 14. (Trường chuyên tỉnh Cần thơ chuyên toán năm 2019-2020) Cho tam giác nhọn ABC không cân $AB < AC$, trực tâm H và đường trung tuyến AM. Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên AM, D là điểm đối xứng của A qua M và L là điểm đối xứng của K qua AC

a)Chứng minh tứ giác $BCHK$ và $ABLC$ nội tiếp.

b)Chứng minh $\widehat{LAB} = \widehat{MAC}$.

c)Gọi I là hình chiếu vuông góc của H lên AL, X là giao điểm của AL và BC.
Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác IXM và đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC tiếp xúc nhau.

Lời giải

a) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \widehat{HBD} = 90^o$

Tương tự $\Rightarrow \widehat{HCD} = 90^o$

Vậy tứ giác $BHKC$ nội tiếp.

Ta có $\widehat{BLC} = \widehat{BKC} = \widehat{BHC} = 180^o - \widehat{BAC}$

Suy ra $\widehat{BLC} + \widehat{BAC} = 180^o$ nên tứ giác $ABLC$ nội tiếp.

b) Ta có $\widehat{KBC} = \widehat{KDC} = \widehat{BAD}$

Mà $\widehat{KBC} = \widehat{LBC} = \widehat{LAC}$

$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{LAC} \Rightarrow \widehat{LAB} = \widehat{MAC}$

Ta có $IKMX$ nội tiếp hay $K \in (IXM)$

Gọi Y là điểm đối xứng của A qua BC , suy ra K, X, Y thẳng hàng.

$\Rightarrow YD // EM$ và $\widehat{KYD} = 90^o$. Vậy Y thuộc đường tròn đường kính DH .

c) Gọi Kt là tiếp tuyến tại K của đường tròn (KXM) . Ta có $\widehat{tKX} = \widehat{KMX} = \widehat{KDY}$

Suy ra Kt là tiếp tuyến của (KYD) .

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác IXM và đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC tiếp xúc với nhau.

Câu 15. (Trường chuyên tỉnh DAK LAK vòng 2 năm 2019-2020) Cho hình vuông $ABCD$ với tâm O. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Các điểm N, P theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CD sao cho $MN // AP$. Chứng minh rằng:

1)Tam giác ADP đồng dạng với tam giác NBM .

2) $BN.DP = OB^2$.

3) DO là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác OPN .

4)Ba đường thẳng BD, AN, PM đồng quy.

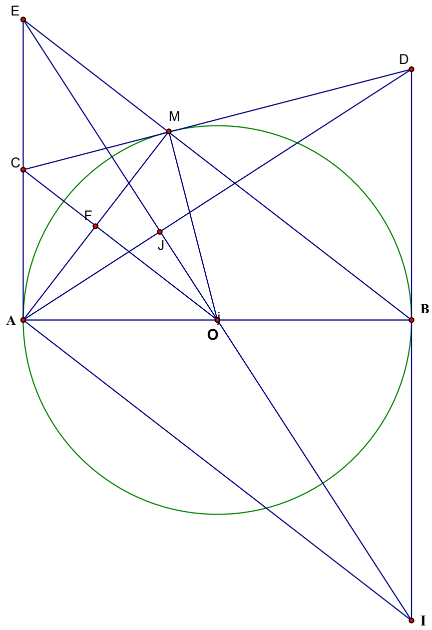
Câu 16. (Trường chuyên tỉnh DAK NONG vòng 2 năm 2019-2020) Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Kẻ hai đường thẳng d và d' lần lượt là hai tiếp tuyến tại các tiếp điểm A và B của đường tròn (O). Điểm M thuộc đường tròn (O) (M khác A và B), tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) cắt d, d' lần lượt tại C và D. Đường thẳng BM cắt d tại E.

a) So sánh độ dài các đoạn thẳng CM, CA, CE.

b) Đường thẳng EO cắt hai đường thẳng d', AD lần lượt tại I và J. Chứng minh các điểm A, B, I, J cùng thuộc một đường tròn.

c) Giả sử $AE = BD$, tính độ dài đoạn thẳng AM theo R.

Lời giải



a) Ta có $CM = CA$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) (1)

Suy ra ΔACM cân tại C $\Rightarrow$ $\widehat{CAM} = \widehat{CMA}$.

Mặt khác $\begin{cases} \widehat{CME} + \widehat{CMA} = 90^0 \\ \widehat{CEM} + \widehat{CAM} = 90^0 \end{cases}$ nên $\widehat{CME} = \widehat{CEM}$ suy ra ΔCME cân tại $C \Rightarrow CE = CM$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $CM = CA = CE$.

b) $\Delta OAE = \Delta OBI$ (g.c.g)

Suy ra $AEBI$ là hình bình hành $\Rightarrow AI // BE$.

Ta có $OD \perp BE \Rightarrow OD \perp AI$, mà $AB \perp DI$.

$\Rightarrow O$ là trực tâm của $\Delta\ ADI$.

$\Rightarrow OI \perp AD \Rightarrow \widehat{AJI} = 90^0$

Mà $\widehat{ABI} = 90^0$ nên tứ giác $AJBI$ nội tiếp.

c) Tam giác COD vuông tại O (vì OC, OD là hai phân giác của hai góc kề bù), có OM là đường cao nên $OM^2 = CM.MD$.

Theo a) ta có $CM = CA = CE \Rightarrow 2CM = AE$, mà $BD = MD$ và $AE = BD$ (gt) $\Rightarrow 2CM = MD$.

$\Rightarrow 2CM^2 = R^2$ (do $MO = R$ và $OM^2 = CM.MD$).

$\Rightarrow CM = \dfrac{R\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AE = R\sqrt{2}$ (do $AE = 2CM$).

Vì tam giác AEB vuông tại A nên $\dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{AE^2} + \dfrac{1}{AB^2}$

$\Rightarrow AM = \dfrac{AE.AB}{\sqrt{AE^2 + AB^2}} = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Câu 17. (Trường chuyên tỉnh Gia lai chuyên tin năm 2019-2020) Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ và điểm C di động trên nửa đường tròn (C không trùng với A, B). Tiếp tuyến với đường tròn tại C cắt các tiếp tuyến tại A và B của nửa đường tròn (O) lần lượt tại P và Q Gọi M là giao điểm của AC với OP, N là giao điểm của BC với OQ.

a) Chứng minh tứ giác $MNQP$ nội tiếp một đường tròn.

b) Chứng minh $AP.BQ = R^2$.

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MNQP$ và S là diện tích của tứ giác $OPIQ$. Tìm giá trị nhỏ nhất của S theo R.

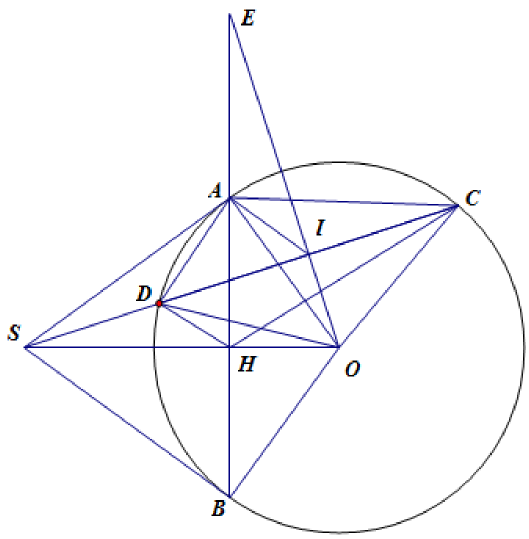
Câu 18. (Trường chuyên tỉnh Gia lai vòng 2 năm 2019-2020) Cho đường tròn $(O;R)$, DC là một dây cung cố định không qua O. Gọi S là điểm di động trên tia đối của tia DC (S không trùng D). Qua S kẻ hai tiếp tuyến SA, SB với đường tròn $(O;R)$ (A, B là hai tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng DC.

a) Chứng minh năm điểm S, A, B, I, O cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi H là giao điểm của SO và AB. Chứng minh $\widehat{DHC} = \widehat{DOC}$.

c) Chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định khi S di động.

Lời giải



.a. Ta có $\widehat{SIO} = 90^0$ (đường kính qua trung điểm của dây thì vuông góc vơi dây)

$\widehat{SAO} = \widehat{SBO} = \widehat{SIO} = 90^0$

Suy ra năm điểm *S, A, B, I, O* cùng nằm trên đường tròn đường kính *SO.*

b. ΔSAD đồng dạng ΔSCA nên $SD.SC = SA^2$

$SH.SO = SA^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông). Suy ra $SD.SC = SH.SO$

ΔSDH đồng dạng ΔSOC (do $\dfrac{SD}{SH} = \dfrac{SO}{SC}$; $\widehat{CSO}$ chung) nên $\widehat{DHS} = \widehat{DCO}$.

Tứ giác $DHOC$ nội tiếp ($\widehat{DHO} + \widehat{DCO} = \widehat{DHO} + \widehat{DHS} = 180^0$) nên $\widehat{DHC} = \widehat{DOC}$.

c. Gọi E là giao điểm của AB và OI; ΔSIO đồng dạng ΔEHO nên $OI.OE = OS.OH$

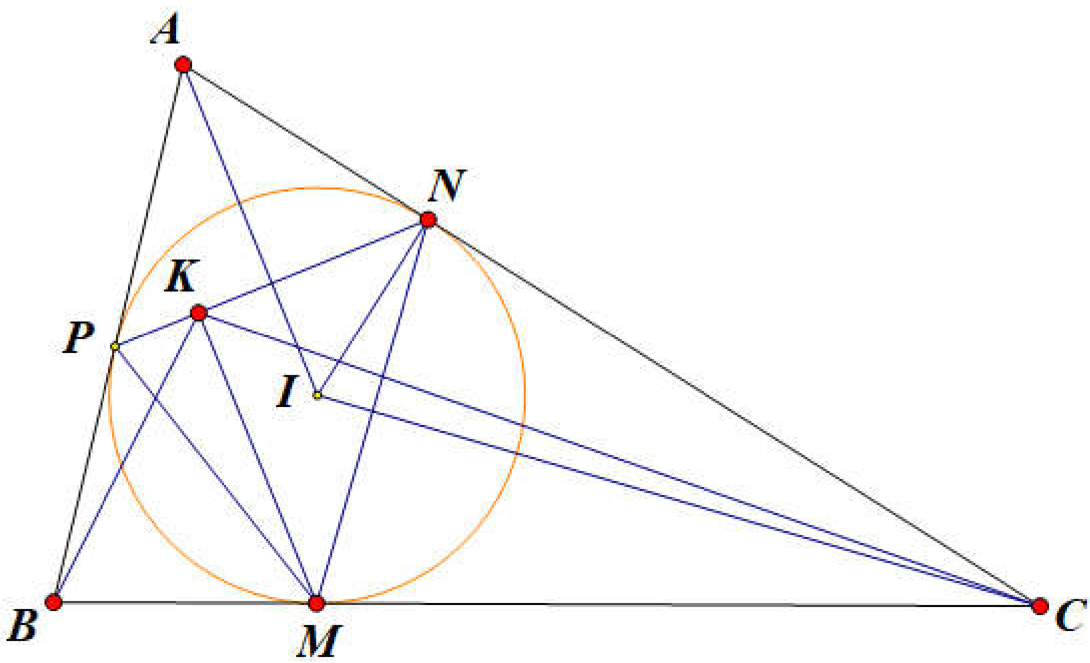
$OS.OH = OB^2 = R^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Suy ra $OE = \dfrac{R^2}{OI}$ không đổi (do *O, I* cố định, R không đổi) nên E cố định

Vậy đường thẳng AB luôn đi qua điểm cố định E khi S di động.

Câu 19. (Trường chuyên tỉnh HCM năm 2019-2020) Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P. Gọi K là hình chiếu vuông góc của M lên NP. Chứng minh rằng KM là phân giác góc BKC.

Lời giải



Chứng minh KM là phân giác của góc BKC

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

Khi đó: $\widehat{NIC} = \frac{1}{2}\widehat{NIM} = \widehat{MPN}$, IN vuông góc AC.

Suy ra: $\Delta INC \# \Delta PKM$ (g-g)

$\Rightarrow \frac{IN}{PK} = \frac{NC}{KM} \Rightarrow IN.KM = PK.NC$

Chứng minh tương tự, ta có: $IP.KM = NK.BP$ mà $IP = IN$ nên $PK.NC = NK.BP \Rightarrow \frac{KN}{NC} = \frac{KP}{BP}$

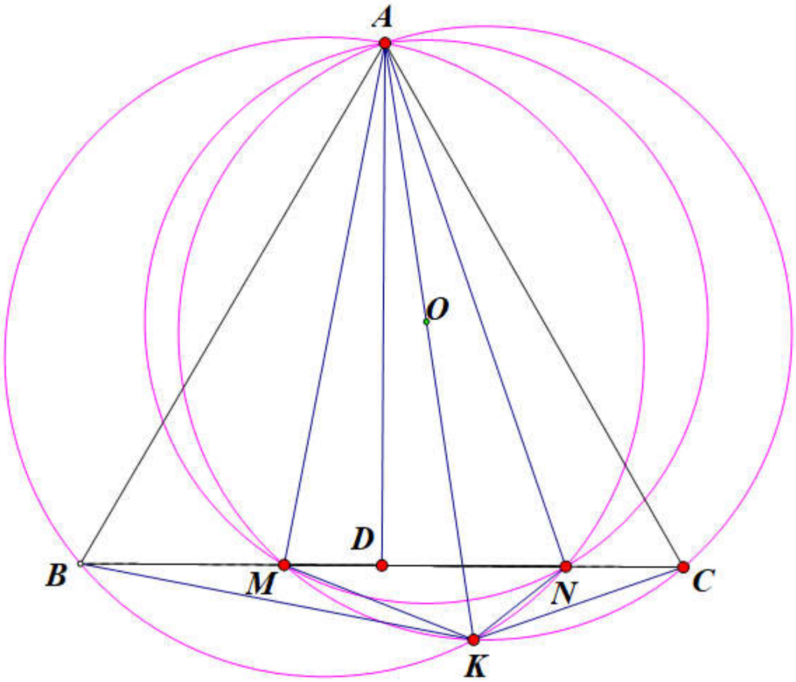
Lại có: $AP = AN \Rightarrow \Delta APN$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{APN} = \widehat{ANP} \Rightarrow \widehat{BPK} = \widehat{CNK}$

Do đó: $\Delta BPK \# \Delta CNK$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{BKP} = \widehat{CKN}$ mà KM vuông góc NP nên KM là phân giác trong của $\widehat{BKC}$ □

Câu 20. (Trường chuyên tỉnh HCM năm 2019-2020) Cho tam giác đều ABC. Gọi M, N là hai điểm nằm trên cạnh BC sao cho góc MAN bằng 30^0 (M nằm giữa B và N). Gọi K là giao điểm của hai đường tròn (ABN) và (ACM). Chứng minh rằng:

a)Hai điểm K và C đối xứng với nhau qua AN;
b) Đường thẳng AK đi qua tâm đường tròn (AMN).

Lời giải



a) *Chứng minh:* C, K *đối xứng nhau qua* AN

Gọi K' là điểm đối xứng của C qua AN, D là trung điểm của BC.

Khi đó: $AK' = AC = AB$, $\widehat{AK'N} = \widehat{ACN} = 60^o = \widehat{ABN}$ (tam giác ABC đều)

Do đó: tứ giác $ABK'N$ nội tiếp đường tròn.

Ta có: $\widehat{BAD} = 30^o = \widehat{MAN} \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{DAN}$

Mặt khác: $\widehat{DAM} = \widehat{CAN}$ (do $\widehat{CAD} = 30^o = \widehat{MAN}$) $= \widehat{NAK'} \Rightarrow \widehat{MAK'} = \widehat{DAN}$

Do đó: $\widehat{MAK'} = \widehat{BAM}$, lại có: $AK' = AB$, AM chung nên $\Delta ABM = \Delta AK'M$ (c-g-c)

Suy ra: $\widehat{MK'A} = \widehat{ABM} = 60^o = \widehat{ACN} \Rightarrow$ tứ giác $ACK'M$ nội tiếp đường tròn.

Vậy $K \equiv K'$. Do đó C, K đối xứng nhau qua AN □

b) Chứng minh: AK *đi qua tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác* AMN

Gọi (O) là tâm (AMN)

Ta có: $\widehat{MKA} = \widehat{MCA} = \widehat{AKN} = 60^o$ nên $\widehat{MKN} = 120^o$

Mà $\widehat{MON} = 2\widehat{MAN} = 60^o$

Nên tứ giác $MONK$ nội tiếp

Lại có: $OM = ON$ nên $\widehat{OKN} = \widehat{OKM} = 60^o$ và $\widehat{AKN} = 60^o$

Suy ra: A, O, K thẳng hàng

Vậy đường thẳng AK đi qua tâm đường tròn □

Ta có: $225 = 9.25$

Câu 21. (Trường chuyên tỉnh Hà Giang vòng 1 năm 2019-2020) Cho đường tròn tâm O, đường kính AC. Trên đoạn OC lấy điểm B (*sao cho B khác C*) và vẽ đường tròn tâm O' đường kính BC. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Qua M kẻ một dây cung DE vuông góc với AB; DC cắt đường tròn (O') tại I.

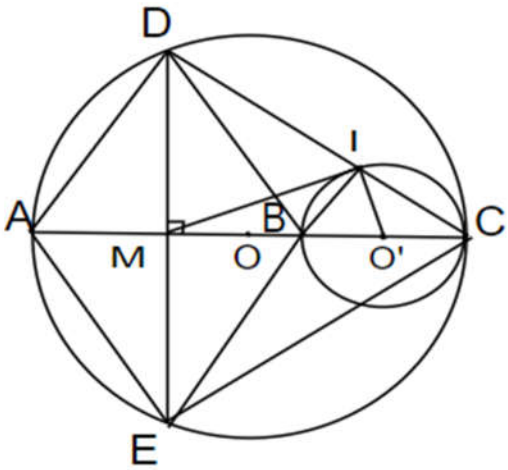
a) Chứng minh tứ giác $ADBE$ là hình thoi.

b) Chứng minh ba điểm I, B, E thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng MI là tiếp tuyến của đường tròn (O') và $MI^2 = MB.MC$.

Lời giải

Vẽ hình:



$OA \perp DE \Rightarrow MD = ME$; $MA = MB$ (gt) nên tứ giác $ADBE$ là hình bình hành.

Hình bình hành $ADBE$ có $DE \perp AB$ nên tứ giác $ADBE$ là hình thoi.

$\widehat{ADC} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AC) nên $AD \perp DC$

$\widehat{BIC} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính BC) nên $BI \perp DC$

Do đó $AD // BI$; $AD // BE$ (vì $ADBE$ là hình thoi), mà qua B ngoài AD chỉ dựng được một và chỉ một đường thẳng song song với AD nên $BI \equiv BE$

Hay I, B, E thẳng hàng *(đpcm).*

Trong tam giác EID thì IM là trung tuyến đi tới cạnh huyền DE nên $MI = ME$ do đó ΔMEI cân, suy ra $\widehat{MEI} = \widehat{MIE}$ (1)

Trong tam giác vuông ΔMEB thì $\widehat{MEB} + \widehat{MBE} = 1v$,

mà $\widehat{MBE} = \widehat{IBO'}$ (góc đối đỉnh) nên $\widehat{MEB} + \widehat{IBO'} = 1v$ (2)

Theo (1) và (2) có $\widehat{MIB} + \widehat{IBO'} = 1v$ (3)

Tam giác $O'IB$ cân nên $\widehat{IBO'} = \widehat{O'IB}$ (4)

Từ (3) và (4) có $\widehat{MIB} + \widehat{O'IB} = \widehat{MIO'} = 1v \Rightarrow MI \perp O'I$ nên MI là tiếp tuyến của đường tròn tâm O'.

ΔMIB đồng dạng với ΔMCI (g.g vì có góc M chung và $\widehat{MIB} = \widehat{MCI}$)

Suy ra $\frac{MI}{MC} = \frac{MB}{MI} \Leftrightarrow MI^2 = MB.MC$ *(đpcm).*

Câu 22. (Trường chuyên tỉnh Hà Nam chuyên toán năm 2019-2020) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) ($AB < AC$), điểm M là trung điểm của cạnh BC. Đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ cắt cạnh BC tại D và cắt đường tròn (O) tại điểm P (P khác A). Gọi E là điểm đối xứng với D qua M. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt đường thẳng AO tại H. Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt đường thẳng AD tại F. Gọi K là giao điểm của PE và DH.

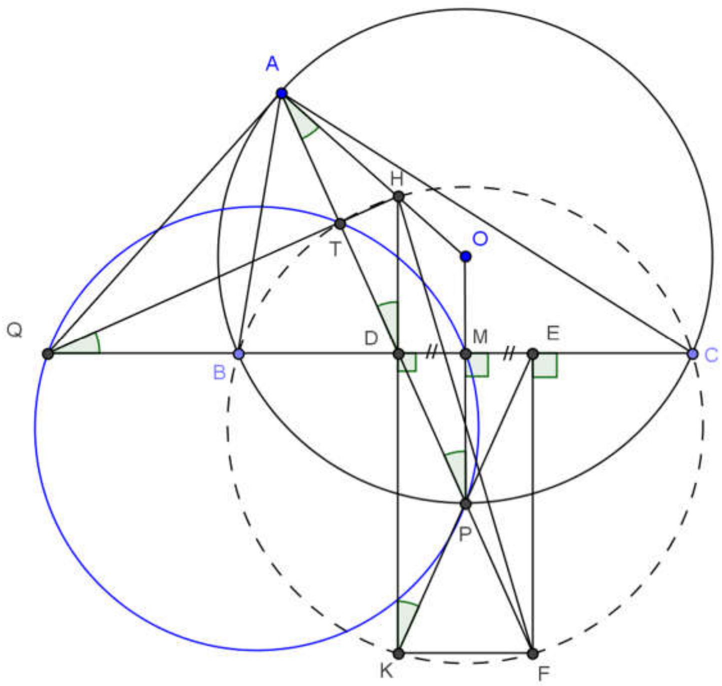
1. Chứng minh tứ giác $DEFK$ là hình chữ nhật.

2. Chứng minh $DB.DC = DA.DP = DH.DK$, từ đó suy ra tứ giác $BHCK$ nội tiếp đường tròn (I).

3. Gọi T là giao điểm của AD và (I) (T khác F). Chứng minh đường thẳng HT vuông góc với đường thẳng AD.

4. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MTP cắt đường thẳng TH tại điểm Q (Q khác T). Chứng minh đường thẳng QA tiếp xúc với đường tròn (O).

Lời giải

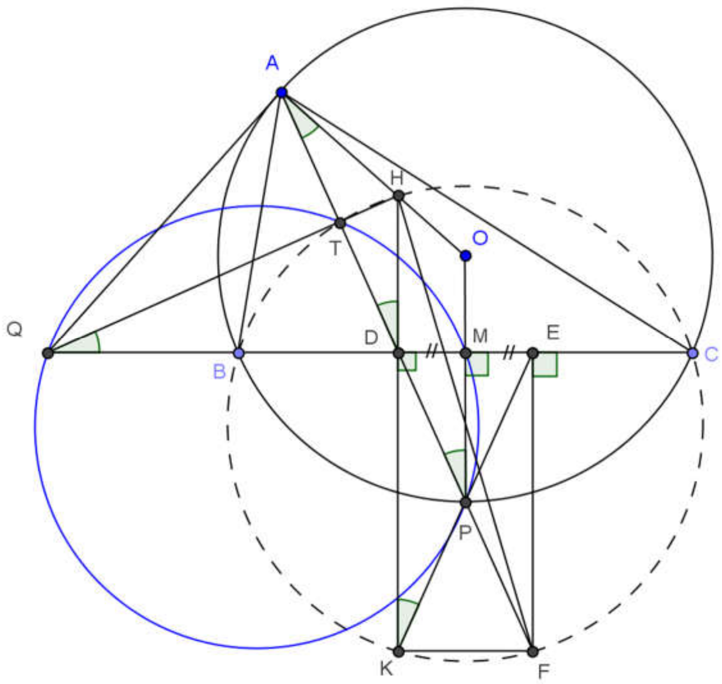


1. Chứng minh tứ giác $DEFK$ là hình chữ nhật.

$DK//EF$ (cùng vuông góc với BC).
$DK = 2.MP$ (tính chất đường trung bình)
$EF = 2.MP$ (tính chất đường trung bình)
Suy ra DEFK là hình bình hành

Mà $\widehat{EDK} = 90^o$ do đó DEFK là hình chữ nhật.

2. Chứng minh $DB.DC = DA.DP = DH.DK$, từ đó suy ra tứ giác $BHCK$ nội tiếp đường tròn (I).



ΔDAB đồng dạng với tam giác ΔDCP (g.g) $DA.DP = DB.DC$ (1).

Chỉ ra được $\widehat{OAP} = \widehat{OPD} = \widehat{OPE} = \widehat{HKP}$, suy ra tứ giác $AHPK$ nội tiếp
ΔDAH đồng dạng với tam giác ΔDKP (g.g) do đó $DA.DP = DH.DK$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $DB.DC = DH.DK$

ΔDBH đồng dạng với tam giác ΔDKC (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{HBD} = \widehat{CKD}$

$\Rightarrow$ tứ giác $BHCK$ nội tiếp.

3. Gọi T là giao điểm của AD và (I) (T khác F). Chứng minh đường thẳng HT vuông góc với đường thẳng AD.

+ Tứ giác $BHCK$ nội tiếp. Vậy $\widehat{BHC} + \widehat{BKC} = 180^0$ (3)

+ Chỉ ra được K và F đối xứng nhau qua trung trực MP của đoạn BC, do đó $\widehat{BKC} = \widehat{BFC}$ (4).

Từ (3) và (4) có $\widehat{BHC} + \widehat{BFC} = 180^0$, do đó bốn điểm B, H, C, F cùng nằm trên đường tròn (I).

$\widehat{HKF} = 90^0$, suy ra HF là đường kính của (I), suy ra $HT \perp AD$.

4. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MTP cắt đường thẳng TH tại điểm Q (Q khác T). Chứng minh đường thẳng QA tiếp xúc với đường tròn (O).

+ $\widehat{HAD} = \widehat{OPD} = \widehat{HDA}$, suy ra tam giác HDA cân tại H nên A, D đối xứng nhau qua HT.

Kéo dài TH cắt đường thẳng BC tại Q' thì $\widehat{Q'AH} = \widehat{Q'DH} = 90^0$, suy ra $Q'A$ là tiếp tuyến của (O).

+ Chỉ ra được $\widehat{HQ'D} = \widehat{TDH} = \widehat{TPM}$ nên tứ giác $TQ'PM$ nội tiếp

từ đó suy ra $Q' \equiv Q$. Vậy QA tiếp xúc với đường tròn (O).

Câu 23. (Trường chuyên tỉnh Hà Nam thi chung năm 2019-2020) Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A sao cho $OA=3R$. Qua A kẻ hai tiếp tuyến AB và AC của đường tròn (O), với B và C là hai tiếp điểm. Kẻ cát tuyến AMN của đường tròn (O) (M nằm giữa hai điểm A và N). Gọi H là giao điểm của OA và BC.

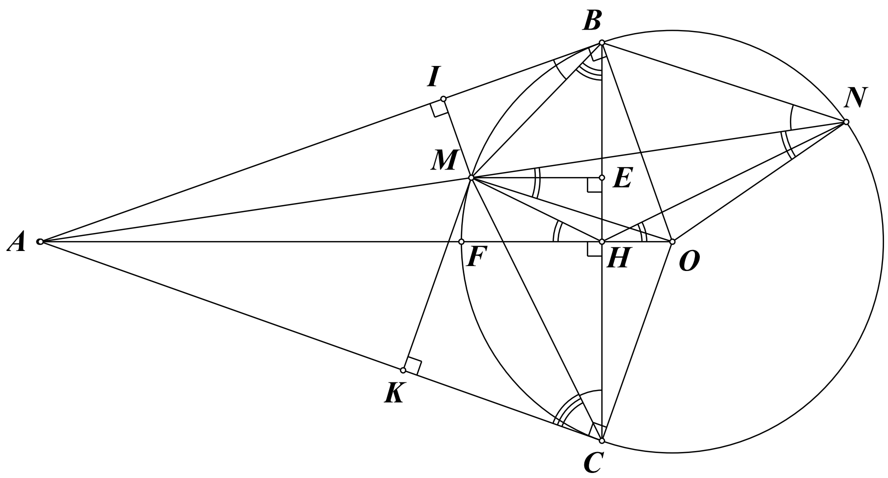
1. Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

2. Chứng minh $AM.AN=AH.AO$.

3. Chứng minh HB là đường phân giác của góc $\widehat{MHN}$.

4. Gọi I,K lần lượt là hình chiếu của M trên AB và AC. Tìm giá trị lớn nhất của $MI.MK$ khi cát tuyến AMN quay quanh A.

Lời giải



(Học sinh không vẽ hình không được chấm bài)

1. Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

Xét tứ giác $ABOC$ có $AB\perp OB$ nên $\widehat{ABO}=90^0$

Tương tự $\widehat{ACO}=90^0$

$\widehat{ABO}+\widehat{ACO}=180^0$

Vậy tứ giác $ABOC$ nội tiếp đường tròn.

2. Chứng minh $AM.AN=AH.AO$.

Vì $\widehat{ABM}=\widehat{ANB}$ và $\widehat{MAB}$ chung, nên $\Delta ABM \backsim \Delta ANB$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AN}=\dfrac{AM}{AB}\Rightarrow AB^2=AM.AN$ (1)

Chứng minh $BH\perp OA$ và ΔABO vuông tại B

Suy ra $AB^2=AH.AO$ (2)

Từ (1) và (2), ta có $AM.AN=AH.AO$.

3. Chứng minh HB là đường phân giác của góc $\widehat{MHN}$.

Từ ý 2 suy ra $\dfrac{AN}{AH} = \dfrac{AO}{AM} \Rightarrow \Delta AHM \backsim \Delta ANO \Rightarrow \widehat{AHM} = \widehat{ANO}$ (3)

Suy ra tứ giác $OHMN$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{OHN} = \widehat{OMN}$ (cùng chắn cung ON) (4)

Mà $\widehat{OMN} = \widehat{ANO}$ (vì ΔOMN cân tại O) (5)

Từ (3), (4), (5) ta có $\widehat{OHN} = \widehat{AHM}$

Suy ra $\widehat{BHM} = \widehat{BHN}$

Vậy HB là đường phân giác của góc $\widehat{MHN}$ (đpcm).

4. Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của M trên AB và AC. Tìm giá trị lớn nhất của $MI.MK$ khi cát tuyến AMN quay quanh A.

$\widehat{MCE} = \widehat{MBI} \Rightarrow \Delta MCE \backsim \Delta MBI \Rightarrow \dfrac{MI}{ME} = \dfrac{MB}{MC}$

$\widehat{MBE} = \widehat{MCK} \Rightarrow \Delta MBE \backsim \Delta MCK \Rightarrow \dfrac{MK}{ME} = \dfrac{MC}{MB}$

Suy ra $\dfrac{MI}{ME}.\dfrac{MK}{ME} = 1 \Rightarrow MI.MK = ME^2$.

Mà $ME \le HF$, do đó $MI.MK$ đạt giá trị lớn nhất bằng HF^2 khi M trùng với F (trong đó F là trung điểm cung nhỏ BC)

Ta có $OH.OA = OB^2 \Rightarrow OH = \dfrac{R^2}{3R} = \dfrac{R}{3}$.

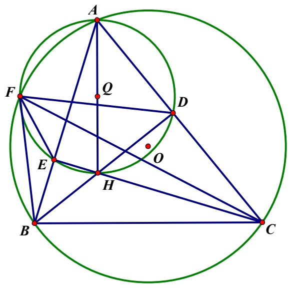
Giá trị lớn nhất của $MI.MK$ là $HF^2 = (R - OH)^2 = \dfrac{4R^2}{9}$

Câu 24. (Trường chuyên tỉnh Hà Nội chuyên tin năm 2019-2020) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB < AC)$, nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H. Đường tròn (O) cắt đường tròn đường kính AH tại điểm thứ hai F (F khác A).

1) Chứng minh tam giác BEF đồng dạng với tam giác CDF.
2) Gọi N là điểm chính giữa của cung nhỏ BC của đường tròn (O). Đường thẳng FN cắt cạnh BC tại điểm K. Chứng minh tia HK là tia phân giác của góc BHC.
3) Hai tia phân giác của góc ABH và góc ACH cắt nhau tại điểm I. Gọi P là giao điểm của đoạn thẳng ON và cạnh BC. Gọi Q là trung điểm của đoạn thẳng AH. Chứng minh P, I, Q là ba điểm thẳng hàng.

Lời giải

1..Chứng minh tam giác BEF đồng dạng với tam giác CDF.



Chứng minh được $\widehat{FBA} = \widehat{FCA} \Rightarrow \widehat{FBE} = \widehat{FCD}$ (1)

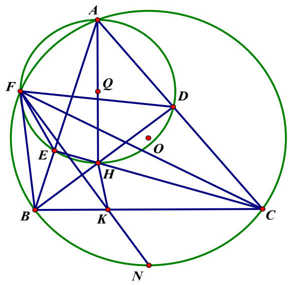
Chứng minh được $\widehat{FEA} = \widehat{FDA}$

Suy ra $\widehat{FEB} = \widehat{FDC}$ (2)

Từ (1) và (2) có:

ΔBEF đồng dạng với $\Delta CDF(\text{g}-\text{g})$.

2..Gọi N là điểm chính giữa của cung nhỏ BC của đường tròn (O). Đường thẳng FN cắt cạnh BC tại điểm K. Chứng minh tia HK là tia phân giác của góc BHC.



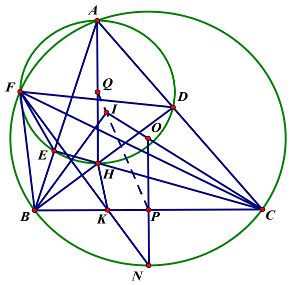
Có ΔBEF đồng dạng với $\Delta CDF \Rightarrow \dfrac{FB}{FC} = \dfrac{BE}{CD}$ (3)

Chứng minh ΔHBE đồng dạng với $\Delta HCD \Rightarrow \dfrac{BE}{CD} = \dfrac{HB}{HC}$ (4)

Có N là điểm chính giữa của cung nhỏ BC của đường tròn (O) nên tia FN là tia phân giác của $\widehat{BFC} \Rightarrow \dfrac{FB}{FC} = \dfrac{KB}{KC}$ (5)

Từ (3), (4) và (5) $\Rightarrow \dfrac{KB}{KC} = \dfrac{HB}{HC} \Rightarrow$ đpcm.

3..Hai tia phân giác của góc ABH và góc ACH cắt nhau tại điểm I. Gọi P là giao điểm của đoạn thẳng ON và cạnh BC. Gọi Q là trung điểm của đoạn thẳng AH. Chứng minh P, I, Q là ba điểm thẳng hàng.



Có $QD = QE = \dfrac{1}{2}AH, PD = PE = \dfrac{1}{2}BC$

$\Rightarrow PQ$ là đường trung trực của đoạn DE. (6)

Có $\widehat{DBA} = \widehat{ECA} \Rightarrow \widehat{EBI} = \widehat{IBD} = \widehat{ECI} = \widehat{ICD}$

$\Rightarrow$ Bốn điểm B, E, I, C cùng thuộc một đường tròn và 4 điểm B, E, D, C cùng thuộc một đường tròn.

$\Rightarrow$ Năm điểm B, E, I, D, C cùng thuộc một đường tròn.

Mà $\widehat{DBI} = \widehat{ICE} \Rightarrow ID = IE \Rightarrow I$ thuộc đường trung trực của đoạn DE. (7)

Từ (6) và (7) suy ra $P,\ I,\ Q$ là ba điểm thẳng hằng.

Câu 25. **(Trường chuyên tỉnh Hà nội chuyên toán năm 2019-2020)** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB < AC)$, nội tiếp đường tròn (O). Gọi điểm I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tia AI cắt đoạn thẳng BC tại điểm J, cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai M (M khác A).

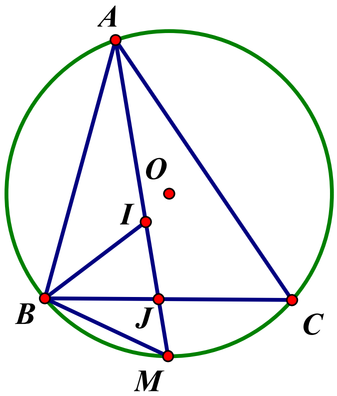
1) Chứng minh $MI^2 = MJ.MA$.

2) Kẻ đường kính MN của đường tròn (O). Đường thẳng AN cắt các tia phân giác trong của góc ABC và góc ACB lần lượt tại các điểm P và Q. Chứng minh N là trung điểm của đoạn thẳng PQ.

3) Lấy điểm E bất kỳ thuộc cung nhỏ MC của đường tròn (O) (E khác M). Gọi F là điểm đối xứng với điểm I qua điểm E. Gọi R là giao điểm của hai đường thẳng PC và QB. Chứng minh bốn điểm P, Q, R, F cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải

1.Chứng minh $MI^2 = MJ.MA$.



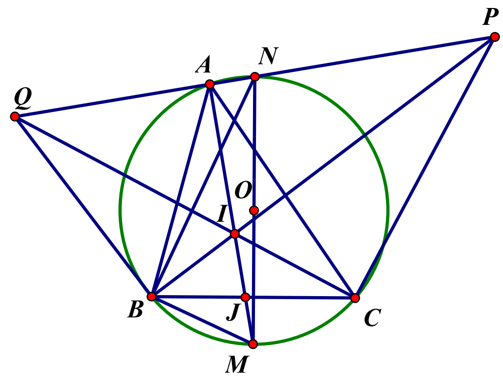
Chứng minh: $\widehat{MIB} = \frac{1}{2}\left(\overparen{BAC} + \overparen{ABC}\right)$

Chứng minh: $\widehat{MBI} = \frac{1}{2}\left(\overparen{BAC} + \overparen{ABC}\right) = \widehat{MIB} \Rightarrow MI = MB.$

Chứng minh: ΔMBJ đồng dạng với ΔMAB (g.g)

$\Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{MJ}{MB} \Rightarrow MI^2 = MJ.MA.$

2. **Kẻ đường kính MN của đường tròn (O). Đường thẳng AN cắt các tia phân giác trong của góc ABC và góc ACB lần lượt tại các điểm P và Q.** ***Chứng minh N là trung điểm PQ.***



Chứng minh $BQ \perp BP$

(Q là tâm bàng tiếp ΔABC)

$\Rightarrow$ tứ giác $BCPQ$ nội tiếp.

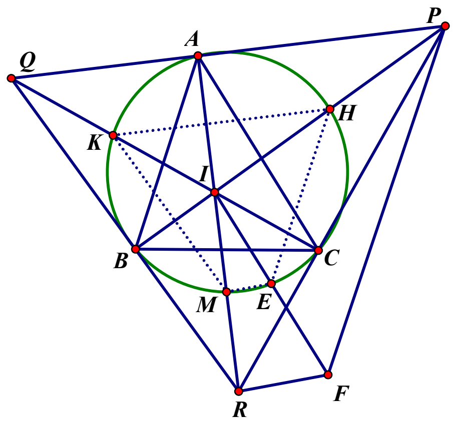
$\widehat{BNQ} = \widehat{BCA} = 2\widehat{BCQ} = 2\widehat{BPQ}$

$\Rightarrow \Delta BNP$ cân tại $N.$

Tương tự: ΔBNQ cân tại N

$\Rightarrow NP = NQ\left(= NB\right) \Rightarrow$ đpcm

3. **Lấy điểm E bất kỳ thuộc cung nhỏ MC của đường tròn (O) (E khác M). Gọi F là điểm đối xứng với điểm I qua điểm E. Gọi R là giao điểm của hai đường thẳng PC và QB.** ***Chứng minh bốn điểm P, Q, R, F cùng thuộc một đường tròn.***



PC cắt BQ tại R

$\Rightarrow$ ba điểm A, M, R thẳng hàng.

BP, CQ cắt (O) tại điểm thứ hai H, K.

Chứng minh: K là trung điểm IQ (chứng minh tương tự, H và M lần lượt là trung điểm IP và IR)

Theo tính chất đường trung bình:

$\widehat{HKM} = \widehat{PQR}$; $\widehat{HEM} = \widehat{PFR}$.

Tứ giác $KMEH$ nội tiếp $\Rightarrow$ tứ giác $PQRF$ nội tiếp $\Rightarrow$ đpcm.

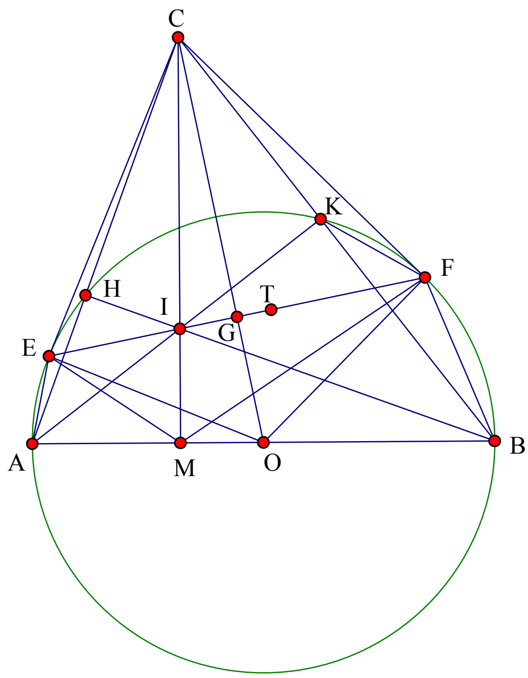
Câu 26. (Trường chuyên tỉnh Hà Tĩnh vòng 2 năm 2019-2020) Cho đường tròn (O ; R) đường kính AB, M là một điểm nằm trên đoạn AB (M không trùng A, B). Qua M kẻ đường thẳng (d) vuông góc với AB, trên (d) lấy điểm C nằm ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến CE, CF với đường tròn (E, F là tiếp điểm). Gọi H, K lần lượt là giao điểm của CA, CB với đường tròn, I là giao điểm của AK và BH.

a) Chứng minh MC là tia phân giác của góc EMF.

b) Chứng minh rằng ba điểm E, I, F thẳng hàng.

c) Xác định vị trí điểm C để tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nằm trên đường thẳng EF.

Lời giải



a) Theo tính chất tiếp tuyến và giả thiết có $\widehat{CEO} = \widehat{CFO} = \widehat{CMO} = 90^0$.

Từ đó 5 điểm O, C, M, E, F cùng nằm trên một đường tròn đường kính CO.

Từ đó có $\widehat{EMC} = \widehat{CMF}$ (do hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau).

b) Xét hai tam giác vuông CKI ; CMB, có góc C chung nên chúng đồng dạng

$\frac{CK}{CM} = \frac{CI}{CB} \Rightarrow CK.CB = CM.CI$ (1).

Xét hai tam giác CKF ; CFB có góc C chung và $\widehat{KFC} = \widehat{CBF}$ (chắn cung KF) nên chúng đồng dạng

$\frac{CK}{CF} = \frac{CF}{CB} \Rightarrow CK.CB = CF^2$ (2).

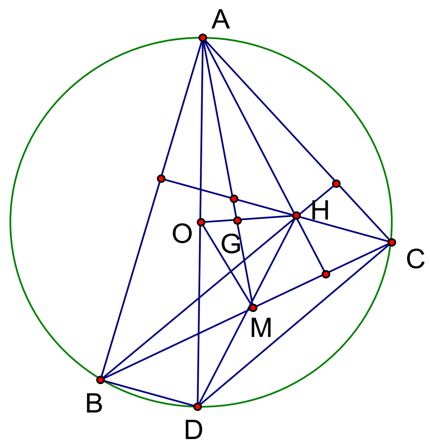
Từ (1) và (2) $\Rightarrow CM.CI = CF^2 \Rightarrow \frac{CI}{CF} = \frac{CF}{CM}$ nên Δ CIF đồng dạng với Δ CFM

$\Rightarrow \widehat{CFI} = \widehat{CMF}$ (3).

Lại có $\widehat{CEF} = \widehat{CMF}$ (chắn cung CF) và $\widehat{CEF} = \widehat{CFE}$ (tiếp tuyến kẻ từ C)

$\Rightarrow \widehat{CFE} = \widehat{CMF}$ (4).

Từ (3), (4) $\Rightarrow \widehat{CFI} = \widehat{CFE}$ nên 3 điểm I; E; F thẳng hàng.



c) Bổ đề : Trong mỗi tam giác trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp là ba điểm thẳng hàng.

Chứng minh

Xét tam giác ABC có trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp lần lượt là H, O (hình vẽ). Gọi M trung điểm BC, đường kính AD. Ta có:

- Tứ giác BHCD là hình bình hành nên M trung điểm DH. Suy ra OM là đường trung bình tam giác DAH.

- Gọi G giao AM và OH có $\frac{\mathrm{GA}}{\mathrm{GM}}=\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{OM}}=2 \Rightarrow \mathrm{AG}=2\mathrm{GM}$ nên G là trọng tâm tam giác ABC hay O, G, H thẳng hàng.

Ta có I là trực tâm của tam giác ABC, theo câu (b) có $I \in EF$.

Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, G là trọng tâm tam giác ABC.

Giả sử $T \in EF$ nên $G \in EF$ (theo bổ đề). Từ đó là G giao điểm của CO và EF.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông CEO ta có:

$$OE^2 = OG.OC = \frac{1}{3}OC^2 \Leftrightarrow OC^2 = 3R^2 \Leftrightarrow OC = R\sqrt{3}.$$

Ngược lại nếu $OC = R\sqrt{3}$, ta cần chứng minh $T \in EF \Leftrightarrow$ cần chứng minh $G \in EF$ (theo bổ đề).

Gọi G' là giao điểm của OC và EF.Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông EOC, ta có

$$OE^2 = OG'.OC = R^2 \Leftrightarrow OG' = \frac{OE^2}{OC} = \frac{R^2}{R\sqrt{3}} = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}OC.$$

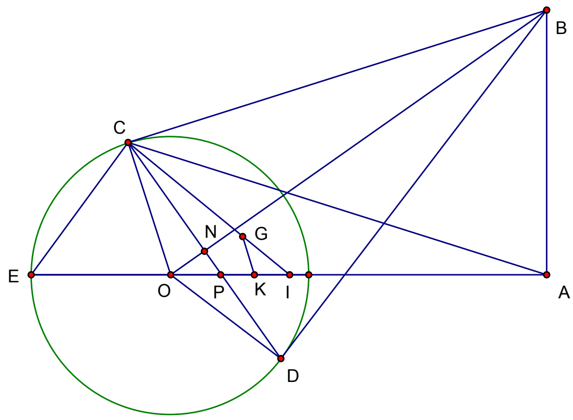
Vì OC là trung tuyến của tam giác ABC và G' nằm giữa A và C nên G' là trọng tâm tam giác ABC suy ra $G' \equiv G \Rightarrow G \in EF$.

Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC nằm trên đường thẳng EF khi điểm C thuộc (d) và $OC = R\sqrt{3}$.

Câu 27. (Trường chuyên tỉnh Hòa Bình Chuyên Tin năm 2019-2020) Cho đường tròn (O;R), A là một điểm cố định nằm ngoài đường tròn, qua A kẻ đường thẳng d vuông góc với OA. Từ điểm B thuộc đường thẳng d (B khác A) kẻ các tiếp tuyến BD, BC với đường tròn (O) (D, C là các tiếp điểm). Dây CD cắt OB tại N, cắt OA tại P.

1) Chứng minh rằng: $OA.OP = OB.ON = R^2$
2) Gọi E là giao điểm của AO với đường tròn (O) (O nằm giữa A và E). Khi B di chuyển trên đường thẳng d, chứng minh trọng tâm G của tam giác ACE chạy trên một đường tròn cố định.

Lời giải



1..Chỉ ra $\widehat{ONP} = 90^0$ từ đó suy ra ΔONP đồng dạng tam giác ΔOAB

Suy ra $OA.OP = OB.ON$

Xét tam giác OCB vuông tại C có đường cao CN nên $OB.ON = OC^2 = R^2$

2..Ta có E, O, A cố định, gọi I là trung điểm AE suy ra điểm I cố định

Từ G kẻ GK song song với OC suy ra $\frac{IK}{IO} = \frac{1}{3}$ nên điểm K cố định

Mà $\frac{GK}{OC} = \frac{1}{3} \Rightarrow GK = \frac{R}{3}$

Vậy điểm G thay đổi luôn thuộc đường tròn tâm K bán kính $\frac{R}{3}$ không đổi

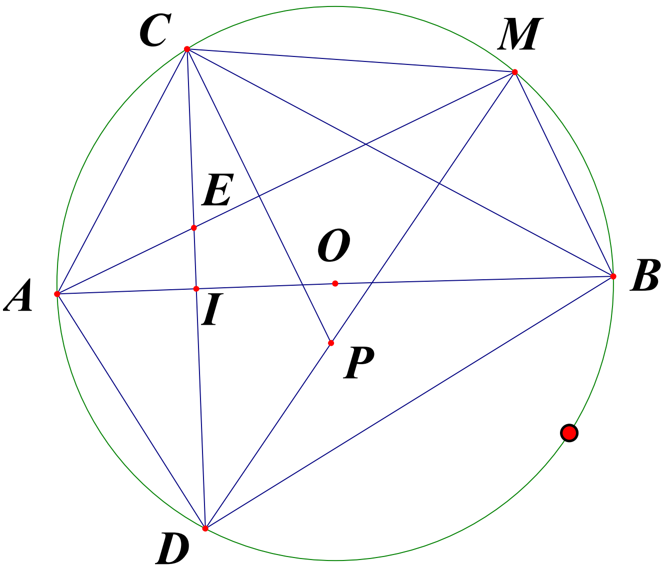
Câu 28. (Trường chuyên tỉnh Hòa Bình Chuyên Toán năm 2019-2020) Cho đường tròn (O) có đường kính $AB = 2R$, I là trung điểm của đoạn OA và dây CD vuông góc với OA tại I. Gọi M là điểm tùy ý trên cung nhỏ BC, E là giao điểm của AM và CD.

1)Chứng minh rằng: $AE.AM = R^2$

2)Tính số đo góc $\widehat{BCD}$

3)Xác định vị trí của M để tổng ($MB + MC + MD$) đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



1..Ta có $\Delta AIE \sim \Delta AMB (g-g) \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AI}{AM} \Rightarrow AE.AM = AB.AI = 2R.\frac{R}{2} = R^2$

2..Vì I là trung điểm của CD mà $BI \perp CD = \{I\}$ suy ra ΔCBD cân tại B

Ta có CI = $\frac{R\sqrt{3}}{2}$; BI = $\frac{3R}{2}$ vậy $\frac{BI}{CI} = \sqrt{3} = \tan \widehat{BCD} \Rightarrow \widehat{BCD} = 60^0$

3..Hoc sinh lập luận để chỉ ra MC < MD

Trên đoạn MD lấy điểm P sao cho MC = MP

Ta có tam giác MCP đều ($\widehat{CBD} = \widehat{CMP} = 60^0$)

Xét ΔCMB và ΔCPD có CM = CP, $\widehat{MCB} = \widehat{DCP} = 60^0 - \widehat{BCP}$;CB = CD

Suy ra $\Delta CMB = \Delta CPD$ (c-g-c) nên DK = BM.

Khi đó MB +MC +MD = MD +MK +DK = 2 MD ≤ 4R

Dấu đẳng thức xảy ra khi D,O, M thẳng hàng.

Câu 29. (Trường chuyên tỉnh Hòa Bình dành cho tất cả các thí sinh năm 2019-2020) Cho đường tròn (O) đường kính AB, điểm I nằm giữa hai điểm A và O (I khác A và O). Kẻ đường thẳng vuông góc với AB tại I, đường thẳng này cắt đường tròn (O) tại M và N. Gọi S là giao điểm của hai đường thẳng BM và AN, qua S kẻ đường thẳng song song với MN, đường thẳng này cắt các đường thẳng AB và AM lần lượt tại K và H.

