BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO * HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

9
2002

SỐ 303 - NĂM THỨ 39 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

Chủ tịch nước Trần Đức Lương
và em Phạm Gia Vĩnh Anh
học sinh giỏi toán Quốc tế

KẾT QUẢ KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA MÔN TOÁN LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2001-2002

NGUYỄN KHẮC MINH
(Vụ THPT)

Kì thi chọn học sinh giỏi quốc gia môn Toán lớp 12 THPT năm học 2001- 2002 được tiến hành trong hai ngày, 12/3 và 13/3/2002. Tham dự kì thi này có 271 học sinh ở Bảng A và 250 học sinh ở Bảng B. Trong mỗi ngày thi, mỗi thí sinh phải làm 3 bài toán trong thời gian 180 phút. Điểm tối đa của mỗi ngày thi là 20 điểm.

Theo quyết định của Bộ trưởng Bộ GD&ĐT, việc xét giải *từ năm nay* được tiến hành theo nguyên tắc sau:

- Mức điểm tối thiểu để xét giải Nhất, giải Nhì, giải Ba và giải Khuyến khích tương ứng là 35 điểm, 30 điểm, 25 điểm và 20 điểm;

- Ở mỗi Bảng thi: Tổng số thí sinh đạt giải (kể cả giải khuyến khích) không vượt quá 1/2 tổng số thí sinh dự thi; tổng số thí sinh đạt từ giải Ba trở lên không vượt quá 2/3 tổng số thí sinh đạt giải.

Hội đồng thi chọn học sinh giỏi quốc gia lớp 12 THPT năm học 2001- 2002 đã quyết định:

- Trao giải Nhì cho 05 thí sinh ở Bảng A và 03 thí sinh ở Bảng B;

- Trao giải Ba cho 50 thí sinh ở Bảng A và 16 thí sinh ở Bảng B;

- Trao giải Khuyến khích cho 65 thí sinh ở Bảng A và 26 thí sinh ở Bảng B.

Kết quả cụ thể như sau:

BẢNG A

1. Giải Nhì: Ngô Xuân Bách (THPT chuyên Nguyễn Trãi, *Hải Dương*); Vũ Thành Nam, Hoàng Thanh Tùng (THPTNK Trần Phú, *Hải Phòng*); Nguyễn Quang Hưng (THPT Lam Sơn, *Thanh Hóa*); Trần Thái An Nghĩa (THPT chuyên Lê Khiết, *Quảng Ngãi*).

2. Giải Ba: Nguyễn Xuân Trường, Nguyễn Thanh Hải, Nguyễn Việt Linh, Vũ Nhật Huy, Trần Mạnh Hà (THPT chuyên *Vĩnh Phúc*); Lê Minh Hoàng, Phạm Hồng Việt, Trần Quý Phú, Võ Văn Thành, Nguyễn Thu Trang, Vũ Quốc Mỹ, Nguyễn Văn Thảo (Khối THPT chuyên Toán-Tin, *ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội*); Chu Ngọc Hưng, Nguyễn Thành Nam, Phạm Thành Trung, Nguyễn Hồng Kiên, Vũ Xuân Nam (THPT chuyên Nguyễn Trãi, *Hải Dương*); Hoàng Việt Tùng (THPT Nguyễn Thượng Hiền, *Tp. Hồ Chí Minh*); Phạm Gia Vĩnh Anh, Vũ Ngọc Minh, Vũ Hoàng Hiệp (Khối THPT chuyên Toán-Tin, *ĐHSP Hà Nội*); Nguyễn Thành Nhân, Trần Vĩnh Hưng, Nguyễn Tiến Khải (PTNK, *ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh*); Lê Văn Hùng, Nguyễn Tiến Yết, Nguyễn Văn Viên, Nguyễn Thành Khiêm, Đỗ Việt Cường, Hoàng Anh Tuấn, Vương Quốc Huy (THPT chuyên Nguyễn Huệ, *Hà Tây*); Võ Đình Tùng, Nguyễn Lượng Sáng, Phạm Thái Khánh Hiệp, Mai Thanh Hoàng, Nguyễn Sinh Hùng, Ngô Xuân Giáp (Khối THPT chuyên Toán-Tin, *ĐH Vinh*); Nguyễn Khắc Tháp, Hoàng Nam Thắng (THPT Lam Sơn, *Thanh Hóa*); Nguyễn Hữu Việt Khuê, Trần Minh Sơn, Phan Vũ Toàn (THPT Hà Nội-Amsterdam, *Hà Nội*); Đào Đức Minh, Vương Quốc Tuấn, Nguyễn Đình Hòa (THPT chuyên Hùng Vương, *Phú Thọ*); Phạm Đức Hiệp (THPTNK Trần Phú, *Hải Phòng*); Phùng Văn Thắng (THPT Lê Hồng Phong, *Nam Định*); Trịnh Thị Mỹ Châu, Phạm Viết Thạch (THPT Lương Văn Tụy, *Ninh Bình*); Nguyễn Đình Minh (Quốc học Huế, *Thừa Thiên-Huế*).

3. Giải Khuyến khích: Nguyễn Thiện Sỹ (Khối THPT chuyên Toán-Tin, *ĐH Vinh*); Trần Anh Hoàng, Trần Quang, Ngô Quốc Tường (PTNK, *ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh*); Nguyễn Hoàng Thanh, Trần Khánh Toàn, Vũ Thành Long, Đặng Đình Khánh, Kim Đình Thái (Khối THPT chuyên Toán-Tin, *ĐHSP Hà Nội*); Hà Thị Mai Dung (THPT chuyên Nguyễn Trãi, *Hải Dương*); Lưu Minh Tùng, Vũ Đình Đẩu (THPTNK Trần Phú, *Hải Phòng*); Trần Quốc Việt, Đoàn Chiến Thắng (THPT Lê Hồng Phong, *Nam Định*); Đào Duy Thắng, Đoàn Duy Hào, Phạm Minh Hoàng, Hoàng Ngọc Minh (THPT chuyên Hùng Vương, *Phú Thọ*); Hoàng Trung Hiếu, Lưu Đức Thi, Nguyễn Văn Thắng (THPT Lam Sơn, *Thanh Hóa*); Cao Việt Dũng, Trần Thị Trà Giang, Hoàng Xuân Quang, Phan Bá Lê Biên (THPT chuyên *Vĩnh Phúc*); Bùi Duy Hiếu, Lê Đình Tiến, Nguyễn Tuấn Dương (Khối THPT chuyên Toán - Tin,...

(Xem tiếp trang 8)

CHÚC MỪNG ĐỘI TUYỂN VIỆT NAM ĐOẠT GIẢI VÔ ĐỊCH CHẾ TẠO ROBOT CHÂU Á - THÁI BÌNH DƯƠNG

Robocon (robot contest) là cuộc thi sáng tạo robot dành cho các kĩ sư tương lai của khu vực Châu Á - Thái Bình Dương. Cuộc thi được tổ chức lần đầu tiên tại Nhật Bản vào cuối tháng 8.2002 gồm 20 đoàn của 19 nước tham gia. Đoàn Việt Nam gồm 3 sinh viên Vũ Ngọc Vinh, Nguyễn Công Văn, Nguyễn Toàn Thắng và trưởng đoàn là thầy Huỳnh Văn Kiểm (Trường ĐH Bách khoa Tp. Hồ Chí Minh) đã giành Cúp vô địch. Thành tích này chứng minh một điều là học sinh sinh viên Việt Nam không chỉ giỏi trong các cuộc thi lí thuyết, mà còn có khả năng sáng tạo trong việc giải quyết các bài toán do cuộc sống đặt ra, dựa trên kiến thức về Tin học, Điều khiển học và Tự động hóa.

THTT

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

TÌM CỰC TRỊ MỘT BIỂU THỨC BẰNG NHIỀU CÁCH

NGUYỄN NGỌC KHOA
(GV THPT Huỳnh Thúc Kháng, Sơn Tịnh, Quảng Ngãi)

Việc giải toán bằng nhiều cách vừa giúp rèn luyện kĩ năng, vừa phát triển tư duy trong học toán. Nó đòi hỏi người làm toán phải nhìn bài toán theo các góc độ khác nhau, biết vận dụng các kiến thức phù hợp với từng tình huống. Ta thử xét việc tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) và giá trị lớn nhất (GTLN) của một số biểu thức với biến số thực dưới đây.

Bài toán 1. *Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức* $\dfrac{x^2+4\sqrt{2}x+3}{x^2+1}$

Lời giải. Biểu thức này có dạng một phân thức mà tử và mẫu đều là tam thức bậc hai một biến số.

Cách 1. Chuyển về xét cực trị của phân thức mà tử là nhị thức bậc nhất rồi so sánh giá trị của tử và mẫu

$$y=\frac{x^2+4\sqrt{2}x+3}{x^2+1}=1+\frac{4\sqrt{2}x+2}{x^2+1}.$$

$$=1+z \text{ với } z=\frac{4\sqrt{2}x+2}{x^2+1}$$

Vì $x^2+1>0$ với mọi x nên GTLN (z) đạt được khi tử thức dương và GTNN (z) đạt được khi tử thức âm. Xét 3 trường hợp :

a) Với $4\sqrt{2}x+2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-\sqrt{2}}{4}$ thì $z=0$ $\Rightarrow y=1$.

b) Với $4\sqrt{2}x+2>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{-\sqrt{2}}{4}$ thì GTLN (y) $=1+$ GTLN (z)

Ta so sánh giá trị của tử thức và mẫu thức nhờ áp dụng bất đẳng thức :

$$(2x^2+1)+1 \ge 2\sqrt{2}x+1>0$$

Từ đó

$$z=\frac{2(4\sqrt{2}x+2)}{2(x^2+1)}=\frac{4(2\sqrt{2}x+1)}{2x^2+1+1}\le$$

$$\le\frac{4(2\sqrt{2}x+1)}{2\sqrt{2}x+1}=4$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, lúc đó GTLN (y) $=1+$ GTLN (z) $=5$

c) Với $4\sqrt{2}x+2<0 \Leftrightarrow x<\dfrac{-\sqrt{2}}{4}$. Xét tương tự trên, từ $x^2+1=(x^2+2)-1\ge -2\sqrt{2}x-1=-(2\sqrt{2}x+1)>0$ có $z\ge\dfrac{2(2\sqrt{2}x+1)}{-(2\sqrt{2}x+1)}=-2$. Đẳng thức xảy ra khi $x=-\sqrt{2}$, lúc đó GTNN (y) $=1+$ GTNN (z) $=-1$.

Cách 2. So sánh giá trị của tử thức và mẫu thức bằng cách sử dụng BĐT Bu–nhi–a–cốp–xki

Từ $(x^2+1)^2=(1-x^2)^2+(2x)^2$ dẫn đến

$$(1-x^2+2\sqrt{2}.2x)^2\le$$

$$\le\left(1+(2\sqrt{2})^2\right)\left((1-x^2)^2+(2x)^2\right)$$

$$\Rightarrow |1-x^2+4\sqrt{2}x|\le 3(x^2+1).$$

Ta có $y=2+\dfrac{1-x^2+4\sqrt{2}x}{x^2+1}$.

Đặt $t=\dfrac{1-x^2+4\sqrt{2}x}{x^2+1}$ thì $|t|\le 3$ hay $-3\le t\le 3$, suy ra $-1\le y\le 5$.

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{1-x^2}{1}=\dfrac{2x}{2\sqrt{2}}\Leftrightarrow 2x^2+\sqrt{2}x-2=0$. Giải phương trình này ta được: $x_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ứng với GTLN (y) $=5$; $x_2=-\sqrt{2}$ ứng với GTNN (y) $=-1$.

Cách 3. Chuyển về xét điều kiện để phương trình (PT) bậc hai có nghiệm. Với mỗi giá trị x_0 ta có giá trị y_0 của biểu thức thỏa mãn

$$y_o = \frac{x_o^2+4\sqrt{2}x_o+3}{x_o^2+1}$$
$$\Leftrightarrow (y_o-1)x_o^2-4\sqrt{2}x_o+y_o-3=0$$

Có thể coi x_o là nghiệm của PT

$(y_o-1)x^2-4\sqrt{2}x+y_o-3=0$

trong đó y_o là *tham số*. Ta thấy $y_o = 1 \Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{2}}{4}$ (1). Nếu $y_o \neq 1$ thì điều kiện để PT bậc hai *luôn luôn có nghiệm* là $\Delta = -y_o^2+4y_o+5 \geq 0 \Leftrightarrow (y_o - 5)(1+y_o) \leq 0$ $\Leftrightarrow -1 \leq y_o \leq 5$. Dễ thấy $y_o = -1 \Leftrightarrow x_o = -\sqrt{2}$ và $y_o = 5 \Leftrightarrow x_o = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (2). Từ (1) (2) suy ra GTNN $(y) = -1$ khi $x = -\sqrt{2}$ và GTLN $(y) = 5$ khi $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Bài toán 2. *Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức* $\frac{x+2y+1}{x^2+y^2+7}$

Lời giải. Đặt $z = \frac{x+2y+1}{x^2+y^2+7}$. Biểu thức này có dạng một phân thức mà tử là hàm 2 biến bậc nhất và mẫu là hàm 2 biến bậc hai. Có thể giải bài này tương tự cách 1 và cách 3 nói trên.

Cách 1. Mẫu thức $x^2+y^2+7>0$ với mọi x, y nên GTLN và GTNN của z tương ứng với giá trị dương và âm của tử thức. Xét 3 trường hợp :

a) Với $x+2y+1=0$ thì $z=0$

b) Với $x+2y+1>0$. Ta có BĐT

$(x^2+1)+(y^2+4)+2 \geq 2x+4y+2>0$

Từ đó

$$z = \frac{x+2y+1}{x^2+y^2+7} = \frac{x+2y+1}{x^2+1+y^2+4+2} \leq \frac{x+2y+1}{2(x+2y+1)} = \frac{1}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 1$, $y = 2$, lúc đó GTLN$(z) = \frac{1}{2}$

c) Với $x+2y+1<0$. Ta có BĐT

$(25x^2+49)+(25y^2+196)-70$

$\geq (-70x)+(-140y)-70 = -70(x+2y+1)>0.$

Từ đó

$$z = \frac{25(x+2y+1)}{25(x^2+y^2+7)} = \frac{25(x+2y+1)}{25x^2+49+25y^2+196-70} \geq \frac{25(x+2y+1)}{-70(x+2y+1)} = \frac{-5}{14}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{-7}{5}$, $y = \frac{-14}{5}$, lúc đó GTNN $(z) = \frac{-5}{14}$.

Cách 2. Chuyển về xét điều kiện có nghiệm của PT $z = \frac{x+2y+1}{x^2+y^2+7}$

$\Leftrightarrow zx^2-x+zy^2-2y+7z-1=0$ (3)

trong đó x là ẩn số, coi y là *tham số tùy ý*, còn z là *tham số có điều kiện*. Xét 2 trường hợp :

a) $z=0 \Rightarrow x+2y+1=0$

b) $z \neq 0$ thì PT (3) *luôn có nghiệm* x khi biệt thức không âm :

$1-4z(zy^2-2y+7z-1) \geq 0$

$\Leftrightarrow -4z^2y^2+8zy-28z^2+4z+1 \geq 0$ (4)

Coi (4) là bất phương trình ẩn y, BPT này xảy ra với *mọi giá trị y* khi

$16z^2+4z^2(-28z^2+4z+1) \geq 0$

$\Leftrightarrow -28z^2+4z+5 \geq 0 \Rightarrow \frac{-5}{14} \leq z \leq \frac{1}{2}$

Khi z nhận các giá trị này thì đẳng thức xảy ra ở (4) và ở (3), khi đó $y = \frac{1}{z}$ và $x = \frac{1}{2z}$.

Vậy GTLN $(z) = \frac{1}{2}$ khi $y = 2$ và $x = 1$.

GTNN $(z) = \frac{-5}{14}$ khi $y = \frac{-14}{5}$ và $x = \frac{-7}{5}$

Các bạn hãy rèn luyện giải các bài tập dưới đây bằng nhiều cách :

BT1: Tìm GTNN, GTLN của biểu thức :

$$\frac{x^2+4x}{x^2+2x+2}$$

BT2 : Tìm GTNN, GTLN của biểu thức

$$\frac{x^4+y^4+4\sqrt{2}xy+4}{x^4+y^4+2}$$

BT3: Tìm giá trị m, n để biểu thức $\frac{x^2+mx+n}{x^2+1}$ đạt GTNN là -1 và GTLN là 5.

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN TOÁN - TIN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2002

MÔN TOÁN

Ngày thứ nhất

(Thời gian : 150 phút)

Bài 1. Chứng minh đẳng thức :

$$\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}+\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}=1$$

Bài 2. Giải phương trình :

$$x^3-x^2-x=\frac{1}{3}$$

Bài 3. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x+y=\sqrt{4z-1} \\ y+z=\sqrt{4x-1} \\ z+x=\sqrt{4y-1} \end{cases}$

Bài 4. Tìm tất cả các số có 5 chữ số $\overline{abcde}$ sao cho : $\sqrt[3]{\overline{abcde}}=\overline{ab}$

Bài 5. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA và AB theo thứ tự ở D, E và F. Đường thẳng vuông góc với OC ở O cắt hai cạnh CA và CB lần lượt ở I và J. Một điểm P chuyển động trên cung nhỏ $\overset{\frown}{DE}$ không chứa điểm F, tiếp tuyến tại P của (O) cắt hai cạnh CA, CB lần lượt ở M và N. Chứng minh rằng :

a) Góc $\widehat{MON}=\varphi$ (không đổi), hãy xác định φ theo các góc của tam giác ABC.

b) Ba tam giác IMO, OMN và JON đồng dạng với nhau. Từ đó suy ra :

$$IM.JN=OI^2=OJ^2 \ (*)$$

c) Đảo lại, nếu M và N là hai điểm theo thứ tự lấy trên hai đoạn thẳng CE và CD thỏa mãn hệ thức (*) thì MN tiếp xúc với đường tròn (O).

