NGUYỄN XUÂN LIÊM

GIẢI TÍCH

GIÁO TRÌNH LÝ THUYẾT VÀ BÀI TẬP CÓ HƯỚNG DẪN

TẬP 1

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

NGUYỄN XUÂN LIÊM

GIẢI TÍCH

TẬP I

GIÁO TRÌNH LÍ THUYẾT VÀ BÀI TẬP CÓ HƯỚNG DẪN

(Tái bản lần thứ năm)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

04 – 2009/CXB/302 – 2117/GD Mã số : 7K182y9 – DAI

LỜI NÓI ĐẦU

Giải tích Toán học có một địa vị quan trọng đặc biệt trong chương trình Toán cao cấp của các khoa tự nhiên các trường đại học sư phạm, đại học tổng hợp và các trường đại học kĩ thuật... Đó là một môn học khó. Người học luôn gặp những tình huống thay đổi, những giả thiết phức tạp, sự đan xen các cấu trúc toán học. Hơn nữa chương trình Giải tích lại dài và nặng, sinh viên thường phải làm việc với môn học này trong ba học kì. Không ít người đã tỏ ra lúng túng, càng về sau các kiến thức bị dồn nén càng trở nên rối và khó hiểu. Ôn tập, hệ thống các kiến thức đã học một cách đều đặn sẽ giúp bạn học tiếp các phần sau của chương trình dễ hơn, nhanh hơn và chắc hơn. Nhằm giảm bớt khó khăn cho người học, chúng tôi đã cố gắng đề cập đến các khái niệm mới một cách tự nhiên, trình bày các vấn đề một cách mạch lạc, sáng sủa và tận dụng mọi cơ hội làm rõ tính trực quan của các vấn đề được xét.

Một vài điều lưu ý về các chương của giáo trình :

Chương I gồm hai phần : §1 giới thiệu cận trên và cận dưới của một tập hợp số thực. Các khái niệm này đã được học trong Đại số tuyến tính và Hình học Giải tích. Tuy nhiên đó là những vấn đề quan trọng cần được ôn lại một cách cẩn thận.

§2 giới thiệu thêm một phương pháp xây dựng các số thực để bạn đọc tham khảo. Với các bạn đọc mới làm quen với Giải tích, đây là một vấn đề khó và trừu tượng. Bạn chỉ cần nắm các ý chính không cần đi sâu vào các chứng minh. Sau một thời gian, khi đã có một vốn hiểu biết tốt hơn về Giải tích, đọc lại phần này, bạn sẽ thấy thật ra nó không khó như ta tưởng.

Trong chương IV, chúng tôi đã giới thiệu dãy chuẩn tắc, những phép phân hoạch một đoạn, từ đó định nghĩa tích phân xác định như là giới hạn của một dãy số thực (dãy tổng tích phân). Theo chúng tôi, định nghĩa này dễ tiếp nhận và tiện dụng. Lí thuyết tích phân là một lí thuyết hay và đẹp. Ngoài việc nghiên cứu các chứng minh định lí, bạn đọc nên hệ thống các kết quả đã thu được, đặc biệt là các kết quả liên quan đến định nghĩa tích phân xác định, điều kiện khả tích của một hàm số, các lớp hàm số khả tích, quan hệ giữa [illegible] các *định và nguyên hàm... Về hàm các số sơ cấp, chúng tôi đã giới thiệu hàm số lôgarit trước sau đó mới đến hàm số mũ, hàm số ngược của hàm số lôgarit. Cách làm này gọn nhẹ, tiết kiệm được thời gian. Phần lớn các giáo trình Giải tích xuất bản từ cuối những năm 60 đến nay đều trình bày các hàm số sơ cấp theo trình tự này.*

Chương V tương đối khó, trừu tượng. Tuy nhiên, để có những hiểu biết tốt về không gian $\boldsymbol{R}^p$*, về giới hạn và tính liên tục của các ánh xạ trên không gian* $\boldsymbol{R}^p$*, bạn đọc nên đầu tư một cách thích đáng thời gian và công sức cho chương này. Khi học tiếp các chương sau, bạn đọc vẫn nên đọc lại chương này nhiều lần. Những cố gắng của bạn sẽ được đền bù : Bạn sẽ tự tin, không lúng túng khi gặp các hàm số nhiều biến số.*

Một số điểm khó trong giáo trình đã được đánh dấu "". Bạn đọc chỉ cần nắm được những ý cơ bản của vấn đề, công nhận các kết quả.*

Giáo trình được biên soạn cẩn thận với mong muốn của tác giả là nhiều bạn đọc có thể dùng nó làm tài liệu tự học. Các thầy, cô giáo sử dụng giáo trình này có thể hướng dẫn sinh viên tự đọc một số phần, như vậy sẽ có thời gian tập trung vào các vấn đề trọng tâm và các điểm khó của chương trình.

Trừ chương I, dành cho ôn tập và tham khảo, sau mỗi chương đều có nhiều bài tập. Các bài tập được chọn lựa một cách công phu sẽ giúp bạn đọc củng cố, đào sâu lí thuyết và bồi dưỡng một số kĩ năng quan trọng cần thiết. Các bài tập khó đã được đánh dấu "". Các bài tập đều có đáp số, hướng dẫn hoặc lời giải. Để nắm vững môn học, bạn đọc nên làm ít nhất một nửa số bài tập trong giáo trình.*

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn các giáo sư Đoàn Quỳnh, Vũ Tuấn và Đỗ Hồng Tân đã đọc kĩ bản thảo, góp nhiều ý kiến bổ ích về cả nội dung lẫn hình thức.

Chúng tôi cũng xin chân thành cảm ơn TS Phạm Phu đã đọc cẩn thận phần bài tập của bản thảo, giúp tác giả kiểm tra lại lời giải các bài tập và góp nhiều ý kiến xác đáng.

Cuối cùng chúng tôi đặc biệt cảm ơn TS Trần Phương Dung đã biên tập tốt và khẩn trương bản thảo, đồng thời đã giúp tác giả khắc phục một số sơ suất trong việc biên soạn nó, nhờ vậy giáo trình này đã đến với bạn đọc sớm hơn.

Tháng 8-1997

TÁC GIẢ

Chương I

TẬP HỢP SỐ THỰC

§1. QUAN HỆ THỨ TỰ

Nội dung chủ yếu của mục này là cận trên, cận dưới, cận trên đúng và cận dưới đúng của một tập hợp số thực, những khái niệm có một vai trò đặc biệt quan trọng trong Giải tích. Mục này gần như không có liên quan gì với §2.

1.1. *Định nghĩa.* Giả sử X là một tập hợp, $\leqslant$ là một quan hệ trong X. Ta gọi $\leqslant$ là một quan hệ thứ tự trong X nếu

i) $x \leqslant x$ với mọi $x \in X$,

ii) $x \leqslant y$ và $y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant y$ với mọi $x, y, z \in X$,

iii) $x \leqslant y$ và $y \leqslant x \Rightarrow x = y$ với mọi $x, y \in X$.

$(X, \leqslant)$ gọi là một tập hợp sắp thứ tự.

Nếu $x \leqslant y$ và $x \neq y$ thì ta viết $x < y$.

Quan hệ $x \leqslant y$ có thể viết dưới dạng $y \geqslant x$.

Ví dụ 1. Trong tập hợp các số thực **R** quan hệ thông thường $x \leqslant y$ là một quan hệ thứ tự.

Ví dụ 2. Giả sử X là một tập hợp, $\mathcal{P}(X)$ là tập hợp các tập hợp con của X. Quan hệ $A \subset B$ trong $\mathcal{P}(X)$ là một quan hệ thứ tự.

Ví dụ 3. Trong tập hợp các số nguyên dương $\mathbf{N}^*$ ta đưa vào quan hệ $m \;\vdots\; n$ (m chia hết cho n). Đó là một quan hệ thứ tự.

1.2 *Tập hợp sắp thứ tự toàn phần*

Định nghĩa. Tập hợp sắp thứ tự $(X, \leqslant)$ gọi là *toàn phần* nếu với hai phần tử bất kì x, y của X, ta có

$$x \leqslant y \text{ hoặc } y \leqslant x.$$

Nói một cách khác $(X, \leqslant)$ gọi là một tập hợp sắp thứ tự toàn phần nếu nó là một tập hợp sắp thứ tự trong đó hai phần tử bất kì đều có thể so sánh được.

Trong ví dụ 1. **R** là một tập hợp sắp thứ tự toàn phần. Các tập hợp sắp thứ tự trong hai ví dụ 2 và 3 không phải là những tập hợp sắp thứ tự toàn phần.

1.3. *Các ánh xạ tăng, giảm*

Định nghĩa. Giả sử X và Y là hai tập hợp sắp thứ tự. Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là

i) tăng nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$,

ii) tăng nghiêm ngặt nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,

iii) giảm nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$,

iv) giảm nghiêm ngặt nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,

v) đơn điệu nếu f là tăng hoặc giảm,

vi) đơn điệu nghiêm ngặt nếu f là tăng nghiêm ngặt hoặc giảm nghiêm ngặt.

1.4. *Các khoảng trong* R

Giả sử a, b là hai phần tử của **R**, $a < b$. Ta kí hiệu

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a \leqslant x \leqslant b\},$$
$$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\},$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} : a \leqslant x < b\},$$

Cac tập hợp này gọi là những khoảng, a và b gọi là hai điểm đầu của khoảng, a gọi là điểm gốc, b là điểm cuối của khoảng. $[a, b]$ gọi là một khoảng đóng hoặc một đoạn (hoặc một khoảng compắc), (a, b) gọi là một khoảng mở, $[a, b)$ và $(a, b]$ gọi là những khoảng nửa mở.

Ta kí hiệu

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} : x \geqslant a\}$$
$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} : x > a\}$$
$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbf{R} : x \leqslant a\}$$

$$(-\infty,\ a) = \{x \in \mathbf{R} : x < a\}$$

$$(-\infty,\ +\infty) = \mathbf{R}$$

Các tập hợp này cũng được gọi là những khoảng.

Một điểm của khoảng khác hai đầu của khoảng gọi là một điểm trong của khoảng.

Cận trên, cận dưới. Cận trên đúng, cận dưới đúng.

Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

1.5. *Định nghĩa.* Giả sử X là một tập hợp sắp thứ tự, $A \subset X$.

a) Phần tử $a \in X$ gọi là một cận trên (hoặc chặn trên) của tập hợp A nếu

$$x \leqslant a \text{ với mọi } x \in A.$$

b) Phần tử $a \in X$ gọi là một *cận dưới* (hoặc chặn dưới) của A nếu

$$a \leqslant x \text{ với mọi } x \in A.$$

Ví dụ. Giả sử $X = \mathbf{R}$ là tập hợp sắp thứ tự bởi quan hệ $\leqslant$ thông thường. Khi đó $A = [0, +\infty)$ không có cận trên. Một số bất kì $a \leqslant 0$ đều là một cận dưới của A.

Tập hợp A gọi là *bị chặn trên* nếu nó có một cận trên, A gọi là *bị chặn dưới* nếu nó có một cận dưới. Tập hợp A gọi là *bị chặn* nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới.

1.6. *Định nghĩa.* Giả sử X là một tập hợp sắp thứ tự và $A \subset X$. Nếu $a \in A$ và a là một cận trên của A thì a gọi là *phần tử lớn nhất* của A và được kí hiệu là $\max A$.

Phần tử lớn nhất của A là duy nhất.

Thật vậy, nếu a và a' là hai phần tử lớn nhất của A thì $a' \leqslant a$ và $a \leqslant a'$. Do đó $a' = a$.

Phần tử nhỏ nhất của một tập hợp được định nghĩa tương tự.

Phần tử nhỏ nhất của tập hợp A được kí hiệu là $\min A$.

Ví dụ. Giả sử $X = \mathbf{R}$, $A = [0, 1)$. Khi đó A là một tập hợp bị chặn trong **R**. Phần tử nhỏ nhất của A là 0 ; A không có phần tử lớn nhất.

1.7. *Định nghĩa*. Giả sử X là một tập hợp sắp thứ tự, $A \subset X$.

a) Phần tử $a \in X$ gọi là *cận trên đúng* (hoặc cận trên) của tập hợp A nếu nó là phần tử nhỏ nhất (nếu có) của tập hợp các cận trên của A.

Hiển nhiên cận trên đúng của A nếu có là duy nhất.

b) Phần tử $a \in X$ gọi là *cận dưới đúng* (hoặc cận dưới) của A nếu nó là phần tử lớn nhất (nếu có) của tập hợp các cận dưới của A.

Cận dưới đúng của A nếu có là duy nhất.

Cận trên đúng của A được kí hiệu là sup A.

Cận dưới đúng của A được kí hiệu là inf A.

1.8. *Định lí*. Nếu a là phần tử lớn nhất (nhỏ nhất) của A thì nó là cận trên đúng (cận dưới đúng) của A.

Chứng minh. Giả sử a là phần tử lớn nhất của A.

Theo định nghĩa 1.6, $a \in A$ và a là một cận trên của A. Nếu $b \in X$ là một cận trên của A thì $x \leq b$ với mọi $x \in A$. Đặc biệt $a \leq b$. Vậy a là phần tử nhỏ nhất của tập hợp các cận trên của A, tức là $a = \sup A$.

Ví dụ. Lấy $X = \mathbf{R}$, $A = (0, 3]$. Khi đó

$\max A = 3$, $\sup A = 3$, $\inf A = 0$; A không có phần tử nhỏ nhất.

Hiển nhiên điều kiện cần để một tập hợp A có cận trên đúng (trong tập hợp sắp thứ tự X) là A là một tập hợp bị chặn trên. Nói chung đó không phải là điều kiện đủ. Tuy nhiên sau này ta sẽ thấy rằng mỗi tập hợp không rỗng bị chặn trên trong **R** đều có một cận trên đúng và mỗi tập hợp không rỗng bị chặn dưới trong **R** đều có một cận dưới đúng.

1.9. *Cận trên đúng và cận dưới đúng của một tập hợp không bị chặn trong* **R**.

Giả sử A là một tập hợp con của **R**. Nếu A không bị chặn trên, ta nói rằng cận trên đúng của A là $+\infty$. Nếu A không bị chặn dưới, ta nói rằng cận dưới đúng của A là $-\infty$.

Với các quy ước nói trên, mỗi tập hợp con của **R** đều có một cận trên đúng và một cận dưới đúng hữu hạn hoặc vô cực.

1.10. *Định lí.* Giả sử A là một tập hợp khác rỗng của **R**, $a \in \mathbf{R}$ hoặc $a = +\infty$. Khi đó $a = \sup A$ nếu và chỉ nếu a thỏa mãn hai điều kiện sau :

a) $x \leqslant a$ với mọi $x \in A$.

b) Với mỗi $b \in \mathbf{R}$, $b < a$, tồn tại ít nhất một phần tử $x \in A$ sao cho $x > b$.

Chứng minh. Hiển nhiên điều khẳng định là đúng nếu A không bị chặn trên.

Giả sử A bị chặn trên và $a = \sup A$. Khi đó $a \in \mathbf{R}$. Vì a là một cận trên của A nên a thỏa mãn điều kiện a) của định lí. Vì a là cận trên nhỏ nhất trong tất cả các cận trên của A nên nếu $b < a$ thì b không phải là một cận trên của A. Do đó tồn tại ít nhất một phần tử $x \in A$ sao cho $x > b$.

Đảo lại, giả sử tập hợp A bị chặn trên và a thỏa mãn hai điều kiện a) và b) trong định lí. Hiển nhiên $a = +\infty$ không thỏa mãn điều kiện b). Do đó $a \in \mathbf{R}$. Điều kiện a) có nghĩa là a là một cận trên của A. Từ b) suy ra rằng a là cận trên nhỏ nhất trong các cận trên của A, tức là $a = \sup A$.

Tương tự ta có

1.11. *Định lí.* Giả sử $A \subset \mathbf{R}$ và $a \in \mathbf{R}$ hoặc $a = -\infty$. Khi đó $a = \inf A$ khi và chỉ khi a thỏa mãn hai điều kiện sau :

a) $x \geqslant a$ với mọi $x \in A$,

b) Với mỗi $b \in \mathbf{R}$, $b > a$, tồn tại ít nhất một phần tử $x \in A$ sao cho $x < b$.

1.12. *Định nghĩa.* Giả sử A là một tập hợp bất kì và $f : A \to \mathbf{R}$ là một hàm số xác định trên A. Khi đó $\inf f(A)$ được gọi là cận dưới đúng của f trên A và sup f(A) được gọi là cận trên đúng của f trên A.

Cận trên đúng và cận dưới đúng của f luôn luôn tồn tại. Đó là những số hữu hạn hoặc vô cực, theo thứ tự, được kí hiệu là $\sup_{x \in A} f(x)$ và $\inf_{x \in A} f(x)$.

Ta nói rằng hàm số f bị chặn trên (dưới) trên A nếu tập hợp f(A) bị chặn trên (dưới). Hàm số f gọi là bị chặn trên A nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới trên A.

§2. XÂY DỰNG CÁC SỐ THỰC

Ta sẽ xây dựng tập hợp các số thực **R** từ tập hợp các số hữu tỉ **Q**.

2.1. *Đặt vấn đề*

Một số thực có thể xem như giới hạn của một dãy số thập phân. Mặt khác, trong giải tích, nhiều số thực được xem như là giới hạn của một dãy số hữu tỉ, chẳng hạn số e là giới hạn của dãy số hữu tỉ $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$. Điều này gợi ý ta định nghĩa một số thực là một dãy số hữu tỉ. Cách làm này chưa thỏa đáng vì hai dãy số hữu tỉ có cùng một giới hạn phải xem như xác định cùng một số thực. Gọi E là tập hợp các dãy số hữu tỉ có giới hạn hữu hạn. Ta đưa vào E một quan hệ tương đương $\mathcal{R}$: Hai dãy số hữu tỉ hội tụ (tức là hai phần tử của E) được gọi là tương đương với nhau nếu chúng có cùng một giới hạn. Dễ dàng thấy rằng đó là một quan hệ tương đương. Một cách tự nhiên, ta định nghĩa một số thực là một phần tử của tập hợp E/ $\mathcal{R}$, tức là một lớp tương đương.

Đương nhiên, khi xác định tập hợp E và quan hệ tương đương $\mathcal{R}$ ta chỉ được đề cập đến các số hữu tỉ vì các số thực đến nay coi như chưa được biết.

Ta thử định nghĩa tập hợp E. Khi nào một dãy số hữu tỉ $\{r_n\}$ có giới hạn hữu hạn ? Một cách trực giác, ta thấy điều đó có nghĩa là với các chỉ số m và n rất lớn. $|r_m - r_n|$ trở nên rất nhỏ. Một cách chính xác, điều đó có nghĩa là

Với một số dương bất kì ε nhỏ tùy ý, $|r_m - r_n| < \varepsilon$ khi m và n vượt qua một số nguyên dương N nào đó (phụ thuộc vào ε).

Ta thử định nghĩa quan hệ tương đương $\mathcal{R}$. Khi nào hai dãy số hữu tỉ $\{r_n\}$ và $\{r'_n\}$ có cùng một giới hạn hữu hạn ? Một cách trực giác, ta thấy điều đó có nghĩa là $|r_n - r'_n|$ trở nên rất nhỏ nếu n rất lớn. Một cách chính xác, điều đó có nghĩa là

Với một số dương bất kì ε nhỏ tùy ý, $|r_n - r'_n| < \varepsilon$ khi n vượt qua một số nguyên dương N nào đó (phụ thuộc vào ε).

Ta đã phác qua cách xây dựng tập hợp E và quan hệ tương đương $\mathcal{R}$. Chú ý rằng chúng ta sẽ chỉ sử dụng các số hữu tỉ dương ε vì đến nay coi như ta chưa biết gì về các số thực.

Cũng cần nhắc lại rằng tất cả những điều nói trên đều chỉ có tính chất gợi ý, không có giá trị gì trong các lập luận tiếp theo.

2.2. ***Định nghĩa.*** Dãy số hữu tỉ $\{r_n\}$ gọi là một dãy Côsi (Cauchy) (hoặc một dãy cơ bản) nếu với một số hữu tỉ bất kì $\varepsilon > 0$, đều tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$m \geqslant N \text{ và } n \geqslant N \Rightarrow |r_m - r_n| < \varepsilon.$$

2.3. ***Định nghĩa.*** Gọi E là tập hợp các dãy số hữu tỉ Côsi, $\{r_n\}$ và $\{r'_n\}$ là hai phần tử của E. Ta nói rằng dãy $\{r_n\}$ có quan hệ $\mathcal{R}$ với dãy $\{r'_n\}$ nếu với một số hữu tỉ dương cho trước ε bất kì, tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$n \geqslant N \Rightarrow |r_n - r'_n| < \varepsilon.$$

Dễ dàng thấy rằng quan hệ $\mathcal{R}$ trong định nghĩa trên là một quan hệ tương đương. Hiển nhiên nó là phản xạ và đối xứng. Ta chứng minh nó là bắc cầu. Thật vậy, giả sử $\{r_n\}$, $\{r'_n\}$ và $\{r''_n\}$ là ba phần tử của E, $\{r'_n\}\ \mathcal{R}\ \{r_n\}$, $\{r''_n\}\ \mathcal{R}\ \{r'_n\}$ và ε là một số hữu tỉ dương bất kì. Khi đó, tồn tại các số nguyên dương N_1 và N_2 sao cho

$$n \geq N_1 \Rightarrow |r'_n - r_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$n \geq N_2 \Rightarrow |r''_n - r'_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Đặt $N = \max\{N_1, N_2\}$. Khi đó

$n \geq N \Rightarrow$

$$|r''_n - r_n| \leq |r''_n - r'_n| + |r'_n - r_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vậy $\{r''_n\} \mathcal{R} \{r_n\}$.

2.4. *Định nghĩa*. Gọi $\mathcal{R}$ ($\sim$) là quan hệ tương đương trong E. Đặt $\mathbf{R} = E/\mathcal{R}$.

Các phần tử của **R** gọi là các số thực.

2.5. *Phép cộng các số thực*

a) Nếu $\{r_n\}$ và $\{s_n\}$ là hai phần tử của E thì dãy $\{r_n + s_n\}$ cũng là một phần tử của E.

Chứng minh. Giả sử ε là một số hữu tỉ dương bất kì. Khi đó tồn tại các số nguyên dương N_1 và N_2 sao cho

$$m \geq N_1 \text{ và } n \geq N_1 \Rightarrow |r_m - r_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$m \geq N_2 \text{ và } n \geq N_2 \Rightarrow |s_m - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Đặt $N = \max\{N_1, N_2\}$. Khi đó

$$m \geq N \text{ và } n \geq N \Rightarrow$$

$$|(r_m + s_m) - (r_n + s_n)| \leq |r_m - r_n| + |s_m - s_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vậy $\{r_n + s_n\}$ là một dãy Côsi, tức là $\{r_n + s_n\} \in E$.

b) Nếu $\{r'_n\} \sim \{r_n\}$ và $\{s'_n\} \sim \{s_n\}$ thì

$$\{r'_n + s'_n\} \sim \{r_n + s_n\}.$$

Chứng minh. Giả sử ε là một số hữu tỉ dương bất kì. Khi đó tồn tại các số nguyên dương N_1 và N_2 sao cho

$$n \geqslant N_1 \Rightarrow |r'_n - r_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$n \geqslant N_2 \Rightarrow |s'_n - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Đặt $N = \max\{N_1, N_2\}$. Khi đó

$$n \geqslant N \Rightarrow |r'_n + s'_n - (r_n + s_n)| \leqslant |r'_n - r_n| + |s'_n - s_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vậy $\{r'_n + s'_n\} \sim \{r_n + s_n\}$.

Từ đó ta có định nghĩa sau :

c) *Định nghĩa.* Giả sử $x, y \in \mathbf{R}$. Gọi $\{r_n\}$ là một dãy Côsi những số hữu tỉ thuộc lớp tương đương x và $\{s_n\}$ là một dãy Côsi những số hữu tỉ thuộc lớp tương đương y. Khi đó $\{r_n + s_n\}$ là một phần tử của E và lớp tương đương chứa dãy $\{r_n + s_n\}$ chỉ phụ thuộc vào x và y. Ta kí hiệu lớp tương đương đó là $x + y$. Số thực $x + y$ được gọi là tổng của hai số thực x và y.

d) • Giả sử $x, y, z \in \mathbf{R}$ và $\{r_n\}$, $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ là đại diện của x, y, z. Khi đó $(x + y) + z$ là lớp tương đương chứa dãy $\{(r_n + s_n) + t_n\}$ và $x + (y + z)$ là lớp tương đương chứa dãy $\{r_n + (s_n + t_n)\}$. Vì

$$(r_n + s_n) + t_n = r_n + (s_n + t_n)$$

nên

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

Như vậy phép cộng trong **R** có tính kết hợp.

• Tính giao hoán của phép cộng được chứng minh tương tự

• Hiển nhiên lớp tương đương chứa dãy Côsi $(0, 0, 0, \ldots)$ là phần tử trung hòa đối với phép cộng. Phần tử này được kí hiệu là 0.

• Sau cùng nếu x là một số thực bất kì và $\{r_n\}$ là một đại diện của x thì $\{-r_n\} \in E$ và lớp tương đương chứa dãy $\{-r_n\}$ được kí hiệu là $-x$. Dễ dàng thấy rằng

$$x + (-x) = 0$$

Ta đã chứng minh

R *với phép cộng là một nhóm giao hoán.*

2.6. *Phép nhân các số thực*

a) Nếu $\{r_n\} \in E$ thì tồn tại một số hữu tỉ K sao cho

$$|r_n| \leqslant K \text{ với mọi } n.$$

Chứng minh. Vì $\{r_n\}$ là một dãy Côsi nên tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$m \geqslant N \text{ và } n \geqslant N \Rightarrow |r_m - r_n| < 1.$$

Đặc biệt, $|r_n - r_N| < 1$ với mọi $n \geqslant N$. Do đó

$$|r_n| < |r_N| + 1 \text{ với mọi } n \geqslant N.$$

Đặt $K = \max\{|r_1|, \ldots, |r_{N-1}|, |r_N| + 1\}$. Khi đó

$$|r_n| \leqslant K \text{ với mọi } n.$$

b) Nếu $\{r_n\}$ và $\{s_n\}$ là hai phần tử của E thì dãy $\{r_n s_n\}$ là một phần tử của E.

Chứng minh. Giả sử ε là một số hữu tỉ dương bất kì. Khi đó tồn tại hai số hữu tỉ dương K và L sao cho

$$|r_n| \leqslant K \text{ và } |s_n| \leqslant L \text{ với mọi } n.$$

(theo 2.6.a) - Vì $\{r_n\}$ và $\{s_n\}$ là hai dãy Côsi nên tồn tại hai số nguyên dương N_1 và N_2 sao cho

$$m \geqslant N_1 \text{ và } n \geqslant N_1 \Rightarrow |r_m - r_n| < \frac{\varepsilon}{2L}$$

$$m \geqslant N_2 \text{ và } n \geqslant N_2 \Rightarrow |s_m - s_n| < \frac{\varepsilon}{2K}$$

Đặt $N = \max\{N_1, N_2\}$, ta có

$$m \geqslant N \text{ và } n \geqslant N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |r_m s_m - r_n s_n| = |r_m(s_m - s_n) + (r_m - r_n)s_n|$$

$$\leqslant |r_m||s_m - s_n| + |r_m - r_n||s_n|$$

$$< K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2L} \cdot L = \varepsilon.$$

Vậy $\{r_n s_n\} \in E$.

c) Nếu $\{r'_n\} \sim \{r_n\}$ và $\{s'_n\} \sim \{s_n\}$ thì $\{r'_n s'_n\} \sim \{r_n s_n\}$.

Chứng minh. Theo 2.6.a), tồn tại một số hữu tỉ dương K sao cho

$$|r_n| \leqslant K, \quad |r'_n| \leqslant K, \; |s_n| \leqslant K, \; |s'_n| \leqslant K \text{ với mọi } n.$$

Hơn nữa, tồn tại hai số nguyên dương N_1 và N_2 sao cho

$$n \geqslant N_1 \Rightarrow |r'_n - r_n| < \frac{\varepsilon}{2K}$$

$$n \geqslant N_2 \Rightarrow |s'_n - s_n| < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

Đặt $N = \max\{N_1, N_2\}$. Khi đó

$$n \geqslant N \Rightarrow |r'_n s'_n - r_n s_n| = |r'_n(s'_n - s_n) + (r'_n - r_n)s_n|$$

$$\leqslant |r'_n|\,|s'_n - s_n| + |r'_n - r_n|\,|s_n|$$

$$< K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2K} \cdot K = \varepsilon.$$

Vậy $\{r'_n s'_n\} \sim \{r_n s_n\}$.

Từ đó ta có định nghĩa sau :

d) *Định nghĩa.* Giả sử $x, y \in \mathbf{R}$. Gọi $\{r_n\}$ và $\{s_n\}$ là hai đại diện của x và y. Khi đó $\{r_n s_n\} \in E$ và lớp tương đương chứa dãy $\{r_n s_n\}$ chỉ phụ thuộc vào x và y. Ta kí hiệu lớp đó là xy và gọi nó là tích của hai số thực x và y.

Lập luận tương tự như đối với phép cộng, ta thấy rằng

- Phép nhân trong **R** có tính kết hợp, giao hoán và phân phối đối với phép cộng.

- Lớp tương đương chứa dãy Côsi (1, 1, 1,...) là phần tử trung hòa đối với phép nhân. Ta kí hiệu lớp đó là 1.

Ta đã chứng minh

R *là một vành giao hoán có đơn vị.*

Ta sẽ chứng minh **R** là một trường.

2.7. *Bổ đề.* Giả sử x là một số thực khác không. Khi đó tồn tại một số hữu tỉ $\alpha > 0$ và một đại diện $\{r_n\}$ của x sao cho hoặc $r_n \geqslant \alpha$ với mọi n, hoặc $r_n \leqslant -\alpha$ với mọi n.

Chứng minh. Giả sử $\{s_n\}$ là một đại diện của x. Vì $x \neq 0$, dãy $\{s_n\}$ không tương đương với dãy $\{0, 0, ...\}$. Do đó

1°. Tồn tại một số hữu tỉ $\varepsilon > 0$ sao cho với mọi số nguyên dương N, tồn tại một số nguyên dương $n \geqslant N$ với $|s_n - 0| \geqslant \varepsilon$.

2°. Vì $\{s_n\}$ là một dãy Côsi nên tồn tại một số nguyên dương P sao cho

$$m \geqslant P \text{ và } n \geqslant P \Rightarrow |s_m - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Theo 1°, tồn tại một số nguyên $p \geqslant P$ sao cho $|s_p| \geqslant \varepsilon$. Nếu cần thì thay x bởi −x, có thể coi $s_p \geqslant \varepsilon$. Khi đó, theo 2°, ta có

$$m \geqslant P \Rightarrow |s_m - s_p| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Từ đó suy ra

$$s_m \geqslant s_p - |s_m - s_p| \geqslant \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \text{ với mọi } m \geqslant P.$$

Đặt $r_n = \frac{\varepsilon}{2}$ với $n < P$ và $r_n = s_n$ với $n \geqslant P$. Khi đó dãy số $\{r_n\}$ là một đại diện của x và $r_n \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$ với mọi n.

2.8. *Định lí.* **R** là một trường.

Chứng minh. Ta chứng minh $\mathbf{R} \neq \{0\}$ và mỗi phần tử khác không x của **R** đều là khả nghịch. Thật vậy, hai dãy số (1, 1, 1,...) và (0, 0, 0...) không tương đương với nhau nên $1 \neq 0$. Giả sử x là một phần tử khác không của **R**. Theo bổ đề 2.7, tồn tại một số hữu tỉ dương α và một đại diện $\{r_n\}$ của x sao cho

$|r_n| \geq \alpha$ với mọi n. Khi đó $\{r_n^{-1}\} \in E$. Thật vậy, vì $\{r_n\}$ là một dãy Côsi nên với một số hữu tỉ dương ε bất kì, tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$m \geq N \text{ và } n \geq N \Rightarrow |r_m - r_n| < \varepsilon\alpha^2.$$

Khi đó

$$m \geq N \text{ và } n \geq N \Rightarrow \left|\frac{1}{r_m} - \frac{1}{r_n}\right| = \frac{|r_m - r_n|}{|r_m|\,|r_n|} < \frac{\varepsilon\alpha^2}{\alpha^2} = \varepsilon$$

Vậy $\{r_n^{-1}\} \in E$. Hiển nhiên lớp tương đương chứa dãy $\{r_n^{-1}\}$ là phần tử nghịch đảo của x.

2.9. *Đồng nhất các số hữu tỉ với những số thực*

Với mỗi $r \in \mathbf{Q}$, $(r, r, r, \ldots)$ là một dãy Côsi. Gọi $\varphi(r)$ là lớp tương đương chứa dãy số đó. $\varphi : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ là một ánh xạ từ $\mathbf{Q}$ vào $\mathbf{R}$. Dễ dàng thấy rằng φ là một đồng cấu vành từ $\mathbf{Q}$ vào $\mathbf{R}$. Nếu $r, s \in \mathbf{Q}$, $r \neq s$ thì hai dãy số $(r, r, r, \ldots)$ và $(s, s, s, \ldots)$ không tương đương với nhau. Do đó $\varphi(r) \neq \varphi(s)$. Vậy φ là một phép đẳng cấu từ $\mathbf{Q}$ lên trường con $\varphi(\mathbf{Q})$ của $\mathbf{R}$. Hiển nhiên $\varphi(0) = 0$ và $\varphi(1) = 1$.

Ta đồng nhất mỗi số hữu tỉ r với ảnh $\varphi(r)$ của nó trong $\mathbf{R}$. Trường $\mathbf{Q}$ trở thành một trường con của $\mathbf{R}$.

So sánh các số thực :

2.10. *Định nghĩa.* Kí hiệu $\mathbf{R}_+$ chỉ tập hợp các số thực có một đại diện $\{r_n\}$ sao cho $r_n \geq 0$ với mọi n.

2.11. *Định lí.* Tập hợp $\mathbf{R}_+$ có các tính chất sau :

a) $\mathbf{R}_+ + \mathbf{R}_+ \subset \mathbf{R}_+$; $\mathbf{R}_+\mathbf{R}_+ \subset \mathbf{R}_+$,

b) $\mathbf{R}_+ \cap (-\mathbf{R}_+) = \{0\}$,

c) $\mathbf{R}_+ \cup (-\mathbf{R}_+) = \mathbf{R}$.

$(-\mathbf{R}_+ = \{-x : x \in \mathbf{R}_+\})$.

Chứng minh. a) suy ra từ định nghĩa của $\mathbf{R}_+$.

b) Giả sử $x \in \mathbf{R}_+$ và $x \in -\mathbf{R}_+$. Khi đó $-x \in \mathbf{R}_+$. Tồn tại một dãy số hữu tỉ $\{r_n\}$ đại diện của x sao cho $r_n \geq 0$ với mọi n

Tương tự, tồn tại một đại diện $\{s_n\}$ của $-x$ sao cho $s_n \geqslant 0$ với mọi n. Vì hai dãy số $\{-s_n\}$ và $\{r_n\}$ cùng thuộc lớp tương đương x nên $\{r_n\} \backsim \{-s_n\}$. Do đó với một số hữu tỉ dương bất kì ε, tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$n \geqslant N \Rightarrow |r_n - (-s_n)| < \varepsilon.$$

Do đó

$$n \geqslant N \Rightarrow |r_n| < \varepsilon.$$

Từ đó suy ra $\{r_n\} \backsim (0, 0, ...)$. Vậy $x = 0$.

c) Chỉ cần chứng minh rằng nếu $x \in \mathbf{R}$ thì $x \in \mathbf{R}_+$ hoặc $x \in -\mathbf{R}_+$. Hiển nhiên điều đó đúng với $x = 0$. Nếu $x \neq 0$ thì, theo bổ đề 2.7, tồn tại một số hữu tỉ dương α và một đại diện $\{r_n\}$ của x sao cho $r_n \geqslant \alpha$ với mọi n hoặc $r_n \leqslant -\alpha$ với mọi n. Từ đó suy ra $x \in \mathbf{R}_+$ hoặc $-x \in \mathbf{R}_+$.

2.12. Nếu x là một số hữu tỉ và $x \geqslant 0$ thì $\varphi(x) \in \mathbf{R}_+$. Đảo lại, nếu x là một số hữu tỉ và $\varphi(x) \in \mathbf{R}_+$ thì $x \geqslant 0$.

(Nhớ lại rằng $\varphi(x)$ là lớp tương đương chứa dãy số (x, x, ...), x và $\varphi(x)$ được coi là đồng nhất (xem 2.9))

Chứng minh. Nếu $x \geqslant 0$ thì từ định nghĩa của $\mathbf{R}_+$ suy ra $\varphi(x) \in \mathbf{R}_+$. Đảo lại, nếu x là một số hữu tỉ và $\varphi(x) \in \mathbf{R}_+$ thì $x \geqslant 0$. Thật vậy, nếu $x < 0$ thì $-x > 0$. Khi đó $-\varphi(x) = \varphi(-x) \in \mathbf{R}_+$. Do đó $\varphi(x) \in -\mathbf{R}_+$. Từ 2.11. b) suy ra $\varphi(x) = 0$. Điều này là vô lí vì dãy số (x, x, ...) với $x < 0$ không tương đương với dãy số (0, 0,...)

2.13. *Định nghĩa.* Giả sử x và y là hai số thực. Ta viết

$$y \geqslant x \text{ hoặc } x \leqslant y$$

nếu

$$y - x \in \mathbf{R}_+.$$

Đặc biệt

$$x \geqslant 0 \text{ nếu } x \in \mathbf{R}_+$$

Từ định nghĩa trên và từ 2.12 suy ra

2.14. Nếu $x, y \in \mathbf{Q}$ thì

$$\varphi(y) \geqslant \varphi(x) \Leftrightarrow y \geqslant x$$

2.15. *Định lí.* Quan hệ $\leqslant$ nêu trong định nghĩa 2.13 là một quan hệ thứ tự trên $\mathbf{R}$. Hơn nữa $\mathbf{R}$ là một tập hợp sắp thứ tự toàn phần.

Chứng minh. Hiển nhiên đó là quan hệ phản xạ. Quan hệ đó là bắc cầu. Thật vậy, nếu $x \leqslant y$ và $y \leqslant z$ thì $y - x \in \mathbf{R}_+$ và $z - y \in \mathbf{R}_+$. Do đó

$$z - x = (z - y) + (y - x) \in \mathbf{R}_+ + \mathbf{R}_+ \subset \mathbf{R}_+,$$

tức là $x \leqslant z$.

Nếu $x \leqslant y$ và $y \leqslant x$ thì $y - x \in \mathbf{R}_+ \cap (-\mathbf{R}_+)$.

Do đó $y - x = 0$, tức là $x = y$. Vậy $\geqslant$ là một quan hệ thứ tự.

Nếu $x, y \in \mathbf{R}$, thì, từ 2 (11c), ta có $y - x \in \mathbf{R}_+$ hoặc $y - x \in -\mathbf{R}_+$. Do đó $x \leqslant y$ hoặc $y \leqslant x$. Vậy $\mathbf{R}$ là một tập hợp sắp thứ tự toàn phần.

2.16. *Định lí.* Giả sử $x, x', y, y' \in \mathbf{R}$.

a) Nếu $x \leqslant y$ và $x' \leqslant y'$ thì $x + x' \leqslant y + y'$,

b) Nếu $x \geqslant 0$ và $y \geqslant 0$ thì $xy \geqslant 0$.

Chứng minh. a) Ta có

$$(y + y') - (x + x') = (y - x) + (y' - x') \in \mathbf{R}_+ + \mathbf{R}_+ \subset \mathbf{R}_+.$$

Do đó $$x + x' \leqslant y + y'.$$

b) suy ra từ bao hàm thức $\mathbf{R}_+ \mathbf{R}_+ \subset \mathbf{R}_+$.

Từ đó dễ dàng chứng minh được mọi quy tắc về các phép toán thông thường đối với các bất đẳng thức.

2.17. Giá trị tuyệt đối của một số thực

Định nghĩa. Giả sử $x \in \mathbf{R}$. Giá trị tuyệt đối của x, được kí hiệu là $|x|$ và được xác định bởi

$$|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geqslant 0 \\ -x & \text{nếu } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Xem như bài tập, bạn đọc hãy chứng minh các bất đẳng thức thường gặp về giá trị tuyệt đối.

Chương II

GIỚI HẠN

A. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

§1. ĐỊNH NGHĨA GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ. CÁC BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN CÁC DÃY SỐ HỘI TỤ

Ta nhắc lại định nghĩa của một dãy số.

Hàm số $u : \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}$ gọi là một dãy số thực.

Đặt $u_1 = u(1)$, $u_2 = u(2)$, ..., $u_n = u(n)$,..., dãy số được viết dưới dạng $\{u_n\}$ hoặc

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

u_n gọi là số hạng tổng quát của dãy số $u = \{u_n\}$.

1.1. *Định nghĩa.* Ta nói rằng dãy số thực $\{u_n\}$ có giới hạn $l \in \mathbf{R}$ khi n dần đến vô cực, và viết

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l \quad \text{hoặc } u_n \to l \text{ khi } n \to \infty,$$

nếu với một số dương ε cho trước bất kì, tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$(\forall\ n \in \mathbf{N}^*)\ n \geqslant N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon.$$

Dãy số thực có giới hạn gọi là một dãy hội tụ, dãy số không có giới hạn gọi là một dãy phân kì.

Ví dụ 1. Dãy số $\{u_n\}$ với số hạng tổng quát

$$u_n = \frac{-2n+1}{n+1}$$

có giới hạn $l = -2$ khi $n \to \infty$.

Thậy vậy, giả sử ε là một số dương cho trước bất kì. Ta có

$$|u_n - l| = \left|\frac{-2n + 1}{n + 1} + 2\right| = \frac{3}{n + 1} < \varepsilon$$

với $n > \frac{3}{\varepsilon} - 1$. Vậy nếu N là một số nguyên dương lớn hơn $\frac{3}{\varepsilon} - 1$ thì

$$n \geqslant N \Rightarrow |u_n - (-2)| < \varepsilon.$$

Vậy
$$\lim_{n \to \infty} \frac{-2n + 1}{n + 1} = -2.$$

Ví dụ 2. Dễ dàng thấy rằng dãy số thực $\{u_n\}$, trong đó $u_n = a$ với mọi n, $a \in \mathbf{R}$, là hội tụ và $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = a$.

Ví dụ 3. Dãy số $\{(-1)^n\}$ không có giới hạn.

1.2. *Định lí*. Nếu dãy số thực $\{u_n\}$ có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.

Chứng minh. Giả sử $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = a$ và $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = b$, $a, b \in \mathbf{R}$ và ε là một số dương bất kì. Khi đó tồn tại hai số nguyên dương N_1 và N_2 sao cho

$$n \geqslant N_1 \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$$
$$n \geqslant N_2 \Rightarrow |u_n - b| < \varepsilon$$

Đặt $N = \max\{N_1, N_2\}$. Khi đó với $n \geqslant N$, cả hai bất đẳng thức trên đều được thỏa mãn. Do đó

$$|a - b| \leqslant |a - u_n| + |u_n - b| < 2\varepsilon.$$

Vì bất đẳng thức trên đúng với mọi $\varepsilon > 0$, từ đó suy ra $|a - b| = 0$, tức là $a = b$.

Dãy số thực $\{u_n\}$ gọi là bị chặn nếu tập hợp số thực $\{u_n\}$ bị chặn, tức là tồn tại một số M sao cho

$$|u_n| \leqslant M \text{ với mọi } n.$$

1.3. *Định lí.* Dãy số thực $\{u_n\}$ hội tụ thì bị chặn.

Chứng minh. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$. Khi đó tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$n \geqslant N \Rightarrow |u_n - l| < 1.$$

Do đó

$$|u_n| < |l| + 1 \text{ với mọi } n \geqslant N.$$

Đặt $M = \max\{|u_1|, |u_2|, \ldots, |u_{N-1}|, |l| + 1\}$, ta được

$$|u_n| \leqslant M \text{ với mọi } n.$$

Chú ý. Điều ngược lại hiển nhiên không đúng. Chẳng hạn, dãy số $\{(-1)^n\}$ bị chặn nhưng không hội tụ.

Dãy đơn điệu. Dãy con

1.4. Dãy số thực $\{u_n\}$ gọi là tăng nếu $u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots$, tăng nghiêm ngặt nếu $u_1 < u_2 < \ldots$, giảm nếu $u_1 \geqslant u_2 \geqslant \ldots$, giảm nghiêm ngặt nếu $u_1 > u_2 > \ldots$

Dãy số thực tăng hoặc giảm gọi là đơn điệu, tăng hoặc giảm nghiêm ngặt gọi là đơn điệu nghiêm ngặt.

(Đây là trường hợp riêng của định nghĩa I.1.3.)

1.5. *Định nghĩa.* Giả sử $u = \{u_n\}$ là một dãy số thực và

$$k : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$$
$$n \mapsto k(n) = k_n$$

là một dãy số nguyên dương tăng nghiêm ngặt.

Dãy số $$v = uok : \mathbf{N}^* \xrightarrow{k} \mathbf{N}^* \xrightarrow{u} \mathbf{R},$$
$$v_n = v(n) = u(k_n) = u_{k_n}$$

gọi là một dãy con của dãy số $\{u_n\}$.

Ví dụ. Dãy số

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots$$

và dãy số

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{2n-1}, \ldots$$

là những dãy con của dãy số

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

Nếu $\{u_{k_n}\}$ là một dãy con của dãy số thực $\{u_n\}$ thì vì $k_n \geqslant n$ với mọi n, nên ta có :

1.6. Nếu dãy số thực $\{u_n\}$ hội tụ và có giới hạn l thì mọi dãy con $\{u_{k_n}\}$ của nó đều có giới hạn l.

1.7. *Định lí.* Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$

a) Nếu $l > a$ thì tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$n \geqslant N \Rightarrow u_n > a.$$

(Ta nói rằng $u_n > a$ với n đủ lớn)

b) Nếu $l < b$ thì tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$n \geqslant N \Rightarrow u_n < b.$$

(Ta nói rằng $u_n < b$ với n đủ lớn)

Chứng minh. a) Đặt $\varepsilon = l - a$, $\varepsilon > 0$. Tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$n \geqslant N \Rightarrow |u_n - l| < l - a$$

$$n \geqslant N \Rightarrow l - u_n < l - a \Rightarrow u_n > a.$$

b) được chứng minh tương tự.

1.8. *Định lí.* Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = U$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = V$ và

$$u_n \leqslant v_n \text{ với mọi } n,$$

thì

$$U \leqslant V.$$

Chứng minh. Giả sử $U > V$. Gọi α là một số thực sao cho $V < \alpha < U$. Theo 1.7. a), tồn tại một số nguyên dương N_1 sao cho

$$n \geqslant N_1 \Rightarrow u_n > \alpha.$$

Theo 1.7. b), tồn tại một số nguyên dương N_2 sao cho

$$n \geq N_2 \Rightarrow v_n > \alpha.$$

Đặt $N = \max\{N_1, N_2\}$. Khi đó, với $n \geq N$, ta có $v_n < \alpha < u_n$. Điều này trái với giả thiết.

Chú ý. a) Định lí vẫn đúng nếu điều kiện "$u_n \leq v_n$ với mọi n" được thay bởi điều kiện "$u_n \leq v_n$ kể từ một chỉ số n_0 nào đó trở đi".

b) Nếu $u_n < v_n$ với mọi n, ta vẫn có thể có U = V. Chẳng hạn, với $u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = \frac{2}{n}$, ta có $u_n < v_n$ với mọi n nhưng

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = 0 .$$

Từ định lí 1.8 suy ra

1.9. *Hệ quả* a) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = U$ và $u_n \leq a$ với mọi n thì $U \leq a$;

b) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = U$ và $u_n \geq b$ với mọi n thì $U \geq b$.

1.10. *Định lí.* Nếu

$$u_n \leq v_n \leq \omega_n \qquad (1)$$

với mọi n, và

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \omega_n = l.$$

thì

$$\lim_{n\to\infty} v_n = l .$$

Chứng minh. Giả sử ε là một số dương bất kì. Tồn tại một số nguyên dương N_1 sao cho

$$n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon \qquad (2)$$

Tồn tại một số nguyên dương N_2 sao cho

$$n \geq N_2 \Rightarrow |\omega_n - l| < \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < \omega_n < l + \varepsilon \qquad (3)$$

Đặt $N = \max\{N_1, N_2\}$. Từ (1), (2), (3) suy ra

$$n \geq N \Rightarrow l - \varepsilon < v_n < l + \varepsilon,$$

tức là

$$n \geq N \Rightarrow |v_n - l| < \varepsilon.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = l.$

1.11. ***Định lí.*** Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = |l|$

Chứng minh. Cho $\varepsilon > 0$ bất kì. Tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

Vì $||u_n| - |l|| \leq |u_n - l|$, nên từ đó suy ra

$$n \geq N \Rightarrow ||u_n| - |l|| < \varepsilon.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = |l|$.

1.12. ***Định lí.*** Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = U$ và $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = V$. Khi đó

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n) = U + V$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n v_n) = U \,.\, V$

Đặc biệt, nếu $c \in \mathbf{R}$ là một hằng số thì $\lim\limits_{n\to\infty} (cu_n) = cU.$

c) Nếu ngoài ra $V \neq 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{U}{V}$.

Chứng minh. a) Cho $\varepsilon > 0$ bất kì. Tồn tại các số nguyên dương N_1 và N_2 sao cho

$$n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - U| < \frac{\varepsilon}{2};$$

$$n \geq N_2 \Rightarrow |v_n - V| < \frac{\varepsilon}{2};$$

Đặt $N = \max\{N_1, N_2\}$. Khi đó

$$n \geqslant N \Rightarrow |(u_n + v_n) - (U + V)| = |(u_n - U) + (v_n - V)|$$
$$\leqslant |u_n - U| + |v_n - V| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vậy $\lim\limits_{n \to \infty} (u_n + v_n) = U + V.$

b) Theo 1.3, tồn tại một số dương M sao cho

$|u_n| \leqslant M$, $|v_n| \leqslant M$ với mọi n, $|U| \leqslant M$, $|V| \leqslant M$(*).

Cho $\varepsilon > 0$ bất kì. Tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$n \geqslant N \Rightarrow |u_n - U| < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ và } |v_n - V| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Do đó

$$n \geqslant N \Rightarrow |u_n v_n - UV| = |(u_n - U)v_n + U(v_n - V)|$$
$$\leqslant |u_n - U||v_n| + |U|\,|v_n - V|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Vậy $\lim\limits_{n \to \infty} (u_n v_n) = UV$.

c) Trước hết ta chứng minh $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{v_n} = \frac{1}{V}$.

Vì $\lim\limits_{n \to \infty} v_n = V \neq 0$ nên $\lim\limits_{n \to \infty} |v_n| = |V| > 0$. Tồn tại một số nguyên dương N_1 sao cho

$$n \geqslant N_1 \Rightarrow |v_n| > \frac{|V|}{2}.$$

Với $n \geqslant N_1$, ta có

$$\left| \frac{1}{v_n} - \frac{1}{V} \right| = \frac{|v_n - V|}{|v_n|\,|V|} \leqslant \frac{2|v_n - V|}{V^2}$$

Tồn tại một số nguyên dương N_2 sao cho

(*) Tồn tại các số M_1 và M_2 sao cho $|u_n| \leqslant M_1$, $|v_n| \leqslant M_2$ với mọi n.
Đặt $M = \max\{M_1, M_2, |U|, |V|\}$. Số M thỏa mãn các điều kiện đã nêu.

$$n \geqslant N_2 \Rightarrow |v_n - V| < \frac{\varepsilon V^2}{2}$$

Đặt $N = \max\{N_1, N_2\}$. Khi đó

$$n \geqslant N \Rightarrow \left| \frac{1}{v_n} - \frac{1}{V} \right| < \frac{2}{V^2} \cdot \frac{\varepsilon V^2}{2} = \varepsilon.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{v_n} = \frac{1}{V}$. Từ đó suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \left(u_n \cdot \frac{1}{v_n} \right) = \lim_{n\to\infty} u_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{v_n} = U \cdot \frac{1}{V} = \frac{U}{V}.$$

§2. TÍNH TRÙ MẬT CỦA TẬP HỢP Q. TIÊU CHUẨN CÔSI

Nếu bạn đọc đã nghiên cứu việc xây dựng tập hợp **R** nhờ lát cắt, biết rằng tập hợp **Q** trù mật trong **R** và mỗi tập hợp số thực khác rỗng bị chặn trên (dưới) đều có một cận trên (dưới) đúng thì bạn có thể bỏ qua mục §2 và đọc luôn §3 và sau đó §3', ở đó tiêu chuẩn Côsi được giới thiệu với một phương pháp chứng minh khác.

2.1. *Định lí.* Mỗi số thực đều là giới hạn của một dãy số hữu tỉ.

*Chứng minh.** Giả sử $x \in \mathbf{R}$ và $\{r_n\}$ là một dãy số hữu tỉ, một đại diện của x. Ta chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$ (tức là $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(r_n) = x$, trong đó $\varphi(r_n)$ là lớp tương đương chứa dãy số hữu tỉ $(r_n, r_n, \ldots)$, cho $\varepsilon > 0$ bất kì. Theo bổ đề 1.2.7, tồn tại một số hữu tỉ $\alpha > 0$ và một đại diện $\{s_n\}$ của ε sao cho $s_n \geqslant \alpha$ với mọi n. Do đó $0 \leqslant \alpha \leqslant \varepsilon$. Vì $\{r_n\}$ là một dãy Côsi những số hữu tỉ nên tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$m \geqslant N,\ n \geqslant N \Rightarrow -\alpha < r_m - r_n < \alpha.$$

Để kết thúc, ta chứng minh

$$n \geqslant N_2 \Rightarrow |v_n - V| < \frac{\varepsilon V^2}{2}$$

Đặt $N = \max \{N_1, N_2\}$. Khi đó

$$n \geqslant N \Rightarrow \left| \frac{1}{v_n} - \frac{1}{V} \right| < \frac{2}{V^2} \cdot \frac{\varepsilon V^2}{2} = \varepsilon.$$

Vậy $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{v_n} = \frac{1}{V}$. Từ đó suy ra

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \to \infty} \left(u_n \cdot \frac{1}{v_n} \right) = \lim_{n \to \infty} u_n \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1}{v_n} = U \cdot \frac{1}{V} = \frac{U}{V}.$$

§2. TÍNH TRÙ MẬT CỦA TẬP HỢP Q. TIÊU CHUẨN CÔSI

Nếu bạn đọc đã nghiên cứu việc xây dựng tập hợp **R** nhờ lát cắt, biết rằng tập hợp **Q** trù mật trong **R** và mỗi tập hợp số thực khác rỗng bị chặn trên (dưới) đều có một cận trên (dưới) đúng thì bạn có thể bỏ qua mục §2 và đọc luôn §3 và sau đó §3', ở đó tiêu chuẩn Côsi được giới thiệu với một phương pháp chứng minh khác.

2.1. *Định lí.* Mỗi số thực đều là giới hạn của một dãy số hữu tỉ.

*Chứng minh.** Giả sử $x \in \mathbf{R}$ và $\{r_n\}$ là một dãy số hữu tỉ, một đại diện của x. Ta chứng minh $\lim\limits_{n \to \infty} r_n = x$ (tức là $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi(r_n) = x$, trong đó $\varphi(r_n)$ là lớp tương đương chứa dãy số hữu tỉ $(r_n, r_n, \ldots)$), cho $\varepsilon > 0$ bất kì. Theo bổ đề 1.2.7, tồn tại một số hữu tỉ $\alpha > 0$ và một đại diện $\{s_n\}$ của ε sao cho $s_n \geqslant \alpha$ với mọi n. Do đó $0 \leqslant \alpha \leqslant \varepsilon$. Vì $\{r_n\}$ là một dãy Côsi những số hữu tỉ nên tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$m \geqslant N, n \geqslant N \Rightarrow -\alpha < r_m - r_n < \alpha.$$

Để kết thúc, ta chứng minh

$$m \geq N \Rightarrow |r_m - x| \leq \varepsilon$$

(tức là $|\varphi(r_m) - x| \leq \varepsilon$).

Thật vậy, dãy số hữu tỉ $(r_m - r_1, r_m - r_2, \ldots, r_m - r_n, \ldots)$ là một phần tử của lớp tương đương $r_m - x$ (tức là lớp tương đương $\varphi(r_m) - x$). Đặt

$$q_n = 0 \text{ với } n = 1, \ldots, N - 1,\ q_n = r_m - r_n \text{ với } n \geq N.$$

Dãy số $\{q_n\}$ tương đương với dãy số $(r_m - r_1, r_m - r_2, \ldots, r_m - r_n, \ldots)$ nên $\{q_n\}$ là một phần tử của lớp tương đương $r_m - x$. Hiển nhiên $-\alpha < q_n < \alpha$ với mọi n. Do đó $-\alpha \leq r_m - x \leq \alpha$ với $m \geq N$, tức là $|r_m - x| \leq \alpha \leq \varepsilon$ với $m \geq N$.

2.2. *Định nghĩa.* Dãy số thực $\{u_n\}$ gọi là một dãy Côsi nếu với một số dương ε bất kì, tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$m \geq N,\ n \geq N \Rightarrow |u_m - u_n| < \varepsilon.$$

Nếu u_n là những số hữu tỉ, định nghĩa 2.2 tương đương với định nghĩa I. 2.2. Dãy Côsi còn gọi là một dãy cơ bản.

2.3. *Định lí.* (Tiêu chuẩn Côsi). Dãy số thực $\{u_n\}$ là hội tụ khi và chỉ khi nó là một dãy Côsi.

Chứng minh. Giả sử $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = l$ và ε là một số dương bất kì. Tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Khi đó

$$m \geq N,\ n \geq N \Rightarrow |u_m - u_n| \leq |u_m - l| + |l - u_n| < \varepsilon.$$

Vậy $\{u_n\}$ là một dãy Côsi.

Đảo lại, giả sử $\{u_n\}$ là một dãy Côsi. Với mọi n, tồn tại một số hữu tỉ r_n sao cho $|u_n - r_n| < \dfrac{1}{n}$. Ta sẽ chứng minh $\{r_n\}$ là một dãy Côsi. Thật vậy, với mọi m, n, ta có

$$|r_m - r_n| \leq |r_m - u_m| + |u_m - u_n| + |u_n - r_n|.$$

$$< \frac{1}{m} + |u_m - u_n| + \frac{1}{n}.$$

Cho $\varepsilon > 0$ bất kì. Tồn tại các số nguyên dương N_1 và N_2, sao cho

$$m \geqslant N_1,\ n \geqslant N_1 \Rightarrow |u_m - u_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$n \geqslant N_2 \qquad \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Đặt $N = \max\{N_1, N_2\}$. Khi đó

$$m \geqslant N\ ;\ n \geqslant N \Rightarrow |r_m - r_n| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Vậy $\{r_n\}$ là một dãy Côsi. Gọi x là số thực mà $\{r_n\}$ là một đại diện. Trong chứng minh định lí 2.1, ta đã chỉ ra $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$.

Do đó

$$|u_n - x| \leqslant |u_n - r_n| + |r_n - x| < \frac{1}{n} + |r_n - x| \to 0$$

khi $n \to \infty$.

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = x$.

2.4. *Hệ quả.* Mọi tập hợp số thực khác rỗng bị chặn trên đều có một cận trên đúng.

Chứng minh. Giả sử E là một tập hợp khác rỗng bị chặn trên trong $\mathbf{R}$, a_0 là một phần tử của E và b_0 là một cận trên của E, $a_0 < b_0$. (Nếu $a_0 = b_0$ thì b_0 là cận trên đúng của E). Nếu $\frac{a_0 + b_0}{2}$ là một cận trên của E thì ta đặt $b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ và $a_1 = a_0$. Nếu $\frac{a_0 + b_0}{2}$ không phải là một cận trên của E thì tồn tại một số thực $a_1 \in E$ sao cho $a_1 > \frac{a_0 + b_0}{2}$. Đặt $b_1 = b_0$. Như vậy luôn tồn tại hai số thực a_1, b_1 sao cho

- $a_1 \in E$, b_1 là một cận trên của E
- $a_0 \leqslant a_1 < b_1 \leqslant b_0$
- $b_1 - a_1 \leqslant \dfrac{b_0 - a_0}{2}$

Bằng quy nạp, ta nhận được hai dãy số thực

- $\{a_n\}$ là một dãy tăng những phần tử của E.
- $\{b_n\}$ là một dãy giảm những cận trên của E.
- $0 < b_n - a_n \leqslant \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$ với mọi n.

Cho $\varepsilon > 0$ bất kì. Tồn tại một số nguyên dương N sao cho $\dfrac{b_0 - a_0}{2^N} < \varepsilon$.

Nếu $m \geqslant n \geqslant N$ thì

$$a_N \leqslant a_n \leqslant a_m \leqslant b_N$$

Do đó

$$|a_m - a_n| \leqslant b_N - a_N < \varepsilon \text{ với } m \geqslant n \geqslant N.$$

Vậy $\{a_n\}$ là một dãy Côsi. Theo định lí 2.3 (tiêu chuẩn Côsi), dãy $\{a_n\}$ hội tụ : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Vì $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$ nên từ đó suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Nếu $x \in E$ thì $x \leqslant b_n$ với mọi n. Do đó $x \leqslant a$. Vậy a là một cận trên của E. Nếu M là một cận trên của E thì $a_n \leqslant M$ với mọi n. Do đó $a \leqslant M$. Vậy a là cận trên nhỏ nhất của E, tức là a là cận trên đúng của E.

2.5. *Hệ quả.* Mọi tập hợp số thực khác rỗng bị chặn dưới đều có cận dưới đúng.

Chứng minh. Giả sử E là một tập hợp khác rỗng bị chặn dưới trong **R**. Khi đó − E là một tập hợp khác rỗng bị chặn trên trong **R**. Điều cần chứng minh suy ra từ hệ quả 2.4.

§3. ĐỊNH LÍ BÔNZANÔ – VÂYƠXTRAT (BOLZANO – WEIERSTRASS)

3.1. *Định lí.* a) Dãy số thực $\{u_n\}$ tăng và bị chặn trên thì hội tụ và giới hạn của nó bằng cận trên đúng của tập hợp $\{u_n\}$.

b) Dãy số thực $\{u_n\}$ giảm và bị chặn dưới thì hội tụ và giới hạn của nó bằng cận dưới đúng của tập hợp $\{u_n\}$.

Chứng minh. a) Theo hệ quả 2.4, tập hợp $\{u_n\}$ có một cận trên đúng $a \in \mathbf{R}$. Cho $\varepsilon > 0$ bất kì. Tồn tại một phần tử u_N của dãy số sao cho $u_N > a - \varepsilon$. Với mọi $n \geq N$,

$$a - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq a.$$

Do đó

$$|u_n - a| < \varepsilon \text{ với mọi } n \geq N.$$

Vậy $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = a$.

b) Nếu $\{u_n\}$ là một dãy giảm và bị chặn dưới thì $\{-u_n\}$ là một dãy tăng và bị chặn trên. Điều cần chứng minh suy ra từ a).

3.2. *Bổ đề về dãy đoạn bao nhau (Canto = Cantor).*

Giả sử $\{[a_n, b_n]\}$ là một dãy đoạn bao nhau

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$$

và $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$. Khi đó, tồn tại một điểm duy nhất $c \in [\alpha_n, b_n]$ với mọi n.

Chứng minh. Giả sử n là một số nguyên dương bất kì. Cố định n. Ta có

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq \dots \leq b_n \text{ với mọi } k.$$

Dãy $\{a_k\}$ tăng và bị chặn trên nên hội tụ : $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = c \in \mathbf{R}$

Vì $a_k \leq b_n$ với mọi k nên $c \leq b_n$. Vì $c = \sup\limits_k \{a_k\}$ nên $a_n \leq c$.

Vậy $a_n \leq c \leq b_n$, tức là $c \in [a_n, b_n]$ với mọi n.

c là điểm chung duy nhất của các đoạn $[a_n, b_n]$. Thậy vậy, nếu d cũng là một điểm chung của các đoạn đó thì

$$|c - d| \leq b_n - a_n \text{ với mọi } n.$$

Vì $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$ nên từ đó suy ra $c = d$.

3.3. *Định lí (Bônzanô – Vâyơxtrat).* Mọi dãy số thực $\{u_n\}$ bị chặn đều có một dãy con hội tụ.

Chứng minh. Gọi K là tập hợp tất cả các số nguyên dương k sao cho u_k là một cận trên của tập hợp $\{u_{k+1}, u_{k+2}, ...\}$. Nếu K là một tập hợp vô hạn thì gọi $k_1, k_2, ...$ là những số nguyên thuộc K sao cho $k_1 < k_2 < ...$ Từ định nghĩa của K suy ra

$$u_{k_1} \geq u_{k_2} \geq \ldots \geq u_{k_n} \geq \ldots$$

Dãy số thực $\{u_{k_n}\}$ giảm và bị chặn dưới nên hội tụ.

Nếu K là một tập hợp hữu hạn thì tồn tại một số nguyên dương k_1 lớn hơn mọi số nguyên thuộc K. Vì $k_1 \notin K$ nên tồn tại một số nguyên $k_2 > k_1$ sao cho $u_{k_2} > u_{k_1}$. Vì $k_2 \notin K$ nên tồn tại một số nguyên $k_3 > k_2$ sao cho $u_{k_3} > u_{k_2}$, ... Dãy $\{u_{k_n}\}$ tăng và bị chặn trên nên hội tụ.

Sau đây là một dạng khác của định lí Bônzanô – Vâyơxtrat.

3.4. *Định nghĩa.* Giả sử E là một tập hợp số thực ($E \subset \mathbf{R}$). Số thực $x_0 \in \mathbf{R}$ gọi là một *điểm tụ* của E nếu với số dương ε bất kì, khoảng $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ chứa ít nhất một điểm của tập hợp E khác x_0,

(tức là $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap (E \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing$).

Dễ dàng thấy rằng điều kiện nêu trong định nghĩa trên tương đương với điều kiện sau :

Mỗi khoảng $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ chứa vô số điểm của tập hợp E.

Ví dụ 1. Với $E = [a, b) \subset \mathbf{R}$, mỗi điểm $x \in [a, b]$ đều là một điểm tụ của E. Các điểm của tập hợp $\mathbf{R} \setminus [a, b]$ đều không phải là những điểm tụ của E.

Ví dụ 2. Với $E = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}^*\}$, $x = 0$ là điểm tụ duy nhất của E trong $\mathbf{R}$.

Điểm tụ của tập hợp E có thể thuộc E hoặc không thuộc E.

3.5. *Định lí.* Điểm $x_0 \in \mathbf{R}$ là một điểm tụ của tập hợp $E \subset \mathbf{R}$ khi và chỉ khi tồn tại một dãy điểm $\{x_n\}$ của E đôi một khác nhau sao cho $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$.

