Thầy Nhi

# TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

12 2007 Số 366

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 44

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04)5121607; ĐT-Fax Phát hành, Trị sự: (04)5144272, (04)5121606

*Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn* *Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoctuoitre*

1957-2007

50 NĂM

**Chào mừng 50 năm NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC**

## SÁCH ĐANG PHÁT HÀNH

### *Tuyển chọn theo chuyên đề* TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

**QUYỂN 1** (tái bản) — 300 trang, khổ 19x26,5cm. Giá bán lẻ: 34.000 đồng.

**QUYỂN 2** (tái bản) — 252 trang, khổ 19x26,5cm. Giá bán lẻ: 30.000 đồng.

### ẨN SAU ĐỊNH LÍ PTÔLÊMÊ

(tái bản) — 164 trang, khổ 17x24cm. Giá bán lẻ: 21.500 đồng.

### CÁC BÀI THI OLYMPIC TOÁN THPT VIỆT NAM (1990-2006)

Sách gồm các đề thi và hướng dẫn giải các bài toán thi chọn học sinh giỏi Toán Quốc gia THPT (Bảng A và bảng B) từ 1990 đến 2006. Sách cũng đăng các đề thi chọn đội tuyển Toán Quốc gia Việt Nam dự thi Olympic Toán Quốc tế từ 1990 đến 2006. Trong sách còn giới thiệu danh sách và thành tích của đoàn Việt Nam dự thi Olympic Toán Quốc tế từ lần đầu dự thi (năm 1974) đến nay.

Sách dày 284 trang, khổ 17x24cm. Giá bán lẻ: 39.500đồng.

## SÁCH SẮP PHÁT HÀNH

### ĐÓNG TẬP THTT năm 2007

Tất cả 12 số tạp chí của năm 2007 được đóng thành một tập ngoài có bìa cứng. Đây là cách để lưu giữ tạp chí tốt nhất, có hệ thống và tiện tra cứu đối với các thư viện, các thầy cô giáo và các bạn yêu Toán. Do số lượng có hạn, bạn cần đăng kí ngay với Tòa soạn nếu muốn có cuốn sách này.

Giá bán lẻ : 75.000 đồng.

### *Tuyển chọn theo chuyên đề* TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ — QUYỂN 3 (Mới)

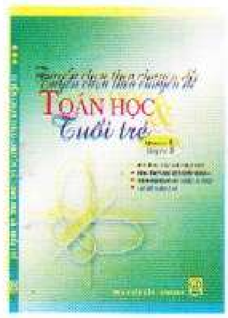
Sách chọn lọc các bài viết và đề toán đã đăng trên tạp chí THTT gồm ba chương:

*Chương I:* **Khai thác các bài toán THCS**, giới thiệu các phương pháp giải toán cực trị đại số và nêu ra những sai lầm tế nhị, cách rèn luyện tư duy qua giải toán hình học phẳng.

*Chương II:* **Nhìn bài toán từ nhiều hướng**, nêu các ý kiến trao đổi về vấn đề nghiệm bội, nghiệm kép của phương trình, mối liên hệ giữa đường thẳng và ba đường cônic, mở rộng bài toán con bướm và mở rộng một số tính chất hình phẳng sang hình không gian.

*Chương III:* Giới thiệu **100 đề toán hay** cùng với lời giải được tuyển chọn từ các đề toán đã đăng trên THTT các năm 1996, 1997.

Sách dày 252 trang, khổ 19x26,5cm. **Giá bán lẻ: 34.000 đồng**.



**Các đơn vị mua nhiều xin gửi phiếu đặt mua sách (có kí tên đóng dấu) về tòa soạn theo địa chỉ:**

**TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ, 187B GIẢNG VÕ, HÀ NỘI**

**Mua từ 10 quyển trở lên được trừ phí phát hành. Để biết thông tin chi tiết xin liên hệ:**

**ĐT/FAX: 04.5144272-04.5121606; Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn**

# NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC
## 50 năm xây dựng, đổi mới và phát triển

Ông NGÔ TRẦN ÁI
Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm Tổng Giám đốc NXBGD

Nhà xuất bản Giáo dục (NXBGD) được thành lập ngày 1/6/1957 với 3 phòng và 20 cán bộ nhân viên. Trong quá trình 50 năm xây dựng và phát triển, với quy mô ngày càng mở rộng, cơ cấu tổ chức hoạt động ngày càng được hoàn thiện và đổi mới theo mô hình Công ti mẹ - Công ti con, đến nay hệ thống Công ti mẹ - Công ti con NXBGD gồm 33 đơn vị và gần 2000 cán bộ nhân viên, phần lớn có trình độ đại học và trên đại học...

Trong 50 năm qua NXBGD đã luôn kiên trì thực hiện phương châm *lấy phục vụ nhiệm vụ chính trị làm mục đích, kinh doanh làm phương tiện,* giữ ổn định giá SGK và các sản phẩm giáo dục trong nhiều năm, đảm bảo học sinh ở mọi vùng miền trên địa bàn cả nước có đủ SGK để học; NXBGD đã hoàn thành xuất sắc nhiệm vụ xuất bản - in - phát hành SGK, tranh ảnh giáo khoa, băng đĩa CD giáo khoa, thiết bị dạy học tập đáp ứng cho từng giai đoạn phát triển của giáo dục, phục vụ cho việc giảng dạy và học tập ở mọi ngành, mọi bậc học từ mầm non tới đại học, sau đại học. Trong 50 năm qua NXBGD đã xuất bản trên 48000 đầu sách các loại với trên 3 tỉ bản sách nhưng không hề có bản sách hoặc xuất bản phẩm nào có nội dung sai phạm về tư tưởng chính trị, về quan điểm học thuật, luôn giữ vững uy tín đối với bạn đọc về chất lượng xuất bản phẩm của mình và phấn đấu về mặt hình thức, mĩ thuật SGK của nước ta không thua kém SGK của các nước phát triển. Ở từng đơn vị và trong toàn hệ thống NXBGD luôn giữ vững là khối đoàn kết nhất trí, phát huy dân chủ nội bộ. NXBGD luôn quan tâm và phát triển đội ngũ tác giả, cộng tác viên. Ngoài ra, NXBGD đã tích cực đẩy nhanh các hoạt động xã hội khác như : tham gia thực hiện kiên cố hoá trường học, tặng sách cho thư viện, lập quỹ học bổng tặng học sinh nghèo, học sinh giỏi, phụng dưỡng Bà mẹ Việt Nam Anh hùng... NXBGD luôn mở rộng hợp tác với các nhà xuất bản trong cả nước, các tổ chức quốc tế và các nhà xuất bản nước ngoài trong lĩnh vực xuất bản nhằm đa dạng hoá xuất bản phẩm và tạo điều kiện bồi dưỡng cán bộ về chuyên môn, nghiệp vụ xuất bản.

Với những thành tích đáng ghi nhận trên đây, NXBGD đã được tặng thưởng nhiều phần thưởng cao quý :

- Hai Huân chương Lao động hạng Ba (năm 1967, 1977)
- Huân chương Lao động hạng Nhất (năm 1982)
- Huân chương Độc lập hạng Ba (năm 1987)
- Huân chương Độc lập hạng Nhì (năm 1992)
- Huân chương Độc lập hạng Nhất (năm 2002)
- Cờ Thi đua của Chính phủ (năm 2005)
- Cờ Thi đua Xuất sắc của Bộ Giáo dục và Đào tạo (năm 2002)
- Cờ Thi đua Xuất sắc của Bộ Văn hoá - Thông tin (năm 2002, 2005)
- Cờ Thi đua của Tổng Liên đoàn Lao động Việt Nam (năm 2005)
- Giải thưởng do Tổ chức hỗ trợ Doanh nghiệp Quốc tế (BID) có trụ sở tại Madrid Tây Ban Nha trao tặng:

+ Ngôi sao Vàng chất lượng Quốc tế (năm 2001, trao tặng tại Cộng hòa Thụy Sĩ)

+ Ngôi sao Bạch kim chất lượng Quốc tế (năm 2004, trao tặng tại CHLB Đức)

+ Vương miện Kim cương chất lượng Quốc tế (năm 2006, trao tặng tại Vương quốc Anh).

- Nhiều giải thưởng Sách đẹp, Sách hay của Bộ Văn hoá - Thông tin và Hội Sách Quốc tế (năm 2003, 2007). Giải thưởng Sách Việt Nam do Hội Xuất bản Việt Nam trao tặng (năm 2006)
- 19 Bằng khen do các bộ, ban, ngành, tổ chức trao tặng.

Với nền tảng 50 năm xây dựng, phát triển và đổi mới, cùng với việc quán triệt đường lối, chủ trương của Đảng về Giáo dục và Đào tạo, sự quan tâm chỉ đạo của Bộ Giáo dục và Đào tạo và sự nỗ lực phấn đấu vươn lên không ngừng, NXBGD sẽ đủ tiềm lực và tự tin sánh vai ngang tầm với các NXB khác trong khu vực và quốc tế; mãi luôn là đơn vị hậu cần không thể thay thế của ngành Giáo dục và Đào tạo trong sự nghiệp trồng người của đất nước.

THANH KHIẾT - VĨNH LINH


TRUNG HỌC CƠ SỞ

# Sử dụng HẰNG ĐẲNG THỨC $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$ để giải phương trình

VŨ VĂN DŨNG
(GV THCS Nam Sơn, Nam Trực, Nam Định)

Trong chương trình toán THCS, giải phương trình là dạng toán cơ bản và khó, thường gặp trong các kì thi học sinh giỏi và thi vào lớp 10. Có rất nhiều phương pháp giải phương trình như dùng ẩn phụ, đưa về phương trình tích, dùng bất đẳng thức, quy về phương trình bậc hai... trong đó có khá nhiều phương trình nếu biết sử dụng các hằng đẳng thức

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$$

thì việc giải phương trình sẽ trở nên đơn giản, ngắn gọn và rất hiệu quả. Bài viết này giới thiệu một số dạng cơ bản của những phương trình thuộc loại này.

## DẠNG 1. PT quy về dạng $(A \pm B)^2 = 0 \Leftrightarrow A \pm B = 0$

✪**Thí dụ 1.** *Giải phương trình*

$$x^2(x^4-1)(x^2+2)+1=0 \qquad (1)$$

***Lời giải.***

$$\begin{aligned}\text{PT (1)} &\Leftrightarrow x^2(x^2+1)(x^2-1)(x^2+2)+1=0\\ &\Leftrightarrow (x^4+x^2)(x^4+x^2-2)+1 = 0\\ &\Leftrightarrow (x^4+x^2)^2-2(x^4+x^2)+1 = 0\\ &\Leftrightarrow (x^4+x^2-1)^2 = 0\\ &\Leftrightarrow x^4+x^2-1 = 0.\end{aligned}$$

Giải phương trình trùng phương trên ta được tập nghiệm của PT (1) là $\left\{-\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}, \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}\right\}$. ❐

✪**Thí dụ 2.** *Giải phương trình*

$$20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2+5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2-20\frac{x^2-4}{x^2-1}=0 \qquad (2)$$

***Lời giải.*** Điều kiện: $x \neq \pm 1$.

Đặt $\dfrac{x-2}{x+1}=y$, $\dfrac{x+2}{x-1}=z$. PT (2) có dạng

$$20y^2+5z^2-20yz=0$$

$$\Leftrightarrow 5(2y-z)^2=0 \Leftrightarrow 2y=z.$$

Dẫn đến $2.\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{x+2}{x-1}$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow 2(x-2)(x-1) = (x+2)(x+1)\\ &\Leftrightarrow 2x^2-6x+4 = x^2+3x+2\\ &\Leftrightarrow x^2-9x+2 = 0\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{9+\sqrt{73}}{2}$ và $x=\dfrac{9-\sqrt{73}}{2}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy tập nghiệm của PT (2) là

$$\left\{\frac{9+\sqrt{73}}{2}; \frac{9-\sqrt{73}}{2}\right\}. ❐$$

✪**Thí dụ 3.** *Giải phương trình*

$$x^2+2=2\sqrt{x^3+1} \qquad (3)$$

***Lời giải.*** Điều kiện : $x \geq -1$.

Thêm và bớt $x$ ở vế trái (3) để xuất hiện hằng đẳng thức

$$\Leftrightarrow x+1+x^2-x+1-2\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x+1}$$

$$\Leftrightarrow x+1=x^2-x+1$$

$\Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow x=0$ và $x=2$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy tập nghiệm của PT(3) là $\{0; 2\}$. ❐

## DẠNG 2. PT quy về dạng

$$(A \pm B)^2 = (C \pm D)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A \pm B = C \pm D \\ A \pm B = -(C \pm D)\end{array}\right.$$

**Thí dụ 4.** *Giải phương trình*

$$x^4 = 24x + 32 \qquad (4)$$

***Lời giải.*** Thêm $4x^2 + 4$ vào hai vế của phương trình (4) ta được

$$x^4 + 4x^2 + 4 = 4x^2 + 24x + 36$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2)^2 = (2x+6)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2 = 2x+6 \\ x^2+2 = -2x-6 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{ll} x^2-2x-4=0 & \text{(i)} \\ x^2+2x+8=0 & \text{(ii)} \end{array}\right.$$

PT (i) có hai nghiệm $x = 1 \pm \sqrt{5}$; PT (ii) vô nghiệm. Vậy tập nghiệm của PT (4) là $\{1+\sqrt{5}; 1-\sqrt{5}\}$. ❒

**DẠNG 3. PT quy về dạng**

$$(A \pm B)^2 + (C \pm D)^2 + (E \pm F)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A \pm B = 0 \\ C \pm D = 0 \\ E \pm F = 0 \end{cases}$$

**Thí dụ 5.** *Giải phương trình*

$$x + y + z + 4 = 2\sqrt{x-2} + 4\sqrt{y-3} + 6\sqrt{z-5} \quad (5)$$

***Lời giải.*** Điều kiện $x \ge 2$, $y \ge 3$, $z \ge 5$.

$$\text{PT}(5) \Leftrightarrow x - 2 - 2\sqrt{x-2} + 1 + y - 3 - 4\sqrt{y-3}$$

$$+4 + z - 5 - 6\sqrt{z-5} + 9 = 0$$

$$\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2 + \left(\sqrt{y-3}-2\right)^2 + \left(\sqrt{z-5}-3\right)^2 = 0.$$

Vế trái của PT là tổng của ba biểu thức không âm nên sẽ bằng 0 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sqrt{x-2} = 1 \\ \sqrt{y-3} = 2 \\ \sqrt{z-5} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=1 \\ y-3=4 \\ z-5=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=7 \\ z=14 \end{cases}$$

(thỏa mãn điều kiện).

Vậy nghiệm của phương trình là $(x;y;z) = (3;7;14)$. ❒

**DẠNG 4. PT nghiệm nguyên quy về dạng $(A \pm B)^2 \le p$ với $A$, $B$ nguyên và $p$ nguyên dương**

**Thí dụ 6.** *Tìm nghiệm nguyên của PT*

$$2x^2 + 2y^2 - 2xy + x + y - 10 = 0 \qquad (6)$$

***Lời giải.*** Đặt $S_1 = x + y$, $S_2 = xy$ thì PT (6) có dạng

$$2S_1^2 - 6S_2 + S_1 - 10 = 0 \Leftrightarrow S_2 = \frac{1}{6}(2S_1^2 + S_1 - 10).$$

Do $S_2 \in \mathbb{Z}$ nên $S_1 \,\vdots\, 2$.

Mặt khác $(x-y)^2 \ge 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 4xy \ge 0$

$$\Leftrightarrow S_2 \le \frac{S_1^2}{4}.$$

Do đó $\frac{1}{6}(2S_1^2 + S_1 - 10) \le \frac{S_1^2}{4}$.

$$\Leftrightarrow S_1^2 + 2S_1 - 20 \le 0 \Leftrightarrow (S_1+1)^2 \le 21.$$

Vì $S_1$ là số nguyên chẵn nên $(S_1+1)^2 \in \{1; 9\}$. Do đó $S_1 \in \{-4; -2; 0; 2\}$.

Muốn cho $S_2 = \frac{1}{6}(2S_1^2 + S_1 - 10)$ là số nguyên ta chỉ chọn được $\begin{cases} S_1 = -4 \\ S_2 = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} S_1 = 2 \\ S_2 = 0. \end{cases}$

Do đó $\begin{cases} x+y=-4 \\ xy=3 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=0. \end{cases}$

Giải hai hệ này ta tìm được các nghiệm nguyên $(x;y)$ của PT (6) là $(-1;-3)$, $(-3;-1)$, $(0;2)$, $(2;0)$. ❒

*Nhận xét.* Việc sử dụng hằng đẳng thức $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$ để giải phương trình mang lại một lời giải ngắn gọn, hiệu quả. Tuy nhiên cần linh hoạt sáng tạo để tìm cách giải hợp lí cho từng trường hợp cụ thể.

Cuối cùng các bạn hãy vận dụng phương pháp nêu trên để giải một số bài toán sau đây.

***Bài 1.*** Giải các phương trình:

a) $x^4 + \sqrt{x^2 + 1995} = 1995$;

b) $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12) + x^2 = 0$;

c) $x + \sqrt{x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}} = 2$;

***Bài 2.*** Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^6 + 3x^3 + 1 = y^4.$$

***Bài 3.*** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx \\ x^{2007} + y^{2007} + z^{2007} = 3^{2008}. \end{cases}$$

# Lời giải đề thi vào lớp 10
# TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI, HẢI DƯƠNG
## NĂM HỌC 2007-2008
(Đề thi đăng trên THTT số 364, tháng 10 năm 2007)

**Câu 1.** 1) Vì $\sqrt{2}a^2 = 1 - a$ nên $0 < a < 1$, và $a^4 = \dfrac{1-2a+a^2}{2}$. Ta có

$$A = \frac{(2a-3)\left(\sqrt{2(2a^4-2a+3)}-2a^2\right)}{4a^4-4a+6-4a^4}$$
$$= a^2 - \sqrt{a^4 - a + \frac{3}{2}}$$
$$= \frac{1-a}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{1-2a+a^2}{2} - a + \frac{3}{2}}$$
$$= \frac{1-a}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{a^2-4a+4}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2) ĐK $a \neq \pm b\sqrt{3}$. Từ giả thiết đề bài ta có

$\dfrac{a-5b\sqrt{3}}{a^2-3b^2} = 7 - 20\sqrt{3}$, suy ra

$\dfrac{a}{a^2-3b^2} = 7$ và $\dfrac{5b\sqrt{3}}{a^2-3b^2} = 20\sqrt{3}$.

Từ đó $a = \dfrac{7}{4}b$. Suy ra $\dfrac{7b}{4} = 7\left(\dfrac{49b^2}{16} - 3b^2\right)$

$\Rightarrow \dfrac{b}{4} = \dfrac{b^2}{16} \Rightarrow b = 4$ ($b = 0$ không thỏa mãn).

Lúc này $a = 7$.

**Câu 2.** Ta thấy $(x\,;\,y) = (0\,;\,0)$ không phải là nghiệm của hệ đã cho. Chia cả hai vế của từng PT trong hệ này ta được

$$\begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(y+\dfrac{1}{y}\right)+8=0 \\[2ex] \dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{y}} = -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Đặt $x + \dfrac{1}{x} = u$; $y + \dfrac{1}{y} = v$. Giải hệ với ẩn $u$, $v$, tìm được $(u\,;\,v) = (4\,;\,-2)$ và $(u\,;\,v) = (-2\,;\,4)$.

*Kết luận:* Hệ đã cho có nghiệm $(x\,;\,y)$ là $(2+\sqrt{3};-1)$, $(2-\sqrt{3};-1)$, $(-1;2+\sqrt{3})$ ; $(-1;-2-\sqrt{3})$.

**Câu 3.** 1) Giả sử $0 < a \leq b$, khi đó $c = \sqrt{a^2+b(b-a)} \geq a$, hay $a - c \leq 0$.

Lại có $c = \sqrt{b^2+a(a-b)} \leq b$, nên $b - c \geq 0$.

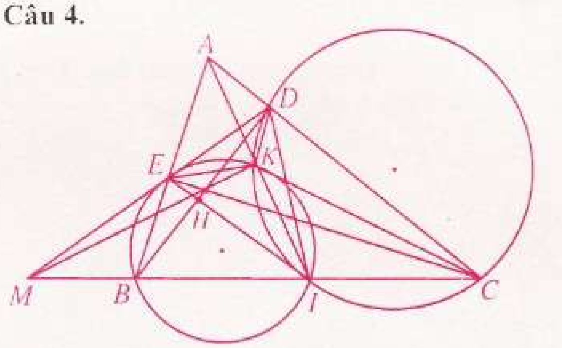
Vậy $(a-c)(b-c) \leq 0$. Suy ra
$\Delta' = 1 - (a-c)(b-c) > 0$ (đpcm).

2) Vì PT đã cho có hai nghiệm dương nên $1 - 4p \geq 0 \Rightarrow 0 < p \leq \dfrac{1}{4}$ (1). Sử dụng công thức Viète có $x_1 + x_2 = 1$; $x_1.x_2 = p$. Do đó

$$x_1^4 + x_2^4 - x_1^5 - x_2^5 = x_1^4(1-x_1) + x_2^4(1-x_2)$$
$$= x_1^4x_2 + x_2^4x_1 = x_1x_2\left(x_1^3+x_2^3\right) = x_1x_2(1-3x_1x_2)$$
$$\leq \frac{1}{3}\left(\frac{3x_1x_2+1-3x_1x_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1x_2 = \dfrac{1}{6}$, hay $p = \dfrac{1}{6}$ (thỏa mãn điều kiện (1)).