Ngày thứ hai

(Thời gian : 150 phút)

Bài 6. Chứng minh rằng số :

$$x_0=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}-\sqrt{6-3\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

là một nghiệm của phương trình :

$$x^4-16x^2+32=0$$

Bài 7. Cho $x>0$, $y>0$ thỏa mãn $x+y\geq 6$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P=3x+2y+\frac{6}{x}+\frac{8}{y}$$

Bài 8. Cho số nguyên tố $p>3$. Biết rằng có số tự nhiên n sao cho trong cách viết thập phân của số p^n có đúng 20 chữ số. Chứng minh rằng trong 20 chữ số này có ít nhất 3 chữ số giống nhau.

Bài 9. Cho tam giác ABC. M, N là trung điểm của các đoạn CA, CB tương ứng.

1) I là điểm bất kì trên đường thẳng MN ($I\neq M$, $I\neq N$). Chứng minh rằng trong ba tam giác IBC, ICA, IAB có một tam giác mà diện tích của nó bằng tổng các diện tích của hai tam giác còn lại.

2) Trường hợp I là giao điểm của tia NM với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng : $\dfrac{BC}{IA}=\dfrac{CA}{IB}+\dfrac{AB}{IC}$

Bài 10. Cho số tự nhiên $n>1$ và $n+2$ số nguyên dương $a_1, a_2, ..., a_{n+2}$ thỏa mãn điều kiện :

$$1\leq a_1<a_2<...<a_{n+2}\leq 3n.$$

Chứng minh rằng luôn tồn tại hai số a_i, a_j $(1\leq j<i\leq n+2)$ sao cho :

$$n<a_i-a_j<2n$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Chú ý $4\pm 2\sqrt{3}=(\sqrt{3}\pm 1)^2$.

Bài 2. Biến đổi phương trình :

$3x^3-3x^2-3x=1$

$\Leftrightarrow 4x^3=(x+1)^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{4}x=x+1$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$

Bài 3. Điều kiện : $x, y, z \geq \dfrac{1}{4}$

Nhân mỗi phương trình với 2 và cộng lại ta có :

$$\left(\sqrt{4x-1}-1\right)^2+\left(\sqrt{4y-1}-1\right)^2+\left(\sqrt{4z-1}-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{4x-1}=1\\ \sqrt{4y-1}=1\\ \sqrt{4z-1}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1/2\\ y=1/2\\ z=1/2\end{cases}$$

Thử lại thỏa mãn.

Hệ có nghiệm duy nhất như trên.

Bài 4. Đặt $x = \overline{ab}$, $y = \overline{cde}$ ta có $\overline{abcde} = 1000x + y$, $10 \leq x < 100$, $0 \leq y < 1000$ (1)

Từ giả thiết suy ra

$1000x + y = x^3$. Từ đó và (1) có $1000x \leq x^3 < 1000x + 1000 \Rightarrow 1000 \leq x^2 < 1000 + \dfrac{1000}{x} < 1100 \Rightarrow 31 < x < 33$. Vậy $x = 32$ và $x^3 = 32768$ thỏa mãn đề bài.

Bài 5. a) Kí hiệu như hình 1, theo tính chất của tiếp tuyến đường tròn ta có :

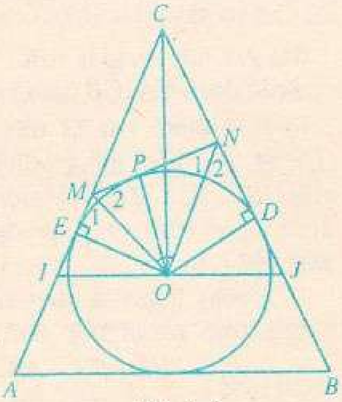
$\widehat{M_1}=\widehat{M_2}$,

$\widehat{N_1}=\widehat{N_2}$ (1)

Do đó

$\widehat{MOP}=\widehat{MOE}=\dfrac{1}{2}\widehat{EOP}$

$\widehat{PON}=\widehat{NOD}=\dfrac{1}{2}\widehat{POD}$



Hình 1

Suy ra :

$$\widehat{MON}=\frac{1}{2}\widehat{DOE}=\frac{1}{2}(180^o-\widehat{DCE})$$

$= 90^o - \dfrac{\widehat{ACB}}{2}$ không đổi.

b) ΔICJ cân tại C nên : $\widehat{CIO}=\widehat{CJO} = 90^o - \dfrac{\widehat{ACB}}{2} \Rightarrow \widehat{MIO}=\widehat{OJN}=\widehat{MON}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra : $\Delta IMO \backsim \Delta OMN \backsim \Delta JON$. Từ đó : $\dfrac{IM}{JO}=\dfrac{IO}{JN} \Rightarrow IM.JN = IO.JO = OI^2 = OJ^2$ (*)

Đảo lại, nếu M thuộc CE và N thuộc CD sao cho hệ thức (*) được thỏa mãn thì ta có $OI = OJ$ và $IM.JN = IO.JO \Rightarrow \dfrac{IM}{JO}=\dfrac{IO}{JN}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\Delta IMO \backsim \Delta JON \Rightarrow \widehat{OMI}=\widehat{NOJ}$. Từ đó có $\widehat{MON}+\widehat{NOJ}=\widehat{MOJ}= \widehat{OMI}+\widehat{MIO}= \widehat{NOJ}+\widehat{MIO} \Rightarrow \widehat{MON}=\widehat{MIO} = 90^o - \dfrac{\widehat{ACB}}{2}$ (4)

Ta chứng tỏ rằng MN tiếp xúc với (O). Thật vậy, qua M kẻ tiếp tuyến thứ hai ($\neq ME$) với (O) cắt CD ở điểm N_1. Theo chứng minh ở phần 1, ta được hệ thức : $\widehat{MON_1} = 90^o - \dfrac{\widehat{ACB}}{2}$ (5).

Từ (4) và (5) suy ra : $\widehat{MON_1}=\widehat{MON}$ (6).

Vì ON và ON' nằm cùng phía đối với OM, nên từ (6) suy ra hai tia ON và ON_1 trùng nhau và do đó $N' \equiv N$ hay MN tiếp xúc với (O).

Bài 6. Tính $x_o^2=8-2\sqrt{2+\sqrt{3}}-2\sqrt{3(2-\sqrt{3})}$

$$\Rightarrow \left(\frac{8-x_o^2}{2}\right)^2 = 2 + \sqrt{3}+3(2-\sqrt{3})+2\sqrt{3(4-3)}.$$

Vế phải bằng 8 nên có $64 - 16x_o^2+x_o^4 = 32$

$\Rightarrow x_o^4-16x_o^2+32=0$.

Bài 7. Ta có : $P=\dfrac{3}{2}(x+y)+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{6}{x}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{8}{y}$

$$\geq \frac{3}{2}.6+6\sqrt{\frac{x}{2}.\frac{2}{x}}+2\sqrt{\frac{y}{2}.\frac{8}{y}} = 19.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 2$, $y = 4$.

Vậy GTNN của P là 19.

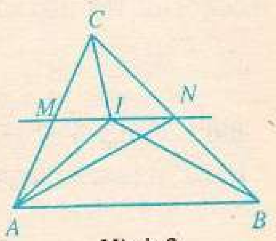
Bài 8. Giả sử ngược lại, trong 20 chữ số của cách viết thập phân của p^n không có 3 chữ số nào giống nhau. Suy ra mỗi một chữ số trong 10 chữ số 0, 1, ..., 9 xuất hiện đúng 2 lần. Vì vậy tổng các chữ số của p^n là :

$2(0 + 1 + ... + 9) = 90 \Rightarrow p^n \vdots 3 \Rightarrow p \vdots 3$, mâu thuẫn vì p là số nguyên tố lớn hơn 3.

Bài 9. 1) Xét 3 trường hợp :

a) I thuộc đoạn MN (h. 2)

Ta có : $2S(IAB) = 2S(NAB) = S(ABC) =$



Hình 2

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN - BÀI SỐ 57

Problem. Let x, y, z be the cube roots of three distinct prime integers. Shows that z, y, z are never three terms (not necessarily consecutive) of an arithmetic progression.

Solution. Assume that there are distinct primes p, q, r whose cube roots x, y, z are in arithmetic progression i.e. there are real numbers b, c, d such that $y = x + bd$, $z = x + cd$.

Put $u = c-b$, $v = c$, $w = -b$. Since $d = \dfrac{y-x}{b} = \dfrac{z-x}{c}$ we obtain $ux = vy + wz$

Cubing this equation gives

$u^3p = v^3q + 3v^2y^2wz + 3vyw^2z^2 + w^3r = v^3q + w^3r + 3uvwxyz$.

Hence $$xyz = \frac{u^3p - v^3q - w^3r}{3uvw}$$

But this would imply that xyz is a rational number, which is not true. So we can conclude that primes p, q, r with the stated property do not exist.

Từ mới:

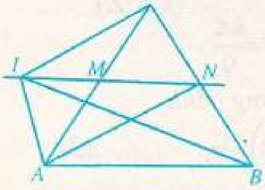
cube root = căn bậc ba
cube = lập phương (động từ)
distinct = phân biệt , khác nhau
prime = nguyên tố (tính từ), số nguyên tố
integer = số nguyên
necessarily = tất yếu, nhất thiết (phó từ)
consecutive = liên tiếp, tiếp liền nhau
arithmetic progression = cấp số cộng
assume = giả sử (động từ)
obtain = nhận được (động từ)
hence = do đó, vì thế (phó từ)
put = đặt (động từ)
imply = kéo theo (động từ)
rational = hữu tỉ
conclude = kết luận (động từ)
state = phát biểu, nêu ra (động từ)
exist = tồn tại (động từ)

NGÔ VIỆT TRUNG

☞ $= S(IAB) + S(IBC) + S(ICA)$

$\Rightarrow S(IAB) = S(IBC) + S(ICA)$

b) I thuộc tia đối của tia MN (h. 3)



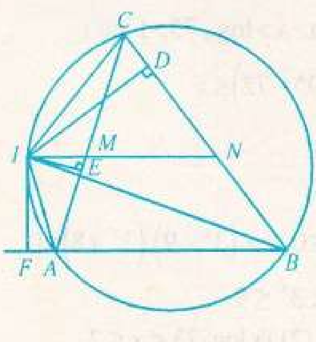
Hình 3

$2S(IAB) = 2S(ANB) = S(ABC) = S(IAB) + S(IBC) - S(ICA)$

$\Rightarrow S(IBC) = S(IAB) + + S(ICA)$

c) I thuộc tia đối của tia NM. Tương tự như (b) ta chứng minh được $S(ICA)=S(IAB) + S(IBC)$

2) Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của I trên các đường thẳng BC, CA, AB. (h. 4) Theo câu (1b) ta có :



Hình 4

$S(IBC) = S(IAB) + S(ICA) \Rightarrow ID.BC = IF.AB + IE.CA$ (1)

Vì tứ giác $ABCI$ nội tiếp nên $\widehat{IAC}=\widehat{IBC}$, $\widehat{IAF}=\widehat{ICB}$

$\Rightarrow \Delta IAE \backsim \Delta IBD$, $\Delta IAF \backsim \Delta ICD$

$\Rightarrow \dfrac{IE}{ID}=\dfrac{IA}{IB}$, $\dfrac{IF}{ID}=\dfrac{IA}{IC}$

$\Rightarrow ID.IA = IF.IC = IE.IB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\dfrac{BC}{IA}=\dfrac{CA}{IB}+\dfrac{AB}{IC}$

Bài 10. *Nhận xét.* Với mọi k đặt $b_i = a_i + k$ thì $a_i - a_j = (a_i + k) - (a_j + k) = b_i - b_j$ (*). Do đó ta có thể chọn k sao cho $b_{n+2} = 3n$ và chuyển về xét dãy số b_j sau : $1 \le b_1 < b_2 < ... < b_{n+2} = 3n$. Xét 2 trường hợp :

1) Nếu tồn tại j sao cho : $n < b_j < 2n$ thì ta có : $n < b_{n+2} - b_j < 2n$.

2) Nếu không có số b_j nào thuộc $[n+1, 2n-1]$ thì các số $b_1, b_2, ..., b_{n+1}$ có mặt ở các thành phần của n cặp số : $(1, 2n), (2, 2n+1), ..., (n, 3n-1)$.

Mặt khác do $n+1 > n$ nên tồn tại 2 số b_i, b_j ($j < i$) thuộc cùng một cặp, chẳng hạn $(t, 2n+t-1)$, hay $n < b_i - b_j = 2n + t - 1 - t = 2n - 1 < 2n$. Theo (*) từ cặp số b_i, b_j thỏa mãn $n < b_i - b_j < 2n$ thì tồn tại cặp số a_i, a_j thỏa mãn $n < a_i - a_j < 2n$.

Hướng dẫn giải : DOÃN MINH CƯỜNG

CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC

NHỮNG LƯU Ý KHI GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG KHỐI B NĂM 2002

(Phần Đại số, Giải tích)

NGUYỄN ANH DŨNG

CÂU I: Cho hàm số:

$$y=mx^4+\left(m^2-9\right)x^2+10 \qquad (1)$$

(m là tham số)

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = 1.

2/ Tìm m để hàm số (1) có ba điểm cực trị.

Giải: 1/ Các bạn tự giải

2/ $y' = 2x(2mx^2 + m^2 - 9)$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2mx^2+m^2-9=0 \end{array}\right. \qquad (2)$$

• Nếu $m = 0$: PT (2) vô nghiệm, dễ thấy hàm số có 1 cực trị.

• Nếu $m \neq 0$: Hàm số (1) có 3 điểm cực trị nếu PT (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 và y' đổi dấu qua mỗi nghiệm, nghĩa là khi $m < -3$ hoặc $0 < m < 3$.

Lưu ý: Xét hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a \neq 0)$

Ta có $y' = 2x(2ax^2 + b)$

• Nếu $ab \geq 0$ thì $2ax^2 + b$ không đổi dấu, hàm số có một cực trị tại $x = 0$.

• Nếu $ab < 0$ thì PT $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi qua mỗi nghiệm của nó, hàm số có 3 cực trị.

Bài luyện tập 1:

Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số: $y=x^2-3x+\frac{m}{x}+3$ có ba điểm cực trị. Chứng minh rằng khi đó cả ba điểm cực trị này đều nằm trên đường cong $y = 3(x-1)^2$

(Đề thi ĐH Luật – ĐH DượcHN 2001).

Hướng dẫn: $y'=\dfrac{2x^3-3x^2-m}{x^2}$

Hàm số có ba cực trị khi PT $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow$ PT $2x^3 - 3x^2 = m$ có 3 nghiệm phân biệt khác 0. Bằng phương pháp đạo hàm ta tìm được $-1 < m < 0$.

Khi $y' = 0$ thì tọa độ 3 điểm cực trị thỏa mãn

$$y=x^2-3x+\frac{2x^3-3x^2}{x}+3=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$$

Vậy 3 điểm cực trị thuộc đường cong $y = 3(x-1)^2$.

CÂU II. *1) Giải phương trình*

$$\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x \quad (1)$$

Giải. Sử dụng công thức hạ bậc ta có :

$$\text{PT (1)} \Leftrightarrow \frac{1-\cos 6x}{2} - \frac{1+\cos 8x}{2} = \frac{1-\cos 10x}{2} - \frac{1+\cos 12x}{2}$$

$\Leftrightarrow \cos 6x + \cos 8x = \cos 10x + \cos 12x$

$\Leftrightarrow 2\cos 7x.\cos x = 2\cos 11x.\cos x$

$\Leftrightarrow \cos x(\cos 11x - \cos 7x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \cos 11x=\cos 7x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{k\pi}{2} \\ x=\dfrac{k\pi}{9} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Câu II. *2/ Giải bất phương trình:*

$$\log_x\left(\log_3(9^x-72)\right) \leq 1 \qquad (2)$$

Giải. Điều kiện:

$$\begin{cases} x>0,\quad x\neq 1 \\ \log_3\left(9^x-72\right)>0 \Leftrightarrow x>\log_9 73 \\ 9^x-72>0 \end{cases}$$

Cách 1: Từ điều kiện $x>\log_9 73>1$ có :

BPT (2) $\Leftrightarrow 0<\log_3\left(9^x-72\right)\leq x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>\log_9 73 \\ 9^x-72\leq 3^x \quad (4) \end{cases}$$

BPT(4) $\Leftrightarrow 9^x-3^x-72\leq 0 \Leftrightarrow \left(3^x-9\right).\left(3^x+8\right)\leq 0$

Vì $3^x + 8 > 0$ ta được $3^x \leq 9$.

Vậy nghiệm của BPT (2) là $\log_9 73 < x \leq 2$.

Cách 2. Trước hết giải PT :

$$\log_x\left(\log_x(9^x-72)\right)=1 \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(9^x-72\right)=x \Leftrightarrow 9^x-72=3^x$$

Đặt $t=3^x>0$, PT này trở thành $t^2-t-72=0$. Với $t>0$ có nghiệm $t=9 \Rightarrow 3^x=9 \Rightarrow x=2$.