Chứng minh. Giả sử tồn tại một dãy điểm $\{x_n\} \subset E$ đôi một khác nhau sao cho $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ và ε là một số dương bất kì. Khi đó tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Khoảng $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ chứa vô số phần tử của tập hợp E. Vậy x_0 là một điểm tụ của E.

Đảo lại, giả sử x_0 là một điểm tụ của tập hợp E. Khi đó khoảng $(x_0 - 1, x_0 + 1)$ chứa vô số điểm của E. Lấy một điểm $x_1 \in (x_0 - 1, x_0 + 1) \cap (E \setminus \{x_0\})$. Khoảng $(x_0 - \frac{1}{2}, x_0 + \frac{1}{2})$ chứa vố số điểm của E. Lấy một điểm $x_2 \in (x_0 - \frac{1}{2}, x_0 + \frac{1}{2}) \cap (E \setminus \{x_0\})$ và $x_2 \neq x_1$. Bằng quy nạp ta được một dãy điểm $\{x_n\}$ của E đôi một khác nhau sao cho $x_n \in (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$ với mọi n. Hiển nhiên $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$.

3.6. *Định lí* (Bônzanô – Vâyơxtrat). Mọi tập hợp vô hạn và bị chặn $E \subset \mathbf{R}$ đều có ít nhất một điểm tụ.

Chứng minh. Tập hợp E là vô hạn nên tồn tại một dãy điểm $\{x_n\}$ của E đôi một khác nhau. Dãy $\{x_n\}$ bị chặn nên, theo định lí 3.3, có một dãy con $\{x_{k_n}\}$ hội tụ : $\lim\limits_{n \to \infty} x_{k_n} = x_0 \in \mathbf{R}$

Hiển nhiên các phần tử của dãy $\{x_{k_n}\}$ là đôi một khác nhau. Theo định lí 3.5, từ đó suy ra x_0 là một điểm tụ của E.

3.7. *Điểm cô lập*

Định nghĩa. Giả sử E là một tập hợp số thực. Điểm $x_0 \in E$ gọi là một ***điểm cô lập*** của tập hợp E nếu nó không phải là một điểm tụ của E.

Hiển nhiên, $x_0 \in E$ là một điểm cô lập của E khi và chỉ khi tồn tại một số dương ε sao cho $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap E = \{x_0\}$.

Ví dụ: Cho $E = (0, 2] \cup \{3\}$. Đoạn $[0, 2]$ là tập hợp tất cả các điểm tụ của E ; 3 là điểm cô lập của E.

§3'. TIÊU CHUẨN CÔSI

Các bạn đọc đã bỏ qua mục §2 và đã nghiên cứu mục §3, xin hãy đọc tiếp mục này.

3'.1. *Định nghĩa.* Dãy số thực $\{u_n\}$ gọi là một dãy Côsi hoặc dãy cơ bản nếu với một số dương ε bất kì, tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$m \geq N \text{ và } n \geq N \Rightarrow |u_m - u_n| < \varepsilon.$$

3'.2. *Bổ đề.* Dãy Côsi là một tập hợp bị chặn.

Chứng minh. Giả sử $\{u_n\}$ là một dãy Côsi. Khi đó tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$m \geq N,\ n \geq N \Rightarrow |u_m - u_n| < 1.$$

Đặc biệt, $|u_n - u_N| < 1$ với mọi $n \geq N$. Do đó

$$|u_n| \leq |u_N| + 1 \text{ với mọi } n \geq N.$$

Đặt $M = \max\{|u_1|, |u_2|, \ldots, |u_{N-1}|, |u_N| + 1\}$.

Khi đó $|u_n| \leq M$ với mọi n.

3'.3. *Bổ đề.* Giả sử $\{u_n\}$ là một dãy Côsi và $\{u_{k_n}\}$ là một dãy con của dãy $\{u_n\}$. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_{k_n} = l$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$.

Chứng minh. Tồn tại một số nguyên dương N_1 sao cho

$$n \geq N_1 \Rightarrow |u_{k_n} - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tồn tại một số nguyên dương N_2 sao cho

$$m \geq N_2,\ n \geq N_2 \Rightarrow |u_m - u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Đặt $N = \max\{N_1, N_2\}$. Khi đó, vì $k_n \geq n$ nên

$$n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq |u_n - u_{k_n}| + |u_{k_n} - l|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vậy $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = l$.

3'.4. *Định lí* (Tiêu chuẩn Côsi) **Dãy số thực $\{u_n\}$ hội tụ khi và chỉ khi nó là một dãy Côsi.**

Chứng minh. Giả sử dãy $\{u_n\}$ hội tụ : $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = l$. Với một số dương bất kì ε, tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Khi đó

$$m \geq N,\ n \geq N \Rightarrow |u_m - u_n| \leq |u_m - l| + |l - u_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vậy $\{u_n\}$ là một dãy Côsi.

Đảo lại, giả sử $\{u_n\}$ là một dãy Côsi. Theo bổ đề 3'.2, $\{u_n\}$ là một dãy bị chặn. Theo định lí Bônzanô – Vâyơxtrat, nó có một dãy con $\{u_{k_n}\}$ hội tụ : $\lim\limits_{n \to \infty} u_{k_n} = l$. Theo bổ đề 3'. 3 từ đó suy ra $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = l$

§4. GIỚI HẠN VÔ CỰC

4.1. *Định nghĩa.* a) Ta nói rằng dãy số thực $\{u_n\}$ có giới hạn $+\infty$ khi n dần đến vô cực và viết

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \quad \text{hoặc } u_n \to +\infty \text{ khi } n \to \infty$$

nếu với một số thực A bất kì, tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$n \geqslant N \Rightarrow u_n > A.$$

b) Ta nói rằng dãy số thực $\{u_n\}$ có giới hạn $-\infty$ khi n dần đến vô cực và viết

$$\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty \quad \text{hoặc } u_n \to -\infty \text{ khi } n \to \infty$$

nếu với một số thực A bất kì, tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$n \geqslant N \Rightarrow u_n < A.$$

Chú ý rằng $+\infty$ và $-\infty$ chỉ là những kí hiệu chứ không phải là những số thực. Chỉ các dãy số thực có giới hạn hữu hạn (tức là giới hạn là một số thực) mới gọi là những dãy hội tụ.

Hiển nhiên nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty \ (-\infty)$ và $\{u_{k_n}\}$ là một dãy con bất kì của dãy $\{u_n\}$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} u_{k_n} = +\infty \ (-\infty)$.

4.2. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty \ (-\infty)$ và $\{v_n\}$ là một dãy hội tụ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty (-\infty)$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n) = +\infty \ (-\infty)$.

Một cách tổng quát, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty \ (-\infty)$ và $\{v_n\}$ là một dãy bị chặn dưới (trên) thì $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n) = +\infty \ (-\infty)$.

Thật vậy, cho $A > 0$ bất kì. Gọi m là một cận dưới của $\{v_n\}$. Khi đó tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$n \geq N \Rightarrow u_n > A - m.$$

Do đó

$$n \geq N \Rightarrow u_n + v_n > A - m + m = A.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.

4.3. *Chú ý.* Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ và $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -\infty$ thì ta chưa thể nói gì về giới hạn của dãy $\{u_n + v_n\}$.

Ví dụ 1. Với $u_n = n + \frac{1}{n}$, $v_n = -n$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -\infty$ và $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

2. Với $u_n = n^2$, $v_n = -n$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -\infty$ và $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} n(n - 1) = +\infty$.

3. Với $u_n = n$, $v_n = -n^2$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -\infty$ và $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} [-n(n - 1)] = -\infty$.

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ và $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -\infty$ và nếu ta xét $u_n + v_n$ khi $n \to \infty$ thì ta nói rằng có dạng vô định $\infty - \infty$. Việc tìm $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n)$ (nếu có) gọi là khử dạng vô định.

Dễ dàng chứng minh được

4.4. • Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ và $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, hoặc $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n v_n) = +\infty$.

• Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ và $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = a \in \mathbf{R}$, $a < 0$, hoặc $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -\infty$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n v_n) = -\infty$.

Tuy nhiên, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ và $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$ thì ta chưa thể nói gì về giới hạn của dãy $\{u_n v_n\}$.

Ví dụ 1. Với $u_n = n$, $v_n = \dfrac{1}{n}$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n v_n) = 1$

2. Với $u_n = n$, $v_n = \dfrac{1}{n^2}$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

3. Với $u_n = n^2$, $v_n = \dfrac{1}{n}$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \pm\infty$ và $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$ và ta xét $u_n v_n$ khi $n \to \infty$ thì ta nói rằng có dạng vô định $\infty . 0$.

4.5. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \pm\infty$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$.

Chứng minh. Cho $\varepsilon > 0$ bất kì. Tồn tại một số nguyên dương N sao cho $n \geqslant N \Rightarrow |u_n| > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Do đó

$$n \geqslant N \Rightarrow \frac{1}{|u_n|} < \varepsilon.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$.

Dễ dàng thấy rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ và $u_n > 0$ $(u_n < 0)$ với mọi n thì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty\ (-\infty)$.

4.6. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ và $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$ hoặc nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \pm\infty$ và $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \pm\infty$ thì ta không thể nói gì về giới hạn của dãy $\left\{\dfrac{u_n}{v_n}\right\}$.

Bạn đọc hãy cho các ví dụ.

Trong các trường hợp này, ta nói rằng có dạng vô định $\frac{0}{0}$ và $\frac{\infty}{\infty}$.

4.7. Nếu $\{u_n\}$ là một dãy số thực tăng và bị chặn trên thì nó hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sup\limits_{n} \{u_n\}$. Nếu nó không bị chặn trên thì $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Vậy một dãy số thực tăng bao giờ cũng có giới hạn hữu hạn hoặc $+\infty$, bằng cận trên đúng của nó.

Tương tự, một dãy số thực giảm bao giờ cũng có giới hạn hữu hạn hoặc $-\infty$, bằng cận dưới đúng của nó.

4.8. Nếu $\{u_n\}$ là một dãy số thực bị chặn thì, theo định lí Bônzanô – Vâyơxtrat, nó có một dãy con hội tụ.

● Nếu dãy $\{u_n\}$ không bị chặn trên thì nó có một dãy con $\{u_{k_n}\}$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} u_{k_n} = +\infty$.

Thậy vậy, tồn tại một số hạng u_{k_1} của dãy sao cho $u_{k_1} > 1$. Tiếp đó tồn tại một số hạng u_{k_2} của dãy với $k_2 > k_1$ sao cho $u_{k_2} > 2$,... Bằng quy nạp, ta được một dãy con $\{u_{k_n}\}$ của dãy $\{u_n\}$ sao cho $u_{k_n} > n$ với mọi n. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} u_{k_n} = +\infty$.

Tương tự, nếu dãy số thực $\{u_n\}$ không bị chặn dưới thì nó có một dãy con $\{u_{k_n}\}$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} u_{k_n} = -\infty$.

Vậy một dãy số thực bất kì $\{u_n\}$ bao giờ cũng có một dãy con có giới hạn hữu hạn hoặc vô cực.

§5. GIỚI HẠN TRÊN VÀ GIỚI HẠN DƯỚI CỦA MỘT DÃY SỐ THỰC

5.1. *Định nghĩa.* Nếu dãy số thực $\{u_n\}$ có một dãy con $\{u_{k_n}\}$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} u_{k_n} = l$ thì l gọi là một giới hạn riêng của dãy $\{u_n\}$, l có thể hữu hạn hoặc bằng $\pm\infty$.

5.2. *Định nghĩa.* Giới hạn riêng lớn nhất (nếu có) của dãy số thực $\{u_n\}$ gọi là giới hạn trên của dãy $\{u_n\}$, kí hiệu là

$$\limsup_{n\to\infty} u_n \text{ hoặc } \overline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n.$$

Giới hạn riêng nhỏ nhất (nếu có) của dãy số thực $\{u_n\}$ gọi là giới hạn dưới của dãy $\{u_n\}$, kí hiệu là

$$\liminf_{n\to\infty} u_n \text{ hoặc } \underline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n.$$

Hiển nhiên, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$ ($l \in \mathbf{R}$ hoặc $l = \pm\infty$) thì $\limsup\limits_{n\to\infty} u_n = \liminf\limits_{n\to\infty} u_n = l$.

5.3. *Định lí.* Mọi dãy số thực $\{u_n\}$ đều có giới hạn trên và giới hạn dưới và

$$\limsup_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{u_n, u_{n+1}, \ldots\} \qquad (1)$$

$$\liminf_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{u_n, u_{n+1}, \ldots\} \qquad (2)$$

với quy ước "Nếu $\sup\{u_n, u_{n+1}, \ldots\} = +\infty$ với mọi n thì $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\{u_n, u_{n+1}, \ldots\} = +\infty$. Nếu $\inf\{u_n, u_{n+1}, \ldots\} = -\infty$ với mọi n thì $\lim\limits_{n\to\infty} \inf\{u_n, u_{n+1}, \ldots\} = -\infty$".

Chứng minh. Với mọi n, đặt $a_n = \inf\{u_n, u_{n+1}, \ldots\}$, $b_n = \sup\{u_n, u_{n+1}, \ldots\}$. Khi đó $\{a_n\}$ là một dãy tăng, $\{b_n\}$ là một dãy giảm và $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$ với mọi n (a_n có thể bằng $-\infty$, b_n có thể bằng $+\infty$). Hai dãy $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ đều có giới hạn.

1°. Nếu $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = -\infty$ thì vì $u_n \leqslant b_n$ với mọi n nên $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = -\infty$. Vậy $\limsup\limits_{n \to \infty} u_n = -\infty = \lim\limits_{n \to \infty} b_n$.

2°. Nếu $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = +\infty$ thì $b_n = +\infty$ với mọi n. Dãy $\{u_n\}$ không bị chặn trên. Do đó $\limsup\limits_{n \to \infty} u_n = +\infty = \lim\limits_{n \to \infty} b_n$.

3°. Giả sử $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b \in \mathbf{R}$. Ta chứng minh b là giới hạn riêng lớn nhất của dãy $\{u_n\}$.

Thật vậy, nếu l là một giới hạn riêng của $\{u_n\}$ thì tồn tại một dãy con u_{k_n} của dãy $\{u_n\}$ sao cho $\lim\limits_{n \to \infty} u_{k_n} = l$. Vì $u_{k_n} \leqslant b_{k_n}$ với mọi n nên qua giới hạn, ta được $l \leqslant b$. Vậy chỉ cần chứng tỏ rằng b cũng là một giới hạn riêng của dãy $\{u_n\}$. Thật vậy, từ định nghĩa của b_1 suy ra rằng tồn tại một phần tử u_{i_1} của dãy $\{u_n\}$ sao cho $b_1 - 1 < u_{i_1} \leqslant b_1$. Giả sử j_2 là một số nguyên lớn hơn i_1. Vì $b_{j_2} = \sup\{u_{j_2}, u_{j_2+1}, \ldots\}$ nên tồn tại một số nguyên $i_2 \geqslant j_2$ sao cho $b_{j_2} - \dfrac{1}{2} < u_{i_2} \leqslant b_{j_2}$. Bằng quy nạp, ta nhận được hai dãy số thực $\{b_{j_n}\}$ và $\{u_{i_n}\}$, những dãy con của $\{b_n\}$ và $\{u_n\}$ sao cho $b_{j_n} - \dfrac{1}{n} < u_{i_n} \leqslant b_{j_n}$ với mọi $n \geqslant 2$.

Hiển nhiên $\lim\limits_{n \to \infty} b_{j_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(b_{j_n} - \dfrac{1}{n}\right) = b$. Do đó $\lim\limits_{n \to \infty} u_{i_n} = b$. Vậy b là một giới hạn riêng của dãy $\{u_n\}$. Ta đã chứng minh (1) ; (2) được chứng minh tương tự.

5.4. *Định lí*. Dãy số thực $\{u_n\}$ có giới hạn (hữu hạn hoặc $\pm\infty$) khi và chỉ khi $\liminf\limits_{n \to \infty} u_n = \limsup\limits_{n \to \infty} u_n$. Khi đó

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\inf u_n = \lim_{n\to\infty}\sup u_n.$$

Chứng minh. Điều kiện cần là hiển nhiên, đã được nêu ở trên và đã được sử dụng trong chứng minh định lí.

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\inf u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sup u_n = l$ thì theo định lí 5.3, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ và $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$. Vì $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$ với mọi n, nên từ đó suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$. □

B. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

§1. ĐỊNH NGHĨA. TÍNH CHẤT CÁC PHÉP TOÁN. TIÊU CHUẨN CÔSI

1.1. *Định nghĩa.* Giả sử X là một tập hợp số thực ($X \subset \mathbf{R}$), $x_0 \in \mathbf{R}$ là một điểm tụ của X, f là một hàm số xác định trên X. Ta nói rằng số thực l là giới hạn của hàm số f khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) và viết

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \text{ hoặc } f(x) \to l \text{ khi } x \to x_0,$$

nếu với một số dương ε cho trước bất kì, tồn tại một số dương δ sao cho

$$(\forall x \in X)\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Chú ý. Không được quên điều kiện $|x - x_0| > 0$, tức là $x \neq x_0$. Hàm số f có thể xác định tại điểm x_0 hoặc không. Trong trường hợp f xác định tại x_0, giới hạn l của hàm số không có quan hệ gì với $f(x_0)$.

1.2. *Định lí.* Nếu tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ thì giới hạn đó là duy nhất.

Chứng minh. Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$. Khi đó với $\varepsilon > 0$ bất kì, tồn tại $\delta_1 > 0$ và $\delta_2 > 0$ sao cho

$$(\forall x \in X)\ 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon,$$

$$(\forall x \in X)\ 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Đặt $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Khi đó $\delta > 0$ và

$$|a - b| \leqslant |a - f(x)| + |f(x) - b| < 2\varepsilon \quad (1)$$

với mọi $x \in X$ mà $0 < |x - x_0| < \delta$. Vì (1) đúng với mọi $\varepsilon > 0$, từ đó suy ra $a = b$.

Tương tự như đối với các dãy số thực, áp dụng định nghĩa giới hạn của hàm số, dễ dàng chứng minh được hai định lí sau :

1.3. ***Định lí.*** Nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ thì tồn tại một số dương δ sao cho hàm số f bị chặn trên tập hợp

$$X \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}).$$

1.4. ***Định lí.*** Giả sử X là một tập hợp số thực, x_0 là một điểm tụ của X, f là một hàm số xác định trên X và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

a) Nếu $l > a$ thì tồn tại một số dương δ sao cho

$$(\forall x \in X)\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > a.$$

b) Nếu $l < b$ thì tồn tại một số dương δ sao cho

$$(\forall x \in X)\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < b.$$

Định lí sau đây cho thấy mối quan hệ giữa giới hạn của hàm số và giới hạn của dãy số :

1.5. ***Định lí.*** Giả sử X là một tập hợp số thực x_0 là một điểm tụ của X và f là một hàm số xác định trên X. Khi đó $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ khi và chỉ khi

$$(\forall\ \{x_n\} \subset X \setminus \{x_0\})\ \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = l \quad (1).$$

Chứng minh. Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ và $\{x_n\}$ là một dãy số thực thuộc $X \setminus \{x_0\}$ sao cho $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Ta chứng minh $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$.

Thật vậy, cho $\varepsilon > 0$ bất kì. Tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho

$$(\forall x \in X)\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \delta.$$

Vì $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ nên tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$n \geqslant N \Rightarrow |x_n - x_0| < \delta.$$

Vì $x_n \neq x_0$ với mọi n, nên từ đó suy ra

$$n \geqslant N \Rightarrow |f(x_n) - l| < \varepsilon.$$

Vậy $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$.

Đảo lại, giả sử điều kiện (1) được thỏa mãn. Ta chứng minh $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ bằng phản chứng :

Thật vậy, giả sử $f(x) \not\to l$ khi $x \to x_0$. Khi đó tồn tại một số dương ε có các tính chất sau :

$\forall\ \delta > 0,\ \exists\ x_\delta \in X$ sao cho $0 < |x_\delta - x_0| < \delta$ và $|f(x_\delta) - l| \geqslant \varepsilon$.

Do đó

$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \exists\ x_n \in X$ sao cho $0 < |x_n - x_0| < \dfrac{1}{n}$ và $|f(x_n) - l| \geqslant \varepsilon$.

Ta được một dãy số $\{x_n\} \subset X \setminus \{x_0\}$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ nhưng $f(x_n) \not\to l$ khi $n \to \infty$. Điều này trái với giả thiết.

Áp dụng định nghĩa giới hạn của hàm số hoặc áp dụng định lí 1.5, dễ dàng chứng minh được các định lí 1.6, 1.7, 1.8 sau đây :

1.6. *Định lí.* Giả sử x_0 là một điểm tụ của tập hợp số thực X, f_1 và f_2 là hai hàm số xác định trên X, $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = l_1$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = l_2$. Nếu

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \text{ với mọi } x \in X \setminus \{x_0\},$$

(hoặc với mọi $x \in X$ đủ gần x_0 và khác x_0) thì $l_1 \leqslant l_2$.

1.7. *Định lí.* Giả sử f, g, h là ba hàm số xác định trên tập hợp số thực X, x_0 là một điểm tụ của X. Nếu

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \text{ với mọi } x \in X \setminus \{x_0\}$$

(hoặc với mọi $x \in X$ đủ gần x_0 và khác x_0) và

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$$

thì

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l.$$

1.8. *Định lí.* Giả sử x_0 là một điểm tụ của tập hợp số thực X, f là một hàm số xác định trên X. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$.

1.9. *Định lí.* Giả sử f_1, f_2 là những hàm số xác định trên tập hợp số thực X, x_0 là một điểm tụ của X. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = l_1$, $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = l_2$ thì

a) $\lim\limits_{x \to x_0} [f_1(x) + f_2(x)] = l_1 + l_2$;

b) $\lim\limits_{x \to x_0} [f_1(x) f_2(x)] = l_1 l_2$;

đặc biệt, nếu $c \in \mathbf{R}$ là một hằng số thì

$$\lim_{x \to x_o} cf_1(x) = cl_1 \;;$$

c) nếu ngoài ra $l_2 \neq 0$ thì

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{l_1}{l_2}.$$

1.10. *Tiêu chuẩn Côsi về sự tồn tại giới hạn của một hàm số*

Định lí. Giả sử f làm một hàm số xác định trên tập hợp số thực X và x_o là một điểm tụ của X. Khi đó, tồn tại $\lim_{x \to x_o} f(x)$ khi và chỉ khi

Với một số $\varepsilon > 0$ bất kì, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho

$$(\forall x' \in X, \forall x'' \in X)\ 0 < |x' - x_o| < \delta,\ 0 < |x'' - x_o| < d$$

$$\Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \qquad (1)$$

Chứng minh. Giả sử $\lim_{x \to x_o} f(x) = l \in \mathbf{R}$. Khi đó với một số $\varepsilon > 0$ bất kì, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho

$$(\forall x \in X)\ 0 < |x - x_o| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Khi đó

$$(\forall x' \in X, \forall x'' \in X)\ 0 < |x' - x_o| < \delta,\ 0 < |x'' - x_o| < \delta \Rightarrow$$

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - l| + |l - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Đảo lại, cho $\varepsilon > 0$ bất kì. Gọi δ là một số dương thỏa mãn điều kiện (1) nêu trong định lí. Giả sử $\{x_n\}$ là một dãy phần tử của tập hợp $X \backslash \{x_o\}$ sao cho $\lim_{n \to \infty} x_n = x_o$. Khi đó tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - x_o| < \delta.$$

Khi đó, vì $x_n \neq x_o$ với mọi n nên

$$m \geq N,\ n \geq N \Rightarrow |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon.$$

Vậy $\{f(x_n)\}$ là một dãy Côsi trong $\mathbf{R}$. Theo tiêu chuẩn Côsi về điều kiện hội tụ của một dãy số thực, $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ : $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l \in \mathbf{R}$. Ta chứng minh $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

Thậy vậy, với mọi $x \in X$ mà $0 < |x - x_0| < \delta$ và với mọi $n \geq N$, ta có

$$|f(x) - f(x_n)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Trong (2), cố định x và cho $n \to \infty$, ta được

$$|f(x) - l| \leq \varepsilon \text{ với mọi } x \in X \text{ mà } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = l$. □

§2. GIỚI HẠN MỘT PHÍA

2.1. ***Định nghĩa.*** a) Giả sử X là một tập hợp số thực, $x_0 \in \mathbf{R}$ là một điểm tụ của tập hợp $X \cap [x_0, +\infty)$, f là một hàm số xác định trên X. Ta nói rằng $l \in \mathbf{R}$ là *giới hạn phải* của hàm số f khi x dần đến x_0 (hoặc tại x_0) và viết

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l \text{ hoặc } f(x) \to l \text{ khi } x \to x_0^+$$

nếu với một số dương ε bất kì, tồn tại một số dương δ sao cho

$$(\forall x \in X)\ x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Giới hạn phải của hàm số f tại x_0 được kí hiệu là $f(x_0 + 0)$.

b) Giả sử X là một tập hợp số thực, $x_0 \in \mathbf{R}$ là một điểm tụ của tập hợp $X \cap (-\infty, x_0]$, f là một hàm số xác định trên X. Ta nói rằng $l \in \mathbf{R}$ là *giới hạn trái* của f khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) và viết

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l \text{ hoặc } f(x) \to l \text{ khi } x \to x_0^-$$

nếu với một số dương ε bất kì, tồn tại một số dương δ sao cho

$$(\forall x \in X)\ x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Giới hạn trái của hàm số f tại x_0 được kí hiệu là $f(x_0 - 0)$.

Dễ dàng thấy rằng

2.2. Nếu $x_0 \in \mathbf{R}$ là một điểm tụ của các tập hợp $X \cap [x_0, +\infty)$ và $X \cap (-\infty, x_0]$ thì hàm số f có giới hạn tại điểm x_0 khi và chỉ khi f có giới hạn phải và giới hạn trái tại điểm x_0 và

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0).$$

Đối với giới hạn phải và giới hạn trái của hàm số, ta cũng có các định lí tương tự như các định lí đã nêu về giới hạn của hàm số.

2.3. *Định lí*. Giả sử $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ là một hàm số tăng trên khoảng (a, b).

a) Nếu f bị chặn trên trên (a, b) thì $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \sup\limits_{x \in (a, b)} f(x)$.

b) Nếu f bị chặn dưới trên (a, b) thì $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \inf\limits_{x \in (a, b)} f(x)$.

Chứng minh. a) Đặt $l = \sup\limits_{x \in (a, b)} f(x)$. Vì f bị chặn trên trên (a, b) nên $l \in \mathbf{R}$. Cho $\varepsilon > 0$ bất kì. Khi đó, tồn tại $x_\varepsilon \in (a, b)$ sao cho $f(x_\varepsilon) > l - \varepsilon$. Đặt $\delta = b - x_\varepsilon$, ta có $\delta > 0$ và

$$(\forall x \in (a, b))\ x_\varepsilon = b - \delta < x < b \Rightarrow f(x_\varepsilon) \leqslant f(x) \leqslant l$$

$$\Rightarrow l - \varepsilon < f(x) \leqslant l \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Vậy $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = l$.

b) Được chứng minh tương tự.

§3. GIỚI HẠN TẠI VÔ CỰC VÀ GIỚI HẠN VÔ CỰC

Giới hạn tại vô cực

3.1. *Định nghĩa.* a) Giả sử X là một tập hợp số thực không bị chặn trên và f là một hàm số xác định trên X. Ta nói rằng số $l \in \mathbf{R}$ là giới hạn của hàm số f khi x dần đến $+\infty$ (hoặc tại $+\infty$) và viết

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \text{ hoặc } f(x) \to l \text{ khi } x \to +\infty$$

nếu với một số dương ε bất kì, tồn tại một số dương A sao cho

$$(\forall x \in X)\ x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

b) Giả sử X là một tập hợp số thực không bị chặn dưới và f là một hàm số xác định trên X. Ta nói rằng số $l \in \mathbf{R}$ là giới hạn của hàm số f khi x dần đến $-\infty$ (hoặc tại $-\infty$) và viết

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \text{ hoặc } f(x) \to -l \text{ khi } x \to -\infty$$

nếu với một số dương ε bất kì, tồn tại một số dương A sao cho

$$(\forall x \in X)\ x < -A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Để cho tiện, nếu tập hợp số thực X không bị chặn trên, ta gọi $+\infty$ là một điểm tụ của X. Tương tự, nếu X không bị chặn dưới, ta gọi $-\infty$ là một điểm tụ của X.

Ví dụ. $+\infty$ là điểm tụ của tập hợp các số tự nhiên **N**, $+\infty$ và $-\infty$ là các điểm tụ của tập hợp các số nguyên **Z**, $+\infty$ là một điểm tụ của tập hợp các số hữu tỉ dương.

Xem như các bài tập, bạn đọc hãy phát biểu và chứng minh các định lí tương tự như các định lí 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10 cho trường hợp giới hạn của hàm số tại vô cực.

Chẳng hạn tiêu chuẩn Côsi về sự tồn tại giới hạn của hàm số tại $+\infty$ được phát biểu như sau :

3.2. *Định lí.* Giả sử X là một tập hợp số thực không bị chặn trên và f là một hàm số xác định trên X. Khi đó, hàm số f có giới hạn khi $x \to +\infty$ khi và chỉ khi

Với một số dương ε bất kì, tồn tại một số dương A sao cho

$$(\forall x' \in X, \forall x'' \in X)\ x' > A,\ x'' > A \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Giới hạn vô cực

3.3. *Định nghĩa.* Giả sử X là một tập hợp số thực, $x_0 \in \mathbf{R}$ là một điểm tụ của X, f là một hàm số xác định trên X. Ta viết

a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ hoặc $f(x) \to +\infty$ khi $x \to x_0$

nếu với một số dương A bất kì, tồn tại một số dương δ sao cho

$$(\forall x \in X)\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A.$$

b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ hoặc $f(x) \to -\infty$ khi $x \to x_0$

nếu với một số dương A bất kì, tồn tại một số dương δ sao cho

$$(\forall x \in X)\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -A.$$

3.4. *Định nghĩa.* Giả sử X là một tập hợp số thực không bị chặn trên, f là một hàm số xác định trên X. Ta viết

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ hoặc $f(x) \to +\infty$ khi $x \to +\infty$

nếu với một số thực A bất kì, tồn tại một số thực B sao cho

$$(\forall x \in X)\ x > B \Rightarrow f(x) > A.$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ hoặc $f(x) \to -\infty$ khi $x \to +\infty$

nếu với một số thực A bất kì, tồn tại một số thực B sao cho

$$(\forall x \in X)\ x > B \Rightarrow f(x) < A.$$

Bạn đọc hãy phát biểu các định nghĩa

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty,\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty,\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty,\ \ldots$$

và nêu các tính chất của giới hạn vô cực của hàm số tương tự như trong trường hợp các dãy số thực.

3.5. Ta biết rằng nếu $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ là một hàm số tăng và bị chặn trên thì $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \sup\limits_{x \in (a, b)} f(x)$.

Nếu f tăng và không bị chặn trên trên (a, b) thì dễ dàng chứng minh được rằng $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty = \sup\limits_{x \in (a, b)} f(x)$

Do đó

Nếu $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ là một hàm số tăng trên (a, b) thì

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \sup_{x \in (a, b)} f(x).$$

Tương tự, nếu f tăng trên (a, b) thì

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf_{x \in (a, b)} f(x).$$

§4. CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH

4.1. *Vô cùng bé và vô cùng lớn*

Định nghĩa. Giả sử X là một tập hợp số thực, x_0 là một điểm tụ của X ($x_0 \in \mathbb{R}$ hoặc $x_0 = \pm\infty$) hoặc $x_0 \in \mathbb{R}$ là một điểm tụ của tập hợp $X \cap [x_0, +\infty)$ hoặc $X \cap (-\infty, x_0]$ và f là một hàm số xác định trên tập hợp X.

a) f gọi là một vô cùng bé khi $x \to x_0$ ($x \to x_0^+$ hoặc $x \to x_0^-$) nếu $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to x_0^+ \\ x \to x_0^-)}} f(x) = 0,$

b) f gọi là một vô cùng lớn khi $x \to x_0$ ($x \to x_0^+$ hoặc $x \to x_0^-$) nếu $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to x_0^+ \\ x \to x_0^-)}} |f(x)| = 0,$

4.2. Cũng như đối với các dãy số thực, với các hàm số ta thường gặp các dạng vô định sau :

$$\frac{0}{0}\ ;\ \frac{\infty}{\infty}\ ;\ 0.\infty\ ;\ \infty - \infty.$$

Ví dụ 1. Tìm $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$

Ta có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$. Vì $\dfrac{1-\cos 2x}{x^2} = \dfrac{2\sin^2 x}{x^2}$ với mọi $x \neq 0$

và $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ nên

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2} = 2.$$

Ví dụ 2. Tìm $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{1+x} - \sqrt{x})$

Ta có dạng vô định $\infty - \infty$. Vì

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}$$

với mọi $x > 0$ nên

$$\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{1+x} - \sqrt{x}) = 0.$$

§5. CÁC HÀM SỐ TƯƠNG ĐƯƠNG

5.1. *Định nghĩa.* Giả sử X là một tập hợp số thực, x_0 là một điểm tụ của X ($x_0 \in \mathbf{R}$ hoặc $x_0 = \pm\infty$), hoặc $x_0 \in \mathbf{R}$ là một điểm tụ của tập hợp $X \cap [x_0, +\infty)$ hoặc $X \cap (-\infty, x_0]$, f và g là hai hàm số xác định trên X. Ta nói rằng f tương đương với g khi $x \to x_0$ ($x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$) và viết

$$f \sim g \text{ khi } x \to x_0 \ (x \to x_0^+,\ x \to x_0^-)$$

nếu tồn tại một hàm số h trên X sao cho

$$f(x) = g(x)h(x) \text{ và } \lim_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to x_0^+,\, x\to x_0^-)}} h(x) = 1. \qquad (1)$$

Nếu $g(x) \neq 0$ với $|x - x_0|$ dương đủ nhỏ thì (1) tương đương với

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to x_0^+,\, x \to x_0^-)}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Ví dụ 1. Ta có

$$\sin x \sim x \text{ khi } x \to 0$$

vì $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Ví dụ 2. Giả sử $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ với $a_n \neq 0$ là một đa thức bậc n. Khi đó

$$P(x) \sim a_n x^n \text{ khi } x \to \pm\infty.$$

Thật vậy, ta có

$$P(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \cdot \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n}\right)$$

$$= (a_n x^n) h(x), \text{ với mọi } x \neq 0,$$

và $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{P(x)}{a_n x^n} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} h(x) = 1$.

5.2. ***Định lí.*** Quan hệ

$$f \sim g \text{ khi } x \to x_0 \ (x \to x_0^+,\ x \to x_0^-)$$

là một quan hệ tương đương.

Chứng minh. Hiển nhiên $f \sim f$. Nếu $f \sim g$ thì $g \sim f$. Thật vậy, ta có $f(x) = g(x)h(x)$, $x \in X \setminus \{x_0\}$ và $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 1$. Do đó $h(x) > 0$ với $|x - x_0|$ dương đủ nhỏ. Từ đó $g(x) = f(x) \cdot \dfrac{1}{h(x)}$, $x \in X \setminus \{x_0\}$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{h(x)} = 1$. Nếu $f \sim g$ và $g \sim h$ thì $f(x) = g(x)k_1(x)$, $g(x) = h(x)k_2(x)$, $x \in X \setminus \{x_0\}$, $\lim\limits_{x \to x_0} k_1(x) =$

$= \lim\limits_{x \to x_0} k_2(x) = 1$. Do đó $f(x) = h(x)[k_1(x)k_2(x)]$, $x \in X \setminus \{x_0\}$,

$\lim\limits_{x \to x_0} [k_1(x)k_2(x)] = 1$. Vậy $f \sim h$ khi $x \to x_0$. □

5.3. *Định lí.* Nếu $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \to x_0^+, \dots}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \to x_0^+, \dots}} g(x) = l$ trong đó $l \in \mathbf{R}$

$l \neq 0$ thì $f \sim g$ khi $x \to x_0$ $(x \to x_0^+, x \to x_0^-)$.

Chứng minh. Vì $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \to x_0^+, \dots}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{l} = 1$ nên $f \sim g$.

Chú ý. Trong định lí 5.3, điều kiện $l \neq 0$ và $l \neq \pm\infty$ là không thể thiếu. Ta hãy xét các ví dụ sau :

1. Với $f(x) = x^2$, $g(x) = x^4$, ta có $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$

nhưng $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

2. Với $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, ta có $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$

nhưng $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$.

5.4. *Định lí.* Nếu $f \sim g$ khi $x \to x_0$ $(x \to x_0^+, x \to x_0^-)$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ ($l \in \mathbf{R}$ hoặc $l = \pm\infty$) thì $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \to x_0^+, \dots}} g(x) = l$

Chứng minh. Định lí suy ra ngay từ định nghĩa.

5.5. *Định lí.* Nếu $f \sim \varphi$ và $g \sim \psi$ khi $x \to x_0$ $(x \to x_0^+, x \to x_0^-)$ thì

$$fg \sim \varphi\psi$$

và nếu $g(x)$ hoặc $\psi(x)$ khác không với $|x - x_0|$ dương đủ nhỏ thì

$$\frac{f}{g} \sim \frac{\varphi}{\psi} \text{ khi } x \to x_0 \ (x \to x_0^+, \ x \to x_0^-) \qquad (1)$$

Chứng minh. Ta chứng minh (1). Ta có .

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{\psi(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Ví dụ 1. Ta có $\text{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \sim \dfrac{x}{1}$ khi $x \to 0$, vì

$\sin x \sim x$ và $\cos x \sim 1$ khi $x \to 0$. Vậy $\text{tg}x \sim x$ khi $x \to 0$.

Ví dụ 2. Tìm $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin \frac{x}{3}}$.

Ta có :

$$\frac{1 - \cos x}{\sin \frac{x}{3}} = \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{3}} \sim \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\frac{x}{3}} = \frac{3}{2} x \text{ khi } x \to 0.$$

Do đó $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin \frac{x}{3}} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{3}{2} x\right) = 0.$

Chú ý. Nói chung từ $f \sim \varphi$, $g \sim \psi$ khi $x \to x_0$, không suy ra $f + g \sim \varphi + \psi$ hoặc $f - g \sim \varphi - \psi$. Các ví dụ sau đây chứng tỏ điều đó.

1) Với $f(x) = x + x^2$, $\varphi(x) = x + x^3$, $g(x) = \psi(x) = -x$, ta có

$$f \sim \varphi \text{ và } g \sim \psi \text{ khi } x \to 0$$

nhưng $f(x) + g(x) = x^2$ không tương đương với $\varphi(x) + \psi(x) = x^3$ khi $x \to 0$.

2) Với $f(x) = \cos x$, $\varphi(x) = 1$, $g(x) = \psi(x) = 1$, ta có

$$f \sim \varphi \text{ và } g \sim \psi \text{ khi } x \to 0, \text{ nhưng}$$

$g(x) - f(x) = 1 - \cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$ không tương đương với

$$\psi(x) - \varphi(x) = 0 \text{ khi } x \to 0.$$

§6. PHẦN CHÍNH CỦA MỘT VÔ CÙNG BÉ

Giả sử hàm số f là một vô cùng bé khi $x \to x_0$ ($x_0 \in \mathbf{R}$ hoặc $x_0 = \pm\infty$) hoặc $x \to x_0^+$, hoặc $x \to x_0^-$. Khi đó

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to x_0^+,\, x \to x_0^-)}} f(x) = 0.$$

Nếu đặt $t = |x - x_0|$ với $x_0 \in \mathbf{R}$ và $t = \dfrac{1}{x}$ với $x_0 = \pm\infty$ thì $t \to 0$ khi $x \to x_0$. Do đó ta sẽ chỉ xét trường hợp $x \to 0$.

Hiển nhiên với số nguyên dương n, x^n dần đến 0 càng nhanh khi x dần đến 0 nếu n càng lớn. Vì vậy, ta sẽ so sánh các vô cùng bé với vô cùng bé ax^n, trong đó $a \in \mathbf{R}$ là một hằng số khác không.

6.1. *Định lí.* Giả sử hàm số f là một vô cùng bé khi $x \to 0$. Nếu $f(x) \sim ax^n$ khi $x \to 0$, trong đó a là một số thực khác không thì a và n được xác định một cách duy nhất.

Chứng minh. Giả sử $f(x) \sim bx^m$ khi $x \to 0$, $b \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$ và m nguyên dương. Khi đó $ax^n \sim bx^m$ khi $x \to 0$. Do đó $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^n}{bx^m} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a}{b}x^{n-m} = 1$. Vậy phải có $n - m = 0$ và $\dfrac{a}{b} = 1$. □

6.2. *Định nghĩa.* Nếu $f(x) \sim ax^n$ khi $x \to 0$, trong đó $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ và $n \in \mathbf{N}^*$ thì ax^n gọi là phần chính của f(x) và f(x) gọi là một vô cùng bé bậc n.

Ví dụ. 1) $\sin\frac{x}{2} \sim \frac{1}{2}x$ khi $x \to 0$. Vậy $\sin\frac{x}{2}$ là một vô cùng bé bậc 1 (khi $x \to 0$) với phần chính là $\frac{1}{2}x$.

2) $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \sim \frac{1}{2}x^2$ khi $x \to 0$; $\frac{1}{2}x^2$ là phần chính của vô cùng bé $1 - \cos x$ và $1 - \cos x$ có bậc hai (khi $x \to 0$).

3) $\frac{1}{3}x^4 - x^5 \sim \frac{1}{3}x^4$ khi $x \to 0$. Vậy $\frac{1}{3}x^4$ là phần chính của vô cùng bé $\frac{1}{3}x^4 - x^5$ khi $x \to 0$. Bậc của $\frac{1}{3}x^4 - x^5$ là 4.

Bậc của vô cùng bé càng cao, vô cùng bé càng dần đến 0 nhanh hơn.

6.3. Đôi khi người ta cũng nói tới phần chính của vô cùng lớn.

Ví dụ. $\operatorname{cotg}x = \frac{1}{\operatorname{tg}x} \sim \frac{1}{x}$ khi $x \to 0$; $\frac{1}{x}$ gọi là phần chính của vô cùng lớn cotgx khi $x \to 0$.

§7. CÁC KÍ HIỆU o VÀ O

7.1. *Định nghĩa.* Giả sử X là một tập hợp số thực, x_0 là một điểm tụ của X ($x_0 \in \mathbf{R}$ hoặc $x_0 = \pm\infty$) hoặc x_0 là một điểm tụ của tập hợp $X \cap [x_0, +\infty)$ hoặc $X \cap (-\infty, x_0]$, f và g là hai hàm số xác định trên X. Ta nói rằng f là không đáng kể đối với g khi $x \to x_0$ ($x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$) và viết

$$f = o(g) \text{ khi } x \to x_0 \ (x \to x_0^+,\ x \to x_0^-)$$

nếu tồn tại một hàm số h xác định trên X sao cho

$$f(x) = g(x)h(x),\ x \in X \setminus \{x_0\} \text{ và } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to x_0^+,\ x \to x_0^-)}} h(x) = 0 \qquad (1)$$

Nếu $g(x) \neq 0$ với $x \neq x_0$ đủ gần x_0 thì (1) tương đương với

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to x_0^+,\, x \to x_0^-)}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Ví dụ. Nếu m và n là hai số nguyên dương và m >n thì

$$x^m = o(x^n) \text{ khi } x \to 0$$

và

$$x^n = o(x^m) \text{ khi } x \to \pm\infty.$$

Với $g(x) = 1$, $f = o(g) = o(1)$ khi $x \to x_0$ khi và chỉ khi

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{1} = 0$. Từ đó ta có mệnh đề sau :

7.2. Giả sử x_0 là một điểm tụ của tập hợp số thực X hoặc $x_0 \in \mathbf{R}$ là một điểm tụ của tập hợp $X \cap [x_0, +\infty)$ hoặc $X \cap (-\infty, x_0]$, f và g là hai hàm số xác định trên X. Khi đó

$$f = o(1) \text{ khi } x \to x_0 \ (x \to x_0^+,\ x \to x_0^-)$$

khi và chỉ khi $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to x_0^+,\, x \to x_0^-)}} f(x) = 0$, tức là f là một vô cùng bé khi $x \to x_0$ $(x \to x_0^+,\ x \to x_0^-)$.

Dễ dàng thấy rằng

$$f = o(g) \Leftrightarrow f = g.o(1) \text{ khi } x \to x_0 \ (x \to x_0^+,\ x \to x_0^-)$$

7.3. *Định nghĩa.* Giả sử X là một tập hợp số thực, x_0 là một điểm tụ của X, hoặc $x_0 \in \mathbf{R}$ là một điểm tụ của tập hợp $X \cap [x_0, +\infty)$ hoặc $X \cap (-\infty, x_0]$, f và g là hai hàm số xác định trên tập hợp X. Ta viết

$$f = O(g) \text{ khi } x \to x_0 \ (x \to x_0^+,\ x \to x_0^-)$$

nếu tồn tại một hàm số h xác định trên X sao cho

$$f(x) = g(x)h(x),\ x \in X$$

và h bị chặn với $x \neq x_0$ đủ gần x_0.

Nếu $g(x) \neq 0$ với $x \in X$, $x \neq x_0$ đủ gần x_0 thì định nghĩa trên tương đương với

$$\frac{f}{g} \text{ là bị chặn với } x \in X,\ x \neq x_0 \text{ đủ gần } x_0.$$

Ví dụ. Với $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$, $g(x) = x$, $x \neq 0$, ta có

$$f = O(g) \text{ khi } x \to 0$$

vì $\frac{f(x)}{g(x)} = \sin\frac{1}{x}$ bị chặn trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

C. HÀM SỐ LIÊN TỤC

§1. ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT, CÁC PHÉP TOÁN

1.1. *Định nghĩa.* Giả sử X là một tập hợp số thực, f là một hàm số xác định trên X. Ta nói rằng

a) f liên tục tại điểm $x_0 \in X$ nếu với một số dương ε bất kì, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho

$$(\forall x \in X)\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

b) f liên tục trên tập hợp X nếu f liên tục tại mọi điểm $x \in X$.

Hàm số f không liên tục tại điểm x_0 gọi là gián đoạn tại điểm này.

Hiển nhiên nếu f là một hàm số xác định trên tập hợp số thực X và $x_0 \in X$ là một điểm cô lập của X thì f liên tục tại điểm x_0.

Chú ý. Trong định nghĩa trên, điều kiện $|x - x_0| < \delta$ thay cho điều kiện $0 < |x - x_0| < \delta$ trong định nghĩa $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Ví dụ. 1) $f(x) = a$, trong đó $a \in \mathbf{R}$ là một hằng số, là một hàm số liên tục trên $\mathbf{R}$.

2) Hàm số $f(x) = \sin x$ liên tục trên $\mathbf{R}$. Thật vậy, giả sử $x_0 \in \mathbf{R}$. Với mọi $x \in \mathbf{R}$, ta có

$$|\sin x - \sin x_0| = 2 \left| \cos \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x - x_0}{2} \right|$$

$$\leqslant 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leqslant |x - x_0|.$$

Với $\varepsilon > 0$ bất kì, ta lấy $\delta = \varepsilon$. Khi đó

$$(\forall x \in \mathbf{R})\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon.$$

Vậy f liên tục tại x_0, do đó liên tục trên $\mathbf{R}$.

3) Gọi $\mathbf{D} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ là hàm số xác định bởi

$$D(x) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } x \text{ là vô tỉ} \\ 1 \text{ nếu } x \text{ là hữu tỉ.} \end{cases}$$

Xem như bài tập, áp dụng định nghĩa, bạn đọc hãy chứng minh rằng hàm số D gián đoạn tại mọi điểm của $\mathbf{R}$.

1.2. ***Hàm số liên tục một phía***

Định nghĩa. Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp X những số thực. f gọi là *liên tục phải* (trái) tại điểm $x_0 \in X$ nếu với một số dương ε bất kì, tồn tại một số dương δ sao cho

$$(\forall x \in X)\ x_0 \leqslant x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$
$$(x_0 - \delta < x \leqslant x_0)$$

Hiển nhiên hàm số f liên tục tại điểm x_0 khi và chỉ khi f liên tục phải và liên tục trái tại x_0.

Dễ dàng chứng minh được hai định lí sau

1.3. *Định lí*. Giả sử f là một hàm số xác định trên tập hợp số thực X. Hàm số f liên tục tại điểm $x_0 \in X$ khi và chỉ khi

$$(\forall \{x_n\} \subset X)\ \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Chú ý. Trong định lí trên ta không đòi hỏi điều kiện $x_n \neq x_0$.

1.4. *Định lí.* Giả sử X là một tập hợp số thực, $x_0 \in X$ là một điểm tụ của X, f là một hàm số xác định trên X. Khi đó f liên tục tại điểm x_0 nếu và chỉ nếu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Áp dụng định nghĩa 1.1 hoặc định lí 1.3, không khó khăn bạn đọc có thể chứng minh được hai định lí sau :

1.5. *Định lí.* Nếu hàm số $f : X \to \mathbf{R}$ liên tục tại điểm $x_0 \in X$ thì hàm số $|f|$ liên tục tại x_0.

1.6. *Định lí.* Giả sử X là một tập hợp số thực, f, g là hai hàm số liên tục tại điểm $x_0 \in X$. Khi đó các hàm số

$$f + g,\ fg,\ cf\ (c \in \mathbf{R} \text{ là một hằng số})$$

liên tục tại điểm x_0.

Nếu ngoài ra $g(x_0) \neq 0$ thì hàm số $\dfrac{f}{g}$ liên tục tại điểm x_0.

1.7. *Tính liên tục của hàm số hợp*

Định lí. Giả sử X, Y là những tập hợp số thực, $f : X \to Y$ và $g : Y \to \mathbf{R}$ là hai hàm số. Nếu f liên tục tại điểm $x_0 \in X$ và g liên tục tại điểm $y_0 = f(x_0) \in Y$ thì hàm số $h = g \circ f : X \to \mathbf{R}$ liên tục tại điểm x_0.

Chứng minh. Vì f liên tục tại điểm x_0 nên

$$(\forall \{x_n\} \subset X) \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0) = y_0.$$

Vì g liên tục tại điểm y_0 nên từ đó suy ra

$$\lim_{n \to \infty} h(x_n) = \lim_{n \to \infty} g[f(x_n)] = g(y_0) = g[f(x_0)] = h(x_0).$$

Vậy hàm số $h = g \circ f$ liên tục tại điểm x_0.

1.8. *Hàm số liên tục đều*

Định nghĩa. Giả sử X là một tập hợp số thực. Hàm số $f : X \to \mathbb{R}$ gọi là *liên tục đều* trên X nếu với một số dương ε bất kì, tồn tại một số dương δ sao cho

$$(\forall x_1, x_2 \in X)\ |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Hiển nhiên nếu hàm số f liên tục đều trên X thì nó liên tục trên X (tức là liên tục tại mọi điểm của tập hợp X). Ta sẽ thấy rằng điều ngược lại không đúng.

Ví dụ 1. Giả sử I là một khoảng bất kì (mở, đóng, nửa mở bị chặn hoặc không). Hàm số $f : I \to \mathbb{R}$ gọi là một hàm số Lipsit (Lipschitz) (hoặc thỏa mãn điều kiện Lip–sit) nếu tồn tại một số k sao cho

$$|f(x') - f(x'')| \leq k\,|x' - x''| \text{ với mọi } x', x'' \in I.$$

Hiển nhiên hàm số Lipsit f là liên tục đều trên I.

Ví dụ 2. Hàm số $f(x) = x^2$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tuy nhiên f không liên tục đều trên $\mathbb{R}$. Thật vậy, nếu f liên tục đều trên $\mathbb{R}$ thì tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})\ |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |x_1^2 - x_2^2| < 1 \qquad (1)$$

Lấy $x_1 = \dfrac{1}{\delta}$, $x_2 = \dfrac{1}{\delta} + \dfrac{\delta}{2}$. Khi đó

$$|x_1 - x_2| = \frac{\delta}{2} < \delta \text{ nhưng}$$

$$|x_1^2 - x_2^2| = \left|\frac{1}{\delta^2} - \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)^2\right| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 \text{ ; trái với (1).}$$

§2. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT ĐOẠN

2.1. *Định lí* (Vâyơxtrat). Nếu hàm số $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên [a, b] thì

a) f bị chặn trên [a, b] ;

b) f đạt được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên [a, b].

Chứng minh. a) Giả sử hàm số f không bị chặn trên [a, b]. Khi đó với mọi số nguyên dương n, tồn tại một $x_n \in [a, b]$ sao cho $|f(x_n)| > n$. Dãy $\{x_n\}$ là bị chặn ($\{x_n\} \subset [a, b]$) nên theo định lí Bônzanô - Vâyơxtrat, nó có một dãy con $\{x_{k_n}\}$ hội tụ : $\lim\limits_{x \to \infty} x_{k_n} = x_0 \in [a, b]$. Vì f liên tục tại x_0 nên từ đó suy ra

$$\lim_{n \to \infty} f(x_{k_n}) = f(x_0) \qquad (1)$$

Mặt khác, ta có $|f(x_{k_n})| > k_n$ với mọi n. Điều này mâu thuẫn với (1). Vậy f bị chặn trên [a, b].

b) Vì f bị chặn trên [a, b] nên $M = \sup\limits_{n \in [a, b]} f(x)$ là một số hữu hạn. Với một số nguyên dương n bất kì, tồn tại một số thực $x_n \in [a, b]$ sao cho

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M \qquad (2)$$

Dãy số thực $\{x_n\}$ bị chặn ($\{x_n\} \subset [a, b]$) nên có một dãy con $\{x_{k_n}\}$ hội tụ : $\lim\limits_{n \to \infty} x_{k_n} = x_0 \in [a, b]$. Vì f liên tục tại x_0 nên từ đó suy ra

$$\lim_{n \to \infty} f(x_{k_n}) = f(x_0) \qquad (3)$$

Mặt khác, từ (2) suy ra $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = M$. Do đó

$$\lim_{n \to \infty} f(x_{k_n}) = M \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $f(x_0) = M$. Vậy f đạt giá trị lớn nhất trên [a, b]. Chứng minh tương tự, f đạt giá trị nhỏ nhất trên [a, b].

2.2. ***Định lí*** (Bônzanô - Côsi) Giả sử f là một hàm số liên tục trên đoạn [a, b] và α là một số nằm giữa f(a) và f(b). Khi đó tồn tại ít nhất một điểm $c \in [a, b]$ sao cho $f(c) = \alpha$.

Nói một cách khác, f lấy mọi giá trị trung gian giữa f(a) và f(b).

Chứng minh. Giả sử $f(a) \leqslant f(b)$ và $\alpha \in [f(a), f(b)]$. Nếu $f(a) = f(b)$ thì hiển nhiên định lí đúng. Giả sử $f(a) < \alpha < f(b)$. Đặt

$$E = \{x \in [a, b] : f(x) \leqslant \alpha\}.$$

Vì $a \in E$ nên $E \neq \varnothing$. Vì E bị chặn trên bởi b nên nó có cận trên đúng hữu hạn. Đặt $c = \sup E$. Ta chứng minh $f(c) = \alpha$. Thật vậy :

- Nếu $f(c) < \alpha$ thì $c \neq b$, do đó $c < b$. Vì f liên tục tại c nên $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = f(c) < \alpha$. Do đó tồn tại một số dương δ sao cho $c + \delta \leqslant b$ và $f(x) < \alpha$ với mọi $x \in [c, c + \delta]$. Đặc biệt $f(c + \delta) < \alpha$. Do đó $c + \delta \in E$. Điều này vô lí vì c là một cận trên của E.

- Nếu $f(c) > \alpha$ thì $c \neq a$; do đó $c > a$. Vì f liên tục tại c nên $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = f(c) > \alpha$. Do đó tồn tại một số dương δ sao cho $c - \delta \geqslant a$ và $f(x) > \alpha$ với mọi $x \in [c - \delta, c]$. Vì $c = \sup E$ nên tồn tại $x_1 \in E$ sao cho $c - \delta < x_1 \leqslant c$. Từ định nghĩa của E suy ra $f(x_1) \leqslant \alpha$. Ta đi đến mâu thuẫn. Vậy $f(c) = \alpha$.

2.3. *Hệ quả*. Giả sử f là một hàm số liên tục trên [a, b]. Nếu $f(a)f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Chứng minh. $\alpha = 0$ là một số nằm giữa f(a) và f(b). Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

2.4. *Định lí* (Canto). Nếu hàm số f liên tục trên [a, b] thì nó liên tục đều trên [a, b].

Chứng minh. Giả sử hàm số f không liên tục đều trên [a, b]. Khi đó tồn tại một số dương ε có tính chất sau :

Với một số $\delta > 0$ bất kì, tồn tại x'_δ, $x''_\delta \in [a, b]$ sao cho

$$|x'_\delta - x'_\delta| < \delta \text{ và } |f'(x_\delta) - f(x'_\delta)| \geqslant \varepsilon$$

Lấy $\delta = \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Khi đó, với mọi n nguyên dương, tồn tại hai điểm x_n, $x_n \in [a, b]$ sao cho

$$|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n} \text{ và } |f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \varepsilon \qquad (1)$$

Vì $\{x_n\} \subset [a, b]$ nên, theo định lí Bônzanô – Vâyơxtrat, nó có một dãy con $\{x'_{k_n}\}$ hội tụ : $\lim\limits_{n\to\infty} x'_{k_n} = x_0 \in [a, b]$. Vì $|x''_{k_n} - x'_{k_n}| < \dfrac{1}{k_n} \to 0$ khi $n \to \infty$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} x''_{k_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x'_{k_n} = x_0$. Do f liên tục tại x_0, từ đó suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_{k_n}) = f(x_0)$ và $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_{k_n}) = f(x_0)$. Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x'_{k_n}) - f(x''_{k_n})| = 0$. Điều này mâu thuẫn với (1).

§3. TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU

3.1. *Định lí.* Nếu f là một hàm số tăng trên đoạn [a, b] thì với mọi $x_0 \in (a, b)$, ta có

$$f(a) \leqslant f(a + 0) \leqslant f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0 + 0) \leqslant f(b - 0) \leqslant f(b).$$

Chứng minh. Hàm số f là tăng trên $[a, x_0]$ và bị chặn trên bởi $f(x_0)$ trên đoạn này nên

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \sup_{x\in[a, x_0)} f(x) \leqslant f(x_0), \text{ tức là } f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0).$$

Vì f tăng trên $[x_0, b]$ và bị chặn dưới bởi $f(x_0)$ trên đoạn này nên

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \inf_{x\in(x_0, b]} f(x) \geqslant f(x_0) \text{ tức là } f(x_0 + 0) \geqslant f(x_0)$$

Vì $f(x) \leqslant f(x_0 - 0)$ với mọi $x \in (a, x_0)$ nên

$$f(a + 0) = \lim_{x \to a^+} f(x) \leqslant f(x_0 - 0).$$

Bất đẳng thức $f(x_0 + 0) \leqslant f(b - 0)$ được chứng minh tương tự.

Bạn đọc hãy phát biểu định lí tương tự cho trường hợp f là một hàm số giảm trên [a, b].

3.2. *Định lí.* Giả sử f là một hàm số đơn điệu trên đoạn [a, b]. Khi đó f liên tục trên [a, b] nếu và chỉ nếu f([a, b]) là một đoạn.

Chứng minh. Giả sử f là một hàm số tăng trên [a, b]. (Nếu f là một hàm số giảm trên [a, b] thì −f là tăng trên đoạn này). Hiển nhiên, ta có $f([a, b]) \subset [f(a), f(b)]$. Nếu f liên tục trên đoạn [a, b] thì, theo định lí Bônzanô – Côsi, f lấy mọi giá trị trung gian giữa f(a) và f(b). Do đó

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)] \qquad (1).$$

Đảo lại nếu f tăng và thỏa mãn đẳng thức (1) thì f liên tục trên đoạn [a, b].

Thật vậy, giả sử f gián đoạn tại điểm $x_0 \in (a, b)$. Khi đó, ta có ít nhất một trong hai bất đẳng thức sau :

$$f(x_0) < f(x_0 + 0), \; f(x_0 - 0) < f(x_0).$$

Giả sử $f(x_0) < f(x_0 + 0)$. Khi đó

$$(f(x_0), f(x_0 + 0)) \cap f([a, b]) = \varnothing \qquad (2).$$

vì $f(x) \leqslant f(x_0)$ nếu $x \leqslant x_0$ và $f(x) \geqslant f(x_0 + 0)$ nếu $x > x_0$.

Mặt khác, vì $f(a) \leqslant f(x_0) < f(x_0 + 0) \leqslant f(b)$ nên

$$(f(x_0), f(x_0 + 0)) \subset [f(a), f(b)] = f([a, b]) \qquad (3).$$

Có mâu thuẫn giữa (2) và (3). Trường hợp $f(x_0 - 0) < f(x_0)$ được chứng minh tương tự. Vậy f liên tục tại mọi điểm của đoạn [a, b].

3.3. *Hàm số ngược của một hàm số liên tục đơn điệu nghiêm ngặt*

Định lí. Giả sử $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ là một hàm số liên tục và tăng (giảm) nghiêm ngặt trên $[a, b]$. Khi đó f là một song ánh từ $[a, b]$ lên $[f(a), f(b)]$ ($[f(b), f(a)]$). Hàm số ngược $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$ ($f^{-1} : [f(b), f(a)] \to [a, b]$) là liên tục và tăng (giảm) nghiêm ngặt từ $[f(a), f(b)]$ ($[f(b), f(a)]$) lên $[a, b]$.

Chứng minh. Ta chứng minh định lí cho trường hợp f là một hàm số tăng nghiêm ngặt (Nếu f là giảm nghiêm ngặt thì $-f$ là tăng nghiêm ngặt). Dễ dàng thấy rằng f là một đơn ánh. Vì f liên tục trên $[a, b]$ nên, theo định lí 3.2, $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$

Vậy f là một song ánh từ $[a, b]$ lên $[f(a), f(b)]$. Do đó f có hàm số ngược $g = f^{-1}$ từ $[f(a), f(b)]$ lên $[a, b]$. Hàm số g là tăng nghiêm ngặt trên $[f(a), f(b)]$. Thật vậy, giả sử $y_1, y_2 \in [f(a), f(b)]$ và $y_1 < y_2$. Đặt $x_1 = g(y_1)$, $x_2 = g(y_2)$. Khi đó $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Nếu $g(y_1) \geqslant g(y_2)$, tức là $x_1 \geqslant x_2$ thì $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, tức là $y_1 \geqslant y_2$, trái với giả thiết. Vậy $g(y_1) < g(y_2)$. Ta đã chứng minh g là tăng nghiêm ngặt trên $[f(a), f(b)]$. Vì $g([f(a), f(b)]) = [a, b]$ nên, theo định lí 3.2, g liên tục trên $[f(a), f(b)]$.

Định lí sau đây cho điều kiện để một hàm số liên tục là đơn ánh.

3.4. *Định lí**. Hàm số liên tục $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ là một đơn ánh khi và chỉ khi f là đơn điệu nghiêm ngặt.

Chứng minh. Hiển nhiên nếu f là đơn điệu nghiêm ngặt thì nó là một đơn ánh. Giả sử f là một đơn ánh liên tục. Ta chứng minh f là đơn điệu nghiêm ngặt. Nếu không như vậy thì tồn tại ba điểm $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$, $x_1 < x_2 < x_3$ sao cho

$$f(x_2) < f(x_1) \text{ và } f(x_2) < f(x_3) \qquad (1)$$

hoặc

$$f(x_2) > f(x_1) \text{ và } f(x_2) > f(x_3) \qquad (2)$$

Giả sử (1) được thỏa mãn. Nếu $f(x_1) < f(x_3)$ thì $f(x_2) < f(x_1) < f(x_3)$. Theo định lí Bônzanô – Côsi, tồn tại một số thực $c \in (x_2, x_3)$ sao cho $f(c) = f(x_1)$. Vì $x_1 < c$ nên f không phải là một đơn ánh. Điều này trái với giả thiết. Nếu $f(x_1) > f(x_3)$ ta cũng sẽ gặp mâu thuẫn. Trường hợp (2) được xét tương tự

§4. CÁC LOẠI ĐIỂM GIÁN ĐOẠN

4.1. *Định nghĩa.* Giả sử hàm số f xác định trên đoạn [a, b] và $x_0 \in (a, b)$ là một điểm gián đoạn của f. Ta gọi x_0 là một điểm gián đoạn loại một nếu

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \in \mathbf{R} \text{ và } f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \in \mathbf{R}.$$

a gọi là một điểm gián đoạn loại một nếu nó là một điểm gián đoạn của f và $f(a + 0) \in \mathbf{R}$.

b gọi là một điểm gián đoạn loại một nếu nó là một điểm gián đoạn của f và $f(b - 0) \in \mathbf{R}$.

Điểm gián đoạn của f gọi là một điểm gián đoạn loại hai nếu nó không phải là một điểm gián đoạn loại một của f.

Điểm gián đoạn loại một $x_0 \in (a, b)$ của hàm số $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ gọi là bỏ được nếu

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0).$$

Ví dụ 1. Hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ với } x < 1 \\ 2 \text{ với } x \geqslant 1 \end{cases}$$

gián đoạn tại điểm $x = 1$.

Vì $f(1 - 0) = 1$; $f(1 + 0) = 2$ nên 1 là điểm gián đoạn loại một của f.

Ví dụ 2. Hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ với } x \neq 0 \\ 0 \text{ với } x = 0 \end{cases}$$

gián đoạn tại điểm $x = 0$. Ta có $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. Vậy 0 là điểm gián đoạn loại hai của f.

Ví dụ 3. Hàm số

$$D(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \text{ hữu tỉ} \\ 0 \text{ nếu } x \text{ vô tỉ} \end{cases}$$

gián đoạn tại mọi điểm của **R**. Mọi điểm $x_0 \in$ **R** đều là một điểm gián đoạn loại hai của D vì không tồn tại $\lim_{x \to x_0^-} D(x)$ (cũng không tồn tại $\lim_{x \to x_0^+} D(x)$).

Ví dụ 4. Hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

gián đoạn tại điểm $x = 0$. Vì $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ nên $f(0 + 0) = f(0 - 0) = 1$. Vậy 0 là điểm gián đoạn bỏ được của f.

Từ định lí 3.1 suy ra

4.2. Hàm số $f : [a, b] \to$ **R** đơn điệu trên $[a, b]$ chỉ có các điểm gián đoạn loại một.

4.3. *Định lí.* Giả sử $f : [a, b] \to$ **R** là một hàm số tăng trên $[a, b]$ và $x_1, \ldots, x_m \in (a, b)$ là những điểm gián đoạn của f. Khi đó

$$\sum_{k=1}^{m} [f(x_k + 0) - f(x_k - 0)] \leq f(b) - f(a). \qquad (1)$$

Do đó với một số dương δ bất kì, tập hợp

$$D_\delta = \{x \in (a, b) : f(x + 0) - f(x - 0) \geq \delta\}$$

là một tập hợp hữu hạn.