**Câu 4.**




1) Ta có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \widehat{EKD} + \widehat{EKI} + \widehat{IKD} = 540^\circ$, mà $\hat{B} + \widehat{EKI} = \hat{C} + \widehat{IKD} = 180^\circ$ nên $\hat{A} + \widehat{EKD} = 180^\circ$, suy ra tứ giác $AEKD$ nội tiếp. Từ giả thiết bài ra thấy $A$, $E$, $H$, $K$, $D$ cùng nằm trên một đường tròn, dẫn đến $\widehat{BDK} = \widehat{CEK}$.

2) Ta thấy $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$, $\widehat{AKE} = \widehat{ADE}$, suy ra $\widehat{AKE} = \widehat{ABC}$, nên $\widehat{AKE} + \widehat{EKI} = 180^\circ$, nghĩa là

$A, K, I$ thẳng hàng. Lại có $\widehat{IKC} = \widehat{IDC} = \widehat{ICD}$, $\widehat{IKC} = \widehat{KAC} + \widehat{ACK}$; $\widehat{ICD} = \widehat{ICK} + \widehat{KCD}$ $\Rightarrow \widehat{KAC} = \widehat{ICK}$, $\widehat{KAD} = \widehat{DEK}$ $\Rightarrow \widehat{DEK} = \widehat{ICK}$, vậy tứ giác $MEKC$ nội tiếp; do đó $\widehat{MEC} = \widehat{MKC}$, vì $\widehat{IKC} = \widehat{AED} = \widehat{MEB}$; $\widehat{MEC} = \widehat{MEB} + 90^o$; $\widehat{MKC} = \widehat{MKI} + \widehat{IKC} \Rightarrow \widehat{MKI} = 90^o$. $A, E, H, D, K$ nằm trên đường tròn đường kính $AH$ nên $\widehat{HKA} = 90^o$. Vậy $K, H, M$ thẳng hàng.

3) Tứ giác $DEHK$ nội tiếp nên $\widehat{HEK} = \widehat{HDK}$ (1)

Tứ giác $MEKC$ nội tiếp nên $\widehat{KEC} = \widehat{KMC}$ (2)

Từ (1) và (2) có $\widehat{KMB} = \widehat{HDK}$, suy ra tứ giác $MBKD$ nội tiếp.

**Câu 5.** (Bạn đọc tự vẽ hình).

Chia lục giác đều thành sáu tam giác đều có cạnh 1. Có 19 điểm nằm trong lục giác đều nên có ít nhất một tam giác chứa ít nhất 4 trong 19 điểm đã cho.

• Giả sử 4 điểm đó là $A, B, C, D$ được sắp xếp là một tứ giác lồi. Lúc đó do $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^o$ nên có ít nhất một góc không vượt quá $90^o$. Giả sử góc đó là $\hat{A}$, khi đó $\widehat{BAC} + \widehat{CAD} \le 90^o$ nên trong hai góc $\widehat{BAC}, \widehat{CAD}$ có ít nhất một góc không vượt quá $45^o$. Giả sử góc $\widehat{BAC} \le 45^o$, suy ra $\Delta ABC$ thỏa mãn có góc $\le 45^o$.

• Trường hợp 4 điểm $A, B, C, D$ được sắp thành tứ giác lõm, giả sử $C$ nằm trong $\Delta ABD$. Xét hai trường hợp

1) $\widehat{BCD} \ge 90^o \Rightarrow \widehat{CBD} + \widehat{CDB} \le 90^o$, lúc đó có ít nhất một trong hai góc $\widehat{CBD}, \widehat{CDB} \le 45^o$ suy ra $\Delta BCD$ thỏa mãn có góc $\le 45^o$.

2) $\widehat{BCD} < 90^o \Rightarrow \widehat{BAD} < 90^o$, lúc đó $\widehat{BAC}, \widehat{CAD}$ có một góc $\le 45^o$.

Giả sử $\widehat{BAC} \le 45^o$ khi đó $\Delta ABC$ có một góc $\le 45^o$. Tam giác đều có cạnh bằng 1, bán kính đường tròn ngoại tiếp là $\frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{3}{5}$. Vậy luôn tồn tại một tam giác thỏa mãn điều kiện đề bài.

NGUYỄN BÁ ĐANG
*(Sở GD-ĐT Hải Dương)*
Sưu tầm và giới thiệu

# ĐỀ THI VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN Lê Quý Đôn, Bình Định

## NĂM HỌC 2007-2008

***(Thời gian làm bài : 150 phút)***

**Câu 1.** (1,5 *điểm*)

Cho $x > y$ và $xy = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2 + y^2}{x - y} \ge 2\sqrt{2}.$$

**Câu 2.** (3,5 *điểm*)

Giải các phương trình sau:

a) $x^2 + x - 2 = |x|$,

b) $\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 2\sqrt{x^2 - x + 1} = 9x - 3$.

**Câu 3.** (2 *điểm*)

Chứng minh rằng nếu các số thực $x, y, a, b$ thỏa mãn các điều kiện $x + y = a + b$ và $x^4 + y^4 = a^4 + b^4$ thì $x^n + y^n = a^n + b^n$, với mọi số nguyên dương $n$.

**Câu 4.** (3 *điểm*)

Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$. Dựng hình chữ nhật $MNPQ$ sao cho $M, N$ là các điểm trên cạnh $BC$, còn $P, Q$ lần lượt là các điểm trên cạnh $AC, AB$. Gọi $R_1, R_2$ và $R_3$ theo thứ tự là bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác $BQM, CPN$ và $AQP$. Chứng minh rằng:

a) Tam giác $AQP$ đồng dạng với tam giác $MBQ$ và tam giác $MBQ$ đồng dạng với tam giác $NPC$;

b) Diện tích tứ giác $MNPQ$ lớn nhất khi và chỉ khi $R_1^2 + R_2^2 = R_3^2$.

BÙI VĂN CHI
*(GV THCS Lê Lợi, Quy Nhơn, Bình Định)*
Sưu tầm và giới thiệu


# MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC TRONG KHÔNG GIAN

NGUYỄN THỊ THU HƯƠNG
*(GV THPT chuyên Hưng Yên)*

Học sinh THPT thường lúng túng khi gặp các bài toán cực trị, nhất là cực trị hình học. Bài viết sau đây sẽ góp phần giúp các bạn tự tin hơn khi gặp các dạng toán này trong các kì thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng.

Các bài toán tổng quát được xét trong không gian với hệ trục toạ độ Descartes vuông góc $Oxyz$. Ở phần áp dụng, ngoài thí dụ 1, thí dụ 2 được giải chi tiết, các thí dụ khác chúng tôi chỉ hướng dẫn giải hoặc đưa ra kết quả để bạn đọc tự giải.

✪**Bài toán 1.** *Trong không gian với hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz cho mặt phẳng* ($\alpha$) *có phương trình (PT)* $Ax + By + Cz + D = 0$ *và hai điểm* $M(x_1\ ;\ y_1\ ;\ z_1)$, $N(x_2\ ;\ y_2\ ;\ z_2)$ *không thuộc* ($\alpha$). *Tìm điểm I trên mặt phẳng* ($\alpha$) *sao cho:*

a) $IM + IN$ *là nhỏ nhất ;*

b) $|IM - IN|$ *là lớn nhất.*

***Cách giải.*** a) Trước hết ta xác định vị trí tương đối giữa $M$ và $N$ so với mặt phẳng ($\alpha$) bằng cách xét

$$T = (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D)$$

• Nếu $T > 0$ thì $M, N$ cùng phía đối với mp($\alpha$);

Khi $M, N$ cùng phía với nhau đối với mp($\alpha$) ta làm như sau:

Xác định điểm $M'$ đối xứng với $M$ qua mp($\alpha$), lúc đó $IM = IM'$. Ta có $IM + IN = IM' + IN \geq M'N$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $I, M, N$ thẳng hàng. Do đó điểm $I$ thỏa mãn a) là giao điểm của $M'N$ và mp($\alpha$).

• Nếu $T < 0$ thì $M, N$ khác phía đối với mp($\alpha$).

Khi đó điểm $I$ cần tìm chính là giao điểm của đường thẳng $MN$ với mp($\alpha$).

b) • Nếu $M$ và $N$ nằm về cùng một phía đối với mp($\alpha$) và $MN$ // mp($\alpha$) thì có $|IM - IN| \leq MN$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $I, M, N$ thẳng hàng. Điểm $I$ cần tìm là giao của $MN$ với mp($\alpha$). Còn nếu $MN$//mp($\alpha$) thì không xác định được điểm $I$.

• Nếu $M$ và $N$ khác phía đối với mp($\alpha$) thì lấy điểm $M'$ đối xứng với $M$ qua mp($\alpha$). Khi đó $|IM - IN| = |IM' - IN| \leq M'N$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $I, M', N$ thẳng hàng. Điểm $I$ cần tìm là giao của $M'N$ với mp($\alpha$). ❐

★**Thí dụ 1.** *Trong không gian với hệ tọa độ Descartes Oxyz cho hai điểm* $M(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ *và* $N(4\ ;\ 4\ ;\ 5)$. *Tìm điểm I thuộc mặt phẳng (xOy) sao cho IM + IN nhỏ nhất.*

***Lời giải.*** PT mặt phẳng ($xOy$) là $z = 0$ ($A = B = D = 0$, $C = 1$). Ta có $T = 3.5 > 0$, do đó $M, N$ nằm về cùng một phía đối với mặt phẳng ($xOy$). Ta xác định $I$ như sau:

Gọi $M'$ là điểm đối xứng với $M$ qua mp($xOy$). Đường thẳng ($d$) qua $M$ vuông góc với mp($xOy$) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (0\ ;\ 0\ ;\ 1)$ nên PT tham số có dạng $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 + t \end{cases}$ ($t \in \mathbb{R}$).

Giả sử $H = d \cap$ mp($xOy$) thì $H(1\ ;\ 2\ ;\ 3 + t)$. Lúc đó $3 + t = 0$, suy ra $H(1\ ;\ 2\ ;\ 0)$.

Do đó $M'(1\ ;\ 2\ ;\ -3) \Rightarrow \overrightarrow{M'N} = (3\ ;\ 2\ ;\ 8)$. Ta có $IM + IN = IM' + IN \geq M'N$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $I = M'N \cap$ mp($xOy$). PT của $M'N$: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+3}{8}$.

Điểm $I(1 + 3m\ ;\ 2 + 2m\ ;\ -3 + 8m)$ cần tìm thuộc $M'N$, và mp$(xOy)$ nên $-3 + 8m = 0$. Vậy $I\left(\dfrac{17}{8};\dfrac{11}{4};0\right)$. ❐

★**Thí dụ 2.** *Trong không gian với hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz, cho mặt phẳng ($\alpha$) có PT $2x - y + z + 1 = 0$ và hai điểm $M(3\ ;\ 1\ ;\ 0)$, $N(-9\ ;\ 4\ ;\ 9)$. Tìm điểm I trên mp($\alpha$) sao cho $|IM - IN|$ đạt giá trị lớn nhất.*

***Lời giải.*** Ta có $T = 6.(-12) < 0$ nên $M, N$ nằm về hai phía của mp($\alpha$). Gọi $R$ là điểm đối xứng của $M$ qua mp($\alpha$), khi đó đường thẳng $MR$ qua $M(3\ ;\ 1\ ;\ 0)$ vuông góc với mp($\alpha$) có PT

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}.$$

Gọi $H = MR \cap$ mp($\alpha$), suy ra $H(3 + 2t\ ;\ 1 - t\ ;\ t) \in MR$. Vì $H \in$ mp($\alpha$) nên $H(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$, suy ra $R\ (-1\ ;\ 3\ ;\ -2)$.

Ta có $|IM - IN| = |IR - IN| \le RN$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $I, N, R$ thẳng hàng. Lại có $\overrightarrow{RN} = (-8\ ;\ 1\ ;\ 11)$, do đó $RN$ có PT tham số

$$\begin{cases} x = -1 - 8t \\ y = 3 + t \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = -2 + 11t \end{cases}$$

Điểm $I$ cần tìm là giao của $RN$ với mp($\alpha$). $I(-1 - 8t\ ;\ 3 + t\ ;\ -2 + 11t) \in$ mp($\alpha$) suy ra $I(7\ ;\ 2\ ;\ -13)$. ❐

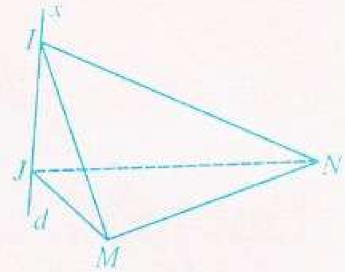
✪**Bài toán 2.** *Trong không gian với hệ trục tọa độ Descartes Oxyz cho đường thẳng d và các điểm $M(x_1\ ;\ y_1\ ;\ z_1)$ và $N(x_2\ ;\ y_2\ ;\ z_2)$ không thuộc d. Tìm điểm I trên đường thẳng d sao cho IM + IN bé nhất.*

***Cách giải.***

• *Trường hợp 1. M, N* và $d$ nằm trong một mặt phẳng. Khi đó ta thực hiện bài toán trong mặt phẳng: Nếu đoạn $MN$ cắt $d$ thì giao điểm đó chính là điểm $I$ cần tìm. Nếu đoạn $MN$ không cắt $d$ thì lấy $M'$ đối xứng với $M$ qua $d$ khi đó $IM = IM'$. Ta có $IM + IN = IM' + IN \ge M'N$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $I, M', N$ thẳng hàng, khi đó $IM + IN$ bé nhất. Từ đó $I$ là giao điểm của $M'N$ và $d$, suy ra tọa độ điểm $I$.

• *Trường hợp 2. MN* và $d$ chéo nhau. Có hai khả năng:

*) Nếu $MN \perp d$ (h. 1) thì ta làm như sau: Gọi ($P$) là mặt phẳng qua $MN$ vuông góc với $d$ tại $J$, khi đó $MJ \perp d$ ; $NJ \perp d$ và $MJ + NJ = k$ (không đổi). Với mọi $I \in d$: $IM \ge JM$ ; $IN \ge JN \Rightarrow IM + IN \ge JM + JN$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $I \equiv J$, từ đó tìm được tọa độ điểm $I$, giao của ($P$) và $d$.

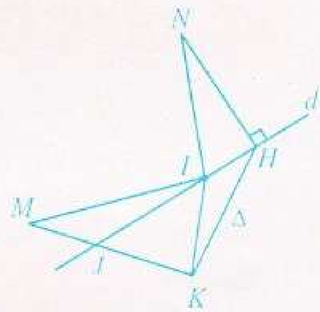


*Hình 1*

*) Nếu $MN$ không vuông góc với $d$ ta chuyển bài toán về mặt phẳng để giải như sau (xem h.2):

– Xác định hình chiếu vuông góc $H$ của $N$ xuống $d$.

– Gọi ($R$) là mặt phẳng ($N$ ; $d$) ; ($P$) là mặt phẳng qua $H$ vuông góc $d$ ; ($Q$) là mặt phẳng chứa $d$ và điểm $M$ ; $\Delta = (P) \cap (Q) \Rightarrow \Delta \perp d$ tại $H$. Trên $\Delta$ lấy $K$ sao cho $KH = NH$ và $K, M$ nằm về hai phía so với mặt phẳng ($R$). Khi đó với mọi $J \in d$ thì $\Delta NJH = \Delta KJH \Rightarrow JK = JN \Rightarrow JM + JN = JM + JK \ge MK$. Đẳng thức xảy ra khi $J, M, K$ thẳng hàng từ đó tìm được tọa độ điểm $I \equiv J$ giao của $MK$ và $d$ là điểm cần tìm. ❐



*Hình 2*

★**Thí dụ 3.** *Trong không gian với hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz, cho $M(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$, $N(7\ ;\ -2\ ;\ 3)$ và đường thẳng d có PT*

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{2}.$$

*Tìm điểm I thuộc d sao cho IM + IN nhỏ nhất.*

(*Xem tiếp trang 15*)

Từ KHO TÀNG TOÁN HỌC

# Bài toán về điểm FERMAT và ứng dụng chứng minh nguyên lí THẾ NĂNG CỰC TIỂU

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT
(Hà Nội)

## I. Lời giải "sơ cấp" của bài toán về điểm Fermat của một hệ điểm

### 1.1. Mở đầu

Trong tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ" số 359 có bài toán T12/359 về cực trị hình học không gian mà đáp án đã được giới thiệu trong số 363, tháng 9 năm 2007 mới đây.

Bài toán này là một *trường hợp đặc biệt* của bài toán tìm "điểm Fermat" hay "điểm cực tiểu" của một hệ điểm, kí hiệu là

$$\{A_i(p_i), i = 1, 2, ..., n\} \qquad (1)$$

có gắn với các hệ số (mà ta gọi là "*trọng số*") dương $p_i$ ($i$ = 1, 2, ..., $n$) tương ứng cho trước, trong đó $n \geq 2$ là một số nguyên dương đã cho.

Trong lịch sử, nhà toán học Pháp nổi tiếng Pière Fermat là người đầu tiên phát biểu bài toán cực trị hình học thú vị nói trên (vào thế kỉ XVII) nên bài toán được gọi ngắn gọn là "bài toán Fermat" (về điểm cực tiểu của một hệ điểm). Ít năm sau đó, người đầu tiên cho lời giải bài toán Fermat là nhà toán học Ý Torricelli trong trường hợp $n = 3$, $p_1 = p_2 = p_3 = 1$. Vì thế, điểm cực tiểu của hệ ba điểm là các đỉnh của một tam giác được gọi là "điểm Torricelli" trong hình tam giác. Từ đó đến nay, vào thời của Fermat cho đến thế kỉ XIX và gần đây, cuối thế kỉ XX cũng đã có một số bài báo ở trong và ngoài nước viết về bài toán Fermat – Torricelli(*).

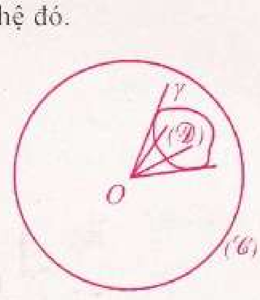
### 1.2. Một số khái niệm và kiến thức toán học bổ trợ

Để trình bày vấn đề đặt ra được đầy đủ và gọn, trước hết tác giả bài viết cung cấp bổ sung cho bạn đọc một số khái niệm và kiến thức toán học bổ trợ mà ở một mức độ nào đó đôi chút có nằm ngoài chương trình SGK toán bậc THPT.

**1.** ***Hình lồi.*** Một hình phẳng hay một vật thể hình học (trong không gian) $\mathscr{H}$ được gọi là một *hình lồi* nếu hai điểm $A$, $B$ nào đó đã thuộc $\mathscr{H}$ thì mọi điểm $M$ của đoạn thẳng $AB$ cũng thuộc $\mathscr{H}$.

**2.** Giả sử $A_1, A_2, ..., A_n$ là $n$ điểm phân biệt đồng phẳng hay không đồng phẳng. *Hình lồi nhỏ nhất* trong mặt phẳng ($\mathscr{P}$) hay trong không gian ($\mathscr{K}$) chứa tất cả $n$ điểm $A_i$ ($i$ = 1, 2, ..., $n$) đó được gọi là *bao lồi tuyến tính* hay vắn tắt là *bao lồi của hệ điểm* $\{A_i\}$, hay bao lồi sinh bởi hệ điểm $\{A_i\}$ đó và kí hiệu là $\mathscr{H}\{A_1, A_2, ..., A_n\}$, hoặc vắn tắt nữa là $\mathscr{H}$. Dễ thấy $\mathscr{H}\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ là một miền đa giác lồi hoặc một miền đa diện lồi tùy theo hệ điểm $\{A_i\}$ nằm trong $\mathscr{P}$ hay nằm trong $\mathscr{K}$. Ngoài ra số đỉnh (còn gọi là điểm cực biên) của $\mathscr{H}$ cũng là số điểm của hệ $\{A_i\}$, nhưng không nhiều hơn $n$, vì có thể có $m$ ($m < n$) điểm của hệ điểm $\{A_i\}$ trở thành điểm trong của bao lồi $\mathscr{B}$ của hệ đó.

**3.** ***Góc khối.*** *Góc đa diện ba chiều*, hay còn được gọi là *góc tam diện đặc khối* hay *góc đặc*. Khái niệm hình học mới này được xây dựng (định nghĩa) như sau:



*Hình 1*

Trên mặt cầu $\mathscr{C}$ bán kính tùy ý (h. 1), hãy chọn một miền đóng $\mathscr{D}$ bất kì giới hạn bởi một đường cong cầu kín $\gamma$.

(*) Xem tài liệu ở cuối bài viết.

Xét hợp của tất cả các tia có gốc chung ở tâm $O$ của $\mathscr{C}$ và đi qua các điểm của miền cầu đóng $\mathscr{D}$, giới hạn bởi $\gamma$. Hình không gian đặc (3 chiều) được tạo thành như vậy gọi là *góc khối có đỉnh là O và có giá là miền cầu đóng* $\mathscr{D}$.