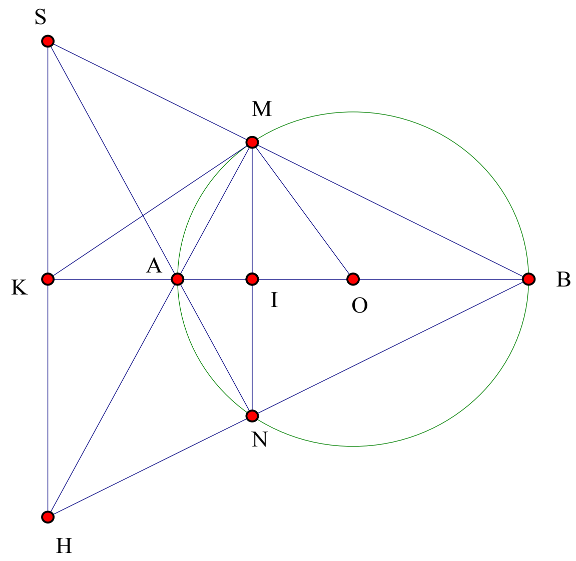
1)Chứng minh rằng tứ giác $SKAM$ nội tiếp.

2)Chứng minh rằng $SA.SN = SB.SM$

3)Chứng minh rằng KM là tiếp tuyến của đường tròn (O).

4)Chứng minh rằng 3 điểm H, N, B thẳng hàng.

Lời giải



1).Xét tứ giác SKAM có $\widehat{SKA}=90^0$, $\widehat{SMA}=\widehat{AMB}=90^0$ $\Rightarrow \widehat{SKA}+\widehat{SMA}=180^0$

vậy tứ giác SKAM nội tiếp đương tròn đường kính SA.

2).Xét tam ΔSAB và ΔSMN có góc $\hat{S}$ chung, có góc $\widehat{SBA}=\widehat{SNM}=\dfrac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{AM}$

Vậy $\Delta SAB\sim\ \Delta SMN$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{SA}{SB}=\dfrac{SM}{SN}\Rightarrow SA.SN=SB.SN$.

3).Ta có $\widehat{MBA}=\widehat{MNA}=\dfrac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{AM};\widehat{MNA}=\widehat{NSK}\ (slt)$

Lại có $\widehat{KMA}=\widehat{KSA}=\dfrac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{KA}$. Suy ra $\widehat{KMA}=\widehat{MBA}=\widehat{OMB}$

Mà $\widehat{OMB}+\widehat{OMA}=90^0\Rightarrow \widehat{KMA}+\widehat{OMA}=90^0$ chứng tỏ KM là tiếp tuyến của (O)

4).Ta có H đối xứng với S qua BK , N đối xứng với M qua BK

Mà S, M, B thẳng hàng

Suy ra H, N, B thẳng hàng .

Câu 30. (Trường chuyên tỉnh Hưng Yên Vòng 2 năm 2019-2020) Cho đường tròn (O), bán kính R, ngoại tiếp tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi AA_1, BB_1, CC_1 là các đường cao của tam giác ABC (A_1 thuộc BC, B_1 thuộc CA, C_1 thuộc AB). Đường thẳng A_1C_1 cắt đường tròn (O) tại A' và C' (A_1 nằm giữa A' và C_1). Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A' và C' cắt nhau tại B'.

a) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng $HC_1.A_1C=A_1C_1.HB_1$.

b) Chứng minh rằng ba điểm B, B', O thẳng hàng.

c) Khi tam giác ABC là tam giác đều, hãy tính $A'C'$ theo R.

Lời giải

a) Hai tam giác AB_1H và AA_1C có $\angle AB_1H=\angle AA_1C=90^0$ và chung góc $\angle HAB_1$ nên đồng dạng với nhau (g-g). Từ đó suy ra $\dfrac{HB_1}{A_1C}=\dfrac{AH}{AC}$. (1)

Tứ giác AC_1A_1C có $\angle AC_1C = \angle AA_1C = 90^0$ nên nội tiếp.

Suy ra $\angle HC_1A_1 = \angle CAH$ (cùng chắn cung A_1C của đường tròn (AC_1A_1C)) và $HA_1C_1 = \angle HCA$ (cùng chắn cung AC_1 của đường tròn (AC_1A_1C)).

Từ đó, ta có $\Delta C_1A_1H \# \Delta ACH$ (g-g). Suy ra $\frac{HC_1}{A_1C_1} = \frac{HA}{AC}$. (2)

Từ (1) và (2), ta được $\frac{HB_1}{A_1C} = \frac{HC_1}{A_1C_1}$ hay $HB_1.A_1C_1 = HC_1.A_1C$.

Đây chính là kết quả cần chứng minh.

b) Theo tính chất của tiếp tuyến, ta có $OB' \perp A'C'$. (3)

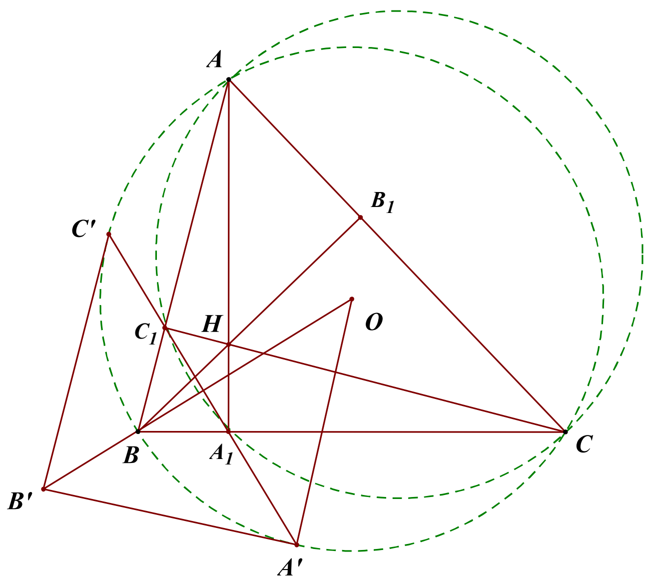
Ta sẽ chứng minh $OB \perp A'C'$, hay $OB \perp A_1C_1$.

Do tam giác OBC cân tại O nên $\angle OBA_1 = \frac{180^0 - \angle BOC}{2} = \frac{180^0 - 2\angle BAC}{2} = 90^0 - \angle BAC$.

Mặt khác, do tứ giác AC_1AC nội tiếp nên $\angle C_1A_1B = \angle BAC$ (cùng bù với $\angle C_1A_1C$).

Kết hợp với kết quả ở trên, ta được $\angle OBA_1 + \angle C_1A_1B = 90^0 - \angle BAC = 90^0$.

Do đó $OB \perp A_1C_1$, hay $OB \perp A'C'$. Kết hợp với (3), ta suy ra B, B', O thẳng hàng.



c) Khi tam giác ABC đều thi BO đi qua B_1, B_1 là trung điểm của AC và $A'C' \perp BO$.

Gọi K là giao điểm BO và $A'C_1$ thì K là trung điểm của $A'C'$.

Do tam giác AB_1C_1 đều và $OB \perp A_1C_1$ nên K cũng là trung điểm của A_1C_1.

Do tam giác ABC đều nên O cũng là trọng tâm của tam giác. Suy ra $OC_1 = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}R$.

Mặt khác, sử dụng hệ thức lượng trong tam giác OC_1B vuông tại C_1 có C_1K là đường cao, ta có $OC_1^2 = OK.OB$. Suy ra $OK = \frac{OC_1^2}{OB} = \frac{1}{4}R$.

Từ đây, sử dụng định lý Pythagoras trong tam giác $A'KO$ vuông tại K, ta có

$$A'K = \sqrt{OA'^2 - OK^2} = \sqrt{R^2 - \frac{1}{16}R^2} = \frac{R\sqrt{15}}{4}.$$

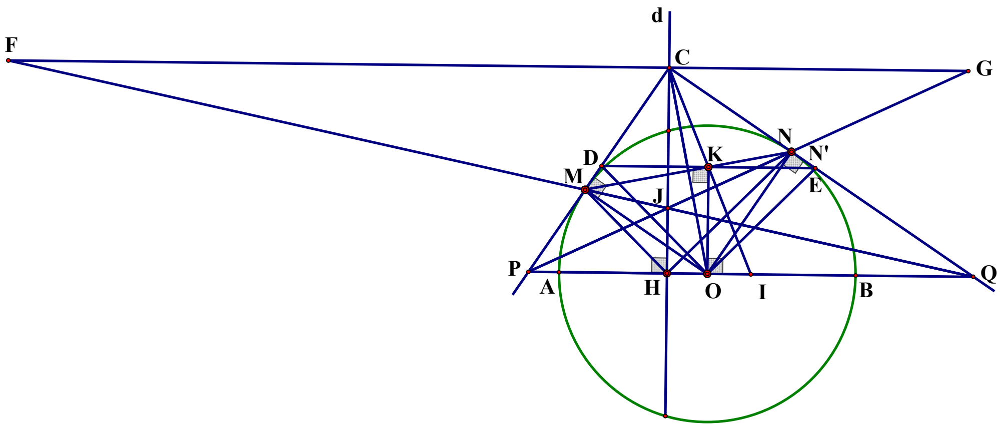
Vậy $A'C' = 2A'K = \frac{R\sqrt{15}}{4}$.

Câu 31. (Trường chuyên tỉnh Hải Dương chuyên toán năm 2019-2020)Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên đoạn thẳng AO lấy điểm H bất kì (H không trùng với A và O), kẻ đường thẳng d vuông góc với AB tại H, trên d lấy điểm C nằm ngoài đường tròn (O), từ C kẻ hai tiếp tuyến CM và CN với đường tròn (O) (M, N là các tiếp điểm và M thuộc nửa mặt phẳng bờ d có chứa điểm A). Gọi P và Q lần lượt là giao điểm của các đường thẳng CM, CN với đường thẳng AB. Đường thẳng đi qua O và vuông góc với AB cắt MN tại K. Qua K kẻ đường thẳng song song với AB, cắt CP và CQ lần lượt tại D và E.

1) Chứng minh tứ giác OMDK là tứ giác nội tiếp và HC là tia phân giác của $\widehat{MHN}$

2) Đường thẳng CK cắt đường thẳng AB tại I. Chứng minh I là trung điểm của PQ.
3) Chứng minh ba đường thẳng PN, QM và CH đồng quy.

Lời giải



1) Chứng minh tứ giác OMDK là tứ giác nội tiếp và HC là tia phân giác của $\widehat{MHN}$

Vì CM là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M $\Rightarrow$ OM $\perp$ CM

$\Rightarrow \widehat{OMD} = 90^0$. Tương tự ta có $\widehat{ONC} = 90^0$

Vì OK $\perp$ AB mà AB // DE $\Rightarrow$ OK $\perp$ DE $\Rightarrow \widehat{OKD} = 90^0$

Xét tứ giác OMDK có $\widehat{OMD} + \widehat{OKD} = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác OMDK là tứ giác nội tiếp.

Chứng minh tứ giác OCMH và tứ giác ONCH là các tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow$ 5 điểm O, H, M, C, N cùng thuộc một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{MNC}$ và $\widehat{NHC} = \widehat{NMC}$

Mà $\widehat{CMN} = \widehat{CNM}$ (vì Δ CMN cân tại C)

$\Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{NHC} \Rightarrow$ HC là tia phân giác của $\widehat{MHN}$

2) Đường thẳng CK cắt đường thẳng AB tại I. Chứng minh I là trung điểm của PQ.

Vì tứ giác OMDK là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OMK} = \widehat{ODK}$

Chứng minh tứ giác OKNE là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OEK} = \widehat{ONK}$

Mà $\widehat{OMK} = \widehat{ONK}$ (Vì Δ OMN cân tại O) $\Rightarrow \widehat{ODK} = \widehat{OEK}$

$\Rightarrow$ Δ ODE cân tại O mà OK $\perp$ DE $\Rightarrow$ K là trung điểm của DE.

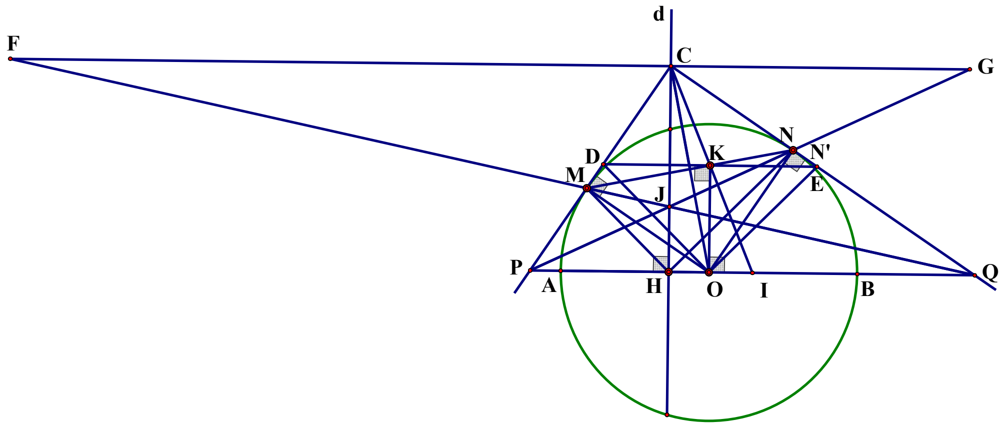
Vì DK // PI $\Rightarrow \dfrac{CK}{CI} = \dfrac{DK}{PI}$

Vì EK // QI $\Rightarrow \dfrac{CK}{CI} = \dfrac{EK}{QI}$

$\Rightarrow \dfrac{EK}{QI} = \dfrac{DK}{PI}$ mà EK = DK $\Rightarrow$ QI = PI

$\Rightarrow$ I là trung điểm của PQ.

3) Chứng minh ba đường thẳng PN, QM và CH đồng quy.



Gọi QM cắt CH tại J. Qua C kẻ đường thẳng song song với PQ, cắt đường thẳng QM tại F. Gọi đường thẳng PJ cắt đường thẳng FC tại G và cắt đường thẳng CQ tại N'. Ta chứng minh $N \equiv N'$

Xét Δ PMO và Δ PHC có $\widehat{CPH}$ chung và $\widehat{PMO} = \widehat{PHC} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta PMO \sim \Delta PHC \Rightarrow \dfrac{PH}{PM} = \dfrac{CH}{OM}$

Tương tự ta có Δ QON $\sim$ Δ QCH

$\Rightarrow \Delta QON \sim \Delta QCH \Rightarrow \dfrac{ON}{CH} = \dfrac{QN}{QH}$

Mà OM = ON, CM = CN nên

$\dfrac{PH}{HQ}.\dfrac{QN}{CN}.\dfrac{CM}{MP} = \dfrac{PH}{PM}.\dfrac{QN}{QH}.\dfrac{CM}{CN} = \dfrac{CH}{OM}.\dfrac{ON}{CH}.\dfrac{CM}{CN} = 1$ (4)

Vì FG // PQ $\Rightarrow \dfrac{PH}{CG}=\dfrac{HQ}{CF};\dfrac{QN'}{N'C}=\dfrac{PQ}{CG};\dfrac{CM}{MP}=\dfrac{CF}{PQ}$

$\Rightarrow \dfrac{PH}{HQ}.\dfrac{QN'}{N'C}.\dfrac{CM}{MP}=\dfrac{CG}{CF}.\dfrac{PQ}{CG}.\dfrac{CF}{PQ}=1(5)$

Từ (4) và (5) suy ra $\dfrac{PH}{HQ}.\dfrac{QN}{CN}.\dfrac{CM}{MP}=\dfrac{PH}{HQ}.\dfrac{QN'}{N'C}.\dfrac{CM}{MP}=1$

$\Rightarrow \dfrac{QN}{CN}=\dfrac{QN'}{N'C}\Rightarrow \dfrac{QN}{CN}+1=\dfrac{QN'}{N'C}+1\Rightarrow \dfrac{QC}{CN}=\dfrac{QC}{N'C}$

$\Rightarrow$ CN = CN’ $\Rightarrow$ $N\equiv N'$

$\Rightarrow$ PJ đi qua N mà CH, QM cùng đi qua J

$\Rightarrow$ PN, QM, CH đồng quy tại J.

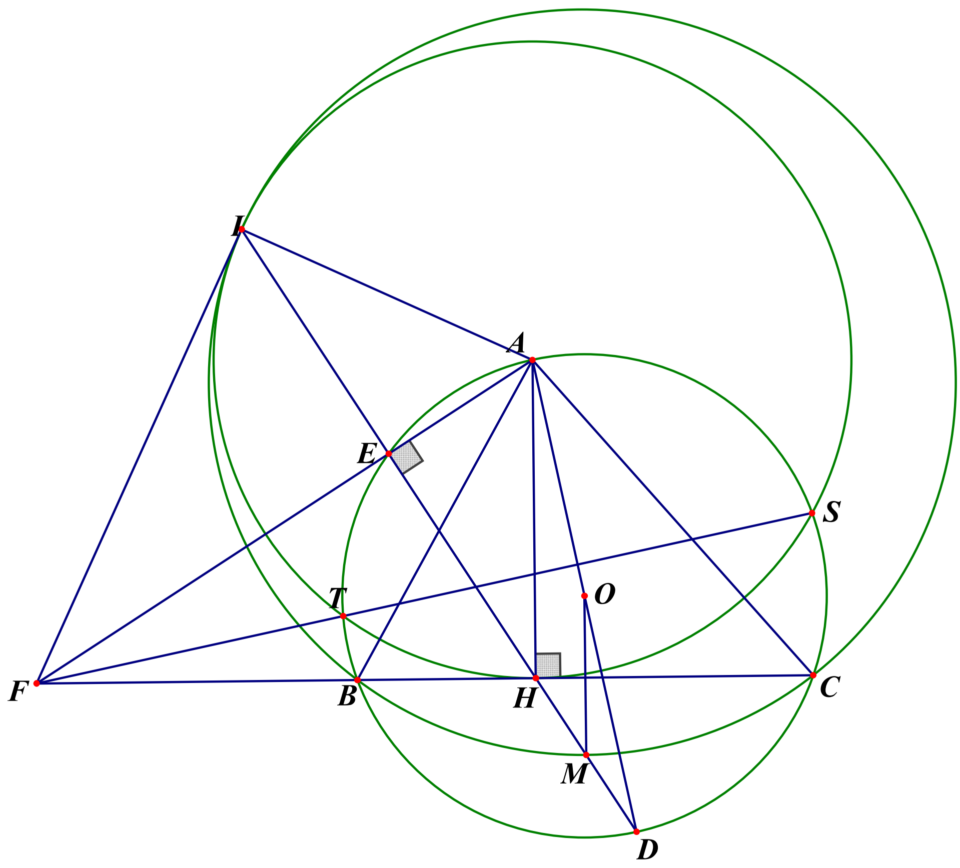
Câu 32. (Trường chuyên tỉnh Hải phòng vòng 2 năm 2019-2020) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) $(AB<AC)$. Kẻ đường cao $AH\left(H\in BC\right)$ của tam giác ABC và kẻ đường kính AD của đường tròn (O).

a) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng DH. Chứng minh OM là đường trung trực của đoạn thẳng BC.

b) Gọi S,T là các giao điểm của đường tròn (O) với đường tròn tâm A bán kính AH; F là giao điểm của ST và BC. Từ A kẻ đường thẳng vuông góc với DH tại E. Chứng minh $FB.FC=FH^2$ và ba điểm F,E,A thẳng hàng.

c) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM tiếp xúc với đường tròn tâm A bán kính AH.

Lời giải



a)

Ta có $OM // AH$ (Tính chất đường trung bình). Mà $AH \perp BC \Rightarrow OM \perp BC$.

$\Rightarrow OM$ là đường trung trực đoạn thẳng BC (đpcm)..

b)

$\Delta FTB \backsim \Delta FCS\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{FT}{FC} = \dfrac{FB}{FS} \Rightarrow FB.FC = FT.FS$ (1)..

FH là tiếp tuyến của đường tròn tâm A bán kính AH $\Rightarrow FT.FS = FH^2$ (2)..

Từ (1) và (2) $\Rightarrow FB.FC = FH^2$..

Gọi E' là giao điểm của FA với $(O) \Rightarrow FE'.FA = FH^2 \Rightarrow \Delta FE'H \backsim \Delta FHA\left(c.g.c\right)$

$\Rightarrow \widehat{FE'H} = \widehat{FHA} = 90^0 \Rightarrow HE' \perp AF$. Mà $DE' \perp AF \Rightarrow \overline{E';H;D} \Rightarrow E \equiv E'$; đpcm..

c)

Gọi I là điểm đối xứng với H qua E. Ta có AF là trung trực của đoạn thẳng HI nên $FH = FI$ và $AH = AI$, nghĩa là I thuộc đường tròn tâm A bán kính AH..

$\Delta AFI = \Delta AFH\left(c.c.c\right) \Rightarrow \widehat{AIF} = \widehat{AHF} = 90^0 \Rightarrow FI$ tiếp xúc với đường tròn tâm A bán kính AH tại I (2)..

$\Delta HBE \backsim \Delta HDC\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{HB}{HD} = \dfrac{HE}{HC} \Rightarrow HB.HC = HD.HE = 2HM.\dfrac{1}{2}HI = HM.HI$

$\Rightarrow \Delta HBI \backsim \Delta HMC\left(c.g.c\right) \Rightarrow \widehat{HBI} = \widehat{HMC} \Rightarrow$ tứ giác $IBMC$ nội tiếp..

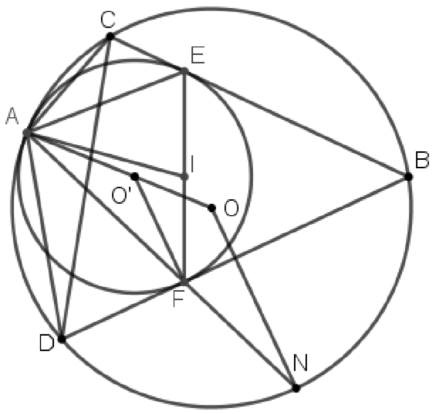
Lại có $FI^2 = FB.FC$ (cùng bằng FH^2) $\Rightarrow FI$ tiếp xúc với đường tròn $(IBMC)$ tại I. Kết hợp với (2) suy ra đpcm..

Câu 33. (Trường chuyên tỉnh Hậu Giang chuyên toán năm 2019-2020) Cho đường tròn (O') tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại điểm A. Các dây cung BC, BD của đường tròn (O) tiếp xúc với (O') theo thứ tự tại E và F. Gọi I là giao điểm của EF với tia phân giác của $\widehat{CAD}$.

a) Chứng minh rằng $\widehat{DAF} = \frac{1}{2}\widehat{DCB}$.

b) Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD.

Lời giải



a) Gọi N là giao điểm thứ hai của FA và (O).

Dễ thấy $\widehat{O'FA} = \widehat{ONA}$ (do $\Delta O'FA$ cân tại O' và do ΔOAN cân tại O).

Suy ra $O'F$ song song với ON.

Mà $O'F \perp BD$ (do BD là tiếp tuyến của (O')) nên $ON \perp BD$.

Suy ra N là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{BD}$ nên $\widehat{DON} = \widehat{BON}$ (1)

Ta có $\widehat{DAF} = \frac{1}{2}\widehat{DON}$ (2)

Từ (1), ta suy ra $\widehat{DCB} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{DB} = \widehat{DON}$ (3)

Từ (2) và (3), ta suy ra $\widehat{DAF} = \frac{1}{2}\widehat{DCB}$ (điều phải chứng minh)

b) Đặt $\widehat{CBD} = \alpha$. Ta có $\widehat{CAD} = 180^0 - \alpha$ và $\widehat{IAD} = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$.

Tam giác BEF cân tại B nên $\widehat{BEF} = \widehat{BFE} = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$.

Do đó $\widehat{IAD} = \widehat{IAC} = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$.

Ta lại có $\widehat{EAF} = \widehat{BFE}$ (cùng có số đo bằng nửa số đo của cung EF) nên $\widehat{IAD} = \widehat{EAF}$.

Suy ra $\widehat{DAF} = \widehat{IAE}$.

Do $\widehat{IAC} = \widehat{BEF}$ nên $IACE$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\widehat{IAE} = \widehat{ICE}$ (1)

Theo kết quả trên, ta có $\widehat{DAF} = \dfrac{1}{2}\widehat{DCB}$ và $\widehat{DAF} = \widehat{IAE}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ICE} = \dfrac{1}{2}\widehat{DCB}$

Do đó CI là tia phân giác của góc $\widehat{DCB}$.

Tương tự, DI là tia phân giác của góc $\widehat{CDB}$.

Vậy I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD.

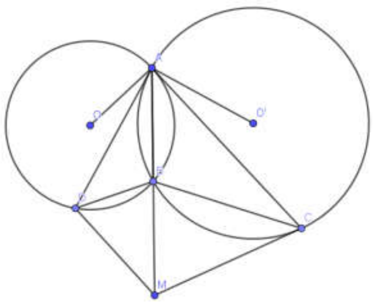
Câu 34. (Trường chuyên tỉnh Khánh Hòa Vòng 2 năm 2019-2020) Cho hai đường tròn (O) và (O') không cùng bán kính, cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Các tiếp tuyến tại A của (O) và (O') cắt (O') và (O) lần lượt tại C và D. Trên đường thẳng AB lấy M sao cho B là trung điểm đoạn AM.

a) Chứng minh hai tam giác ABD và CBA đồng dạng

b) Chứng minh $MB^2 = BD.BC$

c) Chứng minh $ADMC$ là tứ giác nội tiếp

Lời giải



a) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CBA$. Có:

$\widehat{ADB} = \widehat{CAB}$ (Góc nội tiếp và góc tạo bởi tt và dây chắn $\overset\frown{AB}$ của (O))

$\widehat{DAB} = \widehat{ACB}$ (Góc nội tiếp và góc tạo bởi tt và dây chắn $\overset\frown{AB}$ của (O'))

$\Rightarrow \triangle ABD$ đồng dạng $\triangle CBA$ (g.g)

b) Vì $\triangle ABD$ đồng dạng $\triangle CBA$ (câu a)

Nên: $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{BC}{AB}$ hay $AB^2 = BD.BC$

Mà: B là trung điểm AM $\Rightarrow MB^2 = AB^2 = BD.BC$ (đpcm)

c) Có: $\widehat{MBD} = \widehat{BAD} + \widehat{BDA}$ (Góc ngoài $\triangle ABD$)

$\widehat{MBC} = \widehat{BAC} + \widehat{BCA}$ (Góc ngoài $\triangle ABC$)

Mà: $\widehat{BAD} = \widehat{BCA}$ và $\widehat{BDA} = \widehat{BAC}$ (ở câu a)

Nên: $\widehat{MBD} = \widehat{MBC}$. Lại có: $MB^2 = BD.BC \Leftrightarrow \dfrac{MB}{BD} = \dfrac{BC}{MB}$

Suy ra: $\triangle BDM \backsim \triangle BMC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{BDM} = \widehat{BMC}$.

Xét tứ giác ADMC có:

$$\widehat{A} + \widehat{M} = \widehat{BAD} + \widehat{BAC} + \widehat{M}$$
$$\Leftrightarrow \widehat{A} + \widehat{M} = \widehat{BAD} + \widehat{BDA} + \widehat{M}$$
$$\Leftrightarrow \widehat{A} + \widehat{M} = \widehat{DBM} + \widehat{BMD} + \widehat{BMC}$$
$$\Leftrightarrow \widehat{A} + \widehat{M} = 180^0 - \widehat{BDM} + \widehat{BMC}$$
$$\Leftrightarrow \widehat{A} + \widehat{M} = 180^0$$

Vậy: ADMC là tứ giác nội tiếp.

Câu 35. (Trường chuyên tỉnh Kon Tum cho tất cả các thí sinh năm 2019-2020) Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên đường thẳng AB lấy điểm C sao cho B nằm giữa A, C. Kẻ tiếp tuyến CK với đường tròn (O) (K là tiếp điểm), tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng CK tại H. Gọi I là giao điểm OH và AK, J là giao điểm của BH với đường tròn (O) (J không trùng với B).

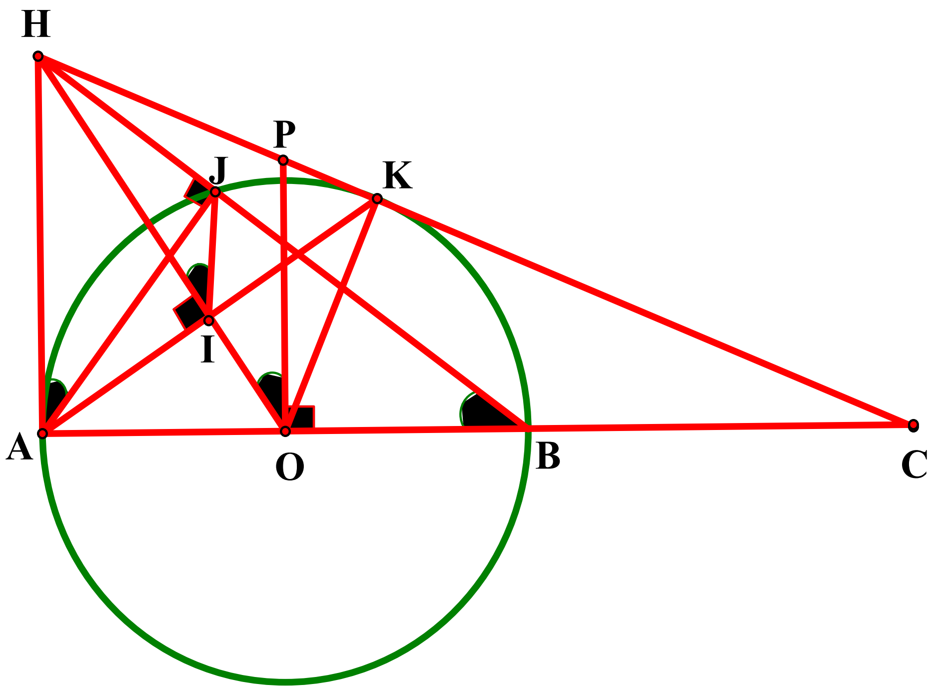
a) Chứng minh $AJ.HB = AH.AB$.

b) Chứng minh 4 điểm B, O, I, J cùng nằm trên một đường tròn.

c) Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt CH tại P. Tính $\dfrac{AH}{HP} - \dfrac{HP}{CP}$.

Lời giải

Hình vẽ



a)

Chứng minh : Chứng minh $AJ.HB = AH.AB$.

ΔAHB vuông tại A (giả thiết AH là tiếp tuyến của đường tròn)

$\widehat{AJB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn *(O)*).

suy ra AJ là đường cao của tam giác AHB.

Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông AHB ta có

$AJ.HB = AH.AB$..

b).Chứng minh 4 điểm B, O, I, J cùng nằm trên một đường tròn.

Vì OH là đường trung trực của đoạn thẳng AK (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) nên OH vuông góc với $AK \Rightarrow \widehat{HIA} = 90^0$

Ta lại có $\widehat{HJA} = 90^0$ => tứ giác $AIJH$ nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow \widehat{JAH} = \widehat{JIH}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung *JH*).

Mặt khác $\widehat{JAH} = \widehat{ABH}$ (do cùng phụ với góc $\widehat{AHB}$)

$\Rightarrow \widehat{JIH} = \widehat{ABH}$.

Mà $\widehat{JIH} + \widehat{JIO} = 180^0 \Rightarrow \widehat{ABH} + \widehat{JIO} = 180^0$

Vậy 4 điểm *B, O, I, J* cùng nằm trên một đường tròn..

c).Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt CH tại P. Tính $\frac{AH}{HP} - \frac{HP}{CP}$..

Ta có $OP // AH$ (vì cùng vuông góc với AB)

$\Rightarrow \widehat{AHO} = \widehat{HOP}$ (so le trong)

Mà $\widehat{AHO} = \widehat{OHK}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \widehat{OHK} = \widehat{HOP}$

Suy ra tam giác HOP cân tại H => $HP = OP$ (**).

Áp dụng định lý Ta let trong tam giác AHC ta có : $\frac{AH}{OP} = \frac{CH}{CP}$.

$$\Rightarrow \frac{AH - OP}{OP} = \frac{CH - CP}{CP}.$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{OP} - 1 = \frac{HP}{CP} \Rightarrow \frac{AH}{HP} - \frac{HP}{CP} = 1 \ (do\ (**)).$$

Câu 36. (Trường chuyên tỉnh Kon Tum vòng 2 năm 2019-2020) Cho đường tròn $(O;R)$ có đường kính AB cố định và đường kính CD thay đổi sao cho CD

không vuông góc cũng không trùng với AB. Gọi d là tiếp tuyến tại A của $(O;R)$. Các đường thẳng BC

và BD cắt d tương ứng tại E và F

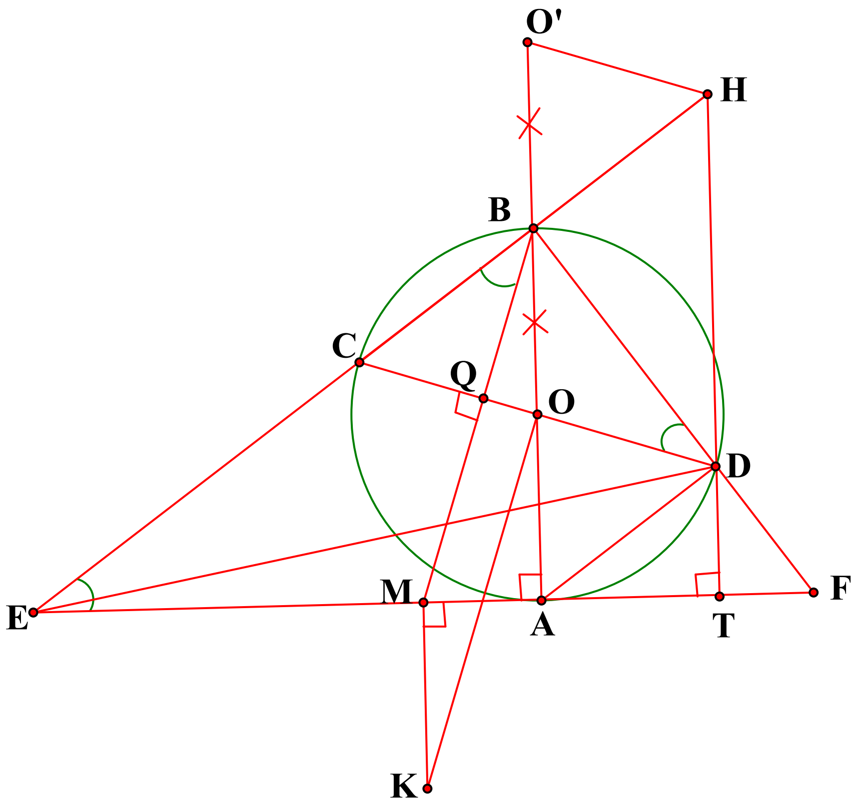
1. Chứng minh rằng $CDFE$ là tứ giác nội tiếp.

2. Gọi M là trung điểm của EF và K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDEF$. Chứng minh

rằng tứ giác $KMBO$ là hình bình hành.
3. Gọi H là trực tâm tam giác DEF, chứng minh H luôn chạy trên một đường tròn cố định.

Lời giải

Hình vẽ



1).Vì CD là đường kính nên $\widehat{CBD}=90^0$

Do đó $\widehat{BEF}=\widehat{ABF}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc cùng nhọn)

Mà $\widehat{ABF}=\widehat{ODB}$ $(OB=OD=R)$

Nên $\widehat{BEF}=\widehat{ODB}$. Do đó tứ giác $CDFE$ nội tiếp đường tròn

2).Gọi Q là giao điểm của BM và CD

Tam giác BEF vuông tại B nên $BM=ME\Rightarrow\widehat{MBE}=\widehat{MEB}$ (1)

Tam giác BCD vuông tại B nên $\widehat{BCD}+\widehat{BDC}=90^0$ mà $\widehat{BDC}=\widehat{BEF}$

(chứng minh câu 1) nên $\widehat{BCD}+\widehat{BEF}=90^0$ (2)

Từ (1) và (2) : $\widehat{BCD}+\widehat{MBE}=90^0\Rightarrow\widehat{BQC}=90^0$ hay $BM\perp CD$

K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDFE$, O là trung điểm CD, nên $KO\perp CD\Rightarrow KO//MB$ (cùng vuông góc với CD) (3)

Ta có M là trung điểm EF, nên $KM\perp EF$ và $BA\perp EF$

$\Rightarrow KM//AB$ hay KM/BO (4)

Từ (3) và (4) suy ra $KMBO$ là hình bình hành

3). H là trực tâm tam giác DEF, do đó $HD \perp EF$, suy ra $HD // AB$

Tương tự $BH // AD$ (cùng vuông góc BF)

Do đó $BHDA$ là hình bình hành nên $BH = AD$

Mặt khác $BDAC$ là hình chữ nhật nên $AD = BC \Rightarrow BH = BC$ (5)

Lấy O' đối xứng với O qua B ta có $BO' = BO$ (6) với O' cố định vì O, B cố định

Từ (5) và (6) suy ra HO'CO là hình bình hành nên O'H = OC = R

Vậy H chạy trên đường tròn cố định $(O'; R)$

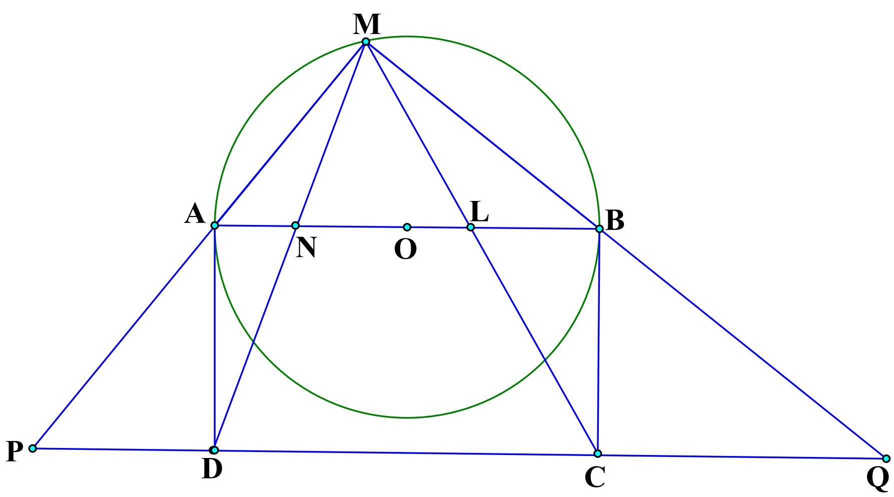
Câu 37. (Trường chuyên tỉnh Kon Tum vòng 2 năm 2019-2020) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2a, BC = a\sqrt{2}$. Lấy đoạn AB làm đường kính, dựng về

phía ngoài hình chữ nhật nửa đường tròn. Điểm M thuộc nửa đường tròn đó. Các đường thẳng MD, MC

cắt AB lần lượt tại N, L. Chứng minh $\dfrac{AL^2 + BN^2}{AB^2} = 1$.

Lời giải

Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2a, BC = a\sqrt{2}$. Lấy đoạn AB làm đường kính, dựng về phía ngoài hình chữ nhật nửa đường tròn. Điểm M thuộc nửa đường tròn đó. Các đường thẳng MD, MC cắt AB lần lượt tại N, L. Chứng minh $\dfrac{AL^2 + BN^2}{AB^2} = 1$.



Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của CD với MA và MB.

Đặt $PD = x; CQ = y$

Ta có : $\widehat{APD} = \widehat{QBC}$ (góc có cặp cạnh tương ứng vuông góc)

$$\Rightarrow \Delta APD \sim \Delta QBC \Rightarrow \frac{PD}{AD} = \frac{BC}{QC} \Leftrightarrow \frac{x}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{y} \Leftrightarrow xy = 2a^2$$

$$PC^2 + QD^2 = (x + 2a)^2 + (y + 2a)^2 = x^2 + y^2 + 4a(x + y) + 8a^2$$

$=(x+y)^2+4a(x+y)+8a^2-2xy$

$(x+y)^2+4a(x+y)+4a^2=(x+y+2a)^2=PQ^2$ (1)

Áp dụng định lý Tales, ta có : $\dfrac{MN}{MD}=\dfrac{ML}{MC}=\dfrac{MA}{MP}=\dfrac{MB}{MQ}=\dfrac{AL}{PC}=\dfrac{BN}{QD}=\dfrac{AB}{PQ}$

$\Rightarrow \dfrac{AL^2}{PC^2}=\dfrac{BN^2}{QD^2}=\dfrac{AB^2}{PQ^2}=\dfrac{AL^2+BN^2}{PQ^2+QD^2}=\dfrac{AL^2+BN^2}{PQ^2}$ (do (1))

$\Rightarrow AB^2=AL^2+BN^2 \Rightarrow \dfrac{AL^2+BN^2}{AB^2}=1.$

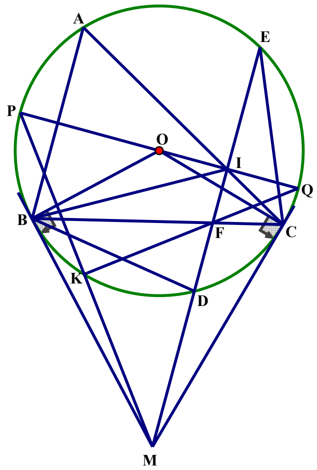
Câu 38. (Trường chuyên tỉnh Lào Cai Vòng 1 năm 2019-2020) Cho đường tròn (O) và điểm M nằm ngoài đường tròn (O). Kẻ hai tiếp tuyến MB, MC (B và C là các tiếp điểm) với đường tròn. Trên cung lớn BC lấy điểm A sao cho AB < AC. Từ điểm M kẻ đường thẳng song song với AB, đường thẳng này cắt đường tròn (O) tại D và E (MD < ME), cắt BC tại F, cắt AC tại I.

a)Chứng minh tứ giác MBOC nội tiếp.

b) Chứng minh FD. FE = FB. FC; FI. FM = FD. FE

c) Đường thẳng OI cắt đường tròn (O) tại P và Q (P thuộc cung nhỏ AB). Đường thẳng QF cắt đường tròn (O) tại K (K khác Q). Chứng minh 3 điểm P, K, M thẳng hàng.

Lời giải



a).Ta có: MB; MC thứ tự là các tiếp tuyến của đường tròn (O)

$\Rightarrow \widehat{MBO}=\widehat{MCO}=90^0$

Xét tứ giác MBOC có tổng hai góc đối: $\widehat{MBO}+\widehat{MCO}=90^0+90^0=180^0$

Suy ra tứ giác MBOC nội tiếp.

b). $\Delta FEC \sim \Delta FBD\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{FE}{FC}=\dfrac{FB}{FD} \Rightarrow FE.FD=FB.FC$

Vì AB//EM$\Rightarrow \widehat{FIC}=\widehat{BAC}$ (2 góc đồng vị)

Trong đường tròn (O), ta có: $\widehat{CBM}=\widehat{BAC}$ $(=\dfrac{1}{2}sd\,\overparen{BC})$

Suy ra: $\widehat{CIF}=\widehat{CBM}$

$\Delta IFC \sim \Delta BFM\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{FI}{FC} = \dfrac{FB}{FM} \Rightarrow FI.FM = FB.FC$ mà $FE.FD = FB.FC$ (cmt)

Suy ra: $FI.\ FM = FD.\ FE$

c)

Xét tứ giác CIBM, có hai đỉnh I và B kề nhau cùng nhìn cạnh MC dưới một góc không đổi: $\widehat{CIM} = \widehat{CBM}\ (cmt)$

$\Rightarrow$ tứ giác CIMB nội tiếp

Mà tứ giác COBM nội tiếp

Suy ra: 5 điểm C, I, O, B, M cùng thuộc một đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{OIM} = \widehat{OBM} = 90^0$

$\Delta FQC \sim \Delta FBK\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{FQ}{FC} = \dfrac{FB}{FK} \Rightarrow FQ.FK = FB.FC$

Mà $FI.FM = FB.FC\ (cmt)$

Suy ra: $FI.FM = FQ.FK$

$\Rightarrow \Delta FIQ \sim \Delta FKM\ (c.g.c) \Rightarrow \widehat{FKM} = \widehat{FIQ} = 90^0$

Lại có: $\widehat{PKQ} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đt (O))

Ta có: $\widehat{PKQ} + \widehat{FKM} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow$ 3 điểm P, K, M thẳng hàng.

Câu 39. *(Trường chuyên tỉnh Lâm Đồng vòng 2 năm 2019-2020)*

Cho đường tròn (O) đường kính BC. Điểm A thuộc đường tròn (O). Kẻ $AH \perp BC (H \in BC)$. Gọi I, K theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác AHB, AHC. Đường thẳng IK cắt AB, AC lần lượt tại M, N.

a)Chứng minh tam giác AMN vuông cân.

b)Chứng minh $S_{AMN} \le \dfrac{1}{2} S_{ABC}$ (S_{AMN}, S_{ABC} lần lượt là diện tích các tam giác AMN và ABC).

Lời giải

a)

Chứng minh được $\widehat{BAC} = 90^0$

Suy ra tam giác AMN vuông tại A

Gọi J là giao điểm của BI và CK.

Chứng minh được AJ là tia phân giác của góc MAN

Chứng minh được tam giác ADC cân tại C, suy ra được $KJ \perp AI$

Chứng minh được J là trực tâm tam giác AIK

Suy ra được $AJ \perp MN$

Chứng minh được tam giác AMN vuông cân tại A

Chứng minh được $\Delta AMI \sim \Delta AHI(\widehat{MAI} = \widehat{IAH}; \widehat{AMI} = \widehat{AHI} = 45^0)$

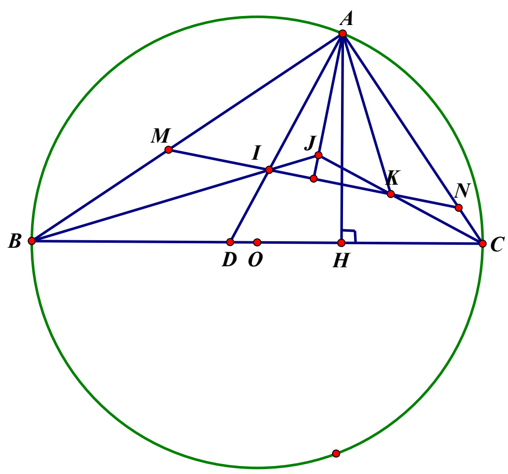
Suy ra được AM = AH

Chứng minh được $AH \le AO; AO = \frac{1}{2}BC$

Tỉnh được $S_{AMN} = \frac{1}{2}AM.AN = \frac{1}{2}AH^2$

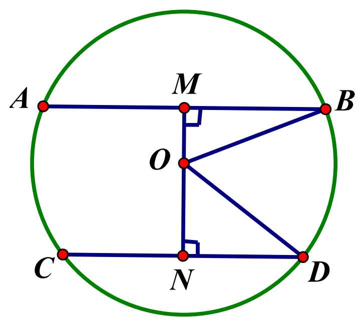
$S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC$

Suy ra được $S_{AMN} \le \frac{1}{2}S_{ABC}$



Câu 40. (Trường chuyên tỉnh Lâm Đồng vòng 2 năm 2019-2020) Cho đường tròn (O; R). Hai dây AB, CD song song với nhau sao cho tâm O nằm trong dải song song tạo bởi AB và CD. Biết khoảng cách giữa hai dây đó bằng 11 cm và $AB = 10\sqrt{3}\,cm,\ CD = 16\ cm$. Tính R.

Lời giải



Kẻ $OM \perp AB, ON \perp CD$. Chứng minh được M, O, N thẳng hàng

Sử dụng tính chất đường kính và dây tính được:

$MB = 5\sqrt{3}$ cm; $ND = 8$ cm

Gọi OM = x;

Dùng định lý Pytago được hệ thức:

$R^2 = (5\sqrt{3})^2 + x^2 = 8^2 + (11 - x)^2$

Tìm được x = 5 cm

Suy ra: R = 10cm

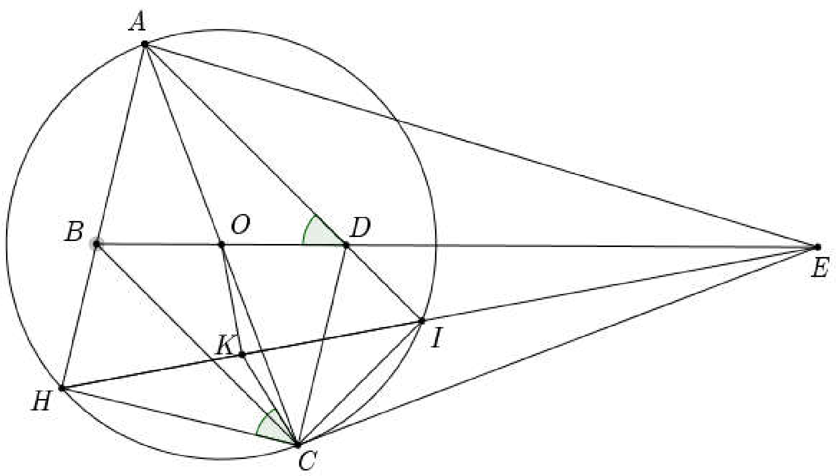
Câu 41. (Trường chuyên tỉnh Nam Định cho lớp chuyên KHTN năm 2019-2020) Cho hình bình hành $ABCD$ $(BD < AC)$. Đường tròn (O) đường kính AC cắt các tia AB, AD lần lượt tại H, I khác A. Trên dây HI lấy điểm K sao cho $\widehat{HCK} = \widehat{ADO}$. Tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt BD tại E (D nằm giữa B, E). Chứng minh rằng:

1) $\Delta CHK \# \Delta DAO$ và $HK = \dfrac{AO.KC}{OB}$.

2) K là trung điểm của đoạn HI.

3) $EI.EH + 4OB^2 < AE^2$.

Lời giải



.

1).Xét ΔCHK và ΔDAO, có $\widehat{HCK} = \widehat{ADO}$ và $\widehat{KHC} = \widehat{DAO}$.

nên $\Delta CHK \# \Delta DAO$ (g-g)..

Suy ra $\dfrac{HK}{AO} = \dfrac{KC}{DO}$. .

Mà $OB = OD$ suy ra $HK.OB = AO.KC \Rightarrow HK = \dfrac{AO.KC}{OB}$. .

2).Từ $ABCD$ là hình bình hành và O là trung điểm của AC suy ra B, O, D thẳng hàng, từ đó suy ra $\widehat{AOD} + \widehat{AOB} = 180^\circ$ (1) .

Mà $\widehat{IKC} + \widehat{HKC} = 180^\circ$ và $\widehat{AOD} = \widehat{HKC}$ (vì $\Delta CHK \# \Delta DAO$) kết hợp với (1) ta suy ra được $\widehat{AOB} = \widehat{IKC}$.

Chứng minh được $\Delta AOB \# \Delta IKC$ (vì $\widehat{AOB} = \widehat{IKC}, \widehat{BAO} = \widehat{KIC}$)

Suy ra $KI = \dfrac{AO.KC}{OB}$ (2) .

Từ câu 1, ta có $HK = \dfrac{AO.KC}{OB}$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra $HK = IK$ hay K là trung điểm của đoạn HI. .

3).Chứng minh được $\widehat{IKC} = \widehat{AOB} = \widehat{COE}$.

Ta có

$$\widehat{AOB} = \widehat{COE},\ \widehat{COE} + \widehat{OEC} = 90^\circ$$
$$\Rightarrow \widehat{OKC} + \widehat{OEC} = \widehat{OKI} + \widehat{IKC} + \widehat{OEC} = \widehat{OKI} + \widehat{COE} + \widehat{OEC} = 180^\circ$$

Chứng minh tứ giác $CKOE$ nội tiếp đường tròn..

Suy ra được $\widehat{OKE} = \widehat{OEC} = 90^\circ$ từ đó suy ra $EK \perp OK$, kết hợp với $IK \perp OK$.

Nên 4 điểm H, K, I, E thẳng hàng..

Chứng minh $\Delta ECI \# \Delta EHC$ (vì $\widehat{HEC}$ chung, $\widehat{ECI} = \widehat{EHC}$)

Từ đó suy ra

$$EI.EH = EC^2$$
$$= AE^2 - AC^2$$
$$\Rightarrow EI.EH + AC^2 = AE^2$$

Mà $BD < AC, OB = OD$ nên $EI.EH + 4OB^2 < AE^2$ (đpcm)..