Xét dấu hàm số $f(x)=\log_x\left(\log_3(9^x-72)\right)-1$ ta thấy $f(x)$ xác định trên $(\log_9 73,+\infty)$ và $f(x)\le 0 \Leftrightarrow x\le 2$. Vậy nghiệm của BPT (2) là $\log_9 73<x\le 2$.

Lưu ý:

Giả sử $f(x)$ nói trên là hàm số liên tục trong các khoảng mà nó xác định, nếu việc giải BPT $f(x)>0$ phức tạp thì ta có thể làm như sau:

- Giải PT $f(x)=0$
- Lập bảng xét dấu của $f(x)$ rồi từ đó suy ra nghiệm của BPT $f(x)>0$.

Bài luyện tập 2: *Giải bất phương trình:*

$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2x^2-3x+1}}>\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)}$$

Hướng dẫn: Gọi vế trái, vế phải của BPT lần lượt là $f(x)$ và $g(x)$. Xét phương trình: $f(x)=g(x)$. Tập xác định của PT này là $D=\left(-1,\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$. PT trên tương đương với

$$\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2x^2-3x+1}=\log_{\frac{1}{3}}(1+x)$$

Giải PT này ta được nghiệm $x=0$, $x=5$.

Lập bảng xét dấu cho hàm số $h(x)=f(x)-g(x)$ trên miền D, ta thấy $h(x)>0$ khi $0<x<\frac{1}{2}$, $1<x<\frac{3}{2}$, $x>5$ và đó là nghiệm của bài toán.

Câu II. *3/ Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x-y}=\sqrt{x-y} & (1)\\ x+y=\sqrt{x+y+2} & (2)\end{cases}$$

Giải: Điều kiện: $\begin{cases}x-y\ge 0\\ x+y+2\ge 0\end{cases}$

$$(1)\Leftrightarrow(x-y)^2=(x-y)^3$$

$$(x-y)^2(1-x+y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-y=0\\ 1-x+y=0\end{array}\right. \qquad (3)$$

Đặt $t=\sqrt{x+y+2}\ge 0 \Rightarrow x+y=t^2-2$

Thay vào phương trình (2) ta được: $t^2-t-2=0$. Với $t\ge 0$ PT này có nghiệm $t=2 \Rightarrow x+y=2$ (4)

Kết hợp (3), (4) suy ra hệ đã cho có 2 nghiệm (x, y) là $(1, 1)$, $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

Câu III: *Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường* $y=\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}$ *(1) và* $y=\frac{x^2}{4\sqrt{2}}$ *(2)*

Giải: Tập xác định của hàm số (1) là $[-4, 4]$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (1) và (2) có dạng :

$$\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}=\frac{x^2}{4\sqrt{2}}\Leftrightarrow x^4+8x^2-128=0$$

$$\Leftrightarrow(x^2-8)(x^2+16)=0\Leftrightarrow x^2=8\Rightarrow x=\pm 2\sqrt{2}$$

Trong $[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$ dễ thấy $y_1\ge y_2$ nên diện tích hình phẳng là

$$S=\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}dx-\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\frac{x^2}{4\sqrt{2}}dx=I_1-I_2$$

* Tính: $I_1=\frac{1}{2}\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\sqrt{16-x^2}\,dx$

Đặt $x=4\sin t$ với $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $x=-2\sqrt{2} \Rightarrow t=-\frac{\pi}{4}$; $x=2\sqrt{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$

Ta có: $dx=4\cos t\,dt$. Khi đó :

$$I_1=\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}16\cos^2 t\,dt=4\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(1+\cos 2t)\,dt$$

$$=4\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}=2\pi+4$$

* Tính $I_2=\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\frac{x^2}{4\sqrt{2}}dx=\frac{x^3}{12\sqrt{2}}\Big|_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}=\frac{8}{3}$

Vậy $S=I_1-I_2=2\pi+\frac{4}{3}$ (đvdt)

Lưu ý: Để tìm $\int_{x_1}^{x_2}f\left(x,\sqrt{a^2-b^2x^2}\right)dx$ có thể đặt $bx=a\sin t$ với $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Bài luyện tập 3. Tính $I=\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{(4-x^2)^3}}dx$

Hướng dẫn. Đặt $x = 2\sin t$.

Bài luyện tập 4: Tính: $\int_0^1 x^2\sqrt{4-3x^2}\,dx$

Hướng dẫn. Đặt $\sqrt{3}x = 2\sin t$.

CÂU V: *(chỉ dành cho thí sinh thi đại học)*

Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ ($n \geq 2$, n nguyên) nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong 2n điểm $A_1A_2...A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 2n điểm $A_1A_2...A_{2n}$, tìm n.

Giải: Vì trong các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ 3 đỉnh bất kì xác định một tam giác nên số tam giác tạo thành là C_{2n}^3.

Mỗi hình chữ nhật có tâm đối xứng O nên nó được xác định duy nhất bởi hai đường chéo trong n đường chéo A_iA_{n+i} ($i = 1, 2, ..., n$), do đó số hình chữ nhật là C_n^2.

Theo giả thiết, ta có phương trình:

$$C_{2n}^3 = 20.C_n^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = \frac{20n(n-1)}{2}$$

Vì $n(n-1) \neq 0$ nên ta được $2n-1 = 15 \Leftrightarrow n=8$.

Lưu ý. Cách tính số các hình chữ nhật khác cách tính số các tam giác. Nói chung để tính được số cách lập nhóm nào đó các phần tử, ta cần phân tích, khai thác đúng tính chất của các phần tử của nhóm đó.

Bài luyện tập 5. *Tính số giao điểm (khác đỉnh) của các đường chéo của đa giác lồi n đỉnh nếu bất kì 3 đường chéo nào cũng không có điểm chung (ngoài đỉnh).*

Hướng dẫn : Mỗi giao điểm của 2 đường chéo được xác định bởi một tứ giác lồi.

Đáp số : C_n^4

KẾT QUẢ KÌ THI ... *(Tiếp bìa 2)*

Tuấn Dương (Khối THPT chuyên Toán-Tin, *ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội*); Hàn Ngọc Đức, Lưu Ngọc Lâm, Nguyễn Thành Vinh (THPT Mỹ Hào, THPTNK - *Hưng Yên*); Đặng Quang Huy, Nguyễn Thái Tất Hoàn, Huỳnh Anh Vũ (THPT Lê Quí Đôn, *Đà Nẵng*); Nguyễn Thái Bình, Đinh Viết Sang, Phạm Hoàng Sơn, Nguyễn Danh Tuấn, Trương Minh Tiến (THPT Phan Bội Châu, *Nghệ An*); Phạm Hùng Cường, Lê Nguyên Hồng, Hoàng Kim (THPT chuyên, *Quảng Bình*); Hà Quang Đạt (THPT chuyên Lê Khiết, *Quảng Ngãi*) ; Lê Minh Toàn (THPT chuyên Hạ Long, *Quảng Ninh*) ;

Nguyễn Trung Chính, Đào Tuấn Sơn, Lê Minh Quyên, Lê Hải Sơn, Nguyễn Hoàng Thạch (THPT Hà Nội-Amsterdam, *Hà Nội*); Tống Minh Thanh, Đặng Duy Hưng (THPT Lương Văn Tụy, *Ninh Bình*); Bùi Mạnh Tiến (THPT chuyên, *Thái Nguyên*); Đặng Ngọc Trang, Phạm Bảo Lâm, Trần Thế Quang (THPT chuyên, *Thái Bình*); Trần Viết Hưng, Nguyễn Duy Đức, Phan Trần Hiệu (THPT chuyên, *Hà Tĩnh*); Trần Minh Bình, Lại Nguyên Mai Ngân, Nguyễn Hoàng Nguyên (THPT Lê Quí Đôn, *Khánh Hòa*); Nguyễn Hoàng Khanh, Lê Phương (THPT Lương Thế Vinh, *Đồng Nai*); Trần Huy Lập (Quốc học Huế, *Thừa Thiên-Huế*); Hoàng Tuấn Nhã, Nguyễn Thanh Sơn (Khối THPT chuyên Toán, *ĐHKH-ĐH Huế*).

BẢNG B

1. Giải Nhì: Chu Tiến Dũng (THPTNK, *Sơn La*); Hà Hữu Cao Trình (THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, *Hòa Bình*); Phan Thành Nam (THPT Lương Văn Chánh, *Phú Yên*).

2. Giải Ba: Nguyễn Minh Tuân, Lê Vũ Hoàng Minh (THPT Hùng Vương, *Gia Lai*); Nguyễn Đắc Dũng, Nguyễn Thị Nga, Nguyễn Lâm Tuyền, Giang Sơn Đạt (THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, *Hòa Bình*); Phạm Thành Phú (THPT Lê Quí Đôn, *Bình Định*); Bùi Mạnh Huấn, Nguyễn Quốc Tuấn (THPT Lào Cai, *Lào Cai*); Nguyễn Ngọc Duy, Trương Hồng Minh (THPT chuyên, *Bạc Liêu*); Nguyễn Thị Hà Thanh (THPT Phan Ngọc Hiển, *Cà Mau*); Nguyễn Thị Thu Hằng, Trần Thái Ngọc Huy (THPT Nguyễn Du, *Buôn Ma Thuột*); Nguyễn Võ Vĩnh Lộc (THPT thị xã Sa Đéc, *Đồng Tháp*); Lê Hoàng Anh Tuấn (THPT Huỳnh Mẫn Đạt, *Kiên Giang*); Nguyễn Thái Vinh (THPT Thăng Long, *Lâm Đồng*).

3. Giải Khuyến khích: Nguyễn Trường Kha, Nguyễn Văn Việt, Phan Hàng Duy Thái, Nguyễn Giáp (THPT Thăng Long, *Lâm Đồng*); Ngô Thanh Nguyên, Nguyễn Huỳnh Tấn Trung, Phùng Trọng Thực (THPT Lương Văn Chánh, *Phú Yên*); Vũ Tiến Dũng, Nguyễn Tiến Cường, Lê Đình Thịnh (THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, *Yên Bái*); Trần Minh Trí (THPT Lê Quí Đôn, *Bình Định*); Nguyễn Minh Luân (THPT Lý Tự Trọng, *Cần Thơ*); Nguyễn Quang Tân, Tào Xuân Hà (THPT Bảo Thắng 1, THPT Cam Đường - *Lào Cai*); Hoàng Quốc Quân, Nguyễn Thái Ngọc, Bùi Thị Hương (THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, *Hòa Bình*); Nguyễn Anh Cường, Hồ Hữu Lễ (THPT Lê Quí Đôn, *Bà Rịa-Vũng Tàu*); Khổng Hoài Hưng (THPT Bến Tre, *Bến Tre*); Trần Quốc Trung (THPT Hoàng Lệ Kha, *Tây Ninh*); Nguyễn Văn Tâm (THPT Giá Rai, *Bạc Liêu*); Lê Thanh Nhàn (THPT thị xã Cao Lãnh, *Đồng Tháp*); Nguyễn Phước Minh (THPT Chu Văn An, *Ninh Thuận*); Nguyễn Hải Long (THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, *Vĩnh Long*).

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CÓ HAI PHÉP TOÁN NGƯỢC NHAU

PHẠM QUỐC PHONG
(GV THPT Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

Một trong những bí quyết thành công khi giải phương trình (PT) là việc đặt ẩn phụ. Tuy nhiên với mỗi loại phương trình nên chọn ẩn phụ nào là hợp lí để giải được phương trình là câu hỏi không dễ trả lời. Bài này giới thiệu phương pháp chọn ẩn phụ để giải một số phương trình có hai phép toán ngược nhau.

I. Phương trình mũ và lôgarit

Bài toán 1. *Giải phương trình*

$$7^{x-1}=1+2\log_7(6x-5)^3 \qquad (1)$$

Lời giải. Điều kiện để PT có nghĩa : $6x-5>0$. Đặt ẩn phụ $y-1=\log_7(6x-5)$

$\Rightarrow\ 7^{y-1}=6x-5 \qquad (2)$

Lúc đó PT (1) trở thành $7^{x-1}=6y-5 (3)$

Trừ theo từng vế của (2) và (3) ta được

$7^{y-1}-7^{x-1}=6x-6y \Leftrightarrow 7^{x-1}+6(x-1)=7^{y-1}+6(y-1)$ (4)

Hàm số $f(t)=7^t+6t$ có $f'(t)=7^t.\ln7+6>0$ nên đồng biến trên R, do đó (4) $\Leftrightarrow x=y$.

Theo cách đặt ẩn phụ từ (2) có $7^{x-1}=6x-5$ $\Leftrightarrow 7^{x-1}-6(x-1)+1=0$ (5). Hàm số $g(t)=7^t-6t-1$ có $g'(t)=7^t\ln7-6$ và $g'(t)=0$ có nghiệm $t_o=\log_7 6-\log_7\ln7$. Hàm số $g(t)$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty\ ;\ t_o)$ và đồng biến trong khoảng $(t_o\ ;\ +\infty)$ nên $g(t)$ không có quá 2 nghiệm. Dễ thấy $t_1=0$ và $t_2=1$ là hai nghiệm của $g(t)\Rightarrow$ PT(5) có 2 nghiệm $x_1=1$ và $x_2=2$. Hai nghiệm này thỏa mãn điều kiện của PT(1) nên PT(1) có 2 nghiệm $x_1=1$ và $x_2=2$.

Vì sao chọn ẩn phụ như trên ? Ta hãy xét

Bài toán tổng quát. *Giải phương trình*

$$s^{ax+b}=r\log_s(ux+v)+dx+e \qquad (I)$$

với $a\neq0,\ u\neq0,\ 0<s\neq1$.

Phương pháp giải. Điều kiện để PT có nghĩa: $ux+v>0$. Đặt ẩn phụ $ay+b=\log_s(ux+v)$

$\Leftrightarrow\ s^{ay+b}=ux+v \qquad (6)$

Lúc đó PT(I) trở thành

$$s^{ax+b}=ary+dx+br+e \qquad (7)$$

Giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn :

u = ar + d và **v = br + e** hay là

Với $b=0$ thì $v=e$

Với $b\neq0$ thì $r=\dfrac{u-d}{a}=\dfrac{v-e}{b}$

Lúc đó hệ PT (6) (7) trở thành hệ PT

$$\begin{cases} s^{ay+b}=ux+v & (6)\\ s^{ax+b}=ary+(u-ar)x+v & (8)\end{cases}$$

Trừ theo từng vế của (7) và (8) và rút gọn ta được : $a^{ax+b}+arx=s^{ay+b}+ary \qquad (9)$

Nếu hàm số $f(x)=s^{ax+b}+arx$ là đơn điệu trên R (nghĩa là $s>1$ và $ar>0$ hoặc $0<s<1$ và $ar<0$) thì (9) $\Leftrightarrow x=y$.

Theo cách đặt ẩn phụ từ (6) có

$$s^{ax+b}-ux-v=0$$

Khảo sát sự biến thiên của hàm số $g(x)=s^{ax+b}-ux-v$ để biết số các nghiệm của $g(x)=0$ rồi tìm các nghiệm đó.

Bài toán 2. *Giải phương trình*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin^2 x}+\sin\frac{\pi}{6}=$$

$$=\cos2x+\log_4(4\cos^3x-\cos6x-1) \qquad (10)$$

Hướng dẫn giải. Điều kiện : $3\cos2x\geq1$.

$(10)\Leftrightarrow 2.2^{\cos2x-1}+1$

$=2\cos2x+(\log_2 4)\log_4(3\cos2x-1)$

Đặt ẩn phụ $z=\cos2x$ có PT

$$2^z+1=2z+\log_2(3z-1) \qquad (11)$$

Đặt ẩn phụ $y=\log_2(3z-1)\Leftrightarrow 2^y=3z-1$ (12).

Lúc đó PT (11) trở thành $2^z=2z+y-1$ (13)

Trừ theo từng vế của (12) và (13) rồi lập luận tương tự cách giải PT (4).

II. Phương trình f(f(x)) = x

Bài toán tổng quát : *Giải phương trình*

$$f(f(x)) = x \qquad \text{(II)}$$

trong đó $f(x)$ là hàm đồng biến trên tập xác định $D_x \subset R$.

Phương pháp giải. Đặt ẩn phụ $y = f(x)$ thì (II) trở thành $x = f(y)$.

Vì $y = f(x)$ là hàm đồng biến nên $x = f(y)$ cũng là hàm đồng biến trên tập xác định $D_y \subset R$.

Giả sử có **điều kiện $D_x = D_y$** thì từ hệ PT $y = f(x)$ và $x = f(y)$ có $y - x = f(x) - f(y)$ $\Leftrightarrow f(x) + x = f(y) + y$ (1)

Vì $f(x)$ và x đều là hàm đồng biến nên $f(x) + x$ cũng là hàm đồng biến trên $D_x = D_y$, do đó (1) $\Leftrightarrow x = y$. Theo cách đặt ẩn phụ ta có $f(x) = x$. Từ đó khảo sát sự biến thiên của hàm số $g(x) = f(x) - x$ để biết số các nghiệm của PT $g(x) = 0$, rồi tìm các nghiệm đó.

Bài toán 3. *Giải phương trình*

$$\log_2(3\log_2(3x-1)-1)=x \qquad (1)$$

Hướng dẫn giải. Điều kiện : $3x - 1 \geq 0$

Đặt ẩn phụ $y = \log_2(3x-1) \Leftrightarrow 2^y = 3x-1$ (2)

PT(1) trở thành $2^x = 3y-1$ (3)

Trừ theo từng vế của (2), (3) và rút gọn được

$$2^x + 3x = 2^y + 3y$$

Tiếp tục giải tương tự PT(4) mục I.