Góc tam diện ba chiều (hay góc tam diện đặc) nói riêng và góc khối nói chung là khái niệm tương tự trong không gian với khái niệm miền góc hai chiều trong mặt phẳng và do đó, chúng *có thể đo được*. Sau đây ta đề cập đến *phép đo các góc khối*, cũng tức là đưa vào khái niệm số đo góc khối. Muốn vậy, giả thiết rằng mặt cầu $\mathscr{C}$ là một mặt cầu đơn vị, tức có bán kính $R = 1$. Ta lấy *số đo diện tích miền cầu* $\mathscr{D}$ *trên mặt cầu đơn vị* $\mathscr{D}$ *làm số đo góc khối*. Nếu diện tích $s(\mathscr{D})$ của miền cầu đó bằng đơn vị thì ta nói rằng số đo của góc khối tương ứng với miền $\mathscr{D}$ trên $\mathscr{C}$ bằng 1 (*radian – góc khối*). Vì số đo diện tích của toàn thể mặt cầu đơn vị $\mathscr{C}$ bằng $4\pi$ đơn vị (đơn vị là 1 radian) nên số đo của góc khối toàn thể không gian xung quanh tâm $O$ của $\mathscr{C}$ bằng $4\pi$ radian – góc khối. Bởi vậy, hiển nhiên là số đo của góc khối không lớn hơn $4\pi$ radian – góc khối. Đối với bất cứ góc tam diện đặc nào, số đo $\delta$ góc khối của nó bằng $\delta = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ (radian – góc khối), trong đó $\alpha$, $\beta$ và $\gamma$ là số đo các góc nhị diện của nó. Chúng ta có thể kiểm nghiệm công thức trên đây đối với trường hợp của góc tam diện vuông để thấy rằng số đo góc khối tam diện vuông

$\delta = 3.\dfrac{\pi}{2} - \pi = \dfrac{\pi}{2}$ (radian – góc khối), đúng bằng $\dfrac{1}{8}$ số đo góc đặc của toàn bộ không gian ở xung quanh bất kì một điểm nào. Khái niệm góc khối thường gặp trong bộ môn vật lí, nhất là trong quang học khi gặp vấn đề liên quan đến sự truyền ánh sáng (nhất là phải đo cường độ sáng).

### 4. Định lí về tồn tại cực tiểu của một hàm nhiều biến số thực của giải tích toán học

Một hàm liên tục $f(M) = f(x, y, z)$ xác định với mọi điểm $M(x, y, z)$ trong không gian và luôn lấy giá trị dương, đồng thời $f(x, y, z) \to +\infty$ khi $x, y, z$ đều dần đến $+\infty$, thì nhất thiết phải có *giá trị dương nhỏ nhất* (*Định lí Weierstrass*).

### 1.3. Phát biểu bài toán về điểm Fermat của một hệ điểm

Trong mặt phẳng hay trong không gian $(\mathscr{K})$ (không gian 3 chiều thông thường, có thể mở rộng vào không gian Euclide $p$ chiều $\mathbb{R}_p$, $p > 3$) cho hệ điểm (1), trong đó $\{A_i\}$ là tập $n$ điểm phân biệt cho trước và $\{p_i\}$ là tập $n$ số dương cho trước gọi là những "trọng số" – dương, gắn với các điểm $A_i$, tương ứng với cùng chỉ số $i = 1, 2, ..., n$.

Tìm trong $(\mathscr{K})$ một điểm $M$ sao cho biểu thức

(hàm) $f = f(M) = \sum_{i=1}^{n} p_i MA_i$, ($p_i > 0$ cho trước) (2)

đạt *giá trị nhỏ nhất* và xác định giá trị cực tiểu $m = f(P)$ của hàm $f(M)$ đó đạt được ở điểm $M \equiv P$ tìm được (theo $p_i$ và $a_{ij} = A_iA_j = d(A_i, A_j)$; $i \neq j$, $\{i, j\} \subset \{1, 2, ..., n\}$).

Ta gọi vị trí đặc trưng hình học $P$ của điểm $M$ thỏa mãn điều kiện hàm $f = f(M)$ đạt giá trị cực tiểu $m = f(P)$ ở điểm $P$ tìm được là "*điểm Fermat*" hay "*điểm cực tiểu*" của hệ điểm $\{A_i(p_i)\}$ gắn với $n$ trọng số dương $p_i$ ($i = 1, 2, ..., n$) đã cho.

### 1.4. Các tính chất định tính đặc trưng hình học của điểm Fermat *P*

**Tính chất 1.** *Điểm Fermat P của hệ điểm* (1) *là tồn tại và nói chung, là duy nhất.*

<u>*Chứng minh.*</u> a) *Tồn tại.* Thật vậy, giả sử hệ điểm (1) được xét trong không gian $E_p$ ($p = 2$, hoặc $p = 3$), chẳng hạn trong $(\mathscr{K})$ là $E_3$. Ta đưa vào trong $(\mathscr{K})$ một hệ tọa độ trực chuẩn Descartes vuông góc $Ox_1x_2x_3$. Trong hệ tọa độ này, điểm $A_i$ ($i = 1, 2, ..., n$) có tọa độ $(a_1^i; a_2^i; a_3^i)$ và $(x_1; x_2; x_3)$ là các tọa độ của một điểm $M$ nào đó trong $(\mathscr{K})$. Khi đó

$$f(M) = f(x_1; x_2; x_3)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} p_i\sqrt{(x_1 - a_1^i)^2 + (x_2 - a_2^i)^2 + (x_3 - a_3^i)^2}$$

($p_i > 0$ với $\forall i$) (3)

Vì $p_i > 0$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$ nên hàm liên tục ba biến thực (3) luôn lấy giá trị dương, xác định trên toàn trục số. Mặt khác, vì $M$ chạy khắp $(\mathscr{K})$ nên khi $M$ tiến ra vô tận ($x_i \to +\infty$) thì $f(x_1, x_2, x_3) \to +\infty$. Bởi vậy, hàm liên tục ba biến thực (3) nhất thiết phải có giá trị dương nhỏ nhất và do đó hàm $f(M) = \sum p_i MA_i$ đạt cực tiểu $m = f(P)$ tại một điểm $P$ nào đó.

b) *Duy nhất.* Giả sử có hai điểm phân biệt $P_1$ và $P_2$ đều là "điểm cực tiểu" của hệ điểm (1) đã cho, nghĩa là

$$\sum_{i=1}^{n} p_i P_1 A_i \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i P_2 A_i = m = \min f(M).$$

Gọi $P$ là trung điểm của đoạn $P_1P_2$, ta có $2PA_i \le P_1A_i + P_2A_i$ $(\forall i = 1, 2, ..., n)$.

Suy ra

$$f(P) = \sum_{i=1}^{n} p_i PA_i \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i (P_1A_i + P_2A_i) = m \qquad (4)$$

Đẳng thức xảy ra ở (4) khi và chỉ khi $A_i \in P_1P_2$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$ nghĩa là khi và chỉ khi tất cả các điểm $A_i$ đều nằm trên đường thẳng $P_1P_2$. Ta đi đến kết luận: - "Điểm cực tiểu" $P$ của hệ điểm (1) là *tồn tại* và nói chung, là *duy nhất* nếu các điểm của hệ (1) không cùng nằm trên một đường thẳng.

- Nếu điểm cực tiểu của hệ điểm (1) *không duy nhất* thì nhất thiết các điểm của hệ đó phải thẳng hàng và khi đó dễ thấy rằng hệ điểm này *có vô số* "điểm cực tiểu". Chẳng hạn, hãy xét trường hợp $n = 2$ và $p_1 = p_2 = p$. Ta chỉ cần xét với $p = 1$. Dễ thấy rằng hàm $f(M)$ đạt giá trị cực tiểu $m = A_1A_2$ tại mọi điểm của đoạn $A_1A_2$. ❐

**Tính chất 2.** *Điểm Fermat P của hệ điểm (1) không trùng với một $A_i$ nào của hệ đó khi và chỉ khi các "vectơ buộc" ở điểm P cùng hướng với $\overrightarrow{PA_i}$ và có độ dài tỉ lệ với các trọng số dương $p_i$ tương ứng ở trạng thái cân bằng,*

*nghĩa là* $f(M) = \sum_{i=1}^{n} p_i MA_i$ *đạt giá trị nhỏ nhất*

*tại* $P \notin \{A_1, A_2, ..., A_n\} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i \vec{e_i} = \vec{0}$ (4)

*trong đó* $\vec{e_i} = \dfrac{\overrightarrow{PA_i}}{PA_i}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ (4')

*Chứng minh.* Với mọi điểm $M \in (\mathscr{K})$, sử dụng BĐT $|\vec{a}|.|\vec{b}| \ge \vec{a}\,\vec{b}$, ta được

$$f(M) = \sum_{i=1}^{n} p_i MA_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{PA_i} MA_i.PA_i$$

$$\ge \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{PA_i} \overrightarrow{MA_i}.\overrightarrow{PA_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{PA_i}\left(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PA_i}\right)\overrightarrow{PA_i}.$$

Từ đó và từ (4') thu được

$$f(M) = \sum_{i=1}^{n} p_i MA_i = \sum_{i=1}^{n} p_i PA_i + \overrightarrow{MP}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \vec{e_i}\right);$$

hay $f(M) \ge f(P) + \overrightarrow{MP}.\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \vec{e_i}\right)$, $\forall M \in (\mathscr{K})$ (5)

Vì $P \notin \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ là điểm Fermat của hệ điểm (1) được xét nên $f(P) = m$ là giá trị *cực tiểu* của hàm $f(M) = \sum_{i=1}^{n} p_i MA_i$, đạt được ở điểm $P$ ($\not\equiv A_i$).

Mặt khác, giá trị của tích vô hướng ở vế phải của (5) với $\forall M \in (\mathscr{K})$ có thể có giá trị dương, âm hay bằng 0. Bởi vậy, từ (5) ta suy ra

$f(M) \ge \min f(M) = m = f(P)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MP}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \vec{e_i}\right) = 0, \forall M \in (\mathscr{K})$

do đó $f(M)$ đạt min $= f(P)$ ở điểm $M \equiv P \notin \{A_1, A_2, ..., A_n\} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i \vec{e_i} = \vec{0}$; đó là đpcm. ❐

Từ đẳng thức vectơ (4) ta thu được các hệ quả sau đây:

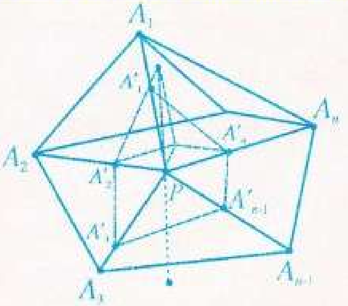
***Hệ quả 1.*** *Hàm vô hướng f(M) có biểu thức (2) đạt được cực tiểu f(P) ở một điểm* $P \notin \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ *chỉ khi mỗi số dương $p_i$ nhỏ hơn tổng các số còn lại, tức là khi*

$$2p_k < \sum_{i=1}^{n} p_i \quad (k = 1, 2, ..., n).$$

***Hệ quả 2.*** *Nếu điểm Fermat P của hệ điểm (1) không trùng với một điểm $A_i$ ($i = 1, 2, ..., n$) nào của hệ điểm (1) thì P là một điểm trong của bao lồi (tuyến tính) $\mathscr{B}$, xác định bởi các điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ của hệ điểm $\{A_i, i = 1, 2, ..., n\}$ được xét.*

*Chứng minh.* Trên tia $PA_i$ ta lấy điểm $A'_i$ sao cho $\overrightarrow{PA'_i} = \lambda p_i \vec{\theta_i}$ và $PA'_i < PA_i$ với $1, 2, ..., n$ : (6). Đối chiếu (4) và (6) ta suy ra $P$ là *trọng tâm* của hệ điểm $\{A'_1, A'_2, ..., A'_n\}$ (1')

Bởi vậy, theo tính chất của trọng tâm của một hệ điểm thì $P$ phải là một *điểm trong* của bao lồi $\mathscr{B}$ xác định bởi hệ điểm (1') vừa dựng (h. 2).




*Hình 2*

Mặt khác vì $A'_i \in [PA_i]$ $(i = 1, 2, ..., n)$ nên $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$, bởi vậy $P$ phải là một điểm trong của bao lồi $\mathscr{B}$ $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ của hệ điểm (1). ❒

***Hệ quả 3.*** *Nếu điểm Fermat P của hệ điểm* (1) *không là một điểm trong của bao lồi $\mathscr{B}$ của hệ điểm đó thì $P \in \{A_1, A_2, ..., A_n\}$.*

Chứng minh. (Phản chứng). Theo giả thiết vừa nêu, $P$ không là một điểm trong nào của $\mathscr{B}$ thì nó chỉ có thể là một điểm biên trên mặt hoặc trên cạnh của hình lồi đặc $\mathscr{B}$ có dạng là một miền đa giác lồi hay một miền đa diện lồi tùy theo $(\mathscr{K})$ được xét là $E_2$ hay $E_3$. Lại giả sử $P \notin \{A'_1, A'_2, ..., A'_n\}$; nhưng điều này sẽ dẫn đến mâu thuẫn.

Thật vậy, không mất tổng quát, chẳng hạn có thể giả sử $[A_1A_2]$ là một cạnh và miền $[\Delta A_1A_2A_3]$ là một mặt biên của $\mathscr{B}$ và giả sử $P$ là một điểm trong của $[\Delta A_1A_2A_3]$ hoặc của $[A_1A_2]$. Đặt $\overrightarrow{PX} = \sum_{i=1}^{3} p_i\vec{e_i}$ và $\overrightarrow{PY} = \sum_{j=4}^{n} p_j\vec{e_j}$, thì $\overrightarrow{PX} + \overrightarrow{PY} = \vec{0}$ (Tính chất 1). Theo cách dựng thì $\overrightarrow{PX}$ nằm trong mặt phẳng chứa mặt biên $[\Delta A_1A_2A_3]$ của $\mathscr{B}$ và $\overrightarrow{PY}$ hoàn toàn nằm trong nửa không gian chứa $\mathscr{B}$ có bờ là mặt phẳng $(A_1A_2A_3)$ nên $\overrightarrow{PX}$ và $\overrightarrow{PY}$ không thể *trực đối* với nhau được, mâu thuẫn với (4) nêu ở tính chất 1. Lập luận tương tự đối với trường hợp $P$ là một điểm trong $[P_1P_2]$. Mâu thuẫn đó chứng tỏ $P \in \{A_1, A_2, ..., A_n\}$. ❒

***Hệ quả 4.*** *Nếu $P \notin \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ là điểm Fermat của hệ điểm* (1) *thì P cũng vẫn là điểm Fermat của bất cứ một hệ điểm $B_i(p_i)$, $i = 1, 2, ..., n\}$ nào mà các điểm $B_i$ của hệ đó nằm trên các tia $PA_i$ tương ứng và gắn với cùng trọng số dương $p_i$ $(i = 1, 2, ..., n\}$ nào đó trùng với chính điểm P (xem là trường hợp giới hạn).*

Thật vậy, dễ thấy Hệ quả 4 được suy ra từ tính chất 2 khi viết được $\vec{e_i} = \dfrac{\overrightarrow{PA_i}}{PA_i} = \dfrac{\overrightarrow{PB_i}}{PB_i}$.

**Tính chất 3.** *Điểm Fermat P của hệ điểm* (1) *trùng với điểm $A_k$ của hệ đó* $(k \in \{1, 2, ..., n\})$ *khi và chỉ khi*
$$p_k \ge \left|\sum_{i\neq k} p_i\vec{e}_{ki}\right|, \tag{7}$$
*trong đó* $\vec{e}_{ki} = \dfrac{\overrightarrow{A_kA_i}}{A_kA_i}$ *là vectơ đơn vị cùng hướng với* $\overrightarrow{A_kA_i}$ $(i \neq k, k \in \{1, 2, ..., n\})$, *đồng thời hàm $f(M)$ đạt giá trị nhỏ nhất*
$$m = f(A_k) = \sum_{i\neq k} p_i a_{ki} \tag{8}$$
*trong đó $a_{ki} = A_kA_i$ là khoảng cách từ $P \equiv A_k$ đến $A_i$ $(i \neq k)$.*

Chứng minh. Với mọi điểm $M \in (\mathscr{K})$, sử dụng BĐT kép $|\vec{a}||\vec{b}| \ge \vec{a}\vec{b} \ge -|\vec{a}||\vec{b}|$, ta được
$$f(M) = \sum_{i=1}^{n} p_i MA_i = p_k MA_k + \sum_{i\neq k} p_i MA_i\,|\vec{e}_{ki}|$$
$$\ge p_k MA_k + \sum_{i\neq k} p_i\overrightarrow{MA_i}\,\vec{e}_{ki},\ \forall M \in (\mathscr{K}) \tag{9}$$

Sau khi thay $\overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{MA_k} + \overrightarrow{A_kA_i}$ và $\vec{e}_{ki} = \dfrac{\overrightarrow{A_kA_i}}{A_kA_i}$ vào vế phải của BĐT (9) ở trên thì được
$$f(M) = \sum_{i=1}^{n} p_i MA \ge \sum_{i\neq k} p_i a_{ki} + MA_k\left(p_k - \left|\sum_{i\neq k} p_i\vec{e}_{ki}\right|\right),$$
$\forall M \in (\mathscr{K})$,

hay là $f(M) \ge \underset{k\in\{1,2,...,n\}}{f(A_k)} + \left(p_k - \left|\sum_{i\neq k} p_i\vec{e}_{ki}\right|\right)$,
$$\forall M \in (\mathscr{K}). \tag{10}$$

Bất đẳng thức (10) chỉ ra rằng:

Điểm $A_k$ của hệ điểm (1) là điểm Fermat của hệ đó và do đó, $f(P) = f(A_k)$ là *giá trị cực tiểu* của $f(M)$, xác định bởi hệ thức (8) khi và chỉ khi biểu thức có dạng tích – thành phần thứ hai ở vế phải của BĐT (10) – có giá trị không âm. Hay điểm Fermat $P$ của hệ (1) trùng với $A_k$ khi và chỉ khi

$p_k - \left|\sum_{i\neq k} p_i\vec{e}_{ki}\right| \ge 0 \Leftrightarrow p_k \ge \left|\sum_{i\neq k} p_i\vec{e}_{ki}\right|$; đó là đpcm. ❒

*(Kì sau đăng tiếp)*

# English through math problems and solutions

## UNIT 7

**Problem.** The polynomial $x^n + 2x^2 + 3x - 4$ has exactly one positive real root. Denote it by $\alpha_n$. Give that when $n$ tends to infinity the value of $\alpha_n$ tends to some real number $\alpha$. What is the value of $\alpha$?

**Solution.** Observe that if $x \geq 0.9$, then

$$x^n + 2x^2 + 3x - 4 \geq 2x^2 + 3x - 4$$
$$\geq 2.(0.9)^2 + 3.(0.9) - 4 > 0.$$

Thus, any real root of $x^n + 2x^2 + 3x - 4$ must be smaller than 0.9. In particular, $0 < \alpha_n < 0.9$. It follows that when $n$ tends to infinity, $\alpha_n$ tends to 0. Since $\alpha_n$ is a root of $x^n + 2x^2 + 3x - 4 = 0$, we deduce that $2\alpha_n^2 + 3\alpha_n - 4$ tends to 0. By considering the graph of $y = 2x^2 + 3x - 4$, one sees that $2\alpha_n^2 + 3\alpha_n - 4$ can not be near 0 unless $\alpha_n$ is near a root of $2x^2 + 3x - 4$. The roots of $2x^2 + 3x - 4$ are $\frac{-3+\sqrt{41}}{4}$ and $\frac{-3-\sqrt{41}}{4}$, and the latter of these is negative (so $\alpha_n$ can not be near it). It follows that $\alpha_n$ tends to the root $\frac{-3+\sqrt{41}}{4}$ as $n$ tends to infinity.

**Vocabulary**

| | |
|---|---|
| polynomial *n.* | = đa thức |
| real root *n.* | = nghiệm thực |
| denote *v.* | = biểu thị, kí hiệu |
| tend *v.* | = tiến tới, hướng tới |
| observe *v.* | = quan sát, nhận xét |
| in particular *adv.* | = cụ thể, nói riêng |
| deduce *v.* | = suy ra, luận ra. |

VŨ THẾ KHÔI (*Viện Toán học*)

## THỂ LỆ GỬI BÀI

### CHO TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

- Bài cần đánh máy hoặc viết tay sạch sẽ, không dập xóa, trên một mặt giấy. Hình vẽ rõ ràng. Không gửi bản photocopy. Nếu bài đã chế bản nên gửi kèm file. Phông chữ nên là unicode.
- Mỗi bài dài không quá 2000 chữ hoặc không quá 4 trang A4 chế bản vi tính.
- Bài dịch cần gửi kèm bản photocopy bài gốc.
- Mỗi đề ra đều có kèm lời giải và không ghi 2 đề trên cùng 1 tờ giấy.
- Ghi đầy đủ họ và tên thật, số điện thoại, địa chỉ để tiện liên hệ. Mỗi bài chỉ gửi một lần. Bài không đăng không trả lại bản thảo.
- Ảnh tập thể gửi đăng phải là ảnh màu, cỡ nhỏ nhất 9×12. Sau ảnh ghi rõ nội dung ảnh và tên người chụp.
- Đối với bài giải gửi dự thi, mỗi bài viết trên một tờ giấy riêng. Phía trên bên trái ghi số thứ tự của bài, bên phải ghi rõ họ tên, ngày sinh, trường lớp, địa chỉ gia đình. Bài chỉ gửi về một địa chỉ: *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, 187B Giảng Võ, Hà Nội. Ngoài phong bì ghi rõ : Dự thi giải toán số tạp chí...* Không gửi bài giải của nhiều số tạp chí trong cùng một phong bì. Học sinh THPT không giải bài dành cho THCS. Bài gửi có dán tem.
- Thời hạn nhận bài giải *Đề ra kì này* là hai tháng tính từ cuối tháng ra số tạp chí đó. Các bài giải cho các chuyên mục khác là 1 tháng.
- Bài đã gửi cho TH&TT thì không gửi cho các tạp chí khác.