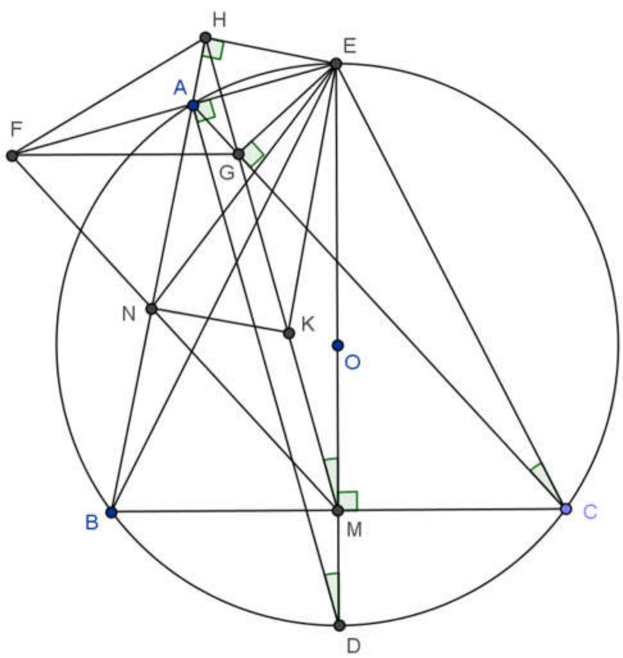
Câu 42. (Trường chuyên tỉnh Nam Định chuyên toán năm 2019-2020) Cho tam giác nhọn ABC (với $AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O. Đường phân giác trong và đường phân giác ngoài của $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn (O) lần lượt tại D và E (cùng khác A). Gọi G là hình chiếu vuông góc của E lên cạnh AC, gọi M và N tương ứng là trung điểm của các đoạn thẳng BC và BA. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng GM, H là giao điểm của đường thẳng AB và đường thẳng MG, F là giao điểm của đường thẳng MN và đường thẳng AE.

a)Chứng minh rằng hai đường thẳng AD và GM song song.

b)Chứng minh $FH = MC$.

c)Chứng minh $KE + KN \le \sqrt{2}.EN$.

Lời giải



a)

+ Có AD, AE là các phân giác trong và ngoài của góc $\widehat{BAC}$ nên chúng vuông góc, suy ra ED là đường kính của (O).

+ Lại có D là điểm chính giữa của cung nhỏ BC của (O) nên có OD vuông góc với BC tại trung điểm M. Vậy D, M, O, E thẳng hàng và $DE \perp BC$.

+ Xét tứ giác $EGMC$ có $\widehat{EGC} = \widehat{EMC} = 90^0$ nên $EGMC$ là tứ giác nội tiếp.

+ Suy ra $\widehat{EMG} = \widehat{ECG}$, lại có $\widehat{ECG} = \widehat{EDA}$ nên $\widehat{EMG} = \widehat{EDA}$, suy ra $GM \parallel AD$.

b)

+ $AE \perp AD$ và $MG \parallel AD$ nên $MG \perp FE$. Lại có $EG \perp AC$ và $MF \parallel AC$ nên $EG \perp MF$. Từ đó suy ra G là trực tâm tam giác MFE, do đó $FG \perp ME$ hay $FG \perp DE$.

+ Có $FG \parallel MC$ (vì cùng vuông góc với DE), $FM \parallel GC$ nên $FMCG$ là hình bình hành, suy ra $FG = MC$.

+ Từ AE là phân giác của $\widehat{HAG}$ và $HG \perp AE$ suy ra đường thẳng AE là đường trung trực của đoạn HG.

Suy ra $FH = FG$. Vậy $FH = MC$.

c)

+ Từ $\widehat{EAB} = \widehat{EGM}$ (vì cùng cộng với $\widehat{ECB}$ ra 180^0), $\widehat{ABE} = \widehat{GME}$ (vì cùng bằng $\widehat{ECA}$), suy ra $\Delta EAB \# \ \Delta EGM$ (g-g).

+ Có N và K là các trung điểm của hai cạnh tương ứng là AB và GM nên $\widehat{EKG} = \widehat{ENA}$, suy ra tứ giác $EKNH$ là tứ giác nội tiếp.

+ Lại có $\widehat{AHE} = \widehat{AGE} = 90^0$ (do H, G đối xứng nhau qua AE) nên dẫn đến $\widehat{NKE} = 90^0$.

Có $NE^2 = EK^2 + KN^2$. Từ $2\left(KE^2 + KN^2\right) \ge \left(KE + KN\right)^2$ có $2NE^2 \ge \left(KE + KN\right)^2$ hay $KE + KN \le NE\sqrt{2}$, vậy có Đpcm.

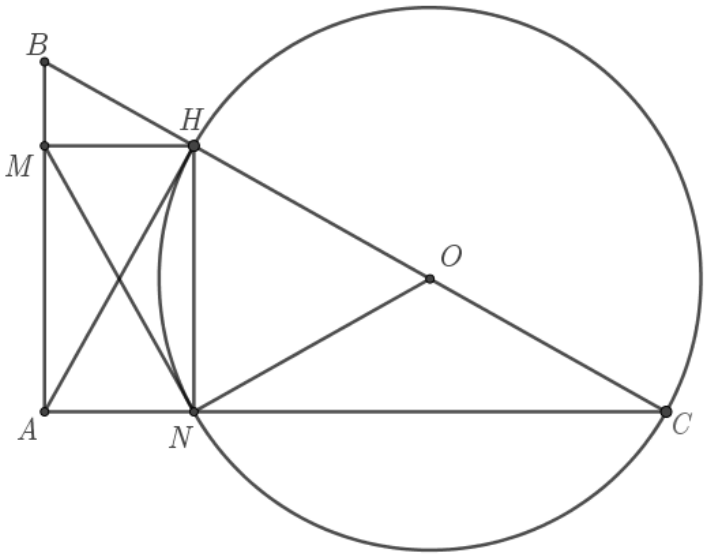
Câu 43. (Trường chuyên tỉnh Nam Định lớp chuyên KHXH năm 2019-2020) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH $(H \in BC)$. Đường tròn (O) đường kính HC cắt cạnh AC tại N. Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại N cắt cạnh AB tại M. Chứng minh rằng:

1) Tứ giác $BMNC$ là tứ giác nội tiếp.

2) $\widehat{AMH} = 90^\circ$.

3) $BM\sqrt{HC} + \mathrm{CN}\sqrt{BH} = \mathrm{AH}\sqrt{BC}$.

Lời giải



.

1).Ta có $\widehat{HNC} = 90^\circ \Rightarrow HN \parallel AB \Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{MNH}$ (1).

Lại có $\widehat{BCN} = \widehat{MNH}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AMN} = \widehat{BCN}$.

Do đó tứ giác $BMNC$ nội tiếp đường tròn..

2).Chỉ ra AH là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại $H \Rightarrow \widehat{AHN} = \widehat{HNM}$.

$\Rightarrow \widehat{AHN} = \widehat{AMN}$. Suy ra tứ giác $AMHN$ nội tiếp. .

Nên $\widehat{ANH} + \widehat{AMH} = 180^\circ$.

Lại có $\widehat{ANH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AMH} = 90^\circ$. .

3).Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH nên ta có

$CH.BC = AC^2$ và $BH.BC = AB^2$.

$$BM\sqrt{CH} + CN\sqrt{BH} = AH\sqrt{BC}$$
$$\Leftrightarrow BM\sqrt{CH.BC} + CN\sqrt{BH.BC} = AH.BC.$$
$$\Leftrightarrow BM.AC + CN.AB = AH.BC$$

Chứng minh được $AMHN$ là hình chữ nhật nên $AM = HN$, $AN = MH$ do đó

$$\begin{aligned} BM.AC + CN.AB &= (AB - AM).AC + (AC - AN).AB \\ &= 2.AB.AC - AM.AC - AN.AB \\ &= 4S_{\Delta ABC} - 2S_{\Delta AHC} - 2S_{\Delta ABH} \\ &= 2S_{\Delta ABC} \end{aligned}.$$

Lại có $AH.BC = 2.S_{\Delta ABC}$. Suy ra điều phải chứng minh. .

Câu 44. (Trường chuyên tỉnh Nghệ An chuyên toán năm 2019-2020) Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi E là điểm nằm chính giữa của cung nhỏ BC. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $EM = EC$, đường thẳng BM cắt đường tròn (O) tại N (N khác B). Các đường thẳng EA và EN cắt cạnh BC lần lượt tại D và F.

a)Chứng minh tam giác AEN đồng dạng với tam giác FED.

b)Chứng minh M là trực tâm của tam giác AEN.

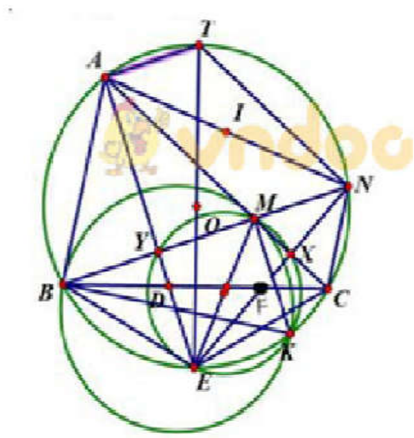
c)Gọi I là trung điểm của AN, tia IM cắt đường tròn (O) tại K. Chứng minh đường thẳng CM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMK.

Lời giải

a)

Có $\widehat{EDF} = 180^\circ \quad \widehat{BDE}$(hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{EDF}$=180°-$\widehat{DEC} \quad \widehat{DCE}=\widehat{ANC} \quad \widehat{DCE} = \widehat{ANC} \quad \widehat{ENC} = \widehat{ANE}$(Do cung $DE = EC$)



Suy ra ΔDEF đồng dạng với ΔNEA

b) Ta có $EB = EC = EM$ do E là điểm chính giữa cung BC và theo giả thiết $EM = EC$. Mặt khác AE là tia phân giác $\widehat{BAM}$ suy ra AE là trung trực đoạn thẳng BM hay vuông góc với tia NM

Chứng minh tương tự thì NE là tia phân giác của $\widehat{BNC}$, suy ra NE là đường trung trực của đoạn thẳng MC hay NE vuông góc với AM.

Từ hai điều trên ta có M là trực tâm của ΔAEN

c)

Gọi giao điểm của AM với EN là X, của BN với AE là Y

Gọi giao điểm của IM với đường tròn (O) là T. Dễ thấy rằng $ATNM$ là hình bình hành nên TN vuông góc với EN suy ra ET là đường kính đường tròn (O)

$\Rightarrow \widehat{EKT}=90^\circ$ hay $\widehat{MKE}=90^\circ$ hay K thuộc đường tròn đường kính EM, suy ra năm điểm X, Y, M, K, E cùng thuộc một đường tròn

Ta có $\widehat{KMC} = \widehat{KMX} = \widehat{XEK} = \widehat{NEK} = \widehat{NBK}$(do tứ giác $MEKX$ nội tiếp)

Suy ra CM là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác BMK

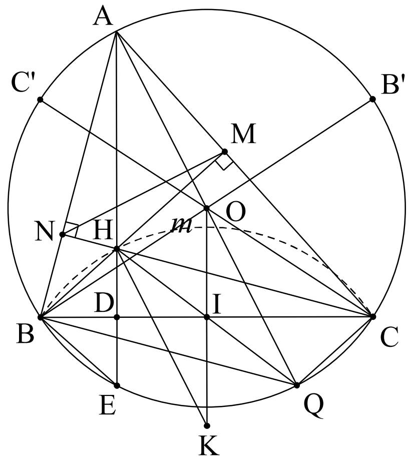
Câu 45. (Trường chuyên tỉnh Ninh Bình chuyên toán năm 2019-2020)Cho đường tròn tâm O bán kính R. Dây cung BC cố định, không đi qua tâm O. Điểm A di chuyển trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao BM, CN của tam giác ABC cắt nhau tại H, gọi I là trung điểm của BC.

1. Chứng minh $AH = 2.OI$.

2. Chứng minh khi A di chuyển trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn thì H di chuyển trên một cung tròn cố định, hãy chỉ ra tâm và bán kính của cung tròn đó.

3. Khi $BC = R\sqrt{3}$, chứng minh $AM.NH + HM.NA = OI.BC$.

Lời giải



1.

Kẻ đường kính AQ của (O). Ta có $\widehat{ABQ} = \widehat{ACQ} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Suy ra: $AB \perp BQ, CQ \perp AC$.

Ta có $BH \perp AC, CQ \perp AC \Rightarrow BH//CQ$.

Tương tự ta có $CH//BQ$. Suy ra BHCQ là hình bình hành. .

Mà I là trung điểm của BC nên I đồng thời là trung điểm của HQ..

Xét ΔAQH có OI là đường trung bình. Do đó $AH = 2OI$ (đ.p.c.m)..

2.

Cách 1: Lấy K đối xứng với O qua I suy ra $OK = 2OI = AH$ ..

Lại có $OK//AH$ (cùng $\perp BC$) nên suy ra AHKO là hình bình hành.

Do đó $KH = OA = R$ không đổi..

Do O, I cố định nên K cố định. Do đó H di chuyển trên đường tròn tâm K bán kính R..

Giới hạn: Kẻ các đường kính BB', CC' của (O;R). Để tam giác ABC nhọn thì A thuộc cung nhỏ $B'C'$ (trừ B', C').

Khi $A \equiv C'$ thì tam giác ABC vuông tại B, $H \equiv B$.

Khi $A \equiv B'$ thì tam giác ABC vuông tại C, $H \equiv C$.

Vậy H di chuyển trên cung BC của đường tròn (K; R) thuộc nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A (trừ hai đầu mút B, C)..

Cách 2: Gọi giao điểm của tia AH với BC và $\overset{\frown}{BC}$ nhỏ lần lượt là D và E.

Vì H là trực tâm tam giác ABC nên $AD \perp BC$.

Ta có: $\widehat{BEA} = \widehat{BCA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$ của (O)).

Mà $\widehat{BCA}=\widehat{BHE}$ (cùng bù $\widehat{MHD}$).

Nên $\widehat{BEA}=\widehat{BHE}\Rightarrow \Delta HBE$ cân tại B

$\Rightarrow$ Đường cao BD đồng thời là đường trung trực của HE

$\Rightarrow$ H và E đối xứng nhau qua BC ..

Khi A di động trên $\overset\frown{BC}$ lớn của $(O;R)$ sao cho ΔABC nhọn thì E di động trên $\overset\frown{BC}$ nhỏ của $(O;R)$ (trừ hai điểm B và C). Do đó H di động trên $\overset\frown{BmC}$ đối xứng với $\overset\frown{BC}$ nhỏ của $(O;R)$ qua đường thẳng BC. Gọi K và r lần lượt là tâm và bán kính của $\overset\frown{BmC}$ ta có: r = R và K là điểm đối xứng của O qua đường thẳng BC..

Giới hạn: Kẻ các đường kính BB’, CC’ của (O;R). Để tam giác ABC nhọn thì A thuộc cung nhỏ $B'C'$ (trừ B',C').

Khi $A\equiv C'$ thì tam giác ABC vuông tại B, $H\equiv B$.

Khi $A\equiv B'$ thì tam giác ABC vuông tại C, $H\equiv C$.

Vậy H di chuyển trên $\overset\frown{BmC}$ của đường tròn (K; R) thuộc nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A (trừ hai đầu mút B, C)..

3.

Cách 1: Ta có $BI=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác BIO vuông tại I có $\sin\widehat{BOI}=\dfrac{BI}{BO}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ Suy ra $\widehat{BOI}=60°$.

Tam giác BOC cân tại O có OI là đường cao nên OI đồng thời là đường phân giác của $\widehat{BOC}\Rightarrow\widehat{BOC}=120°\Rightarrow\widehat{BAC}=\dfrac{\widehat{BOC}}{2}=60°$..

Xét tam giác ABE vuông tại M, $\widehat{BAM}=60^\circ$.

Suy ra $AM=AB.\cos A=AB.\cos60^\circ=\dfrac{AB}{2}$.

Tương tự có $AN=AC.\cos A=AC.\cos60^\circ=\dfrac{AC}{2}$.

Do đó $AM.NH+HM.NA=\dfrac{AB.NH+HM.AC}{2}$ (1)..

Gọi giao điểm của AH và BC là D, vì H là trực tâm tam giác ABC nên $AD\perp BC$

Do đó: $AB.NH+AC.HM=2.S_{\Delta AHB}+2.S_{\Delta AHC}=AH.BD+AH.CD=AH.BC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AM.NH+HM.NA=\dfrac{AH.BC}{2}$..

Mà $AH=2.IO$ nên $AM.NH+HM.NA=OI.BC$.

Cách 2: Xét tam giác BIO vuông tại I có $\sin\widehat{BOI} = \dfrac{BI}{BO} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Suy ra $\widehat{BOI} = 60°$.

Tam giác BOC cân tại O có OI là đường cao nên OI đồng thời là đường phân giác của $\widehat{BOC} \Rightarrow \widehat{BOC} = 120° \Rightarrow \widehat{BAC} = \dfrac{\widehat{BOC}}{2} = 60°$..

Tứ giác AMHN nội tiếp nên áp dụng định lý Ptolemy ta có:

$AM.NH + HM.NA = AH.MN.$

Mà $AH = 2OI$ nên $AM.NH + HM.NA = 2OI.MN$ (1)..

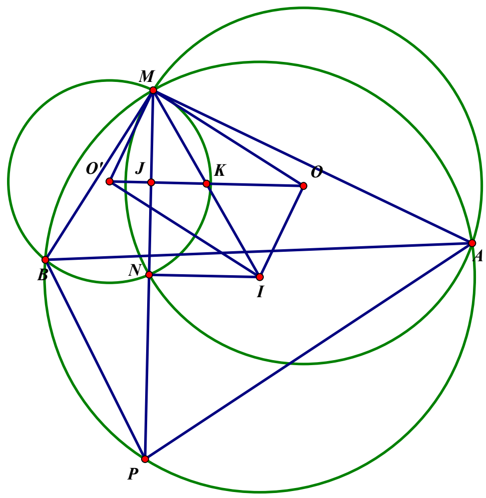
$\Delta AMN \backsim \Delta ABC$ nên $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AM}{AB}$. Mà $\dfrac{AM}{AB} = \cos A = \dfrac{1}{2}$, suy ra $BC = 2MN$ (2)..

Từ (1) và (2) suy ra $AM.NH + HM.NA = OI.BC$. .

Câu 46. (Trường chuyên tỉnh Phú Yên Vòng 2 năm 2019-2020) Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại M, N. Kẻ dây MA của đường tròn (O) tiếp xúc với (O') và dây MB của đường tròn (O') tiếp xúc với (O). Đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB cắt đường thẳng MN tại P (P khác M). Chứng minh rằng $PN = MN$.

Lời giải

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB. Khi đó, $\begin{cases} OI \perp MA \\ O'I \perp MB \end{cases}$..



Xét tứ giác $MOIO'$ có $\begin{cases} OI \parallel O'M \\ O'I \parallel OM \end{cases}$.

Suy ra. tứ giác $MOIO'$ là hình bình hành..

Gọi $J = O'O \cap MN, K = MI \cap O'O$.
Vì $MOIO'$ là hình bình hành nên $KM = KI$.

Ta có, $\begin{cases} MN = (O) \cap (O') \\ J = MN \cap OO' \end{cases} \Rightarrow J$ là trung điểm MN.

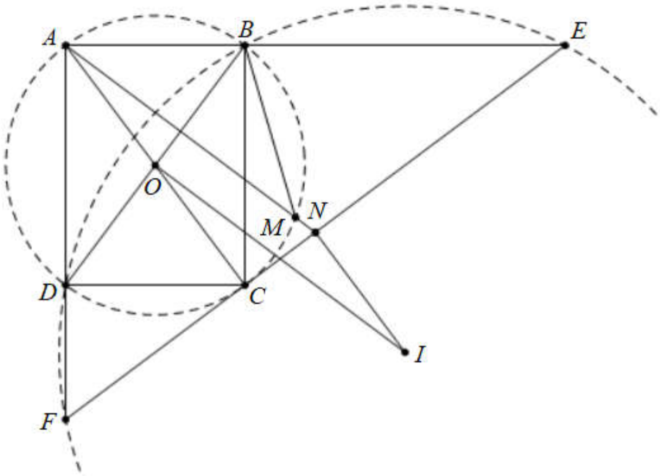
Suy ra, KJ là đường trung bình của tam giác MIN. Do đó,
$KJ \parallel IN \Rightarrow IN \perp MN$.

Tam giác IMP cân tại I có $IN \perp MP$, suy ra N là trung điểm MP.

Câu 47. (Trường chuyên tỉnh PTNK (VÒNG 1) năm 2019-2020) HÌnh chữ nhật $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(\mathcal{T})$ có tâm O, bán kính $R = 2a$. Tiếp tuyến của $(\mathcal{T})$ tại C cắt các tia AB, AD lần lượt tại E, F.
a)Chứng minh rằng $AB.AE = AD.AF$ và $BEFD$ là tứ giác nội tiếp.
b)Đường thẳng d qua A, d vuông góc với BD và d cắt $(\mathcal{T})$, EF theo thứ tự tại M, N $(M \neq A)$. Chứng minh rằng $BMNE$ là tứ giác nội tiếp và N là trung điểm của EF.
c)Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF. Tính IN theo a.

Lời giải

a)Theo tính chất của góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp, ta có $\angle DCF = \angle DAC$ (cùng chắn cung DC của đường tròn $(\mathcal{T})$). Lại có $\angle DAC = \angle ADB$ (tính chất hình chữ nhật) và $\angle DCF = \angle AEF$ (đồng vị) nên $\angle AEF = \angle DCF = \angle DAC = \angle ADB$.
Xét tam giác ADB và tam giác AEF, ta có góc DAB chung và $\angle AEF = \angle ADB$ (chứng minh trên) nên $\Delta ADB \backsim \Delta AEF$ (góc – góc). Từ đó suy ra $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AB}{AF}$, hay $AB.AE = AD.AF$.
Bây giờ, do $\angle BEF = \angle AEF = \angle ADB$ nên ta có $\angle BEF + \angle BDF = \angle ADB + \angle BDF = 180^0$.
Từ đó suy ra tứ giác $BEFD$ nội tiếp.



b)Theo tính chất của góc nội tiếp, ta có $\angle AMB = \angle ADB$ (cùng chắn cung AB của đường tròn $(\mathcal{T})$). Lại có $\angle ADB = \angle AEF$ nên $\angle AMB = \angle AEF$.
Từ đây, ta có $\angle BEN + \angle BMN = \angle AEF + \angle BMN = \angle AMB + \angle BMN = 180^0$. Suy ra tứ giác $BMNE$ nội tiếp.
Bây giờ, do $AN \perp BD$ nên ta có $\angle NAE = 90^0 - \angle ABD = \angle DBC = \angle ADB = \angle AEF = \angle AEN$. Do đó tam giác NAE cân tại N, suy ra $NA = NE(1)$.

Mặt khác, do $\angle NAE = \angle AEN, \angle NAE = 90^0 - \angle NAF$ và $\angle AEN = 90^0 - \angle AFN$ nên ta cũng có $\angle NAF = \angle AFN$, suy ra tam giác NAF cân tại N. Từ đó ta có $NF = NA(2)$.

Từ (1) và (2) ta suy ra $NE = NF$, tức N là trung điểm của đoạn EF.

c)Do N là trung điểm của EF và I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF nên $NI \perp EF$. Lại có EF là tiếp tuyến tại C của đường tròn $(\mathcal{T})$ và AC là đường kính của đường tròn $(\mathcal{T})$ nên $AC \perp EF$.

Từ đó suy ta $AC // NI$, tức $AO // NI(3)$.

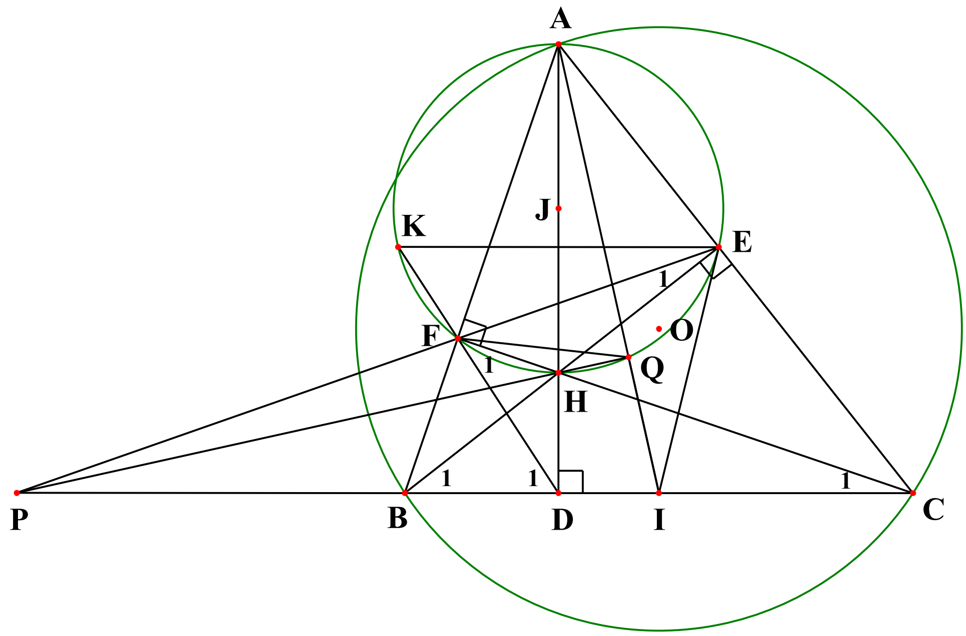
Do tứ giác $BEFD$ nội tiếp nên D thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF. Ta lại có O là trung điểm của BD và I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF nên $IO \perp BD$. Mà $NA \perp BD$ (theo giả thiết) nên $IO // NA(4)$.

Từ (3) và (4) ta suy ra tứ giác $ANIO$ là hình bình hành. Từ đó $IN = OA = 2a$.

Câu 48. (Trường chuyên tỉnh Quảng Nam Vòng 2 năm 2019-2020) Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O) và có trực tâm H. Ba điểm D, E, F lần lượt là chân các đường cao vẽ từ A, B, C của tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của cạnh BC, P là giao điểm của EF và BC. Đường thẳng DF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF tại điểm thứ hai là K.

a) Chứng minh $PB.PC = PE.PF$ và KE song song với BC.
b) Đường thẳng PH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF tại điểm thứ hai là Q. Chứng minh tứ giác BIQF nội tiếp đường tròn.

Lời giải



a).Tứ giác BCEF có:

$\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^o$ (GT)

$\Rightarrow$ BCEF là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{E}_1$

ΔPBE và ΔPFC có: $\widehat{EPC}$ chung ; $\widehat{E}_1 = \widehat{C}_1$

$\Rightarrow \Delta PBE \backsim \Delta PFC$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{PB}{PF} = \dfrac{PE}{PC} \Rightarrow PB.PC = PE.PF$

Tứ giác BDHF có:

$\widehat{BDH} = \widehat{BFH} = 90^o$ (GT)

$\Rightarrow \widehat{BDH} + \widehat{BFH} = 180^o$

$\Rightarrow$ BDHF là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{F}_1$

Gọi J là trung điểm của AH. Dễ thấy ΔHEF nội tiếp đường tròn $\left(J;\dfrac{AH}{2}\right)$

Tứ giác HEKF nội tiếp đường tròn (J)

$\Rightarrow \hat{F}_1 = \widehat{HEK}\ \left(=180^o - \widehat{HFK}\right)$

Mà $\hat{B}_1 = \hat{F}_1 \Rightarrow \hat{B}_1 = \widehat{HEK}$

$\Rightarrow$ KE // BC

b).Trước hết, ta chứng minh DIEF là tứ giác nội tiếp

Cách 1:

Tứ giác BCEF nội tiếp $\Rightarrow \hat{B}_1 = \widehat{HFE}$

Mà $\hat{B}_1 = \hat{F}_1 \Rightarrow \widehat{DFE} = 2\hat{B}_1$ (1)

ΔEBC vuông tại E, đường trung tuyến EI

$\Rightarrow IB = IE = \dfrac{1}{2}BC \Rightarrow \Delta$IBE cân tại I

$\Rightarrow \hat{I}_1 = 2\hat{B}_1$ (tính chất góc ngoài của tam giác)(2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \hat{I}_1 = \widehat{DFE}$

$\Rightarrow$ DIEF là tứ giác nội tiếp

Cách 2:

Chứng minh được $\widehat{IEH} = \hat{B}_1 = \widehat{HFE} \Rightarrow \widehat{IEH} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{HE}$

$\Rightarrow$ EI là tiếp tuyến của (J)

$\Rightarrow \widehat{IEF} = \widehat{EAF} = \widehat{BHF} = \hat{D}_1$

$\Rightarrow$ DIEF là tứ giác nội tiếp

Dễ chứng minh $\Delta PDF \backsim \Delta PEI$ (g-g)

$\Rightarrow PD.PI = PE.PF$

Dễ chứng minh $\Delta PHE \backsim \Delta PFQ$ (g-g)

$\Rightarrow PE.PF = PH.PQ$

$\Rightarrow PD.PI = PH.PQ \Rightarrow \dfrac{PD}{PQ} = \dfrac{PH}{PI}$

$\Rightarrow \Delta PDH \backsim \Delta PQI$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{PHD} = \widehat{PIQ}$

Lại có $\widehat{PHD} = \widehat{AHQ} = \widehat{AFQ}$

$\Rightarrow \widehat{AFQ} = \widehat{PIQ}$

$\Rightarrow$ BIQF là tứ giác nội tiếp.

Câu 49. (Trường chuyên tỉnh Quảng Ngãi chuyên toán năm 2019-2020) Cho đường tròn $(O;R)$ có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Gọi M là điểm di động trên đoạn thẳng OB (M khác O và P). Tia CM cắt đường tròn (O) tại N; DB cắt CN tại P; AN cắt CD tại Q

a)Chứng minh $PQ \parallel AB$

b)Chứng minh ΔCAQ đồng dạng với ΔAMC, từ đó suy ra diện tích tứ giác $ACMQ$ không đổi khi M di động trên đoạn thẳng OB

c)Chứng minh hệ thức $\frac{CQ}{AM}=\left(\frac{CN}{AN}\right)^2$

d)Xác định vị trí của điểm M trên đoạn thẳng OB để NQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CPQ. Tính OM theo R trong trường hợp đó

Lời giải

a)Vì $AB \perp CD$ nên $\overset\frown{CA}=\overset\frown{CB} \Rightarrow \widehat{D_1}=\widehat{N_1}$ nên tứ giác $PQDN$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PND}+\widehat{PQD}=180^0$ mà $\widehat{PND}=90^0 \Rightarrow \widehat{PQD}=90^0 \Rightarrow PQ \perp CD \Rightarrow PQ \parallel AB$.

b)Xét hai tam giác CAQ và AMC

$\widehat{ACQ}=\widehat{MAC}=45^0$

$\widehat{CAQ}=\widehat{AMC}$ (do $sd\overset\frown{AC}+sd\overset\frown{BN}=sd\overset\frown{BC}+sd\overset\frown{BN}$)

Vậy $\Delta CAQ \backsim \Delta MAC(g-g)$

$\Rightarrow \frac{CA}{AM}=\frac{CQ}{AC} \Rightarrow AM.CQ=AC^2=2R^2$

Tứ giác $ACMQ$ có $AM \perp CQ \Rightarrow S_{ACMQ}=\frac{AM.CQ}{2}=\frac{AC^2}{2}=\frac{2R^2}{2}=R^2$

c)Ta có $\Delta CAQ \backsim \Delta MAC(g-g) \Rightarrow \frac{CA}{AM}=\frac{CQ}{AC}=\frac{AQ}{MC} \Rightarrow \frac{CQ}{AM}=\left(\frac{AQ}{MC}\right)^2$ (1)

$\Delta COM \backsim \Delta CND(g-g)$ (vì $\widehat{DCN}$ chung, $\widehat{COM}=\widehat{CND}=90^0$)

Suy ra $\frac{CM}{CD}=\frac{CO}{CN} \Rightarrow CM.CN=2R.R=2R^2$

Tương tự : $AQ.AN=2R^2$

Vậy $CM.CN=AQ.AN \Rightarrow \frac{AQ}{MC}=\frac{CN}{AN}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{CQ}{AM}=\left(\frac{CN}{AN}\right)^2$

d)Ta có tứ giác $PQDN$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PQN}=\widehat{PDN}$

Mà $\widehat{PDN}=\widehat{BCN}$ nên $\widehat{PQN}=\widehat{BCN}$

NQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔCPQ khi $\widehat{PQN}=\widehat{PCQ}$

Do đó $\widehat{BCN}=\widehat{PCQ}$ hay $\overset\frown{BN}=\overset\frown{ND}$

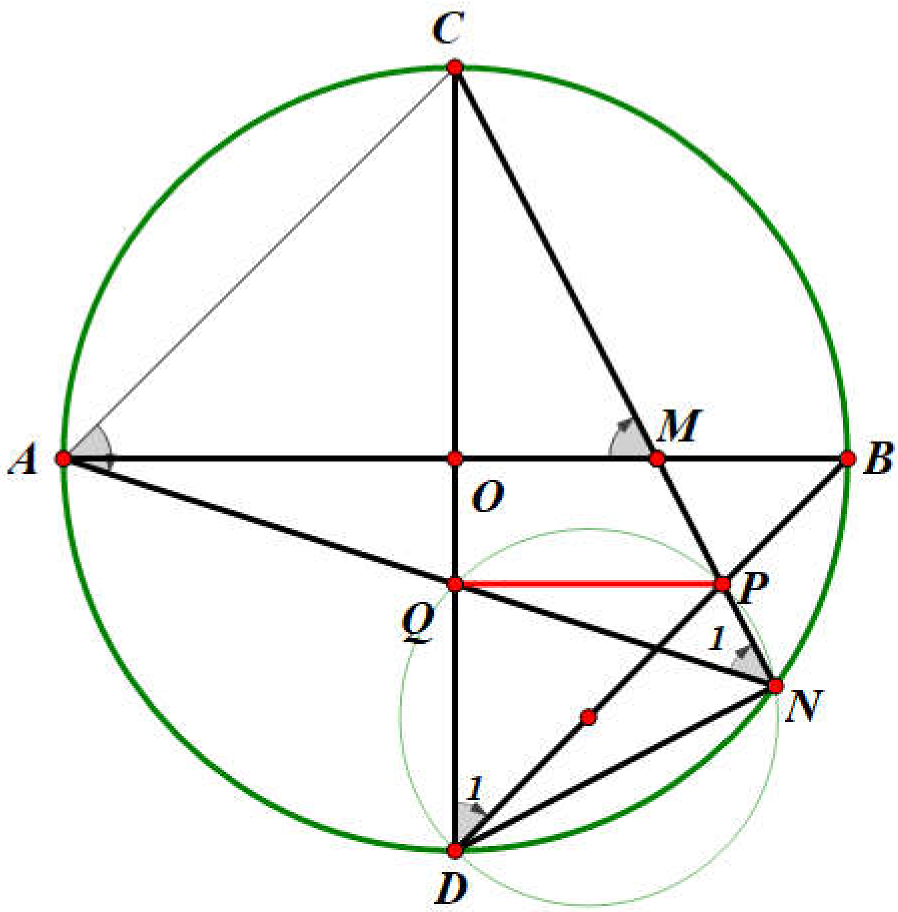
Suy ra CN là phân giác của góc $\widehat{OCB}$

Tan giác BOC vuông cân tại $O \Rightarrow BC=OB\sqrt{2}=R\sqrt{2}$

Vì CM là phân giác của tam giác BOC nên $\dfrac{OM}{MB}=\dfrac{OC}{CB}=\dfrac{R}{R\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Ta có $OM+MB=R\Rightarrow OM=R\left(\sqrt{2}-1\right)$

Vậy khi $OM=R\left(\sqrt{2}-1\right)$ thì NQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔCPQ



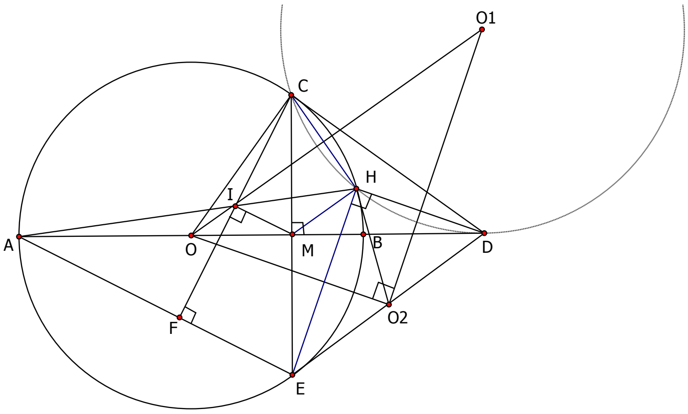
Câu 50. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Ninh Vòng 2 năm 2019-2020)* Cho đường tròn $(O;\,R)$, đường kính AB, điểm M nằm trên đoạn OB (M khác O và B). Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt (O) tại hai điểm C và E. Gọi F là hình chiếu của C trên AE và I là hình chiếu của M trên CF. Đường thẳng AI cắt (O) tại điểm thứ hai H.

a) Chứng minh tứ giác $CIMH$ nội tiếp;

b) Tiếp tuyến tại C của (O) cắt đường thẳng AB tại D. Gọi (O_1) là đường tròn ngoại tiếp tam giác CHD (điểm O_1 là tâm đường tròn). Chứng minh đường thẳng BD là tiếp tuyến của (O_1);

c) Gọi O_2 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HMD. Biết $OM=\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$, tính diện tích tam giác OO_1O_2 theo R.

Lời giải



a)

Chỉ ra $IM // AE$ suy ra $\widehat{MIH} = \widehat{EAH}$,

Mà $\widehat{EAH} = \widehat{ECH}$ nên $\widehat{MIH} = \widehat{MCH}$,

Suy ra tứ giác $CIMH$ nội tiếp.

b).Chỉ ra được ED là tiếp tuyến của (O) suy ra $\widehat{HED} = \widehat{HCE}$. (1)

Do tứ giác $CIMH$ nội tiếp nên $\widehat{CHM} = 90^0$ suy ra $\widehat{HCM} + \widehat{HMC} = 90^0$. Mà $\widehat{HMD} + \widehat{HMC} = 90^0$ nên $\widehat{CHM} = \widehat{HMD}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{HED} = \widehat{HMD}$ nên tứ giác $EMHD$ nội tiếp.

Do đó $\widehat{HDM} = \widehat{HEM}$ mà $\widehat{HEM} = \widehat{HCD}$ nên $\widehat{HDM} = \widehat{HCD}$.

Từ đó chứng minh được BD là tiếp tuyến của (O_1).

c).Sử dụng tính chất đường nối tâm vuông góc với dây chung ta có: $OO_2 \perp HE$, $O_2O_1 \perp HD$ và do $EH \perp HD$ suy ra $OO_2 \perp O_2O_1$.

Chỉ ra $\widehat{COM} = 45^0$ suy ra $\widehat{CAE} = 45^0$ nên $\widehat{O_2OO_1} = 45^0$. Tam giác O_2OO_1 vuông cân tại O_2.

Chỉ ra tứ giác $OCDE$ là hình vuông cạnh R và O_2 là trung điểm của DE.

Tính được $O_2O^2 = \dfrac{5R^2}{4}$.Vậy diện tích tam giác OO_1O_2 là $\dfrac{5R^2}{8}$.

Câu 51. (Trường chuyên tỉnh Sơn La Vòng 2 năm 2019-2020) Từ một điểm I nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến IA và IB đến đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Tia Ix nằm giữa hai tia IA và IB và Ix không đi qua tâm O, tia Ix cắt đường tròn tại hai điểm C và E (E nằm giữa C và I), đoạn IO cắt đoạn thẳng AB tại M. Chứng minh rằng:

a)Tứ giác $OMEC$ nội tiếp được trong một đường tròn.

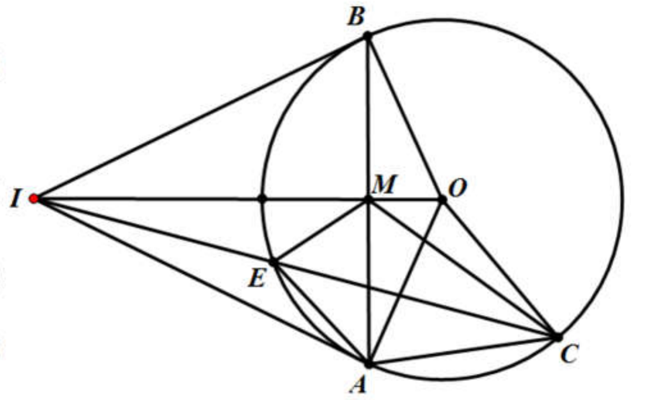
b) $\widehat{AMC} = \widehat{AME}$

c) $\left(\dfrac{MB}{MC}\right)^2 = \dfrac{IE}{IC}$

Lời giải

Từ một điểm I nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến IA và IB đến đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Tia Ix nằm giữa hai tia IA và IB và Ix không đi qua tâm O, tia Ix cắt đường tròn tại hai điểm C và E (E nằm giữa C và I) đoạn IO cắt đoạn thẳng AB tại M. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác OM



+ Xét tam giác

$\widehat{AIC}$ chung, I

$\Rightarrow \Delta IAE$ đồng

+ Tam giác vu ... chung)

$\Rightarrow IM.IO = IA^2$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $IE.IC = IM.\text{IO}$ nên ΔIEO và ΔIMC đồng dạng. Từ đó ta có $\widehat{ECM} = \widehat{EOI}$. Tứ giác OMEC có hai góc $\widehat{ECM} = \widehat{EOI}$ nên Tứ giác $OMEC$ nội tiếp được trong một đường tròn

b) Chứng minh $\widehat{AMC} = \widehat{AME}$.

Do $OI \perp AB$ nên việc chứng minh $\widehat{AMC} = \widehat{AME}$ đưa về chứng minh $\widehat{IME} = \widehat{OMC}$.

Tứ giác EMOC nội tiếp đường tròn, ta có $\widehat{IME} = \widehat{OCE}$; và $\widehat{CEO} = \widehat{OMC}$ (1)

Và $\widehat{CEO} = \widehat{OCE}$ (do $OC = OE$) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{IME} = \widehat{OMC}$ Từ đó suy ra $\widehat{AMC} = \widehat{AME}$.

c) *Chứng minh* $\left(\dfrac{MB}{MC}\right)^2 = \dfrac{IE}{IC}$.

+) Xét tam giác ΔBCM và ΔECA có:

$\widehat{CEA} = \widehat{MBC}$ (cùng chắn cung $\overset\frown{AC}$) (1)

$\widehat{BMC} = 90^0 + \widehat{OMC} = 90^0 + \widehat{OEC}$ mà

$$\widehat{OEC} = \widehat{OCE} \Rightarrow \widehat{BMC} = 90^0 + \widehat{OEC} = 90^0 + \frac{180^0 - \widehat{EOC}}{2} = 180^0 - \frac{1}{2} sd\overset\frown{CAE}$$

$$\widehat{BMC} = \frac{1}{2}\left(360^0 - sd\overset\frown{CAE}\right) = \widehat{CAE} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta BCM$ đồng dạng với $\Delta ECA \Rightarrow \dfrac{MB}{MC} = \dfrac{AE}{AC} \quad (*)$

+) Ta có tam giác ΔIEA và ΔIAC đồng dạng

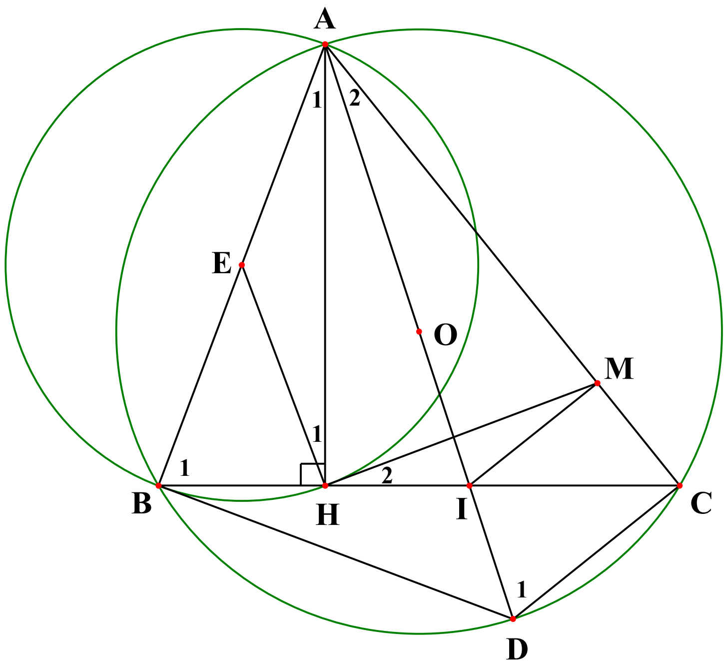
$$\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{IE}{IA} = \frac{IA}{IC} \Rightarrow \left(\frac{AE}{AC}\right)^2 = \frac{IE}{IA}.\frac{IA}{IC} = \frac{IE}{IC} \quad (**)$$

Theo (*) và (**) ta có $\left(\frac{MB}{MC}\right)^2 = \frac{IE}{IC}$ *(đpcm)*

Câu 52. (Trường chuyên tỉnh Thái Bình vòng 1 năm 2019-2020) Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R, vẽ AH vuông góc với BC tại H, vẽ đường kính AD cắt BC tại I, trên cạnh AC lấy điểm M sao cho IM song song với CD.

1. Chứng minh: Tứ giác $AHIM$ nội tiếp một đường tròn.
2. Chứng minh: $AB.AC = AH.AD$.
3. Chứng minh: HM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH.
4. Chứng minh: $AB.CD + AC.BD < 4R^2$.

Lời giải



1.Ta có: $\widehat{ACD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{AMI} = \widehat{ACD} = 90^\circ$ (đồng vị, IM // DC)

Tứ giác AHIM có:

$\widehat{AHI} + \widehat{AMI} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$ AHIM là tứ giác nội tiếp.

2. ΔAHB và ΔACD có:

$\widehat{AHB} = \widehat{ACD} = 90^\circ$; $\hat{B}_1 = \hat{D}_1 \left(= \frac{1}{2} \text{sđ} \overset{\frown}{AC}\right)$

$\Rightarrow \Delta AHB \backsim \Delta ACD$ (g-g)

$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AB.AC = AH.AD$

3.Vì ΔAHB vuông tại H nên ΔAHB nội tiếp $\left(E;\frac{BC}{2}\right)$, với E là trung điểm BC.

$\Delta AHB \backsim \Delta ACD \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$

ΔEAH cân tại E $\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{H}_1$

Tứ giác AHIM nội tiếp $\Rightarrow \widehat{A}_2 = \widehat{H}_2$

Do đó: $\widehat{H}_1 = \widehat{H}_2$

$\Rightarrow \widehat{EHM} = \widehat{AHC} = 90^o \Rightarrow HM \perp EH$

$\Rightarrow$ HM là tiếp tuyến của (E) (đpcm)

4.$\Delta AHB \backsim \Delta ACD$

$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{HB}{CD} \Rightarrow AB.CD = AD.HB$

Chứng minh tương tự được AC.BD = AD.HC

$\Rightarrow$ AB.CD + AC.BD = AD(HB + HC) = 2R.BC

Vì ΔABC nhọn $\Rightarrow$ BC < 2R

$\Rightarrow$ AB.CD + AC.BD < $4R^2$ (đpcm)

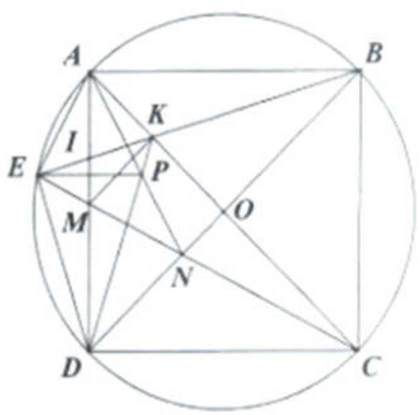
Câu 53. (Trường chuyên tỉnh Thái Bình vòng 2 năm 2019-2020) Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R. Trên cung nhỏ AD lấy điểm E bất kì (E không trùng với A và D). Trên tia EB cắt các đường thẳng AD, AC lần lượt tại I và K. Tia EC cắt các đường thẳng DA, DB lần lượt tại M và N. Hai đường thẳng AN, DK cắt nhau tại P.

1. Chứng minh : Tứ giác $EPND$ nội tiếp một đường tròn

2. Chứng minh : $\widehat{EKM} = \widehat{DKM}$

3. Khi M là trung điểm của AD, tính độ dài đoạn thẳng AE theo R

Lời giải



1. Ta có: $\widehat{PNE} = \widehat{NAC} + \widehat{NCA} = 2\widehat{NCA} = sđ\,\overset{\frown}{EA}$

Ta thấy $\widehat{PDA} = \widehat{ABE}$. Suy ra: $\widehat{PDE} = \widehat{PDA} + \widehat{ADE} = \widehat{ABE} + \widehat{ADE} = 2\widehat{ABE} = sđ\,\overset{\frown}{EA}$

Xét tứ giác $EPND$ có: $\widehat{PNE}=\widehat{PDE}$ và hai đỉnh $N;D$ là hai đỉnh liên tiếp nên $EPND$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

2. Ta thấy tứ giác $AKME$ là tứ giác nội tiếp do $\widehat{MEK}=\widehat{MAK}=45^0$. Suy ra $\widehat{MEA}=\widehat{MKA}=90^\circ$

Do đó: $MK \parallel BD \Rightarrow \widehat{MKD}=\widehat{KDB}=\widehat{KBD}=\widehat{EKM}$

3. Chứng minh được $\Delta MDC \sim \Delta MEA\ (g.g)$

Suy ra: $\dfrac{MD}{MC}=\dfrac{ME}{MA}\Rightarrow MC\cdot ME=MD\cdot MA=MD^2=\dfrac{CD^2}{4}$

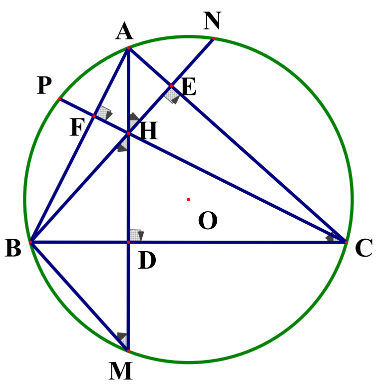
Mặt khác ta có: $MC^2=CD^2+MD^2=CD^2+\dfrac{CD^2}{4}=\dfrac{5CD^2}{4}$

Suy ra: $MC=\dfrac{\sqrt{5}CD}{2}\Rightarrow ME=\dfrac{\sqrt{5}CD}{10}$

Mà $\dfrac{EA}{CD}=\dfrac{AM}{MC}\Rightarrow EA=\dfrac{AM\cdot CD}{MC}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}CD=\dfrac{\sqrt{10}}{5}R$

Câu 54. (Trường chuyên tỉnh Thái Nguyên chuyên tin năm 2019-2020) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. Các đường cao AD, BE, CF cắt đường tròn (O) lần lượt tại các điểm M,N,P. Chứng minh $\dfrac{AM}{AD}+\dfrac{BN}{BE}+\dfrac{CP}{CF}=4.$

Lời giải



Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Ta có

$$\begin{cases}\widehat{BHM}=\widehat{AHN}=90^0-\widehat{HAC}\\ \widehat{BMH}=\widehat{BMA}=\widehat{BCA}=90^0-\widehat{HAC}\end{cases}\Rightarrow \widehat{BHM}=\widehat{BMH}$$

Do đó tam giác BHM cân tại B suy ra $DH=DM$. Chứng minh tương tự ta có $HE=EN, FP=FH$.

Khi đó:

$$\frac{AM}{AD}+\frac{BN}{BE}+\frac{CP}{CF}=\frac{AD+DM}{AD}+\frac{BE+EN}{BE}+\frac{CF+FP}{CF}$$
$$=3+\frac{DM}{AD}+\frac{EN}{BE}+\frac{FP}{CF}=3+\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}$$

Mặt khác:

$$\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}=\frac{S_{HBC}}{s_{ABC}}+\frac{S_{HAC}}{s_{ABC}}+\frac{S_{HAB}}{s_{ABC}}=1$$

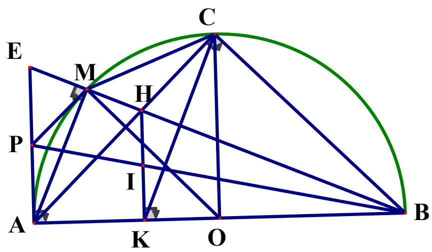
Do đó $\frac{AM}{AD}+\frac{BN}{BE}+\frac{CP}{CF}=4.$.