III. Phương trình chứa căn bậc 2 và lũy thừa bậc 2

Bài toán tổng quát : *Giải phương trình*

$$\sqrt{ax+b} = r(ux+v)^2 + dx + e \quad \text{(III)}$$

với $a \neq 0$, $u \neq 0$, $r \neq 0$.

Phương pháp giải.

Điều kiện để PT có nghĩa : $ax + b \geq 0$

Đặt ẩn phụ $uy + v = \sqrt{ax+b} \Leftrightarrow (uy + v)^2 = ax + b$ (1) với điều kiện $uy + v \geq 0$. Lúc đó (III) trở thành $r(ux + v)^2 = uy - dx + v - e$ (2)

Giả sử *các điều kiện sau được thỏa mãn*

$$\boldsymbol{u = ar + d} \text{ và } \boldsymbol{v = br + e}$$

Lúc đó hệ PT (1) (2) trở thành hệ PT

$$\begin{cases} r(uy+v)^2 = arx + br & (3) \\ r(ux+v)^2 = uy + (ar-u)x + br & (4) \end{cases}$$

Trừ theo từng vế của (3) và (4) được

$$r(uy+v)^2 - r(ux+v)^2 = ux - uy$$

$$\Leftrightarrow ru(y-x)(uy+ux+2v) = u(x-y)$$

$$\Leftrightarrow u(y-x)(ruy+rux+2rv+1) = 0 \qquad (5)$$

Xét 2 trường hợp :

a) Với $x = y$. Theo cách đặt ẩn phụ từ (1) có $(ux+v)^2 = ax+b$. Đây là PT bậc 2 ẩn x nên giải được.

b) Với $x \neq y$ thì từ (5) có $uy = -ux - 2v - \frac{1}{r}$.

Thay vào PT(1) dẫn đến PT bậc 2 ẩn x nên giải được.

Bài toán 4. *Giải phương trình*

$$\sqrt{2x+15} = 32x^2 + 32x - 20 \qquad (6)$$

Lời giải. Điều kiện $2x + 15 \geq 0$.

$$(6) \Leftrightarrow \sqrt{2x+15} = 2(4x+2)^2 - 28 \qquad (7)$$

Đặt ẩn phụ $4y + 2 = \sqrt{2x+15} \Leftrightarrow (4y + 2)^2 = 2x + 15$ (8) với điều kiện $4y + 2 \geq 0$.

Lúc đó PT (7) trở thành $(4x+2)^2 = 2y + 15$ (9)

Trừ theo từng vế của (8), (9) và rút gọn được :

$$(x - y)(8x + 8y + 9) = 0$$

Xét 2 trường hợp :

a) Với $x = y$. Thay vào (8) và rút gọn được

$$16x^2 + 14x - 11 = 0$$

Giải PT này được 2 nghiệm $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{-11}{8}$.

So sánh với điều kiện của x và y chỉ có nghiệm $x = \frac{1}{2}$ thỏa mãn.

b) Với $8x + 8y + 9 = 0$. Thay $8y = -8x - 9$ vào (8) và rút gọn được : $64x^2 + 72x - 35 = 0$.

Giải PT này được 2 nghiệm $x = \frac{-9\pm\sqrt{221}}{16}$. So sánh với điều kiện của x và y chỉ có nghiệm $x = \frac{-9-\sqrt{221}}{16}$ thỏa mãn. Vậy PT (6) có 2 nghiệm là $x_1 = 1/2$ và $x_2 = \frac{-9-\sqrt{221}}{16}$.

Bài toán 5. *Giải phương trình*

$$\sqrt{3x+1} = -4x^2 + 13x - 5 \qquad (10)$$

Lời giải. Điều kiện : $3x + 1 \geq 0$

$$(10) \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = -(2x - 3)^2 + x + 4 \qquad (11)$$

Đặt ẩn phụ $-2y + 3 = \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow (-2y + 3)^2 = 3x + 1$ (12) với điều kiện $-2y + 3 \geq 0$.

Lúc đó PT (11) trở thành

$$(2x - 3)^2 = 2y + x + 1 \qquad (13)$$

Trừ theo từng vế của (12) (13) và rút gọn được $(x-y)(2x+2y-5)=0$

Xét 2 trường hợp :

a) Với $x = y$. Thay vào (12) và rút gọn được

$$4x^2 - 15x + 8 = 0$$

Giải PT này được 2 nghiệm $x = \dfrac{15\pm\sqrt{97}}{8}$

So sánh với điều kiện của x và y chỉ có nghiệm $x_1 = \dfrac{15-\sqrt{97}}{8}$ thỏa mãn.

b) Với $2x + 2y - 5 = 0$. Thay $-2y = 2x - 5$ vào (12) và rút gọn được $4x^2 - 11x + 3 = 0$. Giải PT này được 2 nghiệm $x = \dfrac{11\pm\sqrt{73}}{8}$. So sánh với điều kiện của x và y chỉ có nghiệm $x_2 = \dfrac{11-\sqrt{73}}{8}$ thỏa mãn.

Vậy PT (10) có 2 nghiệm x_1 và x_2 như trên.

IV. Phương trình chứa căn bậc 3 và lũy thừa bậc 3

Bài toán tổng quát : *Giải phương trình*

$$\sqrt[3]{ax+b} = r(ux+v)^3 + dx + e \qquad (IV)$$

Phương pháp giải. Đặt ẩn phụ $uy + v = \sqrt[3]{ax+b} \Leftrightarrow (uy+v)^3 = ax + b \qquad (1)$

Lúc đó PT (IV) trở thành :

$$r(ux+v)^3 = uy - dx + v - e \qquad (2)$$

Giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn

$$u = ar + d \text{ và } v = br + e$$

Lúc đó hệ PT (1) (2) trở thành hệ PT :

$$\begin{cases} r(uy+v)^3 = arx + br & (3) \\ r(ux+v)^3 = uy + (ar-u)x + br & (4) \end{cases}$$

Trừ theo từng vế của (3) (4) được

$$r(uy+v)^3 - r(ux+v)^3 = ux - uy$$

$$\Leftrightarrow ru(y-x)(P^2 + PQ + Q^2) + u(y-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow u(y-x)(rP^2 + rPQ + rQ^2 + 1) = 0$$

trong đó $P = uy + v$ và $Q = ux + v$

Xét 2 trường hợp :

a) Với $y = x$. Theo cách đặt ẩn phụ từ (1) có

$$(ux+v)^3 = ax + b \qquad (5)$$

b) Với $r(P^2 + PQ + Q^2) + 1 = 0 \qquad (6)$

Chú ý rằng

$$P^2 + PQ + Q^2 = P^2 + \frac{2PQ}{2} + \frac{Q^2}{4} + \frac{3Q^2}{4} =$$

$= \left(P + \dfrac{Q}{2}\right)^2 + \dfrac{3Q^2}{4} \geq 0$ nên PT (6) vô nghiệm khi $r > 0$. Khi $r < 0$ phải giải PT (6) tìm y rồi thay vào PT (1) để được PT (7) ẩn x bậc không vượt quá 3.

Giải PT (5) (7) tìm được nghiệm của PT (IV).

Bài toán 6. *Giải phương trình*

$$\sqrt[3]{3x-5} = 8x^3 - 36x^2 + 53x - 25 \quad (8)$$

Lời giải. PT(8) $\Leftrightarrow \sqrt[3]{3x-5} = (2x-3)^3 - x + 2$ (9)

Đặt ẩn phụ $2y - 3 = \sqrt[3]{3x-5}$

$\Leftrightarrow (2y-3)^3 = 3x - 5 \qquad (10)$

Lúc đó PT (9) trở thành $(2x-3)^3 = 2y + x - 5$ (11)

Trừ theo từng vế của (10) (11), với chú ý rằng $r = 1 > 0$, dẫn đến $y = x$. Thay vào (10) được : $(2x-3)^3 = 3x - 5 \Leftrightarrow (x-2)(8x^2 - 20x + 11) = 0$

PT này có 3 nghiệm $x_1 = 2$, $x_2 = \dfrac{5+\sqrt{3}}{4}$, $x_3 = \dfrac{5-\sqrt{3}}{4}$

Để sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ cần phải khéo léo chọn các tham số sao cho các điều kiện $u = ar + d$, $v = br + e$ được thỏa mãn, chẳng hạn ở bài toán 4 không thể chọn r bằng 1 hoặc 4, còn ở bài toán 5 không thể chọn $uy + v = 2y - 3$.

Mặt khác, từ các điều kiện đã nêu có thể *sáng tạo* ra các phương trình hóc búa khác có hai phép toán ngược nhau mà giải bằng phương pháp này. Các bạn hãy thử sử dụng phương pháp trên để giải các bài T7/288 (THTT 6/2001), T2/295 (THTT 1/2002), T7/298 (THTT 4/2002) và giải các phương trình sau :

1) $x^2 = \sqrt{2-x} + 2$

2) $x^2 - 4x - 3 = \sqrt{x+5}$

3) $x^3 + 2 = 3\sqrt[3]{3x-2}$

4) $(8\cos^3 x + 1)^3 = 162\cos 2x - 27$

5) $6^x = 1 + 2x + 3\log_6(5x+1)$

6) $f(f(x)) = x$ với

a) $f(x) = \sin x$, $x \in [-1, 1]$

b) $f(x) = x^2 + 5x + 3$ với $x \geq 0$

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/303. Tìm mọi cặp số nguyên x, y thỏa mãn

$$x^4 + (x+1)^4 = y^2 + (y+1)^2$$

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(GV Tp. Hồ Chí Minh).

Bài T2/303. Giải phương trình :

$$\sqrt{\frac{1-x}{x}} = \frac{2x+x^2}{1+x^2}$$

KIỀU PHƯƠNG CHI
(Cao học 8 Toán ĐH Vinh)

Bài T3/303. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$ab + bc + 2ca$$

trong đó a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện

$$a^2 + b^2 + c^2 \le 8.$$

LÊ TUYẾT NHUNG
(GV TH Vạn Thiện, Nông Cống, Thanh Hóa)

Bài T4/303. Từ điểm G nằm trong tam giác ABC lần lượt kẻ các đường thẳng vuông góc với BC, CA, AB tại D, E, F. Trên các tia GD, GE, GF lấy các điểm A_1, B_1, C_1 tương ứng sao cho $\frac{GA_1}{BC} = \frac{GB_1}{CA} = \frac{GC_1}{AB}$. Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác $A_1B_1C_1$.

PHAN THỊ MÙI
(GV THCS Trần Quốc Toản, Tx. Tuy Hòa, Phú Yên).

Bài T5/303. Cho tam giác ABC có $BC < BA$ với đường trung tuyến BD, đường phân giác BE. Đường thẳng qua C, vuông góc với BE ở F và cắt BD ở G. Chứng minh rằng DF đi qua trung điểm của đoạn thẳng GE.

NGUYỄN ĐỄ
(Sở GD–ĐT Hải Phòng)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/303. Trong một phòng thi gồm có 9 thí sinh được xếp ngồi xung quanh một bàn tròn. Trong ngân hàng đề có 9 loại đề khác nhau, mỗi loại có nhiều bản. Một cách phát đề được gọi là hợp lệ nếu mỗi thí sinh được nhận chỉ 1 đề và hai thí sinh bất kì ngồi cạnh nhau thì nhận được 2 loại đề khác nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách phát đề hợp lệ ?

TRỊNH BẰNG GIANG
(GV THPT Nguyễn Thượng Hiền, Tp. Hồ Chí Minh)

Bài T7/303. Giải phương trình :

$$(a-x)^k + (x-b)^k = (a-b)^k$$

với $a \ne b$, k là số nguyên khác 0.

TRẦN TUẤN ANH
(SV khoa Toán Tin 2000 ĐH KHTN – ĐHQG Tp.Hồ Chí Minh)

Bài T8/303. Dãy số thực dương (a_n) (n = 1, 2, 3, ...) thỏa mãn các điều kiện : $a_1 = \frac{1}{6}$ và

$$\sum_{i=n+1}^{2n} a_i \le \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \text{ với } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^{2^n} a_i < 1$ với mỗi n.

TRẦN QUANG MINH
(SV K41 A1 Toán, ĐH Vinh).

Bài T9/303. Chứng minh rằng $\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \ge \frac{9\sqrt{3}}{2p}$ trong đó p, R, r lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp của một tam giác. Đẳng thức xảy ra khi nào ?

HOÀNG MINH DŨNG
(SV BK61, K44 ĐHBK, Hà Nội)

Bài T10/303. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Điểm M thuộc đoạn BC_1, điểm N thuộc đoạn AB_1, MN tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ góc α. Chứng minh rằng

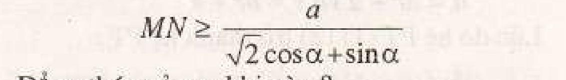
$$MN \ge \frac{a}{\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

HỒ QUANG VINH
(Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài 1. Một dây gồm k vật giống nhau, mỗi vật có khối lượng m, được nối với nhau bằng sợi dây không dãn, có khối lượng không đáng kể. Các vật nằm trên mặt phẳng nằm ngang. Một ngoại lực $\overrightarrow{F_o}$ tác dụng lên vật thứ nhất kéo vật theo phương ngang sang phải (hình vẽ). Tính lực căng của đoạn dây nối vật thứ n với vật thứ $n+1$ nếu như :



a) Không có ma sát giữa vật và mặt phẳng.

b) Hệ số ma sát giữa vật và mặt phẳng là μ.

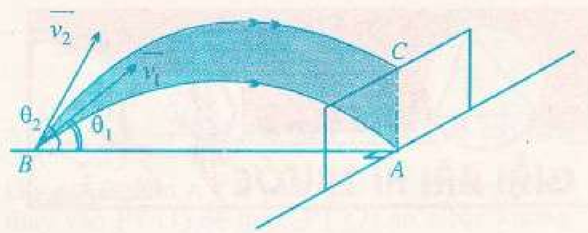
(F_0 đủ lớn để truyền được gia tốc cho các vật dù có ma sát).

Có nhận xét gì về kết quả tìm được ?

(Thi Olympic Hoa Kỳ, 1997, vòng loại)

TÔ GIANG (st)

Bài L2/303. Một cầu thủ đá quả bóng ở B về phía đoạn AC của khung thành với vận tốc ban đầu $v_0 = 25$m/s. Bóng được đặt trước mặt khung thành, cách xa khung thành $x_0 = 50$m. Xà ngang khung thành cao 3,44m (hình vẽ) . Hỏi góc đá bóng θ phải có trị số nằm trong khoảng nào để bóng lọt vào khung thành. Bỏ qua kích thước quả bóng và lực đẩy của không khí. Cho $g = 9{,}8\text{m/s}^2$.



NGUYỄN QUANG HẬU

(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/303. Find all pairs of integers x, y satisfying $x^4 + (x+1)^4 = y^2 + (y+1)^2$

T2/303. Solve the quation $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} = \dfrac{2x+x^2}{1+x^2}$

T3/303. Find the least value of the expression

$$ab + bc + 2ca$$

where a, b, c are real numbers satisfying the condition $a^2 + b^2 + c^2 \leq 8$.

T4/303. From a point G inside a triangle ABC draw the lines cutting orthogonally BC, CA, AB respectively at D, E, F. On the rays GD, GE, GF take respectively the points A_1, B_1, C_1 such that $\dfrac{GA_1}{BC} = \dfrac{GB_1}{CA} = \dfrac{GC_1}{AB}$. Prove that G is the center of gravity of triangle $A_1B_1C_1$.

T5/303. Let ABC be a triangle with $BC < BA$, BD be its median and BE be its angled -bisector issued from B. The line passing through C, perpendicular to BE, cuts BE at F and cuts BD at G. Prove that the line DF passes through the midpoint of segment GE.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/303. In a contest room there are 9 candidates sitting down around a table. There are 9 distinct problems, each problem has some copies. A distribution of problems is called legal if each candidate obtains just one problem and two candidates sitting adjacently obtain two distinct problems. How many legal distributions of problems are there ?

T7/303. Solve the equation

$$(a-x)^k + (x-b)^k = (a-b)^k$$

where $a \neq b$, k is an integer, $k \neq 0$.

T8/303. A sequence of positive real numbers (a_n) $(n = 1, 2, 3, ...)$ satisfies the conditions :

$$a_1 = \frac{1}{6} \text{ and } \sum_{i=n+1}^{2n} a_i \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

Prove that $\sum_{i=1}^{2^n} a_i < 1$ for every n.

T9/303. Prove that $\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{r} \geq \dfrac{9\sqrt{3}}{2p}$ where p, R, r are respectively the semi-perimeter, the circumradius, the inradius of a triangle. When does equality occur ?

T10/303. Let be given a cube $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ with side a. A point M lies on the segment BC_1, a point N lies on the segment AB_1, the line MN forms with the plane $(ABCD)$ an angle α. Prove that $MN \geq \dfrac{a}{\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha}$.

When does equality occur ?

ĐÍNH CHÍNH

Tạp chí TH&TT số **302**, ở BT2 trang 7, mục *Dành cho các bạn chuẩn bị thi Đại học* đã sót giả thiết bài toán, xin sửa lại như sau :

1) *Các cạnh bên nghiêng đều trên đáy 1 góc α và các mặt bên nghiêng đều trên đáy 1 góc γ...*

2) Xóa bỏ tỉ số : $\dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$

Trong mục *Đề ra kì này* xin sửa lại BĐT ở bài T7/302 là: $\dfrac{x^m y^n}{z^n} + \dfrac{y^m z^n}{x^n} + \dfrac{z^m x^n}{y^n} \geq x^m + y^m + z^m$

Thành thật xin lỗi các tác giả và bạn đọc

THTT

Bài T1/299. *Giải phương trình nghiệm nguyên:* $x^{2002} + y^{2002} = 2003^{2001}(x^3 + y^3)$ *(1)*

Lời giải. Giả sử (x, y) là một nghiệm nguyên của phương trình.