Chứng minh. Giả sử $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$. Khi đó

$f(a) \leq f(x_1 - 0) < f(x_1 + 0) \leq f(x_2 - 0) < f(x_2 + 0) \leq \ldots$

$$\leqslant f(x_m - 0) < f(x_m + 0) \leqslant f(b).$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Giả sử D_δ là một tập hợp con vô hạn của $[a, b]$. Khi đó với mọi n nguyên dương, tồn tại các điểm $x_1, \ldots, x_n$ đôi một khác nhau thuộc D_δ. Vì $f(x_k + 0) - f(x_k - 0) \geqslant \delta$ với $k = 1, \ldots, n$, nên

$$\sum_{k=1}^{n} [f(x_k + 0) - f(x_k - 0)] \geqslant n\delta.$$

Từ (1) suy ra

$$f(b) - f(a) \geqslant n\delta \text{ với mọi } n.$$

Điều này là vô lí. Vậy D_δ là một tập hợp hữu hạn

4.4. *Định lí*. Tập hợp các điểm gián đoạn của hàm số đơn điệu $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ là hữu hạn hoặc đếm được.

Chứng minh. Chỉ cần chứng minh cho trường hợp f là một hàm số tăng. Gọi D là tập hợp các điểm gián đoạn thuộc (a, b) của f. Ta có

$$D = \{x \in (a, b) : f(x + 0) - f(x - 0) > 0\}.$$

Dễ dàng thấy rằng $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{\frac{1}{n}}$,

trong đó $D_{\frac{1}{n}} = \left\{ x \in (a, b) : f(x+0) - f(x-0) \geqslant \frac{1}{n} \right\}$ là những tập hợp hữu hạn (theo định lí 4.3). Vậy D là hữu hạn hoặc đếm được. Do đó tập hợp các điểm gián đoạn của f thuộc $[a, b]$ là hữu hạn hoặc đếm được.

§5. CÁC HÀM SỐ NGƯỢC CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

5.1. *Hàm số $y = \arcsin x$*

Hàm số $y = \sin x$ liên tục trên $\mathbf{R}$ nhưng không đơn điệu nghiêm ngặt. Thu hẹp nó trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ ta được hàm số $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ liên tục, tăng nghiêm ngặt mà tập hợp các giá trị là đoạn $[-1, 1]$. Do đó f có hàm số ngược $f^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ liên tục và tăng nghiêm ngặt từ đoạn $[-1, 1]$ lên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Ta kí hiệu nó là $y = \arcsin x$.

- Ta có

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

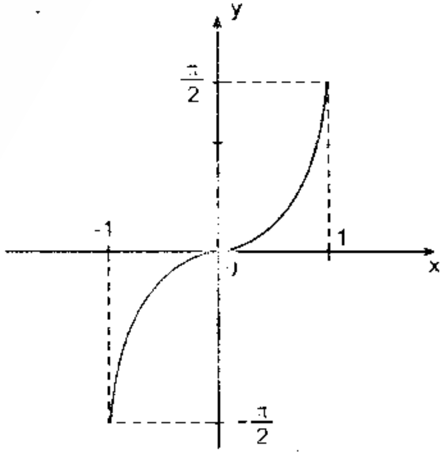
arcsinx là cung thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ có sin bằng x.

Hiển nhiên $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

- Bảng biến thiên của hàm số

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
y	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

- Đồ thị của hàm số $y = \arcsin x$ nhận được từ đồ thị của hàm số $y = \sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ bằng cách lấy đối xứng qua đường phân giác thứ nhất $y = x$ (hình 1)



Hình 1

5.2. *Hàm số $y = \arccos x$*

Thu hẹp hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[0, \pi]$, ta được hàm số $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$ liên tục và giảm nghiêm ngặt với tập hợp các giá trị là đoạn $[-1, 1]$. Do đó f có hàm số ngược $f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ liên tục và giảm nghiêm ngặt từ đoạn $[-1, 1]$ lên đoạn $[0, \pi]$. Ta kí hiệu hàm số đó là $y = \arccos x$.

- Ta có

$$y = \arccos x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$$

$\arccos x$ là cung thuộc đoạn $[0, \pi]$ mà cosin bằng x.

Hiển nhiên

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

- Bảng biến thiên

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
y	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

- Đồ thị của hàm số $y = \arccos x$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y = \cos x$ $(0 \leq x \leq \pi)$ qua đường phân giác thứ nhất (hình 2).

Chú ý. Dễ dàng thấy rằng

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \text{ với mọi } x \in [-1, 1].$$

5.3. *Hàm số y = arctgx*

Hàm số $f(x) = \operatorname{tg} x$ là liên tục và tăng nghiêm ngặt trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ với tập hợp các giá trị là **R**. Do đó nó có hàm số ngược $f^{-1} : \mathbf{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ liên tục và tăng nghiêm ngặt từ **R** lên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Ta kí hiệu hàm số đó là $y = \operatorname{arctg} x$.

Ta có

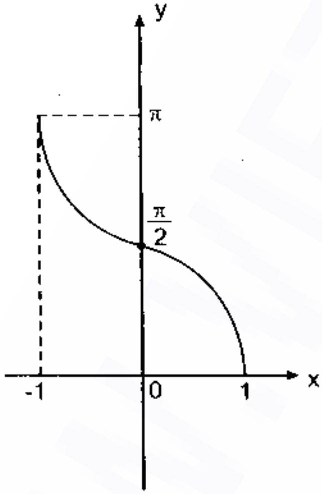
- $y = \text{arctg}x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \text{tg}y \\ -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

arctgx là cung thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ có tang bằng x.

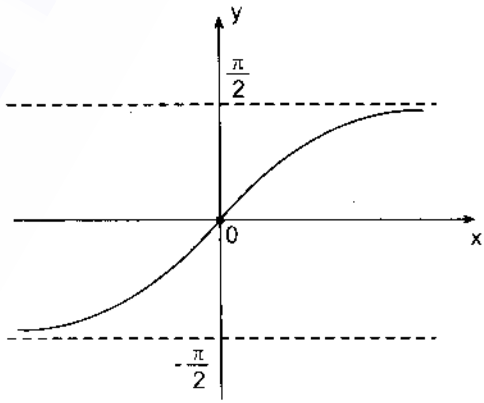
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
y	$-\dfrac{\pi}{2}$	$-\dfrac{\pi}{3}$	$-\dfrac{\pi}{4}$	$-\dfrac{\pi}{6}$	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$

- Đồ thị của hàm số y = arctgx đối xứng với đồ thị của hàm số y = tgx $\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ qua đường phân giác thứ nhất (hình 3).



Hình 2



Hình 3

Chương III

ĐẠO HÀM

§1. ĐỊNH NGHĨA. Ý NGHĨA HÌNH HỌC

1.1. *Định nghĩa.* Giả sử f là một hàm số xác định trên khoảng (a, b), $x_0 \in (a, b)$. Nếu tồn tại

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbf{R}$$

thì giới hạn đó gọi là đạo hàm của hàm số f tại điểm x_0, và được kí hiệu là $f'(x_0)$.

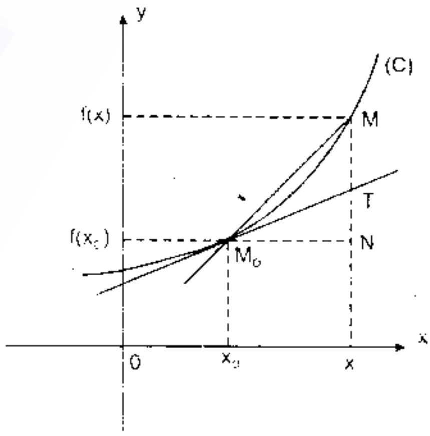
Hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0 được gọi là khả vi tại điểm x_0.

Đặt $h = x - x_0$. Khi đó $x = x_0 + h$ và

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

1.2. *Ý nghĩa hình học*

Giả sử $M_0(x_0, f(x_0))$ và $M(x, f(x))$ là hai điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số f. Nếu $x \neq x_0$ thì tỉ số $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ là hệ số góc của đường thẳng M_0M. Hàm số f có đạo hàm



Hình 4

$f(x_0)$ tại điểm x_0 khi và chỉ khi (C) có tiếp tuyến tại điểm M_0 với hệ số góc $f'(x_0)$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số f tại điểm M_0 là :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

1.3. *Đạo hàm trên một khoảng.* Giả sử hàm số f xác định trên khoảng (a, b). Ta nói rằng f có đạo hàm trên (a, b) nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (a, b)$. Khi đó hàm số

$$f' : (a, b) \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto f'(x)$$

gọi là đạo hàm của hàm số f trên khoảng (a, b).

Nếu f' liên tục trên (a, b) thì ta cũng nói rằng f khả vi liên tục trên (a, b) hoặc f thuộc lớp C^1 trên (a, b).

1.4. *Định lí.* Nếu hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0 thì

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \text{ khi } h \to 0$$

(tức là $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + ho(1)$ khi $h \to 0$).

Công thức đúng cả trong trường hợp $h = 0$.

Chứng minh. Đặt

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = \alpha(h).$$

Ta có $\lim\limits_{h \to 0} \alpha(h) = 0$. Do đó

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h\alpha(h)$$

tức là

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + ho(1) \text{ khi } h \to 0.$$

1.5. *Hệ quả.* Nếu hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0 thì nó liên tục tại x_0.

Chứng minh. Từ 1.4 suy ra $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$. Vậy f liên tục tại điểm x_0.

Điều ngược lại không đúng. Chẳng hạn hàm số $f(x) = |x|$ liên tục tại điểm $x = 0$ nhưng không có đạo hàm tại điểm này

§2. MỞ RỘNG KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

2.1. Giả sử hàm số f xác định trên khoảng (a, b), $x_0 \in (a, b)$. Nếu

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$$

thì ta nói rằng đạo hàm của f tại x_0 bằng $+\infty$ và viết $f'(x_0) = +\infty$.

$f'(x_0) = -\infty$ được định nghĩa tương tự.

Ví dụ. Cho hàm số $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $x \in \mathbf{R}$. Với $x = 0$, ta có :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

Vậy $f'(0) = +\infty$.

2.2. *Đạo hàm một phía*

Định nghĩa. a) Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $[x_0, b)$. Nếu tồn tại

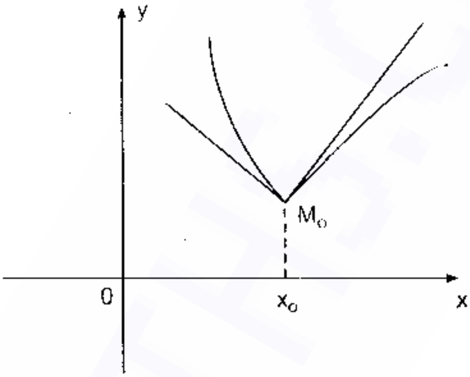
$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbf{R}$$

thì giới hạn đó được gọi là *đạo hàm phải* của f tại điểm x_0. Đạo hàm phải của f tại điểm x_0 được kí hiệu là $f'(x_0 + 0)$.

Đạo hàm trái của hàm số tại một điểm được định nghĩa tương tự. Đạo hàm trái của hàm số f tại điểm x_0 được kí hiệu là $f'(x_0 - 0)$.

Hiển nhiên hàm số $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ có đạo hàm tại điểm $x_0 \in (a, b)$ khi và chỉ khi nó có đạo hàm phải và đạo hàm trái tại điểm x_0 và $f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0)$.

Nếu hàm số f có đạo hàm phải và đạo hàm trái tại điểm x_0 nhưng $f'(x_0+0) \neq f'(x_0-0)$ thì $M_0(x_0, f(x_0))$ gọi là một *điểm góc* của đồ thị của hàm số f. (hình 5)



Hình 5

§3. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

3.1. *Định lí.* Giả sử các hàm số u và v có đạo hàm (hữu hạn) tại điểm x_0. Khi đó các hàm số u + v, uv, cu ($c \in \mathbf{R}$ là một hằng số) có đạo hàm tại điểm x_0 và

a) $(u + v)'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$,

b) $(uv)'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$,

c) $(cu)'(x_0) = cu'(x_0)$.

d) Nếu ngoài ra $v(x_0) \neq 0$ thì hàm số $\frac{u}{v}$ có đạo hàm tại điểm x_0 và

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{v(x_0)u'(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}$$

Để cho gọn, ta viết các công thức trên dưới dạng

a) $(u + v)' = u' + v'$; b) $(uv)' = u'v + uv'$;

c) $(cu)' = cu'$; d) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Các công thức này đã được chứng minh trong Giải tích 12.

3.2. *Đạo hàm của hàm số hợp*

Định lí. Nếu hàm số $f : (a, b) \to (c, d)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 \in (a, b)$ và hàm số $g : (c, d) \to \mathbf{R}$ có đạo hàm tại điểm $u_0 = f(x_0)$ thì hàm số hợp $h = gof : (a, b) \to \mathbf{R}$ có đạo hàm tại điểm x_0 và

$$h'(x_0) = g'(u_0) f'(x_0) = g'[f(x_0)] f'(x_0).$$

Chứng minh. Vì hàm số g có đạo hàm tại điểm $u_0 = f(x_0) \in$ $\in (c, d)$ nên, theo định lí 1.4, với mọi $u \in (c, d)$,

$$g(u) - g(u_0) = (u - u_0) g'(u_0) + (u - u_0) \alpha(u),$$

trong đó $\lim\limits_{u \to u_0} \alpha(u) = 0.$

Do đó với mọi $x \in (a, b)$,

$h(x) - h(x_0) = g[f(x)] - g[f(x_0)]$

$$= [f(x) - f(x_0)] g'(u_0) + [f(x) - f(x_0)] \alpha(f(x)). \quad (1)$$

Vì f có đạo hàm tại x_0 nên liên tục tại x_0. Do đó $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Vậy $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(f(x)) = 0$. Từ (1) suy ra

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g'(u_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \alpha(f(x))$$

với mọi $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$. Do đó

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) g'(u_0) + f'(x_0) . 0 = g'(u_0) f'(x_0)$$

Vậy h có đạo hàm tại điểm x_0 và

$$h'(x_0) = g'[f(x_0)] f'(x_0).$$

Hệ quả. Nếu hàm số $f : (a, b) \to (c, d)$ có đạo hàm trên khoảng (a, b) và hàm số $g : (c, d) \to \mathbf{R}$ có đạo hàm trên khoảng (c, d) thì hàm số hợp $h = gof$ có đạo hàm trên khoảng (a, b) và

$$h' = (g.f)' = (g'f)f'.$$

3.3. ***Đạo hàm của hàm số ngược***

Định lí. $f : (a, b) \to (c, d)$ là một hàm số liên tục đơn điệu nghiêm ngặt trên khoảng (a, b) và $g = f^{-1}$ là hàm số ngược của f xác định trên khoảng $(c, d) = f[(a, b)]$

Nếu f có đạo hàm tại điểm $x_0 \in (a, b)$ và $f'(x_0) \neq 0$ thì g có đạo hàm tại điểm $y_0 = f(x_0)$ và

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Chứng minh. Với mọi $y \in (c, d)$, $y \neq y_0$, ta có $x = g(y) \neq g(y_0)$ tức là $x \neq x_0$. Khi đó

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Khi $y \to y_0$ thì vì g liên tục trên (c, d) nên $g(y) \to g(y_0)$, tức là $x \to x_0$. Do đó $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0)$. Từ đó có đẳng thức cần chứng minh.

3.4. ***Chú ý.*** Giả sử $f'(x_0) = 0$. Nếu chẳng hạn f là một hàm số tăng nghiêm ngặt thì $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ với mọi $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$. Do đó $\lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = +\infty$. Vậy $g'(y_0) = +\infty$. Tương tự nếu $f'(x_0) = 0$ và f là một hàm số giảm nghiêm ngặt thì $g'(y_0) = -\infty$. Vì vậy, ta có thể coi công thức $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ vẫn đúng trong trường hợp này.

§4. ĐẠO HÀM CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC NGƯỢC

4.1. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Thật vậy, hàm số y = arcsinx là hàm số ngược của hàm số $y \mapsto x = \sin y$ liên tục và tăng nghiêm ngặt trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Theo định lí 3.3, với mọi $x_0 \in (-1, 1)$, ta có

$$y'(x_0) = \frac{1}{x'(y_0)} = \frac{1}{\cos y_0}$$

Vì $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ nên $\cos y_0 = \sqrt{1-\sin^2 y_0} = \sqrt{1-x_0^2}$.

Vậy $y'(x_0) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}$.

4.2. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Thật vậy, vì $\arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$, nên từ 4.1 suy ra

$$(\arccos x)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

4.3. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Thật vậy, y = arc tgx là hàm số ngược của hàm số $y \mapsto x = \operatorname{tg} y$ liên tục và tăng nghiêm ngặt trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Do đó, với mọi $x_0 \in \mathbf{R}$,

$$y'(x_0) = \frac{1}{x'(y_0)} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y_0}} = \cos^2 y_0 = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y_0} = \frac{1}{1+x_0^2}$$

§5. CÁC ĐỊNH LÍ VỀ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

Ta sẽ ứng dụng đạo hàm, nghiên cứu một số tính chất khác của các hàm số. Các định lí trong mục này chỉ rõ nếu một hàm số thỏa mãn một số điều kiện nào đó trên một khoảng thì tồn tại ít nhất một điểm của khoảng này tại đó hàm số có một tính chất nào đó. Chúng được gọi là các định lí về giá trị trung bình.

5.1. *Định nghĩa :* Giả sử $f : X \to \mathbf{R}$ là một hàm số xác định trên một tập hợp số thực $X \subset \mathbf{R}$. Ta nói rằng f đạt cực đại (cực tiểu) tại điểm $x_0 \in X$ nếu tồn tại một khoảng (a, b) sao cho $x_0 \in (a, b) \subset X$ và

$$f(x) \leqslant f(x_0) \ (f(x) \geqslant f(x_0)) \text{ với mọi } x \in (a, b).$$

Điểm cực đại và điểm cực tiểu x_0 của hàm số f được gọi chung là điểm cực trị của f.

5.2. *Định lí* (Phécma (Fermat)). Nếu hàm số f có cực trị tại điểm x_0 và có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Chứng minh. Giả sử f xác định trên tập hợp số thực X và đạt cực đại tại điểm $x_0 \in X$. Khi đó, tồn tại $a, b \in \mathbf{R}$ sao cho $x_0 \in (a, b) \subset X$ và

$$f(x) \leqslant f(x_0) \text{ với mọi } x \in (a, b).$$

- Với $a < x < x_0$, ta có $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$. Do đó

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0 \qquad (1)$$

- Với $x_0 < x < b$, ta có $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$. Do đó

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $f'(x_0) = 0$.

5.3. *Định lí* (Rôn (Rolle)) Giả sử hàm số $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và có đạo hàm trên khoảng (a, b). Nếu $f(a) = f(b)$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Chứng minh . Vì f liên tục trên đoạn $[a, b]$ nên, theo định lí Vâyơxtrat, f đạt giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m trên đoạn này.

• Nếu $M = m$ thì $f(x) = m = M$ với mọi $x \in [a, b]$. Do đó $f'(x) = 0$ với mọi $x \in (a, b)$. Có thể lấy c là một điểm bất kì của khoảng (a, b).

• Nếu $m < M$ thì $f(a) \neq m$ hoặc $f(a) \neq M$. Giả sử chẳng hạn $f(a) = f(b) \neq m$. Theo định lí Vâyơxtrat, tồn tại ít nhất một điểm $c \in [a, b]$ sao cho $f(c) = m$. Vì $c \neq a$ và $c \neq b$ nên $c \in (a, b)$. Theo định lí Phécma, ta có $f'(c) = 0$.

5.4. *Định lí* (Lagrăng (Lagrange)). Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a, b]$ và có đạo hàm trên khoảng (a, b) thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \qquad (1)$$

Chứng minh. Ta áp dụng định lí Rôn. Xét hàm số

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),\ x \in [a, b].$$

Dễ dàng thấy rằng φ thỏa mãn các giả thiết của định lí Rôn :

• φ liên tục trên đoạn $[a, b]$,

• φ có đạo hàm trên khoảng (a, b),

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

• $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Do đó tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $\varphi'(c) = 0$.

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.

5.5. *Dạng khác của công thức (1) trong định lí Lagrăng*

Đặt $a = x_0$, $b = x_0 + h$. Khi đó, ta có $c = x_0 + \theta h$, trong đó $0 < \theta < 1$ và công thức (1) được viết dưới dạng

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \theta h)$$

Số thực h có thể dương hoặc âm vì (1) vẫn đúng nếu $b < a$.

Định lí Lagrăng còn được gọi là định lí về số gia hữu hạn.

5.6. *Hệ quả.* Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn [a, b] và có đạo hàm trên khoảng (a, b). Khi đó :

a) Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in (a, b)$ thì f là một hàm hằng trên [a, b] ;

b) Nếu $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) với mọi $x \in (a, b)$ thì f tăng (giảm) nghiêm ngặt trên [a, b].

Chứng minh. a) Giả sử $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$. Theo định lí Lagrăng tồn tại ít nhất một điểm $c \in (x_1, x_2)$ sao cho

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Vì $f'(c) = 0$ nên từ đó suy ra $f(x_2) = f(x_1)$.

b) được chứng minh tương tự.

5.7. *Định lí* (Côsi). Giả sử f và g là hai hàm số liên tục trên đoạn [a, b], có các đạo hàm trên khoảng (a, b). Nếu $g'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a, b)$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Định lí Lagrăng là một trường hợp đặc biệt của định lí Côsi. Trong định lí Côsi, nếu lấy $g(x) = x$, thì ta được định lí Lagrăng.

Chứng minh. Trước hết ta để ý rằng hàm số g thỏa mãn các giả thiết của định lí Lagrăng. Do đó tồn tại một điểm $\xi \in (a, b)$ sao cho $g(b) - g(a) = g'(\xi)(b - a)$. Vì $g'(\xi) \neq 0$ nên từ đó suy ra $g(b) - g(a) \neq 0$.

Xét hàm số

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g(x) - g(a)],\ x \in [a, b]$$

φ thỏa mãn các điều kiện của định lí Rôn :

- φ liên tục trên đoạn $[a, b]$;
- φ có đạo hàm trên khoảng (a, b) :

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x),$$

- $\varphi(a) = \varphi(b) = 0.$

Do đó tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao $\varphi'(c) = 0$. Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.

§6. ĐẠO HÀM CẤP CAO

6.1. *Định nghĩa.* Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng (a, b). Khi đó

$$f' : (a, b) \mapsto \mathbf{R}$$
$$x \mapsto f'(x)$$

là một hàm số xác định trên khoảng (a, b). Nếu hàm số f' có đạo hàm $(f')'(x_0)$ tại điểm $x_0 \in (a, b)$ thì số thực $(f')'(x_0)$ được gọi là đạo hàm cấp hai của hàm số f tại điểm x_0 và được kí hiệu là $f''(x_0)$:

$$f''(x_0) = (f')'(x_0).$$

Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau :

Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp $n - 1$ trên khoảng (a, b). Khi đó

$$f^{(n-1)} : (a, b) \mapsto \mathbf{R}$$
$$x \mapsto f^{(n-1)}(x)$$

là một hàm số xác định trên khoảng (a, b). Nếu hàm số $f^{(n-1)}$ có đạo hàm tại điểm $x_0 \in (a, b)$ thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm cấp n của hàm số f tại x_0 và được kí hiệu là $f^{(n)}(x_0)$.

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0).$$

Đạo hàm của hàm số f được gọi là đạo hàm cấp một của f.

Ta quy ước đạo hàm cấp không của hàm số f là chính f.

Ví dụ : Cho f(x) = sinx. Ta có

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right).$$

Bằng quy nạp, ta được

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),\ x \in \mathbf{R}.$$

Tương tự, ta được

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),\ x \in \mathbf{R}$$

6.2. *Hàm số thuộc lớp C^n*

Giả sử n là một số nguyên dương. Hàm số f xác định trên khoảng (a, b) gọi là thuộc lớp C^n nếu f có đạo hàm cấp n trên (a, b) và $f^{(n)}$ liên tục trên khoảng này.

f gọi là thuộc lớp C^o trên khoảng (a, b) nếu f liên tục trên (a, b).

f gọi là thuộc lớp C^∞ trên (a, b) nếu nó có các đạo hàm mọi cấp trên khoảng này.

6.3. *Định lí.* Giả sử u và v là hai hàm số có các đạo hàm cấp n tại điểm x_o. Khi đó hàm số uv có đạo hàm cấp n tại điểm x_o và

$$(uv)^{(n)}(x_o) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^k u^{(k)}(x_o)\, v^{(n-k)}(x_o)\ . \qquad (1)$$

(1) gọi là công thức Laibnit (Leibniz).

Chứng minh. Ta chứng minh công thức bằng quy nạp. Hiển nhiên điều khẳng định đúng với n = 1, (uv)' = uv' + u'v. Giả sử (1) đúng với n. Ta chứng minh nó đúng với n + 1. Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta được

$$(uv)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(u^{(k)} v^{(n-k+1)} + u^{(k+1)} v^{(n-k)}\right)$$

$$= uv^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k u^{(k+1)} v^{(n-k)} + u^{(n+1)} v. \qquad (2)$$

Ta có $$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k u^{(k+1)} v^{(n-k)} = \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} u^{(k)} v^{(n+1-k)} \qquad (3)$$

Thay (3) vào (2), ta được

$$(uv)^{(n+1)} = uv^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1})\, u^{(k)} v^{(n+1-k)} + u^{(n+1)} v$$

$$= C_{n+1}^0 u^{(0)} v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k u^{(k)} v^{(n+1-k)} + C_{n+1}^{n+1} u^{(n+1)} v^{(0)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(k)} v^{(n+1-k)}.$$

§7. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM VÀO VIỆC TÌM GIỚI HẠN. QUY TẮC LÔPITAN (L'HÔPITAL)

Dạng vô định $\frac{0}{0}$

Giả sử f và g là hai hàm số xác định trên khoảng (x_0, b) (trên (a, x_0)), $\lim\limits_{\substack{x \to x_0^+ \\ (x \to x_0^-)}} f(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0^+ \\ (x \to x_0^-)}} g(x) = 0$ và ta phải tìm $\lim\limits_{\substack{x \to x_0^+ \\ (x \to x_0^-)}} \frac{f(x)}{g(x)}$. Khi đó ta nói rằng ta có dạng vô định $\frac{0}{0}$. Nếu các hàm số f và g đều có đạo hàm trên khoảng (x_0, b) (trên (a, x_0)) thì trong nhiều trường hợp, ta có thể tìm được giới hạn trên qua giới hạn của $\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Một cách chính xác, ta có

7.1. *Định lí* (Qui tắc Lôpitan). Giả sử f và g là hai hàm số xác định và có các đạo hàm hữu hạn trên khoảng (x_0, b) (trên (a, x_0)). Nếu

a) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0^+ \\ (x \to x_0^-)}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0^+ \\ (x \to x_0^-)}} g(x) = 0,$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0^+ \\ (x \to x_0^-)}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$ ($l \in \mathbf{R}$ hoặc $l = \pm\infty$).

thì
$$\lim_{\substack{x \to x_0^+ \\ (x \to x_0^-)}} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Chứng minh. Ta chứng minh định lí cho trường hợp $x \to x_0^+$. Trường hợp $x \to x_0^-$ được lặp lại tương tự. Đặt $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Với mọi $x \in (x_0, b)$, các hàm số f và g liên tục trên $[x_0, x]$ và có các đạo hàm hữu hạn trên khoảng (x_0, x). Ngoài ra $g'(t) \neq 0$ với mọi $t \in (x_0, x)$ (với x đủ gần x_0). Theo định lí Côsi, tồn tại ít nhất một điểm $c \in (x_0, x)$ sao cho

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Khi $x \to x_0$ và $x > x_0$ thì $c \to x_0$. Theo giả thiết, ta có $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} \to l$. Do đó $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

Từ định lí trên suy ra

7.2. *Định lí.* Giả sử f và g là hai hàm số xác định và có các đạo hàm hữu hạn trên khoảng $(a, b) \setminus \{x_0\}$, $x_0 \in (a, b)$. Nếu

a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0,$

b) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$ ($l \in \mathbf{R}$ hoặc $l = \pm\infty$),

thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l.$

Ví dụ 1. Tìm $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx - x}{x - \sin x}$

Ta có

$$\frac{(tgx - x)'}{(x - \sin x)'} = \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{(1 - \cos x)\cos^2 x} = \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} \to 2$$

khi $x \to 0$.

Vậy $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{tgx - x}{x - \sin x} = 2.$

Trong ví dụ sau ta áp dụng quy tắc Lôpitan nhiều lần.

Ví dụ 2

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Định lí 7.1 vẫn đúng trong trường hợp $x_0 = \pm\infty$.

7.3. *Định lí.* Giả sử các hàm số f, g xác định và có các đạo hàm hữu hạn trên khoảng $(a, +\infty)$ (trên $(-\infty, b)$). Nếu

a) $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} g(x) = 0,$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$ ($l \in \mathbf{R}$ hoặc $l = \pm\infty$)

thì $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l.$

Chứng minh. Giả sử hai hàm số f, g xác định trên $(a, +\infty)$.

Đặt $t = \dfrac{1}{x}$. Khi đó $x \to +\infty$ khi và chỉ khi $t \to 0^+$.

Đặt $F(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$, $G(t) = g\left(\dfrac{1}{t}\right)$, ta có

$$\lim_{t \to 0^+} F(t) = 0 \text{ và } \lim_{t \to 0^+} G(t) = 0,$$

$F'(t) = f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)$, $G'(t) = g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)$. Do đó

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Theo định lí 8.1, từ đó suy ra $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{G(t)} = l$. Do đó

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

Định lí sau đây cho phép ta ứng dụng đạo hàm để tìm giới hạn thương của hai hàm số có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$.

7.4. *Định lí.* Giả sử các hàm số f, g xác định và có các đạo hàm hữu hạn trên khoảng (a, x_0) ((x_0, b), $(a, b)\setminus\{x_0\}$ trong đó $x_0 \in (a, b)$).

Nếu

a) $$\lim_{\substack{x\to x_0^- \\ (x\to x_0^+,\ x\to x_0)}} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{\substack{x\to x_0^- \\ (x\to x_0^+,\ x\to x_0)}} g(x) = \pm\infty,$$

b) $$\lim_{\substack{x\to x_0^- \\ (x\to x_0^+,\ x\to x_0)}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \quad (l\in \mathbf{R} \text{ hoặc } l = \pm\infty)$$

thì $$\lim_{\substack{x\to x_0^- \\ (x\to x_0^+,\ x\to x_0)}} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

*Chứng minh.** Ta chứng minh cho trường hợp $x\to x_0^+$ (Trường hợp $x\to x_0^-$ được chứng minh tương tự. Trường hợp $x\to x_0$ suy ra từ hai trường hợp đầu). Ta sẽ lần lượt xét hai trường hợp : $l\in\mathbf{R}$ và $l = \pm\infty$.

1° Giả sử $l \in \mathbf{R}$. Từ b) suy ra với một số dương bất kì ε, tồn tại một số dương η sao cho $x_0 + \eta < b$ và

$$x_0 < x \leqslant x_0 + \eta \Rightarrow \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Đặt $x_1 = x_0 + \eta$. Khi đó theo định lí Côsi, tồn tại $c \in (x_0, x_1)$ sao cho

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Vì
$$\left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

nên
$$\left|\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

tức là
$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - \dfrac{f(x_1)}{f(x)}}{1 - \dfrac{g(x_1)}{g(x)}} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1)$$

Từ đó suy ra

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| \leqslant \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\,\frac{1 - \dfrac{f(x_1)}{f(x)}}{1 - \dfrac{g(x_1)}{g(x)}}\right| + \left|\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} - l\right|$$

$$< |\varphi(x)| + \frac{\varepsilon}{2} \text{ với } x_0 < x < x_1, \quad (2)$$

trong đó

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\left(1 - \frac{1 - \dfrac{f(x_1)}{f(x)}}{1 - \dfrac{g(x_1)}{g(x)}}\right) = \frac{f(x)}{g(x)}\,\frac{\dfrac{f(x_1)}{f(x)} - \dfrac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \dfrac{g(x_1)}{g(x)}}. \qquad (3)$$

Vì $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{1 - \dfrac{f(x_1)}{g(x)}}{1 - \dfrac{g(x_1)}{g(x)}} = 1$ nên từ (1) suy ra $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ bị chặn với $x \neq x_0$ đủ gần x_0. Do đó từ (3) suy ra $\lim\limits_{x \to x_0^+} \varphi(x) = 0$. Vì vậy, tồn tại một số dương $\delta < \eta$ sao cho

$$x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Cuối cùng ta có

$$(\forall x)\ x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vậy $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l.$

2^0 Giả sử $l = +\infty$.

Vì $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$ nên $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} > 0$ với $x - x_0$ dương đủ nhỏ.

Khi đó $f'(x) \neq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{g'(x)}{f'(x)} = 0$. Theo trường hợp 1^0, từ đó suy ra $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$. Dễ dàng thấy rằng $\dfrac{g(x)}{f(x)} > 0$ với $x - x_0$ dương đủ nhỏ. Do đó $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

Chú ý. Định lí 7.4 vẫn đúng trong trường hợp $x_0 = \pm\infty$.

Ví dụ. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{tgx}{tg3x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{3}{\cos^2 3x}} = \dfrac{1}{3} \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\cos 3x}{\cos x} \right)^2 = 3$

vì $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{-3\sin 3x}{-\sin x} = 3.$

Chú ý. Từ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$ không suy ra $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$.

Ví dụ. Với $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x$, $x \neq 0$, ta có

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

nhưng

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x\sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{1}$$

không có giới hạn khi $x \to 0$.

§8. CÔNG THỨC TAYLO (TAYLOR)

Để tính giá trị của một hàm đa thức tại một điểm chỉ cần thực hiện các phép toán cộng, trừ và nhân. Tuy nhiên việc tính các giá trị của các hàm số khác như các hàm số lượng giác, hàm số mũ, hàm lôgarit,... không dễ dàng như vậy. Trong mục này ta sẽ chỉ ra rằng nhiều hàm số có thể được xấp xỉ bởi những đa thức với sai số nhỏ tùy ý. Có nhiều phương pháp xấp xỉ một hàm số bởi một đa thức. Một trong các phương pháp được sử dụng rộng rãi nhất là áp dụng công thức Taylo. Định lí sau đây là mở rộng của định lí về giá trị trung bình (Lagrăng).

8.1. Công thức Taylo – Iang (Taylor-Young)

Định lí. Nếu hàm số $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ có các đạo hàm đến cấp n tại điểm $x_0 \in (a, b)$ thì

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + h^n o(1) \quad (1)$$

(1) gọi là công thức Taylo–Iang, $h^n o(1) = o(h^n)$ gọi là phần dư dạng Iang.

Chứng minh. Gọi $\alpha(h)$ là hàm số các định bởi

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{h^n}{n!}[f^{(n)}(x_0) + \alpha(h)].$$

Ta chứng minh $\lim\limits_{h \to 0} \alpha(h) = 0$. Thật vậy, đặt

$$\varphi(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}h - \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1}}{\frac{h^n}{n!}}$$

ta được $\alpha(h) = \varphi(h) - f^{(n)}(x_0)$. Vậy chỉ cần chứng minh

$$\lim_{h \to 0} \varphi(h) = f^{(n)}(x_0).$$

Thật vậy, ta gặp dạng vô định $\frac{0}{0}$. Áp dụng quy tắc Lôpitan n−1 lần, ta được

$$\lim_{h \to 0} \varphi(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h} = f^{(n)}(x_0) ,$$

vì theo giả thiết, hàm số f có đạo hàm cấp n tại điểm x_0.

Công thức Taylo–Iang cho thấy nếu thay $f(x_0 + h)$ bởi đa thức

$$P_n(h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n$$

thì sai số của phép tính gần đúng là $R_n(h) = h^n o(1)$ $(h \to 0)$. Đó là một vô cùng bé không đáng kể so với vô cùng bé bậc n khi $h \to 0$.

Công thức sau đây cho phép tính phần dư một cách chính xác.

8.2. Định lí (Taylo). Giả sử hàm số f có các đạo hàm đến cấp n liên tục trên đoạn $I = [\alpha, \beta]$ và có đạo hàm cấp n+1 trên khoảng (α, β). Nếu $a, b \in I$ thì tồn tại một số thực c giữa a và b ($c \in (a, b)$ nếu $a < b$, $c \in (b, a)$ nếu $a > b$) sao cho

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \qquad (1)$$

Chứng minh. Gọi K là số thực xác định bởi đẳng thức

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}K = f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n. (2)$$

Ta chứng minh rằng tồn tại một số thực c giữa a và b sao cho $f^{(n+1)}(c) = K$.

Thật vậy, xét hàm số

$$\varphi(h) = f(b) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 - \dots -$$

$$- \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n - \frac{K}{(n+1)!}(b-x)^{n+1} \quad (3)$$

Hàm số φ thỏa mãn các giả thiết của định lí Rôn trên đoạn [a, b] (giả sử $a < b$) : φ liên tục trên [a, b], có đạo hàm trên (a, b) và $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Do đó tồn tại một $c \in (a, b)$ sao cho $\varphi'(c) = 0$. Ta có

$$\varphi'(x) = -f'(x) + f'(x) - \frac{f''(x)}{1!}(b-x) + \frac{f''(x)}{1!}(b-x) - \frac{f'''(x)}{2!}(b-x)^2 - \dots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + \frac{K}{n!}(b-x)^n$$

$$= \frac{K - f^{(n+1)}(x)}{n!}(b - x)^n.$$

Vì $\varphi'(c) = 0$ nên $K = f^{(n+1)}(c)$.

8.3. Công thức (1) được gọi là công thức Taylo, biểu thức

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

được gọi là phần dư dạng Lagrăng. Có những dạng khác của phần dư. Trong mục này ta sẽ chỉ đề cập một dạng khác nữa của phần dư, đó là dạng Côsi.

Nếu hàm số f thỏa mãn các giả thiết của định lí 8.2 thì tồn tại một số thực giữa a và b sao cho

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + R_n, \qquad (1)$$

trong đó

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-a)(b-\xi)^n. \qquad (2)$$

Biểu thức R_n trong (2) được gọi là phần dư dạng Côsi.

Công thức (1) được chứng minh tương tự như công thức (1) trong định lí 8.2, chỉ có điều khác là : vế trái của (2) trong 8.2 được thay bởi $\frac{b-a}{n!}K$ và ở vế phải của (3) trong 8.2, số hạng cuối cùng được thay bởi $\frac{b-x}{n!}K$

8.4. Dạng khác của công thức Taylo

Trong các công thức Taylo với phần dư dạng Lagrăng và phần dư dạng Côsi, đặt $x_0 = a$, $h = b - a$, ta được $b = x_0 + h$, $c = x_0 + \theta h$, trong đó $0 < \theta < 1$ và $\xi = x_0 + \theta' h$ với $0 < \theta' < 1$. Công thức Taylo được viết dưới dạng

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n,$$

trong đó :

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!}h^{n+1} \text{ (phần dư dạng Lagrăng),}$$

hoặc $$R_n = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta' h)}{n!}(1-\theta')^n h^{n+1} \text{ (phần dư dạng Côsi).}$$

Phần dư dạng Lagrăng và phần dư dạng Côsi đương nhiên là bằng nhau tuy chúng có dạng khác nhau. Tùy theo từng trường hợp ta sẽ sử dụng công thức Taylo với phần dư dạng này hoặc dạng kia.

Với $n = 1$, phần dư dạng Lagrăng có dạng $f'(x_0 + \theta h)h$ và công thức Taylo trở thành công thức số gia hữu hạn.

8.5. *Công thức Mac-Lôranh* (Mac-Laurin). Giả sử hàm số f thỏa mãn các giả thiết của định lí 8.2 trên đoạn $[0, x]$ (với $x > 0$) hoặc trên đoạn $[x, 0]$ (với $x < 0$). Trong công thức Taylo với phần dư Lagrăng, thay x_0 bởi 0 và h bởi x, ta được

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

$0 < \theta < 1$. Công thức trên gọi là công thức Mac-Lôranh.

8.6. *Áp dụng công thức Mac-Lôranh để viết công thức khai triển của hàm số*

1) $f(x) = \sin x$.

Ta có $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$. Do đó $f^{(2k)}(0) = \sin k\pi = 0$, $f^{(2k+1)}(0) = \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k$. Áp dụng công thức Mac-Lôranh với $n = 2k$, ta được

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k}(x),\ x \in \mathbf{R}$$

với $R_{2k}(x) = \dfrac{f^{(2k+1)}(\theta x)}{(2k+1)!}x^{2k+1} = \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\sin\left(\theta x + k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

2) $f(x) = \cos x$.

Ta có $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$. Do đó $f^{(2k)}(0) = \cos k\pi = (-1)^k$; $f^{(2k+1)}(0) = \cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$. Áp dụng công thức Mac-Lôranh với $n = 2k + 1$, ta được

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k+1}(x),\ x \in \mathbf{R}$$

trong đó

$$R_{2k+1}(x) = \frac{f^{(2k+2)}(\theta x)}{(2k+2)!}x^{2k+2} = \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\cos(\theta x + k\pi + \pi).$$

8.7. *Áp dụng công thức Taylo để tìm cực trị của hàm số*

Định lí. Giả sử hàm số f có đạo hàm đến cấp n tại điểm x_0, $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ và $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Khi đó :

a) Nếu n chẵn thì hàm số f có cực trị tại điểm x_0 :

- nếu $f^{(n)}(x_0) > 0$ thì f có cực tiểu tại x_0,
- nếu $f^{(n)}(x_0) < 0$ thì f có cực đại tại x_0.

b) Nếu n lẻ thì hàm số f không có cực trị tại điểm x_0.

Chứng minh. Khi nói hàm số f có đạo hàm tại điểm x_o, ta hiểu rằng f xác định với x đủ gần x_o, tức là f xác định trên một khoảng đủ nhỏ chứa điểm x_o. Theo giả thiết, hàm số f có đạo hàm cấp n tại điểm x_o. Như vậy hàm số và các đạo hàm của nó f, f', ..., $f^{(n-1)}$ xác định trên một khoảng đủ nhỏ chứa điểm x_o. Áp dụng công thức Taylo – Iang, ta được

$$f(x) - f(x_o) = \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x - x_o)^n + o((x - x_o)^n) \text{ khi } x \to x_o$$

Vì $f^{(n)}(x_o) \neq 0$ nên với x đủ gần x_o và $x \neq x_o$, dấu của $f(x) - f(x_o)$ là dấu của số hạng $\frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x - x_o)^n$ ở vế phải của đẳng thức trên nếu số hạng này khác không.

a) Nếu n chẵn thì $(x - x_o)^n > 0$ với mọi $x \neq x_o$. Do đó :

- Nếu $f^{(n)}(x_o) > 0$ thì $f(x) - f(x_o) \geq 0$ với mọi x đủ gần x_o. Vậy f đạt cực tiểu tại điểm x_o.

- Nếu $f^{(n)}(x_o) < 0$ thì $f(x) - f(x_o) \leq 0$ với mọi x đủ gần x_o. Vậy f đạt cực đại tại điểm x_o.

b) Nếu n lẻ thì $(x - x_o)^n < 0$ với $x < x_o$ và $(x - x_o)^n > 0$ với $x > x_o$. Do đó $f(x) - f(x_o)$ đổi dấu khi x qua điểm x_o. Hàm số f không có cực trị tại điểm x_o.

§9. HÀM LỒI

9.1. *Định nghĩa.* Giả sử I là một khoảng bất kì trong **R** (I có thể là một khoảng mở, đóng, nửa mở bị chặn hoặc không), $f : I \to \mathbf{R}$ là một hàm số xác định trên I.

f gọi là một *hàm lồi* trên I nếu với mọi $x_1, x_2 \in I$ và với mọi $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ sao cho $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, ta đều có

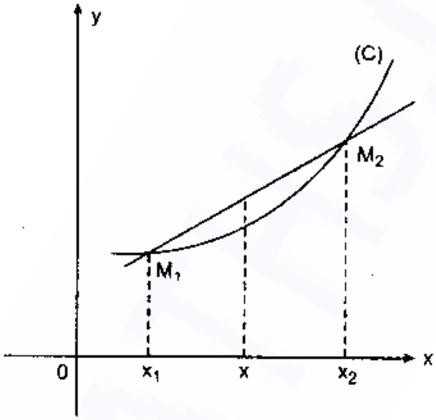
$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

9.2. *Ý nghĩa hình học*

Giả sử x_1, x_2 là hai số thực bất kì thuộc I, $x_1 < x_2$, $M_1 = (x_1, f(x_1))$, $M_2 = (x_2, f(x_2))$.

Phương trình tham số của đoạn thẳng M_1M_2 là

$$\begin{cases} x = x_2 + (x_1 - x_2)\lambda \\ y = f(x_2) + [f(x_1) - f(x_2)]\lambda, \\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \end{cases}$$



Hình 6

Đặt $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$, ta được

$$\begin{cases} x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \\ y = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2), \\ (\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1], \lambda_1 + \lambda_2 = 1). \end{cases}$$

Như vậy hàm số f là lồi trên I nếu với mọi x_1, $x_2 \in I$ sao cho $x_1 < x_2$, cung M_1M_2 của đồ thị của hàm số f nằm về phía dưới đoạn thẳng M_1M_2. ($M_1 = (x_1, f(x_1))$, $M_2 = (x_2, f(x_2))$.

Ta cũng nói rằng đồ thị (C) của hàm số f quay bề lõm về phía trên.

f gọi là một *hàm lõm* trên khoảng I nếu –f là một hàm lồi trên I.

Ta cũng nói rằng đồ thị (C) của hàm số f quay bề lõm về phía dưới.

9.3. *Định lí.* Giả sử hàm số f có đạo hàm hữu hạn trên khoảng I khi đó f là một hàm lồi trên I nếu và chỉ nếu f' là một hàm số tăng trên I.

Chứng minh. Giả sử f là một hàm lồi trên I ; x_1, $x_2 \in I$; $x_1 < x_2$; $M_1 = (x_1, f(x_1))$, $M_2 = (x_2, f(x_2))$. Gọi k là hệ số góc của đường thẳng M_1M_2. Giả sử x là một số thực bất kì của khoảng (x_1, x_2), $M = (x, f(x))$. Khi đó hệ số góc của đường thẳng M_1M là

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant k \qquad (1)$$

và hệ số góc của đường thẳng MM_2 là

$$\frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \geqslant k. \qquad (2)$$

Từ (1) suy ra

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant k.$$

Từ (2) suy ra

$$f'(x_2) = \lim_{x \to x_2^-} \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \geqslant k.$$

Do đó $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$. Vậy f' là tăng trên I.

Đảo lại, giả sử f' là tăng trên I. Gọi x_1, x_2 là hai số thực bất kì thuộc I, $x_1 < x_2$ và $y = ax + b$ là phương trình của đường thẳng M_1M_2 ($M_1 = (x_1, f(x_1))$, $M_2 = (x_2, f(x_2))$). Ta sẽ chứng minh rằng với mọi $x \in [x_1, x_2]$, $\varphi(x) = f(x) - (ax + b) \leqslant 0$. Thật vậy, ta có $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$. Hiển nhiên φ có đạo hàm hữu hạn trên $[x_1, x_2]$. Do đó, theo định lí Rôn, tồn tại một số thực $c \in (x_1, x_2)$ sao cho $\varphi'(c) = 0$. Vì $\varphi'(x) = f'(x) - a$ là tăng trên I nên

- Với mọi $x \in [x_1, c]$, $\varphi'(x) \leqslant \varphi'(c) = 0$. Do đó hàm số φ là giảm trên $[x_1, c]$. Từ đó suy ra $\varphi(x) \leqslant \varphi(x_1) = 0$.

- Với mọi $x \in [c, x_2]$, $\varphi'(x) \geqslant \varphi'(c) = 0$. Do đó φ là tăng trên $[c, x_2]$. Từ đó suy ra $\varphi(x) \leqslant \varphi(x_2) = 0$.

9.4. *Hệ quả.* Giả sử hàm số f có đạo hàm hữu hạn trên khoảng I. Khi đó f là một hàm lồi trên I nếu và chỉ nếu $f''(x) \geqslant 0$ với mọi $x \in I$.

9.5. *Định lí.* Giả sử f là một hàm lồi có đạo hàm hữu hạn trên khoảng I. Khi đó với mọi $x_0 \in I$, tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số f tại điểm $M_0(x_0, f(x_0))$ nằm về phía dưới đồ thị (C).

Chứng minh. Phương trình tiếp tuyến tại điểm M_0 của đồ thị (C) là $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Ta chứng minh

$$\varphi(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \geqslant 0 \text{ với mọi } x \in I.$$

Thật vậy, ta có $\varphi(x_0) = 0$. Giả sử $x > x_0$. Khi đó theo định lí Lagrăng, tồn tại $c \in (x_0, x)$ sao cho $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$. Do đó $\varphi(x) = [f'(c) - f'(x_0)](x - x_0)$. Vì f' là tăng trên I nên từ $c > x_0$ suy ra $f'(c) \geqslant f'(x_0)$. Do đó $\varphi(x) \geqslant 0$. Trường hợp $x < x_0$ được chứng minh tương tự.

Ví dụ. Hàm số $f(x) = x^2$ là lồi trên $\mathbf{R}$ vì $f''(x) = 2 > 0$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

§10. VI PHÂN

10.1. *Vi phân của hàm số tại một điểm*

Định nghĩa. Giả sử $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ có đạo hàm tại điểm $x_0 \in (a, b)$. Dạng tuyến tính trên $\mathbf{R}$

$$h \longmapsto f'(x_0).h$$

gọi là vi phân của hàm số f tại điểm x_0 và được kí hiệu là $df(x_0)$.

Như vậy $df(x_0) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ là ánh xạ tuyến tính xác định bởi

$$(df(x_0))(h) = f'(x_0).h.$$

Ví dụ. Cho hàm số $f(x) = x^2 - x + 2$. Ta có

$f'(x) = 2x - 1$; $f'(-1) = -3$. Vi phân của hàm số f tại điểm $x = -1$ là dạng tuyến tính trên **R** xác định bởi.

$$df(-1)(h) = -3h, \ h \in \mathbf{R}.$$

10.2. ***Quan hệ giữa số gia của hàm số và vi phân***

Giả sử hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0. Khi đó, ta có

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h) \text{ khi } h \to 0$$

tức là

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = df(x_0).(h) + o(h) \text{ khi } h \to 0.$$

Như vậy với một số gia nhỏ h của đối số, số gia của hàm số f tại điểm x_0 xấp xỉ bằng giá trị tại h của vi phân của f tại điểm x_0.

Nếu $f'(x_0) \neq 0$ thì

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \quad df(x_0).h \text{ khi } h \to 0.$$

Chú ý rằng ta đã dùng kí hiệu $df(x_0).h$ để chỉ giá trị tại điểm h của vi phân của hàm số f tại điểm x_0 thay cho kí hiệu $(df(x_0))(h)$.

10.3. ***Ý nghĩa hình học của vi phân*** (xem hình 4)

Gọi (C) là đồ thị của hàm số f, $M_0(x_0, f(x_0))$, $M(x_0 + h, f(x_0 + h))$ là hai điểm của (C).

Gọi T và N, theo thứ tự, là các giao điểm của đường thẳng $x = x_0 + h$ với tiếp tuyến tại điểm M_0 của (C) và với đường thẳng $y = f(x_0)$.

Khi đó $df(x_0).h = \overline{NT}$.

10.4. ***Vi phân của một hàm số***

Định nghĩa. Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng (a, b). Với mỗi $x \in (a, b)$, gọi $df(x)$ là vi phân của f tại điểm x. Ánh xạ

$$x \longmapsto df(x)$$

từ khoảng (a, b) vào tập hợp các dạng tuyến tính trên **R** gọi là vi phân của hàm số f, kí hiệu là df.

Ví dụ. Cho hàm số $f(x) = x$, $x \in \mathbf{R}$. Ta sẽ tìm vi phân của hàm số này và kí hiệu nó là dx. Ta có $f'(x) = 1$ với mọi $x \in \mathbf{R}$. Với mỗi $x_o \in \mathbf{R}$, ta có $df(x_o).h = 1.h = h$, $h \in \mathbf{R}$, tức là

$$dx(x_o).h = h, \ h \in \mathbf{R}.$$

Như vậy $dx(x_o)$ không phụ thuộc vào điểm x_o. Kí hiệu dx thay cho $dx(x_o)$, ta được

$$dx(h) = h. \qquad (1)$$

Vậy dx là dạng vi phân trên $\mathbf{R}$ xác định bởi công thức (1).

10.5. *Dạng tổng quát của vi phân của một hàm số*

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng (a, b), df(x) là vi phân của f tại điểm $x \in (a, b)$. Đó là dạng tuyến tính trên $\mathbf{R}$ xác định bởi

$$df(x).h = f'(x).h = f'(x).dx(h), \ h \in \mathbf{R}$$

Do đó

$$\boxed{df(x) = f'(x)dx}$$

Chú ý. Công thức trên giải thích lí do của việc dùng kí hiệu $\dfrac{df}{dx}$ để chỉ đạo hàm của hàm số f. Đó là tỉ số giữa hai phần tử df(x) và dx của không gian liên hợp đại số $\mathbf{R}^*$ của $\mathbf{R}$.

Ví dụ.

$$d(c) = 0 \quad (c \in \mathbf{R} \text{ là một hằng số})$$

$$d(\sin x) = \cos x dx$$

$$d(\cos x) = -\sin x dx$$

$$d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$d(\operatorname{cotg} x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$d(\operatorname{arctg} x) = \frac{dx}{1+x^2}$$

10.6. *Các quy tắc vi phân*

Từ định nghĩa của vi phân suy ra :

Giả sử u và v là hai hàm số có đạo hàm trên một khoảng. Khi đó

$$d(u+v) = du + dv$$

$$d(cu) = cdu$$

$$d(uv) = vdu + udv$$

Nếu ngoài ra $v \neq 0$ thì

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

10.7. *Vi phân của hàm số hợp*

Giả sử hàm số $x : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ có đạo hàm tại điểm $t \in (\alpha, \beta)$, hàm số $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ có đạo hàm tại điểm $x(t)$. Khi đó hàm số hợp $F = f \circ x$ có đạo hàm tại điểm t và $F'(t) = f'[x(t)]x'(t)$. Do đó vi phân của hàm số F tại điểm t là

$$dF(t) = f'[x(t)]x'(t)dt = f'[x(t)]dx(t).$$

10.8. *Hàm số khả vi*

Ta định nghĩa vi phân của một hàm số tại một điểm qua đạo hàm của hàm số tại điểm đó. Hàm số có vi phân tại một điểm chỉ khi nó có đạo hàm (hữu hạn) tại điểm đó. Vì vậy, nếu một hàm số có đạo hàm tại một điểm nào đó, người ta cũng nói rằng nó khả vi tại điểm đó. Hàm số có đạo hàm liên tục trên một khoảng gọi là khả vi liên tục trên khoảng đó.

Chương IV

TÍCH PHÂN

A. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Trong chương này ta sẽ nghiên cứu tích phân của các hàm số trên một đoạn trong **R**.

§1. ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

1.1. *Phép phân hoạch một đoạn. Tổng tích phân. Tổng Đácbu (Darboux)*

Giả sử f là một hàm số xác định trên đoạn [a, b] (a, b $\in$ **R**, a < b). Chia đoạn [a, b] thành các đoạn nhỏ bởi các điểm chia x_o, x_1, ..., x_n, trong đó

$$a = x_o < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Phép chia như vậy gọi là một phép phân hoạch đoạn [a, b], kí hiệu là Π. Hiển nhiên phép phân hoạch Π được hoàn toàn xác định bởi các điểm chia. Vì vậy, để cho tiện, người ta thường viết

$$\Pi = \{x_o, x_1, \ldots, x_n\} \ (a = x_o < x_1 < \ldots < x_n = b).$$

Ta kí hiệu Δx_i là đoạn $[x_{i-1}, x_i]$ và cả độ dài của đoạn này. Như vậy $\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n = b - a$. Độ dài của đoạn lớn nhất trong các đoạn $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ gọi là đường kính của phép phân hoạch Π, kí hiệu là $d(\Pi)$.

$$d(\Pi) = \max_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i = \max_{i=1,\ldots,n} (x_i - x_{i-1}).$$

Trên mỗi đoạn $\Delta x_i = [x_{i-1}, x_i]$ ta lấy một điểm bất kì ξ_i. Tổng

$$\sigma = \sigma(\Pi ; \xi_1, \ldots, \xi_n) = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n$$

gọi là *tổng tích phân* của hàm số f ứng với phép phân hoạch Π của đoạn [a, b] và với cách chọn các điểm $\xi_1, \ldots, \xi_n$ trên các đoạn $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$.

Bây giờ giả sử f là một hàm số bị chặn trên đoạn [a, b]. Đặt

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad ; M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad , i = 1, \ldots, n$$

Các tổng

$$s = s(\Pi) = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n ,$$

$$S = S(\Pi) = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n ,$$

theo thứ tự, được gọi là tổng Đácbu dưới và tổng Đácbu trên của hàm số f ứng với phép phân hoạch Π của đoạn [a, b].

Rõ ràng với một phép phân hoạch cho trước Π của đoạn [a, b] chỉ có một tổng Đácbu dưới và một tổng Đácbu trên của hàm số f nhưng có vô số tổng tích phân của f. (Vì với mỗi cách chọn các điểm $\xi_i \in \Delta x_i$, ta được một tổng tích phân của f).

Đặt $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$, ta được

$$m(b - a) \leq s(\Pi) \leq \sigma(\Pi ; \xi_1, \ldots, \xi_n) \leq S(\Pi) \leq M (b - a), \quad (1)$$

với mọi cách chọn các điểm $\xi_i \in \Delta x_i$.

1.2. *Định lí.* Giả sử f là một hàm số bị chặn trên [a, b] và Π là một phép phân hoạch đoạn này. Khi đó

a) Tổng Đacbu trên $S(\Pi)$ của hàm số f ứng với phép phân hoạch Π là cận trên đúng của tập hợp các tổng tích phân của f ứng với Π.

$$S(\Pi) = \sup_{\xi_i \in \Delta x_i} \sigma(\Pi ; \xi_1, \ldots, \xi_n).$$

b) Tổng Đacbu dưới $s(\Pi)$ của hàm số f ứng với phép phân hoạch Π là cận dưới đúng của tập hợp các tổng tích phân ứng với Π.

$$s(\Pi) = \inf_{\xi_i \in \Delta x_i} \sigma(\Pi\ ;\ \xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Chứng minh a) Theo (1) trong 1.1, ta có

$$\sigma\ (\Pi\ ;\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n) \leqslant S(\Pi)$$

với mọi cách chọn các điểm $\xi_i \in \Delta x_i$. Cho $\varepsilon > 0$ bất kì. Vì $M_i = \sup_{x \in \Delta x_i} f(x)$ nên tồn tại $\xi_i \in \Delta x_i$ sao cho $f(\xi_i) > M_i - \dfrac{\varepsilon}{b-a}$, $i = 1, \ldots, n$. Do đó

$$\sigma(\Pi\ ;\ \xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i > \sum_{i=1}^{n} \left(M_i - \frac{\varepsilon}{b-a}\right) \Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i - \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = S(\Pi) - \varepsilon.$$

Vậy $\qquad S(\Pi) = \sup_{\xi_i \in \Delta x_i} \sigma(\Pi\ ;\ \xi_1, \ldots, \xi_n).$

b) được chứng minh tương tự.

1.3. Giả sử Π và Π' là hai phép phân hoạch đoạn [a, b]. Ta nói rằng Π' mịn hơn Π nếu $\Pi \subset \Pi'$, tức là mỗi điểm chia của Π đều là một điểm chia của Π'.

1.4. Giả sử f là một hàm số bị chặn trên đoạn [a, b] ; Π và Π' là hai phép phân hoạch đoạn [a, b]. Nếu Π' mịn hơn Π thì

$$S(\Pi') \leqslant S\ (\Pi)\ ;\ s(\Pi') \geqslant s(\Pi) \qquad (1)$$

Do đó

$$S(\Pi') - s(\Pi') \leqslant S(\Pi) - s(\Pi). \qquad (2)$$

Chứng minh. Chỉ cần chứng minh cho trường hợp Π' nhận được từ Π bằng cách thêm vào một điểm chia. Giả sử

$$\Pi : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i_0 - 1} < x_{i_0} < \dots < x_n = b$$

$$\Pi' : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i_0 - 1} < c < x_{i_0} < \dots < x_n = b.$$

Như vậy $\Pi' = \Pi \cup \{c\}$, trong đó $c \in (x_{i_0 - 1}, x_{i_0})$. Ta có

$$S(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}),$$

$$S(\Pi') = \sum_{i \neq i_0} M_i(x_i - x_{i-1}) + M'_{i_0} (c - x_{i_0 - 1}) + M''_{i_0} (x_{i_0} - c),$$

trong đó $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$; $M'_{i_0} = \sup\limits_{x \in [x_{i_0 - 1}, c]} f(x)$; $M''_{i_0} = \sup\limits_{x \in [c, x_{i_0}]} f(x)$

Hiển nhiên $M'_{i_0} \leqslant M_{i_0}$ và $M''_{i_0} \leqslant M_{i_0}$. Do đó

$$M'_{i_0}(c - x_{i_0 - 1}) + M''_{i_0}(x_{i_0} - c) \leqslant$$
$$\leqslant M_{i_0}[(c - x_{i_0 - 1}) + (x_{i_0} - c)] = M_{i_0}(x_{i_0} - x_{i_0 - 1}).$$

Từ đó suy ra

$$S(\Pi') \leqslant \sum_{i \neq i_0} M_i(x_i - x_{i-1}) + M_{i_0} (x_{i_0} - x_{i_0 - 1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = S(\Pi).$$

Bất đẳng thức thứ hai trong (1) được chứng minh tương tự.

1.5. *Dãy chuẩn tắc những phép phân hoạch*

Định nghĩa. Giả sử $\{\Pi_n\}$ là một dãy phép phân hoạch đoạn $[a, b]$.

$$\Pi_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{p_n} = b.$$

$\{\Pi_n\}$ gọi là một dãy *chuẩn tắc* nếu $\lim\limits_{n \to \infty} d(\Pi_n) = 0$.

Ví dụ. Với mỗi số nguyên dương n, gọi Π_n là phép chia đoạn [a, b] thành n đoạn bằng nhau

$$\Pi_n = \left\{ a\,,\ a + \frac{b-a}{n}\,,\ a + 2\frac{(b-a)}{n}\,,\ \ldots,\ a + (n-1)\,\frac{b-a}{n}\,,\ b \right\}$$

$\{\Pi_n\}$ là một dãy chuẩn tắc vì $d(\Pi_n) = \dfrac{b-a}{n} \to 0$ khi $n \to \infty$.

1.6. ***Định nghĩa tích phân xác định***

Giả sử f là một hàm số xác định trên đoạn [a, b], a, b $\in \mathbf{R}$, a < b. Gọi $\{\Pi_n\}$ là một dãy chuẩn tắc bất kì những phép phân hoạch đoạn [a, b].

$$\Pi_n : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{p_n} = b.$$

Lấy các điểm bất kì $\xi_i \in \Delta x_i = [x_{i-1}, x_i]$; $i = 1, \ldots, p_n$ và lập tổng tích phân

$$\sigma_n = \sigma(\Pi_n\ ;\ \xi_1, \ldots, \xi_{p_n}) = \sum_{i=1}^{p_n} f(\xi_i)\Delta x_i,\quad n = 1, 2, \ldots$$

Định nghĩa. Nếu tồn tại một số $I \in \mathbf{R}$ sao cho với một dãy chuẩn tắc bất kì $\{\Pi_n\}$ những phép phân hoạch đoạn [a, b] và với một cách chọn bất kì các điểm $\xi_i \in \Delta x_i$, $i = 1, \ldots, p_n$, ta đều có

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = I$$

thì I được gọi là tích phân xác định của hàm số f trên đoạn [a, b], kí hiệu là

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Nếu tích phân trên tồn tại thì hàm số f được gọi là khả tích trên đoạn [a, b].

f được gọi là hàm số dưới dấu tích phân, f(x)dx được gọi là biểu thức dưới dấu tích phân, a gọi là cận dưới, b là cận trên của tích phân.

Ví dụ 1. Cho $f(x) = c$, $x \in [a, b]$, trong đó $c \in \mathbf{R}$ là một hằng số. Giả sử $\{\Pi_n\}$ là một dãy chuẩn tắc bất kì những phép phân hoạch đoạn $[a, b]$.

$$\Pi_n : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{p_n} = b.$$

Lấy các điểm bất kì $\xi_i \in \Delta x_i$, $i = 1, \ldots, p_n$. Khi đó

$$\sigma_n = \sigma(\Pi_n ; \xi_1, \ldots, \xi_{p_n}) = \sum_{i=1}^{p_n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{p_n} c\Delta x_i =$$

$$= c\sum_{i=1}^{p_n} \Delta x_i = c(b - a), \text{ với mọi } n.$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = c(b - a)$. Vậy hàm số đã cho khả tích trên $[a, b]$ và

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b c\,dx = c(b - a).$$

Ví dụ 2. Xét tính khả tích của hàm số Điriclê (Diritchlet) trên đoạn $[0, 1]$.

$$D(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \text{ hữu tỉ} \\ 0 \text{ nếu } x \text{ vô tỉ.} \end{cases}$$

Gọi $\{\Pi_n\}$ là một dãy chuẩn tắc bất kì những phép phân hoạch đoạn $[0, 1]$.

$$\Pi_n : 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{p_n} = 1.$$

Lấy các điểm hữu tỉ bất kì $\xi_i \in \Delta x_i$, $i = 1, \ldots, p_n$.

Khi đó

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{p_n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{p_n} 1.\Delta x_i = 1 \text{ với mọi } n,$$

và $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 1$.

Lấy các điểm vô tỉ bất kì $\eta_i \in \Delta x_i$, $i = 1, \ldots, p_n$. Khi đó

$$\overline{\sigma}_n = \sum_{i=1}^{p_n} f(\eta_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{p_n} 0.\Delta x_i = 0 \text{ với mọi } n.$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{\sigma}_n = 0$. Vậy hàm số D không khả tích trên [0, 1].

§ 2. ĐIỀU KIỆN KHẢ TÍCH

2.1. *Định lí.* Nếu hàm số $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ khả tích trên đoạn [a, b] thì nó bị chặn trên đoạn này.

Chứng minh. Giả sử f khả tích nhưng không bị chặn trên [a, b] và $\{\Pi_n\}$ là một dãy chuẩn tắc những phép phân hoạch [a, b].

$$\Pi_n : a = x_o < x_1 < \ldots < x_{p_n} = b.$$

Khi đó tồn tại ít nhất một đoạn $\Delta x_{i_o} = [x_{i_o - 1}, x_{i_o}]$ trên đó f không bị chặn. Trên đoạn này có thể tìm được điểm ξ_{i_o} sao cho $\left| f(\xi_{i_o}) \right|$ lớn tùy ý. Lấy các điểm bất kì $\xi_i \in \Delta x_i$ với $i \neq i_o$ và chọn điểm $\xi_{i_o} \in \Delta x_{i_o}$ sao cho

$$|\sigma_n| = |\sigma(\Pi_n ; \xi_1, \ldots, \xi_{p_n})| > n.$$

Dãy $\{\sigma_n\}$ không hội tụ. Do đó f không khả tích trên [a, b]. Điều này trái với giả thiết.