Câu 55. (Trường chuyên tỉnh Thái Nguyên chuyên tin năm 2019-2020) Cho tam giác ABC vuông cân tại C nội tiếp đường tròn tâm $O.$ M là điểm thuộc cung nhỏ $AC(M \neq A, M \neq C)$. H là giao điểm của BM và $AC.$ K là hình chiếu của H lên $AB.$

a. Chứng minh CA là đường phân giác của góc $\widehat{MCK}$.

b. Trên tiếp tuyến của đường tròn tâm O tại A lấy điểm P sao cho C và P nằm cùng phía so với đường thẳng AB đồng thời thỏa mãn $\frac{AP.MB}{MA}=\frac{AB}{2}$. Chứng minh BP đi qua trung điểm của HK.

Lời giải



a. Ta có $\widehat{MCA}=\widehat{MBA}$ (1) (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung AM)

Do $\widehat{HCB}=\widehat{HKB}=90^0$ nên tứ giác $CHKB$ nội tiếp đường tròn

từ đó ta có $\widehat{ACK}=\widehat{HCK}=\widehat{HBK}=\widehat{MBA}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{MCA}=\widehat{ACK}$ nên CA là đường phân giác của góc $\widehat{MCK}$.

b. Gọi E là giao điểm của AP và BM.

Ta có: $\frac{AP.MB}{MA}=\frac{AB}{2}\Leftrightarrow\frac{AP.MB}{MA}=OB\Leftrightarrow\frac{AP}{MA}=\frac{OB}{MB}$. (3)

Mặt khác $\widehat{PAM}=\frac{1}{2}$s®$\overset{\frown}{AM}=\widehat{OBM}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra tam giác PAM và tam giác OBM đồng dạng

Vì tam giác OBM cân tại O nên tam giác PAM cân tại P (5)

Ta có

$$\begin{cases}\widehat{PEM}+\widehat{PAM}=90^0\\ \widehat{PME}+\widehat{PMA}=90^0\\ \widehat{PMA}=\widehat{PAM}\end{cases}\Rightarrow\widehat{PEM}=\widehat{PME} \text{ nên tam giác } PME \text{ cân tại } P.(6)$$

Từ (5) và (6) suy ra P là trung điểm của AE

Gọi I là giao điểm của HK và BP. Vì HK song song với AE nên:

$\frac{HI}{EP} = \frac{BI}{BP} = \frac{IK}{PA}$ (Theo định lý Talet)

Từ đó suy ra $HI = IK$ hay BP đi qua trung điểm của HK..

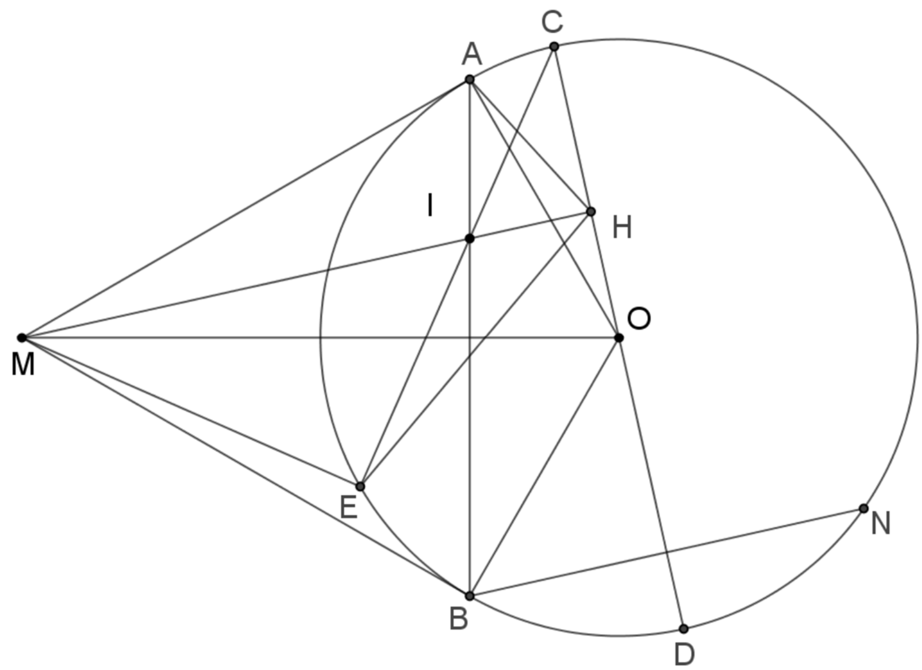
Câu 56. (Trường chuyên tỉnh Thái Nguyên chuyên toán năm 2019-2020) Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến MA

và MB với đường tròn (A, B là hai tiếp điểm). Lấy điểm I thuộc đoạn thẳng AB $(I \neq A, IA < IB)$, kẻ dây cung BN của đường tròn (O) sao cho BN song song với MI. Gọi C là điểm chính giữa của cung lớn BN và D là điểm chính giữa của cung nhỏ BN. Hai đường thẳng MI và CD cắt nhau tại H.

a. Chứng minh năm điểm M, A, H, O, B cùng nằm trên một đường tròn.

b. Kẻ dây cung CE của đường tròn (O) đi qua I. Chứng minh IE vuông góc với ME.

Lời giải



a. Theo bài ra ta có: $\begin{cases} CB = CN \\ DB = DN \\ OB = ON \end{cases} \Rightarrow$ ba điểm C, O, D thẳng hàng và $CD \perp BN$.

$\begin{cases} MH // BN \\ CD \perp BN \end{cases} \Rightarrow MH \perp CD.$

$\begin{cases} OA \perp MA \\ OB \perp MB \end{cases}$ (Tính chất tiếp tuyến).

Vậy năm điểm M, A, H, O, B cùng nằm trên đường tròn đường kính MO.

b. Vì 5 điểm M, A, H, O, B cùng nằm trên đường tròn đường kính MO nên $\widehat{IMB} = \widehat{HMB} = \widehat{HAB} = \widehat{HAI}$ (các góc nội tiếp cùng chắn cung HB).

Xét hai tam giác IMB và IAH ta có:

$$\begin{cases} \widehat{AIH} = \widehat{MIB} \\ \widehat{IAH} = \widehat{IMB} \end{cases} \Rightarrow \Delta IMB \text{ đồng dạng } \Delta IAH\,(g.g) \Rightarrow IA.IB = IM.IH \text{ (1).}$$

Trong đường tròn (O), ta có : $\widehat{ACI} = \widehat{ACE} = \widehat{ABE} = \widehat{IBE}$ (các góc nội tiếp cùng chắn cung AE).

Xét hai tam giác ICA và IBE ta có:

$$\begin{cases} \widehat{AIC} = \widehat{BIE} \\ \widehat{IBE} = \widehat{ICA} \end{cases} \Rightarrow \Delta ICA \text{ đồng dạng } \Delta IBE\,(g.g) \Rightarrow IA.IB = IC.IE \text{ (2).}$$

Từ (1) và (2) suy ra $IM.IH = IC.IE \Leftrightarrow \dfrac{IM}{IE} = \dfrac{IC}{IH}$.

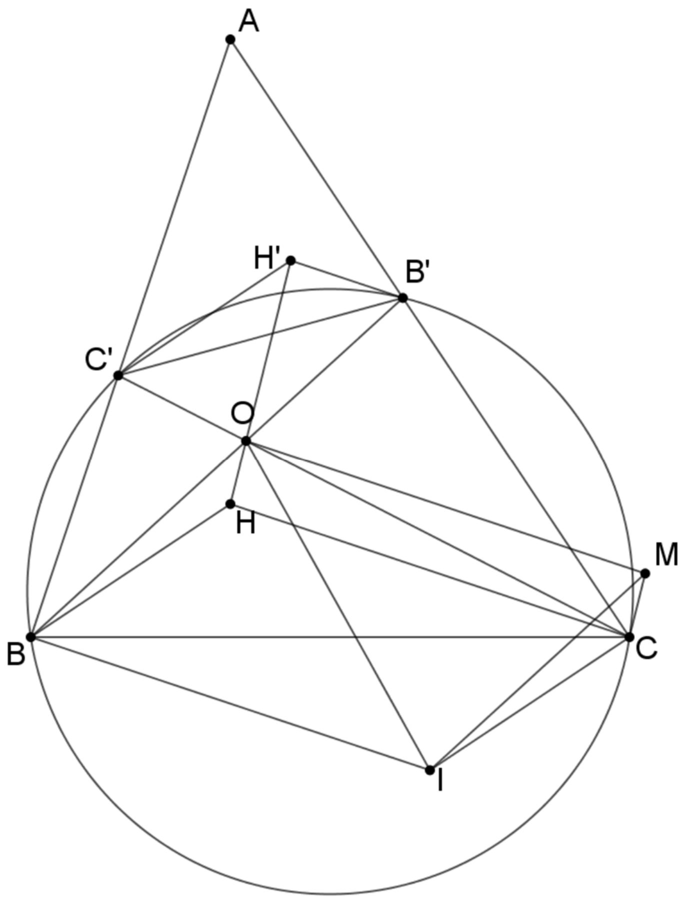
Hai tam giác IME và ICH ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{IM}{IE} = \dfrac{IC}{IH} \\ \widehat{MIE} = \widehat{CIH} \text{ (đối đỉnh)} \end{cases} \Rightarrow \Delta IME \text{ đồng dạng } \Delta ICH \Rightarrow \widehat{MEI} = \widehat{IHC} = 90^0$$

Vậy $HE \perp ME$ (đpcm).

Câu 57. **(Trường chuyên tỉnh Thái Nguyên chuyên toán năm 2019-2020)** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn với H là trực tâm. Một đường tròn đi qua hai điểm B và C cắt các đoạn thẳng AC, AB lần lượt tại hai điểm B', C' $(B' \neq A,\ B' \neq C,\ C' \neq A,\ C' \neq B)$. Gọi H' là trực tâm của tam giác $AB'C'$. Chứng minh các đường thẳng BB', CC', HH' đồng quy.

Lời giải



Gọi $O = BB' \cap CC'$. Ta dựng hình bình hành BHCI và OHCM.

Ta có $\begin{cases} OM // HC // BI \\ OM = HC = BI \end{cases} \Rightarrow$ Tứ giác $BOMI$ là hình bình hành.

Xét $\Delta AB'C'$ và ΔABC có: $\begin{cases} \widehat{BAC} = \widehat{B'AC'} \\ \widehat{AB'C'} = \widehat{ABC} \left(\text{vì cùng bù với } \widehat{C'B'C}\right) \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\Delta AB'C'$ đồng dạng với ΔABC (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{B'H'}{BH} = \dfrac{B'C'}{BC} \Leftrightarrow \dfrac{B'H'}{CI} = \dfrac{B'C'}{BC}$. (1)

Xét $\Delta OB'C'$ và ΔOCB có: $\begin{cases} \widehat{C'OB'} = \widehat{BOC} \left(\text{hai góc đối đỉnh}\right) \\ \widehat{C'B'B} = \widehat{C'CB} \left(\text{hai góc nội tiếp cùng chắn cung BC'}\right) \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\Delta OB'C'$ đồng dạng với ΔOCB (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{OB'}{OC} = \dfrac{B'C'}{CB}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{B'H'}{CI} = \dfrac{OB'}{OC}$. (3)

$\widehat{OB'H'} = \widehat{OB'C'} + \widehat{C'B'H'} = \widehat{OCB} + \widehat{HBC} = \widehat{OCB} + \widehat{BCI} = \widehat{OCI}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\Delta OB'H'$ đồng dạng với ΔOCI

$\Rightarrow \widehat{H'OB'} = \widehat{COI}$. (5)

Ta có: $\widehat{MIC} = \widehat{OBH} = \widehat{ABH} - \widehat{ABO} = \widehat{ACH} - \widehat{ACO} = \widehat{OCH} = \widehat{MOC}$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $OMCI$ nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{IMC} = \widehat{IOC}$. Lại có $\widehat{BOH} = \widehat{IMC}$ nên $\widehat{BOH} = \widehat{IOC}$. (6)

Từ (5) và (6) suy ra $\widehat{BOH} = \widehat{B'OH'} \Rightarrow H, O, H'$ thẳng hàng.

Vậy BB', CC', HH' đồng quy tại O (đpcm).

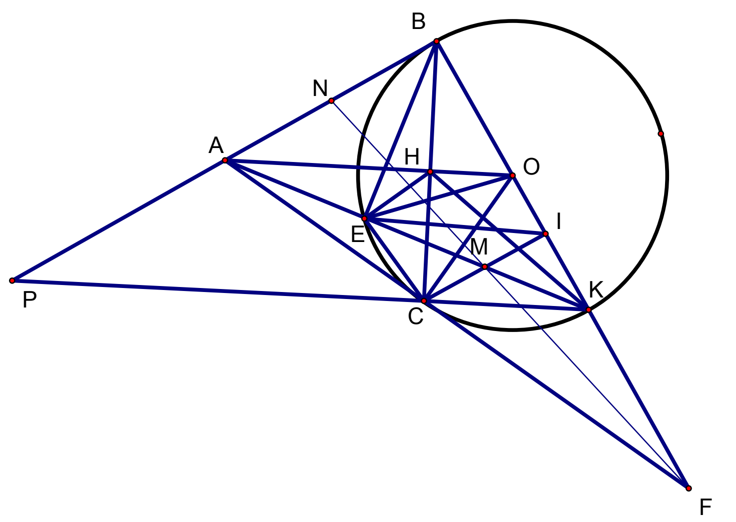
Câu 58. (Trường chuyên tỉnh Tiền Giang chuyên tin năm 2019-2020) Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là hai tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC. Kẻ đường kính BK của (O), AK cắt (O) tại E, AB cắt CK tại P.

1.Chứng minh $AB^2 = AE.AK$ và tứ giác $OHEK$ nội tiếp.

2.Chứng minh $CE \perp HE$ và $\widehat{OKH} = \widehat{OAE}$.

3.Tia BK và tia AC cắt nhau tại F, kẻ $CI \perp BK$ ($I \in BK$), AK và CI cắt nhau tại M. Gọi N là trung điểm của AB. Chứng minh ba điểm F, M, N thẳng hàng.

Lời giải



1. Chứng minh $AB^2 = AE.AK$ và tứ giác $OHEK$ nội tiếp..

Ta có $\widehat{ABE} = \widehat{AKB}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$)

$\widehat{BAE} = \widehat{BAK}$. Do đó $\Delta ABE \sim \Delta AKB$.

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AK} = \dfrac{AE}{AB} \Rightarrow AB^2 = AE.AK$.

Ta có $\widehat{AHB} = \widehat{AEB} = 90^0 \Rightarrow ABHE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AHE} = \widehat{ABE}$.

Mà $\widehat{ABE} = \widehat{AKB}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$)

$\Rightarrow \widehat{AHE} = \widehat{AKB} = \widehat{EKO}$. Do đó, tứ giác $OHEK$ nội tiếp..

2. Chứng minh $CE \perp HE$ và $\widehat{OKH} = \widehat{OAE}$ ..

Ta có $\widehat{HEK} = \widehat{ABC}$ ($ABHE$ nội tiếp).

$\widehat{CEK} = \widehat{CBK}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{CK}$)

$\Rightarrow \widehat{HEC} = \widehat{HEK} + \widehat{CEK} = \widehat{ABC} + \widehat{CBK} = 90^0 \Rightarrow CE \perp HE$ ..

Ta có $\widehat{OKH} = \widehat{OEH}$ ($OHEK$ nội tiếp)

$\widehat{OEB} = \widehat{OBE} = \widehat{BAE}$ (cùng phụ $\widehat{ABE}$).

Mà $\widehat{BEH} = \widehat{BAH} \Rightarrow \widehat{OEH} = \widehat{OAE}$. Suy ra $\widehat{OKH} = \widehat{OAE}$ ..

3. Tia BK và tia AC cắt nhau tại F , kẻ $CI \perp BK$ ($I \in BK$), AK và CI cắt nhau tại M . Gọi N là trung điểm của AB . Chứng minh ba điểm F, M, N thẳng hàng..

Ta có $AO // CK$ (cùng vuông góc với BC)

O là trung điểm BK nên A là trung điểm BP .

Mà $CI // BP$ $\Rightarrow AK$ qua trung điểm của CI $\Rightarrow M$ là trung điểm của CI ..

Gọi N' là giao điểm của FM và AB

Ta có $CI // AB$ (cùng vuông góc BK)

$$\Rightarrow \frac{CM}{AN'} = \frac{FM}{FN'} = \frac{MI}{N'B}$$

Mà $CM = MI \Rightarrow AN' = N'B \Rightarrow N'$ là trung điểm của AB $\Rightarrow N' \equiv N$.

Vậy ba điểm F, M, N thẳng hàng..

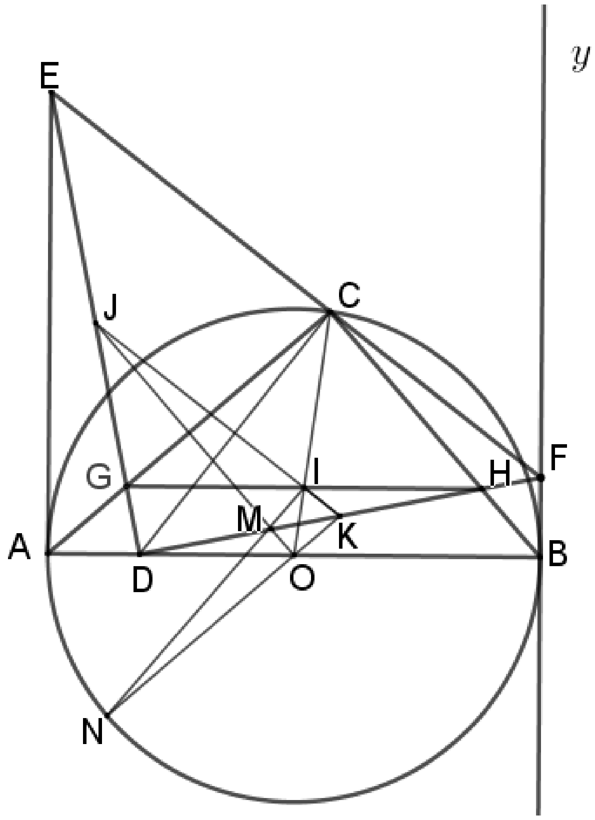
Câu 59. (Trường chuyên tỉnh Tiền Giang Vòng 2 năm 2019-2020) Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên cùng mặt phẳng bờ AB, vẽ các tiếp tuyến Ax, By của (O). Trên (O), lấy điểm C (CA < CB) và trên đoạn thẳng OA lấy điểm D (D khác O, A). Đường thẳng vuông góc với CD tại C cắt Ax, By lần lượt tại E, F. AC cắt DE tại G, BC cắt DF tại H, OC cắt GH tại I.

1. Chứng minh hai tam giác AGE, FHC đồng dạng và I là trung điểm của GH.

2. Gọi J, K lần lượt là trung điểm của DE, DF. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.
3. Gọi M là giao điểm của JO và DK. Chứng minh tam giác JOK vuông và ba đường thẳng DE, IM, KO đồng quy.

Lời giải

Hình vẽ:



1. Chứng minh hai tam giác AGE, FHC đồng dạng và I là trung điểm của GH.

Ta có: $\widehat{CAE} = \widehat{ABC}$ (cùng chắn cung AC)

CDBF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{CFD}$ (cùng chắn cung CD)

Suy ra: $\widehat{CAE} = \widehat{CFD}$ (1)

ADCE nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{ACD}$ (cùng chắn cung AD)

$\widehat{ACD} = \widehat{BCF}$ (cùng phụ $\widehat{BCD}$)

Suy ra: $\widehat{AED} = \widehat{BCF}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: hai tam giác AGE, FHC đồng dạng

Ta có: $\widehat{CGD} = \widehat{AGE} = \widehat{CHF} \Rightarrow CGDH$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CGH} = \widehat{CDH}$

$\widehat{CDH} = \widehat{CBF}$ (CDBF nội tiếp)

Suy ra: $\widehat{CGH} = \widehat{CBF}$. Mà $\widehat{CBF} = \widehat{CAB} \Rightarrow \widehat{CGH} = \widehat{CAB} \Rightarrow GH // AB$

Suy ra: $\dfrac{GI}{AO} = \dfrac{IH}{OB}$. Vì AO = OB nên GI = IH $\Rightarrow$ I là trung điểm GH

2. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Vì I, J lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác CGDH, ADCE nên $IJ \perp CD$

Vì J, K lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác ADCE, BDCF nên $JK \perp CD$

Suy ra: I, J, K thẳng hàng.

3. Chứng minh tam giác JOK vuông và ba đường thẳng DE, IM, KO đồng quy.

Ta có: J là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác AOCE $\Rightarrow OJ \perp AC$

$\Rightarrow OJ//BC\left(BC \perp AC\right)$

Mặt khác $JK//EF$ (tính chất đường trung bình)

Do đó: $\widehat{MJK} = \widehat{BCF}$

Mà $\widehat{BCF} = \widehat{BDF}$ (BDCF nội tiếp)

Suy r: $\widehat{MJK} = \widehat{BDF} = \widehat{ODK} \Rightarrow$ JDOK nội tiếp

Suy ra: $\widehat{JOK} = \widehat{JDK}$

Mà: $\widehat{JDK} = 90^0$ (CGDH nội tiếp và $\widehat{GCH} = 90^0$)

Suy ra: $\widehat{JOK} = 90^0$. Suy ra tam giác JOK vuông tại O

Gọi N là giao điểm của ED và OK

Ta có: M là trực tâm tam giác JNK nên $NM \perp JK$ (3)

$\widehat{MOI} = \widehat{JOC} = \widehat{OCB} = \widehat{OBC} = \widehat{CFD}$ (vì OJ//BC)

Mà $\widehat{CFD} = \widehat{IKD}$ (JK//EF) $\Rightarrow \widehat{MOI} = \widehat{IKM}$ suy ra IMOK nội tiếp

Suy ra: $IM \perp JK$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra ba đường thẳng DE, IM, KO đồng quy.

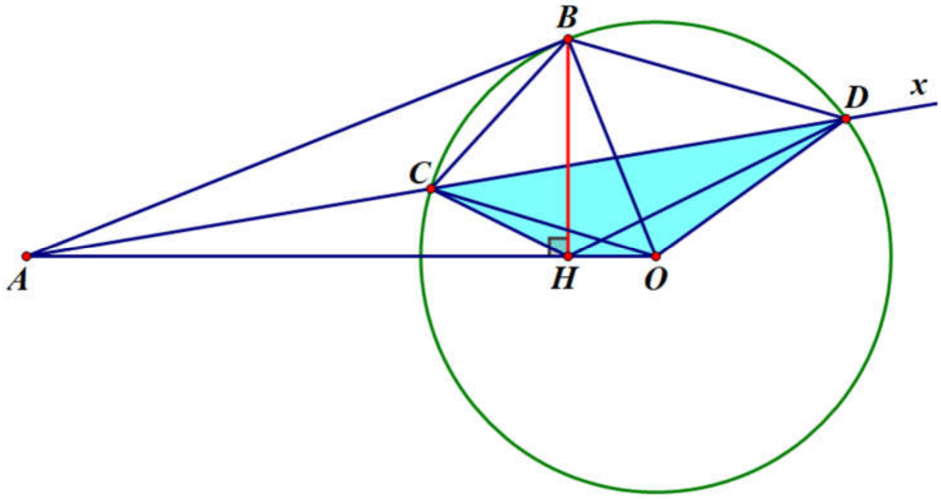
Câu 60. (Trường chuyên tỉnh Tuyên Quang chuyên toán năm 2019-2020) Cho đường tròn (O) cố định và điểm A cố định ở ngoài đường tròn (O). Từ A kẻ đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (O) tại B. Một tia Ax thay đổi, nằm trong miền $\widehat{OAB}$, cắt đường tròn (O) tại hai điểm C, D (C ở giữa A và D). Từ B kẻ BH vuông góc với AO tại H. Chứng minh rằng:

a) Tích $AC.AD$ không đổi;

b) CHOD là tứ giác nội tiếp;

c) Phân giác của $\widehat{CHD}$ cố định.

Lời giải



Học sinh vẽ hình đúng; ghi giả thiết, kết luận

a)

Xét ΔABC và ΔADB có: $\widehat{BAD}$ chung; $\widehat{ABC}=\widehat{ADB}=\frac{1}{2}s\tilde{n}\widehat{BC}$

$\Rightarrow \Delta ABC \# \Delta ADB$ (góc-góc)

$\Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AB}\Rightarrow AC.AD=AB^2$ (3)

Do đường tròn (O), A cố định $\Rightarrow AB$ không đổi $\Rightarrow AC.AD$ không đổi

b)

ΔABO vuông tại B, đường cao BH$\Rightarrow AB^2=AH.AO$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow AC.AD=AH.AO\Rightarrow \frac{AC}{AH}=\frac{AO}{AD}$, mà $\widehat{OAD}$ chung

$\Rightarrow \Delta AHC \# \Delta ADO$ (cạnh-góc-cạnh)

$\Rightarrow \widehat{AHC}=\widehat{ADO}$ (5)$\Rightarrow$ Tứ giác CHOD nội tiếp

c)

Tứ giác CHOD nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OHD}=\widehat{OCD}$ (6)

ΔCOD cân tại O $\Rightarrow \widehat{OCD}=\widehat{ODC}$ hay $\widehat{OCD}=\widehat{ADO}$ (7)

Từ (5); (6) và (7) $\Rightarrow \widehat{AHC}=\widehat{OHD}$

Mà $\widehat{AHC}+\widehat{BHC}=\widehat{OHD}+\widehat{BHD}=90^0$ $\Rightarrow \widehat{BHC}=\widehat{BHD}$

$\Rightarrow BH$ là phân giác của $\widehat{CHD}$, BH cố định $\Rightarrow$ ĐPCM

Câu 61. (Trường chuyên tỉnh Tây Ninh Vòng 2 năm 2019-2020) Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (O) có tâm O.

a)Trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn (O) lấy điểm D (khác A, B). Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn tâm A bán kính AC với đường thẳng BD. Chứng minh AD là đường trung trực của CK.

b)Lấy P là điểm bất kỳ trên đoạn OC (khác O,C). Gọi E,F lần lượt là hình chiếu vuông góc của P trên AB và AC. Gọi Q là điểm đối xứng của P qua đường thẳng EF. Chứng minh Q thuộc đường tròn (O).

Lời giải

Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (O) có tâm O

a)Trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn (O) lấy điểm D (khác A,B). Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn tâm A bán kính AC với đường thẳng BD. Chứng minh AD là đường trung trực của CK.

$\widehat{BKC}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}=45^\circ$ (1)

$\widehat{BDC}=90^\circ \Rightarrow \widehat{KDC}=90^\circ$ (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra $\triangle KDC$ vuông cân tại D nên $DC=DK$

Ta lại có $AC=AK$ do đó AD là trung trực của CK.

b) Lấy P là điểm bất kỳ trên đoạn OC (khác O,C). Gọi E,F lần lượt là hình chiếu vuông góc của P trên AB và AC. Gọi Q là điểm đối xứng của P qua đường thẳng EF. Chứng minh Q thuộc đường tròn (O).

Gọi I là giao điểm của AP,EF. Ta có $IP=IQ=IA$ nên $\triangle AQP$ vuông tại Q (1)

Ta có $FP=FQ$ và $\triangle PFC$ vuông cân tại F nên F là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle PCQ$

Do đó $\widehat{PQC}=\frac{1}{2}\widehat{PFC}=\frac{1}{2}.90^\circ=45^\circ$ (2).

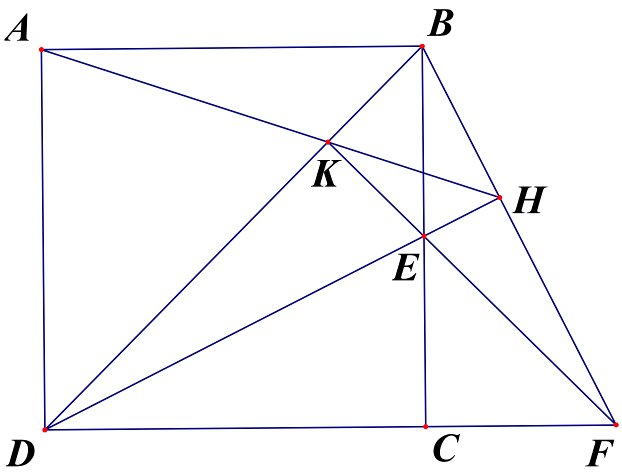
Từ $(1),(2)$ suy ra $\widehat{AQC}=\widehat{AQP}+\widehat{PQC}=135^\circ$

Suy ra $\widehat{AQC}+\widehat{ABC}=135^\circ+45^\circ=180^\circ$.

Vậy tứ giác $ABCQ$ nội tiếp, nên Q thuộc đường tròn (O).

Câu 62. (Trường chuyên tỉnh Vĩnh Long vòng 2 năm 2019-2020) Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4 cm. E là trung điểm cạnh BC. Đường thẳng qua B vuông góc với DE tại H và cắt đường thẳng CD tại F. Gọi K là giao điểm của AH và BD.
a) Chứng minh tứ giác $DKHF$ nội tiếp được đường tròn.
b) Tính diện tích tứ giác $BKEH$.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{BAD} = \widehat{BHD} = 90°$ suy ra tứ giác $ABHD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AHB} = \widehat{ADB} = 45°$.

Xét tứ giác $DKHF$ có $\widehat{KHB} = \widehat{KDF} = 45° \Rightarrow \widehat{KDF} + \widehat{KHF} = 180^0$ nên $DKHF$ là tứ giác nội tiếp.

b) E là trung điểm BC thì $EB = 2cm$

Ta có $\dfrac{EH}{BH} = \cot\widehat{BEH} = \cot\widehat{DEC} = \dfrac{EC}{DC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow BH = 2EH$.

Mà $BH^2 + EH^2 = BE^2$ hay $4EH^2 + EH^2 = 4 \Leftrightarrow EH = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow BH = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

Diện tích tam giác BEH bằng $\dfrac{4}{5}cm^2$.

$DKHF$ là tứ giác nội tiếp suy ra $\widehat{DKF} = \widehat{DHF} = 90° \Rightarrow FK$ là đường cao tam giác BDF. Mà E là trực tâm tam giác $BDF \Rightarrow F, E, K$ thẳng hàng suy ra $EK \perp KB$

Mặt khác tam giác BKE có $\widehat{KBE} = 45^0 \Rightarrow \Delta BKE$ vuông cân tại K.

Tam giác BKE vuông cân tại K nên $KB = KE = \sqrt{2}$. Diện tích tam giác BKE bằng $1\ cm^2$. Vậy diện tích tứ giác $BKEH$ bằng $\dfrac{9}{5}cm^2$.

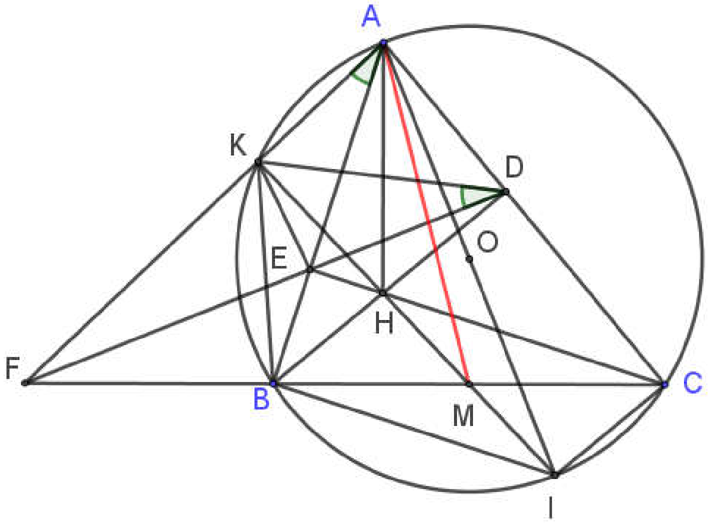
Câu 63. (Trường chuyên tỉnh Vĩnh Long vòng 2 năm 2019-2020) Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn tâm O. Các đường cao BD, CE cắt nhau tại H, BC cắt DE tại F, AF cắt đường tròn tâm O tại điểm thứ hai là K.

a) Chứng minh $FK.FA = FE.FD = FB.FC$.

b) Vẽ đường kính AI của đường tròn (O) và gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh H là trực tâm của tam giác AMF.

Lời giải

a) Chứng minh $FK.FA = FE.FD = FB.FC$.



Tứ giác $BEDC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FEB} = \widehat{FCD} \Rightarrow \Delta FEB$ đồng dạng ΔFCD

suy ra $FE.FD = FB.FC$

Tứ giác $AKBC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FKB} = \widehat{FCA} \Rightarrow \Delta FKB$ đồng dạng $\Delta FCA \Rightarrow FK.FA = FB.FC$
$\Rightarrow FK.FA = FE.FD = FB.FC$

b) Vẽ đường kính AI của đường tròn (O) và gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh H là trực tâm của tam giác AMF.

$FK.FA = FE.FD \Rightarrow \dfrac{FK}{FE} = \dfrac{FD}{FA}$, $\widehat{AFE}$ là góc chung $\Rightarrow \Delta FKD$ đồng dạng ΔFEA

$\Rightarrow \widehat{FDK} = \widehat{FAE} \Rightarrow AKED$ nội tiếp được đường tròn.

Mà tứ giác $ADHE$ nội tiếp được đường tròn.

$\Rightarrow$ Tứ giác $AKHD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AKH} = \widehat{ADH} = 90^0 \Rightarrow HK \perp AF$

Mặt khác $IK \perp AF \Rightarrow I, H, K$ thẳng hàng.

$BICH$ là hình bình hành $\Rightarrow I, H, M$ thẳng hàng $\Rightarrow K, H, M$ thẳng hàng

$\Rightarrow MK \perp AF$, mà $AH \perp MF \Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác AMF.

Câu 64. (Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu thi chung năm 2019-2020) Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$. Đường tròn (O) đường kính BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại F, E (F khác B và E khác C). BE cắt CF tại H, AH cắt BC tại D.

a)Chứng minh $AEHF$ và $AFDC$ là các tứ giác nội tiếp.

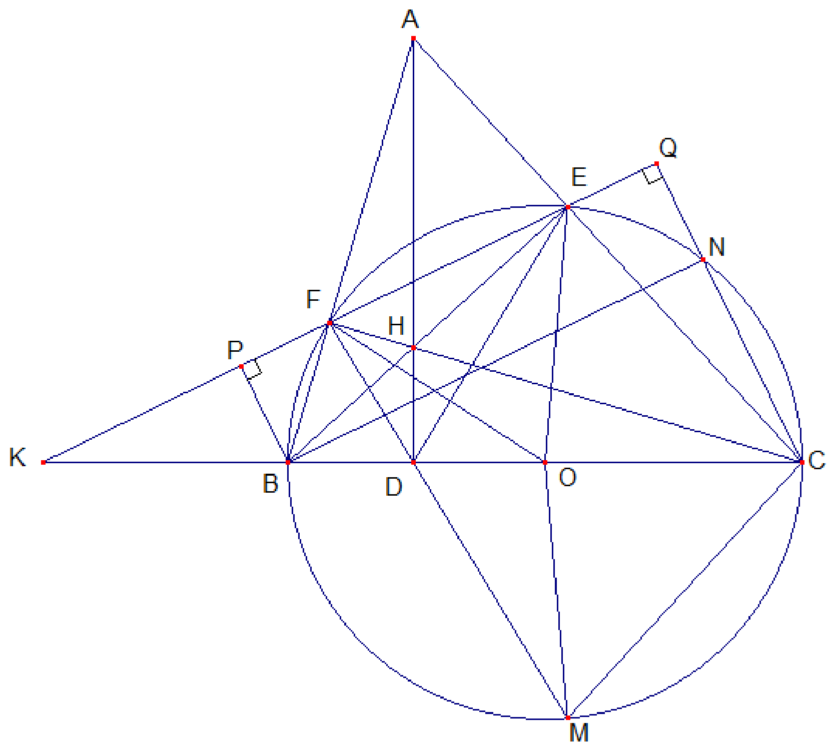
b)Chứng minh DA là tia phân giác của góc $\widehat{EDF}$.

c)Gọi K là giao điểm của đường thẳng EF và đường thẳng BC.

Chứng minh $KE.KF = KD.KO$.

d)Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của B và C lên đường thẳng EF.
Chứng minh $DE + DF = PQ$.

Lời giải



Vẽ hình hết câu a-0.25

Vẽ hình hết câu c-0.5.

a). $\widehat{BFC}=90^o$ (*góc nt chắn nửa đtròn*) $\Rightarrow \widehat{HFA}=90^o$ (1) .

$\widehat{BEC}=90^o$ (*góc nt chắn nửa đtròn*) $\Rightarrow \widehat{HEA}=90^o$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AEHF$ là tứ giác nội tiếp..

H là trực tâm của tam giác $ABC \Rightarrow \widehat{ADC}=90^o$.

Mà $\widehat{AFC}=90^o$(cmt) $\Rightarrow$ $AFDC$ là tứ giác nội tiếp..

b).Ta có $\widehat{FDA}=\widehat{FCE}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AF}$)..

Vì $DHEC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FCA}=\widehat{ADE}$ ..

Suy ra $\widehat{ADF}=\widehat{ADE} \Rightarrow DA$ là tia phân giác của $\widehat{FDE}$ ..

c). $\widehat{ADF}=\widehat{ACF} \Rightarrow 2\widehat{ADF}=2\widehat{ACF}$.

$\Rightarrow \widehat{EDF}=\widehat{EOF}$

$\Rightarrow$ tứ giác $OEFD$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{FEO}=\widehat{FDK} \Rightarrow \Delta KDF \sim \Delta KEO \Rightarrow KE.KF=KD.KO$..

d).Gọi M là giao điểm của FD với (O).

Ta có $\widehat{ECD}=\widehat{DHB}=\widehat{DFB}=\widehat{BCM}$ mặt khác $\widehat{EDC}=\widehat{FDB}=\widehat{MDC}$

Suy ra $\Delta DEC=\Delta DMC \Rightarrow DE=DM \Rightarrow DF+DE=DF+DM=FM$ (3).

Gọi N là giao điểm của QC với (O) . Dễ thấy $BNQP$ là hình chữ nhật $\Rightarrow PQ = BN$ và $\overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{EN}$; $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{BE}$ (vì $\overset{\frown}{EC} = \overset{\frown}{MC}$)

$\Rightarrow \overset{\frown}{BM} + \overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{BE} + \overset{\frown}{EN} \Rightarrow \overset{\frown}{FM} = \overset{\frown}{BN} \Rightarrow FM = BN = PQ$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $DE + DF = PQ$..

Câu 65. **(Trường chuyên tỉnh Bình Phước chuyên toán năm 2019-2020)** Cho đường tròn $(O;R)$ và đường tròn $(O';R')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Trên tia đối của tia AB lấy điểm C. Kẻ tiếp tuyến CD, CE với đường tròn $(O;R)$, trong đó D, E là các tiếp điểm và E nằm trong đường tròn $(O';R')$. Đường thẳng AD, AE cắt đường tròn $(O';R')$ lần lượt tại M và N (M, N khác A). Tia DE cắt MN tại I. Chứng minh rằng:

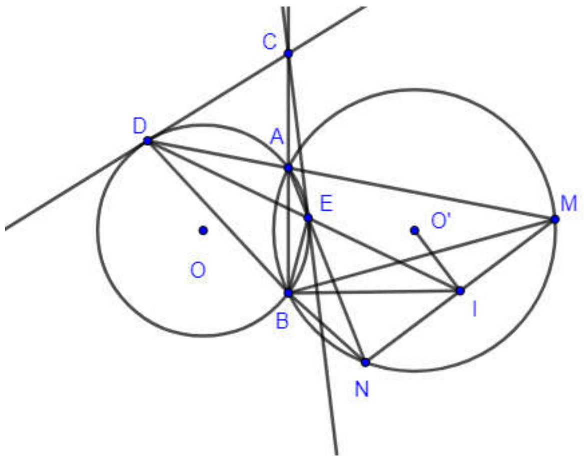
a)Tứ giác $BEIN$ nội tiếp.

b) MIB đồng dạng với AEB.

c)$O'I$ vuông góc với MN.

Lời giải

a)Chứng minh tứ giác $BEIN$ nội tiếp.



Tứ giác $MNBA$ nội tiếp đường tròn (O') cho ta $\widehat{MNB} = \widehat{BAD}$ (1)

Tứ giác $BEAD$ nội tiếp đường tròn (O) cho ta $\widehat{BAD} = \widehat{BED}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{MNB} = \widehat{BED}$

Suy ra tứ giác $BEIN$ nội tiếp.

b) MIB đồng dạng với AEB.

Tứ giác $MNBA$ nội tiếp đường tròn (O') cho ta

$$\widehat{BMN} = \widehat{NAB} \ (\ )$$

$\widehat{MNA} = \widehat{MBA}$ (3)

Theo a) ta có $INBE$ nội tiếp nên $\widehat{MNA} = \widehat{INE} = \widehat{IBE}$ (4)

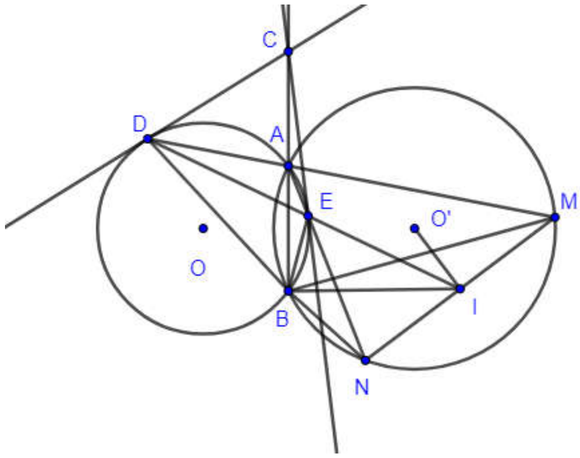
Từ (3),(4) suy ra $\widehat{MNA} = \widehat{IBE} = \widehat{MBA}$

Ta có $\widehat{IBE} = \widehat{IBM} + \widehat{MBE}$ và $\widehat{MBA} = \widehat{EBA} + \widehat{MBE}$

Mà $\widehat{IBE} = \widehat{MBA}$ suy ra $\widehat{IBM} = \widehat{EBA}$ ( )

Từ ( ), ( ) suy ra MIB đồng dạng với AEB (g-g).

c) $O'I$ vuông góc với MN.



Do CD là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{CDA} = \widehat{CBD}$

suy ra CDB đồng dạng CAD suy ra $\frac{BD}{DA} = \frac{CD}{CA}$.

Chứng minh tương tự với tiếp tuyến CE ta có $\frac{CE}{CA} = \frac{EB}{EA}$

Mà $CD = CE$ (tính chất tiếp tuyến) nên $\frac{EB}{EA} = \frac{BD}{DA}$ (5)

Theo chứng minh b) ta có MIB đồng dạng AEB nên $\frac{EB}{EA} = \frac{IB}{IM}$ (6)

Ta có $\widehat{ABD} = \widehat{AED} = \widehat{IEN}$.

Theo chứng minh a) ta có tứ giác $BEIN$ nội tiếp, suy ra $\widehat{IEN} = \widehat{IBN}$

suy ra $\widehat{ABD} = \widehat{IBN}$.

Mà theo chứng minh trên ta có $\widehat{INB} = \widehat{DAB}$ suy ra DBA đồng dạng với IBN suy ra $\frac{DB}{DA} = \frac{IB}{IN}$ (7)

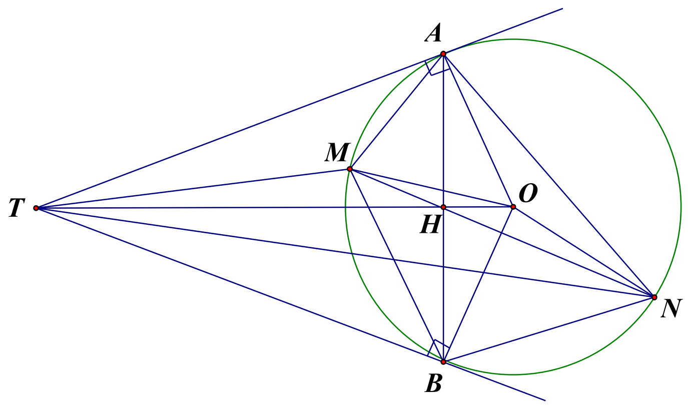
Từ (5),(6),(7) suy ra $\frac{IB}{MI} = \frac{IB}{IN} \Leftrightarrow MI = NI$ suy ra I là trung điểm MN suy ra $O'I$ vuông góc với MN.

Câu 66. (Trường chuyên tỉnh Long An chuyên toán dự bị năm 2019-2020) Cho đường tròn tâm O và kí hiệu là (O). Gọi T là điểm nằm ngoài (O). Từ T vẽ hai tiếp tuyến của (O) với A, B lần lượt là các tiếp điểm. Gọi H là giao điểm của AB và OT.

a) Chứng minh: $4OH = \dfrac{AB^2}{TH}$.

b) Một đường thẳng đi qua H và cắt đường tròn (O) tại hai điểm M, N sao cho $\widehat{MTN} = 30^0$. Tính số đo $\widehat{MON}$.

Lời giải



a) Chứng minh: $4OH = \dfrac{AB^2}{TH}$

OT là đường trung trực của đoạn AB

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác OAT vuông tại A,

đường cao AH ta có: $TH.OH = AH^2$

Vì $AH = \dfrac{AB}{2}$ nên $4OH = \dfrac{AB^2}{TH}$

b) Tính số đo $\widehat{MON}$.

Tứ giác $AMBN$ nội tiếp nên $\widehat{MAH} = \widehat{BNH}$

Vì $\widehat{MAH} = \widehat{BNH}$ nên tam giác MAH đồng dạng tam giác BNH

Suy ra: $MH.NH = HB.HA = \dfrac{AB^2}{4}$

Suy ra: $MH.NH = HO.HT$

Vì $HO.HT = MH.NH$

nên tam giác ONH đồng dạng tam giác MTH

Vì tam giác OHN đồng dạng tam giác MHT nên $\widehat{ONH} = \widehat{MTH}$

Vì $\widehat{ONH} = \widehat{MTH}$ nên tứ giác $OMTN$ nội tiếp

Suy ra: $\widehat{MON} = 150^0$

Câu 67. (Trường chuyên tỉnh Long An chuyên toán năm 2019-2020)

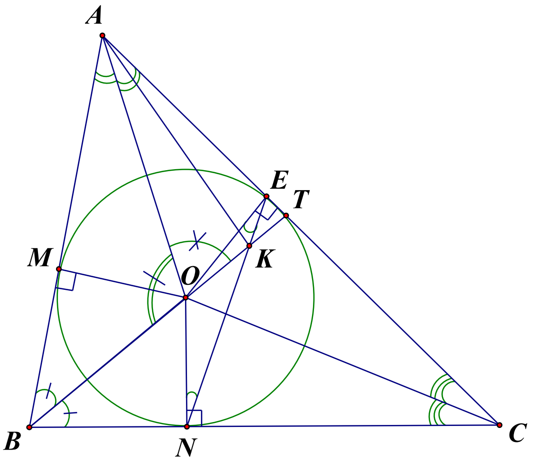
Cho tam giác ABC nhọn có $\widehat{BAC} > \widehat{ACB}$. Đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại các điểm M, N, E. Gọi K là giao điểm của BO và NE.

a) Chứng minh: $\widehat{AOB} = 90^0 + \dfrac{\widehat{ACB}}{2}$.

b) Chứng minh: năm điểm A, M, K, O, E cùng thuộc một đường tròn.

c) Gọi T là giao điểm của BO với AC. Chứng minh: $KT.BN = KB.ET$.

Lời giải



a).

$\widehat{AOB}+\widehat{OBA}+\widehat{OAB}=180^0$

$\widehat{AOB}+\frac{1}{2}\widehat{ABC}+\frac{1}{2}\widehat{BAC}+\frac{1}{2}\widehat{ACB}=180^0+\frac{1}{2}\widehat{ACB}$

$\widehat{AOB}=90^0+\frac{\widehat{ACB}}{2}$

b).Tứ giác $AEOM$ nội tiếp vì $\widehat{AEO}+\widehat{AMO}=90^0+90^0=180^0$

$\widehat{OEK}=\widehat{OCN}\Rightarrow\widehat{OEK}+90^0=\frac{1}{2}\widehat{ACB}+90^0\Rightarrow\widehat{AEK}=\widehat{AOB}$

Tứ giác $AEKO$ nội tiếp vì $\widehat{AEK}+\widehat{AOK}=180^0$

Vì tứ giác $AEOM$ nội tiếp, tứ giác $AEKO$ nội tiếp nên A,M,K,O,E cùng thuộc một đường tròn.

c).

ΔAKT đồng dạng ΔOET $\Rightarrow\frac{KT}{ET}=\frac{AK}{OE}$

ΔAKB đồng dạng $\Delta ONB\Rightarrow\frac{KB}{BN}=\frac{AK}{ON}$

Vì $OE=ON$ nên suy ra: $\frac{KT}{ET}=\frac{KB}{BN}$.

Suy ra: $KT.BN=KB.ET$

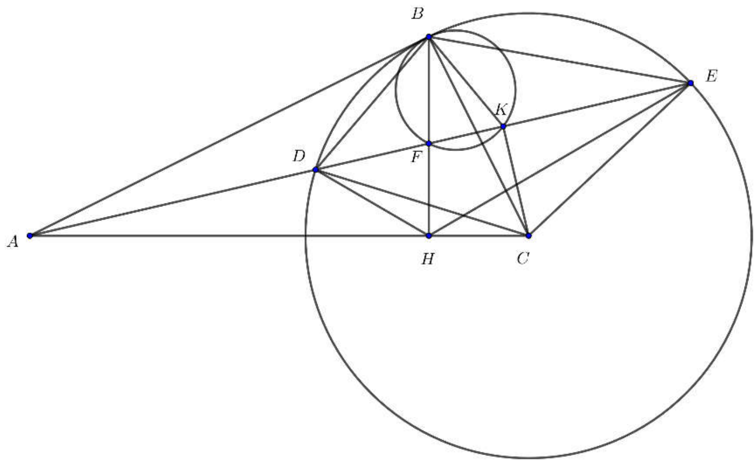
Câu 68. (Trường chuyên tỉnh Phú Thọ vòng 2 năm 2019-2020) Cho tam giác ABC vuông tại B, đường cao $BH\left(H\in AC\right)$. Gọi (ω) là đường tròn tâm C bán kính CB. Gọi F là một điểm bất kì trên đoạn thẳng BH (F khác B và H). AF cắt (ω) tại hai điểm D,E (D nằm giữa A và E). Gọi K là trung điểm DE.

a) Chứng minh rằng $FKCH$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $AD.AE=AH.AC=AF.AK$;

c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác BFK tiếp xúc với (ω) tại B.

Lời giải



a) $\widehat{FKC} = \widehat{FHC} = 90°$ => $FKCH$ là tứ giác nội tiếp.

b) Xét hai tam giác ADB và ABE có góc A chung và $\widehat{ABD} = \widehat{AEB}$.

Do đó tam giác $\Delta ADB \sim \Delta ABE$ (g.g).

Suy ra $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AB}{AE}$ hay $AD.AE = AB^2$.

Mặt khá $AB^2 = AH.AC$.

Do đó $AD.AE = AH.AC$

Ta có $\Delta AFH \sim \Delta ACK$ (g.g) suy ra $AF.AK = AH.AC$

=> $AD.AE = AH.AC = AF.AK$.

c) Ta có $AH.AC = AB^2$ nên $AF.AK = AB^2$.

Ta có $\Delta AFB \sim \Delta ABK$ (c.g.c) suy ra $\widehat{ABF} = \widehat{AKB}$ hay AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BFK,

=> AB là tiếp tuyến chung => Đường tròn ngoại tiếp tam giác BFK tiếp xúc với (ω) tại B.

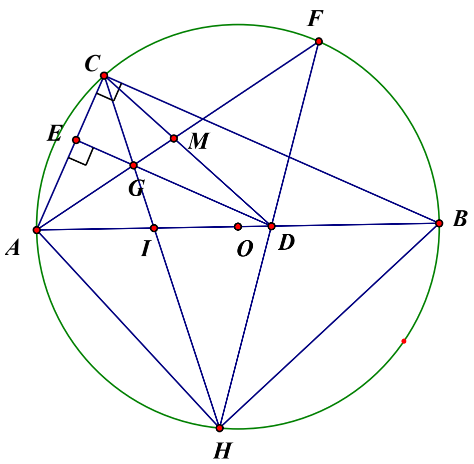
Câu 69. (Trường chuyên tỉnh Quảng Trị Vòng 2 năm 2019-2020) Trên đường tròn (O) đường kính AB lấy điểm C (C khác A và B), điểm D nằm trên đoạn thẳng AB sao cho $BD = AC$. Kẻ DE vuông góc với AC tại E, đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ cắt DE và (O) lần lượt tại G và F (F khác A). Đường thẳng CG cắt AB và (O) theo thứ tự tại I và H (H khác C). Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $AGDH$ nội tiếp đường tròn.

b) Ba điểm H, D và F thẳng hàng.

c) Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AD.