Từ (1) ta suy ra $\left(x^{2002}+y^{2002}\right) \vdots\, 2003$ (2)

Vì 2003 là số nguyên tố, theo ĐL Phec–ma có
$a^{2002} \equiv 0 \pmod{2003} \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod{2003}$,
$a^{2002} \equiv 1 \pmod{2003} \Leftrightarrow (a, 2003) = 1$.

Vì vậy, (2) xảy ra khi và chỉ khi $x^{2002} \equiv y^{2002} \equiv 0 \pmod{2003}$, tức là $x \vdots 2003$ và $y \vdots 2003$ (*)

Đặt $x = 2003x_1$, $y = 2003y_1$ (với x_1 và y_1 nguyên), thế vào (1) rồi thu gọn, ta được

$$x_1^{2002}+y_1^{2002}=2003^2\left(x_1^3+y_1^3\right) \quad (3)$$

Từ (3) ta lại có $\left(x_1^{2002}+y_1^{2002}\right) \vdots\, 2003$. Lý luận tương tự trên, ta suy ra $x_1 \vdots 2003$ và $y_1 \vdots 2003$.

Đặt $x_1 = 2003x_2$ và $y_1 = 2003y_2$ (x_2 và y_2 nguyên), thế vào (3) rồi thu gọn, ta được

$$2003^{1997}\left(x_2^{2002}+y_2^{2002}\right)=x_2^3+y_2^3 \quad (4)$$

Mặt khác, dễ thấy $2003^{1997}a^{2002} \geq a^3$ (đẳng thức chỉ xảy ra khi $a = 0$)

Bởi vậy, (4) chứng tỏ rằng $x_2 = 0$ và $y_2 = 0$, kéo theo $x = 0$ và $y = 0$.

Ngược lại, dễ thấy $(x ; y) = (0 ; 0)$ là một nghiệm của (1). Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất là $(x ; y) = (0 ; 0)$

Nhận xét. 1) Trong số 95 bài giải gửi đến tòa soạn, chỉ có 68 bài giải đúng. Rất nhiều bài trình bày không chặt chẽ về cấu trúc lôgic.

2) Các sai sót thường thấy là :

+ Ngộ nhận rằng việc chứng minh (*) có thể tiếp tục mãi, dẫn đến $x \vdots 2003^n$ và $y \vdots 2003^n$ với mọi $n \in N$.

+ Sử dụng đẳng thức

$$x^n + y^n = \left(x^{n-1} - x^{n-2}y + ... - xy^{n-2} + y^{n-1}\right)(x+y)$$

xảy ra với n lẻ nhưng trong bài, $n = 2002$ là chẵn

+ Cho rằng nếu x nguyên và $x \neq 0$ thì $x^{2002} \equiv 1$ (mod 2003)

3) Từ (*), có thể dẫn đến kết quả

Nếu $p = 4k + 3$ là một số nguyên tố thì

$$\left(x^2+y^2\right) \vdots\, p \Leftrightarrow x \vdots\, p \text{ và } y \vdots\, p$$

Từ đó có bài toán tổng quát của bài toán này:

Bài toán. Phương trình $x^{2n} + y^{2n} = p^m\ (x^k+y^k)$, trong đó p là số nguyên tố có dạng $4q + 3$, còn n, m và k là các số nguyên dương thỏa mãn $\frac{m}{2} + k \leq 2n < m+k$ có nghiệm nguyên duy nhất là (0; 0)

Một số bạn cũng nêu được các bài toán tương tự, nhưng các điều kiện đối với n, m và k chưa thật đầy đủ.

4) Các bạn có lời giải tốt là : **Hòa Bình :** *Ngô Nhất Sơn*, 9A, THCS Yên Thủy ; **Phú Thọ :** *Tạ Bảo Trung*, 9C, THCS Việt Trì ; *Nguyễn Quang Huy*, 9A và *Nguyễn Xuân Trường*, 8A, THCS Giấy, Phong Châu, Phù Ninh ; **Vĩnh Phúc :** *Vũ Văn Quang*, 8A3, THCS Vĩnh Tường, *Trương Ngọc Cương*, 6B, THCS Vĩnh Yên; **Hải Phòng:** *Đào Thị Huệ*, 8A5, THCS Thủy Đường, Thủy Nguyên ; *Bùi Ngọc Khôi*, 8A và *Phạm Quỳnh Anh*, 9A, THCS Trần Phú ; **Hải Dương:** *Nguyễn Duy Mạnh*, 8B, THCS Lê Quý Đôn ;**Hà Nội :** *Vũ Nhật Minh*, 8H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy ; **Nam Định :** *Đinh Xuân Tuyên*, 8A2, THCS Lê Quý Đôn, ý Yên; **Thanh Hóa :** *Bùi Khắc Kiên*, 9A, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa ; *Nguyễn Ngọc Hòa*, 9D, THCS Bắc Sơn II, Sầm Sơn ; *Trịnh Thành Đông*, 9A, THCS Tây Đô, Vĩnh Lộc ; **Nghệ An :** *Đinh Viết Tú*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; **Quảng Ngãi:** *Bùi Lê Trọng Thanh*, 9D, THCS Nguyễn Nghiêm ; **Bình Định :** *Ngô Thanh Hoàng*, 8A7, THCS Đống Đa, Quy Nhơn... ; **Cần Thơ :** *Nguyễn Minh Luân*, 8A, THCS Nguyễn Việt Hồng ; **Đồng Nai :** *Phan Đình Tùng*, 9B, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Biên Hòa.

NGUYỄN HUY ĐOAN

Bài T2/299. *Cho hai số dương m, n với m < n. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \leq \frac{3}{2}+\frac{(n-m)^2}{2m(n+m)}$$

trong đó các số a, b, c thỏa mãn $m \leq a, b, c \leq n$. Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. (của bạn *Phan Thành Việt*), 8D, THCS Lương Thế Vinh, **Phú Yên**).

Không mất tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$. Đặt $x = b + c$, $y = c + a$, $z = a + b$. Ta có $x \leq y \leq z$.

Suy ra $\left(1-\frac{y}{x}\right)\left(1-\frac{z}{y}\right)+\left(1-\frac{x}{y}\right)\left(1-\frac{y}{z}\right) \geq 0$ (*)

với đẳng thức xảy ra chỉ khi $x = y$ hoặc $z = y$.

Từ (*) qua biến đổi đơn giản có:

$$\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z} \leq 2\left(\frac{x}{y}+\frac{z}{x}\right)+2$$

hay là

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)+3 \leq 2\,\frac{(z-x)^2}{xy}+6 \ (1)$$

Mặt khác $0 \le \dfrac{z-x}{x} = \dfrac{a-c}{b+c} \le \dfrac{n-m}{2m}$, và

$$0 \le \frac{z-x}{z} = \frac{a-c}{a+b} \le \frac{a-c}{a+c} \le \frac{n-c}{n+c} \le \frac{n-m}{n+m},$$

cho nên $\dfrac{(z-x)^2}{xz} = \dfrac{(n-m)^2}{2m(n+m)}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \le \frac{3}{2} + \frac{(n-m)^2}{2m(n+m)}$$

đẳng thức xảy ra khi $a = n$, $b = c = m$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh và chỉ trở thành đẳng thức khi có một trong 3 số a, b, c bằng n và hai số còn lại bằng m.

Nhận xét. Đây là bài khó, nhiều bạn giải sai, chỉ có các bạn sau đây chỉ ra được điều kiện để đẳng thức xảy ra là : **Phú Thọ :** *Nguyễn Trường Thọ & Nguyễn Quang Huy*, 9A, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh ; **Hải Dương:** *Nguyễn Duy Mạnh*, THCS Lê Quý Đôn, Tp. Hải Dương ; **Hưng Yên :** *Doãn Thị Kim Huế*, 8C, THCS Phan Huy Thành, Ân Thi ; **Vĩnh Phúc :** *Phạm Huy*, 8C, THCS Tam Dương.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/299. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} 12x^2 - 48x + 64 = y^3 & (1) \\ 12y^2 - 48y + 64 = z^3 & (2) \\ 12z^2 - 48z + 64 = x^3 & (3) \end{cases}$$

Lời giải. Tất cả các bạn đều phát hiện và giải trong trường hợp ở phương trình (3) số mũ của z là 2 chứ không phải là 3.

Giả sử bộ ba số (x, y, z) là nghiệm của hệ phương trình trên thì dễ thấy (y, z, x) và (z, x, y) cũng là nghiệm của hệ PT này, do đó có thể giả sử x là số lớn nhất : $x \ge y$ và $x \ge z$ (4).

Từ $12x^2 - 48x + 64 = 12(x - 2)^2 + 16 \ge 16$ suy ra $y > 2$. Tương tự $z > 2$, $x > 2$ (5)

Trừ theo từng vế (1) và (3) được

$x^3 - y^3 = 12(z^2 - x^2) - 48(z - x) =$

$= 12(z - x)(z + x - 4)$ (6)

Theo (4) (5) có $x^3 - y^3 \ge 0$ $z-x \le 0$, $z+x-4 > 0$ nên từ (6) suy ra $x = y = z$ (7). Thay vào (1) được $x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 4$. Từ (7) suy ra hệ phương trình có nghiệm duy nhất là (4, 4, 4).

Nhận xét. 1) Một số bạn giả sử rằng $x \ge y \ge z$, điều này chưa chính xác vì với x lớn nhất thì còn có thể $x \ge z \ge y$. Các bạn giải nhờ tính chia hết cũng phạm nhiều sai lầm. Một số bạn sử dụng tính đồng biến của hàm số là kiến thức vượt quá chương trình toán THCS.

2) Đa số các bạn đã cộng theo từng vế cả 3 phương trình (1) (2) (3) để có $(x - 4)^3 + (y - 4)^3 + (z - 4)^3 = 0$ sau đó tìm cách so sánh x, y, z với 4 để suy ra $x = y = z = 4$. Nhiều bạn đã phát hiện ra bài này tương tự bài T2/248 THTT (2/1998)

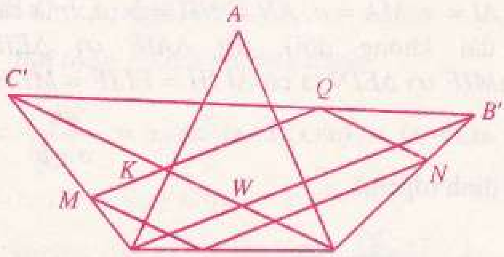
3) Các bạn có lời giải gọn là :

Vĩnh Phúc : *Nguyễn Thùy Linh*, 8C, THCS Yên Lạc; **Bắc Giang :** *Phan Tuấn Anh*, 8A, THCS Đức Giang, Yên Dũng ; **Hà Tây :** *Nguyễn Lệnh Quân*, 9C, THCS Nguyễn Văn Huyên, Hoài Đức ; **Hà Nội :** *Nguyễn Thanh Tùng*, 8A1, THCS Láng Thượng, Ba Đình ; **Hải Dương :** *Nguyễn Thị Mai*, 9/3, THCS Lê Quý Đôn, Tp. Hải Dương ; **Hưng Yên :** *Vũ Thị Kim Thủy* 8C, THCS Thắng Lợi, Văn Giang ; **Hải Phòng:** *Phạm Duy Thành*, 9A, THNK Trần Phú ; **Nam Định :** *Dương Đỗ Nhuận*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên ; **Hà Nam :** *Trần Phan Bình*, 9B, THCS Trần Phú, Tx. Phủ Lý. **Thái Bình :** *Trần Văn*, 8A, THCS Bồ Xuyên, Tx. Thái Bình ; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Nam*, 9A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng hóa, *Nguyễn Ngọc Tú*, 9B, THCS Lê Đình Kiên, Yên Định ; **Nghệ An :** *Trần Nguyên Công*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

VIỆT HẢI

Bài T4/299. *Cho tam giác cân ABC (AB = AC). Lấy điểm P nào đó trên đường thẳng BC (P khác B, C). Gọi M, N lần lượt là điểm đối xứng của P qua AB, AC. Dựng hình bình hành MPNQ. Chứng minh rằng điểm Q luôn nằm trên một đường thẳng khi P di chuyển trên đường thẳng BC.*

Lời giải. Xét P nằm trong đoạn BC. Gọi C', B' lần lượt là điểm đối xứng của C và B qua AB, AC. Như vậy C', B' cố định. Gọi W là giao của CC' và BB'. Ta có B, M, C' thẳng hàng, C, N, B' thẳng hàng. Kẻ $NQ // CC'$ ($Q \in B'C'$) và $MK // BB'$ ($K \in CC'$)



Áp dụng định lí Ta-let cho các đường thẳng song song ta có :

$$\frac{QB'}{QC'} = \frac{B'N}{NC} = \frac{BP}{PC} = \frac{BM}{MC'} = \frac{KW}{KC'}$$

Từ $\dfrac{QB'}{QC'} = \dfrac{KW}{KC'}$ suy ra $QK // B'W$ tức M, K, Q thẳng hàng. Do đó $MPNQ$ là hình bình hành và Q nằm trên đường thẳng cố định $B'C'$.

Nếu P nằm ngoài đoạn BC chứng minh tương tự. Vậy Q luôn nằm trên đường thẳng cố định $B'C'$ khi P di chuyển trên BC.

Nhận xét. 1. Chứng minh trên không dùng tới giả thiết tam giác ABC là cân. Bài toán vẫn đúng với tam giác bất kì. Trong trường hợp ΔABC cân thì $B'C'//BC$, ΔABC đều thì $B'C'//BC$ và đi qua A.

2. Các bạn có lời giải tốt :

Bắc Ninh : *Lưu Thị Thu Trang*, 8A, THCS Yên Phong, **Phú Thọ :** *Nguyễn Quang Huy*, 9A, THCS Giấy, Phong Châu ; **Vĩnh Phúc :** *Đỗ Đình Khanh*, 7A, THCS Yên Lạc ; **Hải Dương :** *Nguyễn Duy Mạnh*, 8/3, THCS Lê Quý Đôn ; **Hà Nội :** *Nguyễn Hoàng Việt, Vũ Nhật Minh*, 8H, THCS Lê Quý Đôn ; **Nam Định :** *Đinh Xuân Tuyên*, 8A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên ; *Đinh Xuân Tuyên*, 8A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, *Ngô Hải Đăng*, 9A7, Trần Đăng Ninh Tp. Nam Định ; **Thanh Hóa :** *Lê Khánh Chương*, 9A, THCS Trần Phú, Nông Cống, **Tp. HCM :** *Nguyễn Thị Ngọc Thảo*, 8[1], Hồng Bàng, Q. 5.

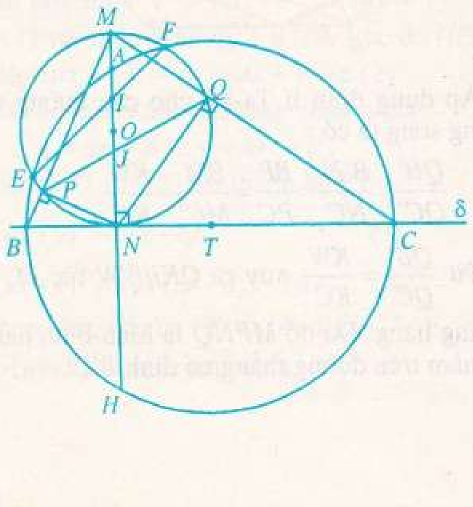
VŨ KIM THỦY

Bài T5/299. *Cho đường tròn tâm O đường kính MN cố định và một điểm A nằm trong đoạn MN. Gọi δ là tiếp tuyến của đường tròn với tiếp điểm N. Đường tròn tâm T nào đó thuộc δ, đi qua A, cắt đường tròn tâm O tại E và F, cắt δ tại B và C. Chứng minh rằng khi điểm T di chuyển trên δ thì :*

1) Đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định

2) Đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định, trong đó P, Q là các giao điểm của MB, MC với đường tròn tâm O.

Lời giải. a) Gọi I là giao điểm của EF với MN, H là giao điểm của MN với đường tròn (T). Đặt $AI = x$, $MA = a$, $AN = NH = b$ (a, b là các độ dài không đổi). Từ $\Delta AIF \backsim \Delta EIH$ và $\Delta MIF \backsim \Delta EIN$ ta có $AI.IH = EI.IF = MI.IN$ hay $x(2b-x) = (a+x)(b-x) \Rightarrow x = \dfrac{ab}{a+b} \Rightarrow$ I cố định (đpcm).



b) Gọi J là giao điểm của PQ với MN. Ta có $\Delta MJQ \backsim \Delta PJN \Rightarrow \dfrac{MJ}{PJ} = \dfrac{JQ}{JN} = \dfrac{MQ}{PN}$

$$\Rightarrow \left(\frac{MJ}{PJ}\right)\left(\frac{JQ}{JN}\right) = \frac{MQ^2}{PN^2} \quad (1)$$

Tương tự từ $\Delta MJP \backsim QJN$ ta có :

$$\frac{MJ.PJ}{QJ.JN} = \frac{MP^2}{QN^2} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra : $\dfrac{MJ^2}{JN^2} = \dfrac{MP^2.MQ^2}{PN^2.QN^2} =$

$$\frac{MP^2.MQ^2}{(MP.PB)(MQ.CQ)} = \frac{MP.MQ}{PB.QC} \quad (3)$$

Mặt khác : $\dfrac{MN^2}{NB^2} = \dfrac{MP.MB}{PB.MB} = \dfrac{MP}{PB}$;

$\dfrac{MN^2}{NC^2} = \dfrac{MQ}{QC}$, do vậy $\dfrac{MN^4}{NB^2.NC^2} = \dfrac{MP.MQ}{PB.QC}$ (4)

Từ (3), (4) suy ra $\dfrac{MJ^2}{JN^2} = \dfrac{MN^4}{NB^2.NC^2} = \dfrac{MN^4}{NA^4}$

(do $\Delta ANB \backsim \Delta CNH$) hay : $\dfrac{MJ}{JN} = \dfrac{MN^2}{NA^2}$ (không đổi)

Điểm J chia MN theo một tỉ số không đổi nên J là điểm cố định (đpcm).