THTT


# XÁC SUẤT với Thị trường chứng khoán

ĐẶNG HÙNG THẮNG
(Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

***Một trong những sự thay đổi lớn về chương trình Toán ở THPT của lần thay sách giáo khoa này là việc đưa vào giảng dạy một số kiến thức cơ bản về Xác suất-Thống kê (Thống kê ở lớp 10 và Xác suất ở lớp 11). Đây là lần đầu tiên ở nước ta Xác suất - Thống kê được chính thức đưa vào dạy ở cấp THPT. Bài viết này trình bày đôi nét về vị trí và tầm quan trọng của Xác suất-Thống kê, sự cần thiết phải trang bị một số yếu tố cơ bản về Xác suất - Thống kê cho học vấn phổ thông. Đồng thời, chúng tôi cũng giới thiệu một số bài toán xác suất tương đối đơn giản liên quan đến thị trường chứng khoán.***

## I. Tại sao tất cả học sinh THPT cần phải học Xác suất-Thống kê?

Trong khoa học cũng như trong đời sống hàng ngày, chúng ta rất thường gặp các hiện tượng (biến cố ) ngẫu nhiên. Đó là các biến cố mà ta không thể dự báo một cách chắc chắn rằng chúng xảy ra hay không xảy ra.

Nhà triết học Mỹ Benjamin Franklin có nói: "*Ở nước Mỹ, không có gì là chắc chắn cả ngoại trừ hai điều: chắc chắn ai cũng sẽ chết và chắc chắn ai cũng phải nộp thuế*". Ngẫu nhiên hiện diện mọi nơi, mọi lúc, tác động sâu sắc đến cuộc sống của chúng ta. Ngẫu nhiên mang lại cho ta cả niềm vui và nỗi buồn, cả hạnh phúc và sự khổ đau. Ngẫu nhiên đích thị là một phần tất yếu của cuộc sống.

Lí thuyết Xác suất là bộ môn toán học nghiên cứu tìm ra các quy luật chi phối và đưa ra các phương pháp tính toán xác suất của các hiện tượng, biến cố ngẫu nhiên. Ngày nay Lí thuyết Xác suất đã trở thành một ngành toán học quan trọng cả về phương diện Lí thuyết và ứng dụng. Nó là công cụ không thể thiếu được mỗi khi ta nói đến dự báo, bảo hiểm, mỗi khi cần đánh giá các cơ may, các nguy cơ rủi ro. Nhà toán học Pháp La-pla-xơ ở thế kỉ XIX đã tiên đoán rằng: " *Môn khoa học này hứa hẹn trở thành một trong những đối tượng quan trọng nhất của tri thức nhân loại. Rất nhiều những vấn đề quan trọng nhất của đời sống thực tế thuộc về những bài toán của Lí thuyết Xác suất*".

Xác suất gắn bó chặt chẽ và liên hệ mật thiết với khoa học Thống kê. Thống kê là khoa học về các phương pháp thu thập, tổ chức, trình bày, phân tích và diễn dịch dữ liệu. Vì thế nó đóng một vai trò cực kì quan trọng trong nhiều ngành khoa học, nhất là trong các ngành khoa học thực nghiệm như Y khoa, Sinh học, Nông nghiệp, Kinh tế. *Đặc biệt Thống kê rất cần cho các cấp lãnh đạo, các nhà quản lí, hoạch định chính sách.* Khoa học thống kê cung cấp cho họ phương pháp thu thập , xử lí và diễn giải các thông tin về dân số, kinh tế giáo dục... để từ đó có thể vạch chính sách và ra quyết định đúng đắn. Thiếu khoa học thống kê, họ chẳng khác nào người không có tai mắt và giống như một người mù và điếc mò mẫm trong căn nhà kho tối đen để tìm một con mèo đen đã không còn ở đó nữa.

Ngay từ đầu thế kỉ XX nhà triết học người Anh Well đã dự báo:" *Trong một tương lai không xa, kiến thức thống kê và tư duy thống kê sẽ trở thành một yếu tố không thể thiếu được trong học vấn phổ thông của mỗi công dân giống như là khả năng biết đọc, biết viết vậy*" .

Chính vì thế UNESCO (tổ chức Giáo dục và Văn hoá của Liên hiệp quốc) đã khẳng định rằng Xác suất - Thống kê là một trong các quan điểm chủ chốt để xây dựng học vấn trong thời đại ngày nay. Ngày nay ở hầu hết các nước trên thế giới, Xác suất-Thống kê đã được đưa vào giảng dạy ở bậc trung học phổ thông và là môn cơ sở bắt buộc của nhiều ngành ở bậc Đại học.

**II Một số bài toán xác suất đơn giản liên quan tới chứng khoán**

Thị trường chứng khoán là một minh họa rất rõ cho sự ngự trị của ngẫu nhiên. Ngày mai điều gì sẽ xảy ra với cổ phiếu của Công ti FPT? Cổ phiếu sẽ tăng giá? đứng giá? hay xuống giá? Khó có thể nói chắc chắn một điều gì . Tính không chắc chắn, sự rủi ro , tính biến động lên xuống một cách ngẫu nhiên là thuộc tính cố hữu của thị trường chứng khoán.

Dù rằng thị trường chứng khoán là một đối tượng hết sức phức tạp, diễn biến tăng giảm của nó rất khó dự báo, nhưng các nhà kinh tế cùng với các nhà toán học đã cố gắng sử dụng các công cụ của toán học, đặc biệt là các công cụ của Xác suất-Thống kê để mô hình hóa thị trường chứng khoán. Việc áp dụng các mô hình đó giúp các nhà đầu tư tối đa hoá các cơ hội đạt lợi nhuận và tối thiểu hoá các nguy cơ rủi ro. Một mô hình nổi tiếng nhất là mô hình Black-Scholes do hai nhà kinh tế học người Mỹ là F. Black và M.S. Scholes đề xuất năm 1973, trong đó sử dụng các công cụ giải tích ngẫu nhiên. Mô hình này được rất nhiều thị trường chứng khoán trên thế giới sử dụng. Hai ông đã được giải Nobel về Kinh tế vào năm 1997 nhờ những nghiên cứu về thị trường chứng khoán.

Sau đây xin giới thiệu với bạn đọc một một số bài toán xác suất đơn giản liên quan tới thị trường chứng khoán.

Giả sử tại thời điểm hiện tại cổ phiếu của công ti A có mệnh giá là $a$ đơn vị với $a$ là số nguyên dương (đơn vị ở đây có thể là mười nghìn, một trăm nghìn hay một triệu..). Giả thiết rằng:

+ Sau một đơn vị thời gian (một giờ, nửa ngày, một ngày, ...) với xác suất $p$, giá cổ phiếu của công ti sẽ tăng và với xác suất $1-p$ giá cổ phiếu của công ti sẽ giảm. (không có khả năng đứng giá).

+ Mỗi lần giá cổ phiếu tăng hay giảm chỉ 1 đơn vị.

+ Sự lên xuống của giá cổ phiếu của mỗi đơn vị thời gian là độc lập với diễn biến của giá cổ phiếu đó trong quá khứ.

Để đơn giản cách nói, từ nay về sau ta sẽ coi đơn vị thời gian là ngày.

✪**Bài toán 1.** *Tính xác suất để:*

a) *Sau hai ngày cổ phiếu vẫn có giá như hiện tại.*

b) *Sau ba ngày cổ phiếu tăng giá lên 1 đơn vị.*

***Lời giải***

a) Cổ phiếu đứng giá sau hai ngày nếu một trong các biến cố sau xảy ra:

$A$: "Ngày đầu giá cổ phiếu tăng, ngày thứ hai giảm";

$B$:" Ngày đầu giá cổ phiếu giảm, ngày thứ hai tăng".

Sử dụng quy tắc nhân xác suất ta có

$$P(A) = p(1-p); \quad P(B) = (1-p)p.$$

Theo quy tắc cộng xác suất, ta có xác suất cần tìm là $P(A) + P(B) = 2p(1-p)$.

b) Cổ phiếu sau ba ngày tăng 1 đơn vị nếu một trong các biến cố sau xảy ra:

$A$: "Hai ngày đầu giá cổ phiếu tăng, ngày thứ ba giảm";

$B$: "Ngày đầu giá cổ phiếu giảm, hai ngày sau tăng";

$C$: "Ngày đầu giá cổ phiếu tăng, ngày thứ hai giảm và ngày thứ ba tăng".

Sử dụng quy tắc nhân xác suất ta có

$$P(A)= pp(1-p)= p^2(1-p);$$

$$P(B)= (1-p)pp= p^2(1-p);$$

$$P(C)= p(1-p)p= p^2(1-p).$$

Theo quy tắc cộng xác suất, ta có xác suất cần tìm là $P(A)+P(B)+P(C) =3p^2(1-p)$. ❒

Một cách tổng quát ta có bài toán sau đây.

✪**Bài toán 2.** *Cho trước hai số nguyên dương $N$ và $h$ $(N > h)$. Tính xác suất để:*

*a) Sau N ngày cổ phiếu vẫn có giá như cũ;*

*b) Sau N ngày giá của cổ phiếu tăng lên h đơn vị;*

*c) Sau N ngày giá của cổ phiếu là giảm đi h đơn vị.*

***Lời giải***

Trong $N$ ngày, nếu ngày nào mà cổ phiếu tăng thì ta ghi chữ số 1; nếu ngày nào giá cổ phiếu giảm thì ta ghi chữ số 0. Như vậy diễn biến của giá cổ phiếu trong $N$ ngày được thể hiện bằng một dãy nhị phân (dãy gồm các chữ số 0 và 1) có độ dài $N$.

a) Gọi $E$ là biến cố đang xét. Sau $N$ ngày giá cổ phiếu vẫn như cũ nếu trong dãy nhị phân đó số chữ số 0 bằng số chữ số 1. Thành thử

Nếu $N$ lẻ thì $E$ là biến cố không thể. Do đó $P(E) = 0$.

Giả sử $N$ chẵn, $N = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$). Khi đó có $C_{2k}^{k}$ dãy nhị phân độ dài $2k$ trong đó có $k$ chữ số 0 và $k$ chữ số 1. Xác suất xảy ra một dãy nhị phân như vậy là $p^k(1-p)^k$. Do đó

$P(E)= C_{2k}^{k}p^k(1-p)^k$, nếu $N = 2k$.

b) Gọi $F$ là biến cố đang xét. Sau $N$ ngày giá cổ phiếu tăng $h$ đơn vị nếu trong dãy nhị phân đó số chữ số 1 nhiều hơn hơn số chữ số 0 là $h$.

Do đó số chữ số 1 là $\frac{N+h}{2}$ và số chữ số 0 là $\frac{N-h}{2}$.

Nếu $N$ và $h$ khác tính chẵn lẻ thì $F$ là biến cố không thể. Do đó $P(F) = 0$ nếu $N + h$ lẻ.

Giả sử $N$ và $h$ có cùng tính chẵn lẻ. Đặt $k = \frac{N+h}{2}$. Cổ phiếu sau $N$ ngày mệnh giá tăng lên $h$ đơn vị, nếu trong dãy nhị phân đó có $k$ chữ số 1 và $N-k$ chữ số 0. Vậy

$P(F)= C_{N}^{k}p^k(1-p)^{N-k}$ nếu $N + h = 2k$.

c) Gọi $G$ là biến cố đang xét. Lập luận tương tự như b) ta có kết quả $P(G) = 0$ nếu $N + h$ lẻ.

$P(G) = C_{N}^{k}p^{N-k}(1-p)^k$ nếu $N + h = 2k$. ❐

*(Kì sau đăng tiếp)*

**MỘT SỐ BÀI TOÁN...** *(Tiếp trang 7)*

***Hướng dẫn.*** Đường thẳng $d$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3 ; -2 ; 2)$ ; $\overrightarrow{MN} = (6 ; -4 ; 4) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = 2\vec{u}$ ; $M \notin d$ nên $MN \,//\, d$, do đó trên mặt phẳng $(d, MN)$ gọi $M'$ là điểm đối xứng của $M$ thì mặt phẳng $(\alpha)$ qua $M(1 ; 2 ; -1)$ với vectơ chỉ phương $(3 ; -2 ; 2)$ có phương trình:

$$3x - 2y + 2z + 3 = 0.$$

Gọi $H = d \cap (\alpha) \Rightarrow H(-1 ; 2 ; 2) \Rightarrow M'(-3 ; 2 ; 5)$.

$I = d \cap M'N \Rightarrow HI // MN \Rightarrow I$ trung điểm $MN$ nên $I(2 ; 0 ; 4)$ là điểm cần tìm. ❐

**★Thí dụ 4.** *Trong không gian với hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz, cho $M(3 ; 1 ; 1)$, $N(4 ; 3 ; 4)$ và đường thẳng d có PT $\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-9}{1}$. Tìm I thuộc d sao cho $IM + IN$ nhỏ nhất.*

***Hướng dẫn.*** Ta có $\overrightarrow{MN} = (1 ; 2 ; 3)$; $d$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1 ; -2 ; 1)$ nên $\overrightarrow{MN}.\vec{u} = 1.1 + 2.(-2) + 3.1 = 0$, suy ra $MN \perp d$.

Mặt phẳng $(P)$ qua $MN$ vuông góc với $d$ tại $I$ có PT $x - 2y + z - 2 = 0$.

Điểm $I = (P) \cap d$ nên $I\left(\frac{17}{3}; \frac{17}{3}; \frac{23}{3}\right)$. ❐

Cuối cùng mời các bạn giải một số bài toán tương tự trên hệ trục tọa độ $Oxyz$.

**1)** Cho mặt phẳng $(\alpha)$ có PT $2x - y + z + 1 = 0$ và hai điểm $M(3 ; 1 ; 0)$ ; $N(-9 ; 4 ; 9)$.

a) Tìm điểm $I$ thuộc mặt phẳng $(\alpha)$ sao cho $\left|\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Tìm điểm $I'$ thuộc mặt phẳng $(\alpha)$ sao cho $|I'M - I'N|$ đạt giá trị lớn nhất.

**2)** Cho $M(1 ; 1 ; 0)$, $N(3 ; -1 ; 4)$ và đường thẳng $d$ có PT $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2}$. Tìm điểm $I$ trên $d$ sao cho $IM + IN$ bé nhất.

**3)** Cho $M(-1 ; 3 - 2)$, $N(-9 ; 4 ; 9)$ và mặt phẳng $(P)$ có PT $2x - y + z + 1 = 0$. Tìm điểm $I$ trên mặt phẳng $(P)$ sao cho $IM + IN$ bé nhất.


## CÁC LỚP THCS

**Bài T1/366 (Lớp 6)** Cho dãy số $(a_n)$, với $a_1 = 3$, $a_2 = 8$, $a_3 = 13$, $a_4 = 24$, $a_5 = 31$, $a_6 = 48$, ...,

$$a_{n+2} = \begin{cases} a_n + 4n + 8, & \text{khi } n \text{ lẻ} \\ a_n + 4n + 6, & \text{khi } n \text{ chẵn} \end{cases}$$

a) Hỏi số 2007, số 2024 có thuộc dãy số trên không ?

b) Số thứ 2007 của dãy số trên là số nào?

NGUYỄN NHƯ HIỂN
*(GV THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Bảo, Hải Phòng)*

**Bài T2/366. (Lớp 7)** Cho tam giác $ABC$ với $\widehat{BAC} = 40^o$ và $\widehat{ABC} = 60^o$. Gọi $D$ và $E$ theo thứ tự là các điểm nằm trên cạnh $AB$ và $AC$ sao cho $\widehat{DCB} = 70^o$ và $\widehat{EBC} = 40^o$; $F$ là giao điểm của $DC$ và $EB$. Chứng minh rằng $AF$ vuông góc với $BC$.

ĐINH CAO PHẠN
*(Sở Giáo dục và Đào tạo Gia Lai)*

**Bài T3/366.** Cho năm số dương $x, y, z, t, u$ thoả mãn điều kiện $x + y + z + t + u = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(x+y+z+t)(x+y+z)(x+y)}{xyztu}.$$

NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG
*(GV THCS Đa Tốn, Gia Lâm, Hà Nội)*

**Bài T4/366.** Giải phương trình

$$2\sqrt{x+1} + 6\sqrt{9-x^2} + 6\sqrt{(x+1)(9-x^2)} = 38 + 10x - 2x^2 - x^3.$$

KIỀU ĐÌNH MINH
*(Cao học K14 Toán, ĐHSP Hà Nội)*

**Bài T5/366.** Từ một điểm $P$ ở ngoài đường tròn tâm $O$ kẻ hai tiếp tuyến $PA$, $PB$ của đường tròn với $A$, $B$ là các tiếp điểm. Gọi $M$ là giao điểm của $OP$ và $AB$. Kẻ dây cung $CD$ đi qua $M$ ($CD$ không đi qua $O$). Hai tiếp tuyến của đường tròn tại $C$ và $D$ cắt nhau tại $Q$. Tính độ lớn góc $OPQ$.

VŨ HỮU CHÍN
*(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)*

## CÁC LỚP THPT

**Bài T6/366.** Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x^y + y = y^x + x.$$

ĐỖ VĂN THU
*(GV THPT Bán công Bình Giang, Hải Dương)*

**Bài T7/366.** Chứng minh rằng nếu phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt thì phương trình

$$x^3 + ax^2 + (-a^2 + 4b)x + a^3 - 4ab + 8c = 0$$

cũng có ba nghiệm thực phân biệt.

CAO VĂN DŨNG
*(SV K50, SP Toán, Khoa Toán-Cơ-Tin ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)*

**Bài T8/366.** Cho tam giác nhọn $ABC$ với $I$ là tâm đường tròn nội tiếp. Gọi $D$, $E$, $F$ lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn $(I)$ với các cạnh $BC$, $CA$, $AB$. Phân giác trong của góc $BIC$ cắt cạnh $BC$ tại $M$, $AM$ cắt $EF$ tại $P$. Chứng minh rằng

$$PD \geq \frac{1}{2}\sqrt{4DE.DF - EF^2}.$$

NGUYỄN TRẦN THI
*(Phú Yên)*

## TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

**Bài T9/366.** Giả sử $a_1, a_2, ..., a_{2007}$ là những số nguyên phân biệt lớn hơn 1 và thoả mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{2007} a_i = 2017035$. Hỏi số $\sum_{i=1}^{2007} a_i^{a_{i+1}}$ có thể là số chính phương không?

TRƯƠNG XUÂN NHÃ
*(Quảng Trị)*

**Bài T10/366.** Tìm tất cả các đa thức với hệ số thực $P(x)$ thoả mãn điều kiện

$P(P(x)+x)=P(x)P(x+1)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

NGUYỄN TIẾN LÂM

*(GV K50A1S, Khoa Sư phạm, ĐHQG Hà Nội)*

**Bài T11/366.** Cho các số thực không âm $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ và $a_5$ có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$a_2a_3a_4a_5+a_1a_3a_4a_5+a_1a_2a_3a_5+a_1a_2a_3a_4\le\frac{1}{256}+\frac{3275}{256}a_1a_2a_3a_4a_5.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

TRẦN TUẤN ANH

*(SV Khoa Toán Tin, ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)*

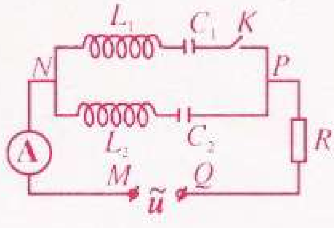
**Bài T12/366.** Giả sử $ABCD$ là một tứ giác nội tiếp có các đường chéo cắt nhau tại $P$. Chứng minh rằng các đường thẳng Euler của các tam giác $PAB$, $PBC$, $PCD$, $PDA$ đồng quy tại một điểm. (Đường thẳng đi qua trọng tâm và trực tâm của tam giác gọi là đường thẳng Euler của tam giác đó).

TRẦN QUANG HÙNG

*(SV K49A1T ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)*

## CÁC ĐỀ VẬT LÍ

**Bài L1/366.** Cho mạch điện như hình vẽ bên. Các cuộn dây thuần cảm có hệ số tự cảm $L_1=\frac{1}{2\pi}$(H) và $L_2=\frac{1}{\pi}$(H). Tụ điện $C_2=\frac{10^{-4}}{0,5\pi}$(F) và $u=100\sqrt{2}\sin 100\pi t$(V).




Bỏ qua điện trở của ampe kế $A$ và của các dây nối.

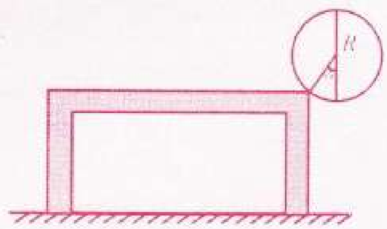
1) Khoá $K$ ngắt, hãy tính $R$ khi công suất tiêu thụ của đoạn mạch trên cực đại.

2) Đóng khoá $K$, biết rằng ampe kế $A$ chỉ số 0. Tính $C_1$ và viết biểu thức của các dòng điện $i_1$ qua $L_1$ và $i_2$ qua $L_2$.

NGUYỄN QUANG HẬU

*(Hà Nội)*

**Bài L2/366.** Một quả cầu đặc đồng chất có bán kính $R$ được đặt trên mặt bàn nằm ngang. Sau khi đẩy nhẹ quả cầu lăn không trượt tới mép bàn.