Lời giải



a) Vì $DE//BC$ nên

$\widehat{ADE}=\widehat{ABC}=\widehat{AHC}=\widehat{AHG}$ do đó tứ giác $AGDH$ nội tiếp.

b) Từ tứ giác $AGDH$ nội tiếp, ta có: $\widehat{DHG}=\widehat{DAG}=\widehat{BAF}=\widehat{FAC}=\widehat{CHF}=\widehat{FHG}$

Suy ra hai tia HD và HF trùng nhau.

Vậy H, D, F thẳng hàng.

Gọi M là giao điểm của CD và AF.

Ta có: $\frac{IA}{ID}.\frac{MD}{MC}.\frac{EC}{EA}=1$ (Định lý Ceva)

$\frac{MD}{MC}=\frac{AD}{AC}$ (Phân giác)

$\frac{EC}{EA}=\frac{DB}{DA}=\frac{AC}{DA}$ (Talet)

Suy ra: $\frac{IA}{ID}.\frac{AD}{AC}.\frac{AC}{DA}=1 \Leftrightarrow \frac{IA}{ID}=1$.

Vậy I là trung điểm AD.

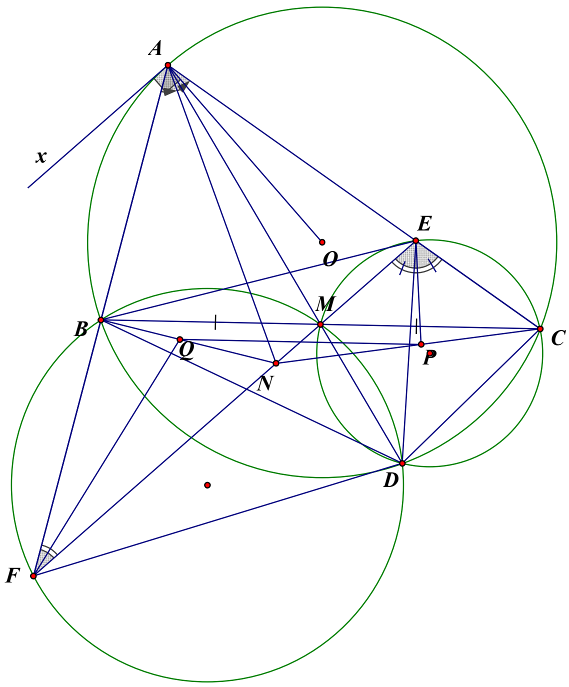
Câu 70. (Trường chuyên tỉnh Thanh hóa chuyên toán năm 2019-2020) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) với $AB<AC$. Gọi M là trung điểm của BC, AM cắt (O) tại điểm D khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDC cắt đường thẳng AC tại E khác C. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDB cắt đường thẳng AB tại F khác B.

1.Chứng minh rằng hai tam giác BDF, CDE đồng dạng

2.Chứng minh rằng ba điểm E, M, F thẳng hàng và $OA\perp EF$

3.Đường phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt EF tại điểm N. Đường phân giác của $\widehat{CEN}$ cắt CN tại P, đường phân giác của $\widehat{BFN}$ cắt BN tại Q. Chứng minh rằng PQ song song với BC.

Lời giải



1. Do các tứ giác $MECD, MBFD$ nội tiếp nên $\widehat{DEC} = \widehat{DMC} = \widehat{DFB}$ (1)

Tứ giác $ABDC$ nội tiếp nên $\widehat{DCA} = \widehat{DBF}$ hay $\widehat{DCE} = \widehat{DBF}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta BDF \backsim \Delta CDE$ (g.g) (đpcm).

2. Theo câu 1, $\Delta BDF \backsim \Delta CDE \Rightarrow \widehat{BDF} = \widehat{CDE}$ mà $\widehat{BDF} = \widehat{BMF}, \widehat{CDE} = \widehat{CME}$ (do các tứ giác $MECD, MBFD$ nội tiếp) nên $\widehat{BMF} = \widehat{CME}$

Lại có: $\widehat{BMF} + \widehat{FMC} = 180^0 \Rightarrow \widehat{CME} + \widehat{FMC} = 180^0 \Rightarrow E, M, F$ thẳng hàng.

Kẻ tia tiếp tuyến Ax của đường tròn (O). Ta có: $\widehat{BAx} = \widehat{ACB}$ hay $\widehat{FAx} = \widehat{ECB}$ (3)

Vì các tứ giác $MECD, MBFD$ nội tiếp nên $\begin{cases} AB \cdot AF = AM \cdot AD \\ AE \cdot AC = AM \cdot AD \end{cases}$

$\Rightarrow AB \cdot AF = AE \cdot AC \Rightarrow BECF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ECB} = \widehat{EFA}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $\widehat{FAx} = \widehat{EFA} \Rightarrow EF // Ax$

Mà $OA \perp Ax \Rightarrow OA \perp EF$ (đpcm).

3. Vì EP, FQ, AN lần lượt là đường phân giác trong các tam giác ENC, FBN, AFE nên theo tính chất đường phân giác trong tam giác, ta có:

$$\frac{PN}{PC} = \frac{EN}{EC}, \frac{QN}{QB} = \frac{FN}{FB}, \frac{EN}{FN} = \frac{AE}{AF} \quad (5)$$

Do $\Delta ABM \backsim \Delta ADF$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AF}{DF} = \dfrac{AM}{BM}$

Do $\Delta ACM \backsim \Delta ADE\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{AE}{DE} = \dfrac{AM}{CM}$

Mà $BM = CM(gt) \Rightarrow \dfrac{AF}{DF} = \dfrac{AE}{DE} \Rightarrow \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{DE}{DF} \Rightarrow \dfrac{EN}{FN} = \dfrac{DE}{DF}\left(\text{do } \dfrac{EN}{FN} = \dfrac{AE}{AF} \text{ theo } (5)\right)$

Mặt khác, theo câu 1, $\Delta BDF \backsim \Delta CDE \Rightarrow \dfrac{EC}{FB} = \dfrac{DE}{DF}$

Do đó: $\dfrac{EN}{FN} = \dfrac{EC}{FB}$ hay $\dfrac{EN}{EC} = \dfrac{FN}{FB}$ nên từ $(5) \Rightarrow \dfrac{PN}{PC} = \dfrac{QN}{QB} \Rightarrow PQ // BC$ (đpcm)

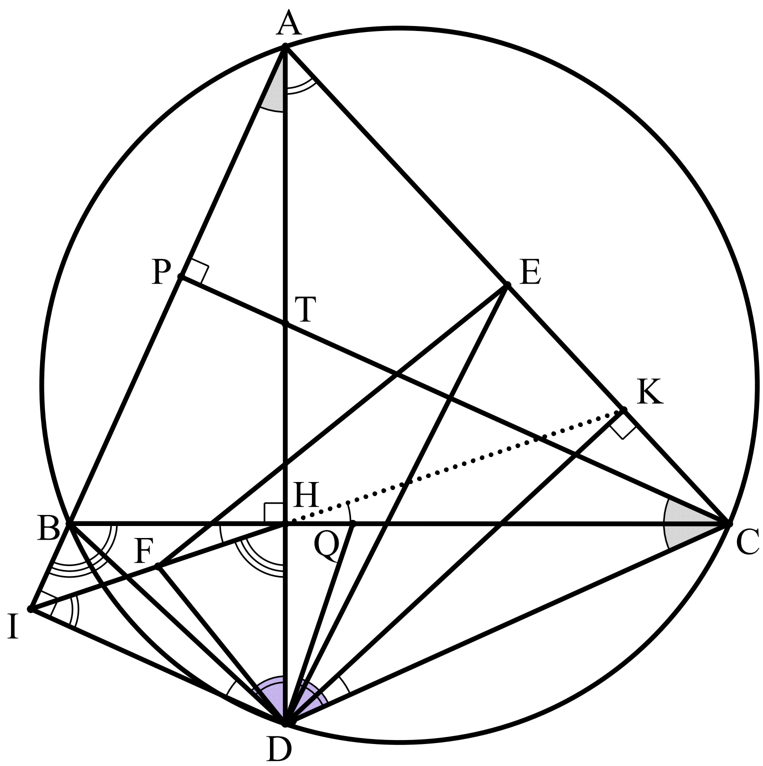
Câu 71. (Trường chuyên tỉnh Thừa Thiên Huế vòng 2 năm 2019-2020) Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và trực tâm là T. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC và D là điểm đối xứng với T qua đường thẳng BC; I và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên AB và AC; E và F lần lượt là trung điểm của AC và IH.

a) Chứng minh ABDC là tứ giác nội tiếp và hai tam giác ACD và IHD đồng dạng.

b) Chứng minh ba điểm I, H, K thẳng hàng và DEF là tam giác vuông.

c) Chứng minh $\dfrac{BC}{DH} = \dfrac{AB}{DI} + \dfrac{AC}{DK}$.

Lời giải



a) Chứng minh ABDC là tứ giác nội tiếp và hai tam giác ACD và IHD đồng dạng.

Tia CT cắt cạnh AB tại P.

Ta có $\widehat{DAB} = \widehat{TCB}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$), $\widehat{TCB} = \widehat{DCB}$ (T và D đối xứng qua BC).

Do đó $\widehat{DAB} = \widehat{DCB}$. Vì A và C nằm cùng phía đối với BC nên ABDC là tứ giác nội tiếp.

Tứ giác IBHD có $\widehat{BHD} = \widehat{BID} = 90^\circ$ nên nội tiếp.

Suy ra $\widehat{DIH} = \widehat{DBH} = \widehat{DAC}$ và $\widehat{IHD} = \widehat{IBD} = \widehat{ACD}$.

Do đó hai tam giác ACD và IHD đồng dạng.

b) Chứng minh ba điểm I, H, K thẳng hàng và DEF là tam giác vuông.

Tứ giác IBHD nội tiếp nên $\widehat{BHI} = \widehat{BDI}$.

Tứ giác DHKC có hai đỉnh H và K cùng nhìn đoạn DC dưới một góc vuông nên nội tiếp. Suy ra $\widehat{KHC} = \widehat{KDC}$.

Các tứ giác ABDC và AIDK nội tiếp nên $\widehat{IDK} = \widehat{BDC}$ (cùng bù với $\widehat{BAC}$).

Suy ra $\widehat{BDI} = \widehat{KDC}$. Do đó $\widehat{BHI} = \widehat{KHC}$. Vì I và K nằm khác phía đối với đường thẳng BC nên ba điểm I, H, K thẳng hàng.

Hai tam giác ACD và IHD đồng dạng với nhau có DE và DF lần lượt là các đường trung tuyến nên $\frac{DC}{DH} = \frac{DE}{DF}$.

Hai tam giác DCE và DHF đồng dạng nên $\widehat{EDC} = \widehat{FDH}$. Suy ra $\widehat{HDC} = \widehat{FDE}$.

Do đó hai tam giác HDC và FDE đồng dạng suy ra $\widehat{DFE} = \widehat{DHC} = 90^\circ$.

Vậy tam giác DEF vuông tại F.

c) Chứng minh $\frac{BC}{DH} = \frac{AB}{DI} + \frac{AC}{DK}$.

Lấy điểm Q trên cạnh BC sao cho $\widehat{QDC} = \widehat{BDA}$. Lại có $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$ nên hai tam giác DBA và DQC đồng dạng. Suy ra $\frac{AB}{CQ} = \frac{AD}{CD}$.

Hai tam giác AID và CHD đồng dạng nên $\frac{AD}{CD} = \frac{DI}{DH}$.

Suy ra $\frac{AB}{CQ} = \frac{DI}{DH}$ hay $\frac{AB}{DI} = \frac{CQ}{DH}$ (1).

Vì $\widehat{QDC} = \widehat{BDA}$ nên $\widehat{HDC} = \widehat{BDQ}$. Suy ra hai tam giác BDQ và ADC đồng dạng do đó $\frac{BQ}{AC} = \frac{DB}{DA}$ (2).

Ta có $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = \widehat{HKD}$. Mặt khác $\widehat{ABD} = 180^\circ - \widehat{IBD}$, $\widehat{KHD} = 180^\circ - \widehat{IHD}$. Vì $\widehat{IBD} = \widehat{IHD}$ nên $\widehat{ABD} = \widehat{KHD}$. Suy ra hai tam giác ABD và KHD đồng dạng. Do đó $\frac{DB}{DA} = \frac{DH}{DK}$ (3). Từ (2) và (3) suy ra $\frac{BQ}{AC} = \frac{DH}{DK}$ hay $\frac{AC}{DK} = \frac{BQ}{DH}$ (4).

Từ (1) và (4) suy ra $\frac{AB}{DI} + \frac{AC}{DK} = \frac{CQ}{DH} + \frac{BQ}{DH} = \frac{BC}{DH}$.

Câu 72. (Trường chuyên tỉnh Vĩnh Phúc vòng 2 năm 2019-2020) Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm D, E, F. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC, gọi N là giao điểm của hai đường thẳng ID và EF. Qua N kẻ đường thẳng song song với BC cắt hai đường thẳng AB, AC lần lượt tại các điểm Q, P. Qua điểm A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường thẳng EF tại điểm K.

a) Chứng minh các tứ giác $INQF, INEP$ nội tiếp đường tròn và tam giác IPQ cân.

b) Chứng minh $\widehat{IAM} = \widehat{FKI}$.

c) Chứng minh hai đường thẳng IM, DK vuông góc với nhau.

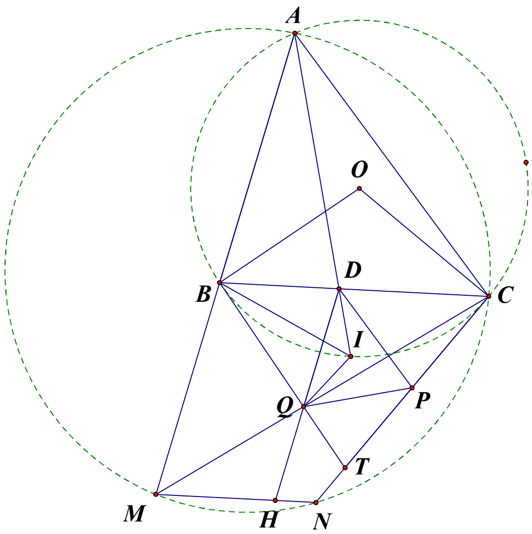
Câu 73. (Trường chuyên tỉnh Yên Bái vòng 2 năm 2019-2020) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), tia phân giác $\widehat{BAC}$ cắt cạnh BC tại D và cắt đường tròn (O) tại I. Các tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau tại T. Gọi P, Q lần lượt là điểm thuộc TC, TB sao cho $DP // AC$ và $DQ // AB$.

a) Chứng minh tứ giác $BDIQ$ nội tiếp.

b) Chứng minh AD vuông góc với PQ.

c) Đường thẳng CQ cắt đường thẳng AB tại M, đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM cắt TC tại N (N khác C). Chứng minh $MN // BC$.

Lời giải



a) Do $ABIC$ nội tiếp (O) và BT là tiếp tuyến, suy ra $\widehat{BAI} = \widehat{QBI}$

Do $DQ // AB$ suy ra $\widehat{BAI} = \widehat{QDI}$ (góc đồng vị)

Suy ra $\widehat{QBI} = \widehat{QDI}$ mà hai góc này ở hai đỉnh liền kề cùng nhìn cạnh IQ.

Suy ra $BQID$ nội tiếp.

b) **Cách 1**

Do tứ giác $BDIQ$ nên $\widehat{IDQ} = \widehat{IBQ}$

Do $AB // DQ$ nên $\widehat{BAI} = \widehat{QDI}$ mà $\widehat{BAI} = \widehat{IBQ}$

Suy ra $\widehat{IDQ} = \widehat{DQI}$ hay ΔIDQ cân tại I

Do $DQ//AB$, suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{QDI}$

Do $AC//DP$, suy ra $\widehat{CAD} = \widehat{IDP}$ mà $\widehat{BAI} = \widehat{DAC}$ (AD là phân giác góc $\widehat{BAC}$)

Suy ra $\widehat{QDI} = \widehat{IDP}$ hay DI là tia phân giác góc $\widehat{QIP}$.

Tương tự ta chứng minh được ΔIDP cân tại I.

Xét ΔIDP và ΔIDQ có $IQ = IP = ID$, ID chung, $\widehat{QDI} = \widehat{IDP}$

Suy ra $\Delta IDP = \Delta IDQ\ (c\_g\_c)$, suy ra $DP = DQ$.

Suy ra ΔPDQ cân tại D mà DI là phân giác góc $\widehat{QDP}$, suy ra $AI \perp PQ$.

Cách 2.

Do $DQ//AB$, suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{QDI}$

Do $AC//DP$, suy ra $\widehat{CAD} = \widehat{IDP}$ mà $\widehat{BAI} = \widehat{DAC}$ (AD là phân giác góc $\widehat{BAC}$)

Tương tụ ta chứng minh được $DCIP$ nội tiếp.

Xét ΔIDQ và ΔIDP có $\widehat{IDQ} = \widehat{IDP}$, cạnh ID chung

$\widehat{IQD} = \widehat{IBD} = \widehat{ICD} = \widehat{IPD}$

Suy ra $\Delta IDQ = \Delta IDP\ (g\_c\_g)$ nên $DQ = DP$ suy ra ΔQDP cân tại D.

Mà DI là phân giác góc $\widehat{QDP}$, suy ra $AI \perp PQ$.

Cách 1

c) Gọi đường thẳng DQ cắt MN tại H.

Do $DQ//AB \Rightarrow \widehat{AMH} = \widehat{DHN}$ (góc đồng vị)

Mà $\widehat{AMN} + \widehat{ACN} = 180^0$ (Tứ giác $AMNC$ nội tiếp)

Do $AC//DQ \Rightarrow \widehat{ACN} = \widehat{DPN}$ (góc đồng vị).

Suy ra $\widehat{DHN} + \widehat{DPN} = \widehat{AMN} + \widehat{ACN} = 180^0$ mà hai góc này ở vị trí đối diện.

Suy ra tứ giác $DHNP$ nội tiếp.

Ta có $\widehat{DHN} = \widehat{DPC}$ (cùng bù góc $\widehat{DPN}$).

Mà tứ giác $DIPC$ nội tiếp, suy ra $\widehat{DPC} = \widehat{DIC}$ (góc nội tiếp chắn cùng một cung). mà $\widehat{DIC} = \widehat{ABC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

Suy ra: $\widehat{BDH} = \widehat{DHN}$ mà hai góc này ở vị trí so le trong, suy ra $MN//BC$.

Cách 2

Trong đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC $\widehat{AMN} + \widehat{ACN} = 180^0$

Trong đường tròn (O): $\widehat{ACN}=\frac{1}{2}$ Sđ $\overset{\frown}{AC}$ (góc giữa tiếp tuyến và dây cung)

Suy ra $\widehat{ACN}+\widehat{ABC}=180^0$

Suy ra: $\widehat{ABC}=\widehat{AMN}$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị

Suy ra $MN//BC$.

Câu 74. (Trường chuyên tỉnh Bình Định vòng 2 năm 2019-2020) Cho tam giác ABC. Các điểm D, E, F theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho tứgiác $AFDE$ nội tiếp. Chứng minh rằng: $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}\le\frac{EF^2}{4.AD^2}$. Trong đó S_{DEF}, S_{ABC} lần lượt là diện tíchcác tam giác DEF và ABC.

Lời giải

Để giải quyết bài toán này ta cần chứng minh và sử dụng 3 bổ đề sau:

● **Bổ đề 1.** Bất đẳng thức tam giác: " Trong một tam giác tổng hai cạnh bất kì bao giờ cũng lớn hơn cạnh còn lại ". (Không cần chứng minh)

● **Bổ đề 2.** Cho a, b là các số thực dương thì $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

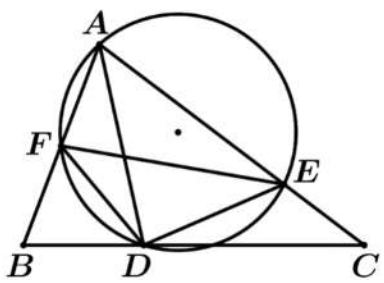
● **Bổ đề 3.** Cho tam giác ABC, khi đó $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{A}=\frac{1}{2}BA.BC.\sin\widehat{B}=\frac{1}{2}CA.CB.\sin\widehat{C}$

Ta có: $S_{ABC}=S_{ADB}+S_{ADC}=\frac{1}{2}AD.AC.\sin\widehat{DAC}+\frac{1}{2}AD.AB.\sin\widehat{DAB}$

$\ge\frac{AD^2}{2}\left(\sin\widehat{DAC}+\sin\widehat{DAB}\right)$.

Có: $S_{DEF}=\frac{1}{2}EF.FD.\sin\widehat{DFE}=\frac{1}{2}EF.FD.\sin\widehat{DAC}\Rightarrow\sin\widehat{DAC}=\frac{2S_{DEF}}{EF.FD}$,

và $S_{DEF}=\frac{1}{2}EF.ED.\sin\widehat{DEF}=\frac{1}{2}EF.ED.\sin\widehat{DAB}\Rightarrow\sin\widehat{DAB}=\frac{2S_{DEF}}{EF.ED}$.



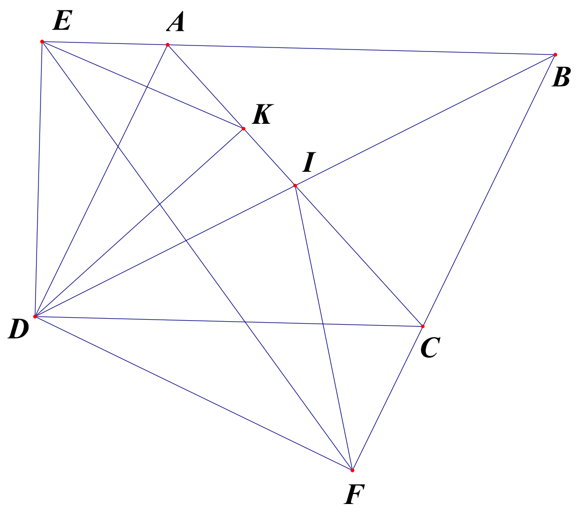
Do đó $S_{ABC}\ge AD^2\left(\frac{S_{DEF}}{EF.FD}+\frac{S_{DEF}}{EF.ED}\right)\Leftrightarrow S_{ABC}\ge S_{DEF}.AD^2.\left(\frac{1}{EF.FD}+\frac{1}{EF.ED}\right)$.

Lại có $\frac{1}{EF.FD}+\frac{1}{EF.ED}=\frac{1}{EF}\left(\frac{1}{FD}+\frac{1}{ED}\right)\ge\frac{1}{EF}.\frac{4}{FD+ED}\ge\frac{4}{EF^2}$.

Suy ra $S_{ABC}\ge S_{DEF}.AD^2.\frac{4}{EF^2}\Leftrightarrow\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}\le\frac{EF^2}{4.AD^2}$. (Đpcm).

Câu 75. (Trường chuyên tỉnh Hòa Bình Chuyên Toán năm 2019-2020) Cho hình bình hành ABCD có $\widehat{ABC} > 90^0$, hạ DE, DF, DK lần lượt vuông góc với AB, BC, AC. Gọi I là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng các điểm E, F, I, K cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải



Tứ giác AEDK nội tiếp nên $\widehat{AKE} = \widehat{ADE} = \frac{1}{2}\text{sd}\overset{\frown}{EA}$

Ta lại có $\widehat{ADE} = 90^0 - \widehat{EAD} = 90^0 - \widehat{ABC} = 90^0 - (\widehat{ABD} + \widehat{DBC})$

Vì tứ giác EBFD nội tiếp nên $\widehat{EBD} = \widehat{DFE} = \frac{1}{2}\text{sd}\overset{\frown}{DE}$; $\widehat{FBD} = \widehat{DEF} = \frac{1}{2}\text{sd}\overset{\frown}{DF}$

$\Rightarrow \widehat{ADE} = 90^0 - (\widehat{DFE} + \widehat{FBD})$

Vì I là trung điểm của BD, tam giác DFB vuông tai F suy ra IF = IB hay tam giác IBF cân tại I

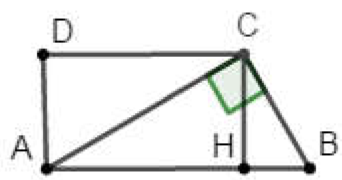
Suy ra $\widehat{IBF} = \widehat{BFI} \Leftrightarrow \widehat{FBD} = \widehat{BFI}$

Vậy $\Rightarrow \widehat{ADE} = 90^0 - (\widehat{DFE} + \widehat{IFB}) = \widehat{EFI} = \widehat{AKE}$

Suy ra tứ giác EKIF nội tiếp .

Câu 76. (Trường chuyên tỉnh Hậu Giang chuyên toán năm 2019-2020) Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D, $CD = 2\,cm$, $\widehat{ABC} = 60^0$ và CA vuông góc với CB. Tính diện tích S của hình thang $ABCD$.

Lời giải



Ta có $\widehat{CAD} = \widehat{ABC} = 60^0$ (cùng phụ với $\widehat{CAB}$)

Trong tam giác vuông ACD, ta có $AC = 2AD$.

Áp dụng định lý Pythagore:

$AC^2 = AD^2 + DC^2$ hay $4AD^2 = AD^2 + 4 \Leftrightarrow AD = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\ cm.$

Kẻ $CH \perp AB, H \in AB.$

Ta có $AHCD$ là hình chữ nhật vì $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{H} = 90^0.$

Suy ra $AH = CD = 2\,cm$ và $CH = AD = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\ cm.$

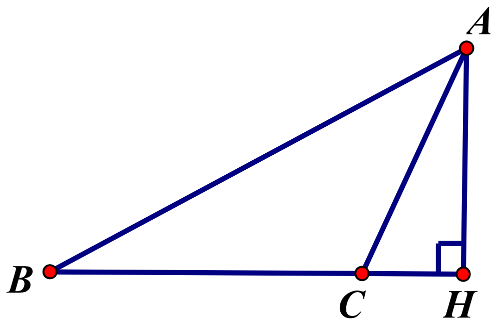
Tam giác ABC vuông tại C, ta có $CH^2 = HA.HB \Rightarrow HB = \dfrac{2}{3}\ cm.$

Ta có $AB = AH + HB = \dfrac{8}{3}\ cm.$

Vậy $S = \dfrac{1}{2}CH(AB + CD) = \dfrac{14\sqrt{3}}{9}\ cm^2.$

Câu 77. (Trường chuyên tỉnh Lâm Đồng vòng 2 năm 2019-2020) Tam giác ABC có $\widehat{C} - \widehat{B} = 90^0$ và AH là đường cao của tam giác. Chứng minh rằng $AH^2 = BH.CH$.

Lời giải



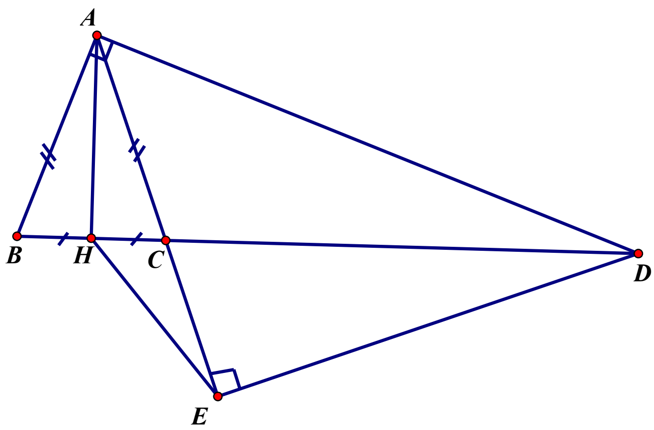
Chứng minh được $\widehat{B} = \widehat{CAH}$

Chứng minh được $\Delta BAH \sim \Delta ACH$ (g-g)

Suy ra hệ thức $AH^2 = BH.CH$

Câu 78. (Trường chuyên tỉnh Lâm Đồng vòng 2 năm 2019-2020) Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{A} < 90^0$), đường vuông góc với AB tại A cắt đường thẳng BC tại D. Dựng DE vuông góc với AC ($E \in AC$). Gọi H là trung điểm của BC. Chứng minh rằng AH = HE.

Lời giải



Chứng minh được $AH \perp BC$

Chứng minh được tứ giác AHED nội tiếp

Chứng minh được $\widehat{HAE} = \widehat{HEA}$

Suy ra: HA = HE

Câu 79. (Trường chuyên tỉnh Nam Định cho lớp chuyên KHTN năm 2019-2020) Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6\,\text{cm}$, $BC = 10\,\text{cm}$. Tính độ dài đường cao kẻ từ A xuống cạnh BC.

Lời giải

Tính được $AC = 8\,\text{cm}$. .

Tính được đường cao $4,8\,\text{cm}$..

Câu 80. (Trường chuyên tỉnh Nam Định lớp chuyên KHXH năm 2019-2020) Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6\,\text{cm}$, $BC = 10\,\text{cm}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên cạnh BC. Tính độ dài BH.

Lời giải

Ta có $AB^2 = BC.BH \Rightarrow BH = \dfrac{AB^2}{BC}$.

Tính được $BH = 3,6\,\text{cm}$. .

Câu 81. (Trường chuyên tỉnh Phú Yên Vòng 2 năm 2019-2020) Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho $BD = BA$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, AD. Đường thẳng qua B và song song với AD cắt MN tại E.

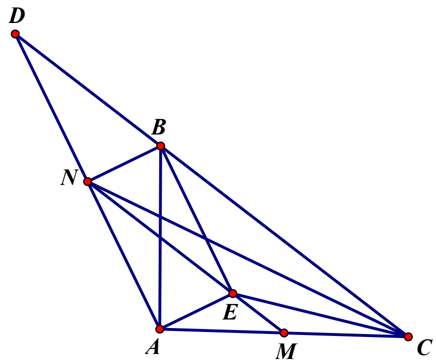
a)Chứng minh tứ giác $NAEB$ là hình chữ nhật.

b)Chứng minh rằng $\widehat{ACE} = \widehat{DCN}$.

Lời giải

a) **Chứng minh tứ giác $NAED$ là hình chữ nhật.**

Theo giả thiết, ta có



$\begin{cases} NA = ND \\ MA = MC \end{cases} \Rightarrow MN \parallel DC$ ..

Tứ giác $BDNE$ có $\begin{cases} NE \parallel BD \\ DN \parallel BE \end{cases}$ nên $BDNE$ là hình bình hành. Suy ra $BE = ND, NE = BD$ ..

Tứ giác $AEBN$ có $\begin{cases} BE \parallel NA \\ BE = NA = ND \\ AB = NE \end{cases}$ nên

$AEBN$ là hình chữ nhật..

b) **Chứng minh** $\widehat{ACE} = \widehat{DCN}$.

Ta có $\begin{cases} \widehat{EAM} = \widehat{BAN} = 90° - \widehat{BAE} \\ \widehat{BAN} = \widehat{BDA} = \widehat{ANM} \end{cases} \Rightarrow \widehat{EAM} = \widehat{ANM}$.

Hai tam giác AEM, NAM có

Góc M chung,

$\widehat{EAM} = \widehat{ANM}$

Do vậy $\Delta AEM \backsim \Delta NAM$.

Suy ra $\dfrac{AE}{AN} = \dfrac{AM}{MN} \Rightarrow \dfrac{AE}{DN} = \dfrac{AC}{DC}$.

Hai tam giác AEC, DNC có

$\widehat{NDC} = \widehat{EAC}$

$\dfrac{AE}{DN} = \dfrac{AC}{DC}$

Do vậy $\Delta AEC \backsim \Delta DNC$. Suy ra $\widehat{ACE} = \widehat{DCN}$.

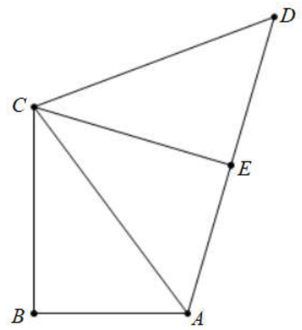
Câu 82. (Trường chuyên tỉnh PTNK (VÒNG 1) năm 2019-2020) Tứ giác $ABCD$ có chu vi $18cm$, $AB = \dfrac{3}{4}BC$, $CD = \dfrac{5}{4}BC$ và $AD = 2AB$. Tính độ dài các cạnh của tứ giác $ABCD$. Biết $AC = CD$, tính diện tích tứ giác $ABCD$.

Lời giải

Theo đề bài, ta có $AD = 2AB = \dfrac{3}{2}BC$.

Do $AB+BC+CD+DA=18$ nên $\frac{3}{4}BC+BC+\frac{5}{4}BC+\frac{3}{2}BC=18$, hay $\frac{9}{2}BC=18$. Từ đây, ta tính được $BC=4(cm)$, $AB=3(cm)$, $CD=5(cm)$ và $DA=6(cm)$.

Do $AC=CD$ nên ta có $AC=5(cm)$. Suy ra $AB^2+BC^2=3^2+4^2=5^2=AC^2$. Từ đó, theo định lý Pythagoras đảo, tam giác ABC vuông tại B.



Do $AC=CD$ nên tam giác ACD cân tại C. Gọi E là trung điểm của AD thì ta có $CE\perp AD$. Áp dụng định lý Pythagoras trong tam giác AEC vuông tại E, ta có

$CE=\sqrt{AC^2-AE^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

Từ đây, ta tính được: $S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}=\frac{1}{2}.AB.BC+\frac{1}{2}.AD.CE$

$=\frac{1}{2}.3.4+\frac{1}{2}.6.4=18\left(cm^2\right)$.

Câu 83. (Trường chuyên tỉnh PTNK (VÒNG 2) năm 2019-2020) Cho tam giác ABC có $AB<AC$. Gọi d_1, d_2 lần lượt là các đường phân giác trong và ngoài góc $\angle BAC$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của B lên d_1, d_2. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của C lên d_1, d_2.

a) Chứng minh rằng MN và PQ lần lượt đi qua trung điểm của AB, AC.

b) Chứng minh rằng MN và PQ cắt nhau trên BC.

c) Trên d_1 lấy các điểm E và F sao cho $\angle ABE=\angle BCA$ và $\angle ACF=\angle CBA$. (E thuộc nửa mặt phẳng bờ AB chứa C; F thuộc nửa mặt phẳng bờ AC chứa B). Chứng minh rằng $\frac{BE}{CF}=\frac{AB}{AC}$.

d) Các đường thẳng BN và CQ lần lượt cắt AC và AB tại các điểm K và L. Chứng minh rằng các đường thẳng KE và LF cắt nhau trên đường thẳng BC.

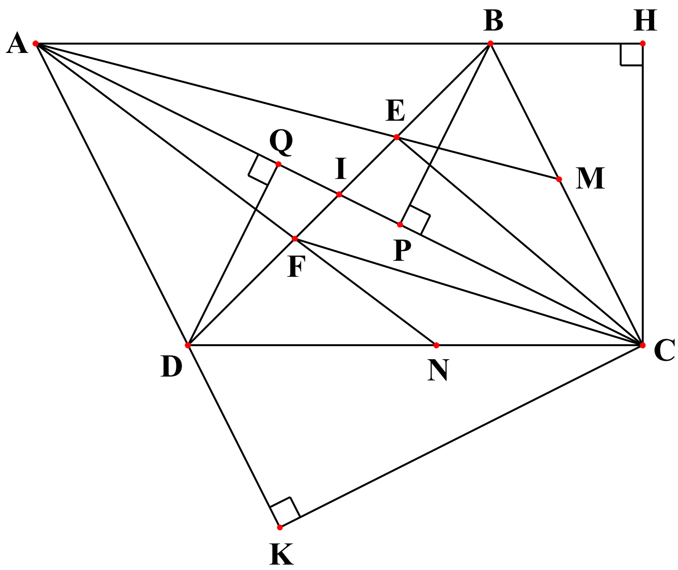
Lời giải

Câu 84. (Trường chuyên tỉnh Quảng Nam Vòng 2 năm 2019-2020) Cho hình bình hành ABCD có góc A nhọn. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của C lên các đường thẳng AB, AD.

a) Chứng minh $\mathrm{AB.AH}+\mathrm{AD.AK}=\mathrm{AC}^2$.

b) Trên hai đoạn thẳng BC, CD lần lượt lấy hai điểm M, N (M khác B, M khác C) sao cho hai tam giác ABM và ACN có diện tích bằng nhau; BD cắt AM và AN lần lượt tại E và F. Chứng minh $\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BC}}+\frac{\mathrm{DN}}{\mathrm{DC}}=1$ và $\mathrm{BE}+\mathrm{DF}>\mathrm{EF}$.

Lời giải



a).Kẻ $BP \perp AC$, $DQ \perp AC$

Dễ chứng minh $\Delta AQD = \Delta CPB$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$\Rightarrow AQ = CP \Rightarrow AQ + AP = AC$ (1)

$\Delta APB \backsim \Delta AHC$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AP}{AH} \Rightarrow AB.AH = AC.AP$ (2)

Tương tự: $AD.AK = AC.AQ$ (3)

Từ (1), (2) và (3)

$\Rightarrow AB.AH + AD.AK = AC.AP + AC.AQ = AC(AP + AQ) = AC^2$

b).Hai tam giác ADN và ADC có chung chiều cao kẻ từ A

$\Rightarrow \dfrac{DN}{DC} = \dfrac{S_{ADN}}{S_{ADC}}$

Tương tự: $\dfrac{BM}{BC} = \dfrac{S_{ABM}}{S_{ABC}}$

Mà $S_{ABM} = S_{ACN}$ (GT) và $S_{ABC} = S_{ADC}$ (vì ABCD là hình bình hành)

$\Rightarrow \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{S_{ACN}}{S_{ADC}}$

$\Rightarrow \dfrac{BM}{BC} + \dfrac{DN}{DC} = \dfrac{S_{ACN}}{S_{ADC}} + \dfrac{S_{ADN}}{S_{ADC}} = \dfrac{S_{ACN} + S_{ADN}}{S_{ADC}} = 1$

Gọi I là giao điểm của AC và BD $\Rightarrow IA = IC$

Ta có:

$S_{AMCN} = S_{ACM} + S_{ACN} = S_{ACM} + S_{ABM} = S_{ABC} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} = S_{ABD}$

Vì IA = IC nên:

$S_{AEF} = S_{AIE} + S_{AIF} = S_{CIE} + S_{CIF} = S_{CEF} < S_{EMCNF}$

$\Rightarrow S_{AEF} < \frac{1}{2}S_{AMCN} \Rightarrow S_{AEF} < \frac{1}{2}S_{ABD}$

$\Rightarrow EF < \frac{1}{2}BD$

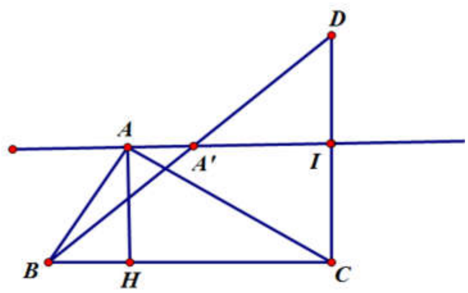
Mà BE + DF + EF = BD

$\Rightarrow BE + DF > EF$ (đpcm).

Câu 85. (Trường chuyên tỉnh Sơn La Vòng 2 năm 2019-2020) Trong các tam giác có cạnh đáy bằng a, chiều cao ứng với cạnh đáy bằng h (a, h cho trước, không đổi). Hãy tìm tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất.

Lời giải

Trong các tam giác có cạnh đáy bằng a, chiều cao ứng với cạnh đáy bằng h (a, h cho trước, không đổi). *Hãy tìm tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất.*



Các tam giác thỏa mãn đề bài có thể sắp xếp sao cho có đáy là $BC = a$, đỉnh A trên đường thẳng *(d)* song song BC cách BC một khoảng bằng *h*.

Ta có $2S = a.h = r\left(AB + BC + CA\right) \Rightarrow r = \frac{a.h}{AB + BC + CA} = \frac{a.h}{AB + a + CA}$

(r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác)

Do đó r lớn nhất khi và chỉ khi $\left(AB + BC + CA\right)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB + AC$ nhỏ nhất.

Dựng điểm D đối xứng với C qua *(d)*, BD cắt *(d)* tại *A'* khi đó

$A'B + A'C = A'B + A'D = BD \le AB + AD = AB + AC.$

(với mọi điểm A thuộc *(d)*)

$AB + AC \ge BD = \sqrt{a^2 + 4h^2}$

Vậy $AB + AC$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $A \equiv A'$ khi đó A là trung điểm của BD

Nên tam giác ABC cân tại *A*.

Vậy trong các tam giác thỏa mãn điều kiện đề bài tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất là tam giác cân.

Câu 86. (Trường chuyên tỉnh Tây Ninh Vòng 2 năm 2019-2020) Cho hình thang cân $ABCD\left(AB//CD\right)$ có $CD=2AD=2AB=8$. Tính diện tích của hình thang cân đó.

Lời giải

Cho hình thang cân $ABCD\left(AB//CD\right)$ có $CD=2AD=2AB=8$. Tính diện tích của hình thang cân đó.

Ta có $\triangle ADH=\triangle BCK$ do $\widehat{AHD}=\widehat{BKC}=90^\circ;\widehat{ADH}=\widehat{BCK}$ và $AD=BC$ nên $DH=CK$

Mặt khác $ABKH$ là hình chữ nhật nên $AB=HK$ suy ra $DH=\dfrac{CD-HK}{2}=2$

Do đó $AH=\sqrt{AD^2-DH^2}=2\sqrt{3}$

Vậy $S_{ABCD}=\dfrac{AH\left(AB+CD\right)}{2}=12\sqrt{3}$

Câu 87. (Trường chuyên tỉnh Tây Ninh Vòng 2 năm 2019-2020) Cho tam giác nhọn ABC có $\widehat{BAC}=60^\circ$ và $AB<AC$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AB,AC lần lượt tại D và E. Kéo dài BI,CI lần lượt cắt DE tại F và G, gọi M là trung điểm BC. Chứng minh tam giác MFG đều.

Lời giải

Cho tam giác nhọn ABC có $\widehat{BAC}=60^\circ$ và $AB<AC$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AB,AC lần lượt tại D và E. Kéo dài BI,CI lần lượt cắt DE tại F và G, gọi M là trung điểm BC. Chứng minh tam giác MFG đều.

Ta có tứ giác $CIEF$ nội tiếp vì $\widehat{CEF}=\widehat{AED}=60^\circ$ ($\triangle ADE$ đều) và $\widehat{CIF}=\dfrac{1}{2}\left(\widehat{ABC}+\widehat{ACB}\right)=60^\circ$.

Suy ra $\widehat{IFC}=\widehat{IEC}=90^\circ$ nên $FM=MB=MC$ $\left(1\right)$

Mặt khác tứ giác $BDGI$ nội tiếp vì $\widehat{ADE}=60^\circ$ ($\triangle ADE$ đều) và $\widehat{BIG}=\widehat{CIF}=60^\circ$

Suy ra $\widehat{IGB}=\widehat{IDB}=90^\circ$ nên $GM=MB=MC$ $\left(2\right)$

Lại có $\widehat{GMF}=180^\circ-\widehat{CMF}-\widehat{BMG}=180^\circ-\widehat{ABC}-\widehat{ACB}=60^\circ$ $\left(3\right)$

Từ $\left(1\right),\left(2\right)$ và $\left(3\right)$ suy ra $MF=MG$ và $\widehat{GMF}=60^\circ$ nên $\triangle MFG$ đều

Câu 88. (Trường chuyên tỉnh An Giang Vòng 2 năm 2019-2020) Cho hình chữ nhật $ABCD$, hai điểm K,P thuộc hai cạnh AD và BC sao cho tam giác DKP đều và có cạnh $18cm$. Biết đường chéo BD đi qua trung điểm N của đoạn KP. Đường thẳng qua A song song với KP cắt BC tại M.

a) Tính diện tích hình chữ nhật $ABCD$.
b) Chứng minh rằng tứ giác $AKNM$ nội tiếp.

Lời giải

a)

Tam giác CDP vuông tại C có $\widehat{CDP}=30^0$

$\cos\widehat{CDP} = \dfrac{CD}{DP} \Rightarrow CD = DP.\cos 30^0 = 18.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$

Tam giác DKP đều có N là trung điểm KP nên DB vuông góc KP và là đường phân giác của góc $\widehat{ADP} \Rightarrow \widehat{CDB} = 60^0$

$\tan\widehat{CDB} = \tan 60^0 = \dfrac{BC}{CD} \Rightarrow BC = CD.\tan 60^0 = 9\sqrt{3}.\sqrt{3} = 27$

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$

$S_{ABCD} = BC.CD = 27.9\sqrt{3} = 243\sqrt{3}\left(cm^2\right)$

b)

Do AM song song KP nên $\widehat{KAM} = \widehat{DKP} = 60^0$ (đồng vị)

Ta có $AK = 27 - 18 = 9\,cm \Rightarrow MP = 9\,cm = NP$

Mà $\widehat{MPN} = \widehat{NKD} = 60^0$ (so le trong). Vậy tam giác MNP đều

�$\widehat{MNP} = 60^0$

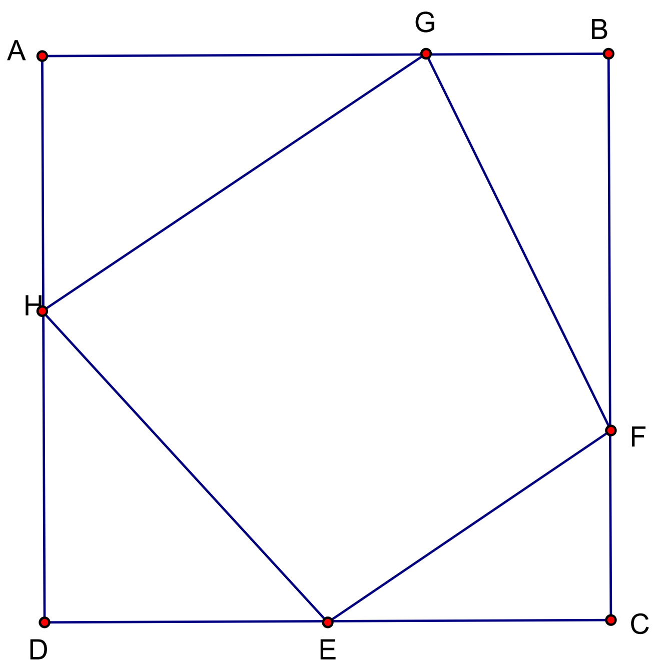
�$\widehat{MNK} = 120^0$ (kề bù)

Vậy $\widehat{KAM} + \widehat{MNK} = 60^0 + 120^0 = 180^0$

Vậy tứ giác $AKNM$ nội tiếp

Câu 89. (Trường chuyên tỉnh Long An chuyên toán dự bị năm 2019-2020) Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $12a$, gọi E là trung điểm của CD, gọi F là điểm thuộc cạnh CB sao cho $CF = 4a$. Các điểm G và H theo thứ tự di chuyển trên các cạnh AB và AD sao cho GH song song EF. Xác định vị trí của điểm G sao cho tứ giác $EFGH$ có diện tích lớn nhất.

Lời giải



Đặt $S_{EFGH} = S$, $BG = x$

ΔAGH đồng dạng ΔCEF suy ra: $AH = \dfrac{2(12a-x)}{3}$; $DH = \dfrac{12a+2x}{3}$

$$S = S_{ABCD} - S_{AGH} - S_{BGF} - S_{CFE} - S_{DEH}$$
$$= 144a^2 - \frac{1}{3}.(12a-x)^2 - 4ax - 12a^2 - a(12a+2x)$$

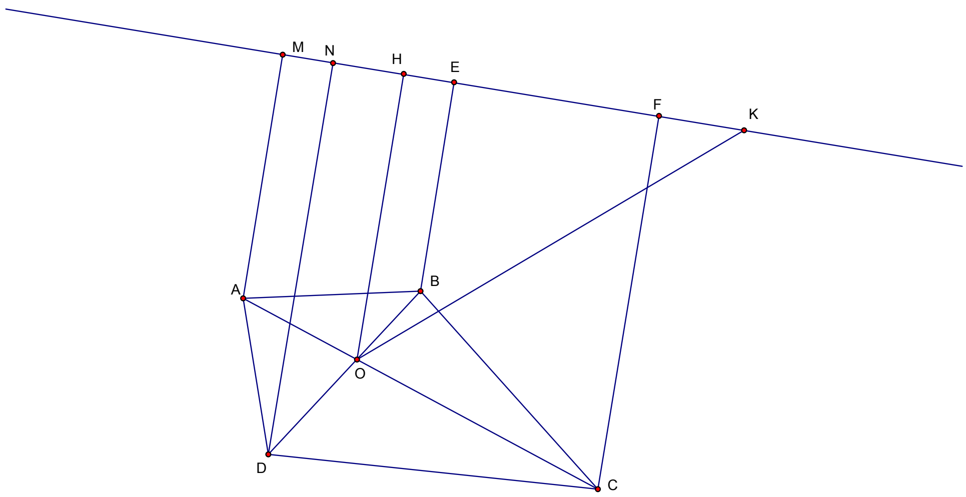
$$S = -\frac{x^2}{3} + 2ax + 72a^2 = -\frac{1}{3}(x-3a)^2 + 75a^2 \le 75a^2$$

Điểm G cần tìm là điểm trên cạnh AB sao cho $BG = 3a$

Câu 90. (Trường chuyên tỉnh Long An chuyên toán năm 2019-2020)

Cho tứ giác $ABCD$ có O là giao điểm của AC và BD sao cho: $\dfrac{AO}{CO} = \dfrac{2}{5}; \dfrac{BO}{DO} = \dfrac{3}{4}$. Gọi K là điểm cố định bên ngoài tứ giác $ABCD$. Gọi d là đường thẳng đi qua K và không cắt tứ giác $ABCD$. Gọi M, E, F, N lần lượt là hình chiếu của A, B, C, D lên đường thẳng d. Tìm vị trí của đường thẳng d để $5AM + 4BE + 2CF + 3DN$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng d

Xét hình thang $AMFC$, vì $\dfrac{AO}{CO} = \dfrac{2}{5}$ nên $7OH = 5AM + 2CF$

Xét hình thang $BEND$, vì $\dfrac{BO}{DO} = \dfrac{3}{4}$ nên $7OH = 4BE + 3DN$

Suy ra $5AM + 4BE + 2CF + 3DN = 14OH$

Vì $OH \le OK$ nên khi d vuông góc OK thì thỏa yêu cầu đề

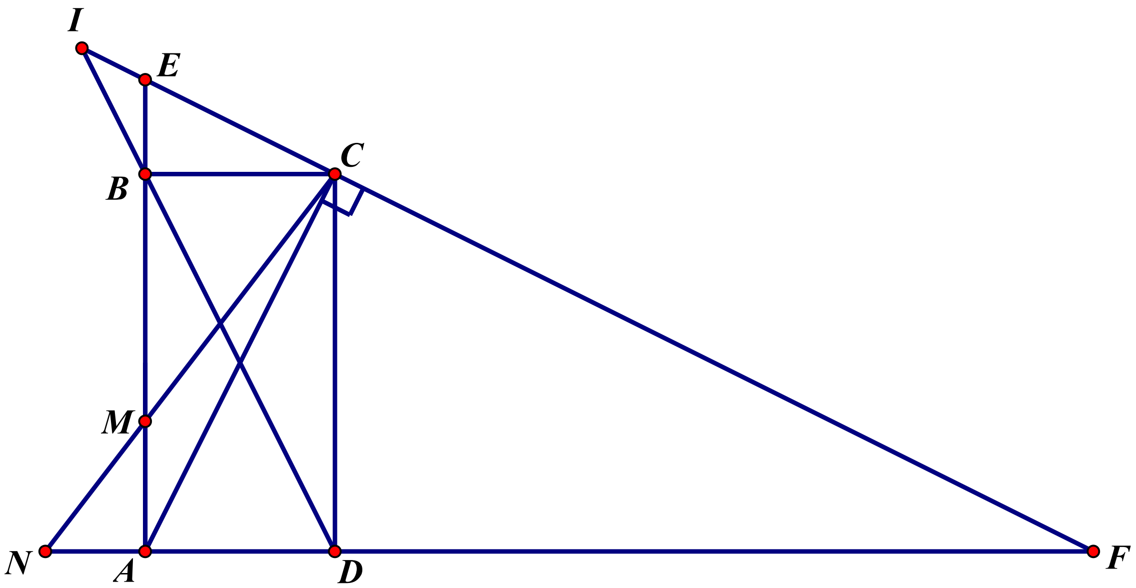
Câu 91. (Trường chuyên tỉnh Quảng Bình chuyên toán năm 2019-2020) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2AD = 4a$ $(a > 0)$. Đường thẳng vuông góc với AC tại C cắt các đường thẳng AB và AD lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh tứ giác $EBDF$ nội tiếp.

b) Gọi I là giao điểm của các đường thẳng BD và EF. Tính độ dài đoạn thẳng ID theo a.

c) M là điểm thay đổi trên cạnh AB (M khác A, M khác B), đường thẳng CM cắt đường thẳng AD tại N. Gọi S_1 là diện tích của tam giác CME và S_2 là diện tích của tam giác AMN. Xác định vị trí của M sao cho $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3}{2}$.