Nhận xét. 1) Một số bạn sử dụng khái niệm *phương tích của một điểm đối với một đường tròn, tính chất của phép nghịch đảo*, cũng cho lời giải đúng, tuy nhiên các kiến thức này vượt quá chương trình toán THCS.

2) Các bạn sau có lời giải đúng và gọn :

Vĩnh Phúc : *Bùi Hữu Đức*, 9A, THCS Vĩnh Yên ; **Hải Phòng:** *Phạm Duy Thành, Lê Hoàng Vũ*, 9A, THPT NK Trần Phú ; **Nam Định :** *Ngô Hải Đăng*, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, Đinh Xuân Tuyên, 8A2, *Dương Đỗ Nhuận*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Ngọc Tú*, 9B, THCS Lê Đình Kiên, Yên Định ; **Nghệ An :** *Đinh Viết Tú*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

HỒ QUANG VINH

Bài T6/299. *Biết rằng 10 số nguyên tố sau đây lập thành cấp số cộng với công sai d = 210: 199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089.*

Chứng minh rằng không tồn tại cấp số cộng gồm 11 số nguyên tố với công sai d thỏa mãn 1 < d < 2310.

Lời giải. (của bạn *Lưu Thị Thu Trang*, 8A, THCS Yên Phong, **Bắc Ninh**).

Giả sử tồn tại cấp số cộng gồm 11 số nguyên tố (x_i) với công sai $1 < d < 2310$, $x_i = a + id$ $(i = 0, 1, 2, ..., 10)$. Ta nhận xét rằng nếu p là số nguyên tố và $(d, p) = 1$ thì dãy số $(x_j + id)$ $(i = 1, 2, ..., p)$ là hệ thặng dư đầy đủ (mod p) do đó phải có một số chia hết cho p. Từ nhận xét đó suy ra $d \vdots 2, d \vdots 3, d \vdots 7 \Rightarrow d \vdots 210$.

Nếu $d \vdots 11$ thì $d \vdots 2.3.5.7.11 = 2310$. Vậy $d > 2310$. Trái giả thiết. Vậy $(d, 11) = 1$.

Theo nhận xét trên trong dãy số nguyên tố (x_i) $(i = 0, 1, ..., 10)$ phải có một số chia hết cho 11. Suy ra số đó là 11. Vậy $x_i = 11 + id$ $(i = 0, 1, 2, ..., 10)$ (1) với $d = 210k$ $(k = 1, 2, ... 10)$.

Tuy nhiên với $d = 210 \Rightarrow x_1 = 221 = 13.17$,

$d = 420 \Rightarrow x_2 = 851 = 23.37$

$d = 630 \Rightarrow x_2 = 1271 = 31.41$

$d = 840 \Rightarrow x_1 = 851 = 23.37$

$d = 1050 \Rightarrow x_3 = 3161 = 109.29$

$d = 1260 \Rightarrow x_1 = 1271 = 31.41$

$d = 1470 \Rightarrow x_2 = 2951 = 227.13$

$d = 1680 \Rightarrow x_1 = 1691 = 89.19$

$d = 1890 \Rightarrow x_2 = 3791 = 223.17$

$d = 2100 \Rightarrow x_4 = 8411 = 13.647$

Vậy dãy số $(a + id)$ $(i = 0, 1, ..., 10)$ không phải gồm toàn các số nguyên tố.

Nhận xét. 1) Ngoài cách thử như trên, còn có một số cách khác chứng minh dãy (1) không thể gồm toàn các số nguyên tố.

2) Có khoảng 40 bài giải sai do không xét trường hợp dãy có dạng $x_i = 11 + id$. Nên nhớ rằng một số nguyên tố có ước là chính nó.

3) Có nhiều bạn tham gia giải và giải đúng bài toán này. Các bạn ở lớp 10 Toán THPT Trần Phú, tham gia giải khá đông (*Phạm Huy Tiến, Lê Hải Yến, Bùi Quỳnh Mai, Nguyễn Quang Khánh, Hoàng Thị Tuyết Mai, Trần Hồng Trang, ...*). Ngoài ra còn có các bạn sau có lời giải tốt :

Bà Rịa - Vũng Tàu : *Trương Công Định*, 11A4, **Hòa Bình :** *Nguyễn Lâm Tuyền*, 12 chuyên Toán ; **ĐHSP Hà Nội :** *Nguyễn Chí Hiệp*, 11A1 ; **Thanh Hóa :** *Mai Quang Thành*, 11T1, Lam Sơn ; **Đồng Nai :** *Nguyễn Cảnh Lâm*, 11 Tin ; **Quảng Ngãi :** *Phạm Văn Trung*, 12T, THPT Lê Khiết.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/299. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^{19} + y^5 = 1890z + z^{2001} \\ y^{19} + z^5 = 1890x + x^{2001} \\ z^{19} + x^5 = 1890y + y^{2001} \end{cases}$$

Lời giải. Chúng ta sẽ chứng minh hệ phương trình (HPT) trên có nghiệm duy nhất $x = y = z = 0$. Giả sử (x, y, z) là một nghiệm của HPT. Vì khi đó $(-x, -y, -z)$ cũng là một nghiệm của HPT, nên không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết: có ít nhất hai trong ba số x, y, z không âm. Ví dụ $x \geq 0$, $y \geq 0$. Từ PT thứ nhất ta suy ra $z \geq 0$.

Mặt khác nếu $0 < u \leq 1$ thì $1890 + u^{2000} > 2 \geq u^{18} + u^4$,

nếu $1 < u$ thì $1890 + u^{2000} > 1 + u^{2000} > 2\sqrt{u^{2000}} = 2.u^{1000} > u^{18} + u^4$.

Do đó $1890u + u^{2001} > u^{19} + u^5$ với mọi $u > 0$.

Bởi vậy nếu cộng theo từng vế của HPT ta suy ra $x = y = z = 0$ (đpcm).

Nhận xét. Đây là HPT dạng cơ bản. Tòa soạn nhận được lời giải của gần 250 bạn, tất cả các bạn đều có kết luận đúng. Tuy vậy một số bạn vẫn có sai sót, ví dụ giả thiết rằng $x \geq y \geq z$ (x, y, z không có vai trò đối xứng trong HPT). Các bạn THCS sau có lời giải tốt : **Phú Thọ :** *Tạ Bảo Trung*, 9C, THCS Việt Trì ; **Bắc Ninh :** *Lưu Thị Thu Trang*, 8A, THCS Yên Phong ; **Vĩnh Phúc:** *Hoàng Thị Minh Huệ, Phạm Huy*, 8C, THCS Tam Dương ; **Hải Dương :** *Trần Quốc Hoàn*, 9A1, THCS Chu Văn An ; *Lê Đình Huy*, 9A, THCS Nguyễn Trãi ; **Hải Phòng :** *Phạm Duy Thành*, 9A, THCS Trần Phú ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Tuấn Nam*, 9A, THCS Nhữ Bá Sĩ ; **Nghệ An :** *Hoàng Nghĩa Hào*, 9B, THCS Bến Thủy ; **Đà Nẵng:** *Lương Thanh Toại*, 9/4, THCS Nguyễn Khuyến ; **Cần Thơ :** *Nguyễn Minh Luân*, 8A, THCS Nguyễn Việt Hồng ; **Bạc Liêu:** *Tạ Phú Hà Minh*, 9A, THCS Vĩnh Mỹ B.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/299. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \leq \frac{1}{1 + n(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_n)}$$

trong đó $n \geq 2$ và $0 < x_1, x_2, ..., x_n \leq 1$. Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Đặt $1 - x_i = a_i$ $(i = 1, 2, ... n)$

Nhận xét rằng $0 \leq a_i < 1$ và bất đẳng thức ở đề bài trở thành

$$\frac{(1-a_1)+(1-a_2)+...+(1-a_n)}{n} \leq \frac{1}{1+na_1a_2...a_n}$$

hay $(a_1 + a_2 + ... + a_n)(1 + na_1a_2...a_n) \geq n^2 a_1a_2...a_n$ (1)

Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (Cô-si) thì

$a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$ (2)

$1+na_1a_2...a_n \geq 1 + (n-1)a_1a_2...a_n$

$\geq n\sqrt[n]{(a_1a_2...a_n)^{n-1}}$ (3)

Từ (2) và (3) ta thu được (1), $\Rightarrow$ đpcm.

Nhận xét rằng đẳng thức ở (1) xảy ra khi và chỉ khi hai vế của (2) cùng bằng 0, nghĩa là khi $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$ hay $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$.

Nhận xét. Bạn *Nguyễn Lâm Tuyền*, 12T THPT Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình** nhận xét rằng bài ra thừa điều kiện các $x_i > 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$

Một số bạn còn sử dụng phương pháp quy nạp, tính lồi, lõm của hàm $\sin t$ và $\cos t$ và bất đẳng thức Becnuli để chứng minh. Đây là một bài toán cơ bản và dễ. Do vậy có đến trên 200 bài giải gửi đến tòa soạn và đều có lời giải đúng.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/299. *Chứng minh rằng trong tam giác ABC luôn có :*

$\sin A + \sin B + \sin C \geq \sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C + \sin A\sin B\sin C$

Lời giải. *Cách 1.* (của bạn *Trần Ngọc Tuấn Anh*, 12A1, khối PTCT–Tin, ĐHSP **Hà Nội**)

Trong các biến đổi sau đây, để cho đơn giản, ta dùng kí hiệu $\sum, \prod$ thay cho các tổng, tích mà trong đó, vai trò của A, B, C là bình đẳng.

Ví dụ : $\sum\sin A = \sin A + \sin B + \sin C$

$\prod\cos A = \cos A.\cos B.\cos C$

BĐT đề bài viết dưới dạng :

$$\sum\sin A \geq \sum\sin^3 A + \prod\sin A \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \sum\sin A \geq \frac{1}{4}\sum(3\sin A - \sin 3A) + \prod\sin A$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\sum\sin A + \frac{1}{4}\sum\sin 3A \geq \prod\sin A$$

$$\Leftrightarrow \prod\cos\frac{A}{2} - \prod\cos\frac{3A}{2} \geq \prod\sin A$$

$$\Leftrightarrow \prod\cos\frac{A}{2} - \prod\left(4\cos^3\frac{A}{2} - 3\cos\frac{A}{2}\right) \geq$$

$$\geq \prod\left(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \prod\cos\frac{A}{2} - \prod\cos\frac{A}{2}.\prod\left(4\cos^2\frac{A}{2} - 3\right)$$

$$\geq 8\prod\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \prod(2(1+\cos A) - 3) \geq 8\prod\sin\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \prod(1 - 2\cos A) \geq 2\left(\sum\cos A - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow 3 + 1 - 2\sum\cos A + 4\sum\cos B\cos C - 8\prod\cos A$$

$$\geq 2\sum\cos A$$

$$\Leftrightarrow 4 - 4\sum\cos A + 4\sum\cos B\cos C - 4\prod\cos A$$

$$\geq 4\prod\cos A$$

$$\Leftrightarrow \prod(1 - \cos A) \geq \prod\cos A \quad (2)$$

Nếu ΔABC không nhọn thì $\prod\cos A \leq 0 < \prod(1 - \cos A) \Rightarrow$ (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng.

Nếu ΔABC nhọn thì (2) tương đương với

$$\prod(1 - \cos A^2) \geq \prod\cos A\prod(1 + \cos A)$$

$$\Leftrightarrow \prod\sin^2 A \geq \prod\cos A\prod\left(2\cos^2\frac{A}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \prod\frac{\sin A}{\cos A} \geq \prod\frac{2\cos^2\frac{A}{2}}{\sin A}$$

$$\Leftrightarrow \prod\mathrm{tg}A \geq \prod\mathrm{cotg}\frac{A}{2} \quad (3)$$

Ta có :

$$\Sigma\mathrm{tg}A = \Sigma\frac{\mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C}{2} \geq \Sigma\mathrm{tg}\frac{B+C}{2} = \Sigma\mathrm{cotg}\frac{A}{2}$$

Vậy : (3) đúng $\Rightarrow$ (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng.

Đẳng thức xảy ra ở (1) $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Cách 2.

Ta có : $\sin A + \sin B + \sin C \geq$

$\geq \sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C + \sin A\sin B\sin C$

$$\Leftrightarrow 4R^2(a+b+c) \geq a^3+b^3+c^3+abc$$

$$\Leftrightarrow 4R^2 \geq \frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a+b+c} + \frac{4abc}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow 4R^2 \geq a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab+8Rr$$

$$\Leftrightarrow 4R^2 \geq \frac{1}{2}\left[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\right] + 8Rr$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}{16R^2} + \frac{r}{R} \quad (4)$$

Bất đẳng thức trên đúng (Bài T9/224 THTT 2/1996)

Nhận xét. 1) Bài này có nhiều bạn tham gia giải. Tuy nhiên có những bạn sử dụng các BĐT sai.

2) Bất đẳng thức trong đề bài có nhiều dạng tương đương đẹp như (2) (4) và :

* $\sin A + \sin B + \sin C + \sin 3A + \sin 3B + \sin 3C \geq \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$
* $a^2 + b^2 + c^2 \leq 8R^2 + 4r^2$
* $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 + 5r^2 \geq 8R^2$
* $IH \geq 0$

Trong đó a, b, c là độ dài các cạnh BC, CA, AB ; R, r là bán kính các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp ; r_a, r_b, r_c là bán kính các đường tròn bàng tiếp đối diện với các đỉnh A, B, C ; I, H là tâm đường tròn nội tiếp, trực âm của tam giác ABC.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Thanh Hóa : *Lê Khắc Huyên*, 11B1, THPT Lê Văn Hưu, Thiệu Hóa ; **Phú Thọ :** *Lê Việt Hà*, 10A1, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì ; *Phạm Minh Hằng*, 10T, THPT NK Trần Phú ; **Hải Dương :** *Nguyễn Thanh Hằng*, 11T, *Phạm Tuấn Thành*, 10T, THPT Nguyễn Trãi ; **Quảng Ngãi :** *Phạm Thành Trung*, 12T, *Nguyễn Huy Cung*, 12T2, THPT Lê Khiết ; **Hưng Yên :** *Phạm Ngọc Sáng*, 11T, THPT Hưng Yên ; **Hòa Bình :** *Nguyễn Lâm Tuyền*, 12T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ ; **Hà Nội :** *Đỗ Xuân Doãn*, *Nguyễn Chí Hiệp*, 11A1, khối PTCT–Tin.

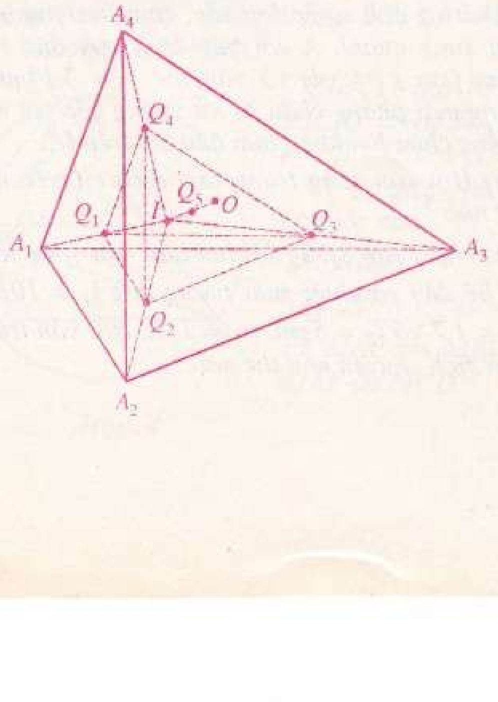
NGUYỄN MINH HÀ

Bài T10/299. *Gọi O và I lần lượt là tâm các mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp tứ diện ABCD. Năm mặt cầu tâm Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 bán kính bằng nhau, sắp xếp bên trong tứ diện ABCD sao cho các mặt cầu tâm Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 theo thứ tự tiếp xúc với các mặt của góc tam diện của tứ diện có đỉnh A, B, C, D, còn mặt cầu tâm Q_5 tiếp xúc với cả 4 mặt cầu tâm Q_1, Q_2, Q_3, Q_4.*

Chứng minh rằng các điểm O, I, Q_5 thẳng hàng.

Lời giải. (*Nguyễn Lâm Tuyền*, 12T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**).

Trước hết, để tiện trình bày, ta thay đổi kí hiệu : A, B, C, D lần lượt được thay bởi A_1, A_2,



A_3, A_4. Gọi R, r lần lượt là bán kính các mặt cầu ngoại và nội tiếp tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ và ρ ($\rho < r$) là bán kính các mặt cầu tâm Q_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).