Chú ý. Định lí 2.1 chỉ cho điều kiện cần để hàm số f khả tích trên [a, b]. Đó không phải là điều kiện đủ. Chẳng hạn, hàm số Điriclê D bị chặn trên [0, 1] nhưng không khả tích trên đoạn này.

Định lí 2.5 và 2.6 sẽ cho ta điều kiện cần và đủ để một hàm số là khả tích.

2.2. *Định lí.* Giả sử f là một hàm số bị chặn trên đoạn [a, b], $\{\Pi_n\}$ là một dãy chuẩn tắc bất kì những phép phân hoạch đoạn [a, b] ; $S(\Pi_n)$ và $s(\Pi_n)$ là các tổng Đácbu của f ứng với phép phân hoạch Π_n. Khi đó, các dãy $\{S(\Pi_n)\}$ và $\{s(\Pi_n)\}$ đều hội tụ và giới hạn của chúng không phụ thuộc vào dãy $\{\Pi_n\}$.

(Nói một cách khác, nếu $\{\Pi_n\}$ và $\{\Pi'_n\}$ là hai dãy chuẩn tắc bất kì những phép phân hoạch đoạn [a, b] thì

$$\lim_{n\to\infty} S(\Pi'_n) = \lim_{n\to\infty} S(\Pi_n) \text{ và } \lim_{n\to\infty} s(\Pi'_n) = \lim_{n\to\infty} s(\Pi_n)).$$

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh rằng nếu Π là một phép phân hoạch bất kì đoạn [a, b].

$$\Pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_l = b$$

thì

$$\limsup_{n\to\infty} S(\Pi_n) \leqslant S(\Pi) \qquad (1)$$

$S(\Pi)$ là tổng Đacbu trên của hàm số f ứng với phép phân hoạch Π.

$$(S(\Pi) = \sum_{j=1}^{l} K_j\Delta t_j = \sum_{j=1}^{l} K_j(t_j - t_{j-1}),\ K_j = \sup_{x\in\Delta t_j} f(x).$$

$$S(\Pi_n) = \sum_{i=1}^{p_n} M_i\Delta x_i\ ;\ s(\Pi_n) = \sum_{i=1}^{p_n} m_i\Delta x_i,\ M_i = \sup_{x\in\Delta x_i} f(x),$$

$$m_i = \inf_{x\in\Delta x_i} f(x))$$

Ta chia tổng $S(\Pi_n)$ thành hai tổng $\sum_1 M_i\Delta x_i$ và $\sum_2 M_i\Delta x_i$. Số hạng $M_i\Delta x_i$ thuộc tổng thứ nhất nếu Δx_i chứa trong một Δt_j nào đó. Các số hạng còn lại thuộc tổng thứ hai. Trong tổng thứ hai $\sum_2$, mỗi Δx_i chứa ít nhất một điểm chia t_j nào đó của Π (hơn nữa $x_{i-1} < t_j < x_i$). Vì vậy tổng thứ hai có không quá l số hạng. Ta có

$$S(\Pi_n) = \sum_1 M_i\Delta x_i + \sum_2 M_i\Delta x_i$$

$$= \sum_1 M_i\Delta x_i + \sum_2 m_i\Delta x_i + \sum_2 (M_i - m_i)\Delta x_i \qquad (2)$$

Dễ dàng chứng minh

$$\sum\nolimits_1 M_i\Delta x_i + \sum\nolimits_2 m_i\Delta x_i \leq S(\Pi) \qquad (3)$$

Ngoài ra, đặt $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ và $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, ta có

$$M_i - m_i \leq M - m \text{ và } \Delta x_i \leq d(\Pi_n),\ i = 1, \ldots, p_n$$

trong đó $d(\Pi_n)$ là đường kính của phép phân hoạch Π_n. Do đó

$$\sum\nolimits_2 (M_i - m_i)\,\Delta x_i \leq l(M - m)d(\Pi_n) \qquad (4)$$

Từ (2), (3), (4) suy ra

$$S(\Pi_n) \leq S(\Pi) + l(M - m)\, d(\Pi_n) \text{ với mọi } n.$$

Khi $n \to \infty$ thì $d(\Pi_n) \to 0$. Do đó

$$\limsup_{n\to\infty} S(\Pi_n) \leq S(\Pi). \qquad (5)$$

Bây giờ giả sử $\{\Pi'_n\}$ cũng là một dãy chuẩn tắc những phép phân hoạch đoạn [a, b]. Từ (2) suy ra

$$\limsup_{n\to\infty} S(\Pi_n) \leq S(\Pi'_k) \text{ với mọi } k.$$

Do đó

$$\limsup_{n\to\infty} S(\Pi_n) \leq \liminf_{k\to\infty} S(\Pi'_k).$$

Thay đổi vai trò của $\{\Pi_n\}$ và $\{\Pi'_n\}$, ta được

$$\limsup_{k\to\infty} S(\Pi'_k) \leq \liminf_{n\to\infty} S(\Pi_n).$$

Như vậy, ta có

$$\limsup_{n\to\infty} S(\Pi_n) \leq \liminf_{k\to\infty} S(\Pi'_k) \leq \limsup_{k\to\infty} S(\Pi'_k) \leq \liminf_{n\to\infty} S(\Pi_n) \qquad (6)$$

Từ đó suy ra $\limsup\limits_{n\to\infty} S(\Pi_n) = \liminf\limits_{n\to\infty} S(\Pi_n)$. Vậy dãy $\{S(\Pi_n)\}$ hội tụ. Từ (6) cũng suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} S(\Pi'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(\Pi_n)$.

Chứng minh tương tự, dãy $\{s(\Pi_n)\}$ hội tụ và

$$\lim_{n\to\infty} s(\Pi'_n) = \lim_{n\to\infty} s(\Pi_n).$$

2.3. ***Tích phân trên và tích phân dưới***

Định nghĩa. Giả sử f là một hàm số bị chặn trên đoạn [a, b]. Gọi $\{\Pi_n\}$ là một dãy chuẩn tắc bất kì những phép phân hoạch đoạn [a, b], $\{s(\Pi_n)\}$ và $\{S(\Pi_n)\}$ là dãy các tổng Đácbu dưới và dãy các tổng Đácbu trên ứng với dãy $\{\Pi_n\}$. Khi đó

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} s(\Pi_n) \ ,$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S(\Pi_n) \ ,$$

theo thứ tự, gọi là tích phân dưới và tích phân trên của hàm số f trên [a, b].

- Chú ý rằng theo định lí 2.2, mọi hàm số bị chặn trên một đoạn đều có tích phân trên và tích phân dưới trên đoạn đó và chúng không phụ thuộc vào dãy $\{\Pi_n\}$.

- Vì $s(\Pi_n) \leq S(\Pi_n)$ với mọi n nên

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \ .$$

2.4. ***Định lí.*** Nếu f là một hàm số bị chặn trên đoạn [a, b] thì

a) $s(\Pi) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(\Pi)$ với mọi $\Pi \in \mathcal{P}$;

b) $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\limits_{\Pi\in\mathcal{P}} s(\Pi)$; $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\limits_{\Pi\in\mathcal{P}} S(\Pi)$,

trong đó $\mathcal{P}$ là tập hợp tất cả các phép phân hoạch đoạn [a, b].

Chứng minh. a) Ta viết lại bất đẳng thức (1) trong chứng minh định lí 2.2 : $\limsup\limits_{n\to\infty} S(\Pi_n) \leq S(\Pi)$ với mọi $\Pi \in \mathcal{P}$.

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} S(\Pi_n) = \overline{\int_a^b f(x)dx}$, từ đó suy ra

$$\overline{\int_a^b f(x)dx} \leq S(\Pi) \qquad (1)$$

với mọi $\Pi \in \mathcal{P}$. Chứng minh tương tự, ta có

$$s(\Pi) \leq \underline{\int_a^b f(x)dx}$$

với mọi $\Pi \in \mathcal{P}$. Từ đó có bất đẳng thức trong a).

b) Từ (1) suy ra $\overline{\int_a^b f(x)dx} \leq \inf\limits_{\Pi\in\mathcal{P}} S(\Pi)$. Ngoài ra, với một dãy chuẩn tắc $\{\Pi_n\} \subset \mathcal{P}$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} S(\Pi_n) = \int_a^b f(x)dx$. Do đó

$$\overline{\int_a^b f(x)dx} = \inf_{\Pi\in\mathcal{P}} S(\Pi) .$$

Chứng minh tương tự, ta được đẳng thức thứ nhất trong b).

2.5. ***Điều kiện khả tích***

Định lí. Hàm số f bị chặn trên đoạn [a, b] là khả tích trên đoạn này khi và chỉ khi

$$\underline{\int_a^b f(x)dx} = \overline{\int_a^b f(x)dx} \qquad (1)$$

Chứng minh. Giả sử f thỏa mãn (1). Gọi $\{\Pi_n\}$ là một dãy chuẩn tắc bất kì những phép phân hoạch đoạn [a, b], $\sigma_n = \sigma(\Pi_n; \xi_1, ..., \xi_{p_n})$ là tổng tích phân của hàm số f ứng với phép phân hoạch Π_n và các điểm bất kì $\xi_i \in \Delta x_i$, $i = 1, \dots, p_n$. Khi đó

$$s(\Pi_n) \leqslant \sigma_n \leqslant S(\Pi_n) \text{ với mọi } n.$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$. Vậy f khả tích trên [a, b] và

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

Bây giờ giả sử $\underline{\int_a^b} f(x)dx < \overline{\int_a^b} f(x)dx$. Theo định lí 1.2, tồn tại các điểm $\xi_i \in \Delta x_i$, $i = 1, \dots, p_n$ sao cho $\sigma_n - s(\Pi_n) < \frac{1}{n}$.

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} s(\Pi_n) = \underline{\int_a^b} f(x)dx$. Nếu chọn các điểm $\xi'_i \in \Delta x_i$, $i = 1 \dots, p_n$ sao cho $S(\Pi_n) - \sigma'_n < \frac{1}{n}\left(\sigma'_n = \sum\limits_{i=1}^{p_n} f(\xi'_i)\Delta x_i\right)$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma'_n = \lim\limits_{n\to\infty} S(\Pi_n) = \overline{\int_a^b} f(x)dx$. Vậy tích phân $\int_a^b f(x)dx$ không tồn tại.

2.6. *Định lí*. Hàm số f bị chặn trên [a, b] là khả tích trên đoạn này khi và chỉ khi với một số dương bất kì ε, tồn tại một phép phân hoạch Π đoạn [a, b] sao cho

$$S(\Pi) - s(\Pi) < \varepsilon \qquad (1)$$

Chứng minh. Giả sử f khả tích trên [a, b] và $\{\Pi_n\}$ là một dãy chuẩn tắc những phép phân hoạch đoạn [a, b]. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} [S(\Pi_n) - s(\Pi_n)] = 0$. Do đó $S(\Pi_n) - s(\Pi_n) < \varepsilon$ với n đủ lớn.

Đảo lại, nếu với một số dương bất kì ε, tồn tại Π thỏa mãn (1) thì từ bất đẳng thức

$$s(\Pi) \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqslant S(\Pi)$$

suy ra

$$0 \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqslant S(\Pi) - s(\Pi) < \varepsilon\,,$$

với mọi $\varepsilon > 0$. Do đó hai tích phân trên và dưới của hàm số f bằng nhau. Theo 2.5, từ đó suy ra rằng f khả tích trên $[a, b]$.

Xem như một bài tập, bạn đọc hãy chứng minh định lí sau :

2.7. $\int_a^b f(x)dx = I \in \mathbf{R}$ tương đương với điều kiện :

Với một số dương ε bất kì, tồn tại một số dương δ sao cho với mọi phép phân hoạch π đoạn $[a, b]$:

$$\pi : a = x_o < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

và với mọi $\quad \xi'_i \in \Delta x_i = [x_{i-1}, x_i],\ i = 1, \ldots, n,$

$$d(\pi) < \delta \Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi'_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon.$$

Trong một số giáo trình giải tích, điều kiện nêu trong định lí 2.7 được lấy làm định nghĩa của tích phân xác định.

§3. CÁC LỚP HÀM SỐ KHẢ TÍCH

3.1. *Định lí.* Hàm số f liên tục trên $[a, b]$ thì khả tích trên đoạn này.

Chứng minh. Vì f liên tục trên $[a, b]$ nên liên tục đều trên đoạn này. Do đó với $\varepsilon > 0$ bất kì, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$(\forall x', x'' \in [a, b])\ |x' - x''| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Giả sử Π là một phép phân hoạch đoạn [a, b] sao cho $d(\Pi) < \delta$.

$$\Pi : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Khi đó $M_i - m_i < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$; $i = 1, \ldots, n$,

$$\left(M_i = \sup_{x \in \Delta x_i} f(x) \ ; \ m_i = \inf_{x \in \Delta x_i} f(x) \right). \text{ Do đó}$$

$$S(\Pi) - s(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon .$$

Vậy f khả tích trên đoạn [a, b] (định lí 2.6).

3.2. *Định lí.* Giả sử f là một hàm số bị chặn trên đoạn [a, b]. Nếu f chỉ có một số hữu hạn điểm gián đoạn thì nó khả tích trên [a, b].

Chứng minh. Ta chứng minh định lí cho trường hợp f chỉ có một điểm gián đoạn $c \in (a, b)$. Cho $\varepsilon > 0$ bất kì. Đặt $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Hiển nhiên $M > m$. Gọi d và e là hai số thực sao cho $a < d < c < e < b$ và $e - d < \dfrac{\varepsilon}{3(M-m)}$.

Vì f liên tục trên hai đoạn [a, d] và [e, b] nên f khả tích trên hai đoạn này. Do đó tồn tại một phép phân hoạch Π_1 của [a, d] và một phép phân hoạch Π_2 của [e, b]

$$\Pi_1 : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = d$$
$$\Pi_2 : e = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = b$$

sao cho

$$S(\Pi_1) - s(\Pi_1) < \frac{\varepsilon}{3} \ ; \ S(\Pi_2) - s(\Pi_2) < \frac{\varepsilon}{3} .$$

Khi đó $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$ là một phép phân hoạch đoạn [a, b]

$\Pi : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = d < e = y_0 < y_1 < \ldots <$ $< y_n = b$, và

$$S(\Pi) - s(\Pi) \leqslant S(\Pi_1) - s(\Pi_1) + (M - m)(e - d) + S(\Pi_2) - s(\Pi_2)$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + (M - m)\frac{\varepsilon}{3(M-m)} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

Do đó, theo định lí 2.6, f là khả tích trên [a, b].

3.3. *Định lí.* Hàm số f đơn điệu trên [a, b] thì khả tích trên đoạn này.

Chứng minh. Giả sử hàm số f tăng trên [a, b] và f(b) >f(a). (Nếu f(a) = f(b) thì f là một hàm hằng trên [a, b]. Nếu f giảm trên [a, b] thì –f tăng trên đoạn này). Cho $\varepsilon > 0$ bất kì.

Giả sử Π là một phép phân hoạch đoạn [a, b]

$$\Pi : a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Khi đó

$$M_i = \sup_{x \in \Delta x_i} f(x) = f(x_i) \; ; \; m_i = \inf_{x \in \Delta x_i} f(x) = f(x_{i-1}), \; i = 1, \ldots, n$$

$$S(\Pi) - s(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] \Delta x_i$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] \, d(\Pi)$$

$$= d(\Pi) \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = d(\Pi) \, [f(b) - f(a)] .$$

Nếu Π là một phép phân hoạch đoạn [a, b] sao cho $d(\Pi) < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ thì $S(\Pi) - s(\Pi) < \varepsilon$. Vậy, theo định lí 2.6, f khả tích trên [a, b].

§4. CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

4.1. *Định lí.* Nếu hàm số f khả tích trên đoạn [a, b] thì nó khả tích trên một đoạn bất kì $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

Chứng minh. Vì f khả tích trên [a, b] nên với $\varepsilon > 0$ bất kì tồn tại một phép phân hoạch Π của đoạn [a, b] sao cho $S(\Pi) - s(\Pi) < \varepsilon$. Khi đó $\Pi' = \Pi \cup \{\alpha, \beta\}$ là một phép phân hoạch đoạn [a, b]. Vì Π' mịn hơn Π nên, theo 1.3, ta có

$$S(\Pi') - s(\Pi') \leqslant S(\Pi) - s(\Pi) < \varepsilon.$$

$\Pi_1 = \Pi' \cap [\alpha, \beta]$ là một phép phân hoạch đoạn $[\alpha, \beta]$. Hiển nhiên $S(\Pi_1) - s(\Pi_1) \leqslant S(\Pi') - s(\Pi') < \varepsilon$. Vậy f khả tích trên $[\alpha, \beta]$.

4.2. *Định lí.* Giả sử a < c < b. Nếu hàm số f khả tích trên các đoạn [a, c] và [c, b] thì nó khả tích trên [a, b] và

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh f khả tích trên [a, b]. Cho $\varepsilon > 0$ bất kì. Vì f khả tích trên [a, c] nên tồn tại một phép phân hoạch Π' đoạn [a, c] sao cho $S(\Pi') - s(\Pi') < \frac{\varepsilon}{2}$. Tương tự, tồn tại một phép phân hoạch Π'' đoạn [c, b] sao cho $S(\Pi'') - s(\Pi'') < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\Pi = \Pi' \cup \Pi''$ là một phép phân hoạch đoạn [a, b]. Hiển nhiên

$$S(\Pi) - s(\Pi) = S(\Pi') - s(\Pi') + S(\Pi'') - s(\Pi'') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Vậy f khả tích trên [a, b].

Bây giờ ta chứng minh đẳng thức (1). Gọi $\{\Pi'_n\}$ và $\{\Pi''_n\}$, theo thứ tự, là dãy chuẩn tắc những phép phân hoạch đoạn [a, c] và [c, b]. Khi đó $\{\Pi_n\} = \{\Pi'_n \cup \Pi''_n\}$ là một dãy chuẩn tắc những phép phân hoạch đoạn [a, b] và $S(\Pi_n) = S(\Pi'_n) + S(\Pi''_n)$. Do đó

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S(\Pi_n) = \lim_{n\to\infty} S(\Pi'_n) + \lim_{n\to\infty} S(\Pi''_n) = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4.3. *Định lí.* a) Nếu f và g là hai hàm số khả tích trên đoạn [a, b] thì hàm số f + g khả tích trên [a, b] và

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx , \qquad (1)$$

b) Nếu f khả tích trên [a, b] và $\alpha \in \mathbf{R}$ là một hằng số thì

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx .$$

Chứng minh. a) Giả sử $\{\Pi_n\}$ là một dãy chuẩn tắc bất kì những phép phân hoạch đoạn [a, b],

$$\Pi_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{p_n} = b.$$

Lấy các điểm bất kì $\xi_i \in \Delta x_i = [x_{i-1}, x_i]$. Gọi $\sigma_n(f)$, $\sigma_n(g)$, $\sigma_n(f+g)$ theo thứ tự là các tổng tích phân của các hàm số f, g, f + g ứng với phép phân hoạch Π_n và các điểm ξ_i. Khi đó

$$\sigma_n(f+g) = \sum_{i=1}^{p_n} [f(\xi_i) + g(\xi_i)]\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{p_n} f(\xi_i)\,\Delta x_i + \sum_{i=1}^{p_n} g(\xi_i)\,\Delta x_i$$

$$= \sigma_n(f) + \sigma_n(g).$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f+g) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(f) + \lim_{n\to\infty} \sigma_n(g) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Vậy f + g khả tích trên [a, b] và

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\ .$$

b) Được chứng minh tương tự.

4.4. *Nhận xét.* Gọi R[a, b] là tập hợp các hàm số khả tích trên [a, b]. Định lí 4.3 có thể được phát biểu dưới dạng

Định lí

a) R[a, b] là một không gian tuyến tính thực

b) Hàm số $R[a, b] \ni f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx \in \mathbf{R}$ là một dạng tuyến tính trên R[a, b].

4.5. *Định lí.* Nếu f và g là hai hàm số khả tích trên [a, b] thì hàm số fg khả tích trên đoạn này.

Chứng minh. Vì f và g là hai hàm số khả tích trên [a, b] nên chúng bị chặn trên đoạn này. Do đó, tồn tại hai số thực K và L sao cho $|f(x)| \leq K$ và $|g(x)| \leq L$ với mọi $x \in [a, b]$. Giả sử $\{\Pi_n\}$ là một dãy chuẩn tắc bất kì những phép phân hoạch đoạn [a, b].

$$\Pi_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{p_n} = b$$

Với mọi x', x'' $\in \Delta x_i = [x_{i-1}, x_i]$, ta có

$$|f(x')g(x')-f(x'')g(x'')| = |f(x')g(x')-f(x'')g(x')+f(x'')g(x')-f(x'')g(x'')|$$
$$\leqslant |g(x')|\,|f(x')-f(x'')| + |f(x'')|\,|g(x')-g(x'')|$$
$$\leqslant L\,|f(x')-f(x'')| + K|g(x')-g(x'')|$$
$$\leqslant L\,[M_i(f) - m_i(f)] + K\,[M_i(g) - m_i(g)]$$

trong đó $M_i(f) = \sup\limits_{x\in\Delta x_i} f(x)$; $m_i(f) = \inf\limits_{x\in\Delta x_i} f(x)$. Kí hiệu $M_i(g)$ và $m_i(g)$ có nội dung tương tự. Từ đó suy ra

$$M_i(fg) - m_i(fg) \leqslant L[M_i(f) - m_i(f)] + K[M_i(g) - m_i(g)],\ i = 1, ..., p_n.$$

Nhân hai vế của bất đẳng thức trên với Δx_i rồi cộng p_n bất đẳng thức, ta được

$S(fg ; \Pi_n) - s(fg ; \Pi_n) \leqslant L[S(f ; \Pi_n) - s(f ; \Pi_n)] + K[S(g ; \Pi_n) - s(g ; \Pi_n)]$, trong đó $S(fg ; \Pi_n)$ và $s(fg ; \Pi_n)$ là các tổng Đácbu trên và dưới của hàm số fg ứng với phép phân hoạch Π_n. Vì f và g là khả tích trên [a, b] nên vế phải của bất đẳng thức trên dần đến 0 khi $n \to \infty$. Do đó vế trái của bất đẳng thức cũng dần đến 0 khi $n \to \infty$. Vậy hàm số fg khả tích trên [a, b].

4.6. *Định lí.* Nếu f và g là hai hàm số khả tích trên đoạn [a, b] và $f(x) \leqslant g(x)$ với mọi $x \in [a, b]$ thì

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx \qquad (1)$$

Đặc biệt, nếu f khả tích trên [a, b] và $f(x) \geqslant 0$ với mọi $x \in [a, b]$ thì

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0 \qquad (2)$$

Chứng minh. Bất đẳng thức (2) suy ra từ định nghĩa của tích phân xác định. Nếu f và g khả tích trên [a, b] và $f(x) \leqslant g(x)$ với mọi $x \in [a, b]$ thì hàm số $g - f$ khả tích trên [a, b] và $g(x) - f(x) \geqslant 0$ với mọi $x \in [a, b]$. Do đó $\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx \geqslant 0$. Từ đó có (1).

4.7. *Định lí.* Nếu hàm số f khả tích trên [a, b] thì hàm số $|f|$ cũng khả tích trên đoạn này và

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx \qquad (1).$$

Chứng minh. Cho $\varepsilon > 0$ bất kì. Vì f khả tích trên [a, b] nên tồn tại một phép phân hoạch Π đoạn [a, b] sao cho $S(f\,;\,\Pi) - s(f\,;\,\Pi) < \varepsilon$, với $\Pi : a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$;

$$S(f\,;\,\Pi) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)\,\Delta x_i\ ;\ s(f\,;\,\Pi) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\,\Delta x_i\ ;$$

$$M_i(f) = \sup_{x\in\Delta x_i} f(x)\ ;\ m_i = \inf_{x\in\Delta x_i} f(x)\ ,\ i = 1, \ldots, n.$$

Với mọi $x', x'' \in \Delta x_i$, ta có

$$\big||f(x')| - |f(x'')|\big| \leqslant |f(x') - f(x'')|.$$

Từ đó suy ra

$$M_i(|f|) - m_i(|f|) \leqslant M_i(f) - m_i(f),\ i = 1, \ldots, n.$$

Nhân bất đẳng thức trên với Δx_i rồi cộng n bất đẳng thức, ta được

$$S(|f|\,;\,\Pi) - s(|f|\,;\,\Pi) \leqslant S(f\,;\,\Pi) - s(f\,;\,\Pi) < \varepsilon.$$

Vậy hàm số $|f|$ khả tích trên [a, b].

Bây giờ ta chứng minh bất đẳng thức (1). Ta có

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)| \text{ với mọi } x \in [a, b].$$

Theo định lí 4.6, bất đẳng thức trên kéo theo

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

Từ đó có bất đẳng thức (1).

4.8. *Định lí.* Nếu hàm số f khả tích trên đoạn [a, b] và $f(x) > 0$ với mọi $x \in [a, b]$ thì

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0\,.$$

*Chứng minh**. Vì $f(x) \geqslant 0$ trên $[a, b]$ nên theo định lí 4.6, ta có $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

Giả sử $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Trước hết ta chứng minh rằng với một số $\varepsilon > 0$ bất kì, tồn tại một đoạn $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ sao cho

$$\beta - \alpha < \varepsilon \text{ và } f(x) < \varepsilon \text{ với mọi } x \in [\alpha, \beta].$$

Thật vậy, vì $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ nên $\inf\limits_{\Pi \in \mathcal{P}} S(\Pi) = 0$ ($\mathcal{P}$ là tập hợp các phép phân hoạch đoạn $[a, b]$). Do đó tồn tại một phép phân hoạch Π đoạn $[a, b]$ sao cho $S(\Pi) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i < \varepsilon(b - a)$ $\left(\Pi = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\},\ M_i = \sup\limits_{x \in \Delta x_i} f(x)\right)$. Tồn tại ít nhất một i sao cho $M_i < \varepsilon$, vì nếu không thì

$$S(\Pi) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \varepsilon \,.\, \Delta x_i = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon(b - a),$$

điều này mâu thuẫn với bất đẳng thức vừa nêu ở trên. Ta gọi đoạn $\Delta x_i = [x_{i-1}, x_i]$ đó là $[\alpha, \beta]$. Khi đó

$$M_i = \sup_{x \in \Delta x_i} f(x) = \sup_{x \in [\alpha, \beta]} f(x) < \varepsilon \Rightarrow f(x) < \varepsilon \text{ với mọi } x \in [\alpha, \beta].$$

Có thể lấy đoạn $[\alpha, \beta]$ sao cho $\beta - \alpha < \varepsilon$ vì, nếu cần, có thể thay đoạn này bởi một đoạn bất kì có độ dài nhỏ hơn ε chứa trong $[\alpha, \beta]$.

Theo điều vừa chứng minh, với $\varepsilon = 1$, tồn tại một đoạn $[a_1, b_1] \subset [a, b]$ sao cho

$$b_1 - a_1 < 1 \text{ và } f(x) < 1 \text{ với mọi } x \in [a_1, b_1].$$

Vì

$$0 = \int_a^b f(x)dx = \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{b_1} f(x)dx + \int_{b_1}^{b} f(x)dx \geqslant \int_{a_1}^{b_1} f(x)dx \geqslant 0$$

nên $\int_{a_1}^{b_1} f(x)dx = 0$.

Ta áp dụng điều vừa chứng minh cho hàm số f trên đoạn $[a_1, b_1]$. Với $\varepsilon = \frac{1}{2}$, tồn tại một đoạn $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ sao cho

$$b_2 - a_2 < \frac{1}{2} \text{ và } f(x) < \frac{1}{2} \text{ với mọi } x \in [a_2, b_2].$$

Bằng quy nạp, ta được một dãy đoạn $[a_n, b_n]$ có các tính chất sau :

(i) $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$

(ii) $b_n - a_n < \frac{1}{n}$

(iii) $f(x) < \frac{1}{n}$ với mọi $x \in [a_n, b_n]$.

Theo bổ đề Canto, từ (i) và (ii) suy ra rằng tồn tại một điểm duy nhất $c \in [a_n, b_n]$ với mọi n. Từ (iii) suy ra

$$0 < f(c) < \frac{1}{n} \text{ với mọi } n.$$

Điều này không thể xảy ra vì $\frac{1}{n} \leqslant f(c)$ với n đủ lớn.

Vậy $\int_a^b f(x)dx > 0$

4.9. *Định lí*. Nếu hai hàm số f và g lấy các giá trị bằng nhau tại mọi điểm của đoạn [a, b] trừ ra tại một số hữu hạn điểm $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ và một trong hai hàm số khả tích trên [a, b] thì hàm số kia cũng khả tích trên đoạn này và

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx .$$

Chứng minh. Giả sử hàm số f khả tích trên [a, b]. Khi đó $g = f + (g - f)$ và $\varphi(x) = g(x) - f(x) = 0$ với mọi $x \in [a, b] \setminus$

$\setminus\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$. Ta chứng minh φ khả tích trên [a, b] và $\int_a^b \varphi(x)\,dx = 0$. Thật vậy, đặt $L = \max\{|f(\alpha_1)|, \ldots, |f(\alpha_k)|\}$ và gọi $\{\Pi_n\}$ là một dãy chuẩn tắc bất kì những phép phân hoạch đoạn [a, b], $\sigma(\Pi_n, \xi_i)$ là tổng tích phân của φ ứng với phép phân hoạch Π_n và các điểm $\xi_i \in \Delta x_i$, $i = 1, \ldots, p_n$. Hàm số φ không đồng nhất bằng 0 trên nhiều nhất là 2k đoạn Δx_i. Do đó

$|\sigma(\Pi_n, \xi_i)| \leqslant 2Lkd(\Pi_n)$ với mọi n. Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(\Pi_n, \xi_i) = 0$.

Vậy $\int_a^b \varphi(x)\,dx = 0$.

§5. CÁC ĐỊNH LÍ VỀ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH CỦA TÍCH PHÂN

5.1. *Định lí.* Nếu hàm số f khả tích trên đoạn [a, b] và $m \leqslant f(x) \leqslant M$ với mọi $x \in [a, b]$ thì tồn tại một số $\mu \in [m, M]$ sao cho

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b - a).$$

5.1 gọi là định lí về giá trị trung bình của tích phân.

Chứng minh. Ta có

$$m(b - a) = \int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx = M(b - a).$$

Do đó

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

Số thực $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ thỏa mãn kết luận của định lí.

5.2. *Hệ quả.* Nếu f là một hàm số liên tục trên [a, b] thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in [a, b]$ sao cho

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a).$$

Chứng minh. Đặt $m = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $M = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Khi đó vì $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \in [m, M]$ nên theo định lí Bônzanô–Côsi, tồn tại ít nhất một số thực $c \in [a, b]$ sao cho $f(c) = \mu$.

5.3. *Định lí.* Giả sử f và g là hai hàm số khả tích trên đoạn [a, b]. Nếu

a) $m \leqslant f(x) \leqslant M$ với mọi $x \in [a, b]$,

b) g(x) không đổi dấu trên [a, b],

thì tồn tại ít nhất một số thực $\mu \in [m, M]$ sao cho

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

5.3 gọi là định lí về giá trị trung bình mở rộng của tích phân.

Chứng minh. Giả sử $g(x) \geqslant 0$ với mọi $x \in [a, b]$. Khi đó từ bất đẳng thức trong a) suy ra

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x) \text{ với mọi } x \in [a, b].$$

Do đó

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx. \quad (1)$$

- Nếu $\displaystyle\int_a^b g(x)dx = 0$ thì từ bất đẳng thức (1) suy ra $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Có thể lấy μ là một số bất kì của đoạn [m, M].

- Nếu $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx > 0$ thì từ (1) suy ra

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leqslant M$$

Số thực $\mu = \dfrac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$ thỏa mãn kết luận của định lí.

Trường hợp $g(x) \leqslant 0$ với mọi $x \in [a, b]$ được chứng minh tương tự.

5.4. *Hệ quả.* Giả sử f là một hàm số liên tục trên đoạn [a, b] và g là một hàm số khả tích trên [a, b]. Nếu g(x) không đổi dấu trên [a, b] thì tồn tại ít nhất một số thực $c \in [a, b]$ sao cho

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx .$$

Chứng minh. Đặt $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Khi đó, tồn tại một số $\mu \in [m, M]$ thỏa mãn đẳng thức trong b) của định lí 5.3. Vì f liên tục trên [a, b] nên, theo định lí Bônzanô – Côsi tồn tại ít nhất một số thực $c \in [a, b]$ sao cho $f(c) = \mu$. Từ đó có đẳng thức cần chứng minh.

§6. TÍCH PHÂN $\int_a^b f(x)\,dx$ VỚI $b \leqslant a$

6.1 Cho đến nay, ta chỉ xét $\int_a^b f(x)\,dx$ với $a < b$. Với $a \geqslant b$, ta có các định nghĩa sau :

a) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ với $a \in \mathbf{R}$,

b) Với $a, b \in \mathbf{R}$, $a > b$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

6.2. a) Định lí 4.2 vẫn đúng với ba số thực a, b, c sắp đặt theo một thứ tự bất kì miễn là hàm số f khả tích trên các đoạn được xét

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Thật vậy, nếu chẳng hạn $a \leqslant b \leqslant c$ thì, theo định lí 4.2 và định nghĩa 6.1, ta có

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx\ .$$

Do đó

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

b) Định lí về giá trị trung bình của tích phân cũng vẫn đúng trong các trường hợp $a \geqslant b$.

§7. NGUYÊN HÀM. QUAN HỆ GIỮA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH VÀ NGUYÊN HÀM

7.1. *Định nghĩa.* Giả sử f và F là hai hàm số xác định trên khoảng $I \subset \mathbf{R}$. Ta gọi F là một nguyên hàm của f trên I nếu

$$F'(x) = f(x) \text{ với mọi } x \in I.$$

7.2 *Định lí*. Nếu hàm số F là một nguyên hàm của hàm số f trên khoảng I thì các hàm số F + C, trong đó $C \in \mathbf{R}$ là một hằng số bất kì, là tất cả các nguyên hàm của hàm số f trên I.

Chứng minh. Ta có $[F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in I$. Vậy F + C với C là một hằng số bất kì là những nguyên hàm của hàm số f trên I.

Đảo lại, nếu hàm số G là một nguyên hàm của hàm số f trên I thì

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \text{ với mọi } x \in I.$$

Do đó $G(x) - F(x) = C$ không đổi với mọi $x \in I$. Vậy $G = F + C$.

Từ định lí trên dễ dàng suy ra

7.3 . Nếu hàm số f có nguyên hàm trên khoảng I, $x_0 \in I$ và y_0 là một số thực bất kì thì tồn tại một nguyên hàm duy nhất G của f trên I sao cho $G(x_0) = y_0$.

Quan hệ giữa tích phân xác định và nguyên hàm

7.4. Giả sử f là một hàm số khả tích trên đoạn [a, b]. Khi đó với mọi $x \in [a, b]$, f khả tích trên đoạn [a, x], tức là tồn tại tích phân $\int_a^x f(t)\,dt$.

$$[a, b] \ni x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \in \mathbf{R}$$

là một hàm số xác định trên đoạn [a, b].

7.5. *Định lí*. Nếu f là một hàm số liên tục trên đoạn [a, b] thì hàm số

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a, b],$$

là một nguyên hàm của hàm số f trên [a, b].

Chứng minh. Giả sử x là một số thực bất kì của [a, b] và h là một số thực sao cho $x + h \in [a, b]$. Khi đó

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

$$= \int_x^{x+h} f(t)\,dt\,.$$

Theo định lí về giá trị trung bình của tích phân, tồn tại c giữa x và x + h sao cho $\int_x^{x+h} f(t)\,dt = hf(c)$. Do đó

$$F(x+h) - F(x) = hf(c).$$

Với $h \neq 0$, ta có

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c) \qquad (1)$$

Khi $h \to 0$ thì $c \to x$; do đó $f(c) \to f(x)$ (vì f liên tục trên [a, b]). Vậy $F'(x) = f(x)$.

7.6. *Định lí.* Nếu f là một hàm số liên tục trên [a, b] và hàm số G là một nguyên hàm của f trên [a, b] thì

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a). \qquad (1)$$

Chứng minh. Vì $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ và G là hai nguyên hàm của hàm số f trên [a, b] nên tồn tại một hằng số C sao cho

$$F(x) = G(x) + C \text{ với mọi } x \in [a, b].$$

Đặc biệt, $F(a) = G(a) + C$. Vì $F(a) = 0$ nên $C = -G(a)$. Do đó

$$F(b) = G(b) - G(a), \text{ tức là}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

(1) gọi là công thức Niutơn–Laibnit (Newton). Người ta thường dùng kí hiệu $G(x)\Big|_a^b$ để chỉ hiệu $G(b) - G(a)$ và (1) được viết dưới dạng

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(x)\Big|_a^b .$$

Trong thực hành, như sẽ thấy, bằng những phương pháp khác nhau, người ta tính được khá nhiều nguyên hàm. Công thức Niutơn–Laibnit cho phép tính các tích phân xác định nhờ các nguyên hàm.

Ví dụ 1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

2. $$\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}.$$

7.7. ***Tích phân không xác định***

Ta biết rằng nếu f là một hàm số liên tục trên đoạn [a, b] thì hàm số $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a, b]$, là một nguyên hàm của hàm số f trên [a, b]. Vì vậy người ta dùng kí hiệu $\int f(x)\,dx$ để chỉ một nguyên hàm bất kì của hàm số f. Một nguyên hàm của hàm số f cũng được gọi là một tích phân không xác định của f.

Chú ý rằng kí hiệu $\int_a^b f(x)\,dx$ biểu thị một số thực còn kí hiệu $\int f(x)\,dx$ biểu thị vô số hàm số ; các hàm số này đôi một khác nhau một hằng số.

Từ định nghĩa của nguyên hàm suy ra

7.8. *Định lí.* **Nếu f và g là hai hàm số liên tục trên một khoảng và $\alpha \in \mathbf{R}$ là một hằng số thì**

a) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;

b) $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$.

§8. PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ. TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

8.1. Phép đổi biến số dựa trên nhận xét sau :

Giả sử I và J là hai khoảng, $\varphi : I \to J$ ($x \mapsto u = \varphi(x)$) là một hàm số có đạo hàm liên tục trên I và $f : J \to \mathbf{R}$ ($u \mapsto f(u)$) là một hàm số liên tục trên J. Nếu F là một nguyên hàm của f trên J, tức là

$\int f(u)\,du = F(u) + C$, C là một hằng số bất kì, thì $F_\circ\varphi$ là một nguyên hàm của $(f_\circ\varphi).\varphi'$ trên I, tức là

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx = F[\varphi(x)] + C\ ,\ x \in I$$

Thật vậy, ta có $F'(u) = f(u)$ với mọi $u \in J$. Do đó $\dfrac{d}{dx}F[\varphi(x)] = F'[\varphi(x)]\,\varphi'(x) = f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)$ với mọi $x \in I$.

Ví dụ 1. Tính $I(x) = \int \sin^2 x\cos x\,dx$, $x \in \mathbf{R}$.

Ta có $I(x) = \int \sin^2 x(\sin x)'dx$. Thực hiện phép đổi biến số $u = \sin x$, ta được $\int u^2\,du = \dfrac{u^3}{3} + C$. Do đó

$$I(x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C\ .$$

Trong thực hành, để cho tiện, người ta thường viết

$\int \sin^2 x\cos x\,dx = \int \sin^2 x\,d(\sin x)$. Đặt $u = \sin x$, ta được $I(x) = \int u^2\,dy = \dfrac{u^3}{3} + C = \dfrac{\sin^3 x}{3} + C$.

Chú ý rằng đây chỉ là một cách viết hình thức. Kí hiệu dx trong tích phân xác định cũng như trong tích phân không xác định không liên quan gì đến vi phân của hàm số.

Ví dụ 2. Tính $I(x) = \int \frac{dx}{(x-a)^2}$.

Ta có $d(x - a) = dx$. Đặt $u = x - a$, ta được

$$I(x) = \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^2} = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C = \frac{1}{a-x} + C.$$

8.2. Trong nhận xét 8.1, nếu ngoài các điều kiện đã nêu, φ là một song ánh và

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = G(x) + C$$

thì

$$\int f(u)du = G[\psi(u)] + C,$$

trong đó $\psi : J \to I$ là hàm số ngược của φ.

Ví dụ . Tính $I(x) = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ $(a > 0)$.

Ta thực hiện phép đổi biến số $x = \varphi(t) = a\sin t$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. Hàm số có đạo hàm $\varphi'(t) = a\cos t$ liên tục trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Hàm số I biến thành hàm số J xác định trên $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$J(t) = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\, .a\cos t\, dt = \int a^2\cos^2 t\, dt$$

$$= \frac{1}{2}a^2 \int (1 + \cos 2t)\, dt = \frac{1}{2}a^2 t + \frac{1}{2}a^2 \sin t\cos t + C.$$

Hàm số $\varphi(t) = a\sin t$ là một song ánh từ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ lên $[-a, a]$. Hàm số ngược ψ của φ là : $t = \psi(x) = \arcsin\frac{x}{a}$, $-a \leqslant x \leqslant a$. Do đó

$$I(x) = \frac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + C$$

$$= \frac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + C\,,\ x \in [-a,\ a].$$

Cũng như trong hai ví dụ trong 8.1, trong thực hành người ta thường viết một cách hình thức :

Đặt $x = a\sin t$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, ta được $dx = a\cos t dt$. Do đó

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int a\cos t \,.\, a\cos t\, dt = \ldots$$

$$= \frac{1}{2}a^2 t + \frac{1}{2}a^2 \sin t \cos t + C$$

$$= \frac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

8.3. ***Phép đổi biến số trong tích phân xác định***

Nếu $\varphi : [\alpha, \beta] \to J$ ($t \mapsto \varphi(t)$) là một hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $[\alpha, \beta]$, J là một khoảng trong $\mathbf{R}$ và $f : J \to \mathbf{R}$ một hàm số liên tục trên J thì

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, dt\ .$$

Thật vậy, gọi F là một nguyên hàm của hàm số f trên khoảng J. Khi đó theo 8.1, $F\circ\varphi$ là một nguyên hàm của hàm số $(f\circ\varphi).\ \varphi'$ trên $[\alpha, \beta]$. Theo công thức Niutơn–Laibnit, ta có

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\, \varphi'(t) dt = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx\,.$$

Ví dụ 1. Tính $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x\, dx$.

Đặt $u = \sin x$, ta được :

$$I = \int_0^1 u^2 du = \frac{u^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 2. Tính $I = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$.

Đặt $x = \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$; ta có

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2t))dt = \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin(2t)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Tích phân từng phần

Dễ dàng chứng minh được

8.4. Giả sử u và v là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng I. Khi đó

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Để dễ nhớ người ta thường viết công thức trên dưới dạng

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Từ công thức trên và công thức Niutơn–Laibnit suy ra

8.5. Giả sử u và v là hai hàm số có các đạo hàm liên tục trên đoạn [a, b]. Khi đó

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Người ta thường viết công thức trên dưới dạng

$$\int_a^b udv = uv \Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Áp dụng

8.6. *Công thức Taylo với số dư dạng tích phân*

Định lí. Nếu hàm số f có các đạo hàm liên tục đến cấp n + 1 trên đoạn [a, b] thì

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,dx. \quad (1)$$

(1) gọi là công thức Taylo với số dư dạng tích phân.

Chứng minh. Với $n = 0$, (1) trở thành

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)\,dx .$$

Đó là công thức Niutơn–Laibnit. Giả sử (1) đúng với n, tức là f có các đạo hàm liên tục đến cấp n trên [a, b] và

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)\,dx. \quad (2)$$

Ta chứng minh (1). Thật vậy, giả sử hàm số f có đạo hàm liên tục đến cấp $n + 1$ trên đoạn [a, b]. Áp dụng công thức tích phân từng phần vào tích phân ở vế phải của (2), ta được

$$\int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)\,dx = -\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x)\Big|_a^b + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,dx$$

$$= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,dx.$$

Thay vào (2), ta được (1).

8.7. *Công thức Oalit* (Wallis)

Với mỗi n, đặt $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$.

Áp dụng công thức tích phân từng phần, đặt

$u = \sin^{n-1}xdx$; $dv = \sin xdx$, ta được

$du = (n-1)\sin^{n-2}x\cos xdx$, $v = -\cos x$.

$$I_n = -\sin^{n-1}x\cos x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,(1-\sin^2 x)\,dx \text{ , hay}$$

$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$. Do đó

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} \text{ với } n \geqslant 2.$$

1) Với mọi $n \geqslant 1$,

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n}I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}I_{2n-4} = \dots =$$

$$= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}I_o\,.$$

Vì $I_o = \int_0^{\frac{\pi}{2}}dx = \frac{\pi}{2}$ nên $I_{2n} = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}\cdot\frac{\pi}{2}$ (1)

2) Với mọi $n \geqslant 1$,

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}I_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}I_{2n-3} = \dots =$$

$$= \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}I_1\,.$$

Vì $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx = 1$ nên

$$I_{2n+1} = \frac{2 . 4 . 6 \dots 2n}{1 . 3 . 5 \dots (2n+1)} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \left[\frac{1 . 3 . 5 \dots (2n-1)}{2 . 4 . 6 \dots 2n}\right]^2 (2n + 1) \frac{\pi}{2} . \qquad (3)$$

Vì $0 \leqslant \sin^{2n+1}x \leqslant \sin^{2n}x \leqslant \sin^{2n-1}x$ với mọi $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ nên

$$1 \leqslant I_{2n+1} \leqslant I_{2n} \leqslant I_{2n-1}.$$

Do đó

$$1 \leqslant \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leqslant \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \text{ với mọi } n \geqslant 1.$$

Từ đó

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1 . \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1 . 3 . 5 \dots (2n-1)}{2 . 4 . 6 \dots 2n}\right]^2 n = \frac{1}{\pi} .$$

Đẳng thức trên gọi là công thức Oalit.

B. HÀM SỐ LÔGARIT. HÀM SỐ MŨ. HÀM SỐ LŨY THỪA. CÁC HÀM SỐ HIPEBOLIC

Đại số 11 và Giải tích 12 đã giới thiệu các hàm số mũ, hàm số lôgarit và hàm số lũy thừa. Đầu tiên ta đã nghiên cứu hàm số mũ sau đó là hàm số lôgarit , hàm số ngược của hàm số mũ. Hàm số lũy thừa được định nghĩa qua hàm số mũ và hàm số lôgarit. Trong phần này hai hàm số lôgarit và hàm số mũ sẽ được trình bày theo một thứ tự khác. Cách làm này gọn, nhẹ và tiết kiệm được thời gian.

§1. HÀM SỐ LÔGARIT

1.1. *Định nghĩa.* Hàm số $x \mapsto \frac{1}{x}$ liên tục trên khoảng $(0, +\infty)$. Với mỗi $x > 0$, ta đặt

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Số $\ln x$ được gọi là lôgarit tự nhiên hoặc lôgarit nêpe của số dương x.

Từ định nghĩa suy ra ngay $\ln 1 = 0$.

1.2. *Định lí.* Hàm số $\ln : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ có đạo hàm, tăng nghiêm ngặt trên $(0, +\infty)$, nhận mọi giá trị trong $\mathbf{R}$ và có các tính chất sau :

a) $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ với mọi $x \neq 0$,

b) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, $x > 0$, $y > 0$,

c) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$, $x > 0$, $y > 0$,

d) $\ln(x^r) = r\ln x$ với mọi $x > 0$, $r \in \mathbf{Q}$.

Chứng minh. Ta có $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$ với mọi $x > 0$. Do đó hàm số ln tăng nghiêm ngặt trên khoảng $(0, +\infty)$.

a) Hiển nhiên hàm số $x \mapsto \ln|x|$ xác định với mọi $x \neq 0$.

Nếu $x > 0$ thì $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Nếu $x < 0$ thì $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$.

Vậy $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ với mọi $x \neq 0$.

b) Cố định $y > 0$ và xét hàm số $x \mapsto \ln(xy)$. Ta có

$$(\ln(xy))' = \frac{1}{xy}y = \frac{1}{x} \text{ với mọi } x > 0.$$

Do đó

$$\ln(xy) = \ln x + C,\ x > 0.$$

Với $x = 1$, ta được $C = \ln y$. Từ đó có đẳng thức cần chứng minh.

c) Trong công thức b), với $x = \frac{1}{y}$, ta có $\ln\frac{1}{y} = -\ln y$. Từ đó suy ra

$$\ln\frac{x}{y} = \ln\left(x\cdot\frac{1}{y}\right) = \ln x + \ln\frac{1}{y} = \ln x - \ln y.$$

d) Nếu n là một số **nguyên dương** thì từ b) suy ra

$$\ln x^n = \ln(\underbrace{x.x\ldots}_{n \text{ thừa số}}) = \ln x + \ln x + \ldots + \ln x = n\ln x,\ x > 0.$$

Nếu $y = \sqrt[n]{x}$, $x > 0$ thì $y^n = x$. Từ đó $n\ln y = \ln x$: do đó

$$\ln\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\ln x.$$

Nếu r là một số hữu tỉ dương, $r = \frac{p}{q}$ trong đó p, q là hai số nguyên dương và $x > 0$ thì

$$\ln(x^r) = \ln(x^{\frac{p}{q}}) = \frac{1}{q}\ln(x^p) = \frac{p}{q}\ln x = r\ln x.$$

Nếu r là một số hữu tỉ âm thì $r = -r'$ trong đó r' là một số hữu tỉ dương.

$$\ln(x^r) = \ln\left(\frac{1}{x^{r'}}\right) = -\ln(x^{r'}) = -r'\ln x = r\ln x.$$

Hàm số $x \mapsto \ln x$ không bị chặn trên $(0, +\infty)$. Thật vậy, ta có $\ln 2 > \ln 1 = 0$ và $\ln 2^n = n\ln 2$ với mọi n nguyên dương. Vì hàm số ln tăng và không bị chặn trên nên

$$\lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty.$$

Vì $\ln x = -\ln \frac{1}{x}$ với $x > 0$ nên

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty .$$

Vì ln là một hàm số liên tục trên $\mathbf{R}_+^* = (0, +\infty)$, từ đó suy ra $\ln(\mathbf{R}_+^*) = \mathbf{R}$.

1.3. *Nhận xét.* Hàm số $\ln : \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}$ là một phép đẳng cấu từ nhóm nhân $\mathbf{R}_+^*$ các số thực dương lên nhóm cộng các số thực $\mathbf{R}$.

Vì $\ln : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ là một toàn ánh tăng nghiêm ngặt nên từ 1.1.b) suy ra nhận xét trên.

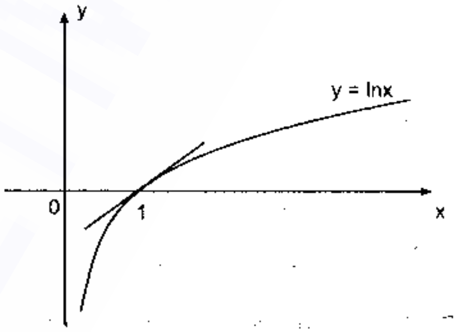
1.4. *Đồ thị của hàm số $y = \ln x$*

Bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$+\infty$

$y'' = -\frac{1}{x^2} < 0$ với mọi $x > 0$.

Hàm số là lõm trên $(0, +\infty)$.



Hình 7

1.5. *Số e*

Vì ln là một song ánh từ $(0, +\infty)$ lên $\mathbf{R}$ nên tồn tại một số dương duy nhất, kí hiệu là e, sao cho

$$\ln e = 1.$$

e gọi là cơ số của lôgarit nêpe. Đó là một số siêu việt. Lí thuyết chuỗi sẽ cho ta cách tính số e ; $e = 2{,}718281828...$

Lôgarit với cơ số a

1.6. *Định nghĩa.* Giả sử a là một số dương khác 1. Khi đó lna là một số thực khác 0. Với mỗi $x > 0$, đặt

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Hàm số $\log_a$ xác định trên $(0, +\infty)$ gọi là hàm số lôgarit với cơ số a.

Hiển nhiên $\log_a a = 1$ và $\log_a$ là một phép đẳng cấu từ nhóm nhân $\mathbf{R}_+^*$ lên nhóm cộng $\mathbf{R}$.

Từ định nghĩa trên và định lí 1.2 suy ra

1.7. a) $(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x\ln a}$, $x > 0$.

b) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $x > 0$, $y > 0$.

c) $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$, $x > 0$, $y > 0$.

d) $\log_a(x^r) = r\log_a x$, $x > 0$, $r \in \mathbf{Q}$.

1.8. *Lôgarit thập phân*

Trong tính toán người ta thường dùng lôgarit với cơ số $a = 10$.

Lôgarit cơ số 10 được gọi là lôgarit thập phân và kí hiệu là lg. Như vậy, với $x > 0$, $\lg x = \log_{10} x$.

§2. HÀM SỐ MŨ

Hàm số mũ với cơ số e

2.1 *Định nghĩa.* Ta biết rằng hàm số $\ln : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ là một phép đẳng cấu từ nhóm nhân $\mathbf{R}_+^* = (0\ \infty)$ lên nhóm cộng $\mathbf{R}$. Ánh xạ ngược $(\ln)^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$ của hàm số ln được gọi là hàm số mũ và được kí hiệu là exp.

Hiển nhiên hàm số $x \mapsto \exp x$ là một phép đẳng cấu từ nhóm cộng $\mathbf{R}$ lên nhóm nhân $\mathbf{R}_+^*$, tức là một song ánh và

$$\exp(x + y) = \exp x . \exp y \text{ với mọi } x, y \in \mathbf{R}.$$

Đó là một hàm số tăng nghiêm ngặt trên $\mathbf{R}$.

2.2. Với mọi $r \in \mathbf{Q}$, $\exp r = e^r$.

Thật vậy, từ 1.2.d) và định nghĩa của số e suy ra rằng với mọi $r \in \mathbf{Q}$,

$$\ln(\exp r) = r = r \ln e = \ln(e^r).$$

Do đó vì hàm số ln là tăng nghiêm ngặt nên

$$\exp r = e^r.$$

Điều này gợi ý ta dùng kí hiệu e^x trong đó x là một số thực bất kì để chỉ số thực exp x :

$$e^x = \exp x, \ x \in \mathbf{R}.$$

Như vậy hàm số $x \mapsto e^x$, $x \in \mathbf{R}$ là hàm số ngược của hàm số lôgarit $x \mapsto \ln x$, $x \in \mathbf{R}_+^*$.

$x \mapsto e^x$ gọi là hàm số mũ với cơ số e.

Từ định nghĩa của hàm số mũ suy ra

2.3. a) $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$ với mọi $y > 0$.

b) $e^{\ln x} = x$ với mọi $x > 0$.

c) $\ln(e^x) = x$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Vì $x \mapsto e^x$ là một hàm số tăng nghiêm ngặt xác định trên $\mathbf{R}$ và lấy mọi giá trị của khoảng $(0, +\infty)$ nên ta có

2.4 $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

2.5. *Đạo hàm của hàm số mũ*

$$(e^x)' = e^x \text{ với mọi } x \in \mathbf{R}.$$

Thật vậy, đặt $y = f(x) = e^x$, $g = f^{-1}$. Khi đó $g(y) = \ln y = x$ và

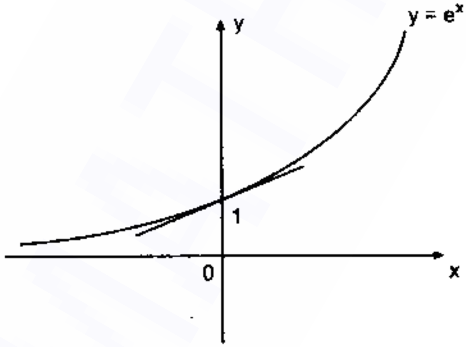
$$(e^x)' = f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{(\ln y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x .$$

2.6. Vì hàm số mũ $x \mapsto e^x$ là hàm số ngược của hàm số lôgarit $x \mapsto \ln x$ nên đồ thị của hàm số mũ đối xứng với đồ thị của hàm số lôgarit qua đường phân giác thứ nhất.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$y = e^x$	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

Vì $(e^x)'' = e^x > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $x \mapsto e^x$ là một hàm số lồi trên $\mathbb{R}$.



Hình 8

Hàm số mũ với cơ số a (a > 0)

2.7. *Định nghĩa.* Giả sử $a > 0$. Với mỗi $x \in \mathbb{R}$, đặt

$$\exp_a x = a^x = e^{x\ln a} .$$

Với $a \neq 1$, hàm số $\exp_a$ gọi là hàm số mũ với cơ số a.

- Với $a = e$, ta được hàm số mũ $x \mapsto e^x$.
- Với $r \in \mathbb{Q}$, kí hiệu a^r biểu thị một số y đã biết.

(Chẳng hạn nếu $r = \frac{p}{q}$, trong đó p và q là hai số nguyên dương thì $a^r = \sqrt[q]{a^p}$; nếu r là một số hữu tỉ âm thì $a^r = \frac{1}{a^{-r}}$).

Từ 1.2.d) suy ra $\ln y = r\ln a$. Do đó $y = e^{r\ln a}$.

2.8. Hàm số $x \mapsto a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) là hàm số ngược của hàm số $x \mapsto \log_a x$, $x > 0$.

Thật vậy, với mọi $x \in \mathbf{R}$,

$$y = a^x = e^{x\ln a} \text{ hay } \log_a y = \frac{\ln y}{\ln a} = \frac{x\ln a}{\ln a} = x .$$

Do đó

- Với $a \neq 1$, hàm số $x \mapsto a^x$ là một phép đẳng cấu từ nhóm cộng $\mathbf{R}$ lên nhóm nhân $\mathbf{R}_+^*$.
- Với $a > 1$, hàm số $x \mapsto a^x$ là tăng nghiêm ngặt trên $\mathbf{R}$.
- Với $0 < a < 1$, hàm số $x \mapsto a^x$ là giảm nghiêm ngặt trên $\mathbf{R}$.

2.9. Nếu $a > 0$, $b > 0$, $x, y \in \mathbf{R}$ thì

a) $(a^x)' = a^x\ln a$,

b) $a^{x+y} = a^x.a^y$,

c) $(ab)^x = a^x.b^x$,

d) $(a^x)^y = a^{xy}$.

Chứng minh. a) $(a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}(x\ln a)' = e^{x\ln a}\ln a =$

$$= a^x\ln a.$$

b) Ta có

$$\ln\left(a^{x+y}\right) = (x + y)\ln a,$$

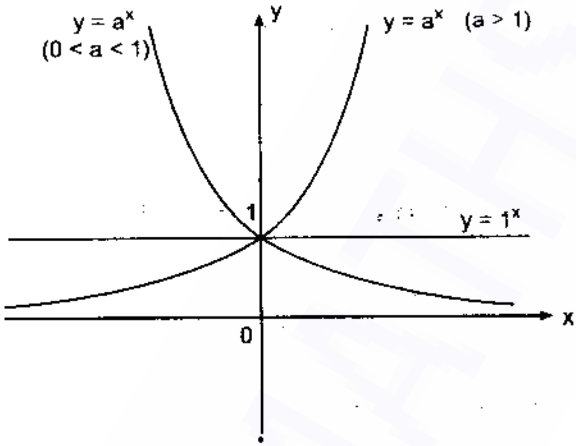
$$\ln(a^x.a^y) = \ln(a^x) + \ln(a^y) = x\ln a + y\ln a.$$

Từ đó suy ra đẳng thức trong b). Các đẳng thức còn lại được chứng minh tương tự.

2.10. ***Đồ thị của hàm số mũ***

Với mọi $x \in \mathbf{R}$, ta có $1^x = e^{x\ln 1} = e^0 = 1$.

Với $0 < a \neq 1$, đồ thị của hàm số $y = a^x$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y = \log_a x$ qua đường phân giác thứ nhất



Hình 9

2.11. *Một vài giới hạn đáng nhớ*

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 .$$

Do đó

$$\ln(1+x) \sim x \text{ khi } x \to 0.$$

b) $$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e .$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e .$$

Chứng minh. a) Đạo hàm của hàm số $f(x) = \ln x$ tại điểm $x = 1$ là $f'(1) = 1$. Do đó

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} = 1 .$$

Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.

b) Ta có

$$(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1 + x)} \text{ với mọi } x \neq 0 \text{ và } x > -1.$$

Vì hàm số mũ liên tục trên $\mathbf{R}$ nên

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x}} = e^1 = e .$$

§3. HÀM SỐ LŨY THỪA

3.1. Giả sử $\alpha \in \mathbf{R}$. Hàm số $x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ xác định với mọi $x > 0$. Tập xác định của hàm số lũy thừa với số mũ $\alpha \in \mathbf{R}$ bất kì là $(0, +\infty)$.

Ta biết rằng nếu n là một số tự nhiên thì hàm số $y = x^n$ xác định trên $\mathbf{R}$, nếu n là một số nguyên âm thì hàm số xác định với mọi $x \neq 0$.

Nếu n là một số nguyên dương lẻ thì hàm số tăng nghiêm ngặt trên $\mathbf{R}$. Hàm số ngược của nó là $y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

Nếu n là một số nguyên dương chẵn thì hàm số tăng nghiêm ngặt trên $[0, +\infty)$. Khi đó hàm thu hẹp của nó trên $[0, +\infty)$ có hàm số ngược là hàm số $y = \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$.

Ở đây ta sẽ chỉ xét hàm số lũy thừa với số mũ α bất kì trên khoảng $(0, +\infty)$. Khi đó với mọi $\alpha \neq 0$, hàm số $f(x) = x^\alpha$ có hàm số ngược $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}$.

3.2. *Đạo hàm*

Hàm số $y = x^\alpha$ có đạo hàm với mọi $x > 0$ và

$$y' = \alpha x^{\alpha - 1} .$$

Thật vậy, ta có

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} (\alpha \ln x)' = x^\alpha . \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1} .$$

3.3. *Nguyên hàm*

a) Với $\alpha \neq 1$, $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.

b) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

3.4. *Sự biến thiên và đồ thị của hàm số*

- Với $\alpha = 0$, $y = x^0 = 1$; với $\alpha = 1$, $y = x$.

Ta sẽ chỉ xét sự biến thiên của hàm số với $\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$.

a) Trường hợp $\alpha > 0$

- $y' = \alpha x^{\alpha-1} > 0$ với mọi $x > 0$. Hàm số tăng nghiêm ngặt trên $(0, +\infty)$

- $y'' = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} > 0$ với mọi $x > 0$ nếu $\alpha > 1$.

  $y'' < 0$ với mọi $x > 0$ nếu $0 < \alpha < 1$.

Vậy hàm số lồi trên $(0, +\infty)$ nếu $\alpha > 1$, lõm nếu $0 < \alpha < 1$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\alpha \ln x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} y = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{\alpha \ln x} = 0$

(vì $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$).

Vì $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$, thác triển hàm số lên $[0, +\infty)$, bằng cách đặt $f(0) = 0$, ta được một hàm số liên tục trên $[0, +\infty)$.

Vì $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^{\alpha}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x^{\alpha - 1} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{nếu } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$ nên

- Với $\alpha > 1$ đồ thị của hàm số nhận trục hoành là tiếp tuyến tại điểm 0.

- Với $0 < \alpha < 1$, trục tung là tiếp tuyến của đồ thị tại điểm 0.

Bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$
y	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

Đồ thị (xem hình 10)

b) Trường hợp $\alpha < 0$

• $y' = \alpha x^{\alpha - 1} < 0$ với mọi $x > 0$. Hàm số giảm nghiêm ngặt trên khoảng $(0, +\infty)$.

• $y'' = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha - 2} > 0$ với mọi $x > 0$. Hàm số lồi trên $(0, +\infty)$.

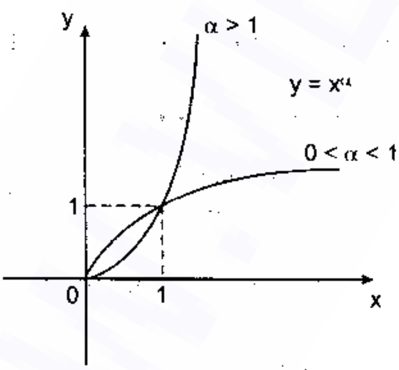
• $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\alpha \ln x} = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^+} y = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{\alpha \ln x} = +\infty$.

Đồ thị của hàm số nhận hai trục tọa độ là các đường tiệm cận.

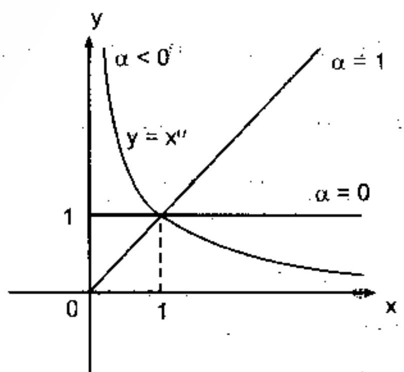
Bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$
y	‖ $+\infty$ ↘	1 ↘	0

Đồ thị (xem hình 11).



Hình 10



Hình 11

Vì với mọi $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$, hàm số $f(\alpha) = x^{\alpha}$ có hàm số ngược là $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}$ nên các đồ thị của hai hàm số $y = x^{\alpha}$ và $y = x^{\frac{1}{\alpha}}$ đối xứng với nhau qua đường phân giác thứ nhất.

§4. CÁC HÀM SỐ HIPEBÔLIC

4.1. *Định nghĩa.* Các hàm số

$$\mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ; \quad \mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\mathrm{th}x = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad ; \quad \mathrm{coth}x = \frac{1}{\mathrm{th}x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \ x \neq 0,$$

theo thứ tự, được gọi là cosinhipebôlic, sinhipebôlic, tanghipebôlic và cotanghipebôlic.

Từ định nghĩa suy ra

$$\mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}x \ ; \ \mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}x \ ; \ \mathrm{th}(-x) = -\mathrm{th}x \ ;$$
$$\mathrm{coth}(-x) = -\mathrm{coth}x, \ x \neq 0.$$

ch là một hàm số chẵn, sh, th và coth là những hàm số lẻ.

Đối với các hàm số hipebôlic, ta có các công thức tương tự như đối với các hàm số lượng giác.

4.2. Với mọi $x, y \in \mathbf{R}$,

a) $\mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2x = 1$.

b) $1 - \mathrm{th}^2x = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x}$,

c) $\mathrm{ch}(x + y) = \mathrm{ch}x\mathrm{ch}y + \mathrm{sh}x\mathrm{sh}y$,

d) $\mathrm{sh}(x + y) = \mathrm{sh}x\mathrm{ch}y + \mathrm{ch}x\mathrm{sh}y$,

e) $\mathrm{th}(x + y) = \dfrac{\mathrm{th}x + \mathrm{th}y}{1 - \mathrm{th}x\mathrm{th}y}$.