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $EBDF$ nội tiếp.

Do ABCD là hình chữ nhật nên $\widehat{BDA}=\widehat{CAD}$.

Mặt khác $\widehat{CAD}=\widehat{AEF}$ (cùng phụ với $\widehat{AFE}$)

Suy ra $\widehat{BDA}=\widehat{AEF}$.

Tứ giác $EBDF$ có $\widehat{BEF}+\widehat{BDF}=\widehat{BDA}+\widehat{BDF}=180^0$. Vậy tứ giác $EBDF$ nội tiếp.

b) Gọi I là giao điểm của các đường thẳng BD và EF. Tính độ dài đoạn thẳng ID theo a.

Tam giác ACE vuông tại C và $CB\perp EA$ nên ta có $CB^2=BE.BA$

Suy ra $BE=\frac{CB^2}{BA}=\frac{(2a)^2}{4a}=a$.

Ta có $BD^2=AB^2+AD^2=(4a)^2+\left(2a\right)^2=20a^2\Rightarrow BD=2a\sqrt{5}$.

Do BE song song với CD nên $\frac{IB}{ID}=\frac{BE}{DC}=\frac{a}{4a}=\frac{1}{4}$

Suy ra $ID=\frac{4}{3}BD$. Vậy $ID=\frac{8\sqrt{5}a}{3}$.

c) M là điểm thay đổi trên cạnh AB (M khác A, M khác B), đường thẳng CM cắt đường thẳng AD tại N. Gọi S_1 là diện tích của tam giác CME và S_2 là diện tích của tam giác AMN. Xác định vị trí của M sao cho $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3}{2}$.

Đặt $AM = x, 0 < x < 4a$. Suy ra $MB = 4a - x, ME = 5a - x$.

Do BC song song với AN nên $\frac{AN}{BC} = \frac{MA}{MB} \Rightarrow AN = \frac{MA.BC}{MB} = \frac{2ax}{4a - x}$

Suy ra

$$S_1 = \frac{1}{2}CB.ME = \frac{1}{2}.2a.(5a - x) = a(5a - x)$$

$$S_2 = \frac{1}{2}AM.AN = \frac{1}{2}x.\frac{2ax}{4a - x} = \frac{ax^2}{4a - x}$$

Do đó $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{(5a - x)(4a - x)}{x^2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 + 18a.x - 40a^2 = 0$

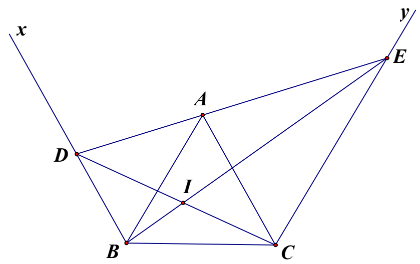
$\Leftrightarrow (x - 2a)(x + 20a) = 0 \Leftrightarrow x = 2a$ (vì $(0 < x < 4a)$.

Kết luận: Khi M là trung điểm của AB thì $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{2}$.

Câu 92. (Trường chuyên tỉnh Yên Bái vòng 2 năm 2019-2020) Cho tam giác đều ABC. Vẽ các tia Bx, Cy cùng phía với A đối với BC sao cho $Bx//AC$, $Cy//AB$. Một đường thẳng d đi qua A cắt Bx, Cy theo thứ tự ở D, E. Gọi I là giao điểm của CD và BE. Xác định vị trí của đường thẳng d để tam giác BIC có diện tích lớn nhất.

Lời giải

Cho tam giác đều ABC. Vẽ các tia Bx, Cy cùng phía với A đối với BC sao cho $Bx//AC$, $Cy//AB$. Một đường thẳng d đi qua A cắt Bx, Cy theo thứ tự ở D, E. Gọi I là giao điểm của CD và BE. Xác định vị trí của đường thẳng d để tam giác BIC có dện tích lớn nhất.



Xét ΔABD và ΔCEA có $\widehat{DBA} = \widehat{ACE} = 60^0$ và $\widehat{ADB} = \widehat{AEC}$ (đồng vị)

Suy ra: $\Delta BAD \backsim \Delta CEA$ (g_g), suy ra $\frac{BD}{CA} = \frac{AD}{CE}$ nên $\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{CE}$

mặt khác $\widehat{DBC} = \widehat{BCE} = 120^o$ từ đó $\Delta DBC \backsim \Delta BCE$ (c.g.c)

Suy ra $\widehat{DCB} = \widehat{BEC}$.

Ta có $\widehat{BIC} = \widehat{ICE} + \widehat{IEC} = \widehat{ICE} + \widehat{DCB} = 120^o$

Suy ra điểm I thuộc cung chứa góc BC mà BC không đổi, suy ra ΔIBC có diện tích lớn khi và chỉ khi I là điểm chính giữa của cung chứa góc BC hay $d//BC$.

Câu 93. (Trường chuyên tỉnh Gia lai vòng 2 năm 2019-2020) Tính thể tích của một hình cầu, biết diện tích mặt cầu bằng $36\pi\, cm^2$.

Lời giải

Bán kính của mặt cầu là $R = \sqrt{\frac{36\pi}{4\pi}} = 3\ cm$

Thể tích hình cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi\, cm^3$

Câu 94. (Trường chuyên tỉnh Kon Tum cho tất cả các thí sinh năm 2019-2020) Một hình trụ có chiều cao bằng $5m$ và diện tích xung quanh bằng $20\pi m^2$. Tính thể tích của hình trụ.

Lời giải

Diện tích xung quanh của hình trụ : $S_{xq} = 2\pi rh$.

$\Leftrightarrow 20\pi = 2\pi r.5 \Leftrightarrow r = 2\left(m\right)$.

$V = \pi r^2 h = 20\pi\left(m^3\right)$.

Câu 95. (Trường chuyên tỉnh Nam Định cho lớp chuyên KHTN năm 2019-2020) Một hình trụ có diện tích hình tròn đáy là $9\pi\,\text{cm}^2$, độ dài đường sinh là $6\,\text{cm}$. Tính thể tích hình trụ đó.

Lời giải

Thể tích hình trụ là $V = 54\pi\,\text{cm}^3$..

Câu 96. (Trường chuyên tỉnh Nam Định lớp chuyên KHXH năm 2019-2020) Một hình trụ có bán kính đáy là $3\,\text{cm}$, độ dài đường sinh là $6\ \text{cm}$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ đó.

Lời giải

Diện tích xung quanh $S_{xq} = 36\pi\,\text{cm}^2$. .

Câu 97. (Trường chuyên tỉnh An Giang Vòng 2 năm 2019-2020) Một chiếc bút chì có dạng hình trụ có đường kính đáy $8\,mm$ và chiều cao bằng $200\,mm$. Thân bút chì được làm bằng gỗ, phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng hình trụ có chiều cao bằng chiều dài bút và đáy là hình tròn có bán kính $1\,mm$. Tính thể tích phần lõi và phần gỗ của bút chì.

Lời giải

Ta có công thức tính thể tích hình trụ

$V = \pi R^2 h$

Thể tích phần than chì có dạng hình trụ chiều cao $200mm$ bán kính đáy $r = 1mm$.

$V_{Thanchi} = \pi 1^2.200 = 200\pi\left(mm^3\right)$

Thể tích bút chì có chiều cao $200\,mm$ bán kính đáy $R = 4\,mm$

$V_{But} = \pi.4^2.200 = 3200\pi\left(mm^3\right)$

Thể tich phần gỗ bút chì

$V_{Go} = V_{But} - V_{Thanchi} = 3200\pi - 200\pi = 3000\pi\left(mm^3\right)$.

Chuyên đề 8 Số học

Câu 1. (Trường chuyên tỉnh Bình Thuận chuyên toán năm 2019-2020) Chứng minh rằng số $M=(n+1)^4+n^4+1$ chia hết cho một số chính phương khác 1 với mọi số n nguyên dương.

Lời giải

Ta có:

$\widehat{AKB}=\widehat{AIB}=90^o$

$=2(n^2+n+1)^2$.

Do đó M luôn chia hết cho số chính phương $(n^2+n+1)^2$.

$x^2-n^2x+n+1=0$

Câu 2. (Trường chuyên tỉnh Bình Thuận vòng 2 năm 2019-2020) Chứng minh rằng số $M=(n+1)^4+n^4+1$ chia hết cho một số chính phương khác 1 với mọi số n nguyên dương.

Lời giải

Ta có:

$$M=(n+1)^4+n^4+1=2n^4+4n^3+6n^2+4n+2=2(n^4+2n^3+3n^2+2n+1)$$

$$=2(n^2+n+1)^2.$$

Do đó M luôn chia hết cho số chính phương $(n^2+n+1)^2$.

$$x^2-n^2x+n+1=0$$

Câu 3. (Trường chuyên tỉnh Bình Định vòng 2 năm 2019-2020) Gọi n số $x_1\,;\,x_2\,;\,x_3\,;...;\,x_n$ $\left(n\in\mathbb{Z},\,n\geq 3\right)$ thỏa mãn: mỗi số x_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ bằng 2019 hoặc -2019 và $x_1x_2+x_2x_3+...+x_{n-1}x_n+x_nx_1=0$. Chứng minh rằng n là một bội của 4.

Lời giải

Từ đề suy ra mỗi tích $x_1x_2\,;\,x_2x_3\,;...;\,x_{n-1}x_n\,;x_nx_1$ nhận một trong hai giá trị 2019^2 hoặc -2019^2.

Mà $x_1x_2+x_2x_3+...+x_{n-1}x_n+x_nx_1=0$ nên số tích có giá trị là 2019^2 bằng với số tích có giá trị là -2019^2, do đó n chẵn. Gọi $n=2q$, khi đó có q số 2019^2 và có q số -2019^2

Khi đó $\left(x_1x_2\right).\left(x_2x_3\right).....\left(x_{n-1}x_n\right).\left(x_nx_1\right)=x_1^2.x_2^2.x_3^2.....x_n^2=2019^{2n}>0$, suy ra có chẵn số -2019^2 nên $q\,\vdots\,2$. Do đó $n=4k$. Suy ra $n\,\vdots\,4$.

Vậy n là một bội của 4.

Câu 4. (Trường chuyên tỉnh Bạc Liêu năm 2019-2020) Chứng minh rằng số có dạng $A=n^6-n^4+2n^3+2n^2$ không phải là số chính phương, trong đó $n\in N, n>1$.

Lời giải

Ta có: $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$

$= n^2\left[n^2(n-1)(n+1) + 2(n+1)\right]$

$= n^2\left[(n+1)(n^3 - n^2 + 2)\right]$

$= n^2(n+1)\left[(n^3+1) - (n^2-1)\right]$

$= n^2(n+1)^2(n^2 - 2n + 2)$

Với $n \in N; n > 1$ thì $n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1 > (n-1)^2$

Và $n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2(n-1) < n^2$

Vậy $(n-1)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2$ nên $n^2 - 2n + 2$ không là số chính phương.

Do đó A không là số chính phương với $n \in N; n > 1$

Câu 5. (Trường chuyên tỉnh Bến Tre vòng 2 năm 2019-2020) Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $a^{2019} + b^{2020} + c^{2021}$ là bội số của 6. Chứng minh rằng $a^{2021} + b^{2022} + c^{2023}$ cũng là bội số của 6.

Lời giải

Câu 6. (Trường chuyên tỉnh Chuyên ĐHSP vòng 2 năm 2019-2020) Cho ba số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 14. Chứng minh rằng abc cũng chia hết cho 14.

Lời giải

Do $a^3 + b^3 + c^3$ chẵn nên trong các số a, b, c có ít nhất một số chẵn. Từ đó suy ra tích abc chia hết cho 2. (1)

Giả sử trong ba số a, b, c không có số nào chia hết cho 7. Ta thấy rằng, với mọi x nguyên không chia hết cho 7 thì $x \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 3 \pmod 7$, suy ra $x^3 \equiv \pm 1 \pmod 7$.

Do đó $a^3 \equiv \pm 1 \pmod 7$, $b^3 \equiv \pm 1 \pmod 7$, $c^3 \equiv \pm 1 \pmod 7$.

Suy ra $a^3 + b^3 + c^3 \equiv -3, -1, 1, 3 \pmod 7$, tức $a^3 + b^3 + c^3$ không chia hết cho 7, mâu thuẫn. Vậy trong ba số a, b, c phải có ít nhất một số chia hết cho 7.

Từ đó suy ra tích abc chia hết cho 7. (2)

Từ (1) và (2) với chú ý $(2;7) = 1$, ta có abc chia hết cho 14.

Câu 7. (Trường chuyên tỉnh DAK LAK vòng 2 năm 2019-2020) Tìm các số tự nhiên n thỏa mãn $4^{2019} + 3^n$ có chữ số tận cùng là 7.

Lời giải

Câu 8. (Trường chuyên tỉnh HCM năm 2019-2020) Cho m, n là hai số nguyên. Chứng minh rằng nếu $7(m+n)^2 + 2mn$ chia hết cho 225 thì mn cũng chia hết cho 225.

Lời giải

Ta chứng minh mn chia hết cho 9.

Ta có: $7(m+n)^2+2mn=7(m-n)^2+30mn$ chia hết cho 225, do đó chia hết cho 3. Lại có $30mn$ chia hết cho 3, do đó $7(m-n)^2$ cũng chia hết cho 3. Do 7 và 3 nguyên tố cùng nhau nên $(m-n)^2$ chia hết cho 3, dẫn đến $m-n$ chia hết cho 3 (vì 3 là số nguyên tố). Khi đó, $(m-n)^2$ chia hết cho 9 vì vậy $30mn$ cũng chia hết cho 9. Mà 30 chỉ chia hết cho 3 chứ không chia hết cho 9, cho nên mn phải chia hết cho 3, suy ra có ít nhất 1 trong 2 số m,n chia hết cho 3, giả sử là m. Lúc này, do m và $m-n$ cùng chia hết cho 3 nên $n=m-(m-n)$ cũng chia hết cho 3, vì vậy mn chia hết cho 9.

Chứng minh hoàn toàn tương tự, ta có mn chia hết cho 25.

Do 9 và 25 nguyên tố cùng nhau nên mn chia hết cho 225 □

Câu 9. (Trường chuyên tỉnh Hà Nam chuyên toán năm 2019-2020) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho 7^n+147 là số chính phương.

Lời giải

Dễ thấy n = 0 thì $7^n+147=148$ không là số chính phương.
Xét n > 0 Nếu n lẻ, đặt n = 2k + 1 $(k\in\mathbb{N})$.

Ta có $7^{2k+1}\equiv(-1)^{2k+1}(mod 4)\equiv-1(\text{mod }4)$, $147\equiv3(mod 4)$

$\Rightarrow 7^{2k+1}+147\equiv2(mod 4)$

Mà một số chính phương hoặc chia hết cho 4 hoặc chia cho 4 dư 1, suy ra 7^n+147 không là số chính phương.
Nếu n chẵn, đặt n = 2k $(k\in\mathbb{N}^*)$.

Giả sử tồn tại số nguyên a sao cho $7^n+147=a^2$ thì $a\,\vdots\,7$, đặt a = 7m $(m\in\mathbb{Z})$. Khi đó

$$7^n+147=a^2\Leftrightarrow 7^{2k}+147=49m^2$$

$$\Leftrightarrow m^2-7^{2k-2}=3\Leftrightarrow(m-7^{k-1})(m+7^{k-1})=3$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m-7^{k-1}=1\\m+7^{k-1}=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=2\\k=1\end{cases}\Rightarrow n=2$$

Với n = 2, $7^2+147=196=14^2$.

Vậy khi n = 2 thì 7^n+147 là số chính phương.

Câu 10. (Trường chuyên tỉnh Hà Nội chuyên tin năm 2019-2020) Cho biểu thức $P=ab(a+b)+2$, với a,b là các số nguyên. Chứng minh nếu giá trị của biểu thức P chia hết cho 3 thì P chia hết cho 9.

Lời giải

Ta có $ab(a+b)+2$ chia hết cho 3, suy ra $ab(a+b)$ chia cho 3 dư 1.

Suy ra hai số a,b không chia hết cho 3 và phải có cùng số dư khi chia cho 3.

Giả sử a,b đều chia cho 3 dư 1 thì $ab(a+b)$ chia cho 3 dư 2 (trái giả thiết).

Suy ra a,b đều chia cho 3 dư 2.

Đặt $\begin{cases}a=3x+2\\b=3y+2\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{Z})$.

Suy ra: $P=(3x+2)(3y+2)(3x+3y+4)+2$

$=\left[18(x^2+y^2)+27xy(x+y)+72xy+36(x+y)+18\right]\vdots 9$

Câu 11. (Trường chuyên tỉnh Hà nội chuyên toán năm 2019-2020) Cho biểu thức $P=abc(a-1)(b+4)(c+6)$, với a,b,c là các số nguyên thỏa mãn $a+b+c=2019$. Chứng minh giá trị của biểu thức P chia hết cho 6.

Lời giải

Vì $a(a-1)\vdots 2\Rightarrow P\vdots 2$.

TH1 : Trong ba số a,b,c có ít nhất một số chia hết cho 3 thì $P\vdots 3$.

TH2 : Trong ba số a,b,c không có số nào chia hết cho 3.

Vì $a+b+c=2019\vdots 3\Rightarrow$ Các số a,b,c chia 3 cùng dư 1 hoặc cùng dư 2.

+) Nếu a,b,c chia 3 cùng dư 1 $\Rightarrow(a-1)\vdots 3\Rightarrow P\vdots 3$

+) Nếu a,b,c chia 3 cùng dư 2 $\Rightarrow(b+4)\vdots 3\Rightarrow P\vdots 3$.

Mà ƯCLN (2;3) =1 $\Rightarrow P\vdots 6$.

Câu 12. (Trường chuyên tỉnh Hà nội chuyên toán năm 2019-2020) Tìm tất cả số tự nhiên n để giá trị của biểu thức $Q=\sqrt{n+2}+\sqrt{n+\sqrt{n+2}}$ là số nguyên.

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{n+2}$.

$Q=t+\sqrt{t^2+t-2}\Leftrightarrow\sqrt{t^2+t-2}=Q-t$

$\Rightarrow t^2+t-2=Q^2-2Qt+t^2\Rightarrow(2Q+1)t=Q^2+2$

$\Rightarrow t=\dfrac{Q^2+2}{2Q+1}\Rightarrow n+2=\left(\dfrac{Q^2+2}{2Q+1}\right)^2$.

Vì $n,Q\in\mathbb{Z}\Rightarrow\dfrac{Q^2+2}{2Q+1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow 2Q-1+\dfrac{9}{2Q+1}\in\mathbb{Z}$.

Vì $Q>1$ nên $\dfrac{9}{2Q+1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow Q=4\Rightarrow t=2\Rightarrow n=2$.

Thử lại $n=2$ thỏa mãn.

Câu 13. (Trường chuyên tỉnh Hà Tĩnh vòng 2 năm 2019-2020) Cho a,b,c là các số nguyên đôi một khác nhau thỏa mãn: $a^3+b^3+c^3=3abc$. Chứng minh $2(a^4+b^4+c^4)$ là số chính phương.

Lời giải

Ta có $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$

$=(a+b+c)^3-3(a+b)c(a+b+c)-3ab(a+b+c)=(a+b+c)\left[(a+b+c)^2-3ab-3bc-3ca\right]$

$=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]=0\Leftrightarrow a+b+c=0$ (do a, b, c phân biệt).

Ta có: $a+b+c=0\Leftrightarrow(a+b+c)^2=0\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$

$\Rightarrow(a^2+b^2+c^2)^2=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c))=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

$\Rightarrow a^4+b^4+c^4=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2\Leftrightarrow 2(a^4+b^4+c^4)=a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$

$\Leftrightarrow 2(a^4+b^4+c^4)=(a^2+b^2+c^2)^2$.

Vì a, b, c là các số nguyên nên $a^2+b^2+c^2$ là số nguyên.

Do đó $2(a^4+b^4+c^4)$ là số chính phương.

Câu 14. (Trường chuyên tỉnh Hòa Bình Chuyên Tin năm 2019-2020) Tìm tất cả các số chính phương có 4 chữ số sao cho 2 chữ số đầu giống nhau và hai chữ số cuối giống nhau.

Lời giải

Gọi số chính phương cần tìm có dạng $\overline{aabb}$ $(a,b\in N, 0<a\le 9, 0\le b\le 9)$

Ta có $\overline{aabb}=1000a+100a+10b+b=1100a+11b=11(100a+b)$

Ta thấy $\overline{aabb}\,\vdots\,11$ mà $\overline{aabb}$ là số chính phương nên $(100a+b)\,\vdots\,11\Rightarrow(a+b)\,\vdots\,11$

Mà b có thể nhận các giá trị 0, 1, 4, 5, 6, 9. Thử trực tiếp các trường hợp suy ra chỉ có 1 số thỏa mãn là số 7744.

Câu 15. (Trường chuyên tỉnh Hải Dương chuyên toán năm 2019-2020) Cho hai số tự nhiên a, b thỏa mãn: $2a^2+a=3b^2+b$. Chứng minh rằng: $2a+2b+1$ là số chính phương.

Lời giải

Ta có $2a^2+a=3b^2+b\Leftrightarrow(a-b)(2a+2b+1)=b^2, (*)$

Vì a, b là các số tự nhiên nên $a\ge b$.

Do đó $(a-b;2a+2b+1)=d \quad (d\in N^*)$

Ta có

$$\begin{cases}(a-b)\,\vdots\,d\\(2a+2b+1)\,\vdots\,d\end{cases}$$

$\Rightarrow(a-b)(2a+2b+1)\,\vdots\,d^2\Rightarrow b^2\,\vdots\,d^2\Rightarrow b\,\vdots\,d$

Mà $(a-b)\,\vdots\,d\Rightarrow a\,\vdots\,d\Rightarrow(2a+2b)\,\vdots\,d\Rightarrow 1\,\vdots\,d\Rightarrow d=1$.

Do đó $(a-b;2a+2b+1)=1$

Từ (*) suy ra a-1 và 2a +2b+1 là các số chính phương.

Vậy 2a+2b+1 là số chính phương.

Câu 16. (Trường chuyên tỉnh Hải phòng vòng 2 năm 2019-2020) Tìm các số nguyên tố $p;q$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i) p^2q+p chia hết cho p^2+q.

ii) pq^2+q chia hết cho q^2-p.

Lời giải

$p^2q+p \vdots p^2+q \Rightarrow q\left(p^2+q\right)-\left(p^2q+p\right)=q^2-p \vdots p^2+q$.

$pq^2+q \vdots q^2-p \Rightarrow \left(pq^2+q\right)-p\left(q^2-p\right)=p^2+q \vdots q^2-p$..

$+q^2-p=-\left(p^2+q\right) \Leftrightarrow q^2+q+p^2-p=0(VN)$..

$+q^2-p=p^2+q \Leftrightarrow (q+p)(q-p-1)=0 \Leftrightarrow q-p-1=0 \Leftrightarrow q=p+1$..

Mà p,q là hai số nguyên tố nên $p=2,q=3$ (thỏa mãn bài toán). .

Câu 17. (Trường chuyên tỉnh Hậu Giang chuyên toán năm 2019-2020) Cho trước số nguyên dương m. Tìm một số nguyên dương n sao cho $m+n+1$ là số chính phương và $mn+1$ là lập phương của một số tự nhiên.

Lời giải

Chọn $n=m^2+3m+3$.

Ta có $m+n+1=m^2+4m+4=(m+2)^2$ là số chính phương

$mn+1=m^3+3m^2+3m+1=(m+1)^3$.

Câu 18. (Trường chuyên tỉnh Nam Định chuyên toán năm 2019-2020) Chứng minh rằng nếu n là số nguyên thì $\dfrac{n^5+29n}{30}$ cũng là số nguyên.

Lời giải

+ Ta có $\dfrac{n^5+29n}{30}=\dfrac{n^5-n}{30}+n=\dfrac{n\left(n^4-1\right)}{30}+n=\dfrac{(n-1)n(n+1)\left(n^2+1\right)}{30}+n$.

+ Với n nguyên thì $n-1,\ n,\ n+1$ là ba số nguyên liên tiếp nên trong ba số này phải có số chia hết cho 2 và có số chia hết cho 3, suy ra $(n-1)n(n+1) \vdots 6$, do đó $\left(n^5-n\right) \vdots 6$.

+ Nếu $n \vdots 5$ thì $\left(n^5-n\right) \vdots 5$; nếu n chia cho 5 có dư là một trong các số 1, 2, 3, 4 thì n^4 chia cho 5 dư 1, suy ra $n\left(n^4-1\right) \vdots 5$.

+ Vì $(5;6)=1$ nên suy ra $\left(n^5-n\right) \vdots 30$, theo đó $\dfrac{n^5+29n}{30}=\dfrac{n^5-n}{30}+n$ là số nguyên.

Câu 19. (Trường chuyên tỉnh Nam Định chuyên toán năm 2019-2020) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x;y)$ sao cho $2\left(x^2+y^2-3x+2y\right)-1$ và $5\left(x^2+y^2+4x+2y+3\right)$ đều là các số chính phương.

Lời giải

+ Giả sử tồn tại cặp số tự nhiên $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu. Khi đó có $a,b\in\mathbb{N}^*$ mà $\begin{cases}2\left(x^2+y^2-3x+2y\right)-1=a^2\\5\left(x^2+y^2+4x+2y+3\right)=b^2\end{cases}$, suy ra $a^2+b^2=7\left[(x+1)^2+(y+1)^2\right]$.

Nói cách khác phương trình (1): $A^2+B^2=7\left(X^2+Y^2\right)$ có nghiệm $(X;Y;A;B)$ với $X,Y\in\mathbb{N}^*$ và $A,B\in\mathbb{N}$. Ta coi $(X;Y;A;B)$ là bộ nghiệm của (1) thỏa mãn điều kiện $X+Y$ nhỏ nhất.

+ Từ (1) có $\left(A^2+B^2\right)\vdots 7$. Nhận thấy một số chính phương chia cho 7 chỉ có thể cho số dư là 0, 1, 2, 4 nên $\left(A^2+B^2\right)\vdots 7$ khi và chỉ khi $A\vdots 7$ và $B\vdots 7$; dẫn tới biểu diễn $A=7A_1,B=7B_1$ với $A_1,B_1\in\mathbb{N}^*$. Khi đó (1) trở thành $X^2+Y^2=7\left(A_1^2+B_1^2\right)$.

Lập luận tương tự dẫn đến $X=7X_1,Y=7Y_1$ với $X_1,Y_1\in\mathbb{N}^*$.

+ Ta có $(X_1;Y_1;A_1;B_1)$ là bộ số nguyên dương thỏa mãn $7\left(X_1^2+Y_1^2\right)=A_1^2+B_1^2$, tức là thỏa mãn (1), lại có $X_1+Y_1=\frac{1}{7}(X+Y)<X+Y$ nên mâu thuẫn với cách chọn $(X;Y;A;B)$. Vậy điều giả sử là sai, không có cặp số tự nhiên $(x;y)$ nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 20. (Trường chuyên tỉnh Nghệ An chuyên toán năm 2019-2020) Tìm các cặp số nguyên dương $(x;y)$ sao cho x^2y+x+y chia hết cho xy^2+y+1.

Lời giải

Ta có:

$$x^2y+x+y\,\vdots\,xy^2+y+1$$
$$\Leftrightarrow y\left(x^2y+x+y\right)-x\left(xy^2-y+1\right)\vdots\,xy^2+y+1$$
$$\Leftrightarrow y^2-x\,\vdots\,xy^2+y+1$$

TH1: $y^2=x\Rightarrow\begin{cases}y=m\\x=m^2\end{cases}$:Với mọi m là số tự nhiên khác 0

Thử lại thấy thỏa mãn

TH2: $y^2>x$, ta có:

$$xy^2+y+1\le y^2-x$$
$$\Leftrightarrow (x-1)y^2+y+x+1\le 0$$

(vô lí do $x,y\ge 1$)

TH3: $y^2<x$

Ta có: $\begin{aligned}&xy^2+y+1<x-y^2\\&\Leftrightarrow x\left(y^2-1\right)+y^2+y+1<0\end{aligned}$

(vô lí do $x,y\ge 1$)

Vậy, $(x;y)=(m^2;m)$ với m thuộc tập số tự nhiên khác 0

Câu 21. (Trường chuyên tỉnh PTNK (VÒNG 2) năm 2019-2020)

a) Tìm tất cả những số tự nhiên n sao cho 2^n+1 chia hết cho 9.

b) Cho n là số tự nhiên $n>3$. Chứng minh rằng 2^n+1 không chia hết cho 2^m-1 với mọi số tự nhiên m sao cho $2<m\le n$.

Lời giải

a) $n=3k$ suy ra $2^n+1=8^k+1\equiv(-1)^k+1\ (\bmod 9)$. Suy ra k lẻ, $k=2t+1$.

Suy ra $n=3(2t+1)=6t+3$.

Nếu $n=3k+1$ ta có $2^n+1=3.8^k+1\equiv(-1)^k.3+1\ (\bmod 9)$ suy ra 2^n+1 không chia hết cho 9.

Vậy với $n=6t+2$, với t là số tự nhiên là các số cần tìm.

b) **Cách 1**: Ta có $2^{km}-1\vdots 2^m-1$. Từ $2^{2n}=(2^n+1)(2^n-1)$.

Đặt $2n=km+q\ (0\le q<m)$.

Khi đó $2^{2n}-1=2^{km+q}-2^q+2^q-1=2^q(2^{km}-1)+2^q-1$ chia hết cho 2^m-1, suy ra 2^q-1 chia hết cho m mà $0\le 2^q-1<2^m-1$, suy ra $q=0$.

Do đó $2^n=km$.

Trường hợp 1: Nếu m lẻ, suy ra k chẵn, $k=2k'$, suy ra $n=k'm$, $2^n+1=2^{k'm}+1=2^{k'm}-1+2$ chia hết cho 2^m-1, suy ra 2 chia hết cho 2^m-1 vô lý.

Trường hợp 2: Nếu m chẵn $m=2m'$ nên $n=km'$, suy ra $2^{km'}+1$ chia hết cho 2^m-1, mà 2^m-1 chia hết cho $2^{m'}-1$ nên $2^{km'}+1$ chia hết cho $2^{m'}-1$, suy ra 2 chia hết cho $2^{m'}-1$ vô lý vì $m'>1$.

Cách 2: Ta có $2^{n-m}(2^m-1)\vdots 2^m-1$, suy ra $2^n-2^{n-m}\vdots 2^m-1$, mà $2^n+1\vdots 2^m-1$ suy ra $2^{n-m}+1$ chia hết cho 2^m-1.

Lý luận tương tự ta có $2^{n-km}+1$ chia hết cho 2^m-1.

Giả sử $n=km+q,\ 0\le q<m$.

Chọn k như trên, ta có 2^q+1 chia hết cho 2^m-1. Mà $q<m$ nên $2^q+1=2^m-1$, giải ra $q=1, m=2$ (vô lý).

Câu 22. (Trường chuyên tỉnh Quảng Nam Vòng 2 năm 2019-2020) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, số $M=9.3^{4n}-8.2^{4n}+2019$ chia hết cho 20.

Lời giải

$$M=9.3^{4n}-8.2^{4n}+2019=9.81^n-8.16^n+2019$$

Ta có:

$$81\equiv 1(\bmod 4)\Rightarrow 81^n\equiv 1(\bmod 4)\Rightarrow 9.81^n\equiv 9\equiv 1(\bmod 4)$$
$$8.16^n\equiv 0(\bmod 4)$$
$$\Rightarrow M\equiv 1-0+2019\equiv 2020\equiv 0(\bmod 4)$$

hay $M\vdots 4$ (1)

Lại có:

$81 \equiv 1 (\bmod 5) \Rightarrow 81^n \equiv 1 (\bmod 5) \Rightarrow 9.81^n \equiv 9 \equiv 4 (\bmod 5)$

$16 \equiv 1 (\bmod 5) \Rightarrow 16^n \equiv 1 (\bmod 5) \Rightarrow 8.16^n \equiv 8 \equiv 3 (\bmod 5)$

$\Rightarrow M \equiv 4 - 3 + 2019 \equiv 2020 \equiv 0 (\bmod 5)$

hay $M \vdots 5$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow M \vdots BCNN(4,5)$ hay $M \vdots 20$ (đpcm)

Câu 23. (Trường chuyên tỉnh Quảng Ngãi chuyên toán năm 2019-2020) Số tự nhiên $n = 111^6$ có tất cả bao nhiêu ước số nguyên dương phân biệt? Tính tích của tất cả các ước số đó.

Lời giải

$n = 111^6 = 3^6.37^6$

Mỗi ước số nguyên dương của n có dạng $3^x.37^y$ trong đó $x \in \{0;1;2;3;4;5;6\}$ và $y \in \{0;1;2;3;4;5;6\}$. Do x có thể nhận 7 giá trị và y cũng có thể nhận giá trị 7 nên n có tất cả $7x7 = 49$ ước số nguyên dương phân biệt

Nếu a là một ước số nguyên dương của $n, a \neq 111^3$ thì $b = \frac{n}{a}$ cũng là một ước số nguyên dương của $n, b \neq a$. Khi đó a và b tạo thành một cặp ước số nguyên dương của n và chúng có tích đúng bằng n

Trong 49 ước số nguyên dương phân biệt của n, ngoại trừ 111^3 còn 48 ước số còn lại được chia thành 24 cặp ước số có tính chất như cặp ước (a,b)

Vậy tích tất cả các ước nguyên dương phân biệt của n là $\left(111^6\right)^{24}.111^3 = 111^{147}$

Câu 24. (Trường chuyên tỉnh Thái Nguyên chuyên toán năm 2019-2020) Cho a là số tự nhiên không chia hết cho 5 và 7. Chứng minh

$\left(a^4 - 1\right)\left(a^4 + 15a^2 + 1\right)$ chia hết cho 35.

Lời giải

Đặt $P = \left(a^4 - 1\right)\left(a^4 + 15a^2 + 1\right)$.

Vì a không chia hết cho 5 nên $a = 5k + r (k \in \mathbb{N})$ với $r \in \{1, 2, 3, 4\}$

Suy ra a^4 chia cho 5 dư 1 hay $\left(a^4 - 1\right) \vdots 5$ nên $P \vdots 5$. (1)

Mặt khác, $P = a^8 + 15a^6 - 15a^2 - 1$.

Vì a không chia hết cho 7 nên $a = 7m + n (m \in \mathbb{N})$ với $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Suy ra a^6 chia cho 7 dư 1 hay $\left(a^6 - 1\right) \vdots 7$ và $\left(a^8 - a^2\right) = a^2\left(a^6 - 1\right) \vdots 7$

Do đó $\left[P - \left(a^2 + 15 - 15a^2 - 1\right)\right] \vdots 7$

$\Leftrightarrow \left[P - \left(-14a^2 + 14\right)\right] \vdots 7$

$\Rightarrow P \vdots 7$. (2)

Vì $(5, 7) = 1$ nên từ (1) và (2) suy ra P chia hết cho 35.

Câu 25. (Trường chuyên tỉnh Thái Nguyên chuyên toán năm 2019-2020) Cho $P(x)$ là đa thức bậc bốn và có hệ số của bậc cao nhất là 1. Biết rằng $P(2016)=2017,\ P(2017)=2018,\ P(2018)=2019,\ P(2019)=2020.$ Chứng minh $P(2020)$ là một số tự nhiên chia hết cho 5.

Lời giải

Ta có: $P(2016)-(2016+1)=0, P(2017)-(2017+1)=0,$ $P(2018)-(2018+1)=0,$ $P(2019)-(2019+1)=0.$ (1)

Đặt $Q(x)=P(x)-(x+1)$. Khi đó, $Q(x)$ là một đa thức bậc 4 và có hệ số của bậc cao nhất bằng 1.

Từ (1) ta có : $Q(2016)=0, Q(2017)=0, Q(2018)=0, Q(2019)=0.$ Do đó : 2016, 2017, 2018, 2019 là các nghiệm của đa thức $Q(x)$.

Suy ra $Q(x)=(x-2016)(x-2017)(x-2018)(x-2019)$.

Vậy $P(x)=(x-2016)(x-2017)(x-2018)(x-2019)+x+1$.

Khi đó : $P(2020)=4.3.2.1+2020+1=2045$ chia hết cho 5 (đpcm).

Câu 26. (Trường chuyên tỉnh Vĩnh Long vòng 2 năm 2019-2020) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì n^3+9n+1 không chia hết cho 6.

Lời giải

Ta có $n^3+9n+1=(n-1)n(n+1)+10n+1$

Vì $(n-1)n(n+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6

$10n+1$ là số lẻ nên không chia hết cho 6

Suy ra n^3+9n+1 không chia hết cho 6.

Câu 27. (Trường chuyên tỉnh Phú Thọ vòng 2 năm 2019-2020) Với mỗi số thực x, kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Ví dụ $\left[\sqrt{2}\right]=1; \left[-\frac{3}{2}\right]=-2$

a) Chứng minh rằng $x-1<[x]\le x<[x]+1=[x+1]$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

b) Có bao nhiêu số nguyên dương $n\le 840$ thỏa mãn $\left[\sqrt{n}\right]$ là ước của n?

Lời giải

a) Ta có ngay $[x]\le x$ (theo định nghĩa)

G/s $[x]+1\le x$ thì $[x]+1$ là số nguyên mà $[x]+1>[x]$;

mà theo định nghĩa thì $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x (mâu thuẫn do $[x]<[x]+1$). Do đó $x<[x]+1$

=> $x-1<[x]$

Lại có $\begin{cases}[x]+1\le x+1\\ [x+1]\le x+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[x]+1\le x+1\\ [x+1]-1\le x\end{cases}$

Mặt khác do $[x]+1$ và $[x+1]-1$ đều là các số nguyên nên $\begin{cases}[x]+1\le[x+1]\\ [x+1]-1\le[x]\end{cases}\Rightarrow[x]+1=[x+1]\,(4)$.

Vậy $x-1<[x]\le x<[x]+1=[x+1]$

b) Giả sử n là số nguyên dương thỏa mãn

Đặt $k=\left[\sqrt{n}\right]$ thì $1\le k\le 28$ và $k^2\le n<(k+1)^2$ hay $k^2\le n\le k^2+2k$.

=> $n=k^2+r$ với $0\le r\le 2k$.

Mặt khác $n\,\vdots\,k$ hay $(k^2+r)\,\vdots\,k$ nên $r=0;k;2k$ với $1\le k\le 28$

Lại có $840=28^2+2.28$

Mà n có dạng $k^2;k^2+k;k^2+2k$ đều thỏa mãn yêu cầu bài toán.

=> Số nguyên dương n thỏa mãn yêu cầu bài toán là $3.28=84$.

Câu 28. (Trường chuyên tỉnh Quảng Trị Vòng 2 năm 2019-2020) Cho số tự nhiên có 3 chữ số $\overline{abc}$. Chứng minh rằng: $\overline{abc}$ chia hết cho 21 khi và chỉ khi $a-2b+4c$ chia hết cho 21.

Lời giải

Ta có $4.\overline{abc}=21(19a+2b)+(a-2b+4c)$

Vì $21(19a+2b)\equiv 0(\bmod 21)$, nên $4.\overline{abc}\,\vdots\,21$ khi và chỉ khi $(a-2b+4c)\,\vdots\,21$

mà $(4,21)=1$ nên $\overline{abc}\,\vdots\,21\Leftrightarrow 4.\overline{abc}\,\vdots\,21\Leftrightarrow (a-2b+4c)\,\vdots\,21$

Câu 29. (Trường chuyên tỉnh Thanh hóa chuyên toán năm 2019-2020) Cho hai số nguyên dương x,y với $x>1$ và thỏa mãn điều kiện $2x^2-1=y^{15}$. Chứng minh rằng x chia hết cho 15.

Lời giải

Vì $x,y\in N^*;x>1$ và $2x^2-1=y^{15}\Rightarrow y$ lẻ, $y>1$.

Đặt $y^5=a$ $(a\in N^*, a\not\vdots\,2, a>1)$

Khi đó :

$$2x^2-1=y^{15}\Rightarrow 2x^2-1=a^3\Leftrightarrow 2x^2=a^3+1$$
$$\Leftrightarrow 2x^2=(a+1)(a^2-a+1)$$
$$\Leftrightarrow x^2=\frac{a+1}{2}\cdot(a^2-a+1)\quad(1)$$

Gọi $d=\text{ƯCLN}(a+1,a^2-a+1)\Rightarrow\begin{cases}a+1\,\vdots\,d\\ a^2-a+1\,\vdots\,d\end{cases}$

Lại có $a^2-a+1=(a+1)(a-2)+3\Rightarrow 3\,\vdots\,d\Rightarrow\left[\begin{array}{l}d=1\\ d=3\end{array}\right.$

- Nếu $d=1 \Rightarrow$ ƯCLN$(a+1, a^2-a+1)=1 \Rightarrow$ ƯCLN$(\frac{a+1}{2}, a^2-a+1)=1$.

Do đó, từ (1) suy ra a^2-a+1 là số chính phương.

Điều này vô lý do $(a-1)^2 < a^2-a+1 < a^2, \forall a \in N^*, a>1$

- Nếu $d=3$ thì $2x^2 \vdots 9 \Rightarrow x^2 \vdots 9 \Rightarrow x \vdots 3$

Mặt khác:

Đặt $y^3 = b \ (b \in N^*, b \not\vdots 2, b>1)$

Khi đó :

$$\begin{aligned} & 2x^2 = b^5+1 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2 = (b+1)(b^4-b^3+b^2-b+1) \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = \frac{b+1}{2}\cdot(b^4-b^3+b^2-b+1) \quad (2) \end{aligned}$$

Gọi $k =$ ƯCLN$(b+1, b^4-b^3+b^2-b+1) \Rightarrow \begin{cases} b+1 \vdots k \\ b^4-b^3+b^2-b+1 \vdots k \end{cases}$

Lại có:

$b^4-b^3+b^2-b+1 = (b+1)(b^3-2b^2+3b-4)+5$

$$\Rightarrow 5 \vdots k \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k=1 \\ k=5 \end{array}\right.$$

- Nếu $k=1 \Rightarrow$ ƯCLN$(b+1, b^4-b^3+b^2-b+1)=1 \Rightarrow$ ƯCLN$(\frac{b+1}{2}, b^4-b^3+b^2-b+1)=1$.

Do đó, từ (2) suy ra $b^4-b^3+b^2-b+1$ là số chính phương hay $4b^4-4b^3+4b^2-4b+4$ là số chính phương.

Điều này vô lý do $(2b^2-b)^2 < 4b^4-4b^3+4b^2-4b+4 < (2b^2-b+1)^2, \forall b \in N^*, b>1$

- Nếu $k=5$ thì $2x^2 \vdots 25 \Rightarrow x^2 \vdots 25 \Rightarrow x \vdots 5$

Vì $x \vdots 3, x \vdots 5, (3,5)=1 \Rightarrow x \vdots 15$. (đpcm)

Câu 30. (Trường chuyên tỉnh Yên Bái vòng 2 năm 2019-2020) Chứng minh $A = \underbrace{11...1}_{2019}\underbrace{22...2}_{2020}5$ là số chính phương.

Lời giải

Ta có $A = \underbrace{11....1}_{2019}\underbrace{22...2}_{2020}5 = \underbrace{11....1}_{2019}.10^{2021} + \underbrace{22...2}_{2020}.10+5$

$= \frac{1}{9}.\underbrace{99....9}_{2019}.10^{2021} + \frac{2}{9}.\underbrace{99...9}_{2020}.10+5$

$= \frac{1}{9}\left(10^{2019}-1\right).10^{2021} + \frac{2}{9}\left(10^{2020}-1\right).10+5$

$=\frac{1}{9}\left(10^{4040}-10^{2021}+2.10^{2021}-20+45\right)$

$=\frac{1}{9}\left(10^{4040}+10.10^{2020}+25\right)=\left(\frac{10^{2020}+5}{3}\right)^2$

Do 10^{2020} chia cho 3 dư 1, suy ra $10^{2020}+5$ chia hết cho 3 hay $\frac{10^{2020}+5}{3}$ là số tự nhiên. Vậy A là số chính phương.

Câu 31. (Trường chuyên tỉnh Bình Dương chuyên toán năm 2019-2020) Tìm tất cả các số nguyên x cho $\frac{x-3}{x^2+1}$ là một số nguyên.

Lời giải

Vì $\frac{x-3}{x^2+1}$ là số nguyên nên $\frac{(x-3)(x+3)}{x^2+1}$ cũng là số nguyên.

Ta thấy $\frac{(x-3)(x+3)}{x^2+1}=\frac{x^2-9}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{x^2+1}-\frac{10}{x^2+1}=1-\frac{10}{x^2+1}$.

Do đó $10 \vdots x^2+1 \Rightarrow x^2+1 \in Ư(10)=\{\pm1;\pm2;\pm5;\pm10\}$.

+) $x^2+1=-1 \Rightarrow x^2=-2$ $(vô\ lí)$

+) $x^2+1=1 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$

+) $x^2+1=-2 \Rightarrow x^2=-2 (vô\ lí)$

+) $x^2+1=2 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1 \vee x=-1$

+) $x^2+1=-5 \Rightarrow x^2=-6$ $(vô\ lí)$

+) $x^2+1=5 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=2 \vee x=-2$

+) $x^2+1=-10 \Rightarrow x^2=-11$ $(vô\ lí)$

+) $x^2+1=10 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=3 \vee x=-3$

Thử lại:

+) Thay $x=0$ vào $\frac{x-3}{x^2+1}$, ta thấy $\frac{0-3}{0^2+1}=-3 \in Z$

+) Thay $x=1$ vào $\frac{x-3}{x^2+1}$, ta thấy $\frac{1-3}{1^2+1}=-1 \in Z$

+) Thay $x=-1$ vào $\frac{x-3}{x^2+1}$, ta thấy $\frac{-1-3}{(-1)^2+1}=-2 \in Z$

+) Thay $x=2$ vào $\frac{x-3}{x^2+1}$, ta thấy $\frac{2-3}{2^2+1}=\frac{-1}{5}\notin Z$

+) Thay $x=-2$ vào $\frac{x-3}{x^2+1}$, ta thấy $\frac{-2-3}{(-2)^2+1}=-1\in Z$

+) Thay $x=2$ vào $\frac{x-3}{x^2+1}$, ta thấy $\frac{2-3}{2^2+1}=\frac{-1}{5}\notin Z$

+) Thay $x=-3$ vào $\frac{x-3}{x^2+1}$, ta thấy $\frac{-3-3}{(-3)^2+1}=\frac{-3}{5}\notin Z$

+) Thay $x=3$ vào $\frac{x-3}{x^2+1}$, ta thấy $\frac{3-3}{3^2+1}=0\in Z$

Vậy $x\in\{-2;-1;0;1;3\}$ thì $\frac{x-3}{x^2+1}$ là một số nguyên.

Câu 32. (Trường chuyên tỉnh Bình Thuận chuyên toán năm 2019-2020) Tìm tất cả các số tự nhiên n để phương trình $x^2-n^2x+n+1=0$ (ẩn số x) có các nghiệm là số nguyên.

Lời giải

Với $n=0;n=1$ kiểm tra được phương trình vô nghiệm.

Với $n=2$ thì $x^2-4x+3=0\Leftrightarrow x=1;x=3$ nên nhận $n=2$.

Xét $n\geq 3$,

$\Delta=n^4-4(n+1)$, để phương trình có nghiệm nguyên thì $\Delta=n^4-4(n+1)=t^2$ với t nguyên dương.

Ta có: $t^2<n^4$,

hơn nữa $t^2>(n^2-1)^2\Leftrightarrow n^4-4(n+1)>n^4-2n^2+1\Leftrightarrow 2n^2-4n-5>0$

$\Leftrightarrow 2n(n-2)-5>0$ (luôn đúng với $n\geq 3$)

Suy ra $n^2-1<t<n^2$ (vô lí)

Vậy chỉ có $n=2$ thỏa đề.

Câu 33. (Trường chuyên tỉnh Bình Thuận vòng 2 năm 2019-2020) Tìm tất cả các số tự nhiên n để phương trình $x^2-n^2x+n+1=0$ (ẩn số x) có các nghiệm là số nguyên.

Lời giải

Với $n=0;n=1$ kiểm tra được phương trình vô nghiệm.

Với $n=2$ thì $x^2-4x+3=0\Leftrightarrow x=1;x=3$ nên nhận $n=2$.

Xét $n\geq 3$,

$\Delta=n^4-4(n+1)$, để phương trình có nghiệm nguyên thì $\Delta=n^4-4(n+1)=t^2$ với t nguyên dương.

Ta có: $t^2<n^4$,

hơn nữa $t^2 > (n^2-1)^2 \Leftrightarrow n^4 - 4(n+1) > n^4 - 2n^2 + 1 \Leftrightarrow 2n^2 - 4n - 5 > 0$

$\Leftrightarrow 2n(n-2) - 5 > 0$ (luôn đúng với $n \geq 3$)

Suy ra $n^2 - 1 < t < n^2$ (vô lí)

Vậy chỉ có $n = 2$ thỏa đề.

Câu 34. (Trường chuyên tỉnh Bắc Giang chuyên toán năm 2019-2020) Tìm tất cả các số nguyên tố x, y, z thỏa mãn $(x+2)(y+3)(z+4) = 8xyz$.

Lời giải

$(x+2)(y+3)(z+4) = 8xyz$ (1)

Xét $z = 2$ thì $(1) \Leftrightarrow 3(x+2)(y+3) = 8xy$. Suy ra x hoặc y phải chia hết cho 3.

Nếu $x = 3$ thì $5(y+3) = 8y \Rightarrow y = 5$. Bộ $(x;y;z) = (3;5;2)$.

Nếu $y = 3$ thì $3(x+2) = 4x \Rightarrow x = 6$ (loại).

Xét $z = 3$ thì $(1) \Leftrightarrow 7(x+2)(y+3) = 24xy$. Suy ra x hoặc y phải chia hết cho 7.

Nếu $x = 7$ thì $9(y+3) = 24y \Rightarrow y = \frac{9}{5}$ (loại)

Nếu $y = 7$ thì $5(x+2) = 12x \Rightarrow x = \frac{10}{7}$ (loại).

Xét $z \geq 5$,

$8xyz = (x+2)(y+3)(z+4) < 2z(x+2)(y+3) \Rightarrow 4xy < (x+2)(y+3)$ (2).

Nếu $y = 2$ thì $8x < 5(x+2) \Rightarrow x < \frac{10}{3} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right.$. Thử loại.

Nếu $y \geq 3$ từ (2) ta có $4xy < (x+2)(y+3) \leq 2x.2y = 4xy$ (loại).

Kết luận..

Câu 35. (Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh vòng 2 năm 2019-2020) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $(xy + x + y)(x^2 + y^2 + 1) = 30$.

Lời giải

Vì x, y nguyên dương và $(x;y) = (1;1)$ không thỏa mãn phương trình nên $x^2 + y^2 + 1 > 3; xy + x + y > 3$. Suy ra $xy + x + y$ là ước nguyên dương lớn hơn 3 của 30 gồm: $5;6$.

Nếu $xy + x + y = 5 \Leftrightarrow (x+1)(y+1) = 6$ ta được các trường hợp

+) $\begin{cases} x + 1 = 2 \\ y + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện đầu bài)

+) $\begin{cases} x+1=3 \\ y+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện đầu bài)

Nếu $xy+x+y=6 \Leftrightarrow (x+1)(y+1)=7$ không thỏa mãn

Vậy các cặp số $(x;y)$ thỏa mãn là $(1;2),(2;1)$..