– Từ giả thiết ta suy ra mặt phẳng $(Q_iQ_jQ_k)$ song song với mặt phẳng chứa mặt $A_iA_jA_k$ của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ ($i \neq j \neq k \in \{1, 2, 3, 4\}$) và hai mặt phẳng này nằm cùng phía với tâm I mặt cầu nội tiếp tứ diện và cách I một khoảng lần lượt là $r - \rho$ và r. Do đó, mặt phẳng $(Q_iQ_jQ_k)$ là ảnh của mặt phẳng $(A_iA_jA_k)$ qua phép vị tự V_I^{λ} tâm I, tỉ số $\lambda = \dfrac{r-\rho}{r}$ ($\{i, j, k\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$)

– Mặt khác, mặt cầu (Q_5, ρ) tiếp xúc ngoài với bốn mặt cầu (Q_i, ρ) ($i = 1, 2, 3, 4$) nên các khoảng cách từ Q_5 đến Q_i ($i \neq 5$) đều bằng 2ρ ; hay nói khác đi, Q_5 là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $Q_1Q_2Q_3Q_4$.

Từ hai nhận xét trên ta đi đến kết luận : Phép vị tự V_I^{λ}, $\lambda = \dfrac{r-\rho}{r}$ biến tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ thành tứ diện $Q_1Q_2Q_3Q_4$ (vì các mặt của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ tương ứng biến thành các mặt của tứ diện $Q_1Q_2Q_3Q_4$ và do đó, biến tâm O mặt cầu $\mathscr{C}$ $(A_1A_2A_3A_4)$ thành tâm Q_5 mặt cầu $\mathscr{C}'(Q_1Q_2Q_3Q_4)$, đồng thời Q_5 thẳng hàng với I, O và xác định bởi hệ thức :

$$\overrightarrow{IQ_5} = \frac{r-\rho}{r}\overrightarrow{IO}$$

Nhận xét. 1) Tất cả các bài của các bạn tham gia giải bài toán trên đều giải đúng, duy chỉ có lời giải nêu trên là chặt chẽ và ngắn gọn hơn cả. Sở dĩ ngắn gọn hơn cả là ở chỗ bạn Tuyền đã biết sử dụng một *tính chất đặc trưng* của phép vị tự (hay còn gọi là *phép đồng dạng phối cảnh*). Đó là tính chất : phép vị tự biến một mặt phẳng thành một mặt phẳng song song với nó và do đó, biến một tứ diện thành một tứ diện có các mặt tương ứng song song. Đảo lại, hai tứ diện có các mặt tương ứng song song với nhau và không bằng nhau thì vị tự với nhau và đường thẳng nối các đỉnh tương ứng đồng quy ở tâm vị tự và tỉ số các cạnh, tương ứng bằng tỉ số vị tự.

2) Một số bạn còn chỉ ra rằng tính chất thẳng hàng của ba điểm I, O và Q_5 vẫn đúng khi bán kính của mặt cầu tâm Q_5 không bằng bán kính của bốn mặt cầu tâm Q_i ($i \neq 5$). Một số bạn còn nói rõ thêm sự tồn tại của 5 mặt cầu Q_i (cũng tức là chỉ ra cách dựng tâm các mặt cầu đó) và tính bán kính ρ của 5 mặt cầu bằng nhau

(Q_i) theo R và r từ hệ thức : $\dfrac{r-\rho}{r}=\dfrac{2\rho}{R}$ $(=\lambda)$

$\Rightarrow \rho = \dfrac{Rr}{R+2r}$.

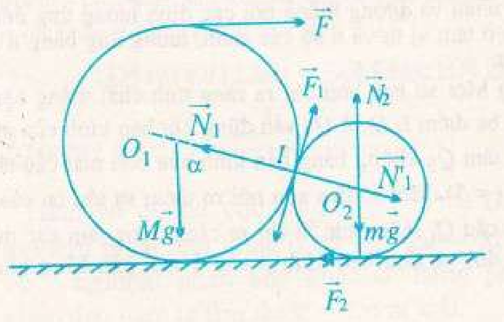
3) Ngoài bạn *Nguyễn Lâm Tuyền*, các bạn sau đây có lời giải tốt : **Hà Nội :** *Nguyễn Hoàng Thanh*, 11A1, PTCT ĐHSP Hà Nội ; *Trần Anh Tuấn, Vũ Quốc Mỹ*, 11A Toán, ĐHKHTN – ĐHSP Hà Nội ; **Bắc Ninh :** *Nguyễn Văn Thảo* , 11 Toán, THPT NK Hàn Thuyên, ; **Phú Thọ :** *Lê Việt Hà*, 10A1, *Hoàng NGọc Minh*, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương, *Nguyễn Ngọc Hà*, 12A, THPT Tam Nông ; **Thái Nguyên :** *Bùi Quang Hảo*, Toán 11, THPT chuyên Thái Nguyên ; **Lạng Sơn :** *Nguyễn Thanh Dũng*, 11A, THPT Chu Văn An ; **Hòa Bình :** *Vũ Hữu Phương*, 12C Toán, THPT ch. Hoàng Văn Thụ ; **Hải Dương :** *Nguyễn Tiến Thành*, 11 Lý, THPT ch. Nguyễn Trãi ; **Hải Phòng :** *Hoàng Thị Tuyết Mai*, 10 toán, THPT NK Trần Phú ; **Nghệ An :** *Lê Quốc Đô, Phan Tuấn Linh*, 11A, PTCT–T, ĐH Vinh , *Nguyễn Danh Tuấn*, 11A1, THPT Phan Bội Châu, Nghệ An ; **Quảng Ngãi :** *Nguyễn Huy Cung*, 12T2, *Đinh Vũ Quang*, 10T1, *Nguyễn Văn Thắng, Phạm Lê Thịnh*, 11T, THPT chuyên Lê Khiết ; **Cần Thơ :** *Nguyễn Minh Luân*, 8A, THCS Nguyễn Việt Hồng, *Mạnh Nguyệt Minh, Lưu Anh Tuấn*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Trần Võ Huy*, 11T, PTNK ĐHQG Tp. HCM ; **Đồng Nai :** *Lê Phương*, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/299. *Hai vật hình trụ cấu tạo đồng chất, cùng chiều cao có đường kính tiết diện là D, d, được đặt nằm, tiếp xúc nhau trên mặt phẳng ngang. Hệ số ma sát ở mọi mặt tiếp xúc là k. Quấn một sợi dây mảnh không dãn quanh trụ lớn và tác dụng vào đầu dây một lực $\vec{F}$ hướng nằm ngang (hình vẽ). Hệ số ma sát k phải có giá trị như thế nào để có thể di chuyển trụ lớn vượt qua trụ nhỏ ? Tính giá trị cần thiết của lực $\vec{F}$ để thực hiện được di chuyển trên. Biết D = 2d, khối lượng trụ lớn M = 10kg. Lấy g = 10m/s^2.*

Lời giải. Xét hệ ở trạng thái cân bằng giới hạn.

Các lực tác dụng vào mỗi vật như trên hình vẽ. Theo phương ngang ta có $F = F_2$. Với trụ



nhỏ, nó đứng yên nên ta có (đối với O_2) : $F_2.\dfrac{d}{2}=F_1\dfrac{d}{2} \Rightarrow F_1 = F_2 = F$. Từ các điều kiện $F_2 \le kN_2$, $F_1 \le kN_1 \Rightarrow F \le kN_2$ (1) và $F \le kN_1$ (2).

Lại xét trụ nhỏ, theo phương ngang ta có : $N_1\sin\alpha - F_2 - F_1\cos\alpha = 0 \Rightarrow N_1 = \dfrac{F(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}$.

Thế vào (2) ta được : $k \ge \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ (3)

Với trụ lớn, nó chỉ có thể vượt qua trụ nhỏ nếu quay quanh tâm tức thời I, do đó : $F(R + R\cos\alpha)$ $= MgR\sin\alpha \Rightarrow F = Mg\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ (4). Mặt khác $N_2 = (M + m)g$ nên kết hợp với (1) ta được : $k \ge \dfrac{M}{M+m}.\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ (5). Từ (3) và (5) suy ra : $k \ge \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$. Biết $\cos\alpha = \dfrac{R-r}{R+r}=\dfrac{D-d}{D+d} \Rightarrow \sin\alpha$ $= \dfrac{2\sqrt{Dd}}{D+d}$. Vậy $k \ge \sqrt{\dfrac{d}{D}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Từ (4) tìm được : $F = \sqrt{\dfrac{d}{D}}.Mg = 50\sqrt{2}$ (N)

Nhận xét. Các em có lời giải đúng :

Hà Tĩnh : *Lê Hữu Hà*, 11 Lí, *Lê Đức Đạt*, 12 Lí ; *Nguyễn Xuân Đức*, 11 Lí, THPT NK Hà Tĩnh ; **Bắc Ninh :** *Lê Duy Cường*, 10A1m THPT Yên Phong I ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Tuấn Linh*, 20A Mê Linh, Vĩnh Yên.

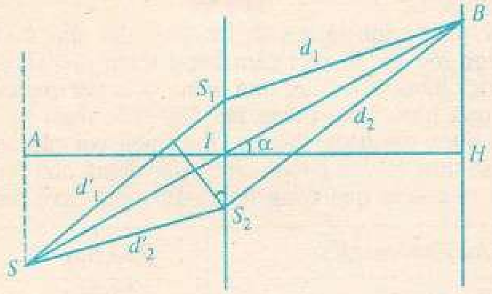
MAI ANH

Bài L2/299. *Trong thí nghiệm Iâng, khoảng cách hai khe là a = 1mm. Màn quan sát E song song, cách mặt phẳng chứa hai khe là D = 2m. Điểm A nằm trên đường trung trực của S_1S_2, cách trung điểm I của S_1S_2 là d = 40cm. Nguồn S phát ra ánh sáng đơn sắc, chuyển động tròn đều xung quanh A với bán kính quỹ đạo r = 2mm (coi r ≪ d) và vận tốc v = 3,14mm/s trong mặt phẳng chứa AI và vuông góc với mặt phẳng chứa hai khe ; ban đầu S ở trên IA.*

a) Hỏi vân sáng trung tâm dịch chuyển như thế nào ?

b) Ngay sau S_1, S_2 đặt hai bản mặt song song có bề dày và chiết suất tương ứng l_1 = 10μm, n_1 = 1,7 và l_2 = 5μm, n_2 = 1, 6. Hỏi vân trung tâm dịch chuyển như thế nào ?

Lời giải. a) Xét S ở vị trí như trên hình vẽ. Nối SI cắt màn tại B. Theo SGK vật lí 12 : $d_2 - d_1 \approx a\sin\alpha$. Từ hình vẽ ta có : $d'_2 - d'_1 \approx a\sin\alpha$; suy



ra hiệu đường đi của 2 tia SS_1B và SS_2B là : $(d_2 + d'_2) - (d_1 + d'_1) = 0 \Rightarrow$ tại B là vân sáng trung tâm. Khi S chuyển động tròn quanh tâm A, vì $r \ll d$, nên coi khoảng cách $SI \approx d = 40$cm = const. Theo phương song song với màn, ta coi S dao động điều hòa với phương trình $y = a\sin\omega t$ (do ban đầu S ở trên IA nên $\varphi = 0$), với a = 2mm; $\omega = \frac{v}{r} = \frac{\pi}{2}$ rad/s. Như vậy $y = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$(mm); Theo định lí Ta-lét ta có $y_1 = y\frac{D}{d} = 5y = 10\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$(mm) ; Vân sáng trung tâm dao động điều hòa xung quanh H với phương trình $y_1 = 10\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$(mm) .

b) Khi có bản mặt song song, đối với một vị trí của S (cho một vân sáng trung tâm), ánh sáng đi qua bản mặt song song tương đương với sự kéo dài đường đi của ánh sáng thêm một đoạn $l(n-1)$ so với khi không có bản mặt song song (chỉ xét những vân sáng gần trung tâm), do đó hiệu đường đi từ S tới một điểm nào đó, sau khi qua hai bản, kéo dài thêm $\Delta = l_2(n_2 - 1) - l(n_1 - 1)$. Đối với tất cả các vị trí của S thì hiệu đường đi từ S tới vân trung tâm đều dịch chuyển một đoạn như nhau so với khi không có bản mặt song song. Xét cụ thể vân trung tâm khi S ở trên AI, thì khi có các bản mặt song song, hiệu đường đi từ S tới một vân sáng B' trên màn là : $\Delta' = d'_2 - d'_1 = d_2 - d_1 + l_2(n_2 - 1) - l_1(n_1 - 1) = \frac{ax}{D} + l_2(n_2 - 1) - l_1(n_1 - 1)$. Suy ra độ dịch chuyển của vân trung tâm : $\Delta' = 0 \Rightarrow x_o = \frac{\left[l_1(n_1-1)-l_2(n_2-1)\right]D}{a}$ = 8mm. Như vậy, khi có hai bản mặt song song, khi S chuyển động tròn quanh A, vân trung tâm dao động điều hòa với phương trình $y_2 = 8 + 10\sin\frac{\pi}{2}t$ (mm) (gốc tại H).

Nhận xét. Các em có lời giải đúng :

Nghệ An : *Hồ Quốc Huy*, A7, K29, *Phạm Cung Sơn*, 11A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Thanh Phúc*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Hà Nội :** *Hoàng Ngọc Tuấn*, 11A2, THPT Dương Xá, Gia Lâm.

MAI ANH

SAI LẦM ... *(Tiếp trang 22)*

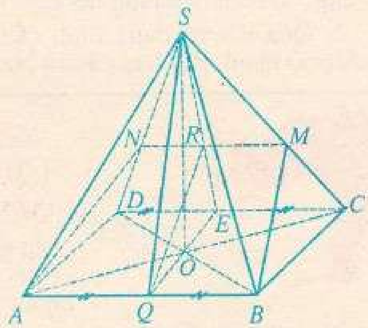
GIẢI THẾ NÀO ?

Trong cuốn *"Giới thiệu đề thi tuyển sinh năm 2000–2001"* có bài toán hình học không gian (câu Vb của trường ĐHSP Tp. Hồ Chí Minh, khối A, B)

Cho hình chóp tứ giác đều SABCD, cạnh đáy bằng a, mặt bên tạo với đáy một góc 60^o. Một mặt phẳng (P) qua AB tạo với mp(ABCD) một góc 30^o cắt SC, SD lần lượt tại M và N. Tứ giác ABMN là hình gì ? Tính diện tích tứ giác ABMN theo a ?

Lời giải như sau :

Gọi O là giao điểm của AC và BD ; Q, E lần lượt là trung điểm của AB, CD. Khi đó $\widehat{SQE} = 60^o$. Trong ΔSQE kẻ phân giác trong của $\widehat{SQE}$ cắt SE tại R ⇒ $\widehat{RQE} = 30^o$. Vậy mp(P) ≡ mp(RAB). Do AB//CD nên MN//CD. Dễ thấy AN = BM ⇒ Tứ giác ABMN là hình thang cân và :



$$S_{ABMN} = \frac{S_{ABCD}}{\cos\widehat{RQE}} = \frac{a^2}{\cos 30^o} = 2a^2$$

Nếu gặp phải bài toán này khi đi thi đại học, bạn có giải như thế không ? Vì sao ?

TRẦN VĂN TÂN
(Xóm 3, Hiệp Thượng, Hiệp Sơn, Kinh Môn, Hải Dương)

Cuộc chơi 2002 : AI BIẾT NHIỀU HƠN ?

Kết quả :

LỊCH SỬ PHÁT MINH SÁNG CHẾ

Các phát minh sáng chế, lớn hay nhỏ, nhiều khi bất ngờ lóe lên từ một cảm hứng thiên tài. Thông thường chúng đến đúng thời điểm và là kết quả của một quá trình hình thành lâu dài, theo đuổi hàng năm, thậm chí hàng thế kỉ. Giới thiệu với các bạn một số thiết bị văn phòng cùng với những nhà phát minh ra chúng qua bảng thống kê đúng dưới đây.

Thiết bị	*Năm ra đời*	*Nhà phát minh*	*Quê hương*
Bút chì	1794	N. J. Conté (Công–tê)	Pháp
Bút máy	1884	L.E Waterman (Oa–tơ–man)	Mỹ
Bút bi	1939	L. Biró (Bi–rô)	Hung–ga–ri
Máy tính quay tay	1642	Pascal Blaise (Pat–xcan)	Pháp
Máy chữ	1867	C.L Sholes (Sâu–lơ)	Mỹ

Các bạn sau có đáp án đúng được nhận tặng phẩm kì này :

Nguyễn Đình Tùng, Sở GD–ĐT Bạc Liêu, **Bạc Liêu,** *Nguyễn Trung Kiên*, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Quận Cầu Giấy, *Nguyễn Việt Dũng*, 11 Nga, THPT Hà Nội – Amsterdam, **Hà Nội,** *Nguyễn Thanh Thúy*, 10 Lý – Tin, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**, *Đinh Trang Quang*, GV trường Tiểu học Cộng hòa, Chí Linh, **Hải Dương.**

HOÀI THƯƠNG

QUẢ ĐẤT - SỐ VÀ HÌNH

1. Bạn yêu toán chắc cũng yêu các con số. Bạn hãy kể tên mười nước có dân số lớn nhất, mười nước có dân số nhỏ nhất thế giới cùng với số dân từng nước. Bạn hãy kể tên mười nước có diện tích lớn nhất, mười nước có diện tích nhỏ nhất thế giới cùng với diện tích từng nước.