Chứng minh. a) Từ định nghĩa của shx và chx suy ra

$$\text{chx} + \text{shx} = e^x, \ \text{chx} - \text{shx} = e^{-x}.$$

Nhân hai đẳng thức với nhau ta được đẳng thức a).

b) Chia hai vế của a) cho ch^2x, ta được b).

c) $$\text{chxchy} + \text{shxshy} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$= \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} = \text{ch}(x + y).$$

Các công thức còn lại được chứng minh tương tự.

4.3. ***Đạo hàm***

Dễ dàng thử lại các công thức sau :

$$(\text{chx})' = \text{shx} \quad ; \quad (\text{shx})' = \text{chx} \ ;$$

$$(\text{thx})' = \frac{1}{\text{ch}^2x} = 1 - \text{th}^2x \ ; \quad (\text{cothx})' = -\frac{1}{\text{sh}^2x}, \ x \neq 0.$$

4.4. ***Sự biến thiên của hàm số y = shx***

• $y' = \text{chx} > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số tăng nghiêm ngặt trên $\mathbb{R}$.

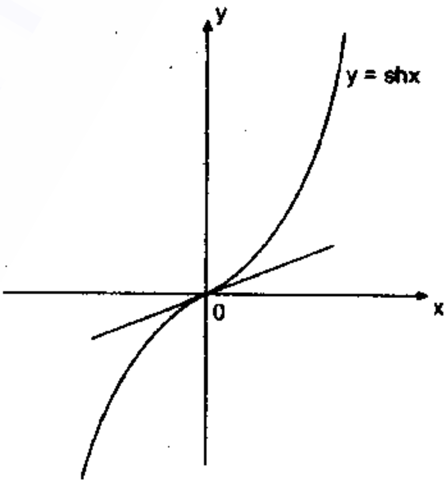
• $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$.

• $y'' = \text{shx} \geq 0$ với mọi $x \geq 0$, $y'' < 0$ với mọi $x < 0$. Hàm số lõm trên $(-\infty, 0]$ và lồi trên $[0, +\infty)$.

Bảng biến thiên. Đồ thị (h.12)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$+\infty$



Hình 12

4.5. *Sự biến thiên của hàm số $y = chx$*

$y' = shx$; $y' < 0$ với $x < 0$; $y' > 0$ với $x > 0$; $y'(0) = 0$.

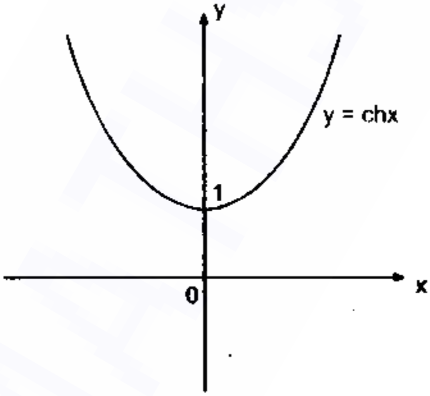
Hàm số giảm nghiêm ngặt trên $(-\infty, 0]$ và tăng nghiêm ngặt trên $[0, +\infty)$. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

$y'' = chx > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số lồi trên $\mathbb{R}$.

Bảng biến thiên. Đồ thị (h.13)

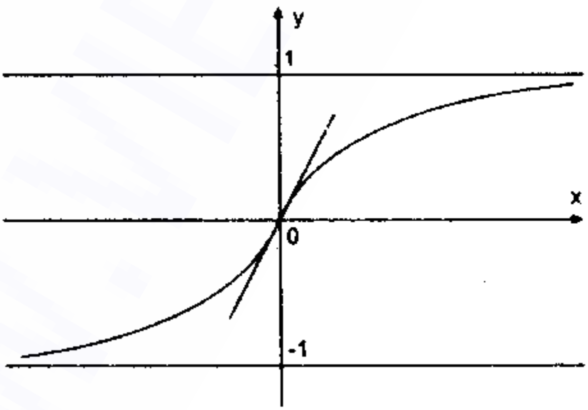
x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$+\infty$	1	$+\infty$



Hình 13

4.6. *Sự biến thiên của hàm số $y = thx$*

$y' = \dfrac{1}{ch^2x} > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số tăng nghiêm ngặt trên $\mathbb{R}$.



Hình 14

$$\lim_{x \to -\infty} y = -1 \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} y = 1$$

$y'' = (1 - th^2x)' = -2thx.\dfrac{1}{ch^2x}$, $y'' \leqslant 0$ với $x \geqslant 0$ và $y'' > 0$ với $x < 0$. Hàm số lồi trên khoảng $(-\infty, 0]$ và lõm trên khoảng $[0, +\infty)$.

Bảng biến thiên. Đồ thị (h.14)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

Các hàm số hipebôlic ngược

4.7. *Hàm số y = argshx*

• Ta biết rằng hàm số $y = shx$ liên tục tăng nghiêm ngặt trên **R** và là một song ánh từ **R** lên **R**. Do đó nó có hàm số ngược liên tục tăng nghiêm ngặt và là một song ánh từ **R** lên **R**. Hàm số này được kí hiệu là $y = argshx$.

Ta có

• $y = argshx \Leftrightarrow x = shy$.

• $(argshx)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ với mọi $x \in$ **R**. (1)

Thật vậy, ta có

$$(argshx)' = \frac{1}{(shy)'} = \frac{1}{chy}.$$

Vì $ch^2y = 1 + sh^2y = 1 + x^2$ và $chy > 0$ nên $chy = \sqrt{1 + x^2}$. Từ đó suy ra (1).

• $argshx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ với mọi $x \in$ **R**. (2)

Thật vậy, đặt $y = argshx$. Khi đó $shy = x$; $chy = \sqrt{1 + x^2}$; $e^y = shy + chy = x + \sqrt{1 + x^2}$. Do đó $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, tức là ta có (2).

• *Đồ thị* (xem hình 15a)

4.8. *Hàm số y = argchx*

• Hàm số $y = chx$ liên tục tăng nghiêm ngặt trên khoảng $[0, +\infty)$, $y(0) = 1$, $\lim_{x \to +\infty} y = +\infty$, nên nó là một song ánh từ $[0, +\infty)$ lên khoảng $[1, +\infty)$. Do đó nó có hàm số ngược liên tục và tăng nghiêm ngặt từ $[1, +\infty)$ lên $[0, +\infty)$. Hàm số ngược của hàm số $y = chx$ được kí hiệu là $y = argchx$.

Ta có

• $y = argchx \Leftrightarrow x = chy, \ y \geq 0$.

• $(argchx)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ với mọi $x > 1$. (1)

Thật vậy, ta có

$$(argchx)' = \frac{1}{(chy)'} = \frac{1}{shy}.$$

Vì $sh^2y = ch^2y - 1 = x^2 - 1$ và $shy \geq 0$ (do $y \geq 0$) nên $shy = \sqrt{x^2 - 1}$. Từ đó suy ra (1).

• $argchx = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ với mọi $x \geq 1$. (2)

Thật vậy, đặt $y = argchx$, $x \geq 1$. Khi đó $chy = x$ và $shy = \sqrt{x^2 - 1}$. Do đó $e^y = x + \sqrt{x^2 - 1}$. Từ đó suy ra (2).

• *Đồ thị* (xem hình 15b)).

4.9. *Hàm số y = argthx*

• Hàm số $y = thx$ liên tục, tăng nghiêm ngặt từ **R** lên khoảng $(-1, 1)$. Do đó nó có hàm số ngược liên tục tăng nghiêm ngặt từ khoảng $(-1, 1)$ lên **R**. Hàm số này được kí hiệu là $y = argthx$.

Ta có

• $y = argthx \Leftrightarrow x = thy$.

• $(argthx)' = \dfrac{1}{1 - x^2}$ với mọi $x \in (-1, 1)$.

Thật vậy, ta có

$$(argthx)' = \frac{1}{(thy)'} = \frac{1}{1 - th^2y} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

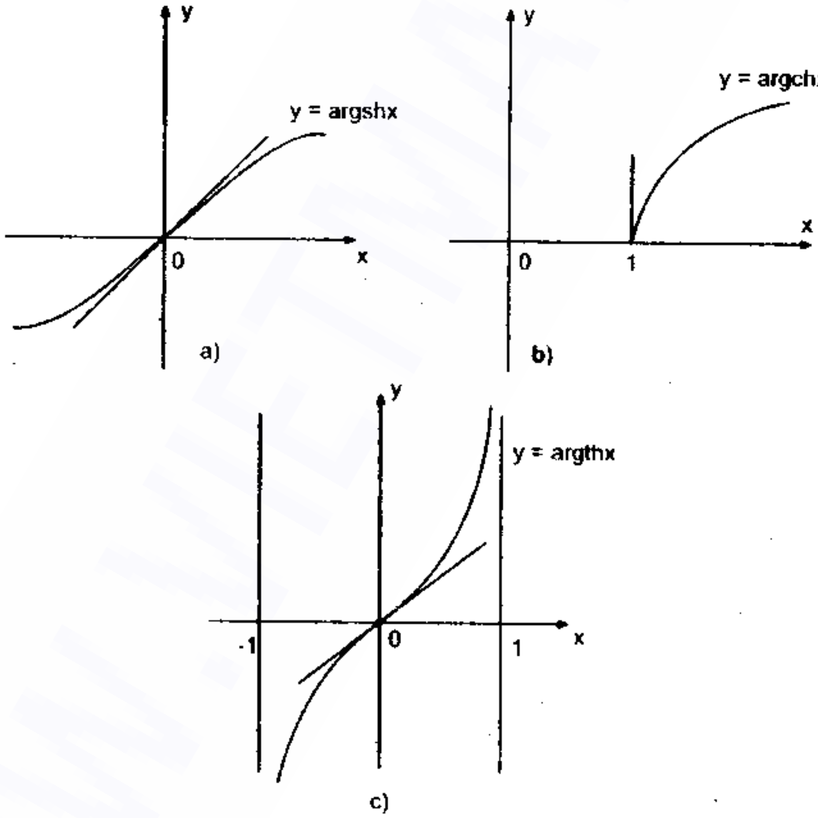
- $\text{argthx} = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ với mọi $x \in (-1, 1)$.

Thật vậy, đặt $y = \text{argthx}$, $-1 < x < 1$. Khi đó

$$x = \text{thy} = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}.$$

Từ đó $e^{2y} = \dfrac{1+x}{1-x}$; $2y = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$. Vậy $y = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$, tức là ta có đẳng thức cần chứng minh.

- *Đồ thị* (xem hình 15c)).



Hình 15

§5. CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH MŨ

Giả sử (a, b) là một khoảng, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $x_0 \in (a, b)$ (hoặc $x_0 = a$, hoặc $x_0 = b$), u và v là hai hàm số xác định trên tập hợp $(a, b) \setminus \{x_0\}$, trong đó $u(x) > 0$ với mọi $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $y = f(x) = [u(x)]^{v(x)}$ là một hàm số xác định trên $(a, b)\setminus\{x_0\}$. Giả sử

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to x_0^+;\, x\to x_0^-)}} u(x) = \alpha \qquad \text{và} \qquad \lim_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to x_0^+;\, x\to x_0^-)}} v(x) = \beta$$

Khi đó $0 \leq \alpha \leq +\infty$ và $-\infty \leq \beta \leq +\infty$.

Ta viết hàm số trên dưới dạng

$$y = e^{v(x)\ln[u(x)]}.$$

Nếu khi tìm giới hạn của hàm số $z = v(x)\ln[u(x)]$ khi $x \to x_0$ $(x \to x_0^+,\ x \to x_0^-)$, ta gặp dạng vô định $0.\infty$, tức là xảy ra một trong các trường hợp sau :

a) $\beta = 0,\ \alpha = +\infty$

b) $\beta = 0,\ \alpha = 0$

c) $\beta = \pm\infty,\ \alpha = 1$

thì ta nói rằng có dạng vô định

$$\infty^0,\quad 0^0,\quad 1^\infty.$$

Việc khử các dạng vô định này quy về việc khử dạng vô định $\frac{0}{0}$. Ta sẽ xét một số ví dụ.

Ví dụ 1. Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{tgx}$.

Ta có dạng vô định ∞^0 khi $x \to 0$. Ta viết hàm số đã cho dưới dạng $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{tgx} = e^{-tgx\ln x^2} = e^{-2tgx\ln|x|} = e^{-2z}$ với $z = tgx\ln|x|$. Khi tìm $\lim\limits_{x\to 0} z$, ta gặp dạng vô định $0.\infty$.

Áp dụng quy tắc Lôpitan, ta được

$$\lim_{x\to 0} z = \lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\cotg x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x} = 0 .$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{tg} x} = e^0 = 1$.

Ví dụ 2. Tìm $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

Ta gặp dạng vô định 0^0 khi $x \to 0^+$. Ta có $x^x = e^{x\ln x}$.

Áp dụng quy tắc Lôpitan, ta được

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$.

Ví dụ 3. Tìm $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

Ta gặp dạng vô định 1^∞ khi $x \to 1$. Ta có $x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\frac{1}{1-x}\ln x}$

Áp dụng quy tắc Lôpitan, ta được

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x\to 1} = \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1 .$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

§6. CÔNG THỨC KHAI TRIỂN HÀM SỐ LÔGARIT VÀ CÁC HÀM SỐ LIÊN QUAN

Trong mục này, ta sẽ áp dụng công thức Mac-lôranh (III.7.4) để viết công thức khai triển của hàm số lôgarit, hàm số mũ và hàm số lũy thừa.

6.1. *Hàm số $f(x) = e^x$*

Ta có $f^{(n)}(x) = e^x$ với mọi $x \in \mathbf{R}$ và với mọi n.

$f^{(n)}(0) = 1$, với mọi n. Do đó

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \qquad (1)$$

với mọi $x \in \mathbf{R}$, trong đó $0 < \theta < 1$.

6.2 *Hàm số $ln(1 + x)$*

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} = (1 + x)^{-1}$; $f''(x) = -(1 + x)^{-2}$; ...
$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n - 1)!\,(1 + x)^{-n}$. Do đó

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

với mọi $x > -1$, trong đó $0 < \theta < 1$.

6.3. *Hàm số $(1 + x)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbf{R})$*

Ta có $f'(x) = \alpha(1 + x)^{\alpha-1}$; $f''(x) = \alpha(\alpha - 1)(1 + x)^{\alpha-2}$; ...;
$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha-n}$. Do đó

$f(0) = 1$; $f'(0) = \alpha$; ... ; $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1)$.

Từ đó

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x) \qquad (1)$$

với mọi $x > -1$, trong đó

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n)}{(n+1)!} (1 + \theta x)^{\alpha - n - 1} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

(phần dư dạng Lagrăng)

hoặc

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n)}{n!} (1 - \theta')^n (1 + \theta' x)^{\alpha - n - 1} x^{n+1}$$

$$(0 < \theta' < 1)$$

(phần dư dạng Côsi)

hoặc

$$R_n(x) = o(x^n) \text{ khi } x \to 0 \text{ (phần dư dạng Iang).}$$

Nếu n là một số nguyên dương thì

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{n(n-1) \dots 1}{n!} x^n$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$ vì $R_n(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Đó là công thức khai triển nhị thức Niutơn đã biết.

Ta xét một vài trường hợp đặc biệt.

- Với $\alpha = -1$, ta có

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) \ (x \to 0).$$

- Thay x bởi $-x$, ta được

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) \ (x \to 0).$$

Ta xét thêm một ví dụ khác.

- Viết khai triển của hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ theo các lũy thừa của $x - 1$ với $n = 3$.

Đặt $y = x - 1$, ta được $\sqrt{x} = \sqrt{1 + y} = (1 + y)^{\frac{1}{2}}$.

Áp dụng công thức (1) trong 6.3 với $\alpha = \frac{1}{2}$, ta được

$$\sqrt{1 + y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{16} + o(y^3) \ (y \to 0).$$

Do đó

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{16} + o((x-1)^3) \quad (x \to 1).$$

6.4. *Tính gần đúng giá trị của hàm số*

Áp dụng công thức Taylo, có thể tính gần đúng giá trị của hàm số với độ chính xác cao tùy ý nếu số dư R_n dần đến 0 khi $n \to \infty$.

Ví dụ. Thay $x = 1$ vào công thức (1) trong 6.1, ta được

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}, \ 0 < \theta < 1. \qquad (1)$$

Trước hết, ta chứng minh $e \leq 3$.

Thật vậy, ta có $e = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (xem 2.11.b))

Áp dụng công thức khai triển nhị thức Niutơn, ta có

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n!} \frac{1}{n^n}$$

$$< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} < 3,$$

với mọi n. Từ đó suy ra $e \leq 3$. Trong (1) với $n = 6$, ta có

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{e^\theta}{7!}$$

$$e \approx 2 + 0,5 + 0,16667 + 0,04167 + 0,00833 + 0,00139$$

$$e \approx 2,71806.$$

Sai số mà ta phạm phải là $\frac{e^\theta}{7!}$, $0 < \theta < 1$. Vì $1 < e^\theta < 3$ nên $\frac{1}{7!} < \frac{e^\theta}{7!} < \frac{3}{7!}$. Từ đó suy ra

$$2,71826 < e < 2,71866.$$

e được tính với độ chính xác đến ba chữ số thập phân. Số n càng lớn, độ chính xác càng cao.

6.5. e là một số vô tỉ.

Ta chứng minh điều này bằng phản chứng. Giả sử $e = \frac{m}{n}$, trong đó m, n là hai số nguyên dương. Ta có

$$\frac{m}{n} = e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Nhân hai vế của đẳng thức trên với n!, ta được

$$m(n-1)! = \left(2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) n! + \frac{e^\theta}{n+1}.$$

Từ đó suy ra $\frac{e^\theta}{n+1}$ là một số nguyên. Vô lí !.

C. PHÉP TÍNH NGUYÊN HÀM

§1. NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ HAY GẶP

1.1. *Bảng công thức các nguyên hàm đã biết*

1. $\int 0\, dx = C$,

2. $\int 1\, dx = x + C$,

3. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$; $\alpha \neq -1$,

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$,

(Công thức 4. đúng với mọi khoảng không chứa điểm 0)

5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$,

6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$,

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$,

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$,

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$,

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$,

11. $\int e^x\, dx = e^x + C$,

12. $\int a^x\, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$,

13. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$.

14. $\int \operatorname{ch}x\, dx = \operatorname{sh}x + C$;

15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{argsh}x + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$.

1.2. Nhờ phép đổi biến số, dễ dàng chứng minh được các công thức sau :

1. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C \ (a > 0)$,

2. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C \ (a > 0)$,

3. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a}) + C \ (a > 0)$.

Ta chứng minh công thức 3.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2+1}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2+1}} =$$

$$= \ln\left(\frac{x}{\sqrt{a}} + \sqrt{\frac{x^2}{a}+1}\right) + C$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2+a}) + C.$$

- Ta biết rằng

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{argch}x + C = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C \text{ với } x > 1$$

(Xem các công thức (1) và (2) trong B.4.8).

Với $x < -1$, ta có

$$(\ln|x + \sqrt{x^2-1}|)' = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})'}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Do đó

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + C \text{ với } |x| > 1.$$

Từ đó nhờ một phép đổi biến số, dễ dàng chứng minh được rằng với $a > 0$, ta có

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a}| + C \text{ với } |x| > \sqrt{a}. \qquad (1)$$

Từ công thức 3. và (1) suy ra

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C,\ a \in \mathbf{R}.$

Hai công thức sau cũng là những công thức hay gặp trong thực hành

5. $\displaystyle\int \sqrt{a - x^2}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{a - x^2} + \frac{1}{2} a \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C,\ a > 0.$

6. $\displaystyle\int \sqrt{x^2 + a}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 + a} + \frac{1}{2} a\ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C,$ $a \in \mathbf{R}$.

Ta chứng minh công thức 5. Công thức 6 được chứng minh tương tự.

Đặt $I(x) = \int \sqrt{a - x^2}\, dx$. Ta có

$$I(x) = \int \frac{a - x^2}{\sqrt{a - x^2}} dx = a\int \frac{dx}{\sqrt{a - x^2}} + \int x \cdot \frac{-x}{\sqrt{a - x^2}} dx$$

$$= a \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + \int x\, d(\sqrt{a - x^2})$$

$$= a \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + x\sqrt{a - x^2} - I(x).$$

Từ đó suy ra công thức cần chứng minh.

§2. NGUYÊN HÀM CỦA CÁC HÀM SỐ HỮU TỈ

2.1. Ta nhắc lại rằng hàm số hữu tỉ là thương của hai đa thức $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ và một hàm số hữu tỉ bao giờ cũng biểu diễn được dưới dạng tổng của một đa thức và một số hữu hạn phân thức đơn giản, tức là những phân thức có dạng

$$\frac{A}{(x-a)^n}\ ;\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\ ,\ n \text{ nguyên dương,}$$

trong đó A, B, a, p, q là những hằng số và $p^2 - 4q < 0$.

Vì vậy việc tìm nguyên hàm của các hàm số hữu tỉ quy về việc tìm nguyên hàm của các phân thức đơn giản.

2.2. *Nguyên hàm của các phân thức đơn giản*

a) Với $n \neq 1$,

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n}\,d(x-a) = A\cdot\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C$$

$$= -\frac{A}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C\ .$$

Với $n = 1$,

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C\ .$$

b) Để tìm $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx \qquad (1)$

trước hết ta tính

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}\ ,\ a > 0.$$

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta được

$$I_n = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2 + a^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^n}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x}{2}\cdot\frac{2x}{(x^2 + a^2)^n}dx =$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x}{2}\, d\left[-\frac{1}{(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}}\right]$$

$$I_n = \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)a^2} I_{n-1}$$

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2}\cdot\frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} I_{n-1}. \qquad (2)$$

Ta biết rằng $I_1 = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C$. Nhờ công thức truy hồi (2) ta tính được I_2, I_3, ...

Trở lại nguyên hàm (1). Ta có

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}.$$

Đặt $t = x + \frac{p}{2}$, $a^2 = \frac{4q - p^2}{4}$, ta được

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n}dx = \int \frac{A\left(t - \frac{p}{2}\right) + B}{(t^2 + a^2)^n}dt =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^n} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n} \qquad (3)$$

Cả hai tích phân ở vế phải của (3) ta đều đã biết cách tính.

2.3. *Ví dụ.* Tính $I = \int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx$.

Ta biểu diễn hàm số dưới dấu tích phân dưới dạng tổng của các phân thức đơn giản

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Ta tính các hệ số A, B, C, D, E bằng phương pháp hệ số bất định

$$2x^2 + 2x + 13 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-2)(x^2+1) +$$
$$+ (Dx+E)(x-2)$$
$$= (A+B)x^4 + (-2B+C)x^3 + (2A+B-2C+D)x^2 +$$
$$+ (-2B+C-2D+E)x + A - 2C - 2E.$$

Đồng nhất các hệ số của hai đa thức ở hai vế của đồng nhất thức trên, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2B + C = 0 \\ 2A + B - 2C + D = 2 \\ -2B + C - 2D + E = 2 \\ A - 2C - 2E = 13 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta được

$$A = 1,\ B = -1,\ C = -2,\ D = -3,\ E = -4.$$

Vậy

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}$$

$$I = \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{x+2}{x^2+1}\,dx - \int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$I = \ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 2\operatorname{arctg}x - \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} - 4\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= \ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 2\operatorname{arctg}x + \frac{3}{2(x^2+1)} - 4I_2. \qquad (1)$$

Áp dụng công thức truy hồi (2) trong 2.2, ta có

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} I_1 =$$

$$= \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C .$$

Thay vào (1) và rút gọn, ta được

$$I = \frac{3-4x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \ln \frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 4\operatorname{arctg} x + C .$$

§3. TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ VÔ TỈ

Trong mục này ta sẽ chỉ ra rằng bằng một phép đổi biến số thích hợp, trong một số trường hợp, có thể biến đổi tích phân của một hàm số vô tỉ thành tích phân của một hàm số hữu tỉ. Phương pháp này gọi là hữu tỉ hóa tích phân.

3.1. Nguyên hàm

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx \text{ với } ad - bc \neq 0,$$

trong đó $(x, y) \mapsto R(x, y)$ là một hàm số hữu tỉ hai biến.

Thực hiện phép đổi biến số

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} ,$$

ta được

$$(cx + d)t^n = ax + b,$$

$$x = \frac{b - dt^n}{ct^n - a} = \varphi(t), \ \varphi \text{ là một hàm số hữu tỉ.}$$

Tích phân đã cho trở thành

$$\int R(\varphi(t), t)\varphi'(t)dt.$$

Đó là tích phân của một hàm số hữu tỉ.

Ví dụ. Tính $I = \int \frac{x + \sqrt{2x-3}}{x-1} dx$.

Đặt $t = \sqrt{2x - 3}$, ta được $x = \frac{t^2+3}{2}$, $dx = tdt$.

$$I = \int \frac{t^2+2t+3}{t^2+1} tdt = \int \left(t + 2 + \frac{2t-2}{t^2+1} \right) dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} + 2t + \ln(t^2 + 1) - 2\mathrm{arctg}t + C,$$

trong đó $t = \sqrt{2x - 3}$.

3.2. Nguyên hàm

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx ,$$

trong đó $(x, y) \mapsto R(x, y)$ là một hàm số hữu tỉ hai biến.

a) Nếu $a > 0$, ta thực hiện phép đổi biến số

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (t - x)\sqrt{a}.$$

Khi đó

$$ax^2 + bx + c = at^2 - 2atx + ax^2,$$

$$x = \frac{at^2 - c}{2at + b} = \varphi(t).$$

Tích phân đã cho trở thành

$$\int R(\varphi(t), t)\varphi'(t)dt.$$

b) Giả sử $a < 0$ Ta có $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Ta chỉ xét trường hợp $4ac - b^2 < 0$ vì nếu không thì tam thức lấy giá trị âm với mọi x. Khi đó $\lambda = \frac{4ac - b^2}{4a} > 0$. Ta thực hiện phép đổi biến số

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)t - \sqrt{\lambda}.$$

Khi đó

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \lambda = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 t^2 - 2\sqrt{\lambda}\left(x + \frac{b}{2a}\right)t + \lambda,$$

$$x = \frac{2\sqrt{\lambda}t}{t^2 - a} - \frac{b}{2a} = \varphi(t).$$

Tích phân đã cho trở thành tích phân của một hàm số hữu tỉ.

Hai phép đổi biến số nói trên gọi là những phép thế Ơle.

Ví dụ 1. Tính $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 2x}}$.

Ta có $ax^2 + bx + c = x^2 - 2x$. Vì $a = 1 > 0$ nên ta sử dụng phép đổi biến số trong a),

$$\sqrt{x^2 - 2x} = t - x.$$

Khi đó $x^2 - 2x = t^2 - 2tx + x^2$; $x = \frac{1}{2}\frac{t^2}{t-1}$;

$$dx = \frac{1}{2}\frac{t^2 - 2t}{(t-1)^2}dt ;$$

$$\sqrt{x^2 - 2x} = t - \frac{1}{2}\frac{t^2}{t-1} = \frac{1}{2}\frac{t^2 - 2t}{t-1}$$

$$I = \int \frac{2}{t^2}dt = -\frac{2}{t} + C = -\frac{2}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} + C$$

$$I = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} + C.$$

Ví dụ 2. Tính $I = \int \frac{6 - x^2}{\sqrt{4x - x^2}}dx$.

Ta có $ax^2 + bx + c = -x^2 + 4x$, $a = -1 < 0$. Ta sử dụng phép đổi biến số trong b). Ta có $-x^2 + 4x = -(x - 2)^2 + 4$. Đặt

$$\sqrt{-x^2 + 4x} = (x - 2)t - 2.$$

Khi đó $\quad -(x - 2)^2 + 4 = (x - 2)^2t^2 - 4(x - 2)t + 4$;

$$x = \frac{4t}{t^2+1} + 2 \; ; \; dx = \frac{4(1-t^2)}{(t^2+1)^2}\,dt \; ;$$

$$\sqrt{4x - x^2} = \frac{4t^2}{t^2+1} - 2 = \frac{2(t^2-1)}{t^2+1}$$

$$I = \int \left[2 - \frac{16t}{1+t^2} - \frac{16t^2}{(1+t^2)^2}\right] \frac{-2}{1+t^2}\,dt$$

$$= -4\int \frac{dt}{1+t^2} + 16\int \frac{d(1+t^2)}{(1+t^2)^2} + 32\int \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^3}\,dt$$

$$= -4\text{arctgt} - \frac{16}{1+t^2} + 32\left(\int \frac{dt}{(1+t^2)^2} - \int \frac{dt}{(1+t^2)^3}\right)$$

Áp dụng công thức (2) trong 2.2.b), ta được

$$I = \frac{4t-16}{1+t^2} - \frac{8t}{(1+t^2)^2} + C$$

với $\qquad t = \dfrac{\sqrt{4x-x^2}+2}{x-2}$.

$$I = \left(\frac{1}{2}x + 3\right)\sqrt{4x - x^2} + C.$$

c) *Chú ý.* Giả sử tam thức $ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm thực phân biệt λ và μ. Ta có

$$ax^2 + bx + c = a(x - \lambda)(x - \mu).$$

Để hữu tỉ hóa tích phân, ta có thể sử dụng phép đổi biến số sau :

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \lambda)t.$$

Khi đó $\qquad a(x - \lambda)(x - \mu) = (x - \lambda)^2t^2$

$$x = \frac{\lambda t^2 - a\mu}{t^2 - a} = \varphi(t) \;;\; \sqrt{ax^2 + bx + c} = (\varphi(t) - \lambda)t.$$

Tích phân đã cho trở thành

$$\int R(\varphi(t), (\varphi(t) - \lambda)t)\varphi'(t)dt.$$

d) Nếu $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ có dạng $\dfrac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$,

trong đó P(x) là một đa thức thì có thể tính tích phân đã cho gọn hơn nhờ nhận xét sau :

Nếu P(x) là một đa thức bậc n thì tồn tại một đa thức Q(x) bậc n − 1 và một hằng số K sao cho :

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}dx = Q(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + K\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \qquad (1)$$

Các hệ số của đa thức Q(x) và hằng số K được tính bởi phương pháp hệ số bất định sau khi lấy đạo hàm hai vế của (1).

Ta lấy lại ví dụ 2 trong 3.2.

Tính $$I = \int \frac{6 - x^2}{\sqrt{4x - x^2}}dx.$$

Ta có

$$\int \frac{6 - x^2}{\sqrt{4x - x^2}}dx = (Ax + B)\sqrt{4x - x^2} + K\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}.$$

Lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức trên, ta được

$$\frac{6 - x^2}{\sqrt{4x - x^2}} = A\sqrt{4x - x^2} + \frac{(Ax + B)(2 - x)}{\sqrt{4x - x^2}} + \frac{K}{\sqrt{4x - x^2}}.$$

$$6 - x^2 = A(4x - x^2) + (Ax + B)(2 - x) + K,$$

$$-x^2 + 6 = -2Ax^2 + (6A - B)x + 2B + K.$$

Từ đó

$$A = \frac{1}{2},\ B = 3,\ K = 0,$$

$$I = \left(\frac{1}{2}x + 3\right)\sqrt{4x - x^2} + C.$$

§4. TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ HỮU TỈ CỦA e^x

$$I = \int R(e^x)\,dx,$$

trong đó $t \mapsto R(t)$ là một hàm số hữu tỉ.

Ta có

$$I = \int \frac{R(e^x)}{e^x} e^x dx = \int \frac{R(e^x)}{e^x} d(e^x).$$

Đặt $t = e^x$, ta được $I = \int \frac{R(t)}{t} dt.$

Ví dụ. Tính $I = \int \frac{dx}{1 + e^x}$.

Ta có $\quad I = \int \frac{e^x dx}{e^x(1 + e^x)}$. Đặt $t = e^x$, ta được

$$I = \int \frac{dt}{t(1+t)} = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{1+t} = \ln \frac{t}{1+t} + C = \ln \frac{e^x}{1+e^x} + C.$$

§5. TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ HỮU TỈ CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

5.1. $I = \int R(\sin x, \cos x)dx,$

trong đó R là một hàm số hữu tỉ hai biến số.

Bao giờ ta cũng có thể hữu tỉ hóa tích phân này nhờ phép đổi biến số $t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$. Khi đó

$$x = 2\operatorname{arctg}t \ ; \ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \ ,$$

$$\sin x = \frac{2t}{2+t^2} \ ; \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \ .$$

Tích phân đã cho trở thành

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}\ ,\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\ \frac{2}{1+t^2}\ dt.$$

Ví dụ. Tính $I = \int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$.

Đặt $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, ta được

$$3\sin x + 4\cos x = \frac{6t}{1+t^2} + \frac{4(1-t^2)}{1+t^2} = \frac{-4t^2+6t+4}{1+t^2} \ .$$

$$I = \int \frac{1+t^2}{-4t^2+6t+4} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{dt}{-2t^2+3t+2} =$$

$$= \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{t+\frac{1}{2}} - \frac{1}{t-2}\right)dt.$$

$$I = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{t+\frac{1}{2}}{t-2}\right| + C = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}\right| + C.$$

Tuy nhiên trong một số trường hợp, nhờ các phép đổi biến số thích hợp, có thể giảm nhẹ tính toán.

5.2. Nếu

$$R(\sin x,\ \cos x) = \varphi(\sin x)\cos x \qquad (1)$$

trong đó φ là một hàm số hữu tỉ một biến thì thực hiện phép đổi biến số $t = \sin x$, ta được

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int \varphi(t)dt.$$

Hiển nhiên, nếu $R(\sin x, \cos x)$ có dạng (1) thì

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x). \qquad (2)$$

Đảo lại, nếu $R(\sin x, \cos x)$ thỏa mãn (2) thì $R(\sin x, \cos x)$ là một hàm số lẻ đối với $\cos x$. Do đó tồn tại hàm số hữu tỉ hai biến $(u, v) \mapsto R_1(u, v)$ sao cho

$$R(\sin x, \cos x) = R_1(\sin x, \cos^2 x)\cos x = R_1(\sin x, 1 - \sin^2 x)\cos x$$
$$= \varphi(\sin x)\cos x$$

tức là R thỏa mãn (1).

5.3. Tương tự, nếu

$$R(\sin x, \cos x) = \varphi(\cos x)\sin x \qquad (1)$$

trong đó φ là một hàm số hữu tỉ một biến thì sử dụng phép đổi biến số $t = \cos x$, ta được

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = -\int \varphi(t)dt.$$

R thỏa mãn (1) khi và chỉ khi

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x).$$

5.4. Nếu

$$R(\sin x, \cos x) = \varphi(\operatorname{tg} x) \qquad (1)$$

trong đó φ là một hàm số hữu tỉ một biến thì thực hiện phép đổi biến số $t = \operatorname{tg} x$, ta được

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int \varphi(\operatorname{tg} x)dx = \int \frac{\varphi(\operatorname{tg} x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x)dx =$$
$$= \int \frac{\varphi(t)}{1 + t^2} dt.$$

Hiển nhiên nếu R thỏa mãn (1) thì

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \qquad (2)$$

Đảo lại nếu R thỏa mãn (2) thì

$$R(\sin x, \cos x) = R(\operatorname{tg} x \cos x, \cos x) = R_1(\operatorname{tg} x, \cos x),$$

trong đó $(u, v) \mapsto R_1(u, v)$ là một hàm số hữu tỉ hai biến và

$$R_1(\text{tgx}, -\cos x) = R(\text{tgx}\,(-\cos x), -\cos x) = R(-\sin x, -\cos x) =$$

$$= R(\sin x, \cos x) = R_1(\text{tgx}, \cos x).$$

Vậy hàm số $R_1(\text{tgx}, \cos x)$ là chẵn đối với cosx. Do đó tồn tại một hàm số hữu tỉ hai biến R_2 sao cho

$$R_1(\text{tgx}, \cos x) = R_2(\text{tgx}, \cos^2 x) = R_2\left(\text{tgx}, \frac{1}{1 + \text{tgx}}\right) = \varphi(\text{tgx}).$$

Từ đó suy ra (1).

Ví dụ 1. Tính $I = \int \sin^2 x \cos^3 x dx$.

Đặt $t = \sin x$, ta có

$$I = \int \sin^2 x(1 - \sin^2 x)\cos x dx = \int t^2(1 - t^2)dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Ví dụ 2. Tính $I = \int \dfrac{dx}{\sin x \cos 2x}$

$$I = \int \frac{\sin x\, dx}{\sin^2 x \cos 2x} = \int \frac{\sin x\, dx}{(1 - \cos^2 x)(2\cos^2 x - 1)}$$

Đặt $t = \cos x$, ta được

$$I = -\int \frac{dt}{(1 - t^2)(2t^2 - 1)} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1 - t}{1 + t}\right| + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1 + t\sqrt{2}}{1 - t\sqrt{2}}\right| + C,$$

$$I = \ln\left|\text{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1 + \sqrt{2}\cos x}{1 - \sqrt{2}\cos x}\right| + C.$$

Ví dụ 3. Tính $I = \int \dfrac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$.

Dễ dàng thấy rằng hàm số dưới dấu tích phân là một hàm số hữu tỉ của tgx. Do đó ta sử dụng phép đổi biến số $t = \text{tgx}$.

$$I = \int \frac{\dfrac{dx}{\cos^2 x}}{tg^4 x \cos^4 x} = \int \frac{(t^2+1)^2}{t^4} dt = \int \left(1 + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4}\right) dt$$

$$= t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3t^3} + C.$$

$$I = tgx - 2cotgx - \frac{1}{3} cotg^3 x + C.$$

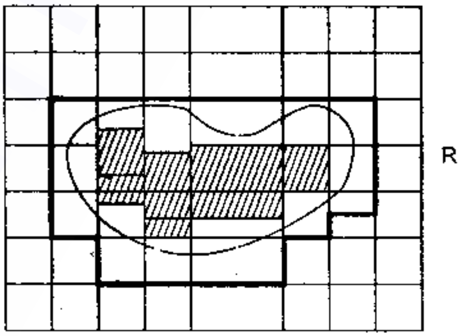
D. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

§1. DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

1.1. *Độ đo Gioócđan* (Jordan)

Giả sử D là một tập hợp bị chặn trong mặt phẳng, tức là D là một tập hợp con của một hình tròn (hoặc một hình chữ nhật) nào đó.

Ta lấy một hình chữ nhật R chứa D và chia R thành một số hữu hạn hình chữ nhật $\Delta R_1, \Delta R_2, ..., \Delta R_n$ sao cho hai hình chữ nhật khác nhau bất kì hoặc không có điểm chung hoặc chỉ có chung một đoạn thẳng. Mỗi phép chia hình chữ nhật R như vậy được gọi là một phép phân hoạch hình chữ nhật R, thường được kí hiệu là Π. Ta viết $\Pi = \{\Delta R_1, ..., \Delta R_n\}$.



Hình 16

Gọi s(Π) là tổng các diện tích các hình chữ nhật ΔR_i chứa trong D. Nếu không có một hình chữ nhật nào chứa trong D thì ta đặt s(Π) = 0. Gọi S(Π) là tổng các diện tích các hình chữ nhật ΔR_i có điểm chung với D. Hiển nhiên $s(\Pi) \leq S(\Pi)$. Tổng quát hơn, nếu Π và Π' là hai phép phân hoạch bất kì hình chữ nhật R thì $s(\Pi) \leq S(\Pi')$. Gọi $\mathcal{P}(R)$ là tập hợp các phép phân hoạch R.

$$s_D = \sup_{\Pi \in \mathcal{P}(R)} s(\Pi)$$ gọi là độ đo trong của tập hợp bị chặn D,

$$S_D = \inf_{\Pi \in \mathcal{P}(R)} S(\Pi)$$ gọi là độ đo ngoài của tập hợp bị chặn D.

Một tập hợp bị chặn D của mặt phẳng bao giờ cũng có độ đo trong và độ đo ngoài. Đó là những số hữu hạn không âm. Hiển nhiên $s_D \leq S_D$. Nếu

$$s_D = S_D$$

thì tập hợp D được gọi là đo được theo nghĩa Gioócđan và giá trị chung của hai độ đo trong và ngoài của D được gọi là độ đo Gioócđan hoặc diện tích của D, kí hiệu là $\mu(D)$ hoặc $|D|$.

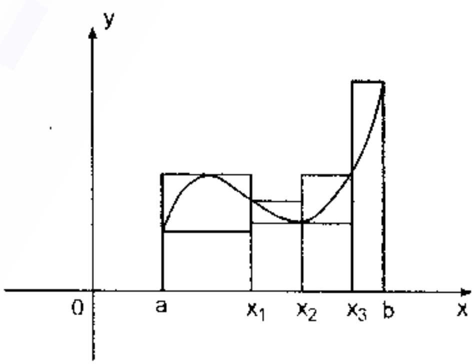
Có thể chứng minh được rằng số $\mu(D)$ được xác định như trên không phụ thuộc vào kích thước và vị trí của hình chữ nhật R và diện tích các hình tam giác, đa giác, hình tròn theo định nghĩa này là trùng với diện tích đã biết của các hình đó trong hình học sơ cấp.

1.2. *Ý nghĩa hình học của tích phân xác định*

Giả sử f là một hàm số bị chặn và không âm trên đoạn [a, b]. Gọi D là tập hợp trong mặt phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$.

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \; 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Khi đó nếu hàm số f khả tích trên [a, b] thì D



Hình 17

là một tập hợp đo được (theo nghĩa Gioócđan) và diện tích của D là

$$|D| = \int_a^b f(x)dx.$$

Thật vậy, ta biết rằng tích phân dưới của hàm số f trên [a, b] là cận trên đúng của tập hợp các tổng Đácbu dưới của f trên [a, b] (xem định lí IV.A.2.4). Mỗi tổng Đácbu dưới của f là tổng các diện tích của các hình chữ nhật chứa trong D. Do đó tích phân dưới của f trên [a, b] không vượt quá độ đo trong của D.

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqslant s_D \qquad (1)$$

Tương tự, tích phân trên của f trên [a, b] không nhỏ hơn độ đo ngoài của D

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \geqslant S_D \qquad (2)$$

Nếu f khả tích trên [a, b] thì $\underline{\int_a^b f(x)dx} = \overline{\int_a^b f(x)dx} = \int_a^b f(x)dx$.

Do đó từ (1) và (2) suy ra $s_D = S_D$. Vậy D đo được theo nghĩa Gioócđan và diện tích của D là :

$$|D| = \int_a^b f(x)dx.$$

1.3. Nếu f là một hàm khả tích trên đoạn [a, b] và $f(x) \leqslant 0$ với mọi $x \in [a, b]$ thì diện tích của tập hợp D xác định bởi $a \leqslant x \leqslant b$, $f(x) \leqslant y \leqslant 0$ là

$$|D| = -\int_a^b f(x)dx.$$

● Một cách tổng quát, nếu f là một hàm số khả tích trên [a, b] và f lấy cả các giá trị dương và âm trên [a, b] thì diện tích của tập hợp D giới hạn bởi trục hoành, đồ thị của f và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là $|D| = \int_a^b |f(x)|\, dx$.

1.4. Giả sử f và g là hai hàm số khả tích trên đoạn [a, b], $f(x) \leqslant g(x)$ trên [a, b]. Khi đó diện tích tập hợp D trong mặt phẳng giới hạn bởi các đồ thị của hai hàm số f, g và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($D = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b, f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$) là

$$|D| = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx.$$

Thật vậy, nếu $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, $x \in [a, b]$ thì

$$|D| = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx.$$

Nếu f lấy cả các giá trị âm thì lấy một số thực C sao cho $f(x) + C \geqslant 0$ với mọi $x \in [a, b]$. Khi đó

$$|D| = \int_a^b [g(x) + C - (f(x) + C)]dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx.$$

§2. THỂ TÍCH CÁC VẬT THỂ

2.1. *Độ đo Gioócđan trong không gian*

Giả sử T là một tập hợp bị chặn trong không gian, tức T là một tập hợp con của một hình cầu (hoặc một hình hộp chữ nhật) nào đó.

Lấy một hình hộp chữ nhật P chứa T và chia P thành một số hữu hạn hình hộp chữ nhật ΔP_1, ΔP_2, ..., ΔP_n sao cho hai hình hộp bất kì khác nhau hoặc không có điểm chung hoặc chỉ có chung một hình chữ nhật. Mỗi phép chia hình hộp P như vậy gọi là một phép phân hoạch hình hộp P, thường được kí hiệu bởi chữ Π. Ta viết $\Pi = \{\Delta P_1, ..., \Delta P_n\}$. Gọi $v(\Pi)$ là tổng thể tích các hình hộp chữ nhật ΔP_i chứa trong T. Nếu không có một hình hộp ΔP_i nào chứa trong T thì ta đặt $v(\Pi) = 0$. Gọi $V(\Pi)$ là tổng thể tích các hình hộp chữ nhật ΔP_i có điểm chung với T. Hiển nhiên $v(\Pi) \leq V(\Pi)$. Tổng quát hơn, nếu Π và Π' là hai phép phân hoạch hình hộp chữ nhật P, ta luôn có $v(\Pi) \leq V(\Pi')$. Gọi $\mathcal{P}(P)$ là tập hợp tất cả các phép phân hoạch hình hộp P.

$v_T = \sup\limits_{\Pi \in \mathcal{P}(P)} v(\Pi)$ gọi là độ đo trong của tập hợp bị chặn T trong không gian.

$V_T = \inf\limits_{\Pi \in \mathcal{P}(P)} V(\Pi)$ gọi là độ đo ngoài của tập hợp T.

Một tập hợp bị chặn T trong không gian bao giờ cũng có độ đo trong và độ đo ngoài. Đó là những số hữu hạn không âm. Hiển nhiên $v_T \leq V_T$. Nếu

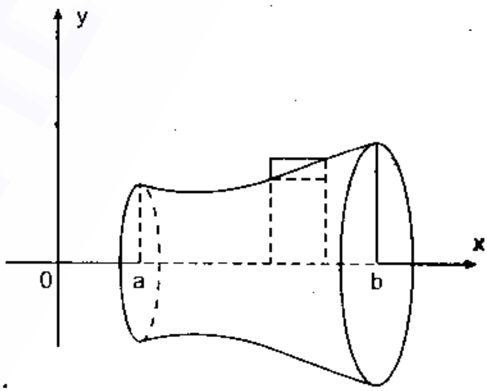
$$v_T = V_T$$

thì tập hợp T được gọi là đo được theo nghĩa Gioócđan trong không gian và giá trị chung của hai độ đo trong và ngoài của T gọi là thể tích hoặc độ đo Gioócđan của T và được kí hiệu là $|T|$ hoặc $\mu(T)$.

Số $|T|$ không phụ thuộc vào kích thước và vị trí của hình hộp chữ nhật P chứa T. Dễ dàng chứng minh được rằng thể tích của một hình trụ đứng có diện tích đáy B và chiều cao h bằng Bh.

2.2. *Thể tích khối tròn xoay*

Giả sử f là một hàm số khả tích không âm trên đoạn [a, b]. Gọi D là tập hợp trên mặt



Hình 18

phẳng Oxy giới hạn bởi trục hoành, đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$,

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Thể tích của khối tròn xoay T tạo bởi D khi quay quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Chứng minh. Gọi $\{\Pi_n\}$ là một dãy chuẩn tắc những phép phân hoạch đoạn $[a, b]$

$$\Pi_n : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{p_n} = b.$$

Đặt $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$; $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$.

Lập các tổng

$$v_n = \sum_{i=1}^{p_n} \pi m_i^2 \Delta x_i \ ; \qquad V_n = \sum_{i=1}^{p_n} \pi M_i^2 \Delta x_i \ (\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$$

v_n là tổng thể tích các hình trụ tròn xoay chứa trong T, V_n là tổng thể tích các hình trụ tròn xoay mà hợp chứa T. Các số v_n và V_n cũng chính là các tổng Đácbu dưới và trên của hàm số πf^2 trên đoạn $[a, b]$ ứng với phép phân hoạch Π_n.

Vì hàm số πf^2 khả tích trên $[a, b]$ (do f khả tích trên $[a, b]$) nên

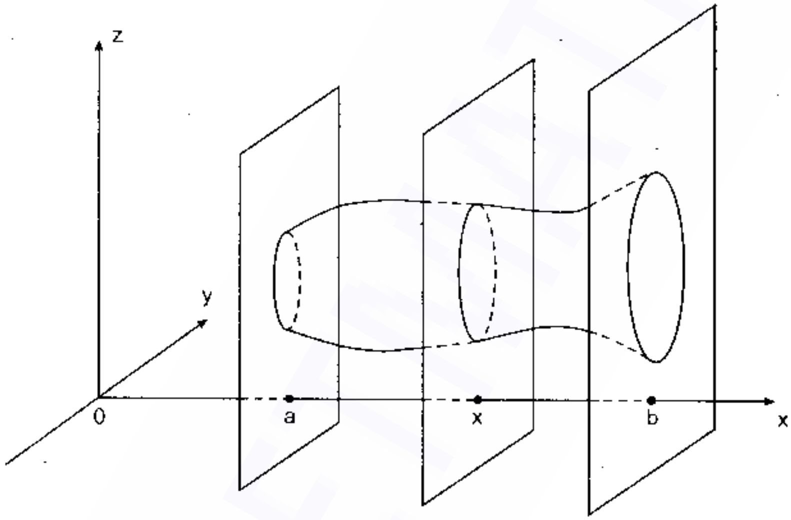
$$\lim_{n \to \infty} v_n = \lim_{n \to \infty} V_n = \int_a^b \pi f^2(x)dx.$$

Vậy khối tròn xoay T đo được theo nghĩa Gioócđan và thể tích của nó là $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$.

Tổng quát hơn, ta chứng minh được

2.3. *Định lí* (Cavaliê = Cavalieri). Giả sử V là một vật thể (tức là một tập hợp trong không gian) nằm giữa hai mặt phẳng $x = a$ và $x = b$ và với mỗi $x \in [a, b]$, mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x cắt vật thể theo một thiết diện có diện tích $S(x)$. Nếu S là một hàm số khả tích trên đoạn $[a, b]$ thì thể tích vật thể V là

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$



Hình 19

Ví dụ. Tính thể tích của elipxôit giới hạn bởi mặt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (1)$$

Mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $-a \leqslant x \leqslant a$ cắt mặt (1) theo đường cong mà phương trình là

$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1.$$

Đó là một elip mà hai bán trục là $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ và $c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi elip đó là

$$S(x) = \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Hàm số S liên tục trên [−a, a] nên khả tích trên đoạn này. Thể tích của elipxôit là :

$$V = \int_{-a}^{a} S(x)dx = \pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx$$

$$= 2\pi bc\, x\Big|_0^a - \frac{2\pi bc}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^a$$

$$V = \frac{4}{3}\pi abc.$$

§3. DIỆN TÍCH MẶT TRÒN XOAY

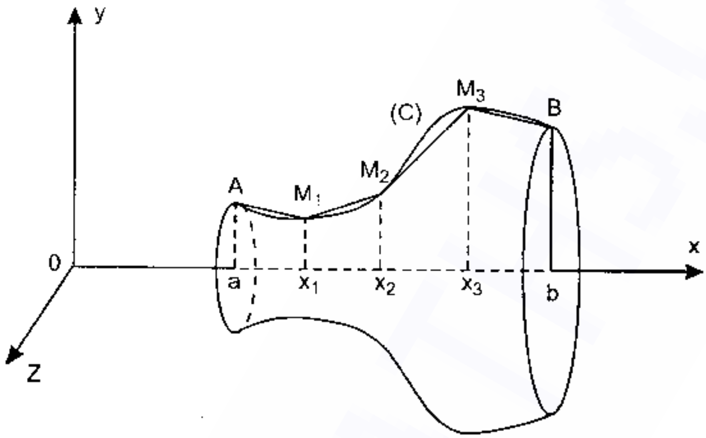
Giả sử f là một hàm số liên tục và không âm trên đoạn [a, b], (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Cho đường cong (C) quay quanh trục Ox, nó sẽ tạo nên một mặt tròn xoay. Ta sẽ định nghĩa diện tích của mặt tròn xoay và lập công thức tính diện tích đó.

3.1. *Định nghĩa diện tích mặt tròn xoay*

Gọi $\{\Pi_n\}$ là một dãy chuẩn tắc những phép phân hoạch đoạn [a, b]

$$\Pi_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{p_n} = b.$$

Các đường thẳng $x = x_i$, $i = 0,\dots, p_n$, cắt đường cong (C) tại các điểm, $A, M_1, \dots, M_{p_n-1}, B$. Đường gấp khúc



Hình 20

$AM_1 \ldots M_{p_n - 1}B$ có các đỉnh nằm trên đường cong (C) được gọi là đường gấp khúc nội tiếp trong (C). Gọi S_n là diện tích của mặt tròn xoay tạo bởi đường gấp khúc quay quanh trục Ox (S_n là tổng các diện tích các mặt xung quanh của các hình nón cụt tròn xoay). Số n càng lớn, đường gấp khúc nội tiếp trong (C) càng ép sát vào (C), mặt tròn xoay tạo bởi đường gấp khúc càng ép sát mặt tròn xoay tạo bởi (C). Một cách tự nhiên ta đi đến định nghĩa

Nếu tồn tại

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S \in \mathbf{R}$$

và S không phụ thuộc vào dãy chuẩn tắc $\{\Pi_n\}$ những phép phân hoạch đoạn [a, b] thì S gọi là diện tích của mặt tròn xoay tạo bởi đường cong (C) quay quanh trục Ox.

3.2. *Công thức tính diện tích mặt tròn xoay*

Định lí. Nếu hàm số f không âm và có đạo hàm liên tục trên đoạn [a, b] thì diện tích của mặt tròn xoay tạo bởi đồ thị (C) của f quay quanh trục Ox là

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx \qquad (1)$$

Chứng minh. Dựa vào định nghĩa 3.1, ta sẽ tính diện tích S_n của mặt tròn xoay tạo bởi đường gấp khúc nội tiếp trong (C) quay quanh trục Ox, sau đó tìm giới hạn của dãy $\{S_n\}$.

Đoạn thẳng $M_{i-1}M_i$ quay quanh trục Ox tạo nên mặt xung quanh của một hình nón cụt tròn xoay mà diện tích là

$$S_{M_{i-1}M_i} = \pi[f(x_{i-1}) + f(x_i)]M_{i-1}M_i, \ i = 1, \ldots, p_n$$

$M_{i-1}M_i$ là độ dài của đoạn thẳng nối hai điểm $M_{i-1}(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ và $M_i\ (x_i, f(x_i))$. Độ dài của đoạn thẳng đó là

$$M_{i-1}M_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$$

Theo định lí Lagrăng, tồn tại một số thực $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ sao cho

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - \xi_{i-1}) = f'(x_i)\Delta x_i.$$

Do đó

$$M_{i-1}M_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\ \Delta x_i,$$

$$S_{M_{i-1}M_i} = \pi\,[f(x_{i-1}) + f(x_i)]\ \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\ \Delta x_i.$$

và

$$S_n = \sum_{i=1}^{p_n} S_{M_{i-1}M_i} = \pi \sum_{i=1}^{p_n} [f(x_{i-1}) + f(x_i)]\ \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\ \Delta x_i.$$

Đặt

$$\sigma_n = 2\pi \sum_{i=1}^{p_n} f(\xi_i)\ \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\ \Delta x_i.$$

σ_n là tổng tích phân của hàm số $x \longmapsto 2\pi f(x)\ \sqrt{1 + f'^2(x)}$ liên tục trên đoạn $[a, b]$. Do đó

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 2\pi \int_a^b f(x)\ \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

Để chứng minh đẳng thức (1) chỉ cần chỉ ra rằng

$$\lim_{n \to \infty} (S_n - \sigma_n) = 0.$$

Thật vậy, ta có

$$S_n - \sigma_n = \pi \sum_{i=1}^{p_n} [f(x_{i-1}) + f(x_i) - 2f(\xi_i)] \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \, \Delta x_i$$

Hàm số $x \mapsto \sqrt{1 + f'^2(x)}$ liên tục trên $[a, b]$ nên bị chặn trên đoạn này hay tồn tại một số dương K sao cho

$$\sqrt{1 + f'^2(x)} \leqslant K \text{ với mọi } x \in [a, b].$$

Do đó

$$|S_n - \sigma_n| \leqslant \pi K \sum_{i=1}^{p_n} [|f(x_{i-1}) - f(\xi_i)| + |f(x_i) - f(\xi_i)|] \Delta x_i.$$

Vì f liên tục trên $[a, b]$ nên nó liên tục đều trên đoạn này. Do đó với $\varepsilon > 0$ bất kì, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$(\forall x', x'' \in [a, b]) \; |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2\pi K(b-a)}$$

Vì $\lim_{n \to \infty} d(\Pi_n) = 0$ nên tồn tại một số nguyên dương N sao cho

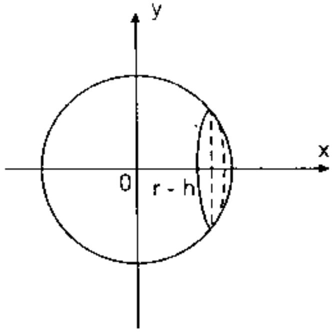
$$n \geqslant N \Rightarrow d(\Pi_n) < \delta.$$

Do đó với mọi $n \geqslant N$,

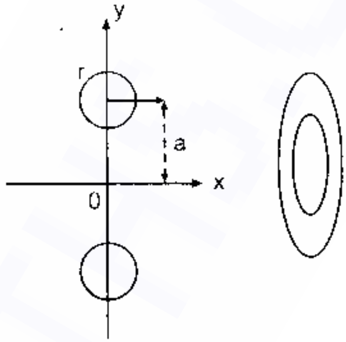
$$|S_n - \sigma_n| \leqslant \pi K \cdot 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2\pi K(b-a)} \sum_{i=1}^{p_n} \Delta x_i = \varepsilon.$$

Vậy $\quad \lim_{n \to \infty} (S_n - \sigma_n) = 0.$

Ví dụ 1. Tính diện tích chỏm cầu theo bán kính r của mặt cầu và đường cao h của chỏm cầu.



Hình 21



Hình 22

Chỏm cầu nói trên là mặt tròn xoay tạo bởi cung tròn $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $r - h \leqslant x \leqslant r$, quay quanh trục Ox (hình 21).

Diện tích chỏm cầu là : $S = 2\pi \int_{r-h}^{r} y\sqrt{1 + y'^2}\,dx$.

Ta có $\quad y' = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$. Do đó

$$S = 2\pi \int_{r-h}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,dx = 2\pi \int_{r-h}^{r} r\,dx = 2\pi rh.$$

Ví dụ 2. Cho hình tròn $x^2 + (y - a)^2 \leqslant r^2$ $(r < a)$ quay quanh trục Ox. Khối tròn xoay nhận được gọi là một hình xuyến.

Hình tròn giới hạn bởi hai nửa đường tròn $y = a + \sqrt{r^2 - x^2}$ và $y = a - \sqrt{r^2 - x^2}$.

Thể tích hình xuyến là

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (a + \sqrt{r^2 - x^2})^2 dx - \pi \int_{-r}^{r} (a - \sqrt{r^2 - x^2})^2 dx =$$

$$= 4\pi a \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = 2\pi a \,.\, \pi r^2.$$

Diện tích S của mặt xuyến là tổng các diện tích của hai mặt tròn xoay tạo bởi hai nửa đường tròn quay quanh trục Ox.

$$S = 2\pi \int_{-r}^{r} (a + \sqrt{r^2 - x^2}) \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx +$$

$$+ 2\pi \int_{-r}^{r} (a - \sqrt{r^2 - x^2}) \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx =$$

$$= 4\pi a \int_{-r}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = 2\pi a \,.\, 2\pi r$$

Chương V

KHÔNG GIAN R^p. HÀM LIÊN TỤC TRÊN KHÔNG GIAN R^p

§1. KHÔNG GIAN TUYẾN TÍNH ĐỊNH CHUẨN

1.1. *Định nghĩa*. Giả sử X là một không gian tuyến tính thực. Hàm số

$$\|\ \| : X \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto \|x\|$$

được gọi là một chuẩn trên X nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau :

a) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$,

b) $\|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|$ với mọi $\lambda \in \mathbf{R}$ và với mọi $x \in X$,

c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ với mọi $x, y \in X$.

Từ b) suy ra $\|0\| = 0$.

Không gian tuyến tính thực X cùng với một chuẩn trên nó gọi là một không gian tuyến tính định chuẩn.

1.2. Trong không gian tuyến tính định chuẩn X :

a) $\|x\| \geq 0$ với mọi $x \in X$;

b) $\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \, \|x_i\|$ với mọi $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}$; $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{X}$;

c) $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$ với mọi $x, y \in X$.

Chứng minh. a) Với mọi $x \in X$, ta có

$$0 = \|0\| = \|x + (-x)\| \leq \|x\| + \|-x\| =$$

$$= \|x\| + \|x\| = 2\|x\|$$

b) Bằng quy nạp, từ điều kiện c) trong định nghĩa 1.1. suy ra

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} y_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|y_i\| \text{ với mọi } n.$$

Do đó từ điều kiện b) trong 1.1 suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

c) Với mọi $x, y \in X$,

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|.$$

Do đó

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

Tương tự

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|.$$

Từ hai bất đẳng thức trên suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 1. **R** là một không gian tuyến tính định chuẩn với chuẩn

$$\|x\| = |x|, \ x \in \mathbf{R}.$$

Ví dụ 2. $\mathbf{R}^p$ là một không gian tuyến tính định chuẩn với chuẩn

$$x = (\xi_1, \ldots, \xi_p) \mapsto \|x\| = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_p^2}$$

Dễ dàng thấy rằng hàm số $\| \ \| : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ vừa nêu thỏa mãn hai điều kiện a), b) trong định nghĩa 1.1. Ta kiểm tra điều kiện c).

Nếu $x = (\xi_1, \ldots, \xi_p)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_p) \in \mathbf{R}^p$ thì

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

$$\Leftrightarrow \quad \Big(\sum_{i=1}^{p} (\xi_i + \eta_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{p} \xi_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{i=1}^{p} \eta_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} (\xi_i + \eta_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{p} \xi_i^2 + 2\Big(\sum_{i=1}^{p} \xi_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{p} \eta_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{p} \eta_i^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} \xi_i \eta_i \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{p} \xi_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{p} \eta_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Bất đẳng thức cuối cùng chính là bất đẳng thức Bunhiacôpxki (Буняковский) đã biết.

Ví dụ 3. Dễ dàng chứng minh được rằng các hàm số

a) $\| \ \|_1 : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$

$$x = (\xi_1, \ldots, \xi_p) \mapsto \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{p} |\xi_i|$$

và

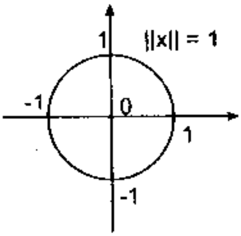
b) $\| \ \|_2 : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \|x\|_2 = \max(|\xi_1|, \ldots, |\xi_p|)$$

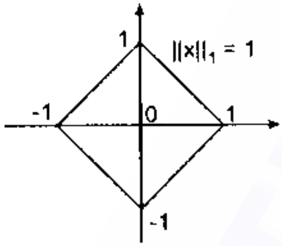
là những chuẩn trên $\mathbf{R}^p$.

1.3. Trong các ví dụ 2, 3, ta đã trang bị cho cùng một không gian $\mathbf{R}^p$ ba chuẩn khác nhau $\| \ \|$, $\| \ \|_1$ và $\| \ \|_2$. Quan hệ giữa các chuẩn đó được nêu trong các bất đẳng thức sau :

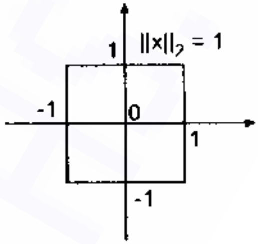
$$\forall\ x \in \mathbf{R}^p,\ \|x\|_2 \leqslant \|x\| \leqslant \|x\|_1 \leqslant p\ \|x\|_2$$



Hình 23



Hình 24



Hình 25

1.4. Giả sử $\| \ \|_1$ và $\| \ \|_2$ là hai chuẩn trên cùng một không gian tuyến tính X. Ta nói rằng hai chuẩn đó là tương đương với nhau nếu tồn tại hai số dương M và m sao cho

$$m\ \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant M\ \|x\|_1 \text{ với mọi } x \in X.$$

Từ bất đẳng thức trong 1.3 suy ra rằng ba chuẩn $\| \ \|$, $\| \ \|_1$ và $\| \ \|_2$ trên không gian tuyến tính $\mathbf{R}^p$ là tương đương với nhau.

Có thể chứng minh được rằng trên một không gian tuyến tính hữu hạn chiều mọi chuẩn đều tương đương với nhau.

§2. KHÔNG GIAN MÊTRIC

2.1. *Định nghĩa.* Giả sử X là một tập hợp. Hàm số

$$\rho : X \times X \to \mathbf{R}$$

gọi là một mêtric (hoặc hàm khoảng cách) trên X nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau :

a) $\rho(x, y) \geqslant 0$ với mọi $x, y \in X$,
$\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

b) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ với mọi $x, y \in X$,

c) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ với mọi $x, y, z \in X$.

Tập hợp X cùng với một mêtric ρ trên X gọi là một không gian mêtric.

Các phần tử của X gọi là các điểm của X. Số $\rho(x, y)$ gọi là khoảng cách giữa hai điểm x và y.

Điều kiện a) gọi là tiên đề đồng nhất, b) là tiên đề đối xứng, c) là tiên đề tam giác.

2.2. Giả sử X là một không gian tuyến tính định chuẩn. Với $x, y \in X$, đặt

$$\rho(x, y) = \|x - y\|. \qquad (1)$$

Dễ dàng thấy rằng ρ là một mêtric trên X.

Như vậy không gian tuyến tính định chuẩn là một không gian mêtric.

Mêtric (1) là bất biến đối với phép tịnh tiến tức là

$$\rho(x + a, y + a) = \rho(x, y) \text{ với mọi } x, y, a \in X.$$

Thật vậy, ta có

$\rho(x + a, y + a) = \|(x + a) - (y + a)\| = \|x - y\|$ với mọi $x, y, a \in X$.

Ta luôn có : $\|x\| = \rho(x, 0)$ với mọi $x \in X$, tức là chuẩn của phần tử x là khoảng cách từ x đến phần tử 0 của X.

Từ 2.2 suy ra

2.3. a) **R** và **C** là những không gian mêtric với mêtric

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

b) $\mathbf{R}^p$ là một không gian mêtric với các mêtric sau :

- $\rho(x, y) = \|x - y\| = \left(\sum_{i=1}^{p} (\xi_i - \eta_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

- $\rho_1(x, y) = \|x - y\|_1 = \sum_{i=1}^{p} |\xi_i - \eta_i|,$

- $\rho_2(x, y) = \|x - y\|_2 = \max(|\xi_1 - \eta_1|, \ldots, |\xi_p - \eta_p|)$,

  $x = (\xi_1, \ldots, \xi_p)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_p) \in \mathbf{R}^p$

2.4. *Không gian con*

Định nghĩa. Giả sử (X, ρ) là một không gian mêtric và L là một tập hợp con của X. Dễ dàng thấy rằng hàm số

$$\rho_L : L \times L \to \mathbf{R}$$

xác định bởi $\rho_L(x, y) = \rho(x, y)$ với $x, y \in L$,

(tức là $\rho_L = \rho\big|_{L \times L}$) là một mêtric trên L.