1) Xác định độ lớn góc $\alpha$ hợp giữa đường nối mép bàn và tâm quả cầu với phương thẳng đứng ở thời điểm quả cầu rời khỏi bàn (hình vẽ).

2) Xác định vận tốc của quả cầu ở thời điểm đó.

NGUYỄN XUÂN QUANG

*(GV THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam)*

# PROBLEMS IN THIS ISSUE

## FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

**T1/366.** Let $(a_n)$ be $a_1=3$, $a_2=8$, $a_3=13$, $a_4=24$, $a_5=31$, $a_6=48$, ..., in general,

$$a_{n+2}=\begin{cases}a_n+4n+8 & \text{if } n \text{ is odd}\\ a_n+4n+6 & \text{if } n \text{ is even}\end{cases}$$

a) Do the numbers 2007 and 2024 appear in this sequence?

b) Find the 2007-th number in this sequence.

**T2/366.** Let $ABC$ be a triangle with $\widehat{BAC}=40^o$ and $\widehat{ABC}=60^o$. Denote $D$ and $E$ are two points on $AB$ and $AC$ respectively such that $\widehat{DCB}=70^o$ and $\widehat{EBC}=40^o$; $DC$ and $EB$ meets at a point $F$. Prove that $AF$ and $BC$ are orthogonal.

**T3/366.** Let $x$, $y$, $z$, $t$, and $u$ be positive real numbers such that $x+y+z+t+u=4$. Find the smallest possible value of the following expression

$$P=\frac{(x+y+z+t)(x+y+z)(x+y)}{xyztu}.$$

**T4/366.** Solve for $x$

$$2\sqrt{x+1}+6\sqrt{9-x^2}+6\sqrt{(x+1)(9-x^2)}=38+10x-2x^2-x^3.$$

*(Xem tiếp trang 27)*


**★ Bài T1/362.**

*Cho* $S = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + ... + \frac{n}{2^{n+1}} + ... + \frac{2006}{2^{2007}}$.

*So sánh S với 1.*

***Lời giải.*** Ta có $\frac{n}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2^n} - \frac{n+2}{2^{n+1}}$ (*)

Áp dụng (*) với $n = 1, 2, ..., 2006$ ta được

$$S = \left(\frac{2}{2} - \frac{3}{2^2}\right) + \left(\frac{3}{2^2} - \frac{4}{2^3}\right) + ... + \left(\frac{n+1}{2^n} - \frac{n+2}{2^{n+1}}\right)$$

$$+ ... + \left(\frac{2007}{2^{2006}} - \frac{2008}{2^{2007}}\right)$$

$= 1 - \frac{2008}{2^{2007}}$. Nên $S < 1$. ❐

**Nhận xét.** 1) Bài toán tổng quát tính

$A = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^3} + ... + \frac{n}{a^{n+1}}$ (với $a \neq 1$ và $n \in \mathbb{N}^*$)

được giải vắn tắt như sau:

$$Aa - A = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + ... + \frac{1}{a^n} - \frac{n}{a^{n+1}} = B - \frac{n}{a^{n+1}}$$

$$Ba - B = 1 - \frac{1}{a^n} \Rightarrow B = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{(a-1)a^n}.$$

Tính được $A = \frac{1}{(a-1)^2} - \frac{a + n(a-1)}{(a-1)^2 a^{n+1}}$.

Với $n = 2006$, $a = 2$ thì $A = S = 1 - \frac{2008}{2^{2007}}$.

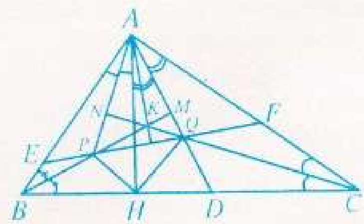
2) Các bạn giải đều đúng, tuy nhiên vẫn còn dài. Các bạn sau có lời giải tốt:

**Yên Bái:** *Hoàng Công Hiếu*, 6A, THCS Cát Thịnh; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hữu Dũng*, 6A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Chinh*, 6, THCS Triệu Đề, *Phạm Thị Ngọc Phú*, 6D, THCS Lập Thạch ; *Nguyễn Thị Thu Đương*, *Trương Thị Ánh*, 6A1, THCS Yên Lạc; **Hà Nội:** *Nguyễn Anh Tú*, 6I, THCS Marie Curie, *Hoàng Phương Linh*, 6, THCS Hà Nội – Amsterdam, *Lê Minh Phúc*, 6A5, THCS Giảng Võ; **Hải Dương:** *Phạm Viết Phú*, 5B, TH Cộng Hòa, Kim Thành; **Hà Tĩnh:** *Dương Văn Hiền*, 6B, THCS Phong Bắc, Kỳ Phong, Kỳ Anh; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Bao*, 6A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** *Phan Đại Dương*, 6A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Thanh Hóa:** *Hoàng Tiến Dũng*, 6A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, *Nguyễn Anh Tuấn*, 6CLC, THCS DL Triệu Sơn, *Mai Thu Phương*, 6, THCS Lý Thường Kiệt, Hà Trung.

HOÀNG TRỌNG HẢO

**★ Bài T2/362.** *Giả sử AH là đường cao của tam giác ABC vuông ở A. Gọi P và Q theo thứ tự là giao điểm các đường phân giác trong của các tam giác ABH và ACH. Đường thẳng PQ cắt AB tại E và cắt AC tại F. Chứng minh rằng AE = AF.*

***Lời giải.***




Giả sử tia phân giác $BP$ cắt tia phân giác $CQ$ tại $K$ và cắt $AQ$ tại $M$, tia $CQ$ cắt $AP$ tại $N$ thì $AK$ là tia phân giác của góc $BAC$ (1)

Ta có $\widehat{BAH} = \widehat{ACH}$ (2)

Từ đó $\widehat{BAP} = \widehat{ACN}$, suy ra $\widehat{CAN} + \widehat{ACN} = \widehat{CAN} + \widehat{BAP} = 90^o$, nên $CN \perp AP$. Chứng minh tương tự có $BM \perp AQ$. Tam giác $APQ$ có ba đường cao đồng quy nên $AK \perp PQ$ (3)

Từ (1) và (3) suy ra tam giác $AEF$ cân tại $A$ hay $AE = AF$. ❐

**Nhận xét.** 1) Ngoài cách giải nêu trên (cách 1) xin nêu một số cách chứng minh khác.

*Cách 2.* Tia $AQ$ cắt $BC$ tại $D$. Sử dụng (2) có $\widehat{ADB} = \widehat{ACD} + \widehat{CAD} = \widehat{BAH} + \widehat{HAD} = \widehat{BAD}$ nên $\Delta ABD$ cân tại $B$, mà $BP$ là tia phân giác của góc $BAD$ nên $BM \perp AD$. Tương tự có $CN \perp AP$, rồi lập luận như ở cách 1.

*Cách 3.* Ta có $\widehat{PAQ} = \frac{1}{2}\widehat{BAH} + \frac{1}{2}\widehat{CAH} = 45^o$. Mặt khác $\widehat{AQN} = \widehat{CAQ} + \widehat{ACQ} = \frac{1}{2}\widehat{CAH} + \frac{1}{2}\widehat{ACH} = 45^o$, suy ra $\widehat{ANQ} = 90^o$ hay $CN \perp AP$.

Tương tự có $BM \perp AQ$, rồi lập luận như ở cách 1.

*Cách 4.* Trên $AB$ lấy $E'$ và trên $AC$ lấy $F'$ sao cho $AE' = AF' = AH$ thì $\widehat{AE'F'} = \widehat{AF'E'} = 45°$. $EF'$ cắt tia $AP$ ở $P'$ và cắt tia $AQ$ ở $Q'$. Dễ thấy $\Delta AP'E' = \Delta AP'H$ (c.g.c), suy ra $\widehat{AHP'} = 45°$ và $\widehat{BHP} = 45°$ nên $P$ trùng $P'$. Tương tự $Q$ trùng $Q'$, suy ra $E$ trùng $E'$ và $F$ trùng $F'$.

2) Các bạn có lời giải đúng, trình bày gọn là :

**Phú Thọ:** *Kim Huyền Trang*, 7A1, *Trần Thùy Linh*, 7A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Chinh*, 6, THCS Triệu Đề, Lập Thạch, *Tạ Thị Mai Hạnh*, *Lê Văn Tú*, *Nguyễn Hoàng Hào*, 7A1, THCS Yên Lạc; **Bắc Giang:** *Nguyễn Nam Anh*, 7A, THCS Đức Thắng, Hiệp Hòa, *Tống Thị Thu Hòa*, 7A, THCS Phúc Sơn, Tân Yên; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hữu Dũng*, 6A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài, *Ngô Quang Quân*, 7A, THCS Yên Phong; **Hà Tây:** *Trần Khánh Linh*, 7B, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ; **Hưng Yên:** *Lương Thùy Linh*, 7D, THCS Lê Lợi, TX. Hưng Yên; **Hà Nam:** *Nguyễn Hải Đăng*, 7A, THCS Nhân Mỹ, Lý Nhân; **Thanh Hóa:** *Mai Thu Phương*, 6A, THCS Lý Thường Kiệt, Hà Trung, *Hoàng Văn Hiệp*, 7C, THCS Triệu Thị Trinh, Triệu Sơn, *Hoàng Thị Tố Anh*, 7D, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Nghệ An:** *Trần Ngọc Đông*, *Võ Duy Văn*, *Đặng Trung Anh*, *Lê Ngọc Nguyên*, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Hoàng Văn Đông*, *Nguyễn Văn Thắng*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Đậu Hoàng Giáp*, 7B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thị Kim Oanh*, 7C, THCS Bắc Hồng, Hồng Lĩnh; **Quảng Nam:** *Phạm Hoàng Thiện*, 7/1, THCS Lương Thế Vinh, Phú Ninh; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thị Diễm My*, *Nguyễn Thị Trâm*, 7A, THCS Hành Trung, *Hồ Tấn Vũ*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Khánh Hòa:** *Vũ Ngọc Cương*, 7/1, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

NGUYỄN VIỆT HẢI

**★Bài T3/362.** *Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x\,;\,y)$ sao cho $4x^2 + 6x + 3$ chia hết cho $2xy - 1$.*

***Lời giải.*** Lưu ý rằng $4x^2+6x+3$ chia hết cho $2xy-1$ khi và chỉ khi $m=\dfrac{4x^2+6x+3}{2xy-1}$ (1) là một số nguyên .

Từ đó $my=\dfrac{4x^2y+6xy+3y}{2xy-1}$

$=2x+3+\dfrac{2x+3y+3}{2xy-1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\dfrac{2x+3y+3}{2xy-1}\in\mathbb{Z}$.

Vì $x$, $y$ là các số nguyên dương và $2xy-1$ là ước của $2x+3y+3$ nên

$2xy-1\le 2x+3y+3\Rightarrow 2x(y-1)\le 3y+4$ (2)

Xét các trường hợp :

1) Nếu $y = 1$ thì từ (1) suy ra

$m=\dfrac{4x^2+6x+3}{2x-1}=2x+4+\dfrac{7}{2x-1}$.

$m$ là số nguyên nên $2x-1$ là ước của 7.

Do đó $\left[\begin{array}{l}2x-1=1\\2x-1=7\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4.\end{array}\right.$

Các cặp số $(x\,;\,y)=(1\,;\,1)$, $(4\,;\,1)$ thoả mãn bài toán.

2) Nếu $y\ge 2$ thì từ (2) suy ra

$x\le\dfrac{3y+4}{2(y-1)}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{2y-2}\le\dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{2}=5$.

Do đó $x\in\{1,2,3,4,5\}$.

Từ (1) và $y\ge 2$, ta có các khả năng sau:

• Với $x = 1$: $\begin{cases}m=\dfrac{13}{2y-1}\in\mathbb{Z}\\2y-1\ge 3\end{cases}\Rightarrow 2y-1=13\Rightarrow y=7$;

cặp số $(x\,;\,y)=(1\,;7)$ thoả mãn bài toán.

• Với $x = 2$: $\begin{cases}m=\dfrac{31}{4y-1}\in\mathbb{Z}\\4y-1\ge 7\end{cases}\Rightarrow 4y-1=31\Rightarrow y=8$;

cặp số $(x\,;\,y)=(2\,;\,8)$ thoả mãn bài toán.

• Với $x = 3$: $\begin{cases}m=\dfrac{57}{6y-1}\in\mathbb{Z}\\6y-1\ge 11\end{cases}\Rightarrow 6y-1=57\Rightarrow y\notin\mathbb{N}$

• Với $x = 4$: $\begin{cases}m=\dfrac{91}{8y-1}\in\mathbb{Z}\\8y-1\ge 15\end{cases}\Rightarrow 8y-1=91\Rightarrow y\notin\mathbb{N}$

• Với $x = 5$:

$\begin{cases}m=\dfrac{133}{10y-1}\in\mathbb{Z}\\10y-1\ge 19\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}10y-1=19\Rightarrow y=2\\10y-1=133\Rightarrow y\notin\mathbb{N}.\end{array}\right.$

Cặp số $(x\,;\,y)=(5\,;\,2)$ thoả mãn bài toán.

Vậy các cặp số nguyên dương phải tìm là $(x\,;y)=(1\,;\,1),(4\,;\,1),(1\,;\,7),(2\,;\,8),(5\,;\,2)$.□

**Nhận xét.** 1) Một số bạn đã giải theo cách :
Đặt $4x^2 + 6x + 3 = m(2xy - 1)$ ; sau đó xét các trường hợp $m = 1$, $m = 2$,.. ; làm như vậy lời giải sẽ dài dòng và dễ gây sơ suất.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt :
**Lạng Sơn :** *Lại Hoàng Nam*, 7A, THCS Chu Văn An, TP Lạng Sơn; **Hải Dương:** *Mạc Đức Huy*, 9C, THCS Phạm Sư Mạnh, Kinh Môn; **Hà Tây :** *Nguyễn Minh Hiếu*, 9A3, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Hà Nội :** *Phạm Duy Long*, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Q. Cầu Giấy ; **Nghệ An :** *Đậu Thế Vũ*, 9B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Vũ Đình Long*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Phú Yên :** *Phạm Quang Thịnh*, 8H, THCS Hùng Vương, *Nguyễn Thị Ka Ly*, 9G, THCS Lương Thế Vinh, TP Tuy Hòa; **Sóc Trăng :** *Quách Thanh Thiên*, 7/4, THCS Trường Khánh, Long Phú; **Cần Thơ :** *Lê Đại Thành*, 9A4, THCS Trà Nóc, TP Cần Thơ.

NGUYỄN ANH DŨNG

**★Bài T4/362.** *Giải phương trình*
$$\sqrt{2x^2+4x+7} = x^4+4x^3+3x^2-2x-7.$$

***Lời giải.*** *Cách 1.* Biến đổi PT như sau:
$$4\sqrt{2x^2+4x+7} = (2x^2+4x+7)^2 - 16(2x^2+4x+7)+35.$$
Đặt $\sqrt{2x^2+4x+7} = a$ (với $a \ge \sqrt{5}$), ta có
$$4a = a^4 - 16a^2 + 35 \Leftrightarrow (a^2-6)^2 = (2a+1)^2$$
$$\Leftrightarrow (a^2-2a-7)(a^2+2a-5) = 0 \quad (*)$$
Với $a \ge \sqrt{5}$ thì $a^2 + 2a - 5 > 0$, nên từ (*) suy ra $a^2 - 2a - 7 = 0$. PT này có hai nghiệm là $1 \pm 2\sqrt{2}$ . Đối chiếu với điều kiện $a \ge \sqrt{5}$ chỉ chọn được $a = 1+2\sqrt{2}$.
Khi đó $\sqrt{2x^2+4x+7} = 1+2\sqrt{2}$.
$$\Leftrightarrow x^2+2x-(1+2\sqrt{2}) = 0 \quad (**)$$
PT (**) có hai nghiệm là $-1 \pm \sqrt{2+2\sqrt{2}}$. Vậy tập nghiệm của PT đã cho là $\{-1 \pm \sqrt{2+2\sqrt{2}}\}$.

*Cách 2.* Biến đổi PT về dạng
$$\sqrt{2(x+1)^2+5} = (x+1)^4 - 3(x+1)^2 - 5.$$
Đặt $(x+1)^2 = u$; $\sqrt{2(x+1)^2+5} = v$ (với $u \ge 0$, $v \ge \sqrt{5}$ ). Ta có hệ
$$\begin{cases} u^2-3u-5=v \\ 2u+5=v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2-u=v^2+v \\ 2u+5=v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-v-1=0 \\ v=\sqrt{2u+5} \end{cases}$$
Dẫn đến $u^2 - 4u - 4 = 0$, PT này có hai nghiệm $2 \pm 2\sqrt{2}$ . Do $u \ge 0$ nên chọn $u = 2+2\sqrt{2}$ . Từ đó suy ra kết quả như cách 1. ❒

**Nhận xét.** Bài này rất nhiều bạn tham gia giải và đưa ra các cách giải tương tự như hai cách trên. Các bạn sau đây có lời giải tốt.

**Hà Nội**: *Phạm Duy Long*, *Nguyễn Thị Diệu Linh*, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy; **Hà Tây**: *Nguyễn Minh Hiếu*, $9A_3$, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Vĩnh Phúc**: *Nguyễn Xuân Huy*, 7A, THCS Vĩnh Yên, *Nguyễn Thị Kim Tuyến*, *Phùng Ngọc Quý*, $8A_1$,THCS Yên Lạc, *Khương Mạnh Thắng*, 9A, THCS Lập Thạch; **Bắc Ninh**: *Nguyễn Như Ngọc*, 6A, THCS Nguyễn Cao, *Nguyễn Quang Rực*, 8A, THCS Yên Phong; **Bắc Giang:** *Tống Thị Thu Hoài*, $7A_1$, THCS Phúc Sơn, Tân Yên; **Phú Thọ**: *Đỗ Phương Nam*, 8B, THCS Nguyễn Quang Bích, *Nguyễn Trường Giang*, $9A_2$, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; **Nam Định**: *Nguyễn Văn Quý*, 9A, *Bùi Văn Vượng*, 9B, THCS Hải Hậu; **Điện Biên**: *Phạm Ngọc Quyết*, 9A8, THCS Mường Thanh; **Hà Tĩnh**: *Dương Văn Hiển*, 7B, THCS Văn Trị, Thạch Hà, *Lê Thị Bao Hà*, 9G, THCS Bình An; **Thanh Hoá**: *Mai Thu Phương*, 6A, THCS Lý Thường Kiệt, Hà Trung, *Lý Văn Long*, 8A, THCS Nga Văn, Nga Sơn; **Hải Dương**: *Nguyễn Văn Khang*, 9B, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách; **Nghệ An**: *Đậu Thế Vũ*, 9B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Vũ Đình Long*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Khánh Hoà**: *Trần Thị Ánh Nguyên*, $9^7$, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Phú Yên**: *Phạm Quang Thịnh*, 8H, THCS Hùng Vương, TP Tuy Hoà, *Trần Hữu Dũng*, 9B, THCS An Chấn, Tuy An; **Bình Định**: *Nguyễn Đông Tiến*, $9A_3$, THCS Lương Thế Vinh, TP. Quy Nhơn, *Trần Quốc Trạch*, $9A_6$, THCS Phước Hưng, Tuy Phước, *Lê Nguyễn Nhựt*, $9A_4$, THCS Nhơn Hoà, An Nhơn; **Đồng Nai**: *Trần Đức Toàn*, 9/2, THCS Bình Đa, Biên Hoà; **TP. Hồ Chí Minh**: *Bùi Trần Long*, 9A5, THCS Chu Văn An, Quận 1.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

**★Bài T5/362.** *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $A = \dfrac{x}{x^2+yz} + \dfrac{y}{y^2+zx} + \dfrac{z}{z^2+xy}$ *trong đó x, y, z là các số thực dương thỏa mãn* $x^2+y^2+z^2 = xyz$.

***Lời giải.***
• Nhận xét rằng với mọi số $a$, $b$, $c$ ta luôn có $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \ge 0$ hay
$$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca \quad (1)$$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

• Áp dụng BĐT Cauchy và BĐT (1), kết hợp với giả thiết $x^2+y^2+z^2=xyz$, ta có

$$A \le \frac{x}{2\sqrt{x^2.yz}}+\frac{y}{2\sqrt{y^2.zx}}+\frac{z}{2\sqrt{z^2.xy}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}.\frac{1}{\sqrt{z}}+\frac{1}{\sqrt{z}}.\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}.\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}.\frac{yz+xz+xy}{xyz}$$

$$\le \frac{1}{2}.\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}=\frac{1}{2}.$$

Rõ ràng $A=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=y=z=3$.