2. Quả đất có dạng hình cầu, đường xích đạo chia nó thành Bắc bán cầu và Nam bán cầu. Bạn có biết con sông nào có thượng nguồn và cửa sông ở cùng một bán cầu còn khúc giữa sông lại nằm ở bán cầu khác ?

3. Đường kinh tuyến số 0 chia quả đất thành hai bán cầu Đông và Tây. Châu nào trên quả đất nằm ở cả Bắc bán cầu và Nam bán cầu, cả Đông bán cầu và Tây bán cầu ?

VKT

Giải đáp bài : LỜI GIẢI ĐÃ HOÀN HẢO CHƯA ?

Lời giải của bài toán chưa hoàn hảo ở chỗ : không hề đề cập gì đến điều kiện của bài toán : $x \in (-\pi, \pi)$. Đúng ra chúng ta phải tìm y để PT$y = f(x)$ (ẩn x) có nghiệm $x \in (-\pi, \pi)$.

Lời giải đúng : Đặt $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ $(-\infty < t < +\infty)$, hàm $y = \dfrac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4}$ trở thành hàm $g(t) = \dfrac{t^2+2t+2}{t^2-t+3}$ (1). GTLN, GTNN của hàm y trên $(-\pi, \pi)$ chính là GTLN, GTNN của hàm $g(t)$ trên **R**. Để tìm GTLN, GTNN của $g(t)$ trên **R**, ta chuyển về việc tìm miền giá trị của g (coi là tham số) để PT sau (ẩn t) có nghiệm :

$$(g-1)t^2 - (g-2)t + (3g-2) = 0 \qquad (2)$$

• Nếu : $g = 1$ thì $t = \frac{1}{3} \in \mathbf{R}$

• Nếu : $g \neq 1$ thì PT bậc hai (2) có nghiệm khi và chỉ khi :

$\Delta t \geq 0 \Leftrightarrow (g-2)^2 - 4(g-1)(3g-2) \geq 0$

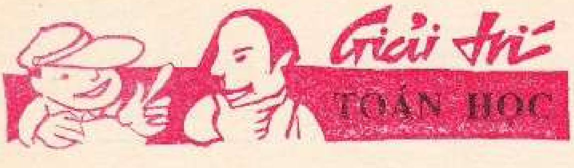
$\Leftrightarrow \frac{2}{11} \leq g \leq 2$. Tóm lại PT (2) có nghiệm

$\Leftrightarrow \frac{2}{11} \leq g \leq 2$. Vậy : $\max\limits_{x\in(-\pi,\pi)} y = 2$, $\min\limits_{x\in(-\pi,\pi)} y = \frac{2}{11}$.

Nhận xét. Các bạn có lời giải đáp đúng kì này là : *Hoàng Văn Chương*, 12C8, THPT Hải Hậu A, Hải Hậu, **Nam Định** ; *Lê Hoàng Nguyên*, 11A1, THPT Yên Định I, Yên Định, **Thanh Hóa** ; *Nguyễn Hòa*, 11A4, THPT Phan Đăng Lưu, *Hồ Văn Hòa*, 8 – Nguyễn Quang Bích, Tp. Huế, **Thừa Thiên – Huế** ; *Nguyễn Lê Nguyên Phương*, 11/20, THPT Phan Châu Trinh, **Đà Nẵng**.

NGỌC HIỂN

(Xem tiếp trang 21)



Giải đáp :

MỘT BÀI TOÁN CỦA EINSTEIN

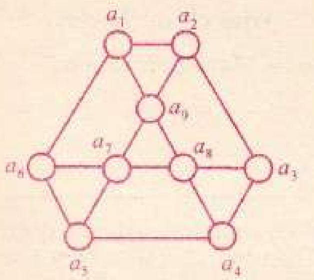
Gọi $a_1, a_2, ..., a_9$ là 9 số từ 1 đến 9 đặt trong các vòng tròn như hình vẽ, đồng thời gọi T là tổng các số ở ba đỉnh của một tam giác đều nào đó. Khi đó

$7T = 2(a_1+a_2+...+a_9) + (a_7+a_8+a_9) \Rightarrow T = 15.$

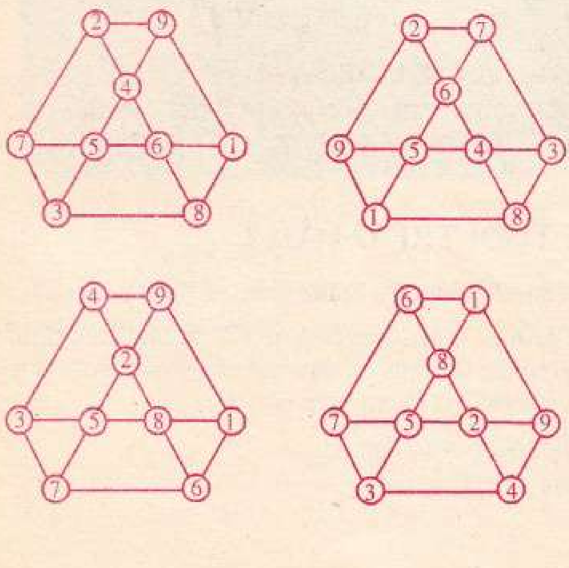
Do đó $(a_1+a_2+a_9) + (a_3+a_8+a_4) = 30$

$(a_2+a_3+a_7) + (a_7+a_8+a_9) = 30$

suy ra : $a_1 + a_4 = 2a_7$ (1) $\Rightarrow a_1+a_4$ là số chẵn hay a_1, a_4 cùng tính chẵn lẻ, tương tự mỗi cặp số : (a_2, a_5), (a_6, a_3) có cùng tính chẵn lẻ. Nhận thấy từ 1 đến 9 có 5 số lẻ, 4 số chẵn, nên các số ở 3 cặp (a_1, a_4), (a_2, a_5), (a_3, a_6) không thể đều lẻ, hay có ít nhất một cặp mà cả hai số đều chẵn.



Nếu có hai trong ba cặp nói trên là cặp chẵn, giả sử đó là : (a_1, a_4) ; (a_2, a_5) thì a_3, a_6, a_7, a_8, a_9 lẻ. Vì $a_5+a_6+a_7 = 15$, và a_6+a_7 là số chẵn nên a_5 lẻ (vô lí). Vậy chỉ có đúng một cặp trong 3 cặp (a_1, a_4), (a_2, a_5), (a_3, a_6) là cặp chẵn. Giả sử đó là : (a_1, a_4), lúc đó a_2, a_3, a_5, a_6 là các số lẻ. Mặt khác : $a_1 + a_2 + a_9 = 15$, $a_3 + a_4 + a_8 = 15 \Rightarrow a_8, a_9$ là các số chẵn $\Rightarrow a_7$ là số lẻ. Cũng từ giả thiết bài toán, ta có : $(a_2+a_3+a_7) + (a_6+a_5+a_7) = 30$



$\Rightarrow (a_2+a_3+a_5+a_6+a_7) + a_7 = 30$

$\Rightarrow (1+3+5+7+9) + a_7 = 30 \Rightarrow a_7 = 5.$

Từ (1) $\Rightarrow a_1+a_4 = 10 = a_8 + a_9$. Vì a_1, a_4, a_8, a_9 là các số chẵn, nghĩa là $a_1, a_4, a_8, a_9 \in \{2, 4, 6, 8\}$ nên có 4 cách điền cơ bản như trên, (nếu ta quay quanh tâm tam giác $a_7a_8a_9$ các góc $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 240^\circ$ thì được tất cả 24 cách điền số).

Nhận xét. Bài toán này được rất nhiều bạn tham gia giải. Đa số chỉ đưa ra một đến hai cách điền số mà không phân tích cách điền của mình. Các bạn có lời giải tốt hơn cả là : *Thân Anh Đức*, 8H, THCS Lê Quý Đôn, **Hà Nội** ; *Trần Mạnh Cường*, 9B, THPT Lê Hồng Phong, *Phan Thị Kim Hoa*, 11A1, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, **Yên Bái;** *Nguyễn Dựng*, 12A1, THPT Yên Phong I, Yên Phong, **Bắc Ninh** ; *Khổng Minh Thảo*, 11T, THPT Nguyễn Trãi, Tp. Hải Dương, **Hải Dương**.

HỒNG QUANG

SỐ CHẴN HAY SỐ LẺ ?

Bạn Thương viết tất cả các số nguyên từ 1 đến 2002. Sau đấy thay hai số nào đó bởi hiệu của chúng. Trong những số mới này, bạn ấy lại thay hai số nào đó bằng hiệu của chúng. Cứ thay như vậy mãi thì cuối cùng chỉ còn một số. *Sau 1 phút* bạn có thể cho biết số cuối cùng Thương nhận được là số chẵn hay lẻ không ?

NGUYỄN VĂN THIÊM
(Hà Nội)

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

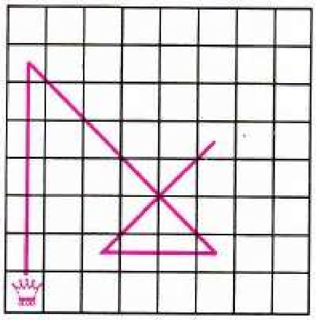
Năm thứ 39
Số 303 (9-2002)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

TOÁN HỌC MUÔN MÀU

ĐƯỜNG ĐI CỦA QUÂN HẬU

Trên bàn cờ vua kích thước 8×8 ô, mỗi bước đi từ ô này sang ô khác của quân Hậu được biểu thị bởi một đoạn thẳng theo hàng dọc hoặc hàng ngang hoặc đường chéo của các ô như ở hình 1.



Hình 1

DÀNH CHO BẠN ĐỌC

1) Hỏi quân Hậu xuất phát từ một ô góc bàn cờ (h. 1) cần đi liên tiếp ít nhất là bao nhiêu bước để lướt qua tất cả các ô của bàn cờ (mỗi ô ít nhất một lần) và trở về vị trí ban đầu. Hãy vẽ tất cả các đường đi như thế mà bạn tìm được.

2) Hãy phát biểu bài toán trên theo ngôn ngữ hình học.

Giải đáp : HÌNH NÀO NHIỀU CẠNH NHẤT ?

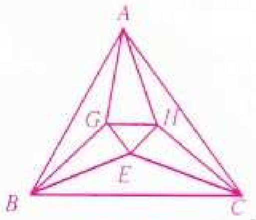
Với mỗi hình H_n (gồm n điểm không thẳng hàng và mọi đoạn thẳng không cắt nhau nối từng cặp điểm có thể nối được), ta gọi hình bao của H_n là đa giác tạo thành từ các cạnh của H_n sao cho mọi đỉnh và mọi cạnh của H_n đều nằm bên trong hoặc trên biên của hình bao này.

Mệnh đề 1. *Nếu H_n có số cạnh nhiều nhất thì hình bao của nó là hình tam giác.*

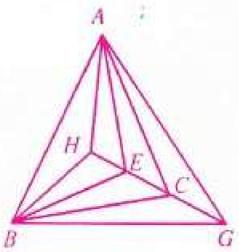
Giả sử trái lại ta sẽ dựng được hình có nhiều cạnh hơn : nếu hình bao là đa giác lõm thì vẽ thêm 1 cạnh ở phần lõm, nếu là đa giác lồi nhiều hơn 3 cạnh thì di chuyển tương đương $\mathcal{D}$ hai cạnh kề nhau vào phía trong đa giác để trở thành đa giác lõm rồi vẽ thêm 1 cạnh.

Mệnh đề 2. *Số cạnh nhiều nhất của H_n là $S(n) = 3n - 6$.*

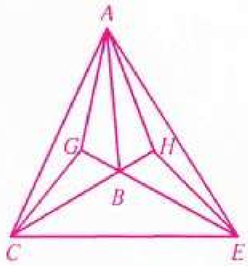
Dễ thấy $S(3) = 3$, $S(4) = 6$. Xét $n > 3$. Nếu tồn tại $S(n - 1) = 3(n - 1) - 6$ thì ta thêm 1 điểm vào bên trong một tam giác nào đó, điểm này nối với 3 đỉnh của tam giác đó tạo thành 3 cạnh mới nên tồn tại hình H_n có số cạnh là $3(n - 1) - 6 + 3 = 3n - 6$. Vậy $S(n) \geq 3n - 6$ (1).



Hình 2

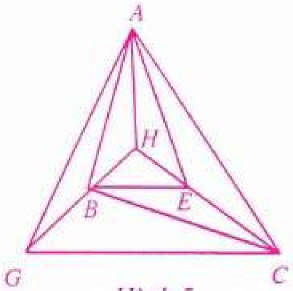


Hình 3

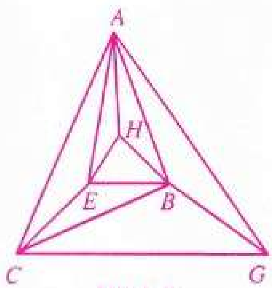


Hình 4

Giả sử tồn tại hình H_n có số cạnh nhiều nhất là $S(n)$. Khi bỏ đi 1 đỉnh nào đó, đỉnh đó phải nối với ít nhất 3 đỉnh (do yêu cầu không để sót cạnh nào) nên $S(n) \leq S(n - 1) + 3$. Lập luận tương tự có $S(n) \leq S(n - 1) + 3.1 \leq S(n - 2) + 3.2 \leq ... \leq S(3) + 3(n - 3) = 3n - 6$ (2).



Hình 5



Hình 6

Từ (1) (2) suy ra $S(n) = 3n - 6$. Ta có $S(6) = 12$.

Gọi số cạnh xuất phát từ đỉnh A là $d(A)$ thì $d(A)$ không đổi (bất biến) qua phép tương đương $\mathcal{D}$. Có tất cả 5 hình H_6 không tương đương $\mathcal{D}$. Ở hình 2 thì $d(A) = d(B) = d(C) = d(E) = d(G) = d(H) = 4$. Còn ở các hình 3, 4, 5, 6 thì $d(A) = d(B) = 5$, $d(C) = d(E) = 4$, $d(G) = d(H) = 3$.

Các bạn sau có lời giải tốt được nhận tặng phẩm :

1) *Văn Đỗ Phúc Anh*, 11/6 THPT Nguyễn Đình Chiểu, **Bến Tre**.

2) *Bùi Văn Đại*, 12T, PTCT, ĐHKHTN - ĐHQG **Hà Nội**

3) *Nguyễn Bá Đại*, xóm Đảo, xã Nghĩa Hòa, Nghĩa Đàn, **Nghệ An**.

PHI PHI

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

SÁCH THAM KHẢO BỔ TRỢ VÀ CHỌN LỌC

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

Tên sách	*Giá bìa (đồng)*
LỚP 6	
Phương pháp dạy học toán ở trường THCS	13.000
Để học tốt Toán 6	15.900
Nâng cao và phát triển Toán 6/1	7.500
Nâng cao và phát triển Toán 6/2	7.500
Luyện giải và ôn tập Toán 6/1	7.500
Luyện giải và ôn tập Toán 6/2	7.500
Hướng dẫn làm bài tập Toán 6/1	6.700
Hướng dẫn làm bài tập Toán 6/2	11.000
Tài liệu bồi dưỡng Số và Đại số 6	11.300
LỚP 7	
Toán nâng cao Đại 7	8.800
Toán nâng cao Hình 7	9.300
Một số vấn đề phát triển Đại số 7	6.200
Một số vấn đề phát triển Hình học 7	6.000
Để học tốt Đại số 7	11.000
Để học tốt Hình học 7	14.200
Ôn tập Đại số 7	6.500
Ôn tập Hình học 7	7.600
Tài liệu bồi dưỡng Hình 7	5.300

Tên sách	*Giá bìa (đồng)*
LỚP 8	
Toán nâng cao Đại 8	6.500
Một số vấn đề phát triển Đại số 8	10.800
Một số vấn đề phát triển Hình học 8	11.000
Để học tốt Hình học 8	21.000
Vẽ thêm yếu tố phụ để giải Hình 8	9.000
LỚP 9	
Toán nâng cao Đại 9	11.000
Rèn luyện kĩ năng giải toán Hóa 9	9.000
Tài liệu bồi dưỡng học sinh giỏi Hình học 9	12.400
Tài liệu bồi dưỡng học sinh giỏi Đại số 9	15.000
Sổ tay Toán – Lí – Hóa	4.200
Một số phát triển Đại số 9	11.500
Một số phát triển Hình học 9	13.400
Để học tốt Đại số 9	13.000
Để học tốt Hình học 9	15.000
Các bài toán điển hình Hình học 9	10.200
Xây dựng hình học bằng phương pháp tiên đề	7.800

LÍ - HÓA - SINH TRUNG HỌC CƠ SỞ

Tên sách	*Giá bìa (đồng)*
Hướng dẫn làm bài tập Vật lí 6	3.000
Vở bài tập Vật lí 6	5.000
Vở bài tập Sinh 6	3.500
Hướng dẫn làm bài tập Vật lí 7	4.800
Ôn tập Vật lí 7	2.500
Hướng dẫn và ôn tập Sinh 7	6.000
Giải toán Vật lí 7	4.000

Tên sách	*Giá bìa (đồng)*
Bài tập Vật lí nâng cao 7	5.700
Hướng dẫn và ôn tập Sinh 8	5.000
Rèn kĩ năng giải toán Hóa 8	10.200
Tài liệu bồi dưỡng Vật lí 8	7.000
Bài tập Vật lí nâng cao 8	7.500
Ôn tập Hóa 9	4.900
Bồi dưỡng Hóa học trung học cơ sở	13.400

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT05M2

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 187B phố Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2002

Giá : 3000đ
Ba nghìn đồng