Không gian mêtric (L, ρ_L) gọi là một không gian con của không gian mêtric (X, ρ) ; ρ_L gọi là mêtric cảm sinh bởi mêtric ρ trên L.

§3. SỰ HỘI TỤ TRONG KHÔNG GIAN MÊTRIC

3.1. *Định nghĩa.* Giả sử (X, ρ) là một không gian mêtric, $\{x_n\}$ là một dãy phần tử của X. Điểm $x_0 \in X$ gọi là giới hạn của dãy $\{x_n\}$ nếu

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, x_0) = 0,$$

tức là với một số $\varepsilon > 0$ bất kì, tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$n \geqslant N \Rightarrow \rho(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

Ta viết

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \text{ hoặc } x_n \to x_0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Ta cũng nói rằng dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến phần tử x_0.

Hiển nhiên nếu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ và $\{x_{k_n}\}$ là một dãy con của dãy $\{x_n\}$ thì $\lim\limits_{n \to \infty} x_{k_n} = x_0$.

3.2. Dãy hội tụ trong không gian mêtric có một giới hạn duy nhất.

Chứng minh. Giả sử $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ và $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ trong không gian mêtric X. Khi đó

$$\rho(a, b) \leq \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b) \text{ với mọi } n.$$

Vì $\lim_{n\to\infty} \rho(a, x_n) = 0$ và $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, b) = 0$, từ đó suy ra $\rho(a, b) = 0 \Rightarrow a = b$.

3.3. Giả sử (X, ρ) là một không gian mêtric, $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ là hai dãy phần tử của X. Nếu

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \in X \text{ và } \lim_{n\to\infty} y_n = b \in X,$$

thì

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(a, b).$$

Chứng minh. Ta có

$$\rho(a, b) \leq \rho(a, x_n) + \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, b).$$

Do đó

$$\rho(a, b) - \rho(x_n, y_n) \leq \rho(a, x_n) + \rho(y_n, b) \text{ với mọi } n$$

Tương tự, ta có

$$\rho(x_n, y_n) - \rho(a, b) \leq \rho(x_n, a) + \rho(b, y_n) \text{ với mọi } n.$$

Từ hai bất đẳng thức trên suy ra

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(a, b)| \leq \rho(x_n, a) + \rho(y_n, b) \text{ với mọi } n.$$

Vì $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0$ và $\lim_{n\to\infty} \rho(y_n, b) = 0$ nên từ bất đẳng thức trên suy ra đẳng thức cần chứng minh.

3.4. *Sự hội tụ trong không gian* $\mathbf{R}^p$

Định lí. Giả sử $\{x_n\}$ là một dãy phần tử của không gian $\mathbf{R}^p$ và $x \in \mathbf{R}^p$:

$$x_n = (\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_p^{(n)}) \ ; \ x = (\xi_1, \dots, \xi_p).$$

Khi đó

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i, \ i = 1, \dots, p.$$

Chứng minh. Ta xét không gian $\mathbf{R}^p$ với chuẩn

$$\|x\| = \Big(\sum_{i=1}^{p} \xi_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Khi đó

$$\rho(x_n, x) = \|x_n - x\| = \Big(\sum_{i=1}^{p} (\xi_i^{(n)} - \xi_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Hiển nhiên

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (\xi_i^{(n)} - \xi_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i, \ i = 1, \dots, p.$$

Người ta nói rằng sự hội tụ trong không gian $\mathbf{R}^p$ là sự hội tụ theo các tọa độ.

Chú ý. Vì các chuẩn trên không gian $\mathbf{R}^p$ đều tương đương với nhau nên nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến x đối với một chuẩn nào đó thì dãy đó cũng hội tụ đến x đối với một chuẩn bất kì trên $\mathbf{R}^p$.

3.5.* *Sự hội tụ trong không gian vectơ hữu hạn chiều*

● Giả sử E là một không gian vectơ thực hữu hạn chiều và $(e_1, \dots, e_p)$ là một cơ sở của E. Khi đó mỗi phần tử x của E được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng

$$x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_p e_p, \ \xi_1, \dots, \xi_p \in \mathbf{R}.$$

Dễ dàng thấy rằng ánh xạ

$$(\xi_1, \dots, \xi_p) \mapsto x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_p e_p$$

là một phép đẳng cấu (tức là một song ánh tuyến tính) từ $\mathbf{R}^p$ lên E. Ba chuẩn đã biết trên $\mathbf{R}^p$ xác định ba chuẩn trên E. Các hàm số

$$x = \sum_{i=1}^{p} \xi_i e_i \mapsto \|x\| = \Big(\sum_{i=1}^{p} \xi_i^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

$$x \mapsto \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{p} |\xi_i|,$$

$$x \mapsto \|x\|_2 = \max(|\xi_1|, \dots, |\xi_p|)$$

là những chuẩn trên E. Các chuẩn trên một không gian hữu hạn chiều đều tương đương.

● Từ định lí 3.4. suy ra rằng

Nếu $\{x_n\}$ là một dãy phần tử của E và $x \in E$,

$$x_n = \xi_1^{(n)}e_1 + \xi_2^{(n)}e_2 + \dots + \xi_p^{(n)}e_p, \ n = 1, 2, \dots$$

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_p e_p,$$

thì

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i, \ i = 1, \dots, p.$$

● Giới hạn của dãy không phụ thuộc vào việc chọn cơ sở $(e_1, \dots, e_p)$.

Thật vậy, giả sử $(f_1, \dots, f_p)$ là một cơ sở khác của E và

$$x_n = \eta_1^{(n)}f_1 + \eta_2^{(n)}f_2 + \dots + \eta_p^{(n)}f_p, \ n = 1, 2, \dots,$$

$$x = \eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 + \dots + \eta_p f_p.$$

Gọi (α_{ij}) là ma trận chuyển từ cơ sở $(e_1, \dots, e_p)$ sang cơ sở $(f_1, \dots, f_p)$. Khi đó

$$\eta_i^{(n)} = \alpha_{i1}\xi_1^{(n)} + \alpha_{i2}\xi_2^{(n)} + \dots + \alpha_{ip}\xi_p^{(n)}, \ n = 1, 2, \dots,$$

$$\eta_i = \alpha_{i1}\xi_1 + \alpha_{i1}\xi_2 + \dots + \alpha_{ip}\xi_p, \ i = 1, \dots, p.$$

Do đó nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_i^{(n)} = \eta_i$, $i = 1, \dots, p$.

Thay đổi vai trò của $(e_1, \dots, e_p)$ và $(f_1, \dots, f_p)$, điều ngược lại cũng đúng.

§4. TẬP HỢP MỞ VÀ TẬP HỢP ĐÓNG

4.1 *Định nghĩa.* Giả sử (X, ρ) là một không gian mêtric, $x_0 \in X$, r là một số dương.

a) Tập hợp

$$B(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < r\}$$

gọi là hình cầu mở tâm x_0 bán kính r.

b) Tập hợp

$$B[x_0, r] = \{x \in X : \rho(x, x_0) \leqslant r\}$$

gọi là hình cầu đóng tâm x_0 bán kính r.

Trong không gian tuyến tính định chuẩn $(X, \|\ \|)$,

$$B(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\},$$

$$B[x_0, r] = \{x \in X : \|x - x_0\| \leqslant r\}.$$

- Trong không gian $\mathbf{R}$, hình cầu mở $B(x_0, r)$ là khoảng mở $(x_0 - r, x_0 + r)$, hình cầu đóng $B[x_0, r]$ là đoạn $[x_0 - r, x_0 + r]$

- Trong không gian $\mathbf{R}^2$ với chuẩn

$$x = (\xi_1, \xi_2) \mapsto \|x\| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$$

$B(x_0, r)$ là hình tròn tâm x_0 bán kính r không kể đường tròn cùng tâm và bán kính, $B[x_0, r]$ là hình tròn đóng tâm x_0 bán kính r kể cả đường tròn cùng tâm và bán kính.

- Trong không gian $\mathbf{R}^3$ với chuẩn $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mapsto \|x\| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$, $B(x_0, r)$ là hình cầu tâm x_0 bán kính r không kể mặt cầu cùng tâm và bán kính, $B[x_0, r]$ là hình cầu tâm x_0 bán kính r kể cả mặt cầu cùng tâm và bán kính.

4.2. *Định nghĩa.* Tập hợp con A của một không gian mêtric X được gọi là tập hợp mở nếu với mỗi điểm $x \in A$, tồn tại một số dương r sao cho $B(x_0, r) \subset A$.

Từ định nghĩa trên suy ra

4.3. *Định lí.* Trong một không gian mêtric X bất kì,

a) $\varnothing$ và X là những tập hợp mở,

b) Hợp của một họ bất kì những tập hợp mở là một tập hợp mở,

c) Giao của một họ hữu hạn những tập hợp mở là một tập hợp mở.

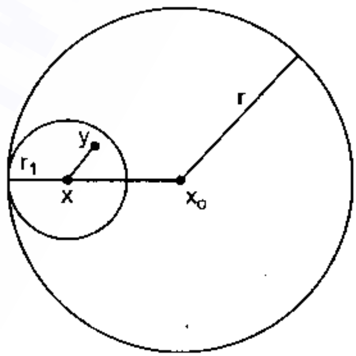
Chứng minh. a) và b) là hiển nhiên.

c) Chỉ cần chứng minh cho trường hợp hai tập hợp. Giả sử U_1 và U_2 là hai tập hợp mở trong X và x là một điểm bất kì của tập hợp $U_1 \cap U_2$. Khi đó $x \in U_1$ và $x \in U_2$. Tồn tại các số dương r_1, r_2 sao cho $B(x, r_1) \subset U_1$ và $B(x, r_2) \subset U_2$. Đặt $r = \min(r_1, r_2)$. Khi đó $B(x, r) \subset U_1 \cap U_2$. Vậy $U_1 \cap U_2$ là một tập hợp mở.

4.4. Trong một không gian mêtric bất kì, hình cầu mở là một tập hợp mở.

Chứng minh. Giả sử $B(x_0, r)$ là một hình cầu mở trong không gian mêtric X. Ta sẽ chỉ ra rằng với mỗi $x \in B(x_0, r)$, tồn tại một số dương r_1 sao cho $B(x, r_1) \subset B(x_0, r)$. Thật vậy, ta có $\rho(x, x_0) < r$. Do đó $r_1 = r - \rho(x, x_0) > 0$. Nếu $y \in B(x, r_1)$ thì $\rho(y, x) < r_1$. Do đó

$$\rho(y, x_0) \leq \rho(y, x) + \rho(x, x_0) < r_1 + \rho(x, x_0) = r.$$



Hình 26

Vậy $y \in B(x_0 ; r)$.

Tập hợp đóng

4.5. *Định nghĩa.* Tập hợp con A của một không gian mêtric X gọi là một tập hợp đóng nếu phần bù của nó $CA = X \setminus A$ là một tập hợp mở.

4.6. *Định lí.* Trong một không gian mêtric X,

a) $\varnothing$ và X là những tập hợp đóng,

b) Giao của một họ bất kì những tập hợp đóng là một tập hợp đóng,

c) Hợp của một họ hữu hạn những tập hợp đóng là một tập hợp đóng.

Chứng minh. Ta chứng minh b). Giả sử $\{F_t\}_{t \in T}$ là một họ tập hợp đóng trong X và $F = \bigcap_{t \in T} F_t$. Khi đó

$$CF = X \setminus F = X \setminus (\bigcap_{t \in T} F_t) = \bigcup_{t \in T} (X \setminus F_t) = \bigcup_{t \in T} CF_t .$$

Vì CF_t là mở với mọi $t \in T$ nên từ đẳng thức trên suy ra CF là một tập hợp mở trong X. Do đó F là một tập hợp đóng trong X.

4.7. *Định lí.* Tập hợp con A của một không gian mêtric X là một tập hợp đóng khi và chỉ khi với một dãy bất kì $\{x_n\}$ những phần tử của A,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \in X \Rightarrow x_0 \in A.$$

Chứng minh. Giả sử A là một tập hợp đóng trong X, $\{x_n\} \subset A$, $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \in X$. Ta chứng minh $x_0 \in A$ bằng phản chứng. Giả sử $x_0 \in X \setminus A$. Vì $X \setminus A$ là mở trong X nên tồn tại một số dương ε sao cho $B(x_0, \varepsilon) \subset X \setminus A$. Vì $\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, x_0) = 0$ nên tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$n \geq N \Rightarrow \rho(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

Do đó $x_n \in B(x_0, \varepsilon)$. Vậy $x_n \notin A$ với mọi $n \geq N$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Đảo lại giả sử A không phải là một tập hợp đóng trong X. Khi đó $X \setminus A$ không phải là một tập hợp mở. Do đó tồn tại một điểm $x_0 \in X \setminus A$ sao cho

$$\forall r > 0,\ B(x_0, r) \cap A \neq \varnothing.$$

Do đó

$$\forall n \text{ nguyên dương},\ B\left(x_0, \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \varnothing.$$

Vậy với mỗi n, tồn tại một $x_n \in A$ sao cho $\rho(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$. Ta được một dãy $\{x_n\} \subset A$ mà $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \notin A$.

Từ định lí trên suy ra

4.8. Trong một không gian mêtric, hình cầu đóng là một tập hợp đóng.

Chứng minh. Giả sử $B[x_0, r]$ là một hình cầu đóng trong không gian mêtric X và $\{x_n\}$ là một dãy phần tử của $B[x_0, r]$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$. Khi đó $\rho(x_n, x_0) \leqslant r$ với mọi n. Theo định lí 3.3, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = \rho(x, x_0)$. Do đó $\rho(x, x_0) \leqslant r$, tức là $x \in B[x_0, r]$. Vậy $B[x_0, r]$ là một tập hợp đóng.

Chú ý. Trong không gian mêtric có những tập hợp không mở cũng không đóng. Chẳng hạn trong không gian $\mathbf{R}$, $[a, b)$ không phải là một tập hợp mở, cũng không phải là một tập hợp đóng.

§5. LÂN CẬN CỦA MỘT ĐIỂM. BIÊN, BAO ĐÓNG VÀ PHẦN TRONG CỦA MỘT TẬP HỢP

Trong mục này chúng ta sẽ nghiên cứu một số khái niệm liên quan đến các tập hợp mở và đóng trong không gian mêtric. Ta sẽ thấy chúng rất tiện dụng và giúp ta hiểu sâu hơn về các tập hợp mở và đóng.

5.1. *Định nghĩa.* Giả sử (X, ρ) là một không gian mêtric.

a) Nếu $x \in X$ thì một tập hợp mở bất kì chứa x gọi là một lân cận của điểm x[1].

b) Điểm $x \in X$ gọi là một điểm trong của tập hợp $A \subset X$ nếu tồn tại một lân cận của x chứa trong A.

c) Điểm $x \in X$ gọi là một điểm ngoài của tập hợp $A \subset X$ nếu tồn tại một lân cận U của điểm x không chứa một điểm nào của A (tức là $U \subset CA$).

d) Điểm $x \in X$ gọi là một điểm biên của tập hợp $A \subset X$ nếu mỗi lân cận U của x đều chứa những điểm của A và những điểm không thuộc A (tức là $U \cap A \neq \emptyset$ và $U \cap CA \neq \emptyset$).

Chú ý rằng với một tập hợp $A \subset X$ cho trước và một điểm $x \in X$ cho trước chỉ có thể xảy ra một trong ba trường hợp b), c), d).

Từ định nghĩa của điểm trong suy ra rằng

Tập hợp $A \subset X$ là mở khi và chỉ khi mỗi điểm của A đều là một điểm trong của A.

Ví dụ. Trong không gian **R** cho tập hợp $A = [0, 1) \cup \{2\}$. Khi đó mỗi điểm thuộc khoảng (0, 1) đều là một điểm trong của A ; 0, 1, 2 là những điểm biên của A, mỗi điểm của tập hợp $(-\infty, 0) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$ đều là một điểm ngoài của A.

5.2. *Định nghĩa.* Giả sử A là một tập hợp con của không gian mêtric X. Tập hợp tất cả các điểm biên của A gọi là biên của tập hợp A và được kí hiệu là ∂A.

Trong ví dụ vừa nêu, ta có $\partial A = \{0, 1, 2\}$.

5.3. *Định lí.* Giả sử A là một tập hợp con của không gian mêtric X. Khi đó

a) $\partial A = \partial(X \setminus A)$;

b) ∂A là một tập hợp đóng trong X.

Chứng minh. a) suy ra ngay từ định nghĩa của biên.

(1) Trong nhiều giáo trình, lân cận của điểm x được hiểu là một tập hợp chứa một tập hợp mở chứa x.

b) Ta chứng minh $X \setminus \partial A$ là một tập hợp mở. Thật vậy, nếu $x \in X \setminus \partial A$ thì x là một điểm trong hoặc điểm ngoài của A. Giả sử x là một điểm trong của A. Khi đó tồn tại một lân cận U của x sao cho $U \subset A$. Vì mỗi điểm của U đều là một điểm trong của A nên $U \cap \partial A = \varnothing$. Do đó $U \subset X \setminus \partial A$. Vậy x là một điểm trong của $X \setminus \partial A$. Tương tự, nếu x là một điểm ngoài của A thì x cũng là một điểm trong của $X \setminus \partial A$. Vậy $X \setminus \partial A$ là một tập hợp mở.

5.4. *Định nghĩa.* Giả sử A là một tập hợp con của không gian mêtric X. Tập hợp $A \cup \partial A$ gọi là bao đóng của tập hợp A, kí hiệu là $\overline{A}$ hoặc Cl A.

$$\overline{A} = A \cup \partial A.$$

5.5. *Định lí.* **$\overline{A}$ là một tập hợp đóng và là tập hợp đóng nhỏ nhất chứa A.**

Chứng minh. Dễ dàng thấy rằng $C\overline{A}$ là một tập hợp mở. Do đó $\overline{A}$ là một tập hợp đóng.

Giả sử F là một tập hợp đóng chứa A. Nếu $x \notin F$ thì CF là một lân cận của x không có điểm chung với A. Do đó x là một điểm ngoài của A. Từ đó suy ra $\overline{A} \subset F$.

5.6. *Định lí.* **Giả sử A là một tập hợp con của không gian mêtric X và $x \in X$. Khi đó**

$x \in \overline{A}$ nếu và chỉ nếu tồn tại một dãy phần tử $\{x_n\}$ của A sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Chứng minh. Nếu $\{x_n\} \subset A$ và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$ thì từ định lí 4.6 suy ra $x \in \overline{A}$.

Đảo lại, nếu $x \in \overline{A}$ thì $x \in A$ hoặc $x \in \partial A$.

- Nếu $x \in A$ thì lấy $x_n = x$ với mọi n.
- Nếu $x \in \partial A$ thì

$$B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \varnothing \text{ với mọi n nguyên dương.}$$

Với mỗi n, lấy $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A$. Khi đó $\{x_n\} \subset A$ và $\rho(x_n, x) < \frac{1}{n}$ với mọi n. Trong cả hai trường hợp ta đều có $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$.

5.7. *Định nghĩa.* Giả sử A là một tập hợp con của không gian mêtric X. Tập hợp tất cả các điểm trong của A gọi là phần trong của tập hợp A, kí hiệu là $\mathring{A}$ hoặc Int A.

Phần trong của một tập hợp có thể bằng $\varnothing$.

5.8. *Định lí.* a) Phần trong $\mathring{A}$ của A là một tập hợp mở và là tập hợp mở lớn nhất chứa trong A.

b) $\mathring{A} = A \setminus \delta A$.

Chứng minh. Nếu $x \in \mathring{A}$ thì x là một điểm trong của A. Do đó tồn tại một lân cận U của điểm x sao cho $U \subset A$. Vì mỗi điểm của U đều là một điểm trong của A nên $U \subset \mathring{A}$. Vậy x là một điểm trong của $\mathring{A}$. Do đó $\mathring{A}$ là một tập hợp mở.

Nếu V là một tập hợp mở chứa trong A và $x \in V$ thì x là một điểm trong của A, tức là $x \in \mathring{A}$. Do đó $V \subset \mathring{A}$. Như vậy $\mathring{A}$ là tập hợp mở lớn nhất chứa trong A.

b) là hiển nhiên.

Ví dụ 1. Ta lấy lại ví dụ sau 5.1 ; $A = [0, 1) \cup \{2\}$ là một tập hợp con của không gian **R**. Dễ dàng thấy rằng

$$\mathring{A} = (0, 1) \text{ và } \overline{A} = [0, 1] \cup \{2\}.$$

Ví dụ 2. Trong không gian $\mathbf{R}^2$, hai hình tròn đóng và mở $B[x_0, r]$ và $B(x_0, r)$ đều có biên là đường tròn

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbf{R}^2 : \|x - x_0\| = r\}.$$

đều có bao đóng là $B[x_0, r]$ và phần trong là $B(x_0, r)$.

5.9. *Định nghĩa.* Tập hợp con A của một không gian mêtric X được gọi là trù mật trong X nếu $\overline{A} = X$.

Ví dụ. Tập hợp **Q** các số hữu tỉ là trù mật trong không gian **R**.

§6. TIÊU CHUẨN HỘI TỤ CỦA DÃY ĐIỂM VÀ BỔ ĐỀ VỀ DÃY HÌNH CẦU ĐÓNG BAO NHAU TRONG KHÔNG GIAN $\mathbf{R}^p$

Trong mục này ta sẽ mở rộng tiêu chuẩn Côsi và bổ đề Canto về dãy đoạn bao nhau trong không gian **R** sang không gian $\mathbf{R}^p$.

6.1. *Định nghĩa.* Dãy phần tử $\{x_n\}$ của không gian mêtric X gọi là một dãy Côsi (hoặc dãy cơ bản) nếu

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \rho(x_m, x_n) = 0,$$

tức là với một số dương ε bất kì, tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$(\forall\, m, n \in \mathbf{N}^*)\ m \geqslant N,\ n \geqslant N \Rightarrow \rho(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

6.2. Dãy hội tụ trong một không gian mêtric bất kì là một dãy Côsi.

Chứng minh. Giả sử $\{x_n\}$ là một dãy phần tử của không gian mêtric X, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$. Khi đó với $\varepsilon > 0$ bất kì, tồn tại một số N nguyên dương sao cho

$$n \geqslant N \Rightarrow \rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Do đó

$$m \geqslant N,\ n \geqslant N \Rightarrow \rho(x_m, x_n) \leqslant \rho(x_m, x) + \rho(x, x_n) < \varepsilon.$$

Vậy $\{x_n\}$ là một dãy Côsi.

Chú ý. Không phải trong một không gian mêtric bất kì, mệnh đề đảo đều đúng. Chẳng hạn trong không gian **Q** các số hữu tỉ, không gian con của không gian mêtric **R**, dãy $\{x_n\}$ với

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,\ n = 1, 2, \ldots$$

là một dãy Côsi nhưng không hội tụ. Thật vậy, ta có

$$\lim_{n\to\infty} x_n = e \in \mathbf{R} \text{ nhưng } e \notin \mathbf{Q}.$$

Tuy nhiên, trong nhiều không gian mêtric, mọi dãy Côsi đều hội tụ. Ta đã biết trong không gian $\mathbf{R}$ điều đó đúng. Định lí sau cho thấy đối với không gian $\mathbf{R}^p$ với $p \geqslant 2$, điều đó vẫn đúng.

6.3. ***Tiêu chuẩn Côsi trong không gian*** $\mathbf{R}^p$

Định lí. Dãy phần tử $\{x_n\}$ của không gian $\mathbf{R}^p$ hội tụ khi và chỉ khi nó là một dãy Côsi.

Chứng minh. Điều kiện cần suy ra từ 6.2. Ta chứng minh điều kiện đủ. Giả sử $\{x_n\}$ là một dãy Côsi trong $\mathbf{R}^p$.

$$x_n = (\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_p^{(n)}),\ n = 1, 2, \dots$$

Cho $\varepsilon > 0$ bất kì. Tồn tại một số N nguyên dương sao cho

$$m \geqslant N,\ n \geqslant N \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

tức là

$$\left((\xi_1^{(m)} - \xi_1^{(n)})^2 + \dots + (\xi_p^{(m)} - \xi_p^{(n)})^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Từ đó suy ra

$$|\xi_1^{(m)} - \xi_1^{(n)}| < \varepsilon, \dots, |\xi_p^{(m)} - \xi_p^{(n)}| < \varepsilon$$

với mọi $m \geqslant N$, $n \geqslant N$. Vậy

$$\{\xi_1^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}, \dots, \{\xi_p^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \text{ là những dãy Côsi trong } \mathbf{R}.$$

Theo tiêu chuẩn Côsi trong $\mathbf{R}$, các dãy này hội tụ :

$$\lim_{n\to\infty} \xi_1^{(n)} = \xi_1 \in \mathbf{R}\ ;\ \dots\ ;\ \lim_{n\to\infty} \xi_p^{(n)} = \xi_p \in \mathbf{R}$$

Đặt $x = (\xi_1, \dots, \xi_p)$, ta có $x \in \mathbf{R}^p$. Theo định lí 3.4, từ đó suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Vậy dãy $\{x_n\}$ hội tụ trong $\mathbf{R}^p$.

Nhờ một tính chất quan trọng của không gian $\mathbf{R}^p$ được đặc trưng bởi định lí 6.3, có thể mở rộng bổ đề Canto trong không gian $\mathbf{R}$ sang không gian $\mathbf{R}^p$.

6.4. *Bổ đề Canto* (về dãy hình cầu đóng bao nhau).

Giả sử $\{B[a_n, r_n]\}$ là một dãy hình cầu đóng bao nhau trong không gian $\mathbf{R}^p$.

$$B[a_1, r_1] \supset B[a_2, r_2] \supset \ldots$$

và $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. Khi đó các hình cầu có một điểm chung duy nhất.

Chứng minh. Dãy $\{a_n\}$ các tâm hình cầu là một dãy Côsi trong $\mathbf{R}^p$. Thật vậy, nếu $m \geqslant n$ thì $B[a_m, r_m] \subset B[a_n, r_n]$. Do đó $\|a_m - a_n\| \leqslant r_n$. Vì $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, từ đó suy ra $\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \|a_m - a_n\| = 0$. Theo tiêu chuẩn Côsi, dãy $\{a_n\}$ hội tụ trong không gian $\mathbf{R}^p$: $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbf{R}^p$. Ta chứng minh a là điểm chung của mọi hình cầu $B[a_n, r_n]$. Thật vậy, với mỗi n, $\{a_{n+k}\}_{k=1}^{\infty}$ là một dãy điểm của tập hợp đóng $B[a_n, r_n]$. Vì $\lim_{k\to\infty} a_{n+k} = a$ nên từ đó suy ra $a \in B[a_n, r_n]$.

Điểm a là điểm chung duy nhất của các hình cầu. Thật vậy, nếu b cũng là một điểm chung của các hình cầu đó thì

$$\rho(a, b) \leqslant \rho(a, a_n) + \rho(a_n, b) \leqslant r_n + r_n = 2r_n \text{ với mọi } n.$$

Từ đó suy ra $\rho(a, b) = 0$; do đó $a = b$.

§7. TẬP HỢP COMPẮC

7.1. *Tập hợp bị chặn*

Định nghĩa. Tập hợp con A của một không gian mêtric X được gọi là tập hợp bị chặn nếu nó là một tập hợp con của một hình cầu nào đó.

Dễ dàng thấy rằng nếu A là một tập hợp bị chặn và x_0 là một điểm bất kì của X thì có thể tìm được một hình cầu (đóng hoặc mở) tâm x_0 chứa A. Trong không gian tuyến tính định chuẩn người ta thường chọn điểm 0 là tâm của hình cầu chứa A.

Như vậy nếu A là một tập hợp con của không gian tuyến tính định chuẩn X thì A là bị chặn nếu tồn tại một số $M > 0$ sao cho $A \subset B[0, M]$, tức là

$$\forall\ x \in A,\ \|x\| \leqslant M.$$

Hiển nhiên tập hợp con của một tập hợp bị chặn là bị chặn và hợp của một họ hữu hạn tập hợp bị chặn là một tập hợp bị chặn.

7.2. *Định nghĩa.* Tập hợp con A của một không gian mêtric X được gọi là tập hợp compắc nếu một dãy bất kì $\{x_n\}$ những phần tử của A đều có một dãy con $\{x_{k_n}\}$ hội tụ đến một phần tử của A.

Từ bổ đề Bônzanô – Vâyơxtrat trong không gian $\mathbf{R}$ suy ra.

Một tập hợp đóng và bị chặn trong $\mathbf{R}$ là một tập hợp compắc trong $\mathbf{R}$.

Đặc biệt đoạn $[a, b]$ là một tập hợp compắc trong $\mathbf{R}$. Ta sẽ chỉ ra rằng tập hợp đóng và bị chặn trong không gian $\mathbf{R}^p$ là một tập hợp compắc. Định lí sau đây cho thấy mệnh đề đảo đúng cho một không gian mêtric bất kì.

7.3. *Định lí.* Trong một không gian mêtric X bất kì, tập hợp compắc $A \subset X$ là đóng và bị chặn.

Chứng minh. Giả sử $\{x_n\} \subset A$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$. Vì A là một tập hợp compắc nên tồn tại một dãy con $\{x_{k_n}\}$ của dãy $\{x_n\}$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = y \in A$. Ta cũng có $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = x$. Từ đó suy ra $x = y$. Vậy $x \in A$; do đó A là một tập hợp đóng.

Ta chứng minh A là một tập hợp bị chặn bằng phản chứng. Giả sử A không bị chặn. Lấy $x_1 \in A$. Khi đó $A \not\subset B(x_1, 1)$. Do đó tồn tại $x_2 \in A$ sao cho $\rho(x_2, x_1) \geqslant 1$. Ta cũng có $A \not\subset B(x_1, 1) \cup B(x_2, 1)$. Do đó tồn tại một phần tử $x_3 \in A$ sao cho $\rho(x_3, x_1) \geqslant 1$ và $\rho(x_3, x_2) \geqslant 1$. Bằng quy nạp ta được một dãy $\{x_n\}$ phần tử của A sao cho $\rho(x_m, x_n) \geqslant 1$ với mọi $m \neq n$. Hiển nhiên dãy $\{x_n\}$ không có bất cứ một dãy con nào hội tụ. Điều này mâu thuẫn với giả thiết A là compắc.

7.4. *Định lí.* Tập hợp A ⊂ $\mathbf{R}^p$ là compắc khi và chỉ khi A là đóng và bị chặn.

Chứng minh. Điều kiện cần là hệ quả của 7.3. Ta chứng minh điều kiện đủ cho trường hợp p = 2. (Với p > 2, cách chứng minh không có gì thay đổi, chỉ có điều là việc sử dụng các kí hiệu có đôi chút cồng kềnh hơn). Giả sử A là một tập hợp đóng và bị chặn trong không gian $\mathbf{R}^p$. Khi đó tồn tại một số M sao cho

$$\|x\| \leqslant M \text{ với mọi } x \in A.$$

Giả sử $\{x_n\} \subset A$. Đặt $x_n = (\xi_n, \eta_n)$, ta có

$$|\xi_n| \leqslant \|x_n\| \leqslant M \text{ và } |\eta_n| \leqslant M \text{ với mọi } n.$$

$\{\xi_n\}$ là một dãy số thực bị chặn. Theo định lí Bônzanô – Vâyơxtrat, tồn tại một dãy con $\{\xi_{j_n}\}$ của dãy $\{\xi_n\}$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_{j_n} = \xi \in \mathbf{R}$. Tương tự, vì dãy $\{\eta_{j_n}\}$ bị chặn nên nó có một dãy con $\{\eta_{k_{j_n}}\}$ hội tụ : $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_{k_{j_n}} = \eta \in \mathbf{R}$. Dãy $\{x_{k_{j_n}}\} = \{(\xi_{k_{j_n}}, \eta_{k_{j_n}})\}$ là một dãy con của dãy $\{x_n\}$. Điểm $x = (\xi, \eta)$ là một phần tử của $\mathbf{R}^2$. Theo định lí 3.4, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_{j_n}} = x$. Vì $\{x_{k_{j_n}}\} \subset A$ và A là một tập hợp đóng, từ đó suy ra $x \in A$. Vậy A là một tập hợp compắc.

Điểm tụ. Tập hợp dẫn xuất

7.5. *Định nghĩa.* Giả sử A là một tập hợp con của không gian mêtric X. Điểm $x_o \in X$ gọi là một điểm tụ của A nếu một lân cận bất kì của điểm x_o đều chứa ít nhất một điểm của A khác x_o.

Điều kiện nêu trong định nghĩa tương đương điều kiện sau :

Một lân cận bất kì của điểm x_o chứa vô số phần tử của A.

Tập hợp tất cả các điểm tụ của tập hợp A được gọi là tập hợp dẫn xuất của tập hợp A, kí hiệu là A'.

Chú ý rằng định nghĩa II.3.4 là một trường hợp đặc biệt của định nghĩa này. Điểm $x_0 \in A$ gọi là một điểm cô lập của A nếu $x_0 \notin A'$. Hiển nhiên $x_0 \in A$ là một điểm cô lập của A khi và chỉ khi tồn tại một lân cận U của x_0 sao cho

$$U \cap A = \{x_0\}.$$

Ví dụ. Trong **R** cho $A = [0, 1) \cup \{2\}$. Khi đó $A' = [0, 1]$ và 2 là điểm cô lập của A.

7.6. *Định lí.* Điểm $x_0 \in X$ là một điểm tụ của tập hợp A trong không gian mêtric X khi và chỉ khi tồn tại một dãy $\{x_n\}$ đôi một khác nhau của A sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Chứng minh. Hoàn toàn tương tự như chứng minh định lí II.3.5.

7.7. *Định lí.* Tập hợp con vô hạn A của một tập hợp compắc K trong không gian mêtric có ít nhất một điểm tụ.

Chứng minh. Gọi $\{x_n\}$ là một dãy phần tử đôi một khác nhau của A. Khi đó tồn tại một dãy con $\{x_{k_n}\}$ của dãy đã cho sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = x_0 \in K$. Theo định lí 7.6, x_0 là một điểm tụ của A.

7.8. *Hệ quả* (Định lí Bônzanô – Vâyơxtrat trong không gian $\mathbf{R}^p$)

Tập hợp A vô hạn bị chặn trong không gian $\mathbf{R}^p$ có ít nhất một điểm tụ.

Chứng minh. A là một tập hợp con của một hình cầu đóng $B[x_0, r]$ trong $\mathbf{R}^p$. Theo định lí 7.4, $B[x_0, r]$ là một tập hợp compắc. Do đó từ định lí 7.7 suy ra điều cần chứng minh.

Định lí Haino – Bôren (Heine – Borel).

Định lí sau đây cho ta một tính chất đặc trưng của tập hợp compắc. Trong tôpô đại cương người ta lấy tính chất này làm định nghĩa của tập hợp compắc. Trước hết ta giới thiệu một vài thuật ngữ sẽ được đề cập đến trong định lí.

7.9. Giả sử A là một tập hợp con của không gian X và $\{E_t\}_{t \in T}$ là một họ tập hợp con của X. Họ $\{E_t\}_{t \in T}$ gọi là một phủ của A nếu $A \subset \bigcup_{t \in T} E_t$.

• Nếu T là một tập hợp hữu hạn : $T = \{1, ..., m\}$ thì họ tập hợp $\{E_1, ..., E_m\}$ gọi là một phủ hữu hạn của A.

• Nếu $\{E_t\}_{t \in T}$ là một phủ của A, $T_o \subset T$ và $\{E_t\}_{t \in T_o}$ cũng là một phủ của A thì $\{E_t\}_{t \in T_o}$ được gọi là một phủ con của phủ $\{E_t\}_{t \in T}$.

• Nếu X là một không gian mêtric và các E_t đều là những tập hợp mở thì $\{E_t\}_{t \in T}$ gọi là một phủ mở của A.

7.10. *Bổ đề.* Nếu $\{K_n\}$ là một dãy giảm những tập hợp compắc khác ∅ trong không gian mêtric X,

$$K_1 \supset K_2 \supset ...$$

thì
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \varnothing.$$

Chứng minh. Với mỗi n, lấy $x_n \in K_n$. Khi đó $\{x_n\}$ là một dãy phần tử của tập hợp compắc K_1. Do đó nó có một dãy con $\{x_{k_n}\}$ hội tụ trong K_1 : $\lim_{n \to \infty} x_{k_n} = x_o \in K_1$. Với mọi n, ta có $\lim_{p \to \infty} x_{k_{n+p}} = x_o$. Vì $\{x_{k_{n+p}}\}_{p=1}^{\infty} \subset K_n$ và K_n là một tập hợp đóng nên từ đó suy ra $x_o \in K_n$. Vậy $x_o \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$.

7.11. *Định lí Hainơ – Bôren.* Tập hợp con A của một không gian mêtric X là compắc khi và chỉ khi mỗi phủ mở $\{U_t\}_{t \in T}$ của A đều có một phủ con hữu hạn (tức là tồn tại $t_1, ..., t_m \in T$ sao cho $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{t_i}$).

Chứng minh. Giả sử mỗi phủ mở của A đều có một phủ con hữu hạn và A không phải là một tập hợp compắc. Khi đó tồn tại một dãy vô hạn phần tử $\{a_n\}$ của A không có một dãy con nào hội tụ đến một phần tử của A. Do đó mỗi phần tử x của A có một lân cận U_x chỉ chứa một số hữu hạn phần tử của dãy $\{a_n\}$. Họ $\{U_x\}_{x \in A}$ là một phủ mở của A. Theo giả thiết, tồn tại $x_1, \ldots, x_m \in A$ sao cho $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}$. Từ bao hàm thức này suy ra rằng tập hợp A chỉ chứa một số hữu hạn phần tử của dãy $\{a_n\} \subset A$. Điều này là vô lí. Vậy A là một tập hợp compắc.

Ta sẽ chỉ chứng minh mệnh đề đảo cho trường hợp $X = \mathbf{R}^p$ với $p = 2$. (Trường hợp p nguyên dương bất kì được chứng minh tương tự). Giả sử A là một tập hợp compắc trong $\mathbf{R}^2$ và tồn tại một phủ mở $\{U_t\}_{t \in T}$ của A không có một phủ con hữu hạn nào. A là một tập hợp đóng và bị chặn nên A chứa trong một hình vuông $Q = [a, b] \times [c, d]$ nào đó. Chia hình vuông Q thành 4 hình vuông bằng nhau bởi hai đường thẳng $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{c+d}{2}$. Trong 4 hình vuông đó có ít nhất một hình vuông $Q_1 = [a_1, b_1] \times [c_1, d_1]$ sao cho không thể phủ tập hợp $A_1 = A \cap Q_1$ bởi một số hữu hạn tập hợp U_t. Độ dài cạnh của hình vuông Q_1 là $\frac{b-a}{2}$. Ta lại chia Q_1 thành 4 hình vuông bằng nhau bởi các đường thẳng $x = \frac{a_1+b_1}{2}$, $y = \frac{c_1+d_1}{2}$. Trong 4 hình vuông đó, có ít nhất một hình vuông $Q_2 = [a_2, b_2] \times [c_2, d_2]$ sao cho không thể phủ tập hợp $A_2 = A_1 \cap Q_2$ bởi một số hữu hạn tập hợp U_t. Độ dài cạnh của hình vuông Q_2 là $\frac{b-a}{2^2}$; A_1 và A_2 là những tập hợp đóng và bị chặn trong $\mathbf{R}^2$ nên là những tập hợp compắc. Tiếp tục như vậy, ta được một dãy tập hợp compắc $\{A_n\}$ có các tính chất sau :

1° $A \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$,

2° $A_n \subset Q_n$ với mọi n, Q_n là hình vuông mà cạnh có độ dài là $\dfrac{b-a}{2^n}$,

3° Không thể phủ mỗi tập hợp A_n bởi một số hữu hạn tập hợp U_t.

Theo Bổ đề 7.10, từ 1° suy ra $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$. Lấy $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Vì $x_0 \in A$ nên $x_0 \in U_{t_0}$ với một t_0 nào đó của T. Từ 2° suy ra $x_0 \in Q_n$ với mọi n. Do đó vì U_{t_0} là một tập hợp mở và đường chéo của Q_n bằng $\dfrac{\sqrt{2}(b-a)}{2^n}$ dần đến 0 khi $n \to \infty$ nên $Q_n \subset U_{t_0}$ với n đủ lớn. Từ 2° suy ra $A_n \subset U_{t_0}$ với n đủ lớn. Điều này mâu thuẫn với 3°. Vậy mỗi phủ mở của A đều có một phủ con hữu hạn.

§ 8. TẬP HỢP LIÊN THÔNG

8.1. *Định nghĩa.* Tập hợp con A của một không gian mêtric X được gọi là tập hợp liên thông nếu với mỗi biểu diễn của A dưới dạng

$$A = B \cup C,$$

trong đó B và C là hai tập hợp khác $\varnothing$ không giao nhau, ta đều có

$$\overline{B} \cap C \neq \varnothing \text{ hoặc } \overline{C} \cap B \neq \varnothing$$

(Nói một cách khác, tập hợp C chứa ít nhất một điểm tụ của tập hợp B hoặc tập hợp B chứa ít nhất một điểm tụ của tập hợp C).

Đặc biệt, một tập hợp đóng là liên thông nếu nó không phải là hợp của hai tập hợp đóng khác rỗng không giao nhau.

8.2. *Định lí.* Trong không gian mêtric, bao đóng của một tập hợp liên thông là một tập hợp liên thông.

Chứng minh. Giả sử A là một tập hợp liên thông và $\overline{A} = B \cup C$, trong đó B và C đều khác $\varnothing$, $B \cap C = \varnothing$. Hiển nhiên

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ và } (A \cap B) \cap (A \cap C) = \varnothing.$$

1° Nếu $A \cap B \neq \varnothing$ và $A \cap C \neq \varnothing$ thì vì A là một tập hợp liên thông nên

$$\overline{A \cap B} \cap (A \cap C) \neq \varnothing \text{ hoặc } \overline{A \cap C} \cap (A \cap B) \neq \varnothing.$$

Từ đó suy ra

$$\overline{B} \cap C \neq \varnothing \text{ hoặc } \overline{C} \cap B \neq \varnothing.$$

2° Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì $A \subset C \subset \overline{A}$. Do đó $\overline{C} = \overline{A}$ và $\overline{C} \cap B = B \neq \varnothing$. Tương tự, nếu $A \cap C = \varnothing$ thì $\overline{B} \cap C \neq \varnothing$.

Vậy $\overline{A}$ là một tập hợp liên thông.

Hiển nhiên $\varnothing$ là một tập hợp liên thông.

Người ta chứng minh được rằng

8.3. Trong không gian **R** ngoài tập hợp $\varnothing$, các khoảng và chỉ các khoảng là những tập hợp liên thông.

Các khoảng ở đây được hiểu là các khoảng mở hoặc đóng hoặc nửa mở, bị chặn hoặc không bị chặn. Tập hợp một điểm được xem là một khoảng đóng mà hai điểm đầu và cuối trùng nhau. (Hiển nhiên tập hợp một điểm là một tập hợp liên thông).

§ 9. GIỚI HẠN CỦA ÁNH XẠ TRONG CÁC KHÔNG GIAN $\mathbf{R}^p$

Để dễ tập trung, trong phần tiếp theo của chương này, ta sẽ chỉ đề cập đến các ánh xạ trong các không gian $\mathbf{R}^p$ (p nguyên dương), tuy rằng một số khái niệm và tính chất có thể được mở rộng một cách tự nhiên vào các không gian tuyến tính định chuẩn và các không gian mêtric.

9.1. *Các hàm số thành phần. Các phép chiếu và phép nhung chuẩn tắc*

a) *Định nghĩa.* Giả sử X là một tập hợp trong không gian $\mathbf{R}^p$.

$$\begin{aligned} f : X &\to \mathbf{R}^q \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

là một ánh xạ xác định trên X và lấy các giá trị trong không gian $\mathbf{R}^q$ (q nguyên dương). (f cũng được gọi là một hàm. Nếu $q = 1$ thì f được gọi là một hàm số thực, gọi tắt là hàm số).

Với mỗi $x \in X$, $y = f(x) = (\eta_1, \ldots, \eta_q) \in \mathbf{R}^q$. Các hàm số

$$\begin{aligned} f_k : X &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto \eta_k, \; k = 1, \ldots, q \end{aligned}$$

được gọi là các hàm số thành phần của hàm f.

Có thể viết hàm $f : X \to \mathbf{R}^q$ dưới dạng

$$x \mapsto f(x) = (f_1(x), \ldots, f_q(x)), \; x \in X.$$

Hiển nhiên việc cho hàm $f : X \to \mathbf{R}^q$ tương đương với việc cho q hàm số thành phần $f_1, \ldots, f_q : X \to \mathbf{R}$.

Vì vậy, người ta thường viết

$$f = (f_1, \ldots, f_q).$$

b) *Định nghĩa.* Các hàm số

$$\begin{aligned} p_k : \quad & \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \\ x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) &\mapsto p_k(x) = \xi_k, \; k = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

được gọi là các **phép chiếu chuẩn tắc** không gian $\mathbf{R}^n$ lên không gian $\mathbf{R}$.

Dễ dàng thấy rằng các phép chiếu chuẩn tắc là những dạng tuyến tính trên không gian $\mathbf{R}^n$.

c) Giả sử X là một tập hợp trong không gian $\mathbf{R}^p$, $f : X \to \mathbf{R}^q$ là một hàm ; $f_1, \ldots, f_q$ là các hàm số thành phần của hàm f.

Khi đó

$$f_k = p_k \circ f, \ k = 1, \ldots, q.$$

trong đó $p_k : \mathbf{R}^q \to \mathbf{R}$ là các phép chiếu chuẩn tắc không gian $\mathbf{R}^q$ lên không gian $\mathbf{R}$.

$$\begin{array}{l} X \xrightarrow{f} \mathbf{R}^q \xrightarrow{p_k} \mathbf{R} \\ x \longrightarrow f(x) = (f_1(x), \ldots, f_q(x)) \longrightarrow f_k(x) \end{array}$$

d) *Định nghĩa.* Các hàm

$$\begin{array}{rcl} \nu_k : \mathbf{R} & \to & \mathbf{R}^n \\ \xi & \mapsto & (0, \ldots, 0, \underset{\text{thứ } k}{\xi}, 0, \ldots, 0), \ k = 1, \ldots, n. \end{array}$$

gọi là các phép nhúng chuẩn tắc không gian $\mathbf{R}$ vào không gian $\mathbf{R}^n$.

Dễ dàng thấy rằng các phép nhúng chuẩn tắc là những đơn ánh tuyến tính từ không gian $\mathbf{R}$ vào không gian $\mathbf{R}^n$.

e) Cho $X \subset \mathbf{R}^p$ và hàm $f : X \to \mathbf{R}^q$.

Dễ dàng chứng minh được

$$f = \sum_{k=1}^{q} \nu_k \circ p_k \circ f,$$

trong đó $p_1, \ldots, p_q$ là các phép chiếu chuẩn tắc $\mathbf{R}^q$ lên $\mathbf{R}$, $\nu_1, \ldots, \nu_q$ là các phép nhúng chuẩn tắc $\mathbf{R}$ vào $\mathbf{R}^q$.

Ví dụ 1. Cho hàm

$$\begin{array}{rl} f : [0, 2\pi] & \to \mathbf{R}^2 \\ x & \mapsto f(x) = (\cos x, \sin x). \end{array}$$

f gọi là hàm một biến số. Hai hàm số

$$\begin{array}{rl} f_1 : [0, 2\pi] & \to \mathbf{R}, \\ x & \mapsto f_1(x) = \cos x \end{array} \qquad \begin{array}{rl} f_2 : [0, 2\pi] & \to \mathbf{R} \\ x & \mapsto f_2(x) = \sin x \end{array}$$

là các hàm số thành phần của f.

Ảnh f ([0, 2π]) của hàm f trong không gian $\mathbf{R}^2$ là đường tròn tâm O(0, 0) bán kính 1.

Ví dụ 2. Cho một số dương R và hàm

$$f : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbf{R}^3$$
$$(\varphi, \theta) \mapsto f(\varphi, \theta) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) =$$
$$= (R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta)$$

f gọi là một hàm hai biến số. Ba hàm số

$f_1 : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbf{R}$; f_2 $[0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbf{R}$

$(\varphi, \theta) \mapsto f_1(\varphi, \theta) = R\sin\theta\cos\varphi$; $(\theta) \mapsto f_2(\varphi, \theta) = R\sin\theta\sin\varphi$

và

$$f_3 : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbf{R}$$
$$(\varphi, \theta) \mapsto f_3(\varphi, \theta) = R\cos\theta$$

là các hàm số thành phần của hàm f.

Vì $\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = R^2$ nên ảnh f([0, 2π] $\times$ [0, π]) của hàm f trong không gian $\mathbf{R}^3$ chứa trong mặt cầu tâm O(0, 0, 0) bán kính R. Sau này ta sẽ thấy ảnh của f là mặt cầu này.

Giới hạn của hàm tại một điểm

9.2. *Định nghĩa.* Giả sử X là một tập hợp trong không gian $\mathbf{R}^p$, x_0 là một điểm tụ của X ($x_0 \in X'$), $f : X \to \mathbf{R}^q$ là một hàm. Ta gọi $L \in \mathbf{R}^q$ là giới hạn của hàm f khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) và viết

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \text{ hoặc } f(x) \to L \text{ khi } x \to x_0,$$

nếu với một số dương ε bất kì, tồn tại một số dương, sao cho $(\forall x \in X)\ 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - L\| < \varepsilon$.

Tương tự như đối với hàm số một biến số, ta có

9.3. *Định lí.* Giả sử $X \subset \mathbf{R}^p$, $x_0 \in X'$. Nếu hàm $f : X \to \mathbf{R}^q$ có giới hạn khi x dần đến x_0 thì giới hạn đó là duy nhất.

Chứng minh. Giả sử $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \to x_0} f(x) = M$. Cho $\varepsilon > 0$ tùy ý. Theo định nghĩa 6.2, tồn tại các số dương δ_1 và δ_2 sao cho

$$(\forall x \in X) \quad 0 < \|x - x_0\| < \delta_1 \Rightarrow \|f(x) - L\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$0 < \|x - x_0\| < \delta_2 \Rightarrow \|f(x) - M\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Đặt $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Khi đó

$$(\forall x \in X)\ 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|L - M\| \leqslant \|L - f(x)\| + \|f(x) - M\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vì bất đẳng thức đúng với một số dương bất kì ε, từ đó suy ra

$$\|L - M\| = 0, \text{ tức là } L = M.$$

9.4. *Chú ý.* Vì các chuẩn trong $\mathbf{R}^p$ cũng như các chuẩn trong $\mathbf{R}^q$ là tương đương nên trong định nghĩa 6.2, nếu hàm f có giới hạn L tại điểm x_0 đối với một cặp chuẩn nào đó trên $\mathbf{R}^p$ và $\mathbf{R}^q$ thì nó cũng có giới hạn L đối với mọi cặp chuẩn trên $\mathbf{R}^p$ và $\mathbf{R}^q$. Trong nhiều trường hợp, người ta thường sử dụng chuẩn sau trên không gian $\mathbf{R}^p$.

$$\|x\| = \|(\xi_1, \ldots, \xi_p)\| = \max(|\xi_1|, \ldots, |\xi_p|)$$

Khi đó nếu X là một tập hợp trong $\mathbf{R}^p$, $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \ldots, \xi_p^{(0)})$ là một điểm tụ của X và

$$f : X \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$x = (\xi_1, \ldots, \xi_p) \longmapsto y = f(x) = f(\xi_1, \ldots, \xi_p)$$

là một hàm số xác định trên X (f được gọi là một hàm số p biến số) thì $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbf{R}$ nếu với một dương ε cho trước bất kì, tồn tại một số dương δ sao cho

$$(\forall x = (\xi_1, \ldots, \xi_p) \in X \setminus \{x_0\}) \ |\xi_1 - \xi_1^{(0)}| < \delta, \ldots,$$

$$|\xi_p - \xi_p^{(0)}| < \delta \Rightarrow |f(\xi_1, \ldots, \xi_p) - L| < \varepsilon.$$

Định lí sau được chứng minh tương tự như đối với hàm số một biến số.

9.5. ***Định lí.*** Giả sử $X \subset \mathbf{R}^p$, $x_0 \in X'$, $f : X \to \mathbf{R}^q$ là một hàm. Khi đó $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi

$$(\forall \{x_n\} \subset X \setminus \{x_0\}) \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$$

9.6. ***Định lí.*** Giả sử $X \subset \mathbf{R}^p$, $x_0 \in X'$, $f : X \to \mathbf{R}^q$ là một hàm với các hàm số thành phần $f_1, \ldots, f_q$. Khi đó

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L = (L_1, \ldots, L_q) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f_1(x) = L_1, \ldots, \lim_{x \to x_0} f_q(x) = L_q.$$

Chứng minh. Theo định lí 6.5

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\forall \{x_n\} \subset X \setminus \{x_0\}\right) \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = L\right] \quad (1)$$

Ta viết đẳng thức (1) dưới dạng

$$\lim_{n \to \infty} \left(f_1(x_n), \ldots, f_q(x_m)\right) = (L_1, \ldots, L_q) \quad (2)$$

Theo định lí 3.4, đẳng thức (2) tương đương với

$$\lim_{n \to \infty} f_1(x_n) = L_1, \ldots, \lim_{n \to \infty} f_q(x_n) = L_q.$$

Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Áp dụng định nghĩa giới hạn của hàm số hoặc định lí 6.5, dễ dàng chứng minh

9.7. *Định lí.* Giả sử $X \subset \mathbf{R}^p$, x_0 là một điểm tụ của X, f, g : $X \to \mathbf{R}^q$ là những hàm xác định trên X.

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$ thì

a) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$

b) $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda f(x) = \lambda L$ (λ là một hằng số)

c) Đặc biệt nếu $q = 1$ thì

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = L.M$$

Nếu ngoài ra $M \neq 0$ thì

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}.$$

9.8. *Tiêu chuẩn Côsi về sự tồn tại giới hạn của một hàm*

Định lí. Giả sử $X \subset \mathbf{R}^p$, $x_0 \in X'$ và $f : X \to \mathbf{R}^q$ là một hàm xác định trên X. Khi đó tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \mathbf{R}^q$ khi và chỉ khi với một số dương ε bất kì, tồn tại một số dương δ sao cho

$(\forall x' \in X, \forall x'' \in X)\ 0 < \|x' - x_0\| < \delta,\ 0 < \|x'' - x_0\| < \delta$
$\Rightarrow \|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon$ (1).

Chứng minh. Định lí được chứng minh hoàn toàn tương tự như đối với hàm số một biến số, trong đó dấu | | được thay bởi dấu || || (Xem chứng minh định lí I.B.1.10). Tuy nhiên ta sẽ trình bầy chứng minh điều kiện đủ của định lí vì trong lập luận có một vài chi tiết cần được giải thích.

Cho $\varepsilon > 0$ bất kì. Gọi δ là một số dương thỏa mãn điều kiện (1) nêu trong định lí. Giả sử $\{x_n\}$ là một dãy phần tử của tập hợp $X \setminus \{x_0\}$ sao cho $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Khi đó tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$n \geqslant N \Rightarrow \|x_n - x_0\| < \delta.$$

Theo giả thiết, từ đó suy ra

$$m \geqslant N,\ n \geqslant N \Rightarrow \|f(x_n) - f(x_m)\| < \varepsilon.$$

Vậy $\{f(x_n)\}$ là một dãy Côsi trong không gian $\mathbf{R}^q$. Theo định lí 6.3, từ đó suy ra dãy $\{f(x_n)\}$ hội tụ trong $\mathbf{R}^q$: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L \in \mathbf{R}^q$.

Ta chứng minh $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$. Thật vậy, ta có

$$\|f(x) - f(x_n)\| < \varepsilon \qquad (2)$$

với mọi $x \in X$ sao cho $0 < \|x - x_0\| < \delta$ và với mọi $n \geqslant N$.

Trong (2) cố định x và cho $n \to \infty$. Theo định lí 3.2, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \|f(x) - f(x_n)\| = \|f(x) - L\|.$$ Do đó

$$(\forall x \in X)\ 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - L\| \leqslant \varepsilon,$$

tức là $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.

Ví dụ 1. Giả sử $(a_1, ..., a_p) \in \mathbf{R}^p$, $k_1, ..., k_p$ là những số tự nhiên. Theo định lí 8.7.b), c), ta có

$$\lim_{(x_1,\dots,x_p)\to(a_1,\dots,a_p)} \lambda x_1^{k_1} \dots x_p^{k_p} = \lambda a_1^{k_1} \dots a_p^{k_p}.$$

Từ đó suy ra rằng nếu $P(x_1, ..., x_p)$ là một đa thức p biến thì

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ \dots\\ x_p\to a_p}} P(x_1, \dots, x_p) = P(a_1, \dots, a_p).$$

(Trong đẳng thức trên, dưới kí hiệu lim ta viết $x_1 \to a_1, \dots, x_p \to a_p$ thay cho $(x_1, ..., x_p) \to (a_1, ..., a_p)$).

Tương tự, theo 8.7, nếu $R(x_1, ..., x_p)$ là một hàm số hữu tỉ p biến thì

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots\cdots \\ x_p \to a_p}} R(x_1, \ldots, x_p) = R(a_1, \ldots, a_p).$$

với điều kiện hàm số R xác định tại điểm $(a_1, \ldots, a_p)$ (tức là mẫu của R khác không tại điểm này).

Ví dụ 2. Hàm số hai biến số

$$(x, y) \mapsto x^y$$

xác định trên tập hợp $(0, +\infty) \times \mathbf{R}$. Nếu $a > 0$ và $b \in \mathbf{R}$ thì

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} x^y = a^b.$$

Thật vậy nếu $\{x_n\}$ là một dãy số dương bất kì và $\{y_n\}$ là một dãy số thực bất kì sao cho $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ và $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$ thì

$$x_n^{y_n} = e^{y_n \ln x_n} \to e^{b \ln a} = a^b \text{ khi } n \to \infty.$$

Theo định lí 8.5, từ đó suy ra điều cần chứng minh

Ví dụ 3. Hàm số hai biến số

$$(x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

xác định trên tập hợp $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Ta sẽ chỉ ra rằng giới hạn

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

không tồn tại.

Thật vậy, hai dãy điểm $\{(x_n, y_n)\} = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ và $\{(x'_n, y'_n)\} = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)\right\}$ đều hội tụ đến $(0, 0)$. Tuy nhiên $f(x_n, y_n) = \frac{1}{2}$,

$f(x'_n, y'_n) = \dfrac{2}{5}$ với mọi n. Theo định lí 8.5, từ đó suy ra hàm số được xét không có giới hạn tại điểm (0, 0).

Ví dụ 4. Tìm giới hạn

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Ta có $\dfrac{|xy|}{x^2 + y^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$ với mọi $(x, y) \neq (0, 0)$. Do đó

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leqslant \frac{1}{2} |x| \text{ với } x^2 + y^2 > 0.$$ Từ đó suy ra

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

§10. GIỚI HẠN LẶP

10.1. Ngoài giới hạn của hàm số $f(x) = f(\xi_1, \dots, \xi_p)$ khi $x = (\xi_1, \dots, \xi_p) \to a = (a_1, \dots, a_p)$, trong nhiều trường hợp ta phải xét giới hạn của hàm số thuộc một loại khác. Đó là giới hạn của hàm số $f(\xi_1, \dots, \xi_p)$ khi các biến ξ_k kế tiếp nhau dần đến a_k theo một thứ tự nào đó. Giới hạn loại này được gọi là giới hạn lặp.

Để đơn giản, ta chỉ xét trường hợp hàm số hai biến số.

Giả sử X, Y là hai tập hợp số thực X, Y $\subset$ **R** ; a, b theo thứ tự là điểm tụ của X và Y. Khi đó (a, b) là một điểm tụ của $X \times Y$ (a, b có thể thuộc X, Y hoặc không). Giả sử f là một hàm số xác định trên $X \times Y \setminus \{(a, b)\}$.

Nếu với mỗi $y \in Y \setminus \{b\}$, hàm số một biến số $x \mapsto f(x, y)$ có giới hạn khi $x \to a$ thì nói chung giới hạn đó phụ thuộc vào y

$$\lim_{x \to a} f(x, y) = \varphi(y)$$

φ là một hàm số xác định trên tập hợp $Y \setminus \{b\}$. Do đó có thể xét giới hạn của hàm số φ khi $y \to b$. Ta viết

$$\lim_{y \to b} \varphi(y) = \lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y).$$

Giới hạn lặp $\lim\limits_{x \to a} \lim\limits_{y \to b} f(x, y)$ được xét một cách tương tự.

Không phải bao giờ hai giới hạn lặp nói trên cũng tồn tại và nếu cả hai đều tồn tại, chúng không nhất thiết bằng nhau.

Ví dụ 1. Xét hàm số

$$f(x, y) = \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}$$

trên tập hợp $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$, $a = 0$, $b = 0$.

Với mỗi $y > 0$, $\varphi(y) = \lim\limits_{x \to 0} f(x, y) = y - 1$,

$$\lim_{y \to 0} \varphi(y) = \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = -1.$$

Với mỗi $x > 0$, $\psi(x) = \lim\limits_{y \to 0} f(x, y) = 1 + x$,

$$\lim_{x \to 0} \psi(x) = \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = 1.$$

Ví dụ 2. Hàm số

$$f(x, y) = x\sin\frac{1}{y}$$

xác định trên tập hợp $\mathbf{R} \times (\mathbf{R} \setminus \{0\})$.

Với mỗi $y \neq 0$, $\varphi(y) = \lim\limits_{x \to 0} f(x, y) = 0$. Do đó

$$\lim_{y \to 0} \varphi(y) = \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = 0.$$

Với mỗi $x \neq 0$, $\lim\limits_{y \to 0} f(x, y)$ không tồn tại. Do đó không tồn tại $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y)$.

Từ bất đẳng thức

$$|f(x, y)| = \left| x\sin\frac{1}{y} \right| \leq |x| \text{ với mọi } (x, y) \neq (0, 0),$$

suy ra

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = 0$$

Ví dụ trên cho thấy sự tồn tại giới hạn của hàm số f tại điểm (a, b) không kéo theo sự tồn tại các giới hạn lặp tại điểm này. Tuy nhiên, ta có

10.2. *Định lí*. Giả sử $X, Y \subset \mathbf{R}$, $a \in X'$, $b \in Y'$; $a, b \in \mathbf{R}$ và f là một hàm số xác định trên tập hợp $X \times Y \setminus \{(a, b)\}$. Nếu

a) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = L \in \mathbf{R}$,

b) Với mỗi $y \in Y \setminus \{b\}$, tồn tại giới hạn

$$\varphi(y) = \lim_{x \to a} f(x, y) \in \mathbf{R},$$

thì tồn tại giới hạn lặp $\lim\limits_{y \to b} \varphi(y) = \lim\limits_{y \to b} \lim\limits_{x \to a} f(x, y)$, và $\lim\limits_{y \to b} \lim\limits_{x \to a} f(x, y) = L$.

Chứng minh. Từ a) suy ra rằng với một $\varepsilon > 0$ bất kì, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$(\forall x \in X \setminus \{a\}, \forall y \in Y \setminus \{b\}) \; |x - a| < \delta, \; |y - b| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

Cố định $y \in Y \setminus \{b\}$ thỏa mãn điều kiện $|y - b| < \delta$ và cho $x \to a$, ta được $\lim\limits_{x \to a} f(x, y) = \varphi(y)$. Do đó

$$|\varphi(y) - L| \leqslant \varepsilon \text{ với mọi } y \in Y \setminus \{b\} \text{ mà } |y - b| < \delta.$$

tức là $\lim_{y \to b} \varphi(y) = L.$

Nếu ngoài hai điều kiện a), b) điều kiện sau cũng được thỏa mãn :

Với mỗi $x \in X \setminus \{a\}$, tồn tại giới hạn

$$\varphi(x) = \lim_{y \to b} f(x, y)$$

thì từ điều vừa chứng minh suy ra sự tồn tại giới hạn lập

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = \lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x, y)$$

và

$$\lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x, y) = L.$$

Trong trường hợp này, hai giới hạn lập tại điểm (a, b) là bằng nhau.

Từ định lí trên suy ra rằng hàm số f trong ví dụ 1 không có giới hạn tại điểm (0, 0).

§11. HÀM LIÊN TỤC TRONG KHÔNG GIAN $\mathbf{R}^p$

11.1. *Định nghĩa.* Giả sử X là một tập hợp trong không gian $\mathbf{R}^p$, $f : X \to \mathbf{R}^q$ là một hàm.

a) f gọi là liên tục tại điểm $x_0 \in X$ nếu với một số dương ε cho trước bất kì, tồn tại một số dương δ sao cho

$$(\forall x \in X)\ \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

b) f gọi là liên tục trên X nếu f liên tục tại mọi điểm $x \in X$.

Hàm f không liên tục tại điểm $x_0 \in X$ gọi là gián đoạn tại x_0.

Hiển nhiên nếu x_0 là một điểm cô lập của tập hợp X thì f liên tục tại điểm x_0.

Từ định nghĩa trên suy ra

11.2. *Định lí.* Nếu $x_0 \in X$ là một điểm tụ của tập hợp X thì hàm f liên tục tại điểm x_0 khi và chỉ khi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Định lí sau đây được chứng minh tương tự như đối với hàm số một biến số.

11.3. *Định lí.* Giả sử $X \subset \mathbf{R}^p$, $f : X \to \mathbf{R}^q$ là một hàm.

f liên tục tại điểm x_0 khi và chỉ khi

$$(\forall \{x_n\} \subset X) \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Áp dụng định lí 11.3, dễ dàng chứng minh được hai định lí sau :

11.4. *Định lí.* Cho $X \subset \mathbf{R}^p$. Nếu $f, g : X \to \mathbf{R}^q$ là hai hàm liên tục tại điểm $x_0 \in X$ (trên X) thì các hàm số $f + g$ và λf là những hàm số liên tục tại x_0 (trên X). ($\lambda \in \mathbf{R}$ là một hằng số).

Đặc biệt, nếu $q = 1$ thì hàm số fg liên tục tại x_0.

Nếu ngoài ra $g(x_0) \neq 0$ thì hàm số $\dfrac{f}{g}$ liên tục tại x_0.

11.5. *Định lí.* Giả sử $X \subset \mathbf{R}^p$, $Y \subset \mathbf{R}^q$, $f : X \to Y$, $g : Y \to \mathbf{R}^s$ là hai hàm. Nếu f liên tục tại điểm $x_0 \in X$ và g liên tục tại điểm $y_0 = f(x_0)$ thì hàm hợp $g \circ f : X \to \mathbf{R}^s$ liên tục tại điểm x_0.

11.6. *Định lí.* Giả sử $X \subset \mathbf{R}^p$. Hàm $f : X \to \mathbf{R}^q$ liên tục tại điểm $x_0 \in X$ khi và chỉ khi các hàm số thành phần $f_1, \ldots, f_q$ của f liên tục tại x_0.