Vậy max$A=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=y=z=3$. ❐

**Nhận xét.** Có rất nhiều bạn tham gia giải bài này. Các phương pháp giải là khá phong phú. Các bạn có lời giải ngắn gọn là:

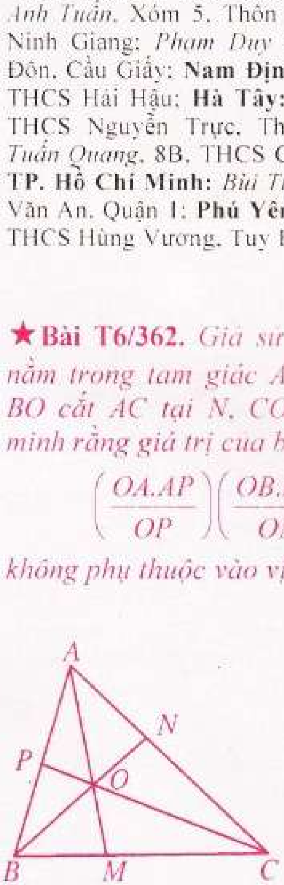
**Vĩnh Phúc:** *Phùng Ngọc Quý, Lê Thị Tuyết Mai,* 8A1, THCS Yên Lạc, *Nguyễn Đăng Hiếu,* 9C, THCS Vĩnh Tường; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Như Ngọc,* 6A, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ; **Hải Dương:** *Nguyễn Anh Tuấn,* Xóm 5, Thôn Tiền Liệt, Xã Tân Phong, Ninh Giang; *Phạm Duy Long,* 9H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy; **Nam Định:** *Phan Quang Hưng,* 9C, THCS Hải Hậu; **Hà Tây:** *Nguyễn Minh Hiếu,* 9A3, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Nghệ An:** *Lưu Tuấn Quang,* 8B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **TP. Hồ Chí Minh:** *Bùi Trần Long,* 9A5, THCS Chu Văn An, Quận 1; **Phú Yên:** *Phạm Quang Thịnh,* 8H, THCS Hùng Vương, Tuy Hòa.

TRẦN HỮU NAM

**★Bài T6/362.** *Giả sử O là một điểm bất kì nằm trong tam giác ABC. AO cắt BC tại M, BO cắt AC tại N, CO cắt AB tại P. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức*

$$\left(\frac{OA.AP}{OP}\right)\left(\frac{OB.BM}{OM}\right)\left(\frac{OC.CN}{ON}\right)$$

*không phụ thuộc vào vị trí điểm O.*




***Lời giải.*** *(Theo đa số các bạn).*

Sử dụng phương pháp tỉ số diện tích.

Ta thấy $\frac{S_{AOP}}{S_{BOP}}=\frac{AP}{BP}$, suy ra

$$\frac{S_{AOP}}{S_{AOP}+S_{BOP}}=\frac{AP}{AB} \qquad (1)$$

Mặt khác $\frac{S_{AOP}+S_{BOP}}{S_{BOM}}=\frac{OA}{OM}$ (2)

Từ (1) và (2) thu được $\frac{S_{AOP}}{S_{BOM}}=\frac{OA.AP}{AB.OM}$ (3)

Tương tự cũng có $\frac{S_{BOM}}{S_{CON}}=\frac{OB.BM}{BC.ON}$ (4)

$$\frac{S_{CON}}{S_{AOP}}=\frac{OC.CN}{AC.OP} \qquad (5)$$

Nhân (3), (4) và (5) theo vế, ta được

$$\left(\frac{OA.AP}{AB.OM}\right)\left(\frac{OB.BM}{BC.ON}\right)\left(\frac{OC.CN}{AC.OP}\right)=1.$$

Vậy $\left(\frac{OA.AP}{OP}\right)\left(\frac{OB.BM}{OM}\right)\left(\frac{OC.CN}{ON}\right)=AB.BC.CA.$

Chứng tỏ giá trị của biểu thức đã cho ở đề bài không phụ thuộc vào vị trí điểm $O$. ❐

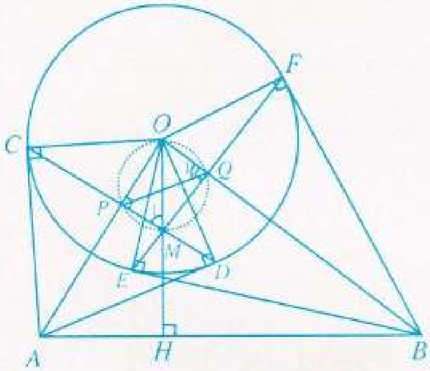
**Nhận xét.** Để giải bài toán này nhiều bạn phải viện đến *định lí Menelaus, định lí Ceva* hoặc *định lí Van-Oben:* $\frac{OA}{OM}=\frac{AP}{BP}+\frac{AN}{CN}$. Chỉ có một số ít bạn chứng minh lại các định lí này dưới dạng các bổ đề. Các bạn sau có lời giải tốt hơn cả:

**Bắc Ninh:** *Nguyễn Ngọc Long,* 9A, THCS Huyện Thuận Thành; **Vĩnh Phúc:** *Lê Thị Tuyết Mai, Phùng Ngọc Quý, Nguyễn Thị Kim Tuyến,* 8A1, THCS Yên Lạc; **Nam Định:** *Lê Thị Phương Thanh,* 8A4, THCS Trần Đăng Ninh, *Nguyễn Hải Thịnh,* 9A11, THCS Phùng Chí Kiên, *Nguyễn Xuân Trường,* 6, THCS Lý Tự Trọng, TP. Nam Định; **Thái Bình:** *Hoàng Minh Lập,* 9E, THCS Quang Trung, Kiến Xương; **Thanh Hóa:** *Lê Thế Vinh,* 9B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Nghệ An:** *Lê Thị Quỳnh Giang, Dương Hồ Minh Tú, Tô Nhật Minh, Đàm Ngọc Mạnh, Đậu Đức An, Nguyễn Hữu Phong, Hồ Anh Quân,* 8B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Đậu Thế Vũ,* 9B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thị Diễm My, Nguyễn Thị Trâm,* 7A, THCS Hành Trung, *Hồ Tấn Vũ,* 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, *Hoàng Quang Ngọc,* 9A4, THCS Nguyễn Nghiêm, TP. Quảng Ngãi; **Cần Thơ:** *Lê Đại Thành,* 9A4, THCS Trà Nóc, TP. Cần Thơ.

HỒ QUANG VINH

**★Bài T7/362.** *Giả sử đường tròn (O) với tâm O bán kính R. Qua M vẽ hai dây cung CD và EF không đi qua tâm O. Hai tiếp tuyến tại C,* *D của (O) cắt nhau tại A, hai tiếp tuyến tại E, F của (O) cắt nhau tại B. Chứng minh rằng hai đường thẳng OM và AB vuông góc với nhau.*

**Lời giải.** *Cách 1.* Ta chứng minh cho trường hợp điểm $M$ nằm trong đường tròn $(O)$ và hai dây $CD$, $EF$ có vị trí như hình vẽ. Các trường hợp còn lại, bạn đọc tự vẽ hình và chứng minh tương tự.




Gọi $H$ là giao điểm của $OM$ và $AB$; $P$ là giao điểm của $OA$ và $CD$; $Q$ là giao điểm của $OB$ và $EF$. Ta có $OA \perp CD$, $OB \perp EF$.

Trong $\Delta OAC$ vuông tại $C$ có $CP$ là đường cao nên $OP.OA = OC^2 = R^2$ (1)

$\Delta OBF$ vuông tại $F$ có $FQ$ là đường cao nên $OQ.OB = OF^2 = R^2$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $OP.OA = OQ.OB \Rightarrow \frac{OP}{OQ} = \frac{OB}{OA}$;

góc $\widehat{POQ}$ chung, do đó $\Delta OPQ \backsim \Delta OBA$ (c.g.c). Suy ra $\widehat{OAB} = \widehat{Q_1}$ (3)

Mặt khác, $\widehat{OPM} = \widehat{OQM} = 90^\circ$, nên tứ giác $OPMQ$ nội tiếp được đường tròn, suy ra $\widehat{Q_1} = \widehat{M_1}$ (4)

Ta lại có $\widehat{M_1} + \widehat{PMH} = 180^\circ$ (kề bù) (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra $\widehat{OAB} + \widehat{PMH} = 180^\circ$. Do đó tứ giác $AHMP$ nội tiếp được đường tròn. Vì $\widehat{APM} = 90^\circ$ suy ra $\widehat{AHM} = 90^\circ$ $(= \widehat{APM})$. Vậy $OM \perp AB$.

*Cách 2.* Hạ $AA'$ và $BB'$ vuông góc với $OM$. Ta có $\Delta OPM \backsim OA'A$, suy ra $OM.OA' = OP.OA = OC^2 = R^2$. Tương tự $OM.OB' = R^2$, suy ra $OA' = OB' \Rightarrow A' \equiv B'$. ❒

**Nhận xét.** 1) Ngoài cách giải 1 (của đa số các bạn) và cách 2 có thể sử dụng kiến thức về phương tích của điểm đối với đường tròn. Dễ thấy $A$ và $B$ có cùng phương tích đối với đường tròn $(O)$ và đường tròn đường kính $OM$, suy ra đường thẳng $AB$ là trục đẳng phương của hai đường tròn, do đó $AB \perp OM$.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:
**Bắc Ninh:** *Nguyễn Ngọc Long*, 9A, THCS TTr. Thuận Thành; **Hà Tây:** *Nguyễn Minh Hiếu*, 9A3, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Hà Nam:** *Nguyễn Đức Vinh*, 9B, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; **Thanh Hóa:** *La Hồng Quân*, 9B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, *Lý Văn Long*, 8B, THCS Nga Văn, Nga Sơn; **Nghệ An:** *Vũ Đình Long*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Phú Yên:** *Huỳnh Khánh Vân*, 8E, THCS Trần Quốc Toản, *Phạm QuangThịnh*, 8H, *Phan Long Tri Yên*, 9I, THCS Hùng Vương, Tuy Hòa; **Bình Định:** *Nguyễn Đồng Tiến*, 9A3, THCS Lương Thế Vinh, TP. Quy Nhơn; **Đồng Nai:** *Trần Đức Toàn*, 9/2, THCS Bình Đa, Biên Hòa; **Cần Thơ:** *Lê Đại Thành*, 9A4, THCS Trà Nóc, TP. Cần Thơ.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

**★ Bài T8/362.** *Cho $p$ là một số nguyên tố lớn hơn 2007 và $n$ là số nguyên dương lớn hơn 2006p. Chứng minh rằng $C_n^{2006p} - C_k^{2006}$ chia hết cho $p$, trong đó $k = \left[\frac{n}{p}\right]$ là phần nguyên của $\frac{n}{p}$.*

***Lời giải.*** (Theo bạn *Đoàn Nhật Minh*, 11A14, THPT Ngô Gia Tự, **Đăk Lăk**).

Giả sử $n = kp + r$ $(0 \le r < p,\ k \ge 2006)$.

Xét dãy $n, n-1, \dots, n-2006p+1$.

Dãy này gồm $2006p$ số tự nhiên liên tiếp nên có đúng 2006 số chia hết cho $p$. Các số đó là $kp, (k-1)p, \dots, (k-2005)p$.

Loại 2006 số này ra và xét đồng dư theo modulo $p$ ta có dãy $1, 2, \dots, p-1, 1, 2, \dots, p-1$ (theo thứ tự nào đó) trong đó các số $1, 2, \dots, p-1$ được lặp lại 2006 lần. Như vậy

$$Q = \frac{n(n-1)\dots(n-2006p+1)}{kp(k-1)p\dots(k-2005)p} \equiv [(p-1)!]^{2006} \pmod p$$

Theo định lí Wilson $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$ nên suy ra $Q \equiv 1 \pmod p$ (1)

Ta có

$$C_n^{2006p} = \frac{n(n-1)...(n-2006p+1)}{(2006p)!} = \frac{Qk(k-1)...(k-2005)p^{2006}}{(2006p)!} = \frac{Qk(k-1)...(k-2005)}{R(2006)!} = \frac{QC_k^{2006}}{R}.$$

Ở đó $R = \dfrac{(2006p)!}{2006!\,p^{2006}}$.

Lí luận như trên (xét dãy $2006p, ..., 2, 1$ gồm $2006p$ số tự nhiên với 2006 số chia hết cho $p$ là $2006p, 2005p, ..., p$) ta được

$$R \equiv 1 \pmod p \qquad (3)$$

Từ (1) ta có $R.C_n^{2006p} = Q.C_k^{2006}$ (4)

Vì $R \equiv Q \equiv 1 \pmod p$ nên từ (2), (3), (4) ta thu được $C_n^{2006p} \equiv C_k^{2006} \pmod p$

Đó là điều phải chứng minh. ❐

**Nhận xét.** 1) Rất hoan nghênh bạn *Lê Duy Dũng* (11A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**) đã đề xuất và giải đúng bài toán tổng quát sau đây:

"Cho $p$ là một số nguyên tố và $a, b, x, y$ là các số tự nhiên với $a > b > 0$, $0 \le y \le x < p$.

Chứng minh rằng $C_{pa+x}^{pb+y} \equiv C_a^b C_x^y \pmod p$.

2) Ngoài bạn *Minh*, các bạn sau đây có lời giải tốt:

**Vĩnh Phúc:** *Văn Mạnh Tuấn*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nam:** *Nguyễn Văn Hùng*, 11 Toán, THPT chuyên; **Nam Định:** *Trần Thị Hồng Vân*, 10A, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hải Dương:** *Đỗ Đức Tài*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Thanh Hóa:** *Hoàng Đức Ý*, 12T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Thân Trọng Đức*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Đăk Lăk:** *Nguyễn Hoàng Phương*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Du; **Bình Thuận:** *Phí Thái Thuận*, 10 Toán, THPT Trần Hưng Đạo, Phan Thiết.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

**★Bài T9/362.** *Cho dãy số $(u_n)$ được xác định bởi $u_1$ và $u_{n+1} = \dfrac{k+u_n}{1-u_n}$, trong đó $k > 0$, $n = 1, 2,...$ Biết rằng $u_{13} = u_1$. Hãy tìm các giá trị của k.*

***Lời giải.*** Chú ý $u_{n+1} = \dfrac{k+u_n}{1-u_n}$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k} + \dfrac{u_n}{\sqrt{k}}}{1-\sqrt{k}.\dfrac{u_n}{\sqrt{k}}} \qquad (1)$$

Đặt $\sqrt{k} = \tan\alpha$, $\dfrac{u_1}{\sqrt{k}} = \tan\beta$,

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2} < \beta < \dfrac{\pi}{2}$.

Từ (1), chứng minh bằng quy nạp theo $n = 1, 2, 3, ...$ ta có $\dfrac{u_n}{\sqrt{k}} = \tan((n-1)\alpha + \beta)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Do đó $u_{13} = u_1 \Leftrightarrow \tan(12\alpha + \beta) = \tan\beta$

$\Leftrightarrow 12.\alpha = l.\pi$ $(l \in \mathbb{Z})$.

Vì $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow l \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Tương ứng $\alpha \in \left\{\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{12}\right\}$.

Nhận xét rằng

$$\tan^2\frac{\pi}{12} = \frac{1-\cos\dfrac{\pi}{6}}{1+\cos\dfrac{\pi}{6}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = (2-\sqrt{3})^2 = 7-4\sqrt{3};$$

$$\tan^2\frac{5\pi}{12} = \cot^2\frac{\pi}{12} = 7+4\sqrt{3}.$$

Vậy có năm số dương $k$ thỏa mãn $u_{13} = u_1$ là

$$k \in \left\{7-4\sqrt{3}, \frac{1}{3}, 1, 3, 7+4\sqrt{3}\right\}. \;❐$$

**Nhận xét.** 1) Qua lời giải trên ta thấy: nếu $u_{13} = u_1$ với một số $u_1$ nào đó thì nó cũng đúng với mọi số thực $u_1$ mà dãy số xác định.

2) Ngoài lời giải bằng phương pháp lượng giác trên, bài toán còn có thể giải bằng những cách khác:

*) Tính $u_7$ theo $u_1$ và tính $u_7$ theo $u_{13}$, $u_{13} = u_1$ suy ra phương trình tính $k$.

*) Xét hàm số $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Xác định $a, b, c, d$ để $f(u_{n+1}) = t.f(u_n)$ ($t$ được xác định theo $a, b, c, d$).

$u_{13} = u_1 \Rightarrow f(u_1) = f(u_{13}) = t^{12}.f(u_1)$ (2)

Giải phương trình $t^{12} = 1$ ta tính được $k$, v.v... Phương pháp (2) trên được dùng trong rất nhiều bài toán. Nhưng với bài toán trên thì phương pháp lượng giác cho lời giải ngắn gọn, sáng sủa nhất.

3) Các bạn sau có lời giải đúng:

**Hà Nội:** *Trần Thế Khải*, 10A1, *Trịnh Ngọc Dương*, 12A1, Khối THPT chuyên, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội; **Nam Định:** *Đồng Khan Tú*, 11T, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** *Hoàng Đức Ý*, 12T, THPT Lam Sơn; **Bình Định:** *Trần Quốc Thuận*, *Lê Quang Vinh*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** *Phạm Quang Thịnh*, 8H, THCS Hùng Vương, *Phan Sơn Dương*, 11T2, THPT Lương Văn Chánh; **Đăk Lăk:** *Nguyễn Hoàng Phương*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Du; **Kiên Quang:** *Vũ Đại Nghĩa*, 11T, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, TP. Rạch Giá.

NGUYỄN MINH ĐỨC

**★Bài T10/362.** *Giả sử a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+3bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+3ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+3ab}}\ge\frac{3}{2}.$$

***Lời giải.*** Đặt $\frac{a}{\sqrt{a^2+3bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+3ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+3ab}}=A$.

Sử dụng liên tiếp bất đẳng thức Bunyakovski, ta có

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+3bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+3ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+3ab}}\right)\times$$
$$\left(a\sqrt{a^2+3bc}+b\sqrt{b^2+3ca}+c\sqrt{c^2+3ab}\right)$$
$$\ge(a+b+c)^2,$$

hay $A^2\ge\dfrac{(a+b+c)^4}{\left(a\sqrt{a^2+3bc}+b\sqrt{b^2+3ca}+c\sqrt{c^2+3ab}\right)^2}$ (1)

và $\left(a\sqrt{a^2+3bc}+b\sqrt{b^2+3ca}+c\sqrt{c^2+3ab}\right)^2$

$$=\left(\sqrt{a}\sqrt{a^3+3abc}+\sqrt{b}\sqrt{b^3+3abc}+\sqrt{c}\sqrt{c^3+3abc}\right)^2$$
$$\le(a+b+c)(a^3+3abc+b^3+3abc+c^3+3abc)$$
$$=(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+9abc) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $A^2\ge\dfrac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+c^3+9abc}$.

Tiếp theo, ta chứng minh

$$\frac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+c^3+9abc}\ge\frac{9}{4}.$$

$\Leftrightarrow 4(a+b+c)^3-9(a^3+b^3+c^3+9abc)\ge0$ (3)

Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$, ta có

$$0\le(a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC})^2$$
$$=a^2GA^2+b^2GB^2+c^2GC^2+2ab.\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}$$
$$+2bc.\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+2ca.\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}$$
$$=a^2GA^2+b^2GB^2+c^2GC^2+ab(GA^2+GB^2-c^2)$$
$$+bc(GB^2+GC^2-a^2)+ac(GC^2+GA^2-b^2).$$

Suy ra $aGA^2+bGB^2+cGC^2>abc$ (4)

Áp dụng công thức đường trung tuyến, suy ra

$GA^2=\dfrac{2a^2+2b^2-a^2}{9}$ và các đẳng thức tương tự vào (4) ta thu được

$$2(a+b+c)(ab+bc+ca)\ge a^3+b^3+c^3+15abc$$

Do đó $4(a+b+c)^3$

$$=4(a^3+b^3+c^3)+12(a+b+c)(ab+bc+ca)-12abc$$
$$\ge4(a^3+b^3+c^3)+6(a^3+b^3+c^3)+78abc$$
$$\ge9(a^3+b^3+c^3+9abc).$$

Vậy (3) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$, tức là tam giác $ABC$ là đều. ☐

**Nhận xét.** Đây là một bài toán chứng minh bất đẳng thức trong tam giác. Đa số các bạn đều sử dụng cách chứng minh bất đẳng thức

$$f(a,b,c)=4(a+b+c)^3-9(a^3+b^3+c^3+9abc)\ge0$$

theo phương pháp vectơ. Ngoài ra một số bạn sử dụng *phương pháp dồn biến* để chứng minh BĐT này, cụ thể là đi chứng minh $f(a,b,c)-f\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right)\ge0$. Tất cả các lời giải gửi về tòa soạn đều đúng.

NGUYỄN VĂN MẬU

**★Bài T11/362.** *Xét tứ giác ABCD có điểm P tùy ý nằm bên trong nó. Gọi M, N, K, L theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của P trên AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng*

$$\frac{AB}{PM}+\frac{BC}{PN}+\frac{CD}{PK}+\frac{DA}{PL}\ge\frac{p^2}{S}$$

*(p, S theo thứ tự là nửa chu vi và diện tích của ABCD).*

***Lời giải.*** (Theo bạn *Nguyễn Đức Tâm*, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**).

Đặt $AB=a$; $BC=b$; $CD=c$; $DA=d$,

$S_{ABCD}=S$; $S_{PAB}=S_1$; $S_{PBC}=S_2$; $S_{PCD}=S_3$; $S_{PDA}=S_4$.