Câu 36. **(Trường chuyên tỉnh Chuyên ĐHSP vòng 2 năm 2019-2020)** Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2y^2-4x^2y+y^3+4x^2-3y^2+1=0$.

Lời giải

Phương trình đã cho có thể được viết lại thành $x^2(y-2)^2+y^3-3y^2+4=3$

hay $(y-2)^2(x^2+y+1)=3$.

Suy ra $(y-2)^2=1$ và $x^2+y+1=3$. Giải ra, ta được $x=\pm1$ và $y=1$. Vậy có hai cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu của đề bài là $(1;1)$ và $(-1;1)$.

Câu 37. **(Trường chuyên tỉnh Cần thơ chuyên toán năm 2019-2020)** Tìm tất cả cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $2020(x^2+y^2)-2019(2xy+1)=5$

Lời giải

Ta có $2020(x^2+y^2)-2019(2xy+1)=5$

$\Leftrightarrow 2019(x-y)^2+x^2+y^2=2024$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x-y|=0 \\ |x-y|=1 \end{array}\right.$

+ Nếu $x=y$ thì $x=\pm2\sqrt{253}$

+ Nếu $x=y+1$ thì $y=1, y=-2$

Vậy cặp số cần tìm là $(2;1),(-1;-2)$

+ Nếu $x=y-1$ thì $y=-1, y=2$

Vậy cặp số cần tìm là $(-2;-1),(1;2)$

Câu 38. **(Trường chuyên tỉnh DAK LAK vòng 2 năm 2019-2020)** Tìm các bộ số tự nhiên $(a_1;a_2;a_3;...;a_{2019})$ thỏa mãn: $\begin{cases} a_1+a_2+a_3+...+a_{2019} \ge 2019^2 \\ a_1^2+a_2^2+a_3^2+...+a_{2019}^2 \le 2019^3+1 \end{cases}$.

Lời giải

Câu 39. **(Trường chuyên tỉnh DAK NONG vòng 2 năm 2019-2020)** Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $2x^2y-1=x^2+3y$.

Lời giải

$2(2x^2y-x^2-3y-1)=0 \Leftrightarrow (2x^2-3)(2y-1)=5$ (*)

Suy ra $2y-1 \in Ư(5)=\{\pm1;\pm5\}$ mà $2y-1>-1, \forall y>0$ nên $\left[\begin{array}{l} 2y-1=1 \\ 2y-1=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=3 \end{array}\right.$.

Với $y=1$ thay vào (*) ta được $2x^2-3=5 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2(n) \\ x=-2(l) \end{array}\right.$

Với $y=3$ thay vào (*) ta được $2x^2-3=1 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$ (loại).

Vậy các số nguyên dương thỏa mãn là $x=2, y=1$.

Câu 40. (Trường chuyên tỉnh Gia lai vòng 2 năm 2019-2020) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2-3y^2+2xy-2x-10y+4=0$.

Lời giải

$x^2-3y^2+2xy-2x-10y+4=0 \Leftrightarrow (x-y-3)(x+3y+1)=-7$

TH1 : $\begin{cases} x-y-3=7 \\ x+3y+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=-3 \end{cases}$; TH2: $\begin{cases} x-y-3=-7 \\ x+3y+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$.

TH3 : $\begin{cases} x-y-3=1 \\ x+3y+1=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$; TH4: $\begin{cases} x-y-3=-1 \\ x+3y+1=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$.

Vậy nghiệm cần tìm là $\begin{cases} x=7 \\ y=-3 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$; $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$.

Câu 41. (Trường chuyên tỉnh Hà Tĩnh vòng 2 năm 2019-2020) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2+x-3=(x-1)(2y^2+y)$.

Lời giải

Từ giả thiết

$x^2+x-3=(x-1)(2y^2+y) \Leftrightarrow (x-1)(x+2)-(x-1)(2y^2+y)=1$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+2-2y^2-y)=1$.

Do x, y nguyên nên phương trình $(x-1)(x+2-2y^2-y)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x-1=1 \\ x+2-2y^2-y=1 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x-1=-1 \\ x+2-2y^2-y=-1 \end{cases} & (2). \end{array}\right.$

Hệ (1) $\begin{cases} x-1=1 \\ x+2-2y^2-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 2y^2+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-\frac{3}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Hệ (2) $\begin{cases} x-1=-1 \\ x+2-2y^2-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2y^2+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-\frac{3}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình có nghiệm nguyên $(x;y)$ là: $(2;1)$ và $(0;1)$.

Câu 42. (Trường chuyên tỉnh Hòa Bình Chuyên Toán năm 2019-2020) Có 5 đội bóng đá A, B, C, D, E thi đấu trong một bảng theo thể thức vòng tròn (mỗi đội gặp nhau 2 trận, trận lượt đi và trận lượt về). Trong mỗi trận đấu, đội thắng được 3 điểm, đội thua không có điểm, đội hòa được 1 điểm. Kết thúc vòng bảng, số điểm của mỗi đội được thống kê như sau:

Đội.A.B.C.D.E

Điểm.15.14.10.5.4

Hỏi trong tất cả các trận đấu đã diễn ra có bao nhiêu trận hòa?

Lời giải

Gọi x là số trận hòa sau khi kết thúc vòng bảng ($x \in N$)

Tổng số trận đấu là 20 (trận)

Tổng số điểm của các đội đạt được sau khi kết thúc bảng đấu là 48 (điểm)

Vì số trận thắng và số trận thua là bằng nhau nên ta có phương trình

$2x+(20-x).3=48 \Rightarrow x=12$

Vậy tổng số trận hòa trong bảng đấu là 12 (trận)

Câu 43. (Trường chuyên tỉnh Hải Dương chuyên toán năm 2019-2020) Tìm các cặp số nguyên (x;y) thỏa mãn điều kiện: $x^2-6xy+10y^2=2(x-5y)$.

Lời giải

Ta có

$x^2-6xy+10y^2=2(x-5y) \Leftrightarrow x^2-2(1+3y)x+10y^2+10y=0;(1)$

Để tồn tại x thỏa mãn (1) thì $\Delta'=(1+3y)^2-10y^2-10y \geq 0;(2)$

$$(1+3y)^2-10y^2-10y \geq 0 \Leftrightarrow -y^2-4y+1 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow y^2+4y-1 \leq 0 \Leftrightarrow (y+2)^2 \leq 5 \Leftrightarrow |y+2| \leq \sqrt{5}$$
$$\Leftrightarrow -2-\sqrt{5} \leq y \leq -2+\sqrt{5}$$

Vì y là số nguyên nên

$y \in \{-4;-3;-2;-1;0\}$

+ Với y=-4 ta có

$$x^2+22x+120=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-12 \\ x=-10 \end{array}\right.$$

+ Với y=-3 ta có

$$x^2+16x+60=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-10 \\ x=-6 \end{array}\right.$$

+ Với y=-2 ta có

$x^2+10x+20=0 \Leftrightarrow x=-5\pm\sqrt{5}$

+ Với y=-1 ta có

$x^2+4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=0 \end{array}\right.$

+ Với y=0 ta có

$x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Kết luận: $(x;y)\in\{(-12;-4),(-10;-4),(-10;-3),(-6;-3),(-4;-1),(0;-1),(0;0),(2;0)\}$

Câu 44. (Trường chuyên tỉnh Ninh Bình chuyên toán năm 2019-2020) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $x^2-xy+y^2=x+y+3$.

Lời giải

Cách 1: $x^2-xy+y^2=x+y+3 \Leftrightarrow 4x^2+4y^2-4xy-4x-4y=12$

$\Leftrightarrow \left[4x^2-4x(y+1)+(y+1)^2\right]+3\left(y^2-2y+1\right)=16$

$\Leftrightarrow (2x-y-1)^2+3(y-1)^2=16 \quad (*)$..

Do $(2x-y-1)^2\ge 0; (y-1)^2\ge 0$ nên $3(y-1)^2\le 16 \Leftrightarrow (y-1)^2\le \frac{16}{3}$.

Do y nguyên dương nên $(y-1)^2\in\{0;1;4\}$..

+ Nếu $(y-1)^2=0 \Leftrightarrow y=1$.

Thay $y=1$ vào (*) ta được $(2x-2)^2=16 \Leftrightarrow (x-1)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=2 \\ x-1=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3\ (N) \\ x=-1\ (L) \end{array}\right.$.

+ Nếu $(y-1)^2=1$ thay vào (*) ta được $(2x-y-1)^2=13$ mà 13 không phải là số chính phương nên suy ra không có giá trị nguyên dương nào của x,y thỏa mãn.

+ Nếu $(y-1)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3\ (N) \\ y=-1\ (L) \end{array}\right.$.

Thay $y=3$ vào (*) ta được $(2x-4)^2=4 \Leftrightarrow (x-2)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=1 \\ x-2=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3\ (N) \\ x=1\ (N) \end{array}\right.$..

Vậy có 3 cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn ycbt là $(3;1);(1;3);(3;3)$..

Cách 2: $x^2-xy+y^2=x+y+3 \Leftrightarrow x^2-(y+1)x+y^2-y-3=0\ (*)$.

Ta có $\Delta=(y+1)^2-4(y^2-y-3)=-3y^2+6y+13$..

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta\ge 0 \Leftrightarrow -3y^2+6y+13\ge 0 \Leftrightarrow \frac{3-4\sqrt{3}}{3}\le y\le \frac{3+4\sqrt{3}}{3}$.

Vì y nguyên dương nên $y\in\{1;2;3\}$..

+ Nếu $y=1$ thay vào (*) ta được: $x^2-2x-3=0$ (1)

Ta có: $1-(-2)+(-3)=0$ nên pt (1) có hai nghiệm $x_1=-1$ (loại)

$x_2=3$ (N)

+ Nếu $y=2$ thay vào (*) ta được: $x^2-3x-1=0$ (2)

Pt (2) có $\Delta=13$ không là số chính phương nên pt (2) không có nghiệm nguyên.

+ Nếu $y=3$ thay vào (*) ta được: $x^2-4x+3=0$ (3)

Ta có: $1+(-4)+3=0$ nên pt (4) có hai nghiệm $x_1=1$ (N)

$x_2=3$ (N).

Vậy có 3 cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn ycbt là $(3;1);(1;3);(3;3)$..

Câu 45. (Trường chuyên tỉnh Phú Yên Vòng 2 năm 2019-2020) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $\dfrac{x^2+y^2}{x+y}=\dfrac{85}{13}$.

Lời giải

Gọi (x,y) là cặp số nguyên thỏa yêu cầu bài toán, rõ ràng $x+y>0$.

Khi đó, ta có $\dfrac{170}{13}=\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)}{x+y}\geq\dfrac{(x+y)^2}{x+y}=x+y$. Suy ra $0<x+y\leq 13$ (4.2).

Mặt khác, theo giả thiết bài toán, ta có $\begin{cases}85(x+y)=13\left(x^2+y^2\right)\\(85,13)=1\end{cases}\Rightarrow x+y\,\vdots\,13$ (4.3).

Từ (4.2) và (4.3) suy ra $x+y=13$. Kết hợp với giả thiết, ta nhận được hệ phương trình $\begin{cases}x+y=13\\x^2+y^2=85\end{cases}$ (4.4).

Giải (4.4), ta thu được hai cặp số nguyên thỏa yêu cầu bài toán $(6;7),(7;6)$.

Câu 46. (Trường chuyên tỉnh Quảng Ngãi chuyên toán năm 2019-2020) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $\sqrt{x+y+3}+1=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

Lời giải

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $\sqrt{x+y+3}+1=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

$\sqrt{x+y+3}+1=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

$\Leftrightarrow x+y+3+2\sqrt{x+y+3}+1=x+2\sqrt{xy}+y$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+y+3}=\sqrt{xy}-2$

$\Leftrightarrow x+y+3=xy-4\sqrt{xy}+4$

$\Leftrightarrow \sqrt{xy}=\dfrac{xy-x-y+1}{4}$

Nếu xy là số không chính phương thì VT là số vô tỉ còn VP là số hữu tỉ, vô lý

Vậy $xy=k^2\Rightarrow\sqrt{xy}=k$

Ta có $x+y+3=xy-4\sqrt{xy}+4\Leftrightarrow x+y+2\sqrt{xy}=xy-2\sqrt{xy}+1\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2=\left(\sqrt{xy}+1\right)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{xy}-1$ (*)

$\Leftrightarrow \sqrt{y}=k-1-\sqrt{x} \Leftrightarrow y=(k-1)^2-2(k-1)\sqrt{x}+x$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}=\dfrac{(k-1)^2+x-y}{2(k-1)}$ vì $(k>2)$

Nếu x là số không chính phương thì VT là số vô tỉ còn VP là số hữu tỉ, vô lý

Vậy x là số chính phương, Lý luận tương tự thì y là số chính phương

Đặt $x=a^2; y=b^2$

Từ (*) $a+b=ab+1 \Leftrightarrow (a-1)(b-1)=2$

Ta tìm được $(a;b)=(2;3);(3;2) \Leftrightarrow (x;y)=(4;9);(9;4)$

Câu 47. (Trường chuyên tỉnh Quảng Ninh Vòng 2 năm 2019-2020) Tìm các số nguyên không âm a, b, n thỏa mãn: $\begin{cases} n^2=a+b \\ n^3+2=a^2+b^2 \end{cases}$.

Lời giải

Có: $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$ suy ra $n^4 \le 2(n^3+2)$, hay $n^3(n-2)-4 \le 0$.

Nếu $n \ge 3$ thì $n^3(n-2)-4 \ge n^3-4>0$ (Loại). Do đó $n=0;\ 1;\ 2$.

Với $n=0;\ 1$ chỉ ra không tồn tại $a;b$ thỏa mãn đề bài.

Với $n=2$ chỉ ra $a=1; b=3$ hoặc $a=3; b=1$ thỏa mãn đề bài rồi kết luận.

Câu 48. (Trường chuyên tỉnh Thái Bình vòng 2 năm 2019-2020) Tìm các nghiệm nguyên (x, y) của phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2020}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \ge 0; y \ge 0$

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{x}=\sqrt{2020}-\sqrt{y} \Leftrightarrow x=2020+y-2\sqrt{2020y}$

$\Leftrightarrow x=2020+y-4\sqrt{5.101y}$

Do $x; y$ là các số nguyên nên $\sqrt{5.101y}$ nguyên hay $5.101y$ là số chính phương

Suy ra: $5.101y=k^2 \Rightarrow y=5.101.a^2=505a^2$ (a là số nguyên)

Tương tự: $x=5.101.b^2=505b^2$ (b là số nguyên)

Thay $x; y$ theo $a; b$ vào (1) ta được

$|a|\sqrt{505}+|b|\sqrt{505}=2\sqrt{505} \Leftrightarrow |a|+|b|=2$

$\lvert a\rvert$	$\lvert b\rvert$	$x=505b^2$	$y=505a^2$
0	2	2020	0
1	1	505	505
2	0	0	2020

Vậy phương trình có các nghiệm là $(2020;0);(505;505);(0;2020)$

Câu 49. (Trường chuyên tỉnh Thái Bình vòng 2 năm 2019-2020) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm $M(a,b)$ được gọi là điểm nguyên nếu cả a và b đều là số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại điểm I trong mặt phẳng tọa độ và 2019 số thực dương $R_1;R_2;\ldots R_{2019}$ sao cho có đúng k điểm nguyên nằm trong đường tròn $(I;R_k)$ với mọi k là số nguyên dương không vượt quá 2019.

Lời giải

Xét điểm $I\left(\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$. Ta chứng minh khoảng cách từ I đến hai điểm nguyên khác nhau là khác nhau.

Xét hai điểm nguyên $M(a;b);M'\left(a';b'\right)$

$$IM=IM'\Leftrightarrow IM^2=IM'^2$$
$$\Leftrightarrow (a-\sqrt{2})^2+(b-\sqrt{3})^2=\left(a'-\sqrt{2}\right)^2+\left(b'-\sqrt{3}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2-a^2-b^2+2\left(a'-a\right)\sqrt{2}+2\left(b'-b\right)\sqrt{3}=0$$

Nhận xét nếu các số nguyên $m;n;p$ thỏa mãn $m+n\sqrt{2}+p\sqrt{3}=0$ thì $m=n=p=0$

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{2};\sqrt{3};\sqrt{6}\notin Q;m,n,p\in Q\\ 2mn\sqrt{2}=3p^2-m^2-2n^2\\ 2mp\sqrt{3}=2n^2-m^2-3p^2\\ 2pn\sqrt{6}=m^2-2n^2-3p^2\\ m+n\sqrt{2}+p\sqrt{3}=0\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}mn=np=pm=0\\ m+n\sqrt{2}+p\sqrt{3}=0\end{cases}\Rightarrow m=n=p=0$$

Ta có: $IM=IM'\Leftrightarrow IM^2=IM'^2\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2-a'^2-b'^2=0\\ 2(a'-a)=0\\ 2(b'-b)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=b'\\ a=a'\end{cases}\Leftrightarrow M\equiv M'$

Xét tất cả các khoảng cách từ điểm nguyên đến điểm I, các khoảng cách này đôi một phân biệt. Gọi S là tập hợp các số thực bằng các khoảng cách từ tất cả các điểm nguyên đến I. Ta có thể chọn được 2020 số dương nhỏ nhất thuộc S và được sắp theo thứ tự tăng dần, nghĩa là tồn tại các số dương $s_1;s_2;\ldots;s_{2020}$ thuộc tập S thỏa mãn $s_p<s_q$ nếu $p<q$, các số thuộc $S\setminus\{s_1;s_2;\ldots s_{2020}\}$ đều lớn hơn $s_1;s_2;\ldots;s_{2020}$. Đặt $R_k=\dfrac{s_k+s_{k+1}}{2},k=1;2;3;\ldots.2019$. Ta có điều phải chứng minh.

Câu 50. (Trường chuyên tỉnh Tiền Giang Vòng 2 năm 2019-2020) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $(2x+5y+1)\left(2^{|x|-1}+y+x^2+x\right)=65$

Lời giải

Vì 65 lẻ nên $2x+5y+1$ lẻ và $2^{|x|-1}+y+x^2+x$ lẻ

Mà $2x+1$ lẻ nên $5y$ chẵn, suy ra y chẵn

Mặt khác $x^2+x=x(x+1)$ chẵn nên $2^{|x|-1}$ lẻ, suy ra $|x|-1=0\Leftrightarrow x=\pm1$

Với x = 1 $\Rightarrow (5y+3)(y+3)=65 \Rightarrow y=2$

Với x = -1 $\Rightarrow (5y+3)(y+3)=65 \Leftrightarrow 5y^2+4y-66=0$ Phương trình này không có nghiệm nguyên.

Vậy: $(x;y)=(1;2)$

Câu 51. (Trường chuyên tỉnh Tuyên Quang chuyên toán năm 2019-2020) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $A=\dfrac{x^4+x^2+x+2}{x^4+3x^3+7x^2+3x+6}$ nhận giá trị là một số nguyên.

Lời giải

Ta có: $A=\dfrac{x^4+x^2+x+2}{x^4+3x^3+7x^2+3x+6}=\dfrac{x^2(x^2+1)+(x+2)}{(x^4+x^2)+(3x^3+3x)+(6x^2+6)}$

$$\Rightarrow A=\frac{x^2(x^2+1)+(x+2)}{x^2(x^2+1)+3x(x^2+1)+6(x^2+1)}=\frac{x^2(x^2+1)+(x+2)}{(x^2+1)(x^2+3x+6)}$$

Do A; x nguyên $\Rightarrow x^2(x^2+1)+(x+2)$ chia hết cho $(x^2+1)(x^2+3x+6)$

$\Rightarrow x^2(x^2+1)+(x+2)$ chia hết cho $x^2+1 \Rightarrow x+2$ chia hết cho x^2+1

$\Rightarrow (x+2)(x-2)$ chia hết cho x^2+1 $\Rightarrow x^2-4$ chia hết cho x^2+1

$\Rightarrow (x^2+1)-5$ chia hết cho $x^2+1 \Rightarrow 5$ chia hết cho x^2+1

$\Rightarrow x^2+1$ là ước dương của $5 \Rightarrow x^2+1\in\{1;5\} \Rightarrow x^2\in\{0;4\} \Rightarrow x\in\{0;\pm2\}$

Thử lại: Với $x=-2$ thì A nguyên

Vậy với $x=-2$ thì A nhận giá trị là một số nguyên.

Câu 52. (Trường chuyên tỉnh Vĩnh Long vòng 2 năm 2019-2020) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x^3-xy-9x-3y+3=0$.

Lời giải

Ta có $x^3-xy-9x-3y+3=0 \Leftrightarrow y(x+3)=x^3-9x+3$

Với $x=-3 \Rightarrow 0.y=3$ $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Với $x\neq-3$ ta được $y=\dfrac{x^3-9x+3}{x+3}=x^2-3x+\dfrac{3}{x+3}$

Để $x,y\in\mathbb{Z}$ thì $3\,\vdots\,(x+3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+3=\pm3\\x+3=\pm1\end{array}\right.$

$x+3=3 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=1$

$x+3=-3 \Leftrightarrow x=-6 \Rightarrow y=53$

$x+3=1 \Leftrightarrow x=-2 \Rightarrow y=13$

$x+3=-1 \Leftrightarrow x=-4 \Rightarrow y=25$

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên $(x;y)$ là $(0;1),(-6;53),(-2;13),(-4;25)$

Câu 53. (Trường chuyên tỉnh Bình Phước chuyên toán năm 2019-2020) Giải phương trình nghiệm nguyên $4y^2 = 2 + \sqrt{199 \quad x^2 \quad 2x}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $199 \quad x^2 \quad 2x \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \leq 200 \underset{x\in Z}{\Longrightarrow} x \in \{\quad 15; \quad 14; \quad 13; \dots; 12; 13\}$$

Ta có $4y^2 = 2 + \sqrt{199 \quad x^2 \quad 2x} = 2 + \sqrt{200 \quad (x+1)^2} \leq 2 + 10\sqrt{2}$

Suy ra $0 < y^2 \leq 4$, $y \in Z$ suy ra $y = \pm 1$ hoặc $y = \pm 2$

Với $y = 1$ suy ra $x = \quad 15$ hoặc $x = 13$

Với $y = \quad 1$ suy ra $x = \quad 15$ hoặc $x = 13$

Với $y = 2$ suy ra $x = \quad 3$ hoặc $x = 1$

Với $y = \quad 2$ suy ra $x = \quad 3$ hoặc $x = 1$

Vậy có các cặp số sau thỏa mãn

$$S = \{(\quad 15;1),(13;1),(\quad 15; \quad 1),(13; \quad 1),(\quad 3;2),(1;2),(\quad 3; \quad 2),(1; \quad 2)\}.$$

Câu 54. (Trường chuyên tỉnh Quảng Trị Vòng 2 năm 2019-2020) Tìm tất cả các số nguyên tố x,y,z thỏa mãn $x^y = z-1$.

Lời giải

Ta có $z = x^y + 1$, mà x,y là các số nguyên tố nên $x \geq 2, y \geq 2 \Rightarrow z \geq 5$. Do đó z là số nguyên tố lẻ.

Vì $x^y = z-1$ nên x^y là số chẵn, vậy $x=2$. Khi đó $z = 2^y + 1$

Nếu y lẻ thì $2^y \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow 2^y + 1 \vdots 3 \Rightarrow z \vdots 3$ vô lý vì z là số nguyên tố.

Nếu y chẵn, y nguyên tố suy ra $y=2$ và $z = 2^2 + 1 = 5$.

Vậy các số cần tìm là $x=y=2, z=5$.

Câu 55. (Trường chuyên tỉnh Thanh hóa chuyên toán năm 2019-2020) Tìm tất cả các cặp số nguyên *(x;y)* thoả mãn : $y^2 + y = x^4 + x^3 + x^2 + x$

Lời giải

Ta có: $y^2 + y = x^4 + x^3 + x^2 + x$

$\Leftrightarrow 4y^2 + 4y + 1 = 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2y+1)^2 = (2x^2+x)^2 + (3x+1)(x+1) & (1) \\ (2y+1)^2 = (2x^2+x+1)^2 - x(x+1) & (2) \end{cases}$$

Ta thấy : Nếu $x < -1$ hoặc $x > 2$ thì $(3x+1)(x+1) > 0$ và $x(x-2) > 0$ nên từ (1) và (2) ta suy ra : $(2x^2+x+1)^2 > (2y+1)^2 > (2x^2+x)^2 \quad (*)$

(loại vì không có số nguyên y nào thỏa mãn (*))

Từ đó suy ra $-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow x \in \{-1;0;1;2\}$ (do $x \in Z$)

Với $x=2\Rightarrow y^2+y=30\Rightarrow y\in\{5;-6\}$ (t/m)

Với $x=1\Rightarrow y^2+y=4$ (loại)

Với $x=0\Rightarrow y^2+y=0\Rightarrow y\in\{0;-1\}$ (t/m)

Với $x=-1\Rightarrow y^2+y=0\Rightarrow y\in\{0;-1\}$ (t/m)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm nguyên là :

$(x;y)\in\{(2;5);(2;-6);(0;0);(0;-1);(-1;0);(-1;-1)\}$

Câu 56. (Trường chuyên tỉnh Thừa Thiên Huế vòng 2 năm 2019-2020) Có bao nhiêu số nguyên x sao cho $\dfrac{2^{2020}}{3x+1}$ là số nguyên ?

Lời giải

Cho x là số nguyên. Ta có $\dfrac{2^{2020}}{3x+1}$ là số nguyên khi $2^{2020}\,\vdots\,(3x+1)$. Suy ra $3x+1=\pm2^b$ với $b=0,1,\ldots,2020.$

Xét b là số chẵn, tức là $b=2k$ $(k\in\mathbb{N})$.

+ Xét phương trình

$3x+1=2^{2k}\Leftrightarrow 3x=4^k-1\Leftrightarrow 3x=3(4^{k-1}+\cdots+1)\Leftrightarrow x=4^{k-1}+\cdots+1.$

Vì $0\le 2k\le 2020\Leftrightarrow 0\le k\le 1010$ nên trường hợp này có 1011 nghiệm.

+ Xét phương trình $3x+1=-2^{2k}\Leftrightarrow 3(x+1)=2-4^k.$

Vì $(2-4^k)\not\vdots\, 3$ nên trường hợp này không có nghiệm nguyên nào.

Xét b là số lẻ, tức là $b=2k+1$ $(k\in\mathbb{N})$.

+ Xét phương trình $3x+1=2.4^k\Leftrightarrow 3(x+1)=2(1+4^k).$

Vì $2(1+4^k)\not\vdots\, 3$ nên nên trường hợp này không có nghiệm nguyên nào.

+ Xét phương trình $3x+1=-2.4^k\Leftrightarrow 3x=-1-2.4^k.$

Vì $(-1-2.4^k)\,\vdots\,3$ nên phương trình có nghiệm $x=\dfrac{-1-2.4^k}{3}.$

Ta có $0\le 2k+1\le 2020\Rightarrow 0\le k\le 1009$ nên trường hợp này có 1010 nghiệm.

Vậy có tất cả $1011+1010=2021$ số nguyên x để $\dfrac{2^{2020}}{3x+1}$ là số nguyên.

Câu 57. (Trường chuyên tỉnh Vĩnh Phúc vòng 2 năm 2019-2020) Tìm tất cả các số nguyên x,y thỏa mãn $9x^2-3xy-24x-2y^2+y+28=0$

Lời giải

Câu 58. (Trường chuyên tỉnh Yên Bái vòng 2 năm 2019-2020) Tìm các số x, y nguyên thỏa mãn: $x^3 - y^3 - 2y^2 - 3y - 1 = 0$.

Lời giải

Ta có $x^3 - y^3 - 2y^2 - 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = y^3 + 2y^2 + 3y + 1 \quad (1)$

Do $y^2 \geq 0$, suy ra $y^3 + 2y^2 + 3y + 1 \leq y^3 + 3y^2 + 3y + 1 = (y+1)^3$

Do $5y^2 + 2 > 0$, suy ra $y^3 + 2y^2 + 3y + 1 > y^3 + 2y^2 + 3y + 1 - (5y^2 + 2) = (y-1)^3$

Suy ra $(y-1)^3 < x^3 \leq (y+1)^3$ do x, y nguyên, suy ra $\left[\begin{array}{l} x = y \\ x = y+1 \end{array}\right.$

Với $x = y$ thay vào (1) ta có: $2y^2 + 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = -\dfrac{1}{2}(loại) \end{array}\right.$

Suy ra $(x; y) = (1,1)$.

Với $x = y + 1$ thay vào (1) ta được $(y+1)^3 = y^3 + 2y^2 + 3y + 1 \Leftrightarrow y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$

Suy ra $(x; y) = (1,0)$.

Vậy có hai cặp $(x, y) = (1;1), (1,0)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 59. (Trường chuyên tỉnh Bình Thuận chuyên toán năm 2019-2020)Trong một buổi tổ chức tuyên dương các học sinh có thành tích học tập xuất sắc của một huyện, ngoại trừ bạn An, hai người bất kì đều bắt tay nhau, An chỉ bắt tay với những người mình quen. Biết rằng một cặp *(hai người)* chỉ bắt tay nhau không quá một lần và có tổng cộng 420 lần bắt tay. Hỏi bạn An có bao nhiêu người quen trong buổi tổ chức tuyên dương đó?

Lời giải

Giả sử ngoài An thì còn n bạn và An quen m bạn $(m \leq n)$.

Số cái bắt tay là $\dfrac{n(n-1)}{2} + m = 420$

$\Rightarrow n(n-1) + 2m = 840 \Rightarrow n(n-1) + 2n \geq n(n-1) + 2m = 840$

$\Rightarrow n^2 + n \geq 840 \Rightarrow n \geq 29$

Khi $n = 29$ thì $m = 14$

Khi $n \geq 30$ thì $n(n-1) \geq 870$ (loại)

Vậy An quen 14 bạn.

Câu 60. (Trường chuyên tỉnh Bình Định vòng 2 năm 2019-2020) Tại mỗi đỉnh của đa giác đều 2020 cạnh ta đánh một số bất kì trong các số tự nhiên từ 1 đến 1009. Chứng minh rằng tồn tại 4 đỉnh của đa giác đã cho (kí hiệu là A, B, C, D với các số được đánh tương ứng là a, b, c, d) sao cho $ABCD$ là hình chữ nhật và $a + b = c + d$.

Lời giải

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đều đã cho.

Vì đa giác đều 2020 cạnh nội tiếp trong (O), nên có đúng 1010 đường kính khác nhau mà các đầu mút của các đường kính này đều là các đỉnh của đa giác đều 2020 cạnh cho trước.

● Giả sử AB là một trong các đường kính ấy và giả sử A tương ứng với số a, B tương ứng với số b. Bây giờ ta gán cho đường kính AB số $|a-b|$.

Do $a, b \in \{1; 2; ...; 1009\}$ nên dễ thấy: $0 \le |a-b| \le 1008$. Như vậy mỗi một trong 1010 đường kính vừa xét tương ứng với một trong các số $1; 2; ...; 1008$. Theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất hai đường kính (trong số 1010 đường kính) được đặt tương ứng với cùng một số.

● Không mất tính tổng quát, có thể cho đó là đường kính AC và BD. Cũng không mất tính tổng quát có thể cho là các đỉnh A, B, C, D tương ứng với các số a, b, c, d trong đó $c \le a$ và $b \le d$ (Nếu không phải như thế thì chỉ việc đổi tên các đầu mút của đường kính). Theo giả thiết thì đường kính AC ứng với số $a-c$, còn đường kính BD ứng với số $d-b$. Nên tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật và $a-c=b-d \Leftrightarrow a+b=c+d$.

Câu 61. (Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh vòng 2 năm 2019-2020) Cho 2020 cái kẹo vào 1010 chiếc hộp sao cho không có hộp nào chứa nhiều hơn 1010 cái kẹo và mỗi hộp chứa ít nhất 1 cái kẹo. Chứng minh rằng có thể tìm thấy một số hộp mà tổng số kẹo trong các hộp đó bằng 1010 cái.

Lời giải

TH1: Tất cả các hộp có số kẹo bằng nhau và bằng 2, khi đó lấy 505 chiếc hộp bất kỳ ta sẽ có tổng số kẹo là 1010..

TH2: Tồn tại hai hộp có số kẹo khác nhau, khi đó ta sắp xếp các hộp thành một hàng ngang sao cho hai hộp đầu tiên không có cùng số kẹo. Ký hiệu a_i là số kẹo trong hộp thứ i, $i=1;2;...;1010$. Xét các số

$S_1=a_1; S_2=a_1+a_2; ...; S_{1010}=a_1+a_2+...+a_{1010}$, với $1 \le a_i \le 1010$.

+) Nếu tồn tại hai số trong $S_1;S_2;...;S_{1010}$ có cùng số dư khi chia cho 1010, giả sử là $S_i, S_j\ (i<j)$ thì $S_j - S_i = (a_{i+1}+...+a_j) \vdots 1010$.

Do $1 \le S_j - S_i \le 2019; (S_j - S_i) \vdots 1010$ nên $S_j - S_i = 1010$ hay $a_{i+1}+...+a_j=1010$.

+) Nếu trong $S_1;S_2;...;S_{1010}$ không có hai số nào có cùng số dư khi chia cho 1010 (1).

Xét 1011 số $S_1;S_2;...;S_{1010}, a_2$, theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 1010. Mà $S_1=a_1 \ne a_2, 1 \le a_1, a_2 \le 1010$ nên S_1, a_2 không cùng số dư khi chia cho 1010 (2).

Từ (1) và (2) suy ra tồn tại $k=2;3;...;1010$ sao cho S_k, a_2 cùng số dư khi chia cho 1010. Khi đó

$S_k - a_2 = a_1 + a_3 + ... + a_k \vdots 1010$.

Mà $1 \le a_1 + a_3 + ... + a_k \le 2019 \Rightarrow a_1 + a_3 + ... + a_k = 1010$.

Suy ra điều phải chứng minh..

Câu 62. (Trường chuyên tỉnh Hà Nội chuyên tin năm 2019-2020) Trên bàn có hai túi kẹo : túi thứ nhất có 22 viên kẹo, túi thứ hai có 29 viên kẹo. An và Bình cùng chơi một trò chơi như sau : mỗi lượt chơi, một bạn sẽ chọn một túi kẹo và lấy ít nhất 1 viên kẹo trong túi kẹo đó. Hai bạn luân phiên thực hiện lượt chơi của mình. Bạn đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc. Nếu An là người lấy kẹo trước, hãy chỉ ra chiến thuật chơi để An luôn là người thắng cuộc.

Lời giải

Chiến thuật chơi như sau : Gọi *lượt chơi chiến thắng* là lượt chơi mà sau khi thực hiện lượt chơi này thì số kẹo ở hai túi bằng nhau. Người thắng cuộc là người thực hiện được *lượt chơi chiến thắng*. Lượt chơi đầu tiên, An lấy 7 viên kẹo ở túi thứ hai nên sau lượt chơi này của An thì số kẹo ở hai túi sẽ bằng nhau và bằng $22.$ Như vậy An đã thực hiện được *lượt chơi chiến thắng*.

Đến lượt chơi của mình, Bình lấy x_1 viên kẹo một cách tùy ý (với x_1 là tự nhiên bất kì và $0 < x_1 \le 22$) ở bất kì túi nào thì sau lượt chơi này, số kẹo ở hai túi không thể bằng nhau. Do đó Bình không thể thực hiện được *lượt chơi chiến thắng*. Sau đó, An lấy x_1 viên kẹo ở túi còn lại thì sau lượt chơi đó số kẹo còn lại ở cả hai túi đều bằng $22 - x_1$. Như vậy An đã thực hiện được *lượt chơi chiến thắng*.

Cứ tiếp tục quá trình chơi như trên, An luôn thực hiện được *lượt chơi chiến thắng*.

Vì số kẹo là hữu hạn nên sau một số lượt chơi thì An thực hiện *lượt chơi chiến thắng* để đưa số kẹo trong cả hai túi về bằng $0.$ Khi đó, đến lượt Bình lấy kẹo thì Bình không thể lấy được viên kẹo nào nên An luôn là người thắng cuộc.

Câu 63. (Trường chuyên tỉnh Hà nội chuyên toán năm 2019-2020) Mỗi điểm trong một mặt phẳng được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ.

1) Chứng minh trong mặt phẳng đó tồn tại hai điểm được tô bởi cùng một màu và có khoảng cách bằng d.

2) Gọi tam giác có ba đỉnh được tô bởi cùng một màu là tam giác *đơn sắc*. Chứng minh trong mặt phẳng đó tồn tại hai tam giác *đơn sắc* là hai tam giác vuông và đồng dạng với nhau theo tỉ số $k = \dfrac{1}{2019}$.

Lời giải

1) Xét một tam giác đều cạnh bằng d $\Rightarrow$ theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại hai đỉnh của tam giác đó có cùng màu và có khoảng cách bằng d .

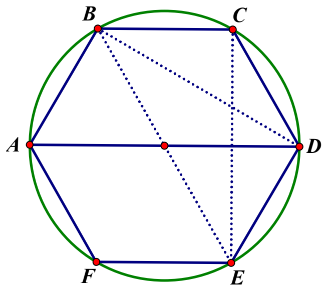
2) Bước 1: Chứng minh tồn tại một tam giác "nửa đều" (tam giác có ba góc $30^0, 60^0, 90^0$), có cạnh huyền bằng d và là tam giác *đơn sắc*.

Giả sử hai đỉnh A, D – cùng có màu xanh.

Dựng hình lục giác đều $ABCDEF$ có AD là đường chéo chính độ dài bằng d

TH1. Một trong bốn đỉnh B, C, E, F màu xanh. Giả sử B màu xanh

$\Rightarrow \Delta ABD$ là tam giác nửa đều có ba đỉnh xanh. (1).



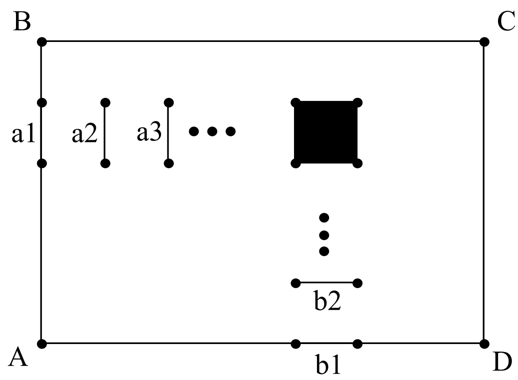
TH2. Bốn đỉnh B,C,E,F đều màu đỏ $\Rightarrow \Delta BCE$ là tam giác nửa đều có ba đỉnh đỏ. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: luôn tồn tại một tam giác nửa đều là tam giác *đơn sắc* và có cạnh huyền bằng d.

Bước 2: Cho $d=1$ và $d=2019$ $\Rightarrow$ có hai tam giác nửa đều, là hai tam giác *đơn sắc* và đồng dạng theo tỉ lệ $1:2019$.

CÁCH 2.

Nhận xét. Tồn tại một hình chữ nhật có 4 đỉnh cùng màu. Thật vậy, xét một lưới vuông 27 điểm gồm 3 hàng và 9 cột. Mỗi cột có $2^3=8$ cách tô màu nên tồn tại hai cột có cách tô màu giống nhau. Mặt khác trong mỗi cột có 2 đỉnh cùng màu nên từ đó ta có một hình chữ nhật có 4 đỉnh cùng màu.



Xét hình chữ nhật $ABCD$ có bốn đỉnh cùng màu như hình vẽ. Chia mỗi cạnh AB, AD thành 2019 phần bằng nhau và từ đó chia $ABCD$ thành 2019^2 hình chữ nhật nhỏ bằng nhau. Ta chỉ cần chứng minh tồn tại một hình chữ nhật nhỏ có 3 đỉnh cùng màu, khi đó có một tam giác vuông có ba đỉnh cùng màu (là một nửa của hình chữ nhật đó) đồng dạng với tam giác vuông có ba đỉnh cùng màu (là một nửa của $ABCD$) theo tỉ lệ $1:2019$.

Giả sử phản chứng, không tồn tại hình chữ nhật nhỏ có ba đỉnh cùng màu. Gọi mỗi cạnh của một hình chữ nhật nhỏ là một *đoạn.* Đoạn có hai đầu mút cùng màu được gọi là đoạn *đơn sắc.* Do A,B cùng màu và 2019 là số lẻ nên trên AB tồn tại một đoạn đơn sắc, kí hiệu là a_1. Xét các đoạn $a_1,a_2,\ldots,a_{2020}$ theo thứ tự từ trái sang phải có hình chiếu vuông góc là a_1 trên AB. Từ giả thiết phản chứng $a_1,a_2,\ldots,a_{2020}$ đều đơn sắc và có màu xen kẽ nhau theo thứ tự. (1)

Tương tự trên AD ta cũng có một đoạn b_1 đơn sắc. Xét các đoạn $b_1,b_2,\ldots,b_{2020}$ theo thứ tự từ dưới lên trên, có hình chiếu vuông góc là b_1 trên AD. Khi đó $b_1,b_2,\ldots,b_{2020}$ đều là đơn sắc và có màu xen kẽ theo thứ tự. (2)

Xét hình chữ nhật R có hình chiếu vuông góc lên AB, AD là a_1, b_1. Từ (1) và (2) ta thấy các đỉnh của R không có cách tô màu phù hợp. Mâu thuẫn này dẫn tới điều phải chứng minh.

Câu 64. (Trường chuyên tỉnh Hải phòng vòng 2 năm 2019-2020) Viết lên bảng 2019 số: $1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\dots;\frac{1}{2018};\frac{1}{2019}$. Từ các số đã viết xóa đi 2 số bất kì $x;\,y$ rồi viết lên bảng số $\frac{xy}{x+y+1}$ (các số còn lại trên bảng giữ nguyên). Tiếp tục thực hiện thao tác trên cho đến khi trên bảng chỉ còn lại đúng một số. Hỏi số đó bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đặt $z=\frac{xy}{x+y+1}\Rightarrow\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}\Rightarrow\frac{1}{z}+1=\left(\frac{1}{x}+1\right).\left(\frac{1}{y}+1\right)$ (1)..

Với mỗi tập các số dương $\{x_1;x_2;\dots;x_n\}$ tùy ý, xét biểu thức

$$P(x_1;x_2;\dots;x_n)=\left(\frac{1}{x_1}+1\right).\left(\frac{1}{x_2}+1\right)\dots\left(\frac{1}{x_n}+1\right).$$

Từ (1) suy ra mỗi lần xóa đi 2 số bất kì $x;y$ rồi viết lên bảng số $\frac{xy}{x+y+1}$ các số còn lại trên bảng giữ nguyên thì giá trị biểu thức P của các số trên bảng không đổi..

Gọi số cuối cùng là $a\Rightarrow P(a)=P\left(\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{1}{3};\dots;\frac{1}{2018};\frac{1}{2019}\right)$.

$$\Rightarrow\frac{1}{a}+1=\left(\frac{1}{1}+1\right).\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}+1\right)\dots\left(\frac{1}{\frac{1}{2018}}+1\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{2019}}+1\right)=2020!\Rightarrow a=\frac{1}{2020!-1}..$$

Câu 65. (Trường chuyên tỉnh Khánh Hòa Vòng 2 năm 2019-2020) Huyện KS có 33 công ty, huyện KV có 100 công ty. Biết rằng, mỗi công ty của huyện KS hợp tác với ít nhất 97 công ty huyện KV. Chứng minh rằng có ít nhất một công ty của huyện KV hợp tác với tất cả các công ty của huyện KS.

Lời giải

Lời bình: Tư duy từ nguyên lý Dirichlet

Quy ước, ta xem sự hợp [...] kết một chiều từ A vào B. Và hiển nhiên, cũng sẽ có liên kết một chiều ngược từ B vào A.

Vì mỗi công ty của huyện KS hợp tác ít nhất 97 công ty huyện KV. Khi đó, số liên kết tối thiểu từ KS vào KV là: $33.97=3201$ (liên kết)

Giả sử: tất cả mỗi một công ty huyện KV đều có tối đa 32 liên kết với các công ty huyện KS. Khi đó, số liên kết tối đa từ KV vào KS là: $100.32=3200<3201$ (liên kết) (MÂU THUẪN !)

VẬY TỒN TẠI ÍT NHẤT MỘT CÔNG TY HUYỆN KV CÓ 33 LIÊN KẾT VỚI CÁC CÔNG TY HUYỆN KS. (đpcm)

Câu 66. (Trường chuyên tỉnh Kon Tum vòng 2 năm 2019-2020) Cho tập hợp A gồm 41 phần tử là các số nghuên khác nhau thỏa mãn tổng của 21 phần tử bất

kỳ lớn hơn tổng của 20 phần tử còn lại. Biết các số 401 và 402 thuộc tập A. Tìm tất cả các phần tử của
tập hợp A.

Lời giải

Cho tập hợp A gồm 41 phần tử là các số nghuên khác nhau thỏa mãn tổng của 21 phần tử bất kỳ lớn hơn tổng của 20 phần tử còn lại. Biết các số 401 và 402 thuộc tập A. Tìm tất cả các phần tử của tập hợp A.

Giả sử $A=\{a_1;a_2;a_3;...;a_{41}\}$ với $a_1;a_2;a_3;...;a_{41}\in\mathbb{Z}$ và $a_1<a_2<a_3<...<a_{41}$

Theo giả thiết ta có $a_1+a_2+a_3+...+a_{21}>a_{22}+a_{23}+...+a_{41}$

$\Leftrightarrow a_1>a_{22}-a_2+a_{23}-a_3+...+a_{41}-a_{21}$ (1)

Mặt khác với $x;y\in\mathbb{Z}$ và nếu $y>x$ thì $y\geq x+1$

$\Rightarrow a_{22}-a_2\geq 20, a_{23}-a_3\geq 20,...,a_{41}-a_{21}\geq 20\ (2)$

Nên từ (1) suy ra $a_1>20+20+20+...+20=400$

Mà a_1 nhỏ nhất và $401\in A\Rightarrow a_1=401$

Ta có $401>a_{22}-a_2+a_{23}-a_3+...+a_{41}-a_{21}\geq 400$

$\Rightarrow a_{22}-a_2+a_{23}-a_3+...+a_{41}-a_{21}=400$

Kết hợp với (2)

$\Rightarrow a_{22}-a_2=a_{23}-a_3=...=a_{41}-a_{21}=20\ (3)$

$\Rightarrow 20=a_{22}-a_2=(a_{22}-a_{21})+(a_{21}-a_{20})+...+(a_3-a_2)\geq 20$

$\Rightarrow a_{22}-a_{21}=a_{21}-a_{20}=...=a_3-a_2=1\ (4)$

Ta có $a_1=401$ mà $402\in A\Rightarrow a_2=402$

Kết hợp (3) và (4) suy ra $A=\{401;402;403;...;441\}$

Câu 67. **(Trường chuyên tỉnh Nam Định chuyên toán năm 2019-2020)** Trước ngày thi vào lớp 10 chuyên, thầy giáo dùng không quá 49 cây bút đem tặng cho tất cả 32 bạn học sinh lớp 9A sao cho ai cũng nhận được bút của thầy. Chứng minh rằng có một số bạn lớp 9A nhận được số lượng bút tổng cộng là 25.

Lời giải

Gọi a_i là số bút mà học sinh thứ i (trong 32 học sinh) nhận được ($i=1,2,...,32$). Như vậy $a_i\in\mathbb{N}^*$ và $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{32}\leq 49$. Ta kí hiệu:

$$S_1=a_1,$$
$$S_2=a_1+a_2,$$
$$....$$
$$S_{32}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{32}$$

Với mỗi $i\in\{1;2;...;32\}$ ta có: $1\leq S_i\leq 49$, $S_i+25\leq 74$; $S_i+50\leq 99$, $S_i+75\leq 124$.

Xét 128 số gồm:32 số nhóm (1) là $S_1,S_2,...,S_{32}$,

32 số nhóm (2) là $S_1+25,S_2+25,...,S_{32}+25$,

32 số nhóm (3) là $S_1+50,S_2+50,...,S_{32}+50$,

32 số nhóm (4) là $S_1+75, S_2+75, ..., S_{32}+75$.

Thấy 128 số này lấy giá trị nguyên dương trong phạm vi từ 1 đến 124, theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai số nào đó trong chúng bằng nhau. Vì $S_1 < S_2 < ... < S_{32}$ nên dãy 32 giá trị trong mỗi nhóm ở trên tăng dần kể từ trái qua phải. Suy ra tồn tại $j > i \ge 1$ mà $S_i + k_1.25 = S_j + k_2.25$ với $k_1, k_2 \in \{0,1,2,3\}$ và $k_1 \ne k_2$ (do hai số bằng nhau thì không cùng nhóm).

Vì $S_j > S_i$ nên $0 < S_j - S_i = 25(k_1 - k_2)$, suy ra $k_1 - k_2 \in \{1,2,3\}$. Lại có $S_j - S_i < S_j \le 49$ nên $25(k_1 - k_2) < 49$, suy ra $k_1 - k_2 = 1$. Vậy $S_j - S_i = 25$ hay $a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_j = 25$, nghĩa là nhóm gồm các học sinh từ học sinh thứ $i+1$ đến học sinh thứ j nhận được tổng cộng 25 cây bút.

Câu 68. (Trường chuyên tỉnh Nghệ An chuyên toán năm 2019-2020) Cho 12 điểm trên mặt phẳng sao cho 3 điểm nào cũng là đỉnh của một tam giác mà mỗi tam giác đó luôn tồn tại ít nhất một cạnh có độ dài nhỏ hơn 673. Chứng minh rằng có ít nhất hai tam giác mà chu vi của mỗi tam giác nhỏ hơn 2019.

Lời giải

Ta tô màu các đoạn thẳng có đầu mút là 2 trong 12 điểm đã cho:

-Tô đỏ các đoạn thẳng có độ dài nhỏ hơn 673

-Tô xanh các đoạn thẳng còn lại

thì mỗi tam giác có ít nhất một cạnh màu đỏ. Ta sẽ chứng minh có ít nhất 2 tam giác có 3 cạnh đều là màu đỏ.

+Xét 6 điểm trong 12 điểm đã cho. Từ một điểm A nối đến các đoạn thẳng còn lại tạo thành 5 đoạn thẳng, được tô tới hai màu xanh, nên tồn tại 3 cạnh cùng màu. Giả sử đó là AB, AC, AD

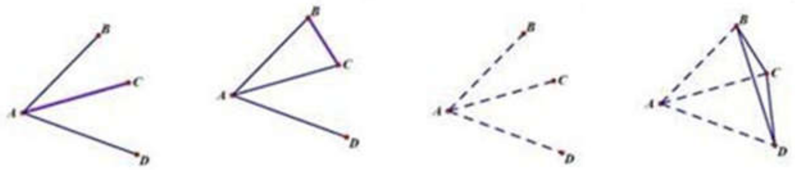
Nếu AB, AC, AD tô đỏ (nét liền, h1) thì tam giác BCD phải có 1cạnh tô đỏ(h1)., chẳn hạn BC thì tam giác ABC có 3 cạnh tô đỏ(h2). Nếu AB, AC, AD tô xanh (nét đứt, h3). Do mỗi tam giác phải có ít nhất một cạnh đỏ nên BC, CD, BD và tam giác BCD có 3 cạnh đỏ(h1).

Suy ra trong 6 điểm này luôn tồn tại ít nhất một tam giác có 3 cạnh màu đỏ

+Xét 6 điểm còn lại, chứng minh tương tự

Vậy trong 12 điểm luôn tồn tại ít nhất 2 tam giác có hai cạnh đều màu đỏ. Suy ra tồn tại ít nhất hai tam giác mà chu vi mỗi tam giác bé hơn 2019

(Từ trái qua phải lần lượt là h1,h2,h3,h4)



Câu 69. (Trường chuyên tỉnh Ninh Bình chuyên toán năm 2019-2020) Trong hình tròn có diện tích bằng $1009 cm^2$ lấy 2019 điểm phân biệt bất kì sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng trong 2019 điểm đó luôn tìm được ba điểm tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn $1 cm^2$.

Lời giải

Chia hình tròn thành 1009 hình quạt bằng nhau, mỗi hình quạt có diện tích bằng $1cm^2$. Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất một hình quạt (M) chứa ít nhất $\left[\frac{2019}{1009}\right]+1=3$ điểm trong số 2019 điểm đã cho..

Ba điểm đó không thẳng hàng nên tam giác có ba đỉnh là 3 điểm này nằm trọn trong hình quạt (M) nên tam giác đó có diện tích nhỏ hơn diện tích hình quạt (M), tức là có diện tích nhỏ hơn $1cm^2$..