Chứng minh. f liên tục tại điểm x_0

$$\Leftrightarrow (\forall \ \{x_n\} \subset X) \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow (\forall \ \{x_n\} \subset X) \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (f_1(x_n), \ldots, f_q(x_n))$$

$$= (f_1(x_0), \ldots, f_q(x_0))$$

$$\Leftrightarrow (\forall \ \{x_n\} \subset X) \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_k(x_n) = f_k(x_0) \ ;$$

$$k = 1, \ldots, q$$

$\Leftrightarrow f_k$ liên tục tại x_0 ; $k = 1, \ldots, q$.

11.7. *Định lí.* Chuẩn

$$\begin{aligned} \|\ \| : \mathbf{R}^p &\to \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned}$$

là một hàm số liên tục trên $\mathbf{R}^p$.

Chứng minh. Tính liên tục của $\|\ \|$ suy ra từ bất đẳng thức

$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leqslant \|x - y\| \text{ với mọi } x, y \in \mathbf{R}^p.$$

Ví dụ. Từ định lí 11.4 suy ra rằng hàm số

$$(x_1, \ldots, x_p) \longmapsto \lambda x_1^{k_1} \ldots x_p^{k_p},$$

trong đó $k_1, \ldots, k_p \in \mathbf{N}$ là một hàm số liên tục trên $\mathbf{R}^p$.

Từ đó suy ra

- Đa thức p biến $P(x_1, \ldots, x_p)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbf{R}^p$.
- Hàm số hữu tỉ p biến $R(x_1, \ldots, x_p)$ là một hàm số liên tục trên tập xác định của nó.

Từ định lí 11.5 suy ra

Hàm số $(x, y, z) \longmapsto \sin(x^2y + 3z^3)$ liên tục trên $\mathbf{R}^3$.

11.8. *Định lí.* Giả sử $f : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ là một hàm số liên tục trên $\mathbf{R}^p$ và α là một số thực cho trước. Khi đó

a) Các tập hợp

$$F = \{x \in \mathbf{R}^p : f(x) \geq \alpha\}$$

và

$$F_1 = \{x \in \mathbf{R}^p : f(x) \leq \alpha\}$$

là những tập hợp đóng.

b) $$G = \{x \in \mathbf{R}^p : f(x) > \alpha\}$$

và

$$G_1 = \{x \in \mathbf{R}^p : f(x) < \alpha\}$$

là những tập hợp mở.

c) $E = \{x \in \mathbf{R}^p : f(x) = \alpha\}$ là một tập hợp đóng.

Chứng minh. a) Ta áp dụng định lí 4.6. Giả sử $\{x_n\} \subset F$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_o \in \mathbf{R}^p$. Khi đó $f(x_n) \geq \alpha$ với mọi n. Vì f liên tục tại x_o nên $f(x_o) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \geq \alpha$. Do đó $x_o \in F$. Vậy F là một tập hợp đóng.

Thay f bởi $-f$, ta được F_1 là một tập hợp đóng.

b) Ta có $G = \mathbf{R}^p \setminus F_1$ và $G_1 = \mathbf{R}^p \setminus F$. Do đó G và G_1 là những tập hợp mở.

c) Từ đẳng thức $E = F \cap F_1$ suy ra E là một tập hợp đóng.

Ví dụ. Từ định lí trên suy ra

$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ là một tập hợp đóng và

$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} < 1\}$ là một tập hợp mở trong $\mathbf{R}^2$.

11.9. *Chú ý.* a) Vì các chuẩn trên các không gian $\mathbf{R}^p$ và $\mathbf{R}^q$ đều liên tục nên trong định nghĩa 11.1 tính liên tục của hàm f không phụ thuộc vào các chuẩn trên hai không gian đó : Nếu f liên tục tại điểm $x_o \in X$ đối với một cặp chuẩn nào đó trên $\mathbf{R}^p$ và $\mathbf{R}^q$ thì nó liên tục tại điểm x_0 đối với mọi cặp chuẩn trên hai không gian này.

Nếu trong $\mathbf{R}^p$ ta lấy chuẩn

$$\|x\| = \|(\xi_1, \ldots, \xi_p)\| = \max_{k=1,\ldots,p} |\xi_k|$$

thì định nghĩa 11.1 được phát biểu dưới dạng sau :

Cho $X \subset \mathbf{R}^p$. Hàm $f : X \to \mathbf{R}^q$ liên tục tại điểm $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \ldots, \xi_p^{(0)})$ nếu với một số dương ε cho trước bất kì, tồn tại một số dương δ sao cho

$(\forall x = (\xi_1, \ldots, \xi_p) \in X)$ $|\xi_1 - \xi_1^{(0)}| < \delta, \ldots, |\xi_p - \xi_p^{(0)}| < \delta$ thì $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$.

b) Giả sử $f : X \to \mathbf{R}^q$ liên tục tại điểm $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \ldots, \xi_p^{(0)}) \in X$.

Đặt $X_1 = \{\xi_1 \in \mathbf{R} : (\xi_1, \xi_2^{(0)}, \ldots, \xi_p^{(0)}) \in X\}$. Dễ dàng thấy rằng hàm một biến số

$$\varphi_1 : X_1 \to \mathbf{R}^q$$
$$\xi_1 \mapsto \varphi_1(\xi_1) = f(\xi_1, \xi_2^{(0)}, \ldots, \xi_p^{(0)})$$

liên tục tại điểm $\xi_1^{(0)} \in X_1$. Ta nói rằng f liên tục tại điểm x_0 theo biến ξ_1. Tương tự hàm f liên tục tại điểm x_0 theo mỗi biến $\xi_2, \ldots, \xi_p$.

Như vậy nếu hàm f liên tục tại điểm x_0 thì nó liên tục tại điểm x_0 theo mỗi biến $\xi_1, \ldots, \xi_p$.

Ví dụ sau đây cho thấy điều ngược lại không đúng :

Hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{với } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{với } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

gián đoạn tại điểm (0, 0), vì $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ không tồn tại. Tuy nhiên f liên tục tại điểm (0, 0) theo mỗi biến x và y vì

$f(x, 0) = 0$ với mọi $x \in \mathbf{R}$ và $f(0, y) = 0$ với mọi $y \in \mathbf{R}$.

Hàm số liên tục trên tập hợp liên thông

Trước khi đề cập đến tính chất của hàm số liên tục trên một tập hợp liên thông, ta xét một trường hợp riêng thường gặp của tập hợp liên thông. Đó là tập hợp liên thông cung.

11.10. *Định nghĩa.* Tập hợp $X \subset \mathbf{R}^p$ gọi là liên thông cung nếu với hai điểm bất kì $a, b \in X$, tồn tại một hàm liên tục $\varphi : [0, 1] \to X$ sao cho $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$.

Hàm liên tục φ gọi là một cung nối hai điểm a và b, a gọi là điểm đầu, b gọi là điểm cuối của cung.

Người ta chứng minh được rằng tập hợp liên thông cung là một tập hợp liên thông. Nói chung điều ngược lại không đúng. Tuy nhiên nếu X là một tập hợp mở trong không gian $\mathbf{R}^p$ thì X là liên thông khi và chỉ khi nó là liên thông cung.

11.11. $\mathbf{R}^p$ là một tập hợp liên thông cung.

Chứng minh. Giả sử a, b là hai điểm bất kì của $\mathbf{R}^p$. Hàm

$$\varphi : [0, 1] \to \mathbf{R}^p$$
$$\lambda \mapsto (1 - \lambda)a + \lambda b$$

liên tục trên đoạn [0, 1], $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$. Theo định nghĩa 9.10, từ đó suy ra $\mathbf{R}^p$ là một tập hợp liên thông cung.

11.12. Hình cầu trong không gian $\mathbf{R}^p$ là một tập hợp liên thông cung.

Chứng minh. Giả sử a, b là hai điểm của hình cầu mở $B(x_0, r)$ trong $\mathbf{R}^p$. Khi đó $\|a - x_0\| < r$, $\|b - x_0\| < r$. Hàm

$$\varphi : [0, 1] \to \mathbf{R}^p$$
$$\lambda \mapsto (1 - \lambda)a + \lambda b$$

liên tục trên $[0, 1]$. Ta chứng minh $\varphi([0, 1]) \subset B(x_0, r)$.

Thật vậy,

$$\forall \lambda \in [0, 1], \ \| \varphi(\lambda) - x_0 \| = \| (1-\lambda)a + \lambda b - (1-\lambda)x_0 - \lambda x_0 \|$$
$$\leqslant (1-\lambda)\| a - x_0 \| + \lambda \| b - x_0 \|$$
$$< (1-\lambda)r + \lambda r = r.$$

Do đó $\varphi(\lambda) \in B(x_0, r)$ với mọi $\lambda \in [0, 1]$.

Chứng minh tương tự, hình cầu đóng trong $\mathbf{R}^p$ là một tập hợp liên thông cung.

Sau đây là sự mở rộng định lí Bônzanô – Côsi đã biết sang hàm số nhiều biến.

11.13. *Định lí.* Giả sử X là một tập hợp liên thông trong không gian $\mathbf{R}^p$, $f : X \to \mathbf{R}$ là một hàm số liên tục trên X ; $a, b \in X$. Khi đó, nếu α là một số nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in X$ sao cho $f(c) = \alpha$.

Điều đó có nghĩa là f lấy mọi giá trị trung gian giữa $f(a)$ và $f(b)$.

Chứng minh. Chỉ cần chứng minh cho trường hợp $f(a) \neq f(b)$. Giả sử $f(a) < \alpha < f(b)$ và $f(x) \neq \alpha$ với mọi $x \in X$.

Đặt $A = \{x \in X : f(x) < \alpha\}$, $B = \{x \in X : f(x) > \alpha\}$, ta có $X = A \cup B$ và $A \cap B = \varnothing$. Vì X là một tập hợp liên thông nên $\overline{A} \cap B \neq \varnothing$ hoặc $A \cap \overline{B} \neq \varnothing$. Nếu xảy ra trường hợp đầu và $d \in \overline{A} \cap B$ thì tồn tại một dãy $\{x_n\}$ những phần tử của A sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = d$. Khi đó $f(x_n) < \alpha$ với mọi n. Vì f liên tục tại d nên $f(d) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant \alpha$. Mặt khác vì $d \in B$ nên $f(d) > \alpha$. Ta đi đến mâu thuẫn. Vậy $\alpha \in f(X)$.

Hàm liên tục đều

11.14. *Định nghĩa.* Giả sử X là một tập hợp trong không gian $\mathbf{R}^p$. Hàm $f : X \to \mathbf{R}^q$ gọi là liên tục đều trên X nếu với một số dương ε cho trước bất kì, tồn tại một số dương δ sao cho $(\forall x', x'' \in X)$ $\|x' - x''\| < \delta \Rightarrow \|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon$. Dễ dàng thấy rằng

11.15. a) Chuẩn $\|\ \| : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \|x\|$$

b) Các phép chiếu chuẩn tắc

$$p_k : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$$

$$x = (\xi_1, \ldots, \xi_p) \mapsto p_k(x) = \xi_k \ (k = 1, \ldots, p)$$

c) Các phép nhúng chuẩn tắc

$$\nu_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^q$$

$$\xi \mapsto \nu_k(\xi) = (0, \ldots, 0, \underset{\text{thứ } k}{\xi}, 0, \ldots, 0)$$

là những hàm liên tục đều.

§12. HÀM LIÊN TỤC TRÊN TẬP HỢP COM PẮC

12.1. *Định lí.* Nếu X là một tập hợp compắc trong không gian $\mathbf{R}^p$, $f : X \to \mathbf{R}^q$ là một hàm liên tục thì $f(X)$ là một tập hợp compắc trong không gian $\mathbf{R}^q$.

Nói gọn lại, ảnh liên tục của một tập hợp compắc là một tập hợp compắc.

Chứng minh. Giả sử $\{y_n\} = \{f(x_n)\}$ là một dãy phần tử của tập hợp $f(X)$. Vì $\{x_n\}$ là một dãy phần tử của tập hợp compắc X nên nó có một dãy con $\{x_{k_n}\}$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = x_0 \in X$.

Vì f liên tục nên từ đó suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x_0)$, tức là

$\lim\limits_{n\to\infty} y_{k_n} = f(x_0) \in f(X)$. Vậy $f(X)$ là một tập hợp compắc trong $\mathbf{R}^q$.

Hai định lí sau là sự mở rộng các định lí Vâyơxtrat và Canto đối với hàm số một biến số sang hàm nhiều biến số.

12.2. *Định lí* (Vâyơxtrat). Giả sử X là một tập hợp compắc trong không gian $\mathbf{R}^p$ và $f : X \to \mathbf{R}$ là một hàm số liên tục trên X. Khi đó

a) f bị chặn trên X,

b) f đạt được giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên X.

Chứng minh. a) Theo định lí 12.1, f(X) là một tập hợp compắc trong **R**. Do đó f(X) là một tập hợp bị chặn trong **R**. Vậy f là một hàm số bị chặn trên X.

b) Từ a) suy ra $m = \inf f(X) \in \mathbf{R}$ và $M = \sup f(X) \in \mathbf{R}$. Vì tập hợp compắc f(X) là một tập hợp đóng trong **R** nên $m \in f(X)$ và $M \in f(X)$.

12.3. *Định lí* (Canto). Giả sử X là một tập hợp compắc trong không gian $\mathbf{R}^p$. Nếu hàm $f : X \to \mathbf{R}^q$ liên tục trên X thì nó liên tục đều trên X.

Chứng minh. Định lí được chứng minh tương tự như trường hợp hàm số một biến số. Giả sử f không liên tục đều trên X. Khi đó tồn tại một số dương ε có tính chất sau :

Với một số nguyên dương n bất kì, tồn tại hai điểm $x'_n, x''_n \in X$ sao cho

$$\|x'_n - x''_n\| < \frac{1}{n} \text{ và } \|f(x'_n) - f(x'_n)\| \geqslant \varepsilon \quad (1).$$

Vì $\{x'_n\} \subset X$ compắc nên nó có một dãy con $\{x'_{k_n}\}$ hội tụ trong X : $\lim\limits_{n\to\infty} x'_{k_n} = x_0 \in X$. Từ bất đẳng thức

$$\|x''_{k_n} - x_0\| \leqslant \|x''_{k_n} - x'_{k_n}\| + \|x'_{k_n} - x_0\| < \frac{1}{k_n} + \|x'_{k_n} - x_0\|$$

suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} x''_{k_n} = x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x'_{k_n}$. Do f liên tục tại x_0, từ đó suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_{k_n}) = f(x_0)$ và $\lim f(x''_{k_n}) = f(x_0)$. Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} \|f(x'_{k_n}) - f(x''_{k_n})\| = 0$. Điều này mâu thuẫn với (1).

Chương VI

ĐẠO HÀM CỦA HÀM MỘT BIẾN SỐ ĐẠO HÀM RIÊNG CỦA HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

A. ĐẠO HÀM CỦA HÀM MỘT BIẾN SỐ

Trong phần này ta sẽ mở rộng khái niệm đạo hàm cũng như các kết quả đã có đối với hàm số một biến số sang trường hợp hàm một biến số, tức là hàm xác định trên một tập hợp $X \subset \mathbf{R}$ và lấy các giá trị là những vectơ. Đạo hàm của hàm một biến có nhiều ứng dụng quan trọng trong hình học và cơ học.

§1. ĐỊNH NGHĨA. CÁC TÍNH CHẤT ĐƠN GIẢN

1.1. *Định nghĩa.* Giả sử $f : (a, b) \to \mathbf{R}^q$ là một hàm, $x_0 \in (a, b)$. Nếu tồn tại

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

thì giới hạn đó gọi là đạo hàm của hàm f tại điểm x_0, kí hiệu là $f'(x_0)$.

Chú ý rằng $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ và $f'(x_0)$ đều là những phần tử của không gian $\mathbf{R}^q$.

1.2. Nếu hàm f có đạo hàm $f'(x_0)$ tại điểm x_0 thì

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h[f'(x_0) + o(1)] \qquad (1)$$

trong đó $o(1)$ là một vectơ dần đến không khi $h \to 0$.

Chứng minh. Nếu f có đạo hàm $f'(x_0)$ tại điểm x_0 thì

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Đặt $$\varepsilon(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0),$$ ta được

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h[f'(x_0) + \varepsilon(h)],$$

trong đó $\varepsilon(h)$ là vectơ dần đến không khi $h \to 0$.

Nếu hàm $f : (a, b) \to \mathbf{R}^q$ có đạo hàm tại điểm $x_0 \in (a, b)$ thì từ đẳng thức (1) trong 1.2 suy ra $\lim_{h \to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0$. Do đó

1.3. Nếu f có đạo hàm tại điểm x_0 thì nó liên tục tại x_0.

1.4. *Định lí.* Giả sử $f_1, \ldots, f_q$ là các hàm số thành phần của hàm $f : (a, b) \to \mathbf{R}^q$.

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_q(x)), \; x \in (a, b).$$

f có đạo hàm tại điểm $x_0 \in (a, b)$ khi và chỉ khi các hàm số $f_1, \ldots, f_q$ đều có đạo hàm tại x_0. Khi đó

$$f'(x_0) = (f_1'(x_0), \ldots, f_q'(x_0)). \tag{1}$$

Chứng minh. Với mọi $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left(\frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0}, \ldots, \frac{f_q(x) - f_q(x_0)}{x - x_0}\right).$$

Từ đó suy ra rằng hàm f có đạo hàm tại điểm x_0 khi và chỉ khi các hàm số $f_1, \ldots, f_q$ đều có đạo hàm tại x_0. Khi đó, ta có đẳng thức (1).

1.5. *Hệ quả.* Giả sử hàm $f : (a, b) \to \mathbf{R}^q$ có đạo hàm trên (a, b). Khi đó f là một hàm hằng trên (a, b) nếu và chỉ nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in (a, b)$.

Chứng minh. f là một hàm hằng trên (a, b) khi và chỉ khi $f_1, \ldots, f_q$ là những hàm số lấy giá trị không đổi trên (a, b), tức là $f_1'(x) = 0, \ldots, f_q'(x) = 0$ với mọi $x \in (a, b)$

$$\Leftrightarrow f'(x) = 0 \text{ với mọi } x \in (a, b).$$

1.6.* Giả sử A là một không gian afin liên kết với không gian vectơ hữu hạn chiều E và

$$\begin{aligned} M : (a, b) &\to A \\ x &\mapsto M(x) \end{aligned}$$

là một ánh xạ từ (a, b) vào A.

Nếu chọn một điểm $O \in A$ làm điểm gốc thì có thể đồng nhất ánh xạ $x \mapsto M(x)$ từ (a, b) vào A với ánh xạ $x \mapsto f(x) = M(x) - O$ từ (a, b) vào E. Nếu f có đạo hàm tại điểm $x_0 \in (a, b)$ và $f'(x_0) = L$ thì ta nói rằng ánh xạ $x \mapsto M(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 và vectơ L được gọi là đạo hàm của ánh xạ M tại điểm x_0, kí hiệu là $M'(x_0)$. Vectơ $M'(x_0)$ không phụ thuộc vào việc chọn điểm O. Thật vậy, ta có

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{M(x) - O - (M(x_0) - O)}{x - x_0} = \frac{M(x) - M(x_0)}{x - x_0},$$

với mọi $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$.

Chú ý rằng đạo hàm của một ánh xạ lấy các giá trị trong A là một vectơ chứ không phải là một điểm của A.

§2. CÁC QUY TẮC TÌM ĐẠO HÀM

2.1. *Đạo hàm của một tổng.* Nếu $f : (a, b) \to \mathbf{R}^q$ và $g : (a, b) \to \mathbf{R}^q$ là hai hàm có đạo hàm tại điểm $x_0 \in (a, b)$ thì hàm $f + g : (a, b) \to \mathbf{R}^q$ cũng có đạo hàm tại điểm x_0 và

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Chứng minh. Với mọi $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$,

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Vì hai số hạng của vế phải dần đến $f'(x_0)$ và $g'(x_0)$ khi $x \to x_0$ nên vế trái dần đến $f'(x_0) + g'(x_0)$. Do đó $f + g$ có đạo hàm tại điểm x_0 và

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

2.2. Nếu hàm $f : (a, b) \to \mathbf{R}^q$ và hàm số $\lambda : (a, b) \to \mathbf{R}$ đều có đạo hàm tại điểm $x_0 \in (a, b)$ thì hàm

$$\lambda f : (a, b) \to \mathbf{R}^q$$
$$x \mapsto (\lambda f)(x) = \lambda(x) f(x)$$

cũng có đạo hàm tại điểm x_0 và

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda'(x_0) f(x_0) + \lambda(x_0) f'(x_0). \qquad (1)$$

Chứng minh. Với mọi $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$,

$$\frac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(x_0)}{x-x_0} = \frac{\lambda(x)-\lambda(x_0)}{x-x_0} . f(x) + \lambda(x_0) \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Cho $x \to x_0$, ta được

$$\frac{\lambda(x)-\lambda(x_0)}{x-x_0} \to \lambda'(x_0),$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to f'(x_0),$$

$$f(x) \to f(x_0).$$

Do đó vế trái của đẳng thức trên dần đến $\lambda'(x_0) f(x_0) + \lambda(x_0) f'(x_0)$. Vậy λf có đạo hàm tại điểm x_0 và ta có đẳng thức (1).

2.3. Giả sử E là không gian vectơ các vectơ tự do trong không gian thông thường.

$$\vec{V}_1 : (a, b) \to E \quad \text{và} \quad \vec{V}_2 = (a, b) \to E$$
$$x \mapsto \vec{V}_1(x) \qquad\qquad x \mapsto \vec{V}_2(x)$$

là hai hàm có đạo hàm tại điểm $x_0 \in (a, b)$. Khi đó hàm số

$$\vec{V}_1 . \vec{V}_2 : (a, b) \to \mathbf{R}$$

$$x \longmapsto (\vec{V}_1 . \vec{V}_2)(x) = \vec{V}_1(x) . \vec{V}_2(x)$$

($\vec{V}_1(x) . \vec{V}_2(x)$ là tích vô hướng của hai vectơ $\vec{V}_1(x)$ và $\vec{V}_2(x)$) có đạo hàm tại điểm x_0 và

$$(\vec{V}_1 . \vec{V}_2)'(x_0) = \dot{\vec{V}}_1(x_0) . \vec{V}_2(x_0) + \vec{V}_1(x_0) . \dot{\vec{V}}_2(x_0).$$

Chứng minh. Với mọi $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$,

$$\frac{(\vec{V}_1.\vec{V}_2)(x) - (\vec{V}_1.\vec{V}_2)(x_0)}{x - x_0} = \frac{\vec{V}_1(x) - \vec{V}_1(x_0)}{x - x_0} . \vec{V}_2(x) +$$

$$+ \vec{V}_1(x_0) . \frac{\vec{V}_2(x) - \vec{V}_2(x_0)}{x - x_0}.$$

Khi $x \to x_0$,

$$\frac{\vec{V}_1(x) - \vec{V}_1(x_0)}{x - x_0} \to \dot{\vec{V}}_1(x_0),$$

$$\frac{\vec{V}_2(x) - \vec{V}_2(x_0)}{x - x_0} \to \dot{\vec{V}}_2(x_0),$$

$$\vec{V}_2(x) \to \vec{V}_2(x_0).$$

Do đó vế trái của đẳng thức trên dần đến

$$\dot{\vec{V}}_1(x_0) . \vec{V}_2(x_0) + \vec{V}_1(x_0) . \dot{\vec{V}}_2(x_0).$$

Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

2.4. Đặc biệt, ta có

$$(\vec{V}_1.\vec{V}_1)'(x_0) = 2\vec{V}_1(x_0).\dot{\vec{V}}_1(x_0).$$

Từ đó suy ra

Nếu $\vec{V}$: (a, b) → E có đạo hàm trên (a, b) thì $\|\vec{V}(x)\|$ là một hằng số trên (a, b) khi và chỉ khi $\vec{V}(x).\vec{V}'(x) = 0$ với mọi $x \in (a, b)$, tức là $\vec{V}(x)$ trực giao với $\vec{V}'(x)$ với mọi $x \in (a, b)$.

2.5. Nếu $\vec{V}_1 : (a, b) \to E$ và $\vec{V}_2 : (a, b) \to E$ là hai hàm có đạo hàm tại điểm $x_0 \in (a, b)$ thì hàm

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 : (a, b) \to E$$

$$x \mapsto (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)(x) = \vec{V}_1(x) \wedge \vec{V}_2(x)$$

có đạo hàm tại điểm x_0 và

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)'(x) = \vec{V}_1'(x_0) \wedge \vec{V}_2(x_0) + \vec{V}_1(x_0) \wedge \vec{V}_2'(x_0).$$

($\vec{V}_1(x) \wedge \vec{V}_2(x)$ là tích vectơ của hai vectơ $\vec{V}_1(x)$ và $\vec{V}_2(x)$).

Công thức được chứng minh tương tự như 2.3 và 2.4.

2.6. Nếu hàm số u : (a, b) → (c, d) có đạo hàm tại điểm $x_0 \in (a, b)$ và hàm $f : (c, d) \to \mathbf{R}^q$ có đạo hàm tại điểm $u_0 = u(x_0)$ thì hàm hợp $h = fou : (a, b) \to \mathbf{R}^q$ có đạo hàm tại điểm x_0 và

$$h'(x_0) = (fou)'(x_0) = f'[u(x_0)]u'(x_0).$$

(Chú ý rằng $f'[u(x_0)]$ là một phần tử của $\mathbf{R}^q$ và $u'(x_0)$ là một số thực. Do đó $h'(x_0)$ là một phần tử của $\mathbf{R}^q$).

Công thức được chứng minh tương tự như III.3.2.

§3. ĐẠO HÀM CẤP CAO

3.1. *Định nghĩa.* Giả sử hàm $f : (a, b) \to \mathbf{R}^q$ có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (a, b)$. Khi đó

$$f' : (a, b) \to \mathbf{R}^q$$

$$x \mapsto f'(x)$$

là một hàm xác định trên (a, b).

Nếu f' có đạo hàm $(f')'(x_0)$ tại điểm $x_0 \in (a, b)$ thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm cấp hai của hàm f tại điểm x_0, kí hiệu là $f''(x_0)$ tức là $f''(x_0) = (f')'(x_0)$.

Giả sử hàm $f : (a, b) \to \mathbf{R}^q$ có đạo hàm $f^{(n-1)}(x)$ cấp $n - 1$ tại mọi điểm $x \in (a, b)$. Nếu hàm $f^{(n-1)} : (a, b) \to \mathbf{R}^q$ có đạo hàm $(f^{(n-1)})'(x_0)$ tại điểm $x_0 \in (a, b)$ thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm cấp n của hàm f tại điểm x_0 và được kí hiệu là $f^{(n)}(x_0)$:

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$$

f' được gọi là đạo hàm cấp một, f được gọi là đạo hàm cấp không.

3.2. Giả sử $f_1, \ldots, f_q : (a, b) \to \mathbf{R}$ là các hàm số thành phần của hàm $f : (a, b) \to \mathbf{R}^q$

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_q(x)),\ x \in (a, b).$$

Dễ dàng chứng minh được rằng

Hàm f có đạo hàm cấp n tại điểm $x_0 \in (a, b)$ khi và chỉ khi các hàm số $f_1, \ldots, f_q$ có đạo hàm cấp n tại x_0. Khi đó, ta có

$$f^{(n)}(x_0) = (f_1^{(n)}(x_0), \ldots, f_q^{(n)}(x_0)).$$

§4. CÔNG THỨC TAYLO – IANG

Định lí. Nếu hàm $f : (a, b) \to \mathbf{R}^q$ có đạo hàm cấp $n - 1$ trên khoảng (a, b) và có đạo hàm cấp n tại điểm $x_0 \in (a, b)$ thì

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + o(h^n)$$

khi $h \to 0$.

Công thức trên được gọi là công thức Taylo – Iang.

Chứng minh. Gọi $f_1, \dots, f_q$ là các hàm số thành phần của hàm f. Đó là các hàm số xác định trên (a, b) có đạo hàm cấp n − 1 tại mọi điểm của khoảng này và có đạo hàm cấp n tại điểm x_0. Áp dụng công thức Taylo − Iang cho trường hợp hàm số một biến số (xem định lí III.7.2), ta được

$$f_1(x_0 + h) = f_1(x_0) + \frac{f_1'(x_0)}{1!}h + \frac{f_1''(x_0)}{2!}h^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f_1^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + \dots + \frac{f_1^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + h^n\varepsilon_1(h),$$

$$f_2(x_0 + h) = f_2(x_0) + \frac{f_2'(x_0)}{1!}h + \frac{f_2''(x_0)}{2!}h^2 + \dots,$$

$$\dots + \frac{f_2^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + \dots + \frac{f_2^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + h^n\varepsilon_2(h).$$

. . . .

$$f_q(x_0 + h) = f_q(x_0) + \frac{f_q'(x_0)}{1!}h + \frac{f_q''(x_0)}{2!}h^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f_q^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + \dots + \frac{f_q^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + h^n\varepsilon_q(h),$$

trong đó $\varepsilon_1(h) \to 0, \dots, \varepsilon_q(h) \to 0$ khi $h \to 0$.

$$\frac{f_1^{(k)}(x_0)}{k!}h^k, \dots, \frac{f_q^{(k)}(x_0)}{k!}h^k$$

là các tọa độ của vectơ $\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k$, $(k = 1, \dots, q)$.

và

$$\varepsilon_1(h), \dots, \varepsilon_q(h)$$

là các tọa độ của vectơ $\varepsilon(h)$.

Vì $\varepsilon_1(h) \to 0, \dots, \varepsilon_q(h) \to 0$ khi $h \to 0$ nên $\varepsilon(h) \to 0$ khi $h \to 0$. Từ đó có công thức cần chứng minh

B. ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN CỦA HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ. HÀM ẨN VÀ HÀM NGƯỢC

§1. ĐẠO HÀM RIÊNG

Trong mục này ta sẽ nghiên cứu đạo hàm theo mỗi biến của một hàm số thực nhiều biến số. Ta cũng sẽ thiết lập công thức Taylo đối với hàm số nhiều biến số.

1.1. *Định nghĩa.* Giả sử U là một tập hợp mở trong không gian $\mathbf{R}^3$,

$$f : U \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$M = (x, y, z) \longmapsto f(M) = f(x, y, z)$$

là một hàm số xác định trên tập hợp U, $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in U$. Vì U là một tập hợp mở nên với $\eta > 0$ đủ nhỏ, ta có $(x, y_0, z_0) \in U$ với mọi $x \in (x_0 - \eta, x_0 + \eta)$. Nếu hàm số một biến số

$$g : (x_0 - \eta, x_0 + \eta) \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$x \longmapsto g(x) = f(x, y_0, z_0)$$

có đạo hàm tại điểm x_0 thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm riêng của hàm số f theo biến x tại điểm $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ và được kí hiệu là $f'_x(M_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0)$ hoặc $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$ hoặc $D_1f(x_0, y_0, z_0)$

Các đạo hàm riêng

$$f'_y(x_0, y_0, z_0) \text{ hoặc } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \text{ hoặc } D_2f(x_0, y_0, z_0),$$

$$f'_z(x_0, y_0, z_0) \text{ hoặc } \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \text{ hoặc } D_3f(x_0, y_0, z_0)$$

được định nghĩa tương tự.

Nếu U là một tập hợp mở trong không gian $\mathbf{R}^p$ và $f : U \to \mathbf{R}$ là một hàm số xác định trên U, $M_0 = (x_{(1)}^{(0)}, \dots, x_p^{(0)}) \in U$ thì các đạo hàm riêng

$$f'_{x_1}(x_1^{(0)}, \dots, x_p^{(0)}), \dots, f'_{x_p}(x_1^{(0)}, \dots, x_p^{(0)})$$

của hàm số f tại điểm M_0 được định nghĩa tương tự.

Ví dụ 1. Hàm số $f(x, y, z) = x + y + z$, xác định trên $\mathbf{R}^3$.

$$f'_x(x, y, z) = 1, \; f'_y(x, y, z) = 1, \; f'_z(x, y, z) = 1.$$

Ví dụ 2. Hàm số $f(x, y) = x^y$ xác định trên tập hợp $(0, +\infty) \times \mathbf{R}$.

Ta có
$$f'_x(x, y) = yx^{y-1},$$
$$f'_y(x, y) = x^y \ln x.$$

Ví dụ 3. Cho $f(x, y) = x$. Ta có

$$f'_x(x, y) = 1, \; f'_y(x, y) = 0 \text{ với mọi } (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Ví dụ 4. Giả sử $f(x, y, z) = c$ với mọi $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Khi đó $f'_x(x, y, z) = 0$, $f'_y(x, y, z) = 0$, $f'_z(x, y, z) = 0$ với mọi $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

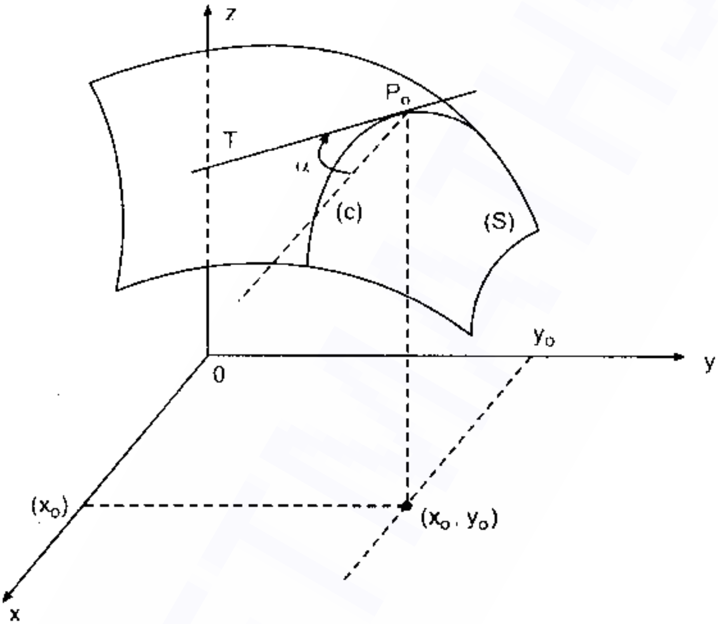
Ví dụ 5. Hàm số $f(x, y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ xác định trên tập hợp $(\mathbf{R} \setminus \{0\}) \times \mathbf{R}$.

Ta có
$$f'_x(x, y) = \frac{-\dfrac{y}{x^2}}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$f'_y(x, y) = \frac{\dfrac{1}{x}}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

1.2. *Ý nghĩa hình học*

Giả sử hàm số $f : U \to \mathbf{R}$ xác định trên tập hợp mở $U \subset \mathbf{R}^2$ và có đạo hàm riêng $f'_x(x_0, y_0)$ tại điểm (x_0, y_0).



Hình 27

Gọi mặt S là đồ thị của hàm số $z = f(x, y)$, C là giao tuyến của mặt S với mặt phẳng $y = y_0$. Khi đó $f'_x(x_0, y_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến P_0T của đường cong C, tại điểm $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, tức là $f'_x(x_0, y_0) = \text{tg}\alpha$, trong đó α là góc tạo bởi tiếp tuyến P_0T với trục Ox. Đạo hàm riêng $f'_y(x_0, y_0)$ cũng có ý nghĩa hình học tương tự.

1.3. *Chú ý.* Hàm số nhiều biến số có thể có các đạo hàm riêng tại một điểm gián đoạn của hàm số đó. Ta lấy lại một ví dụ đã biết. Hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{với } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{với } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

gián đoạn tại điểm (0, 0) nhưng có các đạo hàm riêng tại điểm này. $f'_x(0, 0) = 0$ và $f'_y(0, 0) = 0$ (vì $f(x, 0) = 0$ và $f(0, y) = 0$ với mọi $x, y \in \mathbf{R}$).

1.4. Giả sử U là một tập hợp mở trong không gian $\mathbf{R}^3$ và f là một hàm số thực xác định trên U. Nếu f có các đạo hàm riêng f'_x, f'_y, f'_z tại mọi điểm của U và f'_x, f'_y, f'_z là những hàm số liên tục trên U thì ta nói rằng hàm số f có các đạo hàm riêng liên tục trên U. Hiển nhiên nếu f và g là hai hàm số thực có các đạo hàm riêng liên tục trên U thì f + g, fg, là những hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên U. Nếu ngoài ra g khác không trên U thì hàm số $\dfrac{f}{g}$ có các đạo hàm riêng liên tục trên U.

Đạo hàm của hàm số hợp

1.5. *Định lí.* Giả sử U là một tập hợp mở trong không gian $\mathbf{R}^2$, $f : U \to \mathbf{R}$ là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên U ; $u, v : I \to \mathbf{R}$ là hai hàm số xác định trên khoảng $I \subset \mathbf{R}$ sao cho $(u(t), v(t)) \in U$ với mọi $t \in I$. Nếu u và v có các đạo hàm $u'(t_0)$ và $v'(t_0)$ tại điểm $t_0 \in I$ thì hàm số

$$F(t) = f(u(t), v(t)), \ t \in I$$

có đạo hàm tại điểm t_0 và

$$F'(t_0) = f'_x(u(t_0), v(t_0))u'(t_0) + f'_y(u(t_0), v(t_0))v'(t_0)$$

Chứng minh. Vì $(u(t_0), v(t_0)) \in U$ và U là một tập hợp mở nên tồn tại một số dương η sao cho

$$(\forall x, y \in \mathbf{R}) \ |x - u(t_0)| + |y - v(t_0)| < \eta \Rightarrow (x, y) \in U.$$

Do u và v liên tục tại điểm t_0 nên tồn tại một số dương δ sao cho

$(\forall t \in I)\ |t - t_0| < \delta \Rightarrow |u(t) - u(t_0)| + |v(t) - v(t_0)| < \eta.$

Trong suốt chứng minh này, từ đây ta luôn giả sử $|t - t_0| < \delta$. Ta có

$$F(t) - F(t_0) = f(u(t), v(t)) - f(u(t_0), v(t_0)) =$$
$$= f(u(t), v(t)) - f(u(t_0), v(t)) +$$
$$+ f(u(t_0), v(t)) - f(u(t_0), v(t_0))$$

với mọi $t \in I$. Hàm số $x \mapsto f(x, v(t))$ có đạo hàm trên đoạn với hai đầu là $u(t_0)$ và $u(t)$ nên theo định lí Lagrang,

$$f(u(t), v(t)) - f(u(t_0), v(t)) =$$
$$= [u(t) - u(t_0)]f'_x(u(t_0) + \theta_1(u(t) - u(t_0)), v(t))$$

với $0 < \theta_1 < 1$. Tương tự, hàm số $y \mapsto f(u(t_0), y)$ có đạo hàm trên đoạn với các đầu là $v(t_0)$ và $v(t)$. Do đó tồn tại $\theta_2 \in (0, 1)$ sao cho

$$f(u(t_0), v(t)) - f(u(t_0), v(t_0)) =$$
$$= [v(t) - v(t_0)]f'_y(u(t_0), v(t_0) + \theta_2(v(t) - v(t_0))).$$

Do đó, với mọi $t \neq t_0$, ta có

$$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} f'_x(u(t_0) + \theta_1(u(t) - u(t_0)), v(t)) +$$
$$+ \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} f'_y(u(t_0), v(t_0) + \theta_2(v(t) - v(t_0))).$$

Cho $t \to t_0$, ta được

$$\frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} \to u'(t_0),\quad \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} \to v'(t_0),$$
$$u(t) \to u(t_0), \qquad v(t) \to v(t_0).$$

Vì f'_x và f'_y liên tục trên U nên

$$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} \to u'(t_0)f_x'(u(t_0),\ v(t_0)) + v'(t_0)f_y'(u(t_0),\ v(t_0)).$$

Vậy F có đạo hàm tại điểm t_0 và ta có công thức cần chứng minh.

Ví dụ. Giả sử $t \longmapsto u(t)$ và $t \longmapsto v(t)$ là hai hàm số xác định trên khoảng I, $u(t) > 0$ với mọi $t \in I$. Khi đó hàm số $t \longmapsto u(t)^{v(t)}$ xác định trên I và có đạo hàm

$$F'(t) = v(t)u(t)^{v(t)-1}u'(t) + u(t)^{v(t)}\ln(u(t))v'(t),\ t \in I.$$

Từ định lí 1.5 suy ra

1.6. *Hệ quả.* Giả sử U và V là hai tập hợp mở trong không gian $\mathbf{R}^2$, $f : U \to \mathbf{R}$ là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên U,

$$\begin{aligned} x &: V \to \mathbf{R} & \text{và} \quad y &: V \to \mathbf{R} \\ (s,\ t) &\longmapsto x(s,\ t) & (s,\ t) &\longmapsto y(s,\ t) \end{aligned}$$

là hai hàm số xác định trên V sao cho

$$(x(s,\ t),\ y(s,\ t)) \in U \text{ với mọi } (s,\ t) \in V.$$

Nếu x và y có các đạo hàm riêng tại điểm $(s_0,\ t_0) \in U$ thì hàm số hợp

$$\begin{aligned} F &: V \to \mathbf{R} \\ (s,\ t) &\longmapsto F(s,\ t) = f(x(s,\ t),\ y(s,\ t)) \end{aligned}$$

có các đạo hàm riêng tại điểm $(s_0,\ t_0)$ và

$$\frac{\partial F}{\partial s}(s_0, t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(s_0, t_0), y(s_0, t_0))\frac{\partial x}{\partial s}(s_0, t_0) + $$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(x(s_0, t_0), y(s_0, t_0))\frac{\partial y}{\partial s}(s_0, t_0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Ví dụ 1. Cho hàm số $z = (3x - y)\ln(x^2 + y^2)$. Tính z_x' và z_y'. Đặt $u = 3x - y$, $v = x^2 + y^2$, ta được

$$z = u\ln v$$

$$z_x(x, y) = 3\ln v + \frac{u}{v} . 2x = 3\ln(x^2 + y^2) + \frac{2x(3x - y)}{x^2 + y^2} .$$

$$z_y(x, y) = -\ln v + \frac{u}{v} . 2y = -\ln(x^2 + y^2) + \frac{2y(3x - y)}{x^2 + y^2} .$$

với mọi $(x, y) \neq (0, 0)$.

Ví dụ 2. Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục trên $\mathbf{R}^2$, (r, φ) là tọa độ cực của điểm (x, y). Khi đó

$$z = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi),$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -\frac{\partial f}{\partial x} r\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial y} r\cos\varphi.$$

Hệ quả 1.6 có thể được mở rộng cho trường hợp f là một hàm số của p biến số $x_1, \ldots, x_p$ và $x_1, \ldots, x_p$ là những hàm số q biến số, trong đó p và q là những số nguyên dương bất kì.

1.7. Giả sử U, V là những tập hợp mở trong các không gian $\mathbf{R}^p$ và $\mathbf{R}^q$,

$$f : U \to \mathbf{R}$$

$$(x_1, \ldots, x_p) \mapsto f(x_1, \ldots, x_p)$$

là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên U,

$$x_1 : V \to \mathbf{R}, \ \ldots, \qquad x_p : V \to \mathbf{R}$$

$$(t_1, \ldots, t_q) \mapsto x_1(t_1, \ldots, t_q) \quad (t_1, \ldots, t_q) \mapsto x_p(t_1, \ldots, t_q)$$

là những hàm số xác định trên V sao cho

$$(x_1(t_1, \ldots, t_q), \ldots, x_p(t_1, \ldots, t_q)) \in U \text{ với mọi } (t_1, \ldots, t_q) \in V.$$

Khi đó nếu $x_1, \ldots, x_p$ có các đạo hàm riêng tại điểm $(t_1, \ldots, t_q)$ thì hàm số hợp

$$F : V \to \mathbf{R}$$

$$F(t_1, \ldots, t_q) = f(x_1(t_1, \ldots, t_q), \ldots, x_p(t_1, \ldots, t_q))$$

có các đạo hàm riêng tại điểm $(t_1, \ldots, t_q)$ và

$$\frac{\partial F}{\partial t_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_p}\frac{\partial x_p}{\partial t_i},$$

$$i = 1, \ldots, q.$$

Đạo hàm riêng cấp hai

1.8. *Định nghĩa*. Giả sử U là một tập hợp mở trong không gian $\mathbf{R}^3$, $f : U \to \mathbf{R}$ là một hàm số có các đạo hàm riêng trên U. Khi đó $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ là những hàm số xác định trên U.

Nếu $\frac{\partial f}{\partial x}$ có các đạo hàm riêng

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0, z_0)$$

tại điểm $(x_0, y_0, z_0) \in U$ thì chúng được gọi là những đạo hàm riêng cấp hai của hàm số f tại điểm (x_0, y_0, z_0) và theo thứ tự được kí hiệu bởi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x_0, y_0, z_0)$$

hoặc

$$f''_{x^2}(x_0, y_0, z_0), f''_{xy}(x_0, y_0, z_0), f''_{xz}(x_0, y_0, z_0).$$

Các đạo hàm riêng

$$f''_{yx}, f''_{y^2}, f''_{yz} \text{ và } f''_{zx}, f''_{zy}, f''_{z^2}$$

được định nghĩa một cách tương tự.

Ví dụ. Hàm số $f(x, y) = x^y$ xác định trên tập hợp $(0, +\infty) \times \mathbf{R}$. Ta có

$$f'_x = yx^{y-1}, \quad f'_y = x^y \ln x,$$

$$f''_{x^2} = y(y-1)x^{y-2}; \quad f''_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x.$$

$$f''_{yx} = yx^{y-1}\ln x + x^{y-1}; \quad f''_{y^2} = x^y(\ln x)^2.$$

Ta thấy $f''_{xy} = f''_{yx}$. Kết quả này không phải là ngẫu nhiên. Nó được suy ra từ định lí sau :

1.9. *Định lí Svác* (Schwarz). Giả sử U là một tập hợp mở trong không gian $\mathbf{R}^2$. Nếu hàm số $f : U \to \mathbf{R}$ có các đạo hàm riêng f''_{xy} và f''_{yx} liên tục tại điểm $(x_0, y_0) \in U$ thì

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Chứng minh. Đặt

$\Phi = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$,

(h, k là những số thực đủ nhỏ sao cho đoạn thẳng nối hai điểm (x_0, y_0) và $(x_0 + h, y_0 + k)$ nằm trong U)

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0) \tag{1}$$

$$\psi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y) \tag{2}$$

với x, y đủ gần x_0, y_0. Ta tính Φ theo hai cách

$$\Phi = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) \tag{3}$$

$$\Phi = \psi(y_0 + k) - \psi(y_0) \tag{4}$$

Từ (1) ta có

$$\varphi'(x) = f'_x(x, y_0 + k) - f'_x(x, y_0).$$

Áp dụng công thức số gia hữu hạn vào (3), ta được

$$\Phi = h\varphi'(x_0 + \theta_1 h) =$$

$$= h[f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0)].$$

Lại áp dụng công thức số gia hữu hạn, ta được

$$\Phi = hkf''_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k) \tag{5}$$

trong đó $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$.

Từ (2), ta có

$$\psi'(y) = f'_y(x_0 + h, y) - f'_y(x_0, y).$$

Áp dụng công thức số gia hữu hạn vào (4), ta được

$$\Phi = k\varphi'(y_0 + \theta_3 k) =$$

$$= k[f'_y(x_0 + h,\ y_0 + \theta_3 k) - f'_y(x_0,\ y_0 + \theta_3 k)]$$

$$\Phi = khf''_{yx}(x_0 + \theta_4 h,\ y_0 + \theta_3 k) \qquad (6)$$

trong đó $0 < \theta_3 < 1$, $0 < \theta_4 < 1$.

Từ (5) và (6) suy ra, với $h \neq 0$ và $k \neq 0$,

$$f''_{xy}(x_0 + \theta_1 h,\ y_0 + \theta_2 k) = f''_{yx}(x_0 + \theta_4 h,\ y_0 + \theta_3 k).$$

Cho $(h, k) \to (0, 0)$. Vì f''_{xy} và f''_{yx} liên tục tại điểm (x_0, y_0), từ đẳng thức trên suy ra

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Chú ý. Nếu các đạo hàm riêng f''_{xy} và f''_{yx} gián đoạn tại điểm (x_0, y_0), chúng có thể khác nhau tại điểm này.

Ví dụ. Hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{với } x^2 + y^2 > 0, \\ 0 & \text{với } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

liên tục tại điểm (0, 0). Các đạo hàm riêng cấp một của f là :

$$f'_x(0, y) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x - 0} = \lim_{x \to 0}\left(y\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) = -y,$$

$$f'_y(x, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0}\left(x\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) = x,$$

$f'_x(0, 0) = 0$, $f'_y(0, 0) = 0$. Do đó

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f'_x(0, y) - f'_x(0, 0)}{y} = -1,$$

$$f''_{yx}(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f'_y(x, 0) - f'_y(0, 0)}{y} = 1.$$

Ta thấy các đạo hàm riêng f''_{xy} và f''_{yx} khác nhau tại điểm (0, 0).

1.10. Có thể mở rộng định lí 1.8 cho hàm số p biến số, trong đó p là một số nguyên dương bất kì :

Nếu U là một tập hợp mở trong không gian $\mathbf{R}^p$ và hàm số

$$f : U \to \mathbf{R}$$

$$(x_1, ..., x_p) \mapsto f(x_1, ..., x_p)$$

có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục tại điểm $(x_1^0, ..., x_p^0) \in U$ thì

$$f''_{x_i x_j} = f''_{x_j x_i} \quad \text{tại điểm này.}$$

Thật vậy, với i = 1, j = 2 chẳng hạn,

$$(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2, x_3^0, ..., x_p^0)$$

là một hàm số hai biến số. Hai đạo hàm riêng nói trên cũng là hai đạo hàm riêng của hàm số này.

Đạo hàm riêng cấp cao

1.11. a) Các đạo hàm riêng cấp 3, 4, ..., n của một hàm số được định nghĩa bằng quy nạp.

b) Giả sử $f : U \to \mathbf{R}$ là một hàm số xác định trên tập hợp mở U trong $\mathbf{R}^2$. Nếu f có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp 3 trên U thì

$$f'''_{x^2y} = f'''_{xyx} = f'''_{yx^2} ; \ f'''_{xy^2} = f'''_{yxy} = f'''_{y^2x}.$$

Như vậy ta chỉ phải xét các đạo hàm riêng cấp 3 sau :

$$f'''_{x^3}, \ f'''_{x^2y}, \ f'''_{xy^2}, \ f'''_{y^3}$$

Các đạo hàm riêng nói trên cũng được kí hiệu là

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}.$$

c) Đối với hàm số p biến

$$(x_1, \ldots, x_p) \mapsto f(x_1, \ldots, x_p),$$

đạo hàm riêng tổng quát nhất được viết dưới dạng

$$f^{(k_1 + k_2 + \ldots + k_p)}_{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_p^{k_p}}$$

hoặc

$$\frac{\partial^{k_1 + k_2 + \ldots + k_p} f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_p^{k_p}}$$

với điều kiện các đạo hàm riêng cho đến cấp $k_1 + \ldots + k_p$ của f đều liên tục.

d) Giả sử U là một tập hợp mở trong không gian $\mathbf{R}^p$. Ta nói rằng hàm số $f : U \to \mathbf{R}$ thuộc lớp $C^{(n)}$ nếu nó có các đạo hàm riêng cho đến cấp n liên tục trên U. Hàm số f liên tục trên U được gọi là thuộc lớp $C^{(0)}$.

Đạo hàm cấp cao của một hàm số hợp

1.12. Giả sử U là một tập hợp mở trong $\mathbf{R}^2$, hàm số $f : U \to \mathbf{R}$ có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp n trên U, các hàm số $x, y : I \to \mathbf{R}$ có đạo hàm đến cấp n trên khoảng I và

$$(x(t), y(t)) \in U \text{ với mọi } t \in I.$$

Khi đó hàm số

$$F : I \to \mathbf{R}$$
$$t \mapsto F(t) = f(x(t), y(t))$$

có đạo hàm đến cấp n trên I và

$$F'(t) = f'_x(x(t), y(t))x'(t) + f'_y(x(t), y(t))y'(t),$$

$$F''(t) = f''_{x^2}(x(t), y(t))x'^2(t) + 2f''_{xy}(x(t), y(t))x'(t)y'(t) +$$

$$+ f''_{y^2}(x(t), y(t))y'^2(t) + f'_x(x(t), y(t))x''(t) + f'_y(x(t), y(t))y''(t).$$

Công thức tính đạo hàm cấp $n > 2$ khá phức tạp.

Ta xét một trường hợp đặc biệt.

1.13. Giả sử hàm số $f : U \to \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục cho đến cấp n trên tập hợp mở $U \subset \mathbf{R}^2$, (x_0, y_0) là một điểm của U. Khi đó hàm số hợp

$$F(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt),$$

trong đó h và k là hai hằng số, có đạo hàm cấp n trên một lân cận của điểm $t = 0$ và

$$F^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i h^{n-i} k^i \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i} \partial y^i}(x_0 + ht, y_0 + kt).$$

Để dễ nhớ công thức trên, ta đưa ra một kí hiệu hình thức :

$$F^{(n)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^n f(x_0 + ht, y_0 + kt).$$

Chứng minh. Với $n = 1$, ta có

$$F'(t) = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$F''(t) = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Giả sử công thức đúng cho $n - 1$. Ta chứng minh nó đúng cho n.

Ta có

$$F^{(n-1)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i h^{n-1-i} k^i \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1-i} \partial y^i}.$$

Do đó

$$F^n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i h^{n-i} k^i \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i} \partial y^i} + \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i h^{n-1-i} k^{i+1} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1-i} \partial y^{i+1}} =$$

$$= C_n^0 h^n \frac{\partial^n f}{\partial x^n} + \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^i h^{n-i} k^i \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i} \partial y^i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i-1} h^{n-i} k^i \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i} \partial y^i} +$$

$$+ C_n^n k^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i h^{n-i} k^i \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i} \partial y^i},$$

vì $\quad C_{n-1}^{i-1} + C_{n-1}^{i} = C_n^i.$

1.14. Công thức trên vẫn đúng cho trường hợp hàm số f có p biến số với $p > 2$. Chẳng hạn ; nếu $f : U \to \mathbf{R}$ là một hàm số có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trên tập hợp mở $U \subset \mathbf{R}^3$ và (x_0, y_0, z_0) là một điểm của U thì hàm số

$$F(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt, z_0 + lt),$$

trong đó h, k, l là những hằng số, có đạo hàm cấp hai trên một lân cận của điểm $t = 0$ và

$$F''(t) = h^2 f''_{x^2} + k^2 f''_{y^2} + l^2 f''_{z^2} + 2hkf''_{xy} + 2hlf''_{xz} + 2klf''_{yz}.$$

Đạo hàm theo hướng

1.15. ***Định nghĩa.*** Giả sử hàm số $f : U \to \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ xác định trên một tập hợp mở $U \subset \mathbf{R}^2$, $(x_0, y_0) \in U$ và p là một tia đi qua điểm (x_0, y_0) mà phương trình là

$$x = x_0 + \alpha t,\ y = y_0 + \beta t \text{ với } t \geqslant 0,\ \alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t) - f(x_0, y_0)}{t} \in \mathbf{R}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm theo hướng p của hàm số f tại điểm (x_0, y_0) và được kí hiệu là

$$\frac{\partial f}{\partial p}(x_0, y_0) \quad \text{hoặc} \quad D_p f(x_0, y_0) \text{ hoặc } f'_p(x_0, y_0).$$

$\frac{\partial f}{\partial p}(x_o, y_o)$ là đạo hàm của hàm số hợp

$$t \mapsto F(t) = f(x_o + \alpha t, y_o + \beta t)$$

tại điểm $t = 0$.

Với $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\frac{\partial f}{\partial p}(x_o, y_o)$ trở thành đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)$ (theo hướng dương của trục Ox). Với $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\frac{\partial f}{\partial p}(x_o, y_o)$ trở thành đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)$ (theo hướng dương của trục Oy).

1.16. *Từ công thức trong 1.13 suy ra*

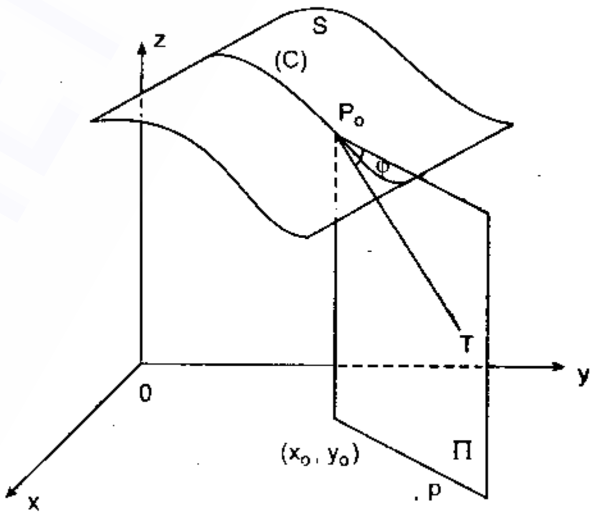
Nếu hàm số f có các đạo hàm riêng f'_x và f'_y liên tục trên một lân cận của điểm (x_o, y_o) thì nó có đạo hàm theo mọi hướng tại điểm này và

$$\frac{\partial f}{\partial p}(x_o, y_o) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)\beta.$$

1.17. *Ý nghĩa hình học*

Gọi mặt S là đồ thị của hàm số $z = f(x, y)$, π là mặt phẳng đi qua tia p và vuông góc với mặt phẳng Oxy, (C) là đường cong giao tuyến của π và S. Phương trình của (C) là

$$z = f(x_o + \alpha t, y_o + \beta t),$$



Hình 28

Nếu tồn tại đạo hàm theo hướng p của f tại điểm (x_o, y_o) thì đường cong (C) có tiếp tuyến tại điểm $P_o(x_o, y_o, z_o)$ và $\dfrac{\partial f}{\partial p}(x_o, y_o)$ bằng $tg\varphi$, trong đó φ là góc tạo bởi tia p và tia tiếp tuyến P_oT.

Chú ý rằng vectơ $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ là vectơ đơn vị chỉ hướng của tia p. Một cách tổng quát ta có

1.18. *Định nghĩa.* Giả sử U là một tập hợp mở trong không gian $\mathbf{R}^p$, $f : U \to \mathbf{R}$ là một hàm số xác định trên U, $M_o(x_1^o, \ldots, x_p^o)$ là một điểm của U, $\vec{u} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ là một vectơ đơn vị trong $\mathbf{R}^p$. $\left(\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i^2 = 1\right)$. Nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_1^o + \alpha_1 t, \ldots, x_p^o + \alpha_p t) - f(x_1^o, \ldots, x_p^o)}{t} \in \mathbf{R}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm theo hướng $\vec{u}$ của hàm số f tại điểm M_o và được kí hiệu là

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_1^o, \ldots, x_p^o) \text{ hoặc } D_{\vec{u}}f(x_1^o, \ldots, x_p^o) \text{ hoặc } f'_{\vec{u}}(x_1^o, \ldots, x_p^o).$$

1.19. Tương tự như 1.16 ta có

Nếu hàm số $(x_1, \ldots, x_p) \mapsto f(x_1, \ldots, x_p)$ có các đạo hàm riêng liên tục trên một lân cận của điểm $M_o(x_1^o, \ldots, x_p^o)$ thì nó có đạo hàm theo mọi hướng tại điểm này và

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(M_o) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(M_o)\alpha_i.$$

Công thức Taylo

1.20. Giả sử U là một tập hợp mở trong không gian $\mathbf{R}^2$, $f : U \to \mathbf{R}$ là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp n trên U, $M_o(x_o, y_o)$ và $M(x_o + h, y_o + k)$ là hai điểm của U. Khi số thực t biến thiên từ 0 đến 1, điểm $M_o + t\overrightarrow{M_oM} =$

$(x_o + ht, y_o + kt)$ vạch nên đoạn thẳng M_oM. Ta lấy h và k đủ nhỏ sao cho đoạn thẳng này nằm trọn trong U.

Định lí. Với các điều kiện nêu trên, tồn tại một số $\theta \in (0, 1)$ sao cho

$$f(x_o + h, y_o + k) = f(x_o, y_o) + hf'_x(x_o, y_o) + kf'_y(x_o, y_o) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x_o, y_o) +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} + 3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} + k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)(x_o, y_o) +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!}\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i h^{n-1-i}k^i \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1-i}\partial y^i}(x_o, y_o) +$$

$$+ \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n} C_n^i h^{n-i}k^i \frac{\partial_n f}{\partial x^{n-i}\partial y^i}(x_o + \theta h, y_o + \theta h).$$

Công thức trên gọi là công thức Taylo đối với hàm số hai biến số. Để dễ nhớ, ta viết công thức một cách hình thức dưới dạng

$$f(x_o + h, y_o + k) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f(x_o, y_o) +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_o + \theta h, y_o + \theta k).$$

Chứng minh. Xét hàm số

$$F(t) = f(x_o + ht, y_o + kt) \text{ trên đoạn } [0, 1].$$

Từ giả thiết suy ra hàm số F có đạo hàm cấp n trên [0, 1]. Theo công thức Mac – Lôranh đối với hàm số một biến số, tồn tại một số $\theta \in (0, 1)$ sao cho

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \frac{F''(0)}{2!} + \ldots + \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{F^{(n)}(\theta)}{n!} \quad (1)$$

Ta đã biết

$$F(0) = f(x_o + ht, y_o + kt)|_{t=0} = f(x_o, y_o),$$

$$F'(0) = h\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o),$$

$$F''(0) = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_o, y_o) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_o, y_o) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_o, y_o),$$

. . . .

$$F^{(n-1)}(0) = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i h^{n-1-i}k^i\frac{\partial^{n-1}f}{\partial x^{n-1-i}\partial y^i}(x_o, y_o),$$

$$F^{(n)}(\theta) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i h^{n-i}k^i\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i}\partial y^i}(x_o + \theta h, y_o + \theta k).$$

Thay vào (1) ta được công thức cần chứng minh.

Trong trường hợp $n = 1$, ta có

1.21. *Định lí* (Lagrăng). Giả sử hàm số $f : U \to \mathbf{R}$ có các đạo hàm riêng liên tục trên tập hợp mở $U \subset \mathbf{R}^2$, $M_o(x_o, y_o)$ và $M(x_o + h, y_o + k)$ là hai điểm của U sao cho đoạn thẳng M_oM nằm trọn trong U. Khi đó tồn tại một số $\theta \in (0, 1)$ sao cho

$$f(x_o + h, y_o + k) = f(x_o, y_o) +$$

$$+ h\frac{\partial f}{\partial x}(x_o + \theta h, y_o + \theta k) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_o + \theta h, y_o + \theta k).$$

Từ đó suy ra rằng nếu hàm số $(x, y) \mapsto f(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục trên một lân cận của điểm (x_o, y_o) thì nó liên tục tại điểm (x_o, y_o).

1.22. Công thức Taylo đối với hàm số p biến số được chứng minh tương tự như trường hợp hàm số hai biến số.

Giả sử U là một tập hợp mở trong không gian $\mathbf{R}^p$, $f : U \to \mathbf{R}$ là một hàm số có các đạo hàm riêng đến cấp n liên tục trên U, $(x_1^o, ..., x_p^o)$ và $(x_1^o + h_1, ..., x_p^o + h_p)$ là những điểm của U sao cho khi t biến thiên từ 0 đến 1, điểm $(x_1^o + h_1t, \ldots, x_p^o + h_pt) \in U$. Khi đó tồn tại một số $\theta \in (0, 1)$ sao cho

$$f(x_1^o + h_1, \ldots, x_p^o + h_p) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{i_1 + \ldots + i_p = i} \frac{h_1^{i_1}}{i_1!} \frac{h_2^{i_2}}{i_2!} \cdots \frac{h_p^{i_p}}{i_p!} \frac{\partial^i f}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_p^{i_p}} (x_1^o, \ldots, x_p^o) +$$

$$+ \sum_{i_1 + \ldots + i_p = n} \frac{h_1^{i_1}}{i_1!} \frac{h_2^{i_2}}{i_2!} \cdots \frac{h_p^{i_p}}{i_p!} \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_p^{i_p}} (x_1^o + \theta h_1, \ldots, x_p^o + \theta h_p).$$

Để dễ nhớ, ta viết công thức Taylo đối với hàm số p biến số một cách hình thức dưới dạng

$$f(x_1^o + h_1, \ldots, x_p^o + h_p) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_p} h_p \right)^{(i)} f(x_1^o, \ldots, x_p^o) +$$

$$+ \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_p} h_p \right)^{(n)} f(x_1^o + \theta h_1, \ldots, x_p^o + \theta h_p)$$

(Ta biết rằng với p số thực $a_1, a_2, \ldots, a_p$ bất kì và với i nguyên dương bất kì, ta có

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_p)^i = \sum_{i_1 + i_2 + \ldots + i_p = i} \frac{i!}{i_1! i_2! \ldots i_p!} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots a_p^{i_p}).$$

§2. VI PHÂN

Ta biết rằng dạng tổng quát của các dạng tuyến tính trên không gian $\mathbf{R}^p$ là các hàm số

$$(h_1, h_2, \ldots, h_p) \mapsto a_1h_1 + a_2h_2 + \ldots + a_ph_p,$$

trong đó $a_1, \ldots, a_p$ là những hằng số thực.

Ta bắt đầu bằng trường hợp p = 3. Trường hợp p nguyên dương bất kì là hoàn toàn tương tự.

2.1. *Định nghĩa.* Giả sử U là một tập hợp mở trong không gian $\mathbf{R}^3$, $f : U \to \mathbf{R}$ là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên U, M = (x, y, z) là một điểm của U. Dạng tuyến tính

$$(h, k, l) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(M)h + \frac{\partial f}{\partial y}(M)k + \frac{\partial f}{\partial z}(M)l$$

trên $\mathbf{R}^3$ gọi là vi phân của hàm số f tại điểm M và được kí hiệu là $d_M f$.

Như vậy $d_M f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ là hàm số trên $\mathbf{R}^3$ xác định bởi

$$d_M f(h, k, l) = \frac{\partial f}{\partial x}(M)h + \frac{\partial f}{\partial y}(M)k + \frac{\partial f}{\partial z}(M)l.$$

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x, y, z) = x^2y - 2xyz + 1$.

Hàm số f có các đạo hàm riêng liên tục trên $\mathbf{R}^3$. Ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2xy - 2yz,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x^2 - 2xz,\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -2xy.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1, 2) = 2,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1, 2) = -3,\ \frac{\partial f}{\partial z}(1, -1, 2) = 2.$$

Do đó

$$d_{(1, -1, 2)}f(h, k, l) = 2h - 3k + 2l.$$

Ví dụ 2. Hàm số $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y}$ có các đạo hàm riêng liên tục trên tập hợp $\mathbf{R} \times (\mathbf{R} \setminus \{0\})$.

$$f'_x(x, y) = \frac{2x}{y},\ f'_y(x, y) = -\frac{x^2}{y^2}.$$

$$f'_x(3, 1) = 6,\ f'_y(3, 1) = -9.$$

Do đó

$$d_{(3, 1)}f(h, k) = 6h - 9k.$$

2.2. *Quan hệ giữa số gia và vi phân của một hàm số*

Giả sử U là một tập hợp mở trong không gian $\mathbf{R}^3$, hàm số $f : U \to \mathbf{R}$ có các đạo hàm riêng liên tục trên U, $M = (x, y, z) \in U$. Khi đó

$$f(x + h, y + k, z + l) - f(x, y, z) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(M)h + \frac{\partial f}{\partial y}(M)k + \frac{\partial f}{\partial z}(M)l + o(|h| + |k| + |l|)$$

$$= d_M f(h, k, l) + o(|h| + |k| + |l|)$$

khi $(h, k, l) \to (0, 0, 0)$.