Ta có $T=\dfrac{AB}{PM}+\dfrac{BC}{PN}+\dfrac{CD}{PK}+\dfrac{DA}{PL}$

$$=\frac{a^2}{2S_1}+\frac{b^2}{2S_2}+\frac{c^2}{2S_3}+\frac{d^2}{2S_4}$$

$$= \frac{1}{2S}(S_1+S_2+S_3+S_4)\left(\frac{a^2}{S_1}+\frac{b^2}{S_2}+\frac{c^2}{S_3}+\frac{d^2}{S_4}\right)$$

$$\ge \frac{(a+b+c+d)^2}{2S} \text{ (BĐT Bunyakovski)}$$

$$= \frac{4p^2}{2S} = \frac{2p^2}{S}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{\frac{a}{\sqrt{S_1}}}{\sqrt{S_1}} = \frac{\frac{b}{\sqrt{S_2}}}{\sqrt{S_2}} = \frac{\frac{c}{\sqrt{S_3}}}{\sqrt{S_3}} = \frac{\frac{d}{\sqrt{S_4}}}{\sqrt{S_4}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{S_1} = \frac{b}{S_2} = \frac{c}{S_3} = \frac{d}{S_4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\frac{1}{2}a.PM} = \frac{b}{\frac{1}{2}b.PN} = \frac{1}{\frac{1}{2}c.PK} = \frac{d}{\frac{1}{2}d.PL}$$

$\Leftrightarrow PM = PN = PK = PL$

$\Leftrightarrow ABCD$ là tứ giác ngoại tiếp và $R$ là tâm đường tròn nội tiếp của nó.

Chú ý $2S = S_{ABC} + S_{BCD} + S_{CDA} + S_{DAB}$

$$\le \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}cd + \frac{1}{2}da$$

$$= \frac{1}{2}(a+c)(b+d) \le \frac{1}{2}.\frac{1}{4}(a+c+b+d)^2$$

$$= \frac{1}{2}p^2 \Rightarrow \frac{2p^2}{S} \ge 8. \quad (*)$$

Đẳng thức ở (*) xảy ra khi và chỉ khi $ABCD$ là hình chữ nhật. Vậy $\frac{AP}{PM}+\frac{BC}{PN}+\frac{CD}{PK}+\frac{DA}{PL} \ge 8$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ABCD$ là hình vuông và $P$ là tâm của nó. ❒

**Nhận xét.** Trước hết, xin có đôi lời bình luận về bài toán này.

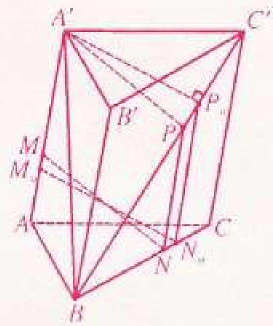
– Giả thiết "các góc $\widehat{PAB}, \widehat{PBA}, \widehat{PBC}, \widehat{PCB}, \widehat{PCD}, \widehat{PDC}, \widehat{PAD}, \widehat{PDA}$ trong bài T11/362 là các góc nhọn" là thừa, không cần thiết.

– Tuy nhiên, điều đáng nói ở chỗ, với tứ giác $ABCD$ bất kì. Cho đến nay, người ta vẫn không biết với vị trí nào của $P$ thì tổng $\frac{AB}{PN}+\frac{BC}{PN}+\frac{CD}{KL}+\frac{DA}{PL}$ nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất đó là bao nhiêu?

– Vì các lí do trên, chúng tôi thay đổi bài toán này thành bài toán mới như trên.

NGUYỄN MINH HÀ

★**Bài T12/362.** *Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Lấy các điểm $M$, $N$ theo thứ tự trên các cạnh $AA'$, $CB$ sao cho $\frac{AM}{AA'} = \frac{CN}{CB}$. Chứng minh rằng độ dài đoạn $MN$ không bé hơn khoảng cách từ đỉnh $A'$ đến đường thẳng $C'B$.*




***Lời giải.*** (Theo bạn *Dương Tú*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định** và nhiều bạn khác). Trong mặt bên $BCC'B'$ của lăng trụ kẻ tia $NP$ // $CC'$ cắt $BC'$ ở điểm $P$.

Từ $NP // CC' // AA'$ và $CC' = AA'$ ta được $\frac{BN}{BC} = \frac{NP}{CC'} = \frac{NP}{AA'}$ (1)

Mặt khác, từ giả thiết của bài toán: $\frac{AM}{AA'} = \frac{CN}{CB}$, ta lại có $\frac{MA'}{AA'} = \frac{BN}{BC}$ (2)

Đối chiếu (1) và (2) ta suy ra $NP$ // $MA'$ và $NP = MA'$ (3) và do đó tứ giác, $MNPA'$ là một hình bình hành.

Từ đó ta được $MN$ // $A'P$ và $MN = A'P$, rồi suy ra đpcm: $MN$ không bé hơn khoảng cách từ $A'$ đến đường thẳng $C'B$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi điểm $P \equiv P_0 = AP_0 \perp BC'$, và do đó $N_0 \in BC$ sao cho $P_0N_0 // C'C$ và $M \equiv M_0 \in AA'$ được xác định là đỉnh thứ tư của hình bình $A'P_0N_0M_0$. ❒

**Nhận xét.** 1) Bài toán trên đây chỉ cần có sáng kiến kẻ thêm đường phụ (dựng $NP // CC'$, $P \in BC'$) rồi sử dụng kiến thức hết sức cơ bản trong SGK về hình học phẳng: đó là định lí Thalès và định lí về so sánh độ dài đường vuông góc và đường xiên kẻ từ một điểm đến một đường thẳng.

2) Bạn *Lê Xuân Thăng*, 10A1, THPT Triệu Sơn 3 **Thanh Hóa** có nhận xét thêm rằng điều khẳng định trong bài toán vẫn đúng khi $M$ và $N$ là hai điểm tương ứng trên hai đường thẳng $AA'$ và $CB$ miễn là thay độ dài thông thường bởi độ dài đại số.

3) Tuy nhiên, có một số bạn giải quá dài do huy động cả đến định lí cosin, diện tích và xét dấu tam thức bậc hai. Cũng còn nhiều lời giải không xác định cụ thể vị trí $M_0$ của $M$ trên $AA'$ và $N_0$ của $N$ trên $CB$ để $MN$ có độ dài nhỏ nhất.

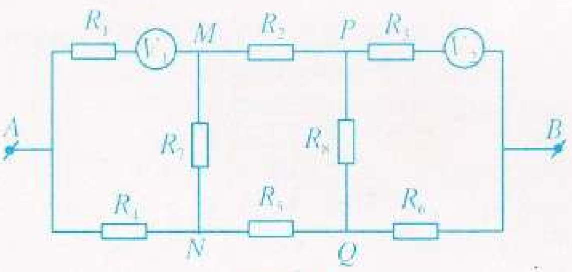
4) Bài toán sẽ trở nên khó hơn nếu thay đổi cách phát biểu đề toán từ dạng chứng minh sang dạng toán dựng hình sau đây: *Hãy xác định vị trí của M trên AA' và N trên BC sao cho* $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AA'}} = \dfrac{\overline{CN}}{\overline{CB}}$ *và đoạn thẳng MN có độ dài nhỏ nhất.*

5) Ngoài hai bạn *Dương Tú* và *Lê Xuân Thắng*, các bạn sau đây có lời giải đúng, biện luận đầy đủ và tương đối gọn gàng.

**Hà Nội:** *Nguyễn Ngọc Trung*, 10A1 Toán, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** *Phạm Văn Thành*, 11A1, *Hoàng Quốc Khánh*, 11A10, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thái Bình:** *Lê Ngọc Tú*, 11A8, THPT Bán công Kiến Xương, *Nguyễn Văn Pha*, 11A3, THPT Bắc Kiến Xương; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Nam Anh*, 12B12, THPT Đào Duy Từ, TP. Thanh Hóa; **Nghệ An:** *Nguyễn Đức Công*, 11A1, THPT Đô Lương I; **Bình Định:** *Bùi Hữu Nhân*, THPT Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Phú Yên:** *Trần Minh Hoàng*, THPT Dân lập Duy Tân, TP. Tuy Hòa; **Đăk Lăk:** *Nguyễn Đình Quốc Bảo*, 12CT, THPT chuyên Nguyễn Du, TP. Buôn Ma Thuột; **Vĩnh Long:** *Châu Tuấn Kiệt*, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TX. Vĩnh Long.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

**Bài L1/362.** *Cho mạch điện như hình 1.*

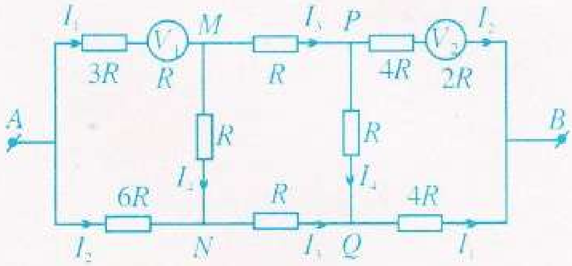



*Hình 1*

*Biết $R_2 = R_5 = R_7 = R_8 = R$, $R_1 = 3R$, $R_3 = 4R$, $R_4 = 6R$, $R_6 = 4R$. Điện trở các vôn kế: $R_{V_1} = R$, $R_{V_2} = 2R$. Hiệu điện thế $U_{AB} = U$ không đổi. Bỏ qua điện trở các dây nối. Gọi số chỉ các vôn kế $V_1$, $V_2$ lần lượt là $U_{V_1}$, $U_{V_2}$. Xác định tỉ số $\dfrac{U_{V_1}}{U_{V_2}}$.*

***Lời giải.*** (Theo bạn *Phạm Đức Linh*, 11 Lí, THPT chuyên **Hưng Yên**).

Giả sử dòng điện từ $A \to M$ là $I_1$, từ $A \to N$ là $I_2$, từ $M \to P$ là $I_3$ và từ $M \to N$ là $I_4$. Do tính đối xứng của (tổng) điện trở nửa bên trái và nửa bên phải mạch điện nên dòng điện từ $Q \to B$ là $I_1$, từ $P \to B$ là $I_2$, từ $N \to Q$ là $I_3$ còn từ $P \to Q$ là $I_4$ (h.2).




*Hình 2*

Ta có $I_1 = I_3 + I_4$ (1); $I_3 = I_2 + I_4$ (2)

$U_{AN} = (3R + R)I_1 + RI_4 = 6RI_2 \Rightarrow 4I_1 + I_4 = 6I_2$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta tìm được $9I_1 = 13I_2$

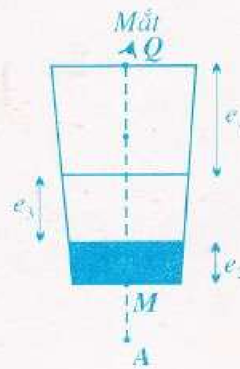
$\Rightarrow \dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{13}{9}$. Do vậy $\dfrac{U_{V_1}}{U_{V_2}} = \dfrac{R.I_1}{2R.I_2} = \dfrac{13}{2.9} = \dfrac{13}{18}$. ❐

**Nhận xét.** Ngoài bạn *Linh*, các bạn sau có lời giải tốt:

**Bắc Ninh:** *Nguyễn Văn Bao*, *Nguyễn Thu Hằng*, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Vĩnh Phúc:** *Lỗ Tất Thắng*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nam Định:** *Nguyễn Trung Hiếu*, 11A8, THPT Trần Hưng Đạo, TP. Nam Định; **Thanh Hóa:** *Lê Bá sơn*, 12F, THPT chuyên Lam Sơn, *Đoàn Minh Vương*, 10A1, THPT Hậu Lộc 4; **Nghệ An:** *Nguyễn Hồ Như Ý*, A3K34, *Phan Văn Thành*, 12A3, *Nguyễn Thanh Sơn*, A3K36, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Bình Định:** *Lê Nguyễn Pháp*, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Nguyễn Long*, 12A7, THPT Trần Phú, Kim Long, Châu Đốc.

NGUYỄN XUÂN QUANG

**Bài L2/362.** *Một cốc thủy tinh (chiết suất $n_2 = 1,5$) có đáy dày $e_2 = 0{,}6$cm (coi như một bản hai mặt song song). Trong cốc có một lớp nước dày $e_3 = 2$cm, chiết suất $n_3 = \dfrac{4}{3}$, trên nước là một lớp dầu*



*trong suốt dày $e_4 = 2{,}8$cm, chiết suất $n_4 = 1{,}4$. Đặt một điểm sáng A ở dưới đáy cốc M và cách M một khoảng $AM = d_1 = 1{,}5$cm. Nếu đặt mắt ở phía trên lớp dầu Q và nhìn thẳng đứng vào cốc thì sẽ thấy ảnh A' của A. Hỏi ảnh này cách mặt lớp dầu Q bao nhiêu centimet?*

***Lời giải.*** Có thể coi cốc thủy tinh có đáy dày chứa nước, dầu là một hệ các bản mặt song song, ghép sát nhau. Qua mỗi bản mặt song song thì vật lại cho ảnh ở gần bản hơn vật.

Sơ đồ tạo ảnh:

$$A \xrightarrow{e_2} A_1 \xrightarrow{e_3} A_2 \xrightarrow{e_4} A'$$

Áp dụng công thức bản hai mặt song song, ta có

$$AA_1 = e_2\left(1-\frac{1}{n_2}\right) = 0,6\left(1-\frac{1}{1,5}\right) = 0,2\,(\text{cm});$$

$$A_1A_2 = e_3\left(1-\frac{1}{n_3}\right) = 2\left(1-\frac{3}{4}\right) = 0,5\,(\text{cm});$$

$$A_2A' = e_4\left(1-\frac{1}{n_4}\right) = 2,8\left(1-\frac{1}{1,4}\right) = 0,8\,(\text{cm}).$$

Khoảng cách từ $A$ đến $A'$ là

$$AA' = AA_1 + A_1A_2 + A_2A' = 0,2+0,5+0,8 = 1,5\,(\text{cm}).$$

Như vậy ảnh $A'$ trùng với điểm $M$. Ảnh $A'$ cách mặt lớp dầu $Q$ là

$$A'Q = MQ = e_2 + e_3 + e_4 = 0,6+2+2,8 = 5,4\,(\text{cm}).$$ □

**Nhận xét**: Có thể giải bài toán này qua việc xác định vị trí ảnh của vật qua các lưỡng chất phẳng. Các bạn sau đây có lời giải gọn và tốt :

**Bắc Ninh**: *Nguyễn Thành Linh, Trần Việt Long, Nguyễn Văn Bảo*, 12 Lí, *Nguyễn Thu Huyền*, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Vĩnh Phúc**: *Phạm Hồng Ngọc An, Lỗ Tất Thắng*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Dương**: *Bùi Tiến Mạnh*, 12A1, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hải Phòng**: *Trần Hoàng Bá*, 12 Toán, THPT NK Trần Phú; **Hưng Yên**: *Phạm Đức Linh, Dạ Lan Hương*, 11 Lí, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình**: *Vũ Quang Hiệu*, 11A4, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ; **Thanh Hóa**: *Lê Bá Sơn, Nguyễn Duy Hùng*, 12F, THPT chuyên Lam Sơn, *Lê Nguyên Chí*, 11A3, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa ; **Nghệ An**: *Nguyễn Văn Dương*, A3K35, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Bình Định**: *Nguyễn Quốc Cường*, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN VĂN THUẬN

## PROBLEMS... *(Tiếp trang 17)*

**T5/366.** Let $PA$ and $PB$ be two tangent lines through a point $P$ outside a circle with center $O$. $OP$ and $AB$ meet at $M$. Draw a secant $CD$ through $M$ ($CD$ does not contain $O$). The tangent lines at $C$ and $D$ meet at $Q$. Find the measure of the angle $OPQ$.

### FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

**T6/366.** Find all pairs of positive integers $(x,y)$ such that $x^y + y = y^x + x$.

**T7/366.** Prove that if the equation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ has three distinct real roots, then so is $x^3 + ax^2 + (-a^2+4b)x + a^3 - 4ab + 8c = 0$.

**T8/366.** Let $I$ denote the incenter of an acute triangle $ABC$. The incircle $(I)$ touches $BC$, $CA$, and $AB$ at $D$, $E$, and $F$ respectively. The angle bisector of $BIC$ meets $BC$ at $M$, $AM$ meets $EF$ at $P$. Prove that $PD \geq \frac{1}{2}\sqrt{4DE.DF - EF^2}$.

### TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

**T9/366.** Let $a_1, a_2, \ldots, a_{2007}$ be pairwise distinct integers, all greater than 1, such that $\sum_{i=1}^{2007} a_i = 2017035$. Could it be possible that the sum $\sum_{i=1}^{2007} a_i^{a_i a_i}$ is a perfect square?

**T10/366.** Find all polynomial with real coefficients $P(x)$ such that $P(P(x)+x) = P(x)P(x+1)$ for all $x \in \mathbb{R}$.

**T11/366.** Let $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, and $a_5$ be non-negative real numbers whose sum equal 1. Prove the inequality

$$a_2a_3a_4a_5 + a_1a_3a_4a_5 + a_1a_2a_3a_5 + a_1a_2a_3a_4 \leq \frac{1}{256} + \frac{3275}{256}a_1a_2a_3a_4a_5.$$

When does equality occur ?

**T12/366.** Let $P$ be the intersection of the diagonals of an inscribed quadrilateral $ABCD$. Prove that all four Euler lines of the triangles $PAB$, $PBC$, $PCD$, and $PDA$ intersect in a single point. (The *Euler line* of a triangle is the line connecting its centroid and its orthocenter).

LÊ MINH HÀ dịch

# Câu lạc bộ

## Giải đáp bài : MƯỜI có nghĩa là gì?

***(Đề đăng trên THTT số 364, tháng 10/2007)***

a) *Ý nghĩa toán học:*

- Mười chỉ số lượng phần tử trong tập hợp gồm 10 phần tử.
- Mười chỉ số thứ tự của phần tử $a_{10}$ đứng sau 9 phần tử $a_1, a_2, \ldots, a_9$.
- Mười là cơ số của hệ đếm thập phân và cũng dùng để tính bội, ước khi đo các đại lượng.
- Mười là cơ số của lôgarit thập phân: lg*x*.

b) *Mười chỉ một khái niệm riêng* (dùng như danh từ riêng).

- Lớp Mười (trong bậc Trung học phổ thông).
- Điểm Mười (điểm cao nhất khi đánh giá bài làm của học sinh).
- Tháng Mười (trong 12 tháng của năm).
- Ngày mùng Mười

*Dù ai đi ngược về xuôi*
*Nhớ ngày giỗ Tổ mùng Mười tháng Ba.*

c) *Chỉ mười đối tượng* với quy ước xác định

- Chín phương trời, mười phương Phật (đó là: *Thiên, Địa, Đông, Tây, Nam, Bắc, Đông Nam, Tây Nam, Đông Bắc, Tây Bắc*).
- Mười Can trong Lịch âm – dương (đó là: *Giáp, Ất, Bính, Đinh, Mậu, Kỷ, Canh, Tân, Nhâm, Quý*).

d) *Chỉ sự chính xác, sự so sánh, sự xấp xỉ, sự chênh lệch, ...* khi mười đi kèm với các số khác, các từ khác.

- Chỉ sự chính xác (*Hai năm rõ mười; Thấy rõ mười mươi; Mười người cũng như một chục,...*).
- Chỉ sự hoàn hảo, đầy đủ (*Mười phân vẹn mười;*

*Thương em nó biết mần răng*
*Mười đêm ra đứng trông trăng cả mười; ...*

- Chỉ số lượng tương đối lớn (*Cười hở mười cái răng;*
*Cưới vợ không theo mười heo cũng mất;*

*Số giàu tay trắng vẫn giàu*
*Số nghèo chín đụn mười trâu cũng nghèo;...*)

- Chỉ số lượng tương đối nhiều, đặc trưng cho một hiện tượng (*Năm nắng mười mưa; Năm thì mười họa; Mồm năm miệng mười;...*).
- So sánh với số khác, thấy sự chênh lệch lớn để nêu bật giá trị, nâng cao ý nghĩa của sự việc (*Học một biết mười; Một mất mười ngờ; Một kín mười hở; Một phần sống mười phần chết; Một người cười mười người khóc; Một mụ cười mười thang thuốc bổ; Một mặt người bằng mười mặt của; Năm quan mua người mười quan mua nết; Đi mười bước xa hơn ba bước lội; Một mẹ nuôi được mười con, mười con không nuôi nổi một mẹ;*

*Yêu nhau cau sáu bổ ba*
*Ghét nhau cau sáu bổ ra làm mười...*)

- Ước lượng khoảng chừng khi ghép từ *chín mười*

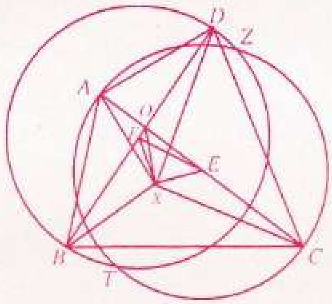
*(Anh chê em ít nói ít cười*
*Mới dốc lòng chờ đợi chín mười năm nay;*
*Nói ra sợ chị em cười*
*Năm ba chuyện nhạm chín mười chuyện hay;...)*

## HAI có nghĩa là gì?

**HAI cùng với ý nghĩa toán học còn có nhiều nghĩa khác trong triết học, đời sống, xã hội khi đi kèm với các từ khác. Câu lạc bộ đang chờ sự trả lời của các bạn để có thể đăng giải đáp trên THTT vào tháng HAI năm 2008 đấy.**


# MỘT CÁCH GIẢI KHÁC của bài T11/360

*LTS: Sau khi đăng lời giải bài toán hình học T11/360, tòa soạn đã nhận được lời giải không sử dụng phép nghịch đảo của bạn Đào Phúc Quang Trí, 11T, THPT chuyên Thăng Long, Đà Lạt, Lâm Đồng. Rất hoan nghênh bạn Trí và xin giới thiệu lời giải này đến bạn đọc. Đề bài T11/360 xem trong số 364 (10/2007).*




Gọi $E$ và $F$ lần lượt là trung điểm của $AC$ và $BD$.