Câu 70. (Trường chuyên tỉnh PTNK (VÒNG 2) năm 2019-2020) Trong một buổi gặp gỡ giao lưu giữa các học sinh đến từ n quốc gia, người ta nhận thấy rằng cứ 10 học sinh bất kỳ thì có ít nhất 3 học sinh đến từ cùng một quốc gia.

a) Gọi k là số các quốc gia có đúng 1 học sinh tham dự buổi gặp gỡ. Chứng minh rằng $n<\frac{k+10}{2}$.

b) Biết rằng số các học sinh tham dự buổi gặp gỡ là 60. Chứng minh rằng có thể tìm được ít nhất là 15 học sinh đến từ cùng một quốc gia.

Lời giải

a) Giả sử ngược lại rằng $n\geq\frac{k+10}{2}$ thì $2n-k\geq 0$. Gọi A là tập hợp các quốc gia có đúng 1 học sinh tham dự buổi gặp gỡ và B là tập hợp các quốc gia còn lại. Khi đó, mỗi quốc gia trong B sẽ có ít nhất 2 học sinh.

Ta chọn tất cả học sinh trong A và mỗi quốc gia trong B, chọn 2 học sinh thì có $k+2(n-k)=2n-k$ học sinh.

Các học sinh này có đặc điểm là: không có 3 học sinh nào đến từ cùng cùng quốc gia. Do $2n-k\geq 10$ nên có thể chọn ra trong đó 10 học sinh nào đó không thỏa mãn đề bài.

b) Theo câu a) ta có $2n-k<10$ nên $2n-k\leq 9\Leftrightarrow n\leq\frac{k+9}{2}$.

Do số học sinh tổng cộng là 60, đề chỉ ra có 15 học sinh đến từ cùng quốc gia thì theo nguyên lý Dirichlet, ta chỉ cần chỉ ra rằng $\frac{60-k}{n-k}\geq 15\Leftrightarrow 15n-14k\leq 60$.

Ta sẽ chứng minh đánh giá trên đúng với mọi $(n;k)$. Vì ta đã có $n\leq\frac{k+9}{2}$ nên ta sẽ đưa về chứng minh $15\left(\frac{k+9}{2}\right)-14k\leq 60\Leftrightarrow k\geq\frac{15}{13}$. Do đó, với $k\geq 2$ thì khẳng định đúng. Tiếp theo, ta xét hai trường hợp:

Nếu $k=0$ thì theo (*), ta phải có $n\leq 4$ nên $15n-14k=15n\leq 60$, đúng.

Nếu $k=1$ thì theo (*), khi đó loại trừ học sinh ở nước đó ra thì còn lại 59 học sinh, đến từ 4 quốc gia. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại 15 học sinh đến từ cùng quốc gia.

Câu 71. (Trường chuyên tỉnh Quảng Ngãi chuyên toán năm 2019-2020) Trên một bảng ô vuông, ở mỗi ô người ta điền toàn bộ dấu +. Sau đó thực hiện quá trình đổi dấu (dấu + sang dấu -, dấu – sang dấu +) lần lượt theo các bước sau:

Bước 1: Các ô ở dòng thứ i đều được đổi dấu i lần, $i=1,2,\ldots,2019$.

Bước 2: Các ô ở cột thứ j đều được đổi dấu $3j+1$ lần, $j=1,2,\ldots,2019$.

Tính số dấu còn lại trên bảng ô vuông sau khi thực hiện xong quá trình đổi dấu trên.

Lời giải

Theo quá trình đổi dấu trên thì ô vuông ở dòng i cột j được đổi dấu $i+3j+1$ lần

Mà $i+3j+1$ và $i+j$ hai số không cùng tính chẵn lẻ (vì $(i+3j+1)-(i+j)=2j+1$ là số lẻ)

Do đó những ô vuông ở dòng i cột j mà $i+j$ là số lẻ sẽ đổi dấu một số chẵn lần và dấu ở ô vuông đó vẫn là dấu +, còn những ô vuông ở dòng i cột j mà $i+j$ là số chẵn sẽ đổi dấu một số lẻ lần và dấu ở ô vuông đó là dấu –

Mà từ 1 đến 2019 có 1009 số chẵn và 1010 số lẻ nên số cặp $(i;j)$ mà $i+j$ bằng 1009.1010+1010.1009=2038180

Vậy số các ô vuông còn lại mang dấu + bằng 2038180.

Câu 72. (Trường chuyên tỉnh Quảng Ninh Vòng 2 năm 2019-2020) Cho trước p là số nguyên tố. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, lấy hai điểm $A(p^8;0)$ và $B(p^9;0)$ thuộc trục Ox. Có bao nhiêu tứ giác $ABCD$ nội tiếp sao cho các điểm C,D thuộc trục Oy và đều có tung độ là các số nguyên dương.

Lời giải

Xét tứ giác $ABCD$ thỏa mãn đề bài. Gọi $C(0;c), D(0;d)$ thì $c>d>0$.

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp khi và chỉ khi $OC.OD=OA.OB$ suy ra $c.d=p^8.p^9=p^{17}$. (1)

Do p nguyên tố và c,d nguyên dương nên có 9 cặp $(c;d)$ với $c>d$ thỏa mãn (1) là: $(p^{17};1),(p^{16};p),...,(p^9;p^8)$.

Vậy có 9 tứ giác thỏa mãn đề bài.

Câu 73. (Trường chuyên tỉnh Thái Nguyên chuyên tin năm 2019-2020) Hai bạn Thái và Nguyên cùng chơi trò lấy kẹo trong một hộp có 2019 chiếc kẹo. Cách chơi như sau: ***" Mỗi người đến lượt mình được lấy một số kẹo bất kỳ là lũy thừa với số mũ tự nhiên của 2, ai lấy được chiếc kẹo cuối cùng là người thắng cuộc".*** Bạn Thái là người được lấy kẹo trước. Hãy chỉ ra một chiến thuật giúp cho bạn Nguyên luôn là người thắng cuộc.

Lời giải

Ta có nhận xét sau:

+) Nếu n là số tự nhiên lẻ $\Leftrightarrow$ $n=2k+1$ $(k\in\mathbb{N})$ thì $2^n=2^{2k+1}=2.4^k\equiv 2(\bmod 3)$.

+) Nếu n là số tự nhiên chẵn $\Leftrightarrow$ $n=2k$ $(k\in\mathbb{N})$ thì $2^n=2^{2k}=4^k\equiv 1(\bmod 3)$.

+) 2019 chia hết cho 3.

Khi bạn Thái lấy kẹo xảy ra các trường hợp sau :

+) Trường hợp 1: Bạn Thái lấy số kẹo có dạng 2^m với m là số tự nhiên lẻ.

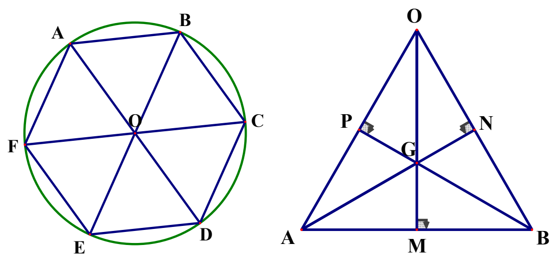
Khi đó bạn Nguyên sẽ lấy số kẹo có dạng 2^p với p là số tự nhiên chẵn, như vậy số kẹo còn lại sẽ là số tự nhiên chia hết cho 3.

+) Trường hợp 2: Bạn Thái lấy số kẹo có dạng 2^m với m là số tự nhiên chẵn. Khi đó bạn Nguyên sẽ lấy số kẹo có dạng 2^p với p là số tự nhiên lẻ, như vậy số kẹo còn lại sẽ là số tự nhiên chia hết cho 3.

Tóm lại : Khi nào bạn Thái lấy số kẹo có dạng 2^m thì bạn Nguyên sẽ lấy số kẹo có dạng 2^p với m, p là hai số tự nhiên khác tính chẵn, lẻ. Khi đó, số kẹo còn lại trong hộp luôn là số chia hết cho 3 và như vậy bạn Thái không thể lấy được viên kẹo cuối cùng nên bạn Nguyên sẽ là người chiến thắng..

Câu 74. (Trường chuyên tỉnh Thái Nguyên chuyên tin năm 2019-2020) Cho 19 điểm nằm trong hay nằm trên cạnh của một lục giác đều cạnh $3cm$. Chứng minh có ít nhất hai trong số các điểm đã cho có khoảng cách không vượt quá $\sqrt{3}cm$.

Lời giải



+ Giả sử 19 điểm đã cho nằm trong hoặc nằm trên cạnh của lục giác đều $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn tâm O

+ Nối O với 6 đỉnh của lục giác tạo thành 6 tam giác đều. Khi đó sẽ có ít nhất 4 điểm nằm trong hay trên cạnh của một tam giác đều trong số 6 tam giác đó (theo nguyên lý Dirichlet)

+ Giả sử 4 điểm trong 19 điểm đó cùng nằm trong hay nằm trên cạnh của tam giác đều OAB có trọng tâm G.

+ Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, OB, OA. Tam giác OAB đều và $OA = OB = AB = 3cm$ nên ta có: $BG = OG = AG = \frac{2}{3}AN = \frac{2}{3}\sqrt{OA^2 - ON^2} = \frac{2}{3}\sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{3}cm$

Khi đó ba tứ giác $BMGN, ONGP, AMGP$ là các tứ giác nội tiếp các đường tròn có đường kính $BG = OG = AG = \sqrt{3}cm$

+ Bốn điểm nằm trong hay nằm trên cạnh của tam giác OAB sẽ có ít nhất hai điểm nằm trong một trong ba hình tròn đường kính $\sqrt{3}cm$. Khoảng cách giữa hai điểm đó không quá $\sqrt{3}cm$

Câu 75. (Trường chuyên tỉnh Long An chuyên toán dự bị năm 2019-2020)

Có một nhóm bạn đi hái nấm. Số nấm của bạn hái được ít nhất bằng $\frac{1}{7}$ tổng số nấm hái được. Số nấm của bạn hái được nhiều nhất bằng $\frac{1}{5}$ tổng số nấm hái được. Hỏi nhóm bạn đó có bao nhiêu người?

Lời giải

Có một nhóm bạn đi hái nấm. Số nấm của bạn hái được ít nhất bằng $\frac{1}{7}$ tổng số nấm hái được. Số nấm của bạn hái được nhiều nhất bằng $\frac{1}{5}$ tổng số nấm hái được. Hỏi nhóm bạn đó có bao nhiêu người?

Gọi số bạn trong nhóm đi hái nấm là n ; tổng số nấm hái được là y

Ta có : n là số nguyên dương và $y > 0$

Bạn hái được ít nhất hái được: $\frac{1}{7}y$

Suy ra : $\frac{ny}{7} < y$

Bạn hái được nhiều nhất hái được: $\frac{1}{5}y$

Suy ra: $\frac{ny}{5} > y$

Suy ra: $5 < n < 7$

Kết luận số bạn trong nhóm đi hái nấm là 6

Câu 76. (Trường chuyên tỉnh Long An chuyên toán năm 2019-2020)
Cho các số tự nhiên 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Từ các số tự nhiên trên ta thành lập số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau và số tự nhiên được thành lập phải chia hết cho 3. Ta thành lập được tất cả bao nhiêu số tự nhiên như vậy?

Lời giải

Ta chia các số thành 3 nhóm :

+Nhóm 1 gồm các số chia hết cho 3. Nhóm này gồm các số 3,6,9.

+Nhóm 2 gồm các số chia cho 3 dư 1. Nhóm này gồm các số 1,4,7.

+Nhóm 3 gồm các số chia cho 3 dư 2. Nhóm này gồm các số 2,5,8.

TH1: Chọn ba số thuộc nhóm 1.

Ta lập được 6 số thỏa đề bài

TH2: Chọn ba số thuộc nhóm 2.

Ta lập được 6 số thỏa đề bài

TH3: Chọn ba số thuộc nhóm 3.

Ta lập được 6 số thỏa đề bài

TH4: Chọn một số thuộc nhóm 1, một số thuộc nhóm 2, một số thuộc nhóm 3.

Ứng với một số thuộc nhóm 1, ta chọn được ba số thuộc nhóm 2, ứng với một số thuộc nhóm 2 ta lại chọn được ba số thuộc nhóm 3. Như vậy trường hợp này ta lập được $27.6 = 162$ số thỏa đề .

Tổng cộng : 180 số

Câu 77. (Trường chuyên tỉnh Phú Thọ vòng 2 năm 2019-2020) Có 15 bạn học sinh nam và 15 bạn học sinh nữ ngồi quanh một bàn tròn. Chứng minh rằng luôn tồn tại một học sinh mà 2 bạn ngồi cạnh bạn đó đều là nữ.

Lời giải

Giả sử tồn tại một cách xếp 30 bạn lên bàn tròn sao cho không có bạn nào ngồi giữa hai bạn nữ. Gọi các bạn theo thứ tự là $A_1; A_2; \ldots; A_{30}$. Chúng ta chia 30 bạn sang hai bàn tròn gồm $\left(A_1; A_3; \ldots; A_{29}\right)$ và $\left(A_2; A_4; \ldots; A_{30}\right)$ và giữ nguyên thứ tự.

Khi đó ở cả hai bàn mới, không có hai bạn nữ nào ngồi cạnh nhau.

=> Số bạn nữ ở mỗi bàn sẽ không vượt quá $\frac{15}{2}$.

Suy ra tổng số bạn nữ ở cả hai bàn nhỏ hơn 15 (trái giả thiết).

Vậy luôn tồn tại một học sinh mà 2 bạn ngồi cạnh bạn đó đều là nữ.

Câu 78. (Trường chuyên tỉnh Thanh hóa chuyên toán năm 2019-2020) Trong mặt phẳng, kẻ 2022 đường thẳng phân biệt sao cho không có hai đường thẳng nào song song và không có ba đường thẳng nào đồng quy. Tam giác tạo bởi ba đường thẳng trong số các đường thẳng đã cho gọi là *tam giác đẹp* nếu nó không bị đường thẳng nào trong số các đường thẳng còn lại cắt. Chứng minh rằng số *tam giác đẹp* không ít hơn 674.

Lời giải

Gọi các đường thẳng đã cho là $d_1, d_2, d_3, ..., d_{2022}; A_{ij}$ là giao điểm của đường thẳng $d_i, d_j\left(i, j=\overline{1;2022}, i \neq j, A_{ij} \equiv A_{ji}\right)$

Xét đường thẳng d_n bất kì trong số 2022 đường thẳng đã cho. Do không có ba đường thẳng nào đồng quy nên các giao điểm $A_{ij}\,(n \neq i, j)$ của các cặp đường thẳng d_i, d_j không nằm trên d_n. Do số giao điểm là hữu hạn nên tồn tại một giao điểm gần d_n nhất, giả sử là A_{ij} (nếu có nhiều giao điểm như vậy thì ta chọn 1 giao điểm bất kì trong số đó).

Ta sẽ chứng minh tam giác $A_{ij}A_{ni}A_{nj}$ là tam giác đẹp.

Thật vậy, nếu tam giác này bị đường thẳng d_m nào đó trong 2019 đường thẳng còn lại cắt thì d_m phải cắt ít nhất một trong hai đoạn thẳng $A_{ij}A_{ni}, A_{ij}A_{nj}$. Giả sử d_m cắt đoạn thẳng $A_{ij}A_{ni}$ tại điểm A_{mi} thì A_{mi} gần d_n hơn A_{ij}. Điều này trái với giả thiết A_{ij} gần d_n nhất.

Suy ra, với mỗi đường thẳng d_n luôn tồn tại một tam giác đẹp có cạnh nằm trên d_n.Trên mỗi đường thẳng d_m ta chọn 1 cạnh của tam giác đẹp thì ta thu được 2022 cạnh của các tam giác đẹp.

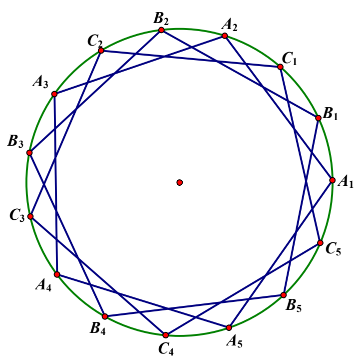
Vậy số tam giác đẹp không ít hơn: $2022:3=674$ (đpcm)

Câu 79. (Trường chuyên tỉnh Vĩnh Phúc vòng 2 năm 2019-2020) Bạn Bình có 19 viên bi màu xanh, 21 viên bi màu đỏ và 23 viên bi màu vàng. Bình thực hiện một trò chơi theo quy tắc sau: Mỗi lần Bình chọn 2 viên bi có màu khác nhau, rồi sơn chúng bởi màu thứ ba (Ví dụ: Nếu Bình chọn 2 viên bi gồm 1 viên bi màu xanh và 1 viên bi màu đỏ thì Bình sơn 2 viên bi này thành màu vàng). Hỏi sau một số hữu hạn lần thực hiện trò chơi theo quy tắc trên, bạn Bình có thể thu được tất cả các viên bi cùng một màu hay không ? Tại sao ?

Lời giải

Câu 80. (Trường chuyên tỉnh Yên Bái vòng 2 năm 2019-2020) Từ một đa giác đều 15 đỉnh, chọn ra 7 đỉnh bất kỳ. Chứng minh rằng có 3 đỉnh trong số các đỉnh đã chọn là ba đỉnh của một tam giác cân.

Lời giải



Ký hiệu các đỉnh liên tiếp của đa giác đều 15 cạnh là $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, ..., A_5, B_5, C_5$ khi đó, ta có 3 ngũ giác đều rời nhau là $A_1A_2A_3A_4A_5$, $B_1B_2B_3B_4B_5$, $C_1C_2C_3C_4C_5$.

Theo nguyên lý Dirichlet trong 7 đỉnh đã chọn có ít nhất 3 đỉnh thuộc 1 trong 3 ngũ giác đều kể trên.

Mặt khác trong một ngũ giác đều thì 3 đỉnh bất kỳ luôn là ba đỉnh của một tam giác cân.

Vậy trong 7 đỉnh đã chọn luôn tồn tại 3 đỉnh là 3 đỉnh của một tam giác cân.

(Chú ý: Học sinh có không cần vẽ hình minh họa cho câu này)

Câu 81. (Trường chuyên tỉnh Hà Nội chuyên tin năm 2019-2020) Tìm tất cả số tự nhiên x để giá trị của biểu thức $P = x^3 + 3x^2 + x + 3$ là lũy thừa của một số nguyên tố.

Lời giải

Nếu $x = 0$ thì $P = 3 = 3^1$ (thỏa mãn)

Nếu $x = 1$ thì $P = 8 = 2^3$ (thỏa mãn)

Nếu $x = 2$ thì $P = 25 = 5^2$ (thỏa mãn)

Nếu $x \geq 3$, giả sử $\left(x^2+1\right)\left(x+3\right) = q^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$ và q là số nguyên tố.

Ta có $x^2 + 1 > x + 3$ suy ra $\begin{cases} x^2 + 1 = q^a \\ x + 3 = q^b \end{cases}$ với $a, b \in \mathbb{N}, n > a > b > 0.$

Do đó, $\dfrac{x^2+1}{x+3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - 3 + \dfrac{10}{x+3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 10 \,\vdots\, \left(x+3\right) \Rightarrow x + 3 = 10 \Rightarrow x = 7$.

Thử lại với $x = 7 \Rightarrow P = 500$ (không thỏa mãn).

Vậy tập các giá trị cần tìm của x là $\left\{0;1;2\right\}$.

Câu 82. (Trường chuyên tỉnh Bình Phước chuyên toán năm 2019-2020) Tìm tất cả các cặp số nguyên tố (p, q) sao cho $p^2 \quad 2q^2 = 41$.

Lời giải

Ta có $p^2 \quad 2q^2 = 41$ suy ra $p^2 = 41 + 2q^2$ suy ra p^2 là số lẻ suy ra p lẻ.

Vì p lẻ nên $p = 2k + 1$ (k là số nguyên dương) . Thế vào (*) ta có

$$q^2 = 2k(k+1) \quad 20 \text{ suy ra } q \text{ chẵn.}$$

Mà q nguyên tố nên $q = 2$.

Thế $q = 2$ vào (*) ta có $p^2 = 49$ suy ra $p = 7$.

(***Học sinh đoán được nghiệm mà không lập luận không có điểm***)

Câu 83. (Trường chuyên tỉnh Vĩnh Phúc vòng 2 năm 2019-2020) Tìm tất cả các số nguyên dương p, m, n thỏa mãn $2^m p^2 + 1 = n^5$, trong đó p là số nguyên tố.

Lời giải

Câu 84. (Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh vòng 2 năm 2019-2020) Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $\sqrt{12n^2+1}$ là số nguyên. Chứng minh rằng $2\sqrt{12n^2+1} + 2$ là số chính phương.

Lời giải

Vì $12n^2 + 1$ là số lẻ nên để $\sqrt{12n^2+1}$ là số nguyên thì $12n^2 + 1 = \left(2m+1\right)^2, m \in \mathbb{N}$.

Suy ra, $m\left(m+1\right) = 3n^2$.

Vì $(m;m+1)=1$ nên xảy ra hai trường hợp $\left[\begin{array}{l} m=3u^2;m+1=v^2 \\ m=v^2;m+1=3u^2 \end{array}\right., u,v\in\mathbb{Z}^*$..

Nếu $m=v^2;m+1=3u^2$ thì $v^2=3u^2-1$ hay v^2 là số chính phương chia 3 dư 2. Điều này không xảy ra vì mọi số chính phương chia 3 dư là 0 hoặc 1. Do đó chỉ xảy ra $m=3u^2;m+1=v^2$.

Ta có $2\sqrt{12n^2+1}+2=2(2m+1)+2=4m+4=4v^2$ là số chính phương (điều phải chứng minh).

Câu 85. (Trường chuyên tỉnh Thái Nguyên chuyên toán năm 2019-2020) Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho p^2+59 có đúng sáu ước số dương.

Lời giải

+) Với $p=2$ ta có $p^2+59=63$. Số 63 có sáu ước số dương là:

1; 3; 7; 9; 21; 63. Vậy $p=2$ thỏa mãn.

+) Với $p=3$ ta có $p^2+59=68$. Số 68 có sáu ước số dương là:

1; 2; 4; 17; 34; 68. Vậy $p=3$ thỏa mãn.

+) Với $p>3$. Khi đó p là số tự nhiên lẻ và không chia hết cho 3 (vì p là số nguyên tố) do đó p^2 chia cho 3 dư 1 và p^2 chia cho 4 dư 1. Vậy p^2+59 chia hết cho cả 3 và 4. Mà 3 và 4 là hai số nguyên tố cùng nhau nên p^2+59 chia hết cho 12. $p^2+59>12$ nên p^2+59 có ít nhất các ước số dương là: 1; 2; 3; 4; 6; 12; p^2+59. Trong trường hợp này p^2+59 có nhiều hơn sáu ước số dương nên $p>3$ không thỏa mãn.

Tóm lại $p=2$; $p=3$.

Câu 86. (Trường chuyên tỉnh Chuyên ĐHSP vòng 2 năm 2019-2020) Cho tập hợp X thỏa mãn tính chất sau: Tồn tại 2019 tập con $A_1, A_2,..., A_{2019}$ của X sao cho mỗi tập con $A_1, A_2,..., A_{2019}$ có đúng ba phần tử và hai tập A_i, A_j đều có đúng một phần tử chung với mọi $1\le i<j\le 2019$. Chứng minh rằng

a) Tồn tại 4 tập hợp trong các tập hợp $A_1, A_2,..., A_{2019}$ sao cho giao của 4 tập hợp này có đúng một phần tử.

b) Số phần tử của X phải lớn hơn hoặc bằng 4039.

Lời giải

a) Xét tập hợp A_1 có ba phần tử a,b,c. Mỗi một tập hợp A_i với $i=2,...,2019$ sẽ phải có chung với A_1 đúng một phần tử. Ta chia các tập hợp A_i với $i=2,...,2019$ tạo thành ba nhóm. Nhóm thứ nhất gồm các tập hợp chứa phần tử a, nhóm thứ hai gồm các tập hợp chứa phần tử b và nhóm thứ ba gồm các tập hợp chứa phần tử c. Ba nhóm này tổng hợp lại có 2018 tập hợp, do đó phải có một nhóm chứa ít nhất 673 tập hợp. 673 tập hợp này cùng với A_1 sẽ tạo thành 674 tập hợp có đúng một phần tử chung. Chỉ cần lấy 4 tập hợp trong chúng ra sẽ được 4 tập hợp thỏa mãn yêu cầu bài toán. (Chú ý, giao của bốn tập hợp không thể có quá một phần tử).

b) Xét bốn tập hợp A_1, A_2, A_3, A_4 có chung phần tử a. Ta chứng minh tất cả các tập hợp còn lại đều có chung phần tử a. Thật vậy, giả sử tồn tại tập hợp A không chứa a. Khi đó mỗi một tập trong các A_1, A_2, A_3, A_4 sẽ có chung với A một phần tử (khác a). Vì A chỉ có ba phần tử nên theo nguyên lý

Dirichlet, sẽ có hai tập hợp trong chúng có chung phần tử chung với A. Chẳng hạn A_1, A_2 có chung phần tử b với A. Nhưng lúc này ta có điều mâu thuẫn vì khi đó A_1, A_2 có chung hai phần tử a và b. Vậy tất cả các tập hợp đều có chung phần tử a. Do giao của hai tập hợp bất kỳ có đúng một phần tử nên tất cả các phần tử khác a còn lại đều đôi một khác nhau, suy ra $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{2019}| \geq 1 + 2019 \times 2 = 4039$.

Từ đó suy ra số phần tử của X không ít hơn 4039.

Câu 87. (Trường chuyên tỉnh Bình Thuận vòng 2 năm 2019-2020)Trong một buổi tổ chức tuyên dương các học sinh có thành tích học tập xuất sắc của một huyện, ngoại trừ bạn An, hai người bất kì đều bắt tay nhau, An chỉ bắt tay với những người mình quen. Biết rằng một cặp *(hai người)* chỉ bắt tay nhau không quá một lần và có tổng cộng 420 lần bắt tay. Hỏi bạn An có bao nhiêu người quen trong buổi tổ chức tuyên dương đó?

Lời giải

Giả sử ngoài An thì còn n bạn và An quen m bạn $(m \leq n)$.

Số cái bắt tay là $\dfrac{n(n-1)}{2} + m = 420$

$\Rightarrow n(n-1) + 2m = 840 \Rightarrow n(n-1) + 2n \geq n(n-1) + 2m = 840$

$\Rightarrow n^2 + n \geq 840 \Rightarrow n \geq 29$

Khi $n = 29$ thì $m = 14$

Khi $n \geq 30$ thì $n(n-1) \geq 870$ (loại)

Vậy An quen 14 bạn.

Câu 88. (Trường chuyên tỉnh Bắc Giang chuyên toán năm 2019-2020) Cho tập hợp T gồm 2019 số nguyên dương đôi một khác nhau và số lớn nhất thuộc T là 4036. Chứng minh rằng trong tập hợp T có hai số phân biệt mà số này là bội của số kia.

Lời giải

Mỗi số nguyên dương a đều có thể viết được dưới dạng $a = 2^s.m$ với $s \in \mathbb{N}, m$ là số nguyên dương lẻ..

Viết 2019 số nguyên dương đã cho dưới dạng $2^s.m$ và do số lớn nhất là 4036 nên m chỉ có thể thuộc tập gồm 2018 số lẻ $\{1,3,5,\ldots,4035\}$..

Do tập hợp T có 2019 số nguyên dương đôi một khác nhau nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số $a,b \in T$ sao cho $a = 2^s.m_0; b = 2^p.m_0$, với $m_0 \in \{1,3,5,\ldots,4035\}, s, p \in \mathbb{N}, s > p$.

Khi đó *a* là bội của *b*. Điều phải chứng minh..

Câu 89. (Trường chuyên tỉnh Khánh Hòa Vòng 2 năm 2019-2020) Cho $A = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{2019}$ và $B = 2^{2020}$. Chứng minh rằng: A, B là hai số tự nhiên liên tiếp.

Lời giải

Có $A = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{2019}$

$2A = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2020}$

Trừ vế theo vế, ta được:

$2A - A = \left(2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2020}\right) - \left(2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{2019}\right)$

$\Rightarrow A = 2^{2020} - 1$

Lại có: $B = 2^{2020} \in \mathbb{N}$ (lũy thừa 2020 theo cơ số 2)

Nên: $A = 2^{2020} - 1 \in \mathbb{N}$

Và $B - A = 1$. Vậy A, B là hai số tự nhiên liên tiếp.

Câu 90. *(Trường chuyên tỉnh Lâm Đồng vòng 2 năm 2019-2020)*
Biết rằng $\underbrace{1111...1}_{2018 \text{ chữ số } 1}\underbrace{5555...5}_{2018 \text{ chữ số } 5}$ là tích của hai số lẻ liên tiếp. Tính tổng hai số lẻ đó.

Lời giải

Viết được số về dạng:

$\underbrace{1111...1}_{2018 \text{ chữ số } 1}\underbrace{5555...5}_{2018 \text{ chữ số } 5} = \underbrace{1111...1}_{2018 \text{ chữ số } 1} \cdot \underbrace{100...05}_{2017 \text{ chữ số } 0}$

$= \underbrace{1111...1}_{2018 \text{ chữ số } 1} \cdot 3 \cdot \underbrace{3333...35}_{2017 \text{ chữ số } 3}$

$= \underbrace{3333...3}_{2018 \text{ chữ số } 3} \cdot \underbrace{3333...35}_{2017 \text{ chữ số } 3}$ là tích của 2 số lẻ liên tiếp

Tính được tổng hai số là $\underbrace{6666...68}_{2017 \text{ chữ số } 6}$

Câu 91. (Trường chuyên tỉnh Tiền Giang chuyên tin năm 2019-2020) Tìm một số tự nhiên có 4 chữ số dạng $\overline{abcd}$, biết tích hai số $\overline{ab}$ và $\overline{cd}$ bằng 380 đồng thời nếu tăng số $\overline{ab}$ thêm 1 đơn vị và giảm số $\overline{cd}$ đi 1 đơn vị thì tích vẫn không đổi.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} \overline{ab}.\overline{cd} = 380 \\ \left(\overline{ab} - 1\right).\left(\overline{cd} + 1\right) = 380 \end{cases}$..

Đặt $x = \overline{ab}, y = \overline{cd}$, với $x, y \in \mathbb{Z}$ và $10 \le x, y \le 99$.

Hệ trở thành $\begin{cases} xy = 380 \\ (x-1).(y+1) = 380 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 380 \\ x - y = 1 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow y(y+1) = 380 \Leftrightarrow y^2 + y - 380 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 19 \\ y = -20 \end{array}\right.$..

$\Rightarrow y = 19 \Rightarrow x = 20$. Vậy số cần tìm là 2019..

Câu 92. (Trường chuyên tỉnh Tây Ninh Vòng 2 năm 2019-2020) Tìm số tự nhiên có bốn chữ số có dạng $\overline{abcd}$ sao cho $\overline{abcd} = k^2 \left(k \in \mathbb{N}^*\right)$ và $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$ (các chữ số tự nhiên a, b, c, d có thể giống nhau).

Lời giải

Tìm số tự nhiên có bốn chữ số có dạng $\overline{abcd}$ sao cho $\overline{abcd} = k^2 \left(k \in \mathbb{N}^*\right)$ và $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$ (các chữ số tự nhiên a, b, c, d có thể giống nhau).

$\overline{abcd} = k^2 \left(k \in \mathbb{N}^*\right) \Rightarrow k^2 = 100\overline{ab} + \overline{cd} = 100\left(1 + \overline{cd}\right) + \overline{cd}$

$\Rightarrow k^2 = 100 + 101\overline{cd} \Leftrightarrow 101\overline{cd} = k^2 - 100 \Leftrightarrow 101\overline{cd} = \left(k-10\right)\left(k+10\right)$

Do $k < 100$ (vì k^2 chỉ có 4 chữ số) $\Rightarrow k - 10 < 101$ và do 101 là số nguyên tố $\Rightarrow \left(k+10\right) \vdots 101 \Rightarrow k + 10 = 101 \Leftrightarrow k = 91$

Suy ra $\overline{abcd} = 91^2 = 8281$.

Chuyên đề 9 Biểu thức

Câu 1. (Trường chuyên tỉnh Bình Dương chuyên toán năm 2019-2020) Tính giá trị biểu thức: $P=\left(4x^5+4x^4-5x^3+5x-2\right)^{2018}+2019$ tại $x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$.

Lời giải

Ta có: $x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{1}}=\frac{1}{2}\left|\sqrt{2}-1\right|=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$

Đặt $A=4x^5+4x^4-5x^3+5x-2$

Ta thấy:

$A=4x^3\left(x^2+x+1\right)-x^3+5x-2$

$=x^3\left(4x^2+4x-1\right)-x\left(4x^2+4x-1\right)+\left(4x^2+4x-1\right)-1$

$=\left(4x^2+4x-1\right)\left(x^3-x+1\right)-1$

Mà $4x^2+4x-1=4\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\right]^2+4\cdot\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)-1=0$.

Thay $4x^2+4x-1=0$ vào A, ta được $A=-1$.

Vậy $P=(-1)^{2018}+2019=2020$

Câu 2. (Trường chuyên tỉnh Bến Tre vòng 2 năm 2019-2020) Cho các số thực dương a,b,c,d thỏa $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{a}$. Tính giá trị của biểu thức $B=\frac{2a+6b+2019c+2020d-43}{2a+3b+4c+5d}$.

Lời giải

Câu 3. (Trường chuyên tỉnh Cao Bằng vòng 2 năm 2019-2020) Cho a, b, c là các số thỏa mãn điều kiện $a^3+b^3+c^3=3abc$ và $a+b+c=1$. Tính giá trị của biểu thức $Q=5a+6b+2019c$.

Lời giải

Cho a, b, c là các số thỏa mãn điều kiện $a^3+b^3+c^3=3abc$ và $a+b+c=1$. Tính giá trị của biểu thức $Q=5a+6b+2019c$.

$a^3+b^3+c^3=3abc$

$\Leftrightarrow (a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc=0$

$\Leftrightarrow (a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)=0$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^3 - 3(a+b)c(a+b+c) - 3ab(a+b+c) = 0$

$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right) = 0$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 0$

$\Leftrightarrow a = b = c$

$\Rightarrow a = b = c = \dfrac{1}{3}$ (vì $a+b+c=1$)

Vậy $Q = 5.\dfrac{1}{3} + 6.\dfrac{1}{3} + 2019.\dfrac{1}{3} = \dfrac{2030}{3}$

Câu 4. (Trường chuyên tỉnh HCM năm 2019-2020) Cho a,b,c là ba số thực thỏa mãn điều kiện: $a+b+c=1$. Tính giá trị biểu thức:
$A = a^3+b^3+c^3-3(ab+c)(c-1)$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
A &= a^3+b^3+c^3-3(ab+c)(c-1)\\
&= (a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)+3(ab+c)(1-c)\\
&= 1-3(1-c)(1-a)(1-b)+3(ab+c)(1-c)\\
&= 1-3(1-c)\left[(1-a)(1-b)-(ab+c)\right]\\
&= 1-3(1-c)(1-a-b+ab-ab-c)\\
&= 1-3(1-c)\left[1-(a+b+c)\right]\\
&= 1-3(1-c)(1-1)\\
&= 1
\end{aligned}$$

Vậy $A=1$ □

Câu 5. (Trường chuyên tỉnh Hà Tĩnh vòng 2 năm 2019-2020) Cho a, b, c là ba số thực khác 0 thỏa mãn các điều kiện: $a+b+c=0$ và $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=3$. Tính giá trị của biểu thức $M=\left(1+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(1+\dfrac{1}{b}\right)^2+\left(1+\dfrac{1}{c}\right)^2$.

Lời giải

Ta có $M=\left(\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(\dfrac{1}{b}\right)^2+\left(\dfrac{1}{c}\right)^2+2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+3=\left(\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(\dfrac{1}{b}\right)^2+\left(\dfrac{1}{c}\right)^2+2.3+3.$

Từ giả thiết có: $3^2=\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^2=\left(\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(\dfrac{1}{b}\right)^2+\left(\dfrac{1}{c}\right)^2+2\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\right)$

$=\left(\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(\dfrac{1}{b}\right)^2+\left(\dfrac{1}{c}\right)^2+\dfrac{2(a+b+c)}{abc}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(\dfrac{1}{b}\right)^2+\left(\dfrac{1}{c}\right)^2+0=\left(\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(\dfrac{1}{b}\right)^2+\left(\dfrac{1}{c}\right)^2.$

Do đó $M = 3 + 2.3 + 3^2 = 18$.

Câu 6. (Trường chuyên tỉnh Hải Dương chuyên toán năm 2019-2020) Cho các số thực a, b thỏa mãn $: a^2 \neq b^2$. Đặt $M = \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2} + \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

Tính $N = \dfrac{a^8+b^8}{a^8-b^8} + \dfrac{a^8-b^8}{a^8+b^8}$ theo M.

Lời giải

Đặt $x = a^2, y = b^2$ thì $M = \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{2(x^2+y^2)}{x^2-y^2}$

$$N = \frac{x^4+y^4}{x^4-y^4} + \frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$$

$$\frac{x^4+y^4}{x^4-y^4} = \frac{1}{2}.\frac{\left(x^2+y^2\right)^2+\left(x^2-y^2\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2-y^2\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2}+\frac{2}{M}\right) = \frac{M^2+4}{4M}$$

$$\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4} = \frac{4M}{M^2+4}$$

$$N = \frac{M^2+4}{4M} + \frac{4M}{M^2+4} = \frac{M^4+24M^2+16}{4M(M^2+4)}$$

Câu 7. (Trường chuyên tỉnh Hậu Giang chuyên toán năm 2019-2020) Cho ba số thực dương a, b và c thỏa mãn $ab+ac+bc=1$. Tính giá trị của biểu thức

$$T = a\sqrt{\frac{(1+b^2)(1+c^2)}{1+a^2}} + b\sqrt{\frac{(1+c^2)(1+a^2)}{1+b^2}} + c\sqrt{\frac{(1+a^2)(1+b^2)}{1+c^2}}.$$

Lời giải

Ta có

$a^2+1 = a^2+ab+ac+bc = a^2+ac+b(a+c) = a(a+c)+b(a+c) = (a+b)(a+c)$.

Tương tự $b^2+1 = (a+b)(b+c)$ và $c^2+1 = (c+b)(c+a)$.

Khi đó

$$a\sqrt{\frac{(1+b^2)(1+c^2)}{1+a^2}} = a\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)(a+c)(b+c)}{(a+b)(a+c)}} = a(b+c)$$

$$b\sqrt{\frac{(1+c^2)(1+a^2)}{1+b^2}} = b\sqrt{\frac{(a+c)(b+c)(a+c)(a+b)}{(a+b)(b+c)}} = b(a+c)$$

$$c\sqrt{\frac{(1+a^2)(1+b^2)}{1+c^2}} = c\sqrt{\frac{(a+b)(a+c)(a+b)(b+c)}{(a+c)(b+c)}} = c(a+b).$$

Vậy $T = a(b+c) + b(a+c) + c(a+b) = 2$.

Câu 8. (Trường chuyên tỉnh Nam Định chuyên toán năm 2019-2020) Cho ba số a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=2019$. Chứng minh $\dfrac{a^2-bc}{a^2+2019}+\dfrac{b^2-ca}{b^2+2019}+\dfrac{c^2-ab}{c^2+2019}=0$.

Lời giải

+ Từ $ab+bc+ca=2019$ suy ra $a^2+2019=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c)$.

Tương tự có $b^2+2019=(b+c)(b+a)$, $c^2+2019=(c+a)(c+b)$.

+ Vế trái của đẳng thức cần chứng minh trở thành $\dfrac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{b^2-ca}{(b+c)(b+a)}+\dfrac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)}$

$$=\frac{(a^2-bc)(b+c)+(b^2-ca)(c+a)+(c^2-ab)(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Khai triển và làm gọn biểu thức trên tử ta được kết quả là 0 nên có Đpcm.

Câu 9. (Trường chuyên tỉnh Phú Yên Vòng 2 năm 2019-2020) Tồn tại hay không ba số thực a,b,c thỏa mãn $\dfrac{a}{b^2-ac}=\dfrac{b}{c^2-ab}=\dfrac{c}{a^2-bc}=\dfrac{1}{2019}$?

Lời giải

Giả sử tồn tại ba số thực a,b,c thỏa yêu cầu bài toán. Khi đó,

$$\begin{cases} abc\neq 0 \\ b^2-ac\neq 0, a^2-bc\neq 0, c^2-ab\neq 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Khi đó, ta có $\begin{cases} \dfrac{a}{b^2-ac}=\dfrac{1}{2019} \\ \dfrac{b}{c^2-ab}=\dfrac{1}{2019} \\ \dfrac{c}{a^2-bc}=\dfrac{1}{2019} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2-ac=2019a \\ c^2-ab=2019b \\ a^2-bc=2019c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2a-a^2c=2019a^2 \\ c^2b-ab^2=2019b^2 \\ a^2c-bc^2=2019c^2 \end{cases}$

Suy ra,

$$2019(a^2+b^2+c^2)=(b^2a-a^2c)+(c^2b-ab^2)+(a^2c-bc^2)=0$$
$$\Leftrightarrow a=b=c=0.$$

Điều này mâu thuẫn với (4.1).

Vậy không tồn tại ba số thực a,b,c thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 10. (Trường chuyên tỉnh Quảng Ngãi chuyên toán năm 2019-2020) Cho hai số thực a,b thỏa mãn $a^2+4ab-7b^2=0$ ($a\neq b$ và $a\neq -b$). Tính giá trị của biểu thức $Q=\dfrac{2a-b}{a-b}+\dfrac{3a-2b}{a+b}$

Lời giải

Cho hai số thực a,b thỏa mãn $a^2+4ab-7b^2=0$ ($a\neq b$ và $a\neq -b$). Tính giá trị của biểu thức $Q=\dfrac{2a-b}{a-b}+\dfrac{3a-2b}{a+b}$

$$Q=\frac{2a-b}{a-b}+\frac{3a-2b}{a+b}=\frac{2a^2+ab-b^2+3a^2-5ab+2b^2}{a^2-b^2}=\frac{5a^2-4ab+b^2}{a^2-b^2}$$

Vì $a^2+4ab-7b^2=0$ nên ta có

$$Q=\frac{6\left(a^2-b^2\right)-\left(a^2+4ab-7b^2\right)}{a^2-b^2}=\frac{6\left(a^2-b^2\right)}{a^2-b^2}=6$$

Câu 11. (Trường chuyên tỉnh Thái Bình vòng 2 năm 2019-2020) Cho các số thực a,b khác 0 thỏa mãn $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1$

1. Tính giá tri của biểu thức $A=\dfrac{\left(a^2-b^2\right)^2}{a^4b^4}+\dfrac{4}{ab}$
2. Chứng minh rằng: $(a+b-2)^3-(a-1)^3-(b-1)^3-3(a+b)+6=0$

Lời giải

1. Ta có:

$$A=\left(\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}\right)^2+\frac{4}{ab}=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2+\frac{4}{ab}$$

$$A=\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]^2+\frac{4}{ab}$$

$$A=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\frac{4}{ab}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=1$$

2. Từ giả thiết $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1\Rightarrow a+b=ab\Rightarrow ab-a-b+1=1\Leftrightarrow (a-1)(b-1)=1$

Áp dụng hằng đẳng thức $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$

$[(a-1)+(b-1)]^3$
$=(a-1)^3+(b-1)^3+3(a-1)(b-1)[(a-1)+(b-1)]$
$\Rightarrow (a+b-2)^3=(a-1)^3+(b-1)^3+3[a+b-2]$
$\Leftrightarrow (a+b-2)^3-(a-1)^3-(b-1)^3-3(a+b)+6=0$

Câu 12. (Trường chuyên tỉnh An Giang Vòng 2 năm 2019-2020) Cho $x;y$ là hai số thỏa mãn $x+y=1$. Hãy tính
$A=x^4+y^4-2x^3-2x^2y^2+x^2-2y^3+y^2$..

Lời giải

$$A=x^4+y^4-2x^3-2x^2y^2+x^2-2y^3+y^2$$

$=\left(x^4+y^4-2x^2y^2\right)-2\left(x^3+y^3\right)+x^2+y^2$

$=\left(x^2-y^2\right)^2-2(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)+\left(x^2+y^2\right)$

$=(x+y)^2(x-y)^2-2\left[(x+y)^2-3xy\right]+(x+y)^2-2xy$

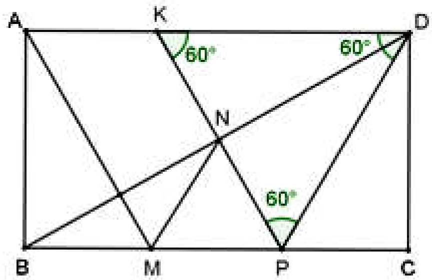
$=(x-y)^2-2(1-3xy)+1-2xy$

$=(x+y)^2-4xy-2+6xy+1-2xy=0$

Vậy $A=0$

Câu 13. (Trường chuyên tỉnh Phú Thọ vòng 2 năm 2019-2020) Cho số thực x thỏa mãn $x+\frac{1}{x}=3$. Tính giá trị biểu thức $P=x^3+\frac{1}{x^3}$.

Lời giải



Từ gt có $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=3^3$ hay $x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)=27.$

$=> x^3+\frac{1}{x^3}+3.3=27.$

$=> P=x^3+\frac{1}{x^3}=27-9=18.$

Câu 14. (Trường chuyên tỉnh Thanh hóa chuyên toán năm 2019-2020) Cho các số thực dương *a, b, c* khác 0 thoả mãn $2ab+bc+2ca=0$. Hãy tính giá trị của biểu thức : $A=\frac{bc}{8a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}$

Lời giải

Vì a, b, c khác 0 thỏa mãn $2ab+bc+2ca=0\Rightarrow\frac{2}{c}+\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=0$

Ta chứng minh được nếu $x+y+z=0$ thì $x^3+y^3+z^3=3xyz$

Do đó với $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}=0$ thì $\frac{1}{a^3}+\frac{8}{b^3}+\frac{8}{c^3}=3.\frac{1}{a}.\frac{2}{b}.\frac{2}{c}=\frac{12}{abc}$

Ta có:

$\frac{bc}{8a^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ab}{c^2}=\frac{abc}{8a^3}+\frac{abc}{b^3}+\frac{abc}{c^3}$

$A=\frac{abc}{8}.\left(\frac{1}{a^3}+\frac{8}{b^3}+\frac{8}{c^3}\right)$

$=\frac{abc}{8}.\frac{12}{abc}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

Câu 15. (Trường chuyên tỉnh Thừa Thiên Huế vòng 2 năm 2019-2020) Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2$. Tính giá trị của biểu thức $Q=x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}$.

Lời giải

Ta có $2=xy+\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}+x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}=xy+\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}+Q$

$\Rightarrow(2-Q)^2=\left[xy+\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}\right]^2$

$\Rightarrow 4-4Q+Q^2=2x^2y^2+x^2+y^2+1+2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}.$

Ta lại có $Q^2=x^2(y^2+1)+y^2(x^2+1)+2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}$

$\Rightarrow Q^2=2x^2y^2+x^2+y^2+2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}.$

Do đó $4-4Q=1\Rightarrow Q=\frac{3}{4}\cdot$

Câu 16. (Trường chuyên tỉnh Lâm Đồng vòng 2 năm 2019-2020) Cho các số a, b, c, x, y, z đều khác 0 và thỏa mãn các điều kiện $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ và $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$. Chứng minh rằng : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Lời giải

Từ điều kiện $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ suy ra được

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{xy}{ab}+\frac{xz}{ac}+\frac{yz}{bc}\right)=1$$

Qui đồng biểu thức trong ngoặc được $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2.\frac{xyc+xzb+yza}{abc}=1$

Từ điều kiện $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ suy ra được $xyc+xzb+yza=0$

Kết luận được $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Câu 17. (Trường chuyên tỉnh Nghệ An chuyên toán năm 2019-2020) Cho đa thức $P(x)=ax^2+bx+c$ $(a\in\mathbb{N}^*)$ thỏa mãn $P(9)-P(6)=2019$.
Chứng minh $P(10)-P(7)$ là một số lẻ.

Lời giải

$P(9)-P(6)=2019$

Ta có: $\Leftrightarrow(8ba+9b+c)-(36a+6b+c)=2019$

$\Leftrightarrow 45a+3b=2019(1)$

Lại có: $P(10)-P(7)=(100a+10b+c)-(29a+7b+c)=51a+3b$

Đặt $P(10)-P(7)=t\Rightarrow 51a+3b=t(2)$

Trừ vế theo vế (2) cho (1) ta có: $6a=t-2019$, mà $6a$ chẵn, 2019 lẻ nên t lẻ, ta có điều phải chứng minh

Câu 18. (Trường chuyên tỉnh Ninh Bình chuyên toán năm 2019-2020) Cho $\mathrm{P}(\mathrm{x})$ là một đa thức bậc n với hệ số nguyên, $\mathrm{n}\ge 2$. Biết $\mathrm{P}(1).\mathrm{P}(2)=2019$, chứng minh rằng phương trình $\mathrm{P}(\mathrm{x})=0$ không có nghiệm nguyên.

Lời giải

Giả sử phương trình $\mathrm{P}(\mathrm{x})=0$ có nghiệm nguyên $\mathrm{x}=\mathrm{a},\mathrm{a}\in\mathbb{Z}$.

Theo định lý Bézout: $\mathrm{P}(\mathrm{x})=(\mathrm{x}-\mathrm{a})\mathrm{Q}(\mathrm{x})$ với $\mathrm{Q}(\mathrm{x})$ là một đa thức với hệ số nguyên.

Ta có: $\mathrm{P}(1).\mathrm{P}(2)=(1-\mathrm{a})(2-\mathrm{a}).\mathrm{Q}(1).\mathrm{Q}(2)=2019$..

Do $\mathrm{Q}(1).\mathrm{Q}(2)\in\mathbb{Z}$, $1-\mathrm{a}$ và $2-\mathrm{a}$ là hai số nguyên liên tiếp, nên $\mathrm{P}(1)\mathrm{P}(2)$ là số nguyên chẵn. Mà 2019 là một số lẻ, suy ra vô lý.

Vậy phương trình $\mathrm{P}(\mathrm{x})=0$ không có nghiệm nguyên.

Câu 19. (Trường chuyên tỉnh Lâm Đồng vòng 2 năm 2019-2020) Tính số đo góc nhọn α biết $10\sin^2\alpha+6\cos^2\alpha=8$.

Lời giải

Biến đổi được về đẳng thức:

$6(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+4\sin^2\alpha=8$

Suy ra được: $\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}$

Lập luận được $\sin\alpha\ge 0$ suy ra $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Tính được $\alpha=45^0$

Lưu ý: Học sinh không lập luận được $\sin\alpha\ge 0$ *thì trừ 0,25 điểm*

Câu 20. (Trường chuyên tỉnh Hòa Bình Chuyên Tin năm 2019-2020)1) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $D=x^3+x^2-10x+8$

Lời giải

$D=x^3-x^2+2x^2-2x-8x+8=(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}-8)$

$D=(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}-2)(\mathrm{x}+4)$

Câu 21. (Trường chuyên tỉnh Chuyên ĐHSP vòng 1 năm 2019-2020) Cho a là số thực khác 1 và -1.

Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{\left(\dfrac{a+1}{a-1}\right)^2+3}{\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^2+3}\div\dfrac{a^3+1}{a^3-1}-\dfrac{2a}{a-1}$.

Lời giải

Ta có $P=\dfrac{\left(\dfrac{a+1}{a-1}\right)^2+3}{\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^2+3}\div\dfrac{a^3+1}{a^3-1}-\dfrac{2a}{a-1}=\dfrac{\dfrac{(a+1)^2+3(a-1)^2}{(a-1)^2}}{\dfrac{(a-1)^2+3(a+1)^2}{(a+1)^2}}\div\dfrac{(a+1)(a^2-a+1)}{(a-1)(a^2+a+1)}-\dfrac{2a}{a-1}$

$=\dfrac{4(a^2-a+1)}{4(a^2+a+1)}.\dfrac{(a+1)^2}{(a-1)^2}.\dfrac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a+1)(a^2-a+1)}-\dfrac{2a}{a-1}=\dfrac{a+1}{a-1}-\dfrac{2a}{a-1}=\dfrac{1-a}{a-1}=-1$.

Vậy $P=-1$.