Như vậy với các số gia nhỏ h, k, l của các biến số, giá trị của vi phân $d_M f$ tại (h, k, l) là giá trị gần đúng của số gia của hàm số.

Ví dụ. Ta trở lại ví dụ 2 của 2.1, $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y}$. Ta có

$$d_{(3,\ 1)}f(h, k) = 6h - 9k. \text{ Do đó}$$

$f(3 + h, 1 + k) - f(3, 1) = 6h - 9k + o(|h| + |k|)$ khi $(h, k) \to (0, 0)$. Như vậy với h, k nhỏ, $f(3 + h, 1 + k) - f(3, 1)$ xấp xỉ bằng $6h - 9k$. Ta thử kiểm tra điều này. Lấy $h = 0{,}007$, $k = 0{,}004$, ta có

$$d_{(3,\ 1)}f(0{,}007 ;\ 0{,}004) = 6 \times 0{,}007 - 9 \times 0{,}004 = 0{,}006,$$

$$f(3 + 0{,}007;\ 1 + 0{,}004) - f(3, 1) = 9{,}006002 \ldots - 9 = 0{,}006002\ldots$$

Ta thấy với các số gia nhỏ của các biến số có thể thay số gia của hàm số bởi vi phân của hàm số.

2.3. *Vi phân của một hàm số*

Định nghĩa. Giả sử $f : U \to \mathbf{R}$ có các đạo hàm riêng liên tục trên tập hợp mở $U \subset \mathbf{R}^3$. Ánh xạ

$$M \mapsto d_M f,\ M \in U$$

gọi là vi phân của hàm số f và được kí hiệu là df.

Ví dụ. Giả sử $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ là hàm số được xác định bởi

$$f(x, y, z) = x.$$

Hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên $\mathbf{R}^3$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 0, \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0.$$

Với mọi điểm $M = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Vi phân $d_M f$ của hàm số mà ta kí hiệu là $d_M x$ là dạng tuyến tính trên $\mathbf{R}^3$:

$$d_M x(h, k, l) = h, (h, k, l) \in \mathbf{R}^3.$$

Như vậy $d_M x$ không phụ thuộc vào điểm M. Kí hiệu dx thay cho $d_M x$ ta được

$$dx(h, k, l) = h.$$

Tương tự

$$dy(h, k, l) = k,$$

$$dz(h, k, l) = l.$$

2.4. *Dạng tổng quát của vi phân*

a) Giả sử f là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên tập hợp mở U trong $\mathbf{R}^3$. Vi phân của hàm số f tại điểm $M = (x, y, z) \in U$ là dạng tuyến tính trên $\mathbf{R}^3$ xác định bởi

$$d_M f(h, k, l) = \frac{\partial f}{\partial x}(M)h + \frac{\partial f}{\partial y}(M)k + \frac{\partial f}{\partial z}(M)l =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(M)\,dx\right)(h, k, l) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(M)dy\right)(h, k, l) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}(M)\right)(h, k, l)$$

Từ đó suy ra

$$\boxed{d_M f = \frac{\partial f}{\partial x}(M)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M)\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}(M)\,dz}$$

b) Nếu U là một tập hợp mở trong $\mathbf{R}^p$, $f : U \to \mathbf{R}$ là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên U, $M = (x_1, ..., x_p) \in U$ thì vi phân của hàm số f tại điểm M có dạng

$$\boxed{d_M f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M)\,dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(M)\,dx_p}$$

trong đó $dx_1, \ldots, dx_p$ là những dạng tuyến tính trên $\mathbf{R}^3$ xác định bởi $dx_1(h_1, \ldots, h_p) = h_1$,

$$dx_2(h_1, \ldots, h_p) = h_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$dx_p(h_1, \ldots, h_p) = h_p,$$

2.5. Trong III.10.5, ta đã cho các công thức tính vi phân của một số hàm số thường gặp. Ở đây ta sẽ cho các công thức tính vi phân của một số hàm số thường gặp khác.

$$d(\text{ch}x) = \text{sh}x\,dx,$$

$$d(\text{sh}x) = \text{ch}x\,dx,$$

$$d(\text{th}x) = \frac{dx}{\text{ch}^2 x},$$

$$d(\text{argsh}x) = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$d(\text{argch}x) = \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$d(\text{argth}x) = \frac{1}{1-x^2},$$

$$d(x+y) = dx + dy,$$

$$d(xy) = y\,dx + x\,dy,$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}.$$

2.6. *Vi phân của một hàm số hợp*

Định lí. Giả sử U và V là những tập hợp mở trong các không gian $\mathbf{R}^p$ và $\mathbf{R}^q$.

$$\varphi : U \longrightarrow V$$

$$(t_1, \ldots, t_p) \longmapsto \varphi(t_1, \ldots, t_p) =$$

$$= (x_1(t_1, \ldots, t_p), \ldots, x_q(t_1, \ldots, t_p))$$

là một hàm mà các hàm số thành phần $x_1, \ldots, x_q$ đều có các đạo hàm riêng liên tục trên U, hàm số

$$f : V \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$(x_1, \ldots, x_q) \longmapsto f(x_1, \ldots, x_q)$$

có các đạo hàm riêng liên tục trên V.

Khi đó hàm số hợp.

$$F = f \circ \varphi : U \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$(t_1, \ldots, t_p) \longmapsto F(t_1, \ldots, t_p) = f[\varphi((t_1, \ldots, t_p)],$$

$$F(t_1, \ldots, t_p) = f(x_1(t_1, \ldots, t_p), \ldots, x_q(t_1, \ldots, t_p))$$

có các đạo hàm riêng liên tục trên U và

$$\boxed{dF = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_q)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \ldots, x_q)dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{dx_q}(x_1, \ldots, x_q)dx_q}$$

Chứng minh. Để đơn giản ta chứng minh cho trường hợp $p = 2$, $q = 3$. Trường hợp tổng quát được chứng minh một cách tương tự.

Giả sử

$$\varphi : U \longrightarrow V$$

$$(s, t) \longmapsto \varphi(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)),$$

$$f : V \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z)$$

và

$$F = f \circ \varphi : U \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$(s, t) \longmapsto F(s, t) = f(x(s, t), y(s, t), z(s, t)).$$

Ta chứng minh

$$d_{(s,t)}F = \frac{\partial f}{\partial x}(x(s, t), y(s, t), z(s, t))\, d_{(s,t)}x$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(x(s, t), y(s, t), z(s, t))\, d_{(s,t)}y$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial z}(x(s, t), y(s, t), z(s, t))\, d_{(s,t)}z$$

Thật vậy, ta có

$$\frac{\partial F}{\partial s}(s, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(s, t), y(s, t), z(s, t))\frac{\partial x}{\partial s}(s, t) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(x(s, t), y(s, t), z(s, t))\frac{\partial y}{\partial s}(s, t) + \frac{\partial f}{\partial z}(x(s, t), y(s, t), z(s, t))\frac{\partial z}{\partial s}(s, t),$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}(s, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(s, t), y(s, t), z(s, t))\frac{\partial x}{\partial t}(s, t) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(x(s, t), y(s, t), z(s, t))\frac{\partial y}{\partial t}(s, t) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial z}(x(s, t), y(s, t), z(s, t))\frac{\partial z}{\partial t}(s, t).$$

Do đó

$$d_{(s,t)}F = \frac{\partial F}{\partial s}(s, t)\,ds + \frac{\partial F}{\partial t}(s, t)\,dt$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)\left(\frac{\partial x}{\partial s}(s, t)ds + \frac{\partial x}{\partial t}(s, t)dt\right) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)\left(\frac{\partial y}{\partial s}(s, t)ds + \frac{\partial y}{\partial t}(s, t)dt\right) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\left(\frac{\partial z}{\partial s}(s, t)\,ds + \frac{\partial z}{\partial t}(s, t)dt\right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)d_{(s,t)}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)d_{(s,t)}y + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)d_{(s,t)}z.$$

2.7. Định lí 2–6 cho ta quy tắc thực hành để tính vi phân của một hàm số hợp. Giả sử hàm số $(x_1, \dots, x_p) \mapsto f(x_1, \dots, x_p)$ có vi phân là

$$d_{(x_1, \dots, x_p)} f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_p)\, dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(x_1, \dots x_p)\, dx_p. \qquad (1)$$

Nếu $x_1, \dots, x_p$ là những hàm số của các biến số $t_1, \dots, t_q$: $x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_q), \dots, x_p = \varphi_p(t_1, \dots, t_q)$, thì để tính vi phân của hàm số hợp $(t_1, \dots, t_q) \mapsto F(t_1, \dots, t_q) = f(\varphi_1(t_1, \dots, t_q), \dots, \varphi_p(t_1, \dots, t_q))$ ta thay $x_1, \dots, x_p$ bởi $\varphi_1(t_1, \dots, t_q), \dots, \varphi_p(t_1, \dots, t_q)$ và $dx_1, \dots, dx_p$ bởi $d_{(t_1, \dots, t_q)}\varphi_1, \dots, d_{(t_1, \dots, t_q)}\varphi_p$.

2.8. *Các quy tắc tính vi phân*

Giả sử u, v là hai hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên tập hợp mở $U \subset \mathbf{R}^p$. Khi đó

a) $d(u + v) = du + dv$,

b) $d(\lambda u) = \lambda du$ (λ là một hằng số thực),

c) $d(uv) = vdu + udv$,

d) Nếu $v \neq 0$ trên U thì

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Chứng minh. a), b) suy ra từ định nghĩa của vi phân.

c) Ta biết rằng $d(xy) = ydx + xdy$. Do đó từ 2.7 suy ra $d(uv) = vdu + udv$.

d) Tương tự, ta có $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$ với $y \neq 0$.

Do đó, với $v \neq 0$, ta có

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

2.9. Có thể tính các đạo hàm riêng của một hàm số từ vi phân của hàm số đó.

Ví dụ. Cho hàm số $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

Với mọi $(x, y) \neq (0, 0)$, ta có

$$d_{(x,\, y)} f = \frac{(x^2 + y^2)\, dx - x d\, (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{(x^2 + y^2)dx - x(2xdx + 2ydy)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}\, dx - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\, dy .$$

Từ đó suy ra

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} .$$

§3. CỰC ĐẠI VÀ CỰC TIỂU CỦA HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

3.1. *Định nghĩa :* Giả sử Ω là một tập hợp con của không gian $\mathbf{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbf{R}$ là một hàm số xác định trên Ω. Ta nói rằng :

a) f **đạt cực đại** tại điểm $M_o = (x_o, y_o) \in \Omega$ nếu tồn tại một lân cận V của điểm M_o sao cho $V \subset \Omega$ và

$$f(x, y) \leq f(x_o, y_o) \text{ với mọi } (x, y) \in V.$$

b) f **đạt cực tiểu tại điểm** $M_o = (x_o, y_o) \in \Omega$ nếu tồn tại một lân cận V của điểm M_o sao cho $V \subset \Omega$ và

$$f(x, y) \geq f(x_o, y_o) \text{ với mọi } (x, y) \in V.$$

Cực đại và **cực tiểu** được gọi chung là cực trị.

3.2. *Định lí.* Giả sử hàm số $f : \Omega \to \mathbf{R}$ đạt cực trị tại điểm $M_o = (x_o, y_o) \in \Omega$. Nếu hàm số có các đạo hàm riêng tại điểm M_o thì

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \text{ và } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Chứng minh. Hiển nhiên hàm số một biến số $x \mapsto f(x, y_0)$ đạt cực trị tại điểm x_0. Do đó $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$. Tương tự $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Định nghĩa 3.1 và định lí 3.2 dễ dàng được mở rộng cho một hàm số p biến số với p là một số nguyên dương bất kì.

3.3. Nếu các đạo hàm riêng của hàm số f đều bằng không tại điểm $M_0 = (x_0, y_0)$ thì M_0 gọi là một điểm dừng của hàm số f.

Từ 3.2 suy ra rằng nếu hàm số f có các đạo hàm riêng tại điểm $M_0 = (x_0, y_0)$ thì điều kiện cần để hàm số có cực trị tại điểm M_0 là M_0 là một điểm dừng của f. Ví dụ sau cho thấy đó không phải là điều kiện đủ.

Cho hàm số $f(x, y) = xy$.

Ta có $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ và $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$; $(0, 0)$ là điểm dừng của hàm số. Tuy nhiên hàm số không đạt cực trị tại điểm này vì $f(x, y) > 0$ với x, y cùng dấu và $f(x, y) < 0$ với x, y trái dấu.

3.4. ***Điều kiện đủ để hàm số có cực trị***

Giả sử U là một tập hợp mở trong không gian $\mathbf{R}^2$, hàm số $f : U \to \mathbf{R}$ có các đạo hàm riêng cấp hai trên U, $(x, y) \in U$. Biểu thức

$$\Delta(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)\right)^2$$

gọi là biệt thức của hàm số f tại điểm (x, y)

Định lí. Giả sử hàm số $f : U \to \mathbf{R}$ có các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai liên tục trên tập hợp mở $U \subset \mathbf{R}^2$ và $M_0(x_0, y_0) \in U$ là một điểm dừng của f. Khi đó

1^0 Nếu $\Delta(x_0, y_0) > 0$ thì hàm số có cực trị tại điểm (x_0, y_0). Ngoài ra

a) nếu $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ thì f có cực đại tại điểm (x_0, y_0),

b) nếu $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ thì f có cực tiểu tại điểm (x_0, y_0).

2^0 Nếu $\Delta(x_0, y_0) < 0$ thì hàm số f không có cực trị tại điểm (x_0, y_0).

3^0 Nếu $\Delta(x_0, y_0) = 0$ thì chưa thể nói gì về sự tồn tại cực trị của hàm số tại điểm (x_0, y_0) .

Chứng minh. Ta viết công thức Taylo trong trường hợp $n = 2$,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + hf_x'(x_0, y_0) + kf_y'(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{2}(h^2 f_{x^2}''(x_0, y_0) + 2hkf_{xy}''(x_0, y_0) + k^2 f_{y^2}''(x_0, y_0)) +$$

$$+ o(h^2 + k^2) \quad \text{khi} \quad (h, k) \to (0, 0).$$

Vì $f_x'(x_0, y_0) = 0$ và $f_y'(x_0, y_0) = 0$ nên từ đó suy ra

$$f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{1}{2}(h^2 f_{x^2}'' + 2hkf_{xy}'' + k^2 f_{y^2}'')(x_0, y_0) + o(h^2 + k^2). (1)$$

Nếu số hạng thứ nhất trong tổng ở vế phải của (1) khác không thì dấu của nó cũng là dấu của vế trái của (1) với h, k đủ nhỏ.

1^0 Nếu $\Delta(x_0, y_0) > 0$ thì $f_{x^2}''(x_0, y_0)$ và $f_{y^2}''(x_0, y_0)$ át phải đồng thời khác không và cùng dấu. Ta viết (1) dưới dạng

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{1}{2f_{x^2}''(x_0, y_0)}[(hf_{x^2}'' + kf_{xy}'')^2 + k^2\Delta](x_0, y_0) + o(h^2 + k^2).$$

Biểu thức trong dấu ngoặc "[ ]" dương với $h^2 + k^2 > 0$. Từ đó

a) Nếu $f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$ thì $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) < 0$ với h, k đủ nhỏ. Do đó hàm số có cực đại tại điểm (x_0, y_0).

b) Nếu $f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$ thì $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) > 0$ với h, k đủ nhỏ. Do đó hàm số có cực tiểu tại điểm (x_0, y_0).

2° Giả sử $\Delta(x_0, y_0) < 0$. Đặt $k = ht$, (1) trở thành

$$f(x_0 + h, y_0 + ht) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{1}{2} h^2(f''_{x^2} + 2f''_{xy} t + f''_{y^2} t^2)(x_0, y_0) + o(h^2 + h^2t^2)$$

Đặt $F(t) = f''_{y^2} (x_0, y_0)t^2 + 2f''_{xy} (x_0, y_0)t + f''_{x^2} (x_0, y_0)$.

Biệt số của tam thức bậc hai $F(t)$ là

$$\Delta' = (f''_{xy} (x_0, y_0))^2 - f''_{x^2} (x_0, y_0)\, f''_{y^2} (x_0, y_0) = -\Delta(x_0, y_0) > 0.$$

Do đó hàm số $t \mapsto F(t)$ lấy cả giá trị dương và âm. Giả sử $F(t_1) > 0$ và $F(t_2) < 0$. Khi đó

$$f(x_0 + h, y_0 + ht_1) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}h^2F(t_1) + o(h)^2 > 0$$

với $h \neq 0$ đủ nhỏ và

$$f(x_0 + h, y_0 + ht_2) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} h^2F(t_2) + o(h^2) < 0.$$

với $h \neq 0$ đủ nhỏ. Vậy f không có cực trị tại điểm (x_0, y_0).

Có thể chứng minh định lí nhờ áp dụng dạng toàn phương xác định.

Hàm số $\omega : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ xác định bởi

$$\omega(h, k) = h^2f''_{x^2} (x_0, y_0) + 2hk\, f''_{xy} (x_0, y_0) + k^2\, f''_{y^2} (x_0, y_0)$$

là một dạng toàn phương.

1° Giả sử

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_{x^2}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0.$$

a) Nếu $f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$ thì ω là xác định dương. Do đó $\omega(h, k) > 0$ với mọi $(h, k) \neq (0, 0)$. Vậy f có cực tiểu tại (x_0, y_0).

b) Nếu $f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$ thì ω là xác định âm. Do đó $\omega(h, k) < 0$ với mọi $(h, k) \neq (0, 0)$. Vậy f có cực đại tại (x_0, y_0).

2° Nếu $\Delta(x_0, y_0) < 0$ thì dạng toàn phương ω là không xác định. $\omega(h, k)$ lấy cả các giá trị dương và âm trên một lân cận bất kì của $(0, 0)$. Vậy f không có cực trị tại điểm (x_0, y_0).

Ví dụ 1. Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = x^2 + \lambda y^2$, $\lambda \neq 0$.

Ta có $f'_x(x, y) = 2x$, $f'_y(x, y) = 2\lambda y$,

$$f'_x(0, 0) = 0 \text{ và } f'_y(0, 0) = 0,$$

$$f''_{x^2}(x, y) = 2,\ f''_{y^2}(x, y) = 2\lambda,\ f''_{xy}(x, y) = 0,$$

$$\Delta(x, y) = f''_{x^2} f''_{y^2} - (f''_{xy})^2 = 4\lambda.$$

Do đó

1° Nếu $\lambda > 0$ thì vì $f''_{x^2}(0, 0) = 2$ nên hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm $(0, 0)$.

2° Nếu $\lambda < 0$ thì hàm số không có cực trị tại điểm $(0, 0)$.

Ví dụ 2. Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = x^2y^2$.

Ta có $f_x'(x, y) = 2xy^2$, $f_y'(x, y) = 2x^2y$.

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$$

$(0, y)$ và $(x, 0)$, $x, y \in \mathbf{R}$, là các điểm dừng của hàm số đã cho.

$$f''_{x^2}(x, y) = 2y^2,\ f''_{y^2}(x, y) = 2x^2,\ f''_{xy}(x, y) = 4xy$$

$$\Delta(x, y) = 4x^2y^2 - 16x^2y^2 = -12x^2y^2.$$

$\Delta(x, 0) = 0$ với mọi $x \in \mathbf{R}$, $\Delta(0, y) = 0$ với mọi $y \in \mathbf{R}$. Do đó không thể áp dụng được định lí 3.4. Tuy nhiên $f(x, y) = x^2y^2 \geq 0 = f(x_o, 0)$ với mọi $x \in \mathbf{R}$ và $f(x, y) \geq f(0, y_o)$ với mọi $y \in \mathbf{R}$. Vậy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại các điểm $(x_o, 0)$ và $(0, y_o)$ với mọi $x_o, y_o \in \mathbf{R}$.

Ví dụ 3. Xét hàm số $f(x, y) = x^3 + y^2$.

Ta có $f'_x(x, y) = 3x^2$, $f'_y(x, y) = 2y$, $f''_{x^2} = 6x$, $f''_{y^2} = 2$, $f''_{xy} = 0$. Điểm $(0, 0)$ là điểm dừng của hàm số f. Vì $\Delta(0, 0) = 0$ nên ta không áp dụng được định lí 3.4. Tuy nhiên ta có $f(x, 0) > 0 = f(0, 0)$ với mọi $x > 0$ và $f(x, 0) < f(0, 0)$ với mọi $x < 0$. Do đó hàm số không có cực trị tại điểm $(0, 0)$.

3.5. ***Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số***

Giả sử Ω là một tập hợp compắc trong không gian $\mathbf{R}^p$, $f : \Omega \to \mathbf{R}$ là một hàm số liên tục trên Ω và có các đạo hàm riêng trên phần trong $\overset{o}{\Omega}$ của Ω. Theo định lí Vâyơxtrat, hàm số đạt giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) tại ít nhất một điểm $M_o = (x_1^o, ..., x_p^o) \in \Omega$. Nếu $M_o \in \overset{o}{\Omega}$ thì M_o là một điểm dừng của f. Hàm số cũng có thể đạt giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) trên biên $\partial\Omega$ của Ω. Vì vậy muốn tìm giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số trên Ω ta tìm giá trị của hàm số tại các điểm dừng của nó và giá trị của hàm số tại các điểm biên của Ω. Giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) trong chúng là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên Ω. Ta hãy xét các ví dụ sau :

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$$

trên tam giác giới hạn bởi hai trục Ox, Oy và đường thẳng $x + y = 2\pi$.

Ta có $f'_x(x, y) = \cos x - \cos(x + y)$; $f'_y(x, y) = \cos y - \cos(x + y)$.

Trên phần trong của tam giác

$$\begin{cases} f_x'(x, y) = 0 \\ f_y'(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{3} \\ y = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$\left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$ là điểm dừng duy nhất của hàm số f trên phần trong của tam giác. Ta có $f\left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Biên của tam giác gồm ba đoạn thẳng $\{(x, 0) : 0 \leqslant x \leqslant 2\pi\}$, $\{(0, y) : 0 \leqslant y \leqslant 2\pi\}$ và $\{(x, y) : x + y = 2\pi, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$.

Hàm số bằng không tại mọi điểm thuộc biên của tam giác. Do đó giá trị lớn nhất của hàm số trên tam giác là $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên tam giác là 0.

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất của tích

$$u = xyzt$$

của bốn số không âm biết rằng tổng của chúng không đổi :

$$x + y + z + t = c.$$

Ta có $t = c - x - y - z$,

$$u = xyz(c - x - y - z).$$

u là hàm số ba biến số xác định trên tập hợp

$$\Omega = \{(x, y, z) : x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x + y + z \leqslant c\}.$$

Ω là một tứ diện giới hạn bởi các mặt phẳng $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ và $x + y + z = c$. Ta có

$$u'_x = yz(c - 2x - y - z),\ u'_y = zx(c - x - 2y - z),$$

$$u'_z = xy(c - x - y - 2z).$$

Trên $\overset{o}{\Omega}$

$$\begin{cases} u'_x(x, y, z) = 0, \\ u'_y(x, y, z) = 0, \\ u'_z(x, y, z) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = y = z = \frac{c}{4}.$$

$\left(\frac{c}{4}, \frac{c}{4}, \frac{c}{4}\right)$ là điểm dừng duy nhất (trên $\overset{o}{\Omega}$) của hàm số. Ta có $u\left(\frac{c}{4}, \frac{c}{4}, \frac{c}{4}\right) = \left(\frac{c}{4}\right)^4$. Biên của Ω gồm bốn mặt của tứ diện. Vì trên $\partial\Omega$ hàm số lấy giá trị không nên giá trị lớn nhất của hàm số trên Ω là $\left(\frac{c}{4}\right)^4$.

Ta đã chứng minh rằng nếu bốn số không âm x, y, z, t có tổng bằng c không đổi thì tích của chúng không lớn hơn $\left(\frac{c}{4}\right)^4$. Từ đó

$$\sqrt[4]{xyzt} \leq \frac{c}{4} = \frac{x+y+z+t}{4},$$

tức là trung bình nhân của bốn số không âm không lớn hơn trung bình cộng của bốn số đó. Đó là bất đẳng thức Côsi cho bốn số không âm. Ta biết rằng đối với n số không âm bất kì, cũng có bất đẳng thức tương tự.

§4. HÀM SỐ ẨN VÀ HÀM NGƯỢC

Định nghĩa và sự tồn tại của hàm số ẩn

4.1. *Định nghĩa.* Cho phương trình

$$f(x, y) = 0 \qquad (1)$$

trong đó $f : \Omega \to \mathbf{R}$ là một hàm số xác định trên tập hợp Ω trong $\mathbf{R}^2$. Nếu tồn tại một hàm số $\varphi : I \to \mathbf{R}$ xác định trên một khoảng $I \subset \mathbf{R}$ sao cho

$$(x, \varphi(x)) \in \Omega,$$

và

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \text{ với mọi } x \in I,$$

thì hàm số $y = \varphi(x)$ gọi là một hàm số ẩn xác định bởi phương trình (1).

Ví dụ 1. Cho phương trình

$$x^2 + y^2 = 1. \qquad (2)$$

Khi đó $y = \alpha(x)\sqrt{1 - x^2}$ với $-1 \leqslant x \leqslant 1$,

trong đó $\alpha(x) = \pm 1$ với mọi $x \in [-1, 1]$, là một hàm số ẩn xác định bởi phương trình (2).

Nếu không đặt điều kiện "hàm số ẩn phải liên tục trên $[-1, 1]$" thì với mỗi $x \in [-1, 1]$ có thể cho $\alpha(x)$ một trong hai giá trị -1 và 1 một cách tùy ý. Như vậy có vô số hàm số ẩn xác định bởi phương trình (2).

Chú ý rằng trong ví dụ này, giá trị y của hàm số được cho bởi một biểu thức của biến số x. Người ta nói rằng hàm số ẩn được cho dưới dạng tường minh.

Ví dụ 2. Cho phương trình

$$y^5 - 4y^4 + 4xy^2 - x^2 = 0 \qquad (3)$$

Với mỗi $x \in \mathbf{R}$, ta được một phương trình bậc 5 theo y. Phương trình này có ít nhất một nghiệm thực. Vậy tồn tại một hàm số ẩn $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto y = \varphi(x)$ xác định bởi phương trình (3). Tuy nhiên ta không biết cách biểu diễn hàm số ẩn này dưới dạng tường minh.

Vấn đề đặt ra là : Cho (x_0, y_0) là một nghiệm của phương trình (1) tức là $f(x_0, y_0) = 0$. Với các điều kiện nào đối với hàm số f, phương trình (1) xác định một hàm số ẩn duy nhất $\varphi : (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \to \mathbf{R}$ có đạo hàm liên tục trên một lân cận $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ $(\alpha > 0)$ của điểm x_0 ?

4.2. *Định lí.* Cho phương trình

$$f(x, y) = 0 \qquad (1)$$

trong đó $f : U \to \mathbf{R}$ là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên tập hợp mở $U \subset \mathbf{R}^2$, $(x_0, y_0) \in U$ là một nghiệm của phương trình (1), tức là $f(x_0, y_0) = 0$. Khi đó nếu $f_y'(x_0, y_0) \neq 0$ thì với một số $\beta > 0$ bất kì đủ nhỏ, tồn tại một số $\alpha > 0$ có các tính chất sau :

a) Với mỗi $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, phương trình (1) có một nghiệm duy nhất $y \in (y_0 - \beta, y_0 + \beta)$,

b) Nếu kí hiệu nghiệm này là $\varphi(x)$ thì hàm số $y = \varphi(x)$ là hàm số ẩn xác định bởi phương trình (1). Hàm số φ có đạo hàm liên tục trên $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ và

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x'(x, \varphi(x))}{f_y'(x, \varphi(x))}$$

với mọi $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$.

*Chứng minh.** a) Có thể giả thiết $f_y'(x_0, y_0) > 0$ vì nếu $f_y'(x_0, y_0) < 0$ thì ta thay f bởi −f. Vì f_y' liên tục trên tập hợp mở U nên tồn tại một số $\eta > 0$ sao cho

$$f_y'(x, y) > 0$$

với $x_0 - \eta < x < x_0 + \eta$, $y_0 - \eta < y < y_0 + \eta$.

Nếu $0 < \beta < \eta$ thì hàm số $y \mapsto f(x_0, y)$ có đạo hàm $f_y'(x_0, y) > 0$ trên đoạn $[y_0 - \beta, y_0 + \beta]$. Do đó hàm số tăng nghiêm ngặt trên đoạn này. Vì $f(x_0, y_0) = 0$ nên

$$f(x_0, y_0 - \beta) < 0 \text{ và } f(x_0, y_0 + \beta) > 0. \qquad (2)$$

Các hàm số $x \mapsto f(x, y_0 - \beta)$ và $x \mapsto f(x, y_0 + \beta)$ đều liên tục tại điểm x_0 nên từ các bất đẳng thức (2) suy ra :

Tồn tại $\alpha > 0$ sao cho

$$f(x, y_0 - \beta) < 0 \text{ và } f(x, y_0 + \beta) > 0 \qquad (3)$$

với mọi $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$.

Với một số thực bất kì $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, hàm số $y \mapsto f(x, y)$ liên tục trên đoạn $[y_0 - \beta, y_0 + \beta]$. Ngoài ra các bất đẳng thức trong (3) được thỏa mãn. Do đó, theo định lí Bônzanô-Côsi về giá trị trung gian của hàm số liên tục, tồn tại một số thực $y \in (y_0 - \beta, y_0 + \beta)$ sao cho $f(x, y) = 0$. Vì hàm số tăng nghiêm ngặt trên $[y_0 - \beta, y_0 + \beta]$ (do $f'_y(x, y) > 0$ với mọi $y \in [y_0 - \beta, y_0 + \beta]$) nên y là duy nhất. Ta đã chứng minh a).

b) Đặt giá trị y tương ứng với x là $\varphi(x)$, ta được hàm số $y = \varphi(x)$ xác định trên khoảng $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ thỏa mãn phương trình $f(x, \varphi(x)) = 0$.

Vậy $\varphi : (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \to (y_0 - \beta, y_0 + \beta)$ là hàm số ẩn duy nhất xác định bởi phương trình (1).

Trước hết ta chứng minh hàm số φ liên tục trên khoảng $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$. Thật vậy, giả sử $x_1 \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ và ε là một số dương cho trước bất kì. Đặt $y_1 = \varphi(x_1)$. Khi đó $y_1 \in (y_0 - \beta, y_0 + \beta)$ và $f(x_1, y_1) = 0$. Theo a), với mọi $\beta_1 > 0$ đủ nhỏ, tồn tại $\alpha_1 > 0$ sao cho hàm số f xác định một hàm số ẩn duy nhất $\varphi_1 : (x - \alpha_1, x_1 + \alpha_1) \to (y_1 - \beta_1, y_1 + \beta_1)$. Ta chọn β_1, α_1 thỏa mãn các điều kiện sau :

1° $\beta_1 < \varepsilon$,

2° $(x_1 - \alpha_1, x_1 + \alpha_1) \times (y_1 - \beta_1, y_1 + \beta_1) \subset (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \times$ $\times (y_0 - \beta, y_0 + \beta)$.

Hiển nhiên $\varphi_1(x) = \varphi(x)$ với mọi $x \in (x_1 - \alpha_1, x_1 + \alpha_1)$. Do đó

$$|x - x_1| < \alpha_1 \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(x_1)| = |\varphi_1(x) - y_1| < \beta_1 < \varepsilon$$

Vậy φ liên tục tại điểm x_1.

Giả sử x và h là những số thực sao cho $x, x + h \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$. Khi đó $f(x, \varphi(x)) = 0$ và $f(x + h, \varphi(x + h)) = 0$. Theo công thức số gia hữu hạn, tồn tại một số thực $\theta \in (0, 1)$ sao cho

$$0 = f(x + h, \varphi(x + h)) - f(x, \varphi(x)) =$$

$= (h f_x' + (\varphi(x + h) - \varphi(x))f_y')(x + \theta h, \varphi(x) + \theta(\varphi(x + h) - \varphi(x))$.

Do đó với $h \neq 0$, ta có

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = -\frac{f_x'(x+\theta h, \varphi(x) + \theta(\varphi(x+h) - \varphi(x)))}{f_y'(x+\theta h, \varphi(x) + \theta(\varphi(x+h) - \varphi(x)))}.$$

Cho $h \to 0$. Vì f_x' và f_y' liên tục tại điểm $(x, \varphi(x))$, φ liên tục tại điểm x, nên vế phải của đẳng thức trên dẫn đến $-\dfrac{f_x'(x, \varphi(x))}{f_y'(x, \varphi(x))}$. Do đó hàm số φ có đạo hàm tại điểm x và

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x'(x, \varphi(x))}{f_y'(x, \varphi(x))}$$

Vì f_x', f_y' và φ đều liên tục nên φ' liên tục.

Ví dụ 1. Trở lại ví dụ 2 sau 4.1, cho phương trình

$$f(x, y) = y^5 - 4y^4 + 4xy^2 - x^2 = 0.$$

Ta có $f(1, 1) = 0$; $f_x' = 4y^2 - 2x$; $f_y' = 5y^4 - 16y^3 + 8xy$; $f_y'(1, 1) = -3 \neq 0$. Do đó tồn tại một hàm số duy nhất $y = \varphi(x)$ sao cho

$$(\varphi(x))^5 - 4(\varphi(x))^4 + 4x(\varphi(x))^2 - x^2 = 0.$$

với $|x - 1|$ và $|\varphi(x) - 1|$ đủ nhỏ. Khi đó

$$\varphi'(x) = \frac{-f_x'(x, y)}{f_y'(x, y)} = -\frac{4y^2 - 2x}{5y^4 - 16y^3 + 8xy}.$$

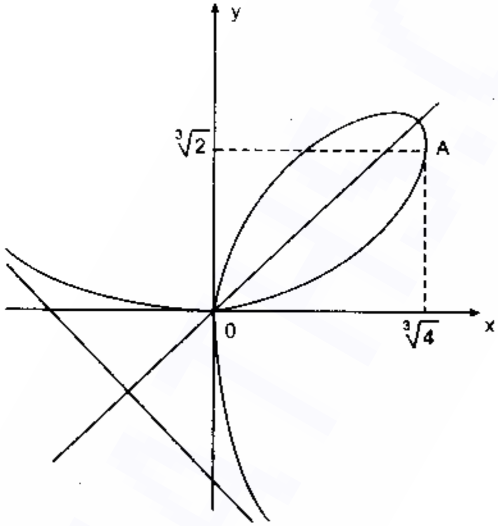
Vì $\varphi(1) = 1$ nên

$$\varphi'(1) = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}.$$

Ví dụ 2. Cho phương trình

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

Tập hợp các điểm (x, y) thỏa mãn phương trình trên là một đường cong gọi là lá Đêcác (Descartes) (xem hình bên). Ta có $f_y' = 3y^2 - 3x$.



Hình 29

$f_y'(x, y) \neq 0$ với $x \neq y^2$.

Đường cong đã cho cắt parabôn $x = y^2$ tại hai điểm O(0, 0) và A($\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{2}$). Trên lân cận đủ nhỏ của mỗi điểm (x_0, y_0) thuộc đường cong khác O và A tồn tại một hàm số duy nhất $y = \varphi(x)$ sao cho

$x^3 + (\varphi(x))^3 - 3x\varphi(x) = 0$ (với $|x - x_0|$ và $|y - y_0|$ đủ nhỏ).

Với mỗi $x \in (0, \sqrt[3]{4})$ có ba điểm trên đường cong có cùng hoành độ x. Với mỗi $x < 0$ hoặc $x > \sqrt[3]{4}$ chỉ có một điểm trên đường cong có hoành độ x.

4.3. *Chú ý.* Nếu trong định lí 4.2 điều kiện $f_y'(x_0, y_0) \neq 0$ được thay bởi điều kiện $f_x'(x_0, y_0) \neq 0$ thì phương trình (1) xác định một hàm số ẩn $x = \psi(y)$ với $|y - y_0|$ và $|x - x_0|$ đủ nhỏ.

Nếu $f_x'(x_0, y_0) = 0$ và $f_y'(x_0, y_0) = 0$ thì không thể nói gì về sự tồn tại của hàm số ẩn xác định bởi phương trình (1) trong định lí 4.2. Điểm (x_0, y_0) thỏa mãn đồng thời hai đẳng thức nói trên gọi là một điểm kì dị của phương trình $f(x, y) = 0$.

Ví dụ. Ta lấy lại ví dụ đã biết. Cho phương trình

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

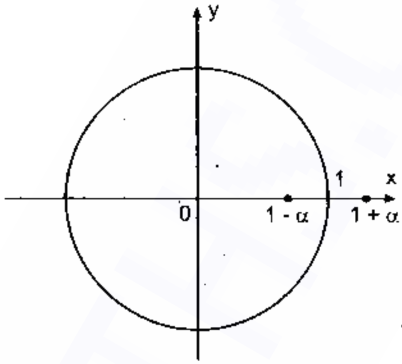
$(1, 0)$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

$$f'_x(1, 0) = 2, \ f'_y(1, 0) = 0$$

Với $\alpha > 0$ nhỏ tùy ý, không tồn tại hàm số $y = \varphi(x)$ trên khoảng $(1 - \alpha, 1 + \alpha)$ sao cho

$$x^2 + (\varphi(x))^2 - 1 = 0.$$

Tuy nhiên tồn tại hàm số $x = \psi(y) = \sqrt{1 - y^2}$ xác định trên khoảng $(-1, 1)$ thỏa mãn



Hình 30

$$(\psi(y))^2 + y^2 - 1 = 0 \text{ và } \psi(0) = 1.$$

4.4. *Tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong $f(x, y) = 0$.*

Trở lại định lí 4.2. Giả sử $f'_y(x_o, y_o) \neq 0$. Khi đó phương trình $f(x, y) = 0$ xác định trên hình chữ nhật $(x_o - \alpha, x_o + \alpha) \times \times (y_o - \beta, y_o + \beta)$ một đường cong Γ có tiếp tuyến tại mỗi điểm của nó. Phương trình tiếp tuyến của Γ tại điểm (x, y) là :

$$Y - y = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}(X - x),$$

tức là

$$\boxed{(X - x) f'_x(x, y) + (Y - y) f'_y(x, y) = 0}$$

Nếu $f'_x(x_o, y_o) \neq 0$ thì lập luận tương tự, ta cũng được phương trình trên.

Pháp tuyến của Γ tại điểm (x, y) song song với vectơ $(f'_x(x, y), f'_y(x, y))$.

4.5. *Hàm số ẩn nhiều biến số*

Tương tự như đối với hàm số ẩn một biến ta có định lí sau :

Định lí. Cho phương trình

$$f(x, y, z) = 0, \qquad (1)$$

trong đó $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên tập hợp mở U trong $\mathbf{R}^3$, $(x_0, y_0, z_0) \in U$ là một nghiệm của phương trình (1) (tức là $f(x_0, y_0, z_0) = 0$). Khi đó, nếu

$$f'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

thì với một số $\beta > 0$ bất kì đủ nhỏ, tồn tại một số $\alpha > 0$ có các tính chất sau :

a) Với mỗi $(x, y) \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \times (y_0 - \alpha, y_0 + \alpha)$, phương trình (1) có một nghiệm duy nhất $z \in (z_0 - \beta, z_0 + \beta)$.

b) Nếu đặt nghiệm đó là $z = \varphi(x, y)$ thì hàm số φ có các đạo hàm riêng liên tục trên $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \times (y_0 - \alpha, y_0 + \alpha)$, và

$$\varphi'_x(x, y) = -\frac{f'_x(x, y, \varphi(x, y))}{f'_z(x, y, \varphi(x, y))},$$

$$\varphi'_y(x, y) = -\frac{f'_y(x, y, \varphi(x, y))}{f'_z(x, y, \varphi(x, y))}.$$

φ được gọi là hàm số ẩn xác định bởi phương trình (1) trong một lân cận của điểm (x_0, y_0, z_0).

Chú ý. 1) Nếu $f'_x(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ hoặc $f'_y(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ thì tồn tại hàm số ẩn $x = x(y, z)$ hoặc $y = y(z, x)$ xác định bởi phương trình (1) trong một lân cận của điểm (x_0, y_0, z_0).

2) Ta có định lí tương tự đối với phương trình

$$f(x_1, \ldots, x_p, y) = 0.$$

Hệ hàm số ẩn

4.6. Cho hệ phương trình

$$
\text{(I)} \qquad \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) = 0, \\ f_2(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_q(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) = 0, \end{cases}
$$

trong đó $f_1, \ldots, f_q$ là những hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên một tập hợp mở U trong $\mathbf{R}^{p+q}$. Định thức

$$
\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_q} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_q} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_q}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_q}{\partial y_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_q}{\partial y_q} \end{vmatrix}
$$

gọi là jacôbian của hệ hàm số $f_1, \ldots, f_q$ đối với các biến số $y_1, \ldots, y_q$, kí hiệu là

$$
\frac{D(f_1, \ldots, f_q)}{D(y_1, \ldots, y_q)}.
$$

Với các giả thiết và kí hiệu trên, ta có

4.7. *Định lí.* Giả sử $M_o = (x_1^o, \ldots, x_p^o, y_1^o, \ldots, y_q^o) \in U$ là một nghiệm của hệ phương trình (I). Nếu

$$
\frac{D(f_1, \ldots, f_q)}{D(y_1, \ldots, y_q)}(M_o) \neq 0,
$$

thì với một số bất kì $\beta > 0$ đủ nhỏ, tồn tại một số $\alpha > 0$ có các tính chất sau :

a) Với mỗi $(x_1, \ldots, x_p) \in (x_1^o - \alpha, x_1^o + \alpha) \times \ldots \times (x_p^o - \alpha, x_p^o + \alpha)$, hệ phương trình (I) có một nghiệm duy nhất $(y_1, \ldots, y_q) \in (y_1^o - \beta, y_1^o + \beta) \times \ldots \times (y_q^o - \beta, y_q^o + \beta)$;

b) Nếu đặt nghiệm đó là

$$(y_1, \ldots, y_q) = (\varphi_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, \varphi_q(x_1, \ldots, x_p)),$$

thì các hàm số $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$ có các đạo hàm riêng liên tục trên tập hợp

$$(x_1^o - \alpha, x_1^o + \alpha) \times \ldots \times (x_p^o - \alpha, x_p^o + \alpha).$$

Các đạo hàm riêng của các hàm số đó nhận được bằng cách lấy đạo hàm riêng các phương trình của hệ (I) theo các biến số x_i, trong đó $y_1, \ldots, y_q$ là các hàm số $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$:

$$\text{(II)} \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \ldots + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_q}\dfrac{\partial \varphi_q}{\partial x_i} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f_q}{\partial x_i} + \dfrac{\partial y_q}{\partial y_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \ldots + \dfrac{\partial f_q}{\partial y_q}\dfrac{\partial \varphi_q}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, p) \end{cases}$$

Hệ phương trình (II) là một hệ Crame (Cramer). Từ đó ta tính được $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}, \ldots, \dfrac{\partial \varphi_q}{\partial x_i}$.

Ta thừa nhận định lí này.

$(\varphi_1, \ldots, \varphi_q)$ gọi là hệ hàm số ẩn xác định bởi hệ phương trình (I) trong một lân cận của điểm $M_o = (x_1^o, \ldots, x_p^o, y_1^o, \ldots, y_q^o)$.

4.8. ***Áp dụng***

Giả sử U là một tập hợp mở trong $\mathbf{R}^2$,

$$u = u(x, y) \text{ và } v = v(x, y)$$

là hai hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên U, $(x_o, y_o) \in U$, $u_o = u(x_o, y_o)$, $v_o = v(x_o, y_o)$ và

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)}(x_o, y_o) \neq 0.$$

Xét hệ phương trình

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} f(x, y, u, v) = u(x, y) - u = 0 \\ g(x, y, u, v) = v(x, y) - v = 0 \end{cases}$$

f và g là hai hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên tập hợp $U \times \mathbf{R}^2$, (x_o, y_o, u_o, v_o) là một nghiệm của hệ phương trình (I).

$$\frac{D(f, g)}{D(x, y)}(x_o, y_o, u_o, v_o) = \begin{vmatrix} u_x' & u_y' \\ v_x' & v_y' \end{vmatrix}(x_o, y_o) = \frac{D(u, v)}{D(x, y)}(x_o, y_o) \neq 0.$$

Theo định lí 4.6, với một số $\beta > 0$ bất kì đủ nhỏ, tồn tại một số $\alpha > 0$ có các tính chất sau :

a) Với mỗi $(u, v) \in (u_o - \alpha, u_o + \alpha) \times (v_o - \alpha, v_o + \alpha)$, hệ phương trình (I) (với các ẩn số x, y) có một nghiệm duy nhất $(x, y) \in (x_o - \beta, x_o + \beta) \times (y_o - \beta, y_o + \beta)$.

b) Đặt nghiệm đó là $(x, y) = (x(u, v), y(u, v))$. Các hàm số $x = x(u, v)$ và $y = y(u, v)$ có các đạo hàm riêng liên tục trên tập hợp $(u_o - \alpha, u_o + \alpha) \times (v_o - \alpha, v_o + \alpha)$.

Lấy đạo hàm các phương trình của hệ (I) theo u và v, ta được

$$\begin{cases} u_x'x_u' + u_y'y_u' - 1 = 0, \\ v_x'x_u' + v_y'y_u' = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x'x_v' + u_y'y_v' = 0, \\ v_x'x_v' + v_y'y_v' - 1 = 0. \end{cases}$$

Từ hai hệ phương trình trên suy ra

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)}(x(u, v), y(u, v))\,\frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u, v) = 1$$

với mọi $(u, v) \in (u_o - \alpha, u_o + \alpha) \times (v_o - \alpha, v_o + \alpha)$.

Thật vậy, ta có

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} \cdot \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} u_x' & u_y' \\ v_x' & v_y' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_u' & x_v' \\ y_u' & y_v' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_x'x_u' + u_y'y_u' & u_x'x_v' + u_y'y_v' \\ v_x'x_u' + v_y'y_u' & v_x'x_v' + v_y'y_v' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

4.9. Ta vẫn giữ các giả thiết và các kí hiệu trong 4.8. Gọi $F : U \to \mathbf{R}^2$ là ánh xạ xác định bởi

$$F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)).$$

Hiển nhiên F liên tục trên U. Đặt $W = (u_0 - \alpha, u_0 + \alpha) \times \times (v_0 - \alpha, v_0 + \alpha)$, $V = [(x_0 - \beta, x_0 + \beta) \times (y_0 - \beta, y_0 + \beta)] \cap F^{-1}(W)$. Khi đó V và W, theo thứ tự, là lân cận của các điểm (x_0, y_0) và (u_0, v_0) (tức là tập hợp mở chứa (x_0, y_0) và (u_0, v_0))[(1)]. Từ 4.8 suy ra rằng ánh xạ

$$\Phi = F|_V : V \longrightarrow W$$

$$(x, y) \mapsto F(x, y) = (u, v) = (u(x, y), v(x, y))$$

là một song ánh và ánh xạ ngược của nó

$$\Psi = \Phi^{-1} : W \longrightarrow V$$

$$(u, v) \mapsto (x, y) = (x(u, v), y(u, v))$$

có các hàm số thành phần x, y là những hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên W.

Các kết quả vừa nêu được mở rộng cho trường hợp $p > 2$.

4.10. *Định lí về hàm ngược*

Giả sử U là một tập hợp mở trong $\mathbf{R}^p$ và

$$F : U \longrightarrow \mathbf{R}^p$$

$$x = (x_1, ..., x_p) \mapsto y = (y_1, ..., y_p) = (y_1(x_1, ..., x_p), ..., y_p(x_1, ..., x_p))$$

là một ánh xạ xác định trên U sao cho các hàm số thành phần $y_1, ..., y_p$ có các đạo hàm riêng liên tục trên U, $M_0 = (x_1^0, ..., x_p^0) \in U$, $y_1^0 = y_1(x_1^0, ..., x_p^0)$, ..., $y_p^0 = y_p(x_1^0, ..., x_p^0)$. Nếu

(1) Vì F là một ánh xạ liên tục và W là một tập hợp mở trong $\mathbf{R}^2$ nên có thể chứng minh được rằng $F^{-1}(W)$ là một tập hợp mở trong $\mathbf{R}^2$.

$$\frac{D(y_1, ..., y_p)}{D(x_1, ..., x_p)}(x_1^0, ..., x_p^0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_p} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_p}{\partial x_1} & \frac{\partial y_p}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_p}{\partial x_p} \end{vmatrix} (x_1^0, ..., x_p^0) \neq 0$$

thì tồn tại một lân cận V của điểm $M_0 = (x_1^0, ..., x_p^0)$ sao cho $W = F(V)$ là một lân cận của điểm $F(M_0) = (y_1^0, ..., y_p^0)$, $\Phi = F|_V$ là một song ánh từ V lên W và ánh xạ ngược của nó

$$\Psi = \Phi^{-1} : W \to V$$

$$(y_1, ..., y_p) \mapsto (x_1, ..., x_p) =$$

$$= (x_1(y_1, ..., y_p), ..., x_p(y_1, ..., y_p))$$

có các hàm số thành phần $x_1, ..., x_p$ là những hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên W. Hơn nữa

$$\frac{D(y_1, ..., y_p)}{D(x_1, ..., x_p)}(x_1(y_1, ..., y_p), ..., x_p(y_1, ..., y_p)) \cdot \frac{D(x_1, ..., x_p)}{D(y_1, ..., y_p)}(y_1, ..., y_p) = 1$$

với mọi $(y_1, ..., y_p) \in W$.

BÀI TẬP CHƯƠNG II VÀ LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

GIỚI HẠN

1. Áp dụng định nghĩa giới hạn chứng minh rằng

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

2. Tìm giới hạn của dãy số thực $\{u_n\}$ với các số hạng tổng quát sau :

a) $u_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n^2}{n+1}$,

b) $u_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$,

c) $u_n = \dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

3. Chứng minh rằng dãy số thực

$$a_n = \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n}\ ,\ n = 1, 2, \ldots$$

trong đó $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$ hội tụ và tìm giới hạn của dãy số đó.

4. Chứng minh rằng dãy số thực $\{u_n\}$ xác định bởi

$$u_1 = \sqrt{2},\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}\ ,\ n = 1, 2, \ldots$$

hội tụ và tìm giới hạn của dãy.

5. Cho dãy số thực $\{u_n\}$ xác định bởi

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right),\ n \geqslant 1,\ a > 0,\ u_1 > 0.$$

Chứng minh rằng dãy hội tụ và tìm giới hạn của nó.

6. Cho dãy số thực $\{u_n\}$ xác định bởi

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}\ ,\ n \geqslant 1,\ u_1 = 1.$$

a) Chứng minh rằng $u_{n+1} < u_n + \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

b) Từ đó suy ra rằng dãy hội tụ và tìm giới hạn của nó.

7. Áp dụng tiêu chuẩn Côsi chứng minh rằng dãy số thực $\{u_n\}$ với

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

là phân kì.

8. Cho dãy số thực $\{u_n\}$ thỏa mãn điều kiện

$$|u_{n+1} - u_n| \leq k|u_n - u_{n-1}|, \; n \geq 2, \; 0 < k < 1.$$

Áp dụng tiêu chuẩn Côsi chứng minh rằng dãy hội tụ.

9. Với các giá trị nào của a và b, dãy số thực $\{x_n\}$ với

$$x_0 = a, \; x_{n+1} = 1 + bx_n \; ; \; n \geq 0,$$

hội tụ.

10.* Cho dãy số thực $\{u_n\}$ với

$$u_1 = b, \; u_{n+1} = u_n^2 + (1 - 2a)u_n + a^2, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Với các giá trị nào của a và b dãy đã cho hội tụ. Khi đó hãy tính giới hạn của dãy.

11. Giả sử dãy số thực $\{x_n\}$ hội tụ đến 0. Chứng minh rằng

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = 0.$$

12. Giả sử hai dãy số thực $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ hội tụ đến a và b. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + \ldots + x_ny_1}{n} = ab.$

13. Cho hai số thực a và b, $0 < a < b$. Giả sử $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ là hai dãy số thực xác định bởi $u_0 = a$, $v_0 = b$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_nv_n}, \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \qquad n \geq 0.$$

Chứng minh rằng

a) Với mọi số nguyên $n \geq 0$, ta có

$$u_0 \leq u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n \leq v_0,$$

b) $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ là hai dãy hội tụ và có cùng giới hạn.

14. Giả sử $\{u_n\}$ là một dãy số thực sao cho $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$.

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{n} = 0$.

15.* Cho hai dãy số thực $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ hội tụ đến 0. Giả sử tồn tại một số $\alpha > 0$ sao cho

$$\sum_{k=0}^{n}|v_k| \leqslant \alpha \qquad \text{với mọi } n \geqslant 0.$$

Chứng minh rằng dãy số thực $\{w_n\}$ với

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

hội tụ đến 0.

16.* Giả sử $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ là ba dãy số thực với a_1, b_1, c_1 là ba số dương cho trước,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n}{3}, \quad b_{n+1} = \sqrt[3]{a_nb_nc_n}, \quad \frac{3}{c_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{c_n}.$$

(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, theo thứ tự, là trung bình cộng, trung bình nhân và trung bình điều hòa của ba số dương a_n, b_n, c_n).

a) Chứng minh rằng

$$a_n \geqslant b_n \geqslant c_n \qquad \text{với mọi } n > 1.$$

b) Chứng minh rằng các dãy $\{a_n\}$ và $\{c_n\}$ là đơn điệu và có cùng một giới hạn λ. Tìm giới hạn này nếu $a_1c_1 = b_1^2$.

17. Chứng minh rằng các dãy số $\{\sin n\}$ và $\{\cos n\}$ là phân kì.

18. Cho một tập hợp $E \subset \mathbf{R}$. Đặt $M = \sup E$, $m = \inf E$. Chứng minh rằng tồn tại hai dãy $\{a_n\} \subset E$ và $\{b_n\} \subset E$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = M$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = m$.

19. Ta nói rằng dãy số thực $\{u_n\}$ có tính chất T_1 (T_2) nếu tồn tại một chỉ số p (q) sao cho

$$u_p = \sup_n u_n \quad (u_q = \inf_n u_n).$$

Chứng minh rằng nếu $\{u_n\}$ là một dãy số thực hội tụ thì nó có ít nhất một trong hai tính chất T_1, T_2.

20. Cho hai dãy số thực $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$. Chứng minh rằng nếu $a_n \leqslant b_n$ với mọi n thì

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} b_n \quad ; \quad \limsup_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

21. Cho một dãy số thực $\{x_n\}$ và một số thực a. Chứng minh rằng

$$\liminf_{n\to\infty}(x_n + a) = \liminf_{n\to\infty} x_n + a \ ; \ \limsup_{n\to\infty}(x_n + a) = \limsup_{n\to\infty} x_n + a.$$

22. Cho một dãy số thực $\{x_n\}$ và một số thực a. Chứng minh rằng

a) Nếu $x_n \leqslant a$ với mọi n thì $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant a$,

b) Nếu $x_n \geqslant a$ với mọi n thì $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant a$.

23. Chứng minh rằng với mọi dãy số thực $\{x_n\}$ bất kì, ta có

$$\limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\liminf_{n\to\infty} x_n \quad ; \quad \liminf_{n\to\infty}(-x_n) = -\limsup_{n\to\infty} x_n.$$

24. Tìm giới hạn dưới, giới hạn trên, cận dưới đúng và cận trên đúng của các dãy số thực sau :

a) $a_n = (-1)^n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$, $n \geqslant 1$,

b) $b_n = 2^n[1 + (-1)^n]$, $n \geqslant 1$,

c) $c_n = (-3)^n$, $n \geqslant 1$.

25. Giả sử f là một hàm số thực xác định trên $\mathbf{R}$ sao cho

$$f(xy) = xf(x) + yf(y) \text{ với mọi } x, y \in \mathbf{R}.$$

Chứng minh rằng $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

26. Giả sử f, g, h là ba hàm số thực xác định trên một lân cận của điểm $x_0 \in \mathbf{R}$ (tức là một khoảng mở chứa điểm x_0). Chứng minh rằng nếu

$$g = o(f) \text{ khi } x \to x_0 \text{ và } h = o(g) \text{ khi } x \to x_0$$

thì $h = o(f)$ khi $x \to x_0$.

27. Giả sử f, g, h là ba hàm số thực xác định trên một lân cận của điểm x_0. Chứng minh rằng

a) Nếu $g = o(f)$ khi $x \to x_0$, $h = o(f)$ khi $x \to x_0$ thì

$$g + h = o(f) \text{ khi } x \to x_0,$$

b) Nếu $g = o(f)$ khi $x \to x_0$, $h = o(g)$ khi $x \to x_0$ thì

$$h = O(f) \text{ khi } x \to x_0.$$

28. Tìm $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\cos\dfrac{x}{2} \cos\dfrac{x}{2^2} \cdots \cos\dfrac{x}{2^n} \right)$, $x \in \mathbf{R}$.

29. Với mỗi số thực x, kí hiệu [x] chỉ phần nguyên của x :

$$[x] \in \mathbf{Z},\ x - 1 < [x] \leqslant x.$$

Tìm tập hợp các điểm gián đoạn của các hàm số $f(x) = [x]$ và $g(x) = x - [x]$.

30. Cho hàm số $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ với } x \in \mathbf{Q}, \\ 0 \text{ với } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng f gián đoạn tại mọi điểm của $\mathbf{R}$.

31. Giả sử f là một hàm số thực liên tục trên khoảng $I \subset \mathbf{R}$ sao cho $f(r) = 0$ với mọi $r \in I \cap \mathbf{Q}$. Chứng minh rằng $f(x) = 0$ với mọi $x \in I$.

32. Giả sử f và g là hai hàm số liên tục trên khoảng $I \subset \mathbf{R}$. Chứng minh rằng các hàm số max (f, g) và min (f, g) xác định trên I bởi

$$\max(f, g)(x) = \max(f(x), g(x)),$$

$$\min(f, g)(x) = \min(f(x), g(x))$$

là những hàm số liên tục trên I.

33. Chứng minh rằng phương trình

$$x - \cos x = 0$$

có một nghiệm thuộc khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

34. Chứng minh rằng một đa thức bậc lẻ có ít nhất một nghiệm thực.

35. Giả sử $f : [a, b] \to [a, b]$ là một hàm số liên tục. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một điểm $c \in [a, b]$ sao cho $f(c) = c$.

36. Giả sử $f : [a, b] \to [a, b]$ là một hàm số thỏa mãn điều kiện

$$|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2| \text{ với mọi } x_1, x_2 \in [a, b].$$

Chứng minh rằng f liên tục trên [a, b]. Từ đó suy ra rằng phương trình

$$f(x) = x$$

có một nghiệm duy nhất.

37. Giả sử hàm số f là một song ánh liên tục trên đoạn [a, b]. Chứng minh rằng nếu $f(a) < f(b)$ thì f là tăng nghiêm ngặt trên [a, b].

38. Cho hàm số f xác định trên **R** bởi

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & \text{với } x \neq 0, \\ 1 & \text{với } x = 0. \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng hàm số f gián đoạn tại điểm 0.

b) Cho hàm số g xác định trên **R** bởi

$$g(x) = \begin{cases} -\sin\frac{1}{x} & \text{với } x \neq 0 \\ 1 & \text{với } x = 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng nếu f và g lấy hai giá trị A và B thì chúng lấy mọi giá trị trung gian giữa A và B.

c) Hàm số f + g có tính chất đó không ?

Từ đó suy ra rằng tính "chuyển từ một giá trị sang một giá trị khác nhất thiết phải qua mỗi giá trị trung gian ít nhất một lần" không đặc trưng cho các hàm số liên tục.

39. Chứng minh rằng nếu f là một hàm số thực liên tục và tuần hoàn trên **R** thì nó bị chặn trên **R**.

40. Xét tính liên tục đều của các hàm số sau :

a) $f(x) = x + \sin x$ trên **R**,

b) $f(x) = \ln x$ trên $(0, 1]$.

41. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ liên tục đều trên đoạn $[a, 1]$ với mọi $a \in (0, 1)$ nhưng không liên tục đều trên khoảng $(0, 1]$.

42. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ liên tục đều trên mỗi khoảng $(-1, 0)$ và $(0, 1)$ nhưng không liên tục đều trên tập hợp $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

43. Giả sử f là một hàm số thực liên tục trên khoảng (a, b). Chứng minh rằng tồn tại một hàm số thực F liên tục trên đoạn [a, b] sao cho $F|_{(a,b)} = f$ khi và chỉ khi f liên tục đều trên khoảng (a, b).

44. Giả sử f là một hàm số thực liên tục trên đoạn $I = [0, 1]$. Với mỗi $x \in I$, $h \in I$, đặt

$$I_{xh} = \{t : |t| \leqslant h \text{ và } x + t \in I\}.$$

Gọi $g : I \to \mathbf{R}$ là hàm số xác định bởi

$$g(h) = \sup_{x \in I} [\sup_{t \in I_{xh}} |f(x + t) - f(x)|]$$

(g gọi là môđun liên tục của hàm số f trên I).

a) Chứng minh rằng g là một hàm số tăng không âm trên I và $\lim\limits_{h \to 0} g(h) = 0$.

b) Chứng minh rằng với mọi $h_1, h_2 \in (0, 1]$ sao cho $h_1 + h_2 \leqslant 1$ ta đều có

$$g(h_1 + h_2) \leqslant g(h_1) + g(h_2).$$

45. Mỗi số hữu tỉ x đều được viết dưới dạng $x = \dfrac{m}{n}$, trong đó m và n là hai số nguyên nguyên tố cùng nhau, $n > 0$. Nếu $x = 0$ thì ta lấy $n = 1$.

Gọi f là hàm số xác định trên $\mathbf{R}$ bởi

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \\ \dfrac{1}{n} & \text{nếu } x = \dfrac{m}{n}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng f liên tục trên $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, gián đoạn trên $\mathbf{Q}$ và mỗi điểm gián đoạn của f đều là một điểm gián đoạn loại 1.

46.* Giả sử f là một hàm số thực liên tục đều trên $[0, +\infty)$ và $\lim\limits_{n \to \infty} f(x + n) = 0$ với mỗi $x \geqslant 0$ (n nguyên dương).

Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

47. Cho dãy số thực $\{u_n\}$ xác định bởi

$$u_{n+1} = \operatorname{arctg} u_n, \qquad u_1 > 0.$$

Tìm $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$.

48. Giải phương trình

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \operatorname{arctg}\frac{1}{x-3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{x+3} = \frac{\pi}{4},$$

biết rằng phương trình có một nghiệm nguyên.

49. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \sin x^2$ không liên tục đều trên $\mathbf{R}$.

50. Giả sử f là một hàm số liên tục trên đoạn $[0, 1]$, $f(0) = f(1)$. Chứng minh rằng với mỗi n nguyên dương, hàm số $g_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$ triệt tiêu tại ít nhất một điểm của $\left[0 ; 1 - \frac{1}{n}\right]$. (Chứng minh bằng phản chứng).

51. Cho f là một hàm số liên tục trên $[0, +\infty)$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b \in \mathbf{R}$.

a) Chứng minh rằng f bị chặn và liên tục đều trên $[0, +\infty)$.

b) Chứng minh rằng f đạt được ít nhất một cận đúng của nó.

52. Cho f là một hàm số liên tục trên khoảng $[a, +\infty)$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Chứng minh rằng f đạt giá trị nhỏ nhất trên $[a, +\infty)$.

BÀI GIẢI VÀ HƯỚNG DẪN

1. $0 < \frac{n!}{n^n} \leqslant \frac{1}{n}$ với mọi $n \geqslant 1$. Sau đó áp dụng định nghĩa giới hạn.

2. a) 0 ; b) 1 ;

c) $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}$, $k \geqslant 0$. Do đó

$$u_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}, \; n \geq 0 \; ; \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{4} .$$

3. $\beta \leqslant a_n \leqslant \beta \sqrt[n]{2}$ với mọi n. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \beta$.

4. Dãy $\{u_n\}$ tăng và bị chặn trên ($u_n < 2$ với mọi n). Đặt $a = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$; $a = \sqrt{2 + a}$; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$.

5. $u_{n+1} \geqslant \sqrt{a}$ với mọi $n \geqslant 1$.

Dãy giảm và bị chặn dưới nên hội tụ. Đặt $l = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$;

$l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{a}{l}\right)$; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sqrt{a}$.

6. b) Từ a) suy ra

$$u_{n+1} < u_n + \frac{1}{2^{n+1}} < u_{n-1} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} < \ldots <$$

$$< u_1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$u_{n+1} < u_1 + \frac{1}{2}$ với mọi $n \geqslant 1$. Dãy tăng và bị chặn trên nên hội tụ. Từ $u_{n+1}^2 = u_n^2 + \frac{1}{2^n}$ suy ra

$u_2^2 = u_1^2 + \frac{1}{2}$; $u_3 = u_2^2 + \frac{1}{2^2}$; ... ; $u_n^2 = u_{n-1}^2 + \frac{1}{2^{n-1}}$. Do đó

$$u_n^2 = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \to 2 \text{ khi } n \to \infty.$$ Vậy

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sqrt{2}$.

7. Với mọi N nguyên dương, lấy $m = 2N$, $n = N$.

$$|u_m - u_n| = \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} > \frac{1}{2} .$$

8. Với $m \geqslant n$, $|u_m - u_n| \leqslant \dfrac{k^{n-1}}{1-k}|u_2 - u_1|$

9. $x_n = 1 + b + b^2 + ... + b^{n-1} + ab^n$.

Với $b = 1$, dãy $\{x_n\}$ phân kì. Với $b \neq 1$,

$$x_n = \frac{1-b^n}{1-b} + ab^n = \frac{1}{1-b} + b^n\left(a - \frac{1}{1-b}\right).$$

Dãy $\{x_n\}$ hội tụ khi và chỉ khi $|b| < 1$, a bất kì hoặc $b \neq 1$, $a = \dfrac{1}{1-b}$.

10.* $u_{n+1} = u_n + (u_n - a)^2$ (1) $\Rightarrow u_{n+1} \geqslant u_n$. Dãy tăng. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l \in \mathbf{R}$. Qua giới hạn đẳng thức (1) ta được $l = l + (l - a)^2 \Rightarrow l = a$. Vì dãy tăng nên $u_n \leqslant a$ với mọi n. Do đó

$$u_{n+1} \leqslant a \iff u_n^2 + (1-2a)u_n + a^2 \leqslant a