• Ta có $Z$ và $T$ cùng thuộc hai đường tròn $\left(E; \frac{1}{2}AC\right)$ và $\left(F; \frac{1}{2}BD\right)$.

Suy ra $\frac{ZE}{ZF} = \frac{TE}{TF} = \frac{AC}{BD}$ (1)

• Do các tứ giác $OABX$ và $ODCX$ nội tiếp nên

$\widehat{XAC} = \widehat{XAO} = \widehat{XBO} = \widehat{XBD}$

$\widehat{XCA} = \widehat{XCO} = \widehat{XDO} = \widehat{XDB}$

Suy ra $\Delta XAC \backsim \Delta XBD$ (g.g).

Vì $XE$ và $XF$ lần lượt là trung tuyến của $\Delta XAC$ và $\Delta XBD$ ứng với cạnh $AC$ và $BD$ nên $\frac{XE}{XF} = \frac{AC}{BD}$ (2)

Chứng minh tương tự cũng có $\frac{YE}{YF} = \frac{AC}{BD}$ (3)

• Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$\frac{XE}{XF} = \frac{YE}{YF} = \frac{ZE}{ZF} = \frac{TE}{TF} = \frac{AC}{BD} = k.$$

Vậy khi $AC = BD$ (hay $k = 1$) thì bốn điểm $X$, $Y$, $Z$, $T$ cùng nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng $EF$; khi $AC \neq BD$ (hay $k \neq 1$) thì bốn điểm $X$, $Y$, $Z$, $T$ cùng nằm trên đường tròn Apollonius chia đoạn $EF$ theo tỉ số $k = \frac{AC}{BD}$.

---

– Chỉ sự xấp xỉ không đáng kể hoặc gần bằng nhau của hai hiện tượng khi so sánh với số 9 (*Chín bỏ làm mười; Một chín một mười; chín giận mười thương; ...*)

– So sánh hơn một chút với số 9 nhưng thay đổi hẳn trạng thái hoặc biểu thị sự khác biệt rõ ràng

(*Chín gang trâu cày mười gang trâu khỏe;*

*Nói chín thì phải làm mười*
*Nói mười làm chín kẻ cười người chê;*

*Vay chín thì ta trả mười*
*Phòng khi thiếu thốn có người cho vay;*

*Người sao chín hẹn thì nên*
*Ai sao chín hẹn lại quên cả mười;...*).

Chú ý rằng số mười góp phần làm tăng giảm mức độ tính chất ý nghĩa của hiện tượng, sự việc chứ bản thân số mười không mang ý nghĩa của hiện tượng xã hội (do từ đi kèm thể hiện) như một vài bạn đọc đã nêu ra.

Cảm ơn các bạn đã nhiệt tình sưu tầm nhiều ca dao, tục ngữ, thành ngữ, thơ văn để bài giải thêm sinh động. Các bạn sau có lời giải hay và được nhận quà của Câu lạc bộ.

1) *Lang Văn Thành*, 12A, Trường BTVH Hữu nghị Việt - Lào, **Hà Tây**

2) *Nguyễn Hữu Trọng*, 11A1, THPT Thuận Thành I, Thuận Thành, **Bắc Ninh**;

3) *Trần Thị Ánh Tuyết*, 6A1, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**

4) *Nguyễn Đình Thi*, 10T1, THPT Lương Văn Chánh, TP Tuy Hòa, **Phú Yên**.

VÂN KHANH


Giải đáp bài:

# ĐỀ RA có vấn đề

*(Đề đăng trên THTT số 364, tháng 10 năm 2007)*

(Dựa theo bạn *Mai Hiền Cường*, 12A5, THPT C Bình Lục, **Hà Nam**).

• Chỗ lập luận sau của bạn học sinh nọ:

PT $x^5 - x^2 - 1 = 0$ có nghiệm $x \ge 0$.

Kết hợp với PT $x^5 - x^2 - 2x - 1 = 0$ (1) được $-2x = 0$, hay $x = 0$ là không đúng!

Nguyên nhân chính dẫn đến sai lầm là hai PT (1) và PT $x^5 - x^2 - 1 = 0$ không có cùng một tập hợp nghiệm, nên không thể kết hợp hai PT đó để lấy nghiệm đúng của PT (1) được.

• **Giải lại bài toán:** PT (1) tương đương với

$$x^5 = (x+1)^2 \qquad (2)$$

Do $(x+1)^2 \ge 0$ nên $x^5 \ge 0$, suy ra $x \ge 0$.

Với $0 \le x < 1$, thì vế trái nhỏ hơn vế phải, nên PT (2) vô nghiệm. Do đó chỉ cần xét $x \ge 1$. Xét hàm số $f(x) = x^5 - x^2 - 2x - 1$ $(x \ge 1)$.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1; +\infty)$. Mặt khác

$$f'(x) = 5x^4 - 2x - 2$$
$$= 2x(x^3 - 1) + 2(x^4 - 1) + x^4 > 0,\ \forall x \ge 1.$$

Suy ra hàm $f(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$ và $f(1).f(2) < 0$. Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất trong $(1; 2)$.

• Ngoài bạn *Cường*, các bạn sau cũng có đáp án đúng: *Phạm Thị Minh Thu*, K47 Lí, THPT chuyên Lương Văn Tụy, **Ninh Bình**; *Lê Minh Hiếu*, 10A, THPT Thiệu Hóa, *Nguyễn Thị Yến*, 11BT2, THPT Triệu Sơn II, **Thanh Hóa**; *Lang Văn Thành*, xóm 11, Tiên Kỳ, Tân Kỳ, *Vương Đình Ngọ*, 12A2, THPT Nghi Lộc III, **Nghệ An**.

NGỌC HIỂN

# Một tiếp tuyến đi đâu ?

**Tí**: Tèo ơi! Hai đường tròn cắt nhau thì có bao nhiêu tiếp tuyến chung?

**Tèo:** Có hai tiếp tuyến chung.

**Tí**: Nhưng tớ chỉ tìm được một tiếp tuyến chung với bài toán:

Trên mặt phẳng tọa độ *Oxy*, tìm tiếp tuyến chung của hai đường tròn có PT

$(C_1)$: $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$;

$(C_2)$: $x^2 + y^2 - 2x - 2y - z = 0$.

Lời giải của tớ như sau:

Đường tròn $(C_1)$ có tâm $I_1(2\ ;\ 4)$, bán kính $R_1 = 3$, $(C_2)$ có tâm $I_2\ (1\ ;\ 1)$ và bán kính $R_2 = 2$. Vì $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2$ nên $(C_1)$ và $(C_2)$ cắt nhau. Giả sử tiếp tuyến chung của $(C_1)$ và $(C_2)$ có dạng $\Delta$: $ax - y + b = 0$. Ta có hệ

$$\begin{cases} d(I_1,(\Delta)) = R_1 \\ d(I_2,(\Delta)) = R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2a - 4 + b| = 3\sqrt{a^2+1} \\ |a - 1 + b| \ = 2\sqrt{a^2+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2|2a - 4 + b| = 3|a - 1 + b| & (1) \\ |a - 1 + b| \ = 2\sqrt{a^2+1} & (2) \end{cases}$$

Từ (1) có $b = a - 5$ hoặc $b = \dfrac{-7a + 11}{5}$.

Với $b = a - 5$, thay vào (2) tìm được

$$(a\ ;\ b) = \left(\frac{4}{3}; -\frac{11}{3}\right).$$

Với $b = \dfrac{-7a + 11}{5}$, thay vào (2) PT bậc hai ẩn $a$ vô nghiệm. Do đó PT tiếp tuyến chung của hai đường tròn là $y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{11}{3}$ (!)

**Tèo:** Lạ thật, đâu mất một tiếp tuyến?

Xin mời bạn đọc cho ý kiến giải thích giúp Tí và Tèo nhé!

TRIỆU VĂN HƯNG

*(GV THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, Hưng Yên)*

# Giải thưởng QUẢ CẦU VÀNG 2007 VÀ PHẦN THƯỞNG NỮ SINH VIÊN TIÊU BIỂU TRONG LĨNH VỰC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Ngày 8/11/2007, tại Thủ đô Hà Nội, Trung ương Đoàn TNCS Hồ Chí Minh, Bộ Khoa học và Công nghệ đã tổ chức cuộc họp báo công bố phát động chương trình Giải thưởng Công nghệ thông tin (CNTT) thanh niên mang tên "Quả Cầu vàng" và Phần thưởng nữ sinh viên tiêu biểu trong lĩnh vực CNTT năm 2007. Đây là một hoạt động quan trọng chào mừng Đại hội đại biểu Đoàn TNCS Hồ Chí Minh toàn quốc lần thứ IX diễn ra vào trung tuần tháng 12/2007.

Giải thưởng "Quả Cầu vàng" do Trung ương Đoàn TNCS Hồ Chí Minh chủ trì phối hợp với Bộ Khoa học và Công nghệ tổ chức hàng năm, bắt đầu từ năm 2003. Đây là giải thưởng đặc biệt được xét trao cho 10 gương mặt trẻ có thành tích xuất sắc trong lĩnh vực CNTT của Việt Nam. Khác với các giải thưởng khác, đối tượng được xét trao giải thưởng không chỉ là các cá nhân có các sản phẩm CNTT xuất sắc mà gồm tất cả những gương mặt tiêu biểu đã có thành tích xuất sắc góp phần vào sự phát triển CNTT tại Việt Nam, như các nhà nghiên cứu, các giảng viên, các nhà doanh nghiệp...

Cùng trong lễ trao giải thưởng "Quả Cầu vàng 2007", TW Đoàn sẽ công bố và trao 40 phần thưởng nữ sinh viên tiêu biểu trong lĩnh vực CNTT năm 2007. Đây là phần thưởng đặc biệt của Trung ương Đoàn TNCS Hồ Chí Minh dành riêng cho các sinh viên nữ chuyên ngành CNTT của các trường Đại học, Cao đẳng trong cả nước, nhằm đẩy mạnh, khuyến khích phong trào thanh niên thi đua học tập, nghiên cứu CNTT, góp phần đào tạo nguồn nhân lực về CNTT, phục vụ sự nghiệp công nghiệp hóa, hiện đại hóa đất nước.

Để có thêm thông tin chi tiết, các bạn có thể xem trên Website: www.dsstc.org.vn

**LÊ BÍCH**

# THƯ THÔNG BÁO VIỆC THÀNH LẬP GIẢI THƯỞNG NGUYỄN CẢNH TOÀN

## *GIÀNH CHO CÁC CÔNG TRÌNH VỀ TOÁN HỌC VÀ GIÁO DỤC*

*Ngày 24 tháng 9 năm 2007*

Ông Nguyễn Cảnh Toàn thân mến!

Với tư cách là Chủ tịch của Viện Tiểu sử Hoa Kỳ, thay mặt cho từng người trong Viện – Các vị lãnh đạo, các nhà nghiên cứu, các nhà xuất bản, các nhà viết tiểu sử, bao gồm cả nhiều bạn bè, đồng nghiệp quý, tôi lấy làm vinh dự được có thêm một tổ chức mang tên ông trong sự cộng tác lâu dài của chúng tôi. Sự nổi tiếng của cái tên đáng kính của ông, không nghi ngờ gì nữa, sẽ tô thắm thêm sự kính trọng và uy tín của Viện Tiểu sử Hoa Kỳ trên khắp thế giới, và do vậy mà tôi muốn thành thật cảm ơn ông.

Kể từ ngày này trở đi, Giải thưởng Nguyễn Cảnh Toàn sẽ tồn tại như một tổ chức vĩnh viễn của Viện chúng tôi. Với sự giúp đỡ của ông, chúng tôi có thể làm cho tổ chức này đầy tiềm năng bằng cách nhìn nó qua mục đích đơn giản: Tôn vinh những cá nhân trong lĩnh vực chuyên môn của ông đã có những thành tựu ứng đáng được ông ca ngợi. Dĩ nhiên, do những cống hiến rộng rãi của ông, việc tìm ra người đáng tôn vinh là một sự chọn lọc đầy thử thách. Vì vậy, chúng tôi tin cậy nhiều vào sự tinh thông của ông sẽ giúp chúng tôi tăng thêm niềm vinh dự cho những người được giải nhờ cái tên của ông.

Tôi mong chờ vào sự cố gắng của tập thể chúng tôi trong những năm tới. Sự ra đời của giải thưởng mang tên ông chắc chắn sẽ nâng cao tiêu chuẩn quốc tế để xét giải trong lĩnh vực của ông.

Xin chân thành chào ông với một sự khâm phục và kính trọng.

**J.M EVANS**

**Chủ tịch Viện Tiểu sử Hoa Kỳ**

# Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
# Mathematics and Youth Magazine

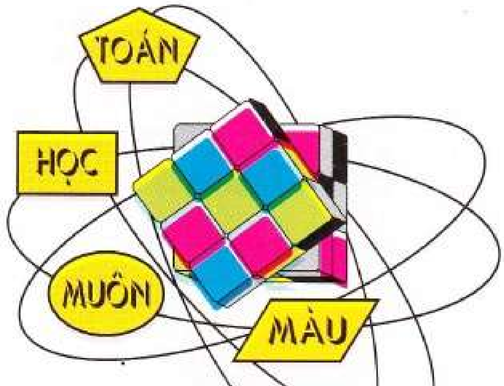
XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 366(12.2007)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.5121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.5144272, 04.5121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn




## TRONG SỐ NÀY

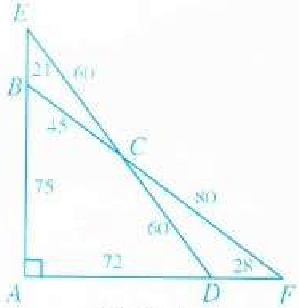



*Biên tập :* HỒ QUANG VINH. *Mĩ thuật :* MINH THỎ. *Trị sự, Chế bản :* VŨ ANH THƯ, NGUYỄN THỊ OANH.
*Đại diện phía Nam :* TRẦN CHÍ HIẾU, 283 Thích Quảng Đức, Thủ Dầu Một, Bình Dương. Tel : 0650.858330




# TÁM ĐOẠN THẲNG có số đo nguyên

Tứ giác lồi $ABCD$ có các đường thẳng $AB$, $CD$ cắt nhau tại $E$ ($B$ nằm giữa $A$ và $E$) và $AD$, $BC$ cắt nhau tại $F$.




*Hình 1*

Trên hình 1 vẽ tứ giác lồi $ABCD$ với góc $BAD$ vuông và số đo tám đoạn thẳng sau đây đều là số nguyên (với cùng một đơn vị đo): $AB = 75$, $BE = 21$, $AD = 72$, $DF = 28$, $BC = 45$, $CF = 80$, $CD = CE = 60$.

**Dành cho bạn đọc**

1) Hãy vẽ tứ giác lồi $ABCD$ với góc $BAD$ nhọn và số đo tám đoạn thẳng nói trên đều là số nguyên (với cùng một đơn vị đo).

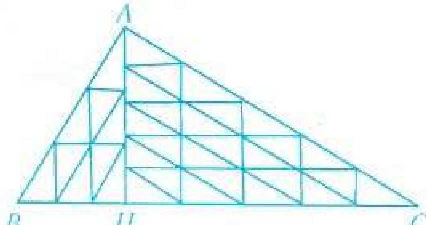
2) Hãy vẽ tứ giác lồi $ABCD$ với góc $BAD$ tù và số đo tám đoạn thẳng nói trên đều là số nguyên (với cùng một đơn vị đo)..

**Giải đáp:**

# PHÂN CHIA TAM GIÁC THÀNH CÁC TAM GIÁC bằng nhau

***(Đề đăng trong THTT số 362 tháng 8.2007)***

1) Tam giác $ABC$ có $AB = 3$(cm), $AC = 5$(cm), $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Kẻ $AH \perp BC$ (h. 2). Ta phân chia được $\Delta HBA$ thành 9 tam giác vuông và $\Delta HAC$ thành 25 tam giác vuông, như thế phân chia được $\Delta ABC$ thành 34 tam giác vuông bằng nhau (g.c.g).




*Hình 2*

2) *Bài toán khái quát.*

Cho $\Delta ABC$ vuông tại $A$ và $AB = c$ (cm), $AC = b$ (cm) với $b$, $c$ là các số nguyên dương.

Giả sử $(b, c) = d$ với $b = db_1$, $c = dc_1$ mà $(b_1, c_1) = 1$. Kẻ đường cao $AH$. Tương tự như trên có thể phân chia $\Delta ABC$ thành $n^2\left(b_1^2 + c_1^2\right)$ tam giác vuông nhỏ bằng nhau với $n$ là số nguyên dương tùy ý.

***Nhận xét.*** Nhiều bạn cho đáp số là $b^2 + c^2$, hoặc là $n^2(b^2 + c^2)$, kết quả này chưa tốt. Chẳng hạn với $b = 6$, $c = 4$ thì $n^2(b^2 + c^2) = 52n^2$, trong khi $n^2\left(b_1^2 + c_1^2\right) = 13n^2$ với $n$ là số nguyên dương.

Các bạn sau có lời giải đúng và có nhận xét tốt:

1) *Nguyễn Hữu Thọ*, 10A1, THPT TX. Quảng Trị, **Quảng Trị**

2) *Dương Văn An*, 11A1, THPT Châu Thành, TX. Bà Rịa, **Bà Rịa – Vũng Tàu**.

PHI PHI

15 NĂM

# TRƯỜNG THCS NGUYỄN BỈNH KHIÊM
## VĨNH BẢO, HẢI PHÒNG
## xây dựng và trưởng thành

*Hiệu trưởng*
PHẠM VĂN TOẢN

Ngày đầu thành lập với tên Trường phổ thông chuyên cấp 2 Vĩnh Bảo theo quyết định số 1450/ QĐUB ngày 19/12/1992 của UBND thành phố Hải Phòng, trường có 6 lớp: 2 lớp chọn tiểu học tách ra từ trường PTCS Thị trấn và 4 lớp chuyên cấp 2 tách ra từ trường PTCS Tân Hưng với 217 học sinh và hơn 10 giáo viên. . Cơ sở vật chất chỉ là khu nhà cấp 4 của xí nghiệp Thủy nông tại khu Đông Thái thị trấn Vĩnh Bảo với diện tích hơn 2000m² nằm lặng lẽ, nép mình bên bờ sông.

5 năm đầu 1992-1997, thầy và trò của trường đã gặt hái được những thành tích đáng khích lệ: trường Tiên tiến Xuất sắc 5 năm liền, giải thưởng Nguyễn Bỉnh Khiêm của UBND huyện Vĩnh Bảo năm 1995, Cờ "Đơn vị Tiên tiến Xuất sắc" của Sở Giáo dục - Đào tạo Hải Phòng năm 1996, Bằng khen của Liên đoàn Lao động thành phố Hải Phòng và Tổng liên đoàn Giáo dục Việt Nam năm 1994, 1997; Bằng khen của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo năm 1997. Trường đã có 119 em học sinh đoạt giải học sinh giỏi cấp Thành phố, có 5 em trong đội tuyển chính thức đi thi và 1 em đoạt giải cấp Quốc gia.

Dưới ánh sáng Nghị quyết Trung ương 2 (khóa VIII) về Giáo dục - Đào tạo, Khoa học và Công nghệ, trường được mang tên mới: trường THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm theo quyết định số 32/QĐ-TCCQ ngày 20/7/1998 của UBND huyện Vĩnh Bảo và được mở rộng diện tích lên 4000m², xây dựng ngôi nhà cao tầng 12 phòng kiên cố.

5 năm giai đoạn hai 1997-2002, tự hào với mái trường được mang tên danh nhân văn hóa cùng những thuận lợi về cơ sở vật chất, thầy và trò càng hăng say trong phong trào thi đua dạy tốt học tốt. Trường đã bồi dưỡng 268 học sinh đoạt giải học sinh giỏi cấp Thành phố và được tặng Bằng khen của Thủ tướng Chính phủ, Cờ của UBND thành phố Hải Phòng. Một phần thưởng cao quý là ngày 19/12/2002, trong lễ kỉ niệm ngày sinh nhật thứ 10, nhà trường được vinh dự đón Huân chương Lao động Hạng Ba của Chủ tịch nước.

15 năm qua, nhà trường đã bồi dưỡng được 594 em học sinh đoạt giải học sinh giỏi cấp Thành phố. Tỉ lệ học sinh tốt nghiệp THCS đạt 100%, vào THPT hệ quốc lập đạt 99,5% trở lên. Khuôn viên của trường rộng gần 1ha với 3 dãy nhà cao tầng khang trang hiện đại và nhà trường đã được công nhận trường đạt chuẩn Quốc gia giai đoạn 2001-2010.

Với nền tảng 15 năm xây dựng và trưởng thành, cùng sự quan tâm chăm lo của các cấp lãnh đạo, sự tin yêu của nhân dân, trường THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm sẽ đủ tự tin vượt qua thách thức của tiến trình hội nhập, để chinh phục những đỉnh cao mới, vươn mình hơn nữa trong nắng gió trong lành của miền quê Vĩnh Bảo thân yêu. "Lâu đài giáo dục" THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm sẽ mãi lung linh tỏa sáng và góp vào vườn hoa giáo dục thành phố Hải Phòng càng nhiều những bông hoa Trạng nguyên.


ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT68M7
Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004
In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội
In xong và nộp lưu chiểu tháng 12 năm 2007
Giá : 5000 đồng
Năm nghìn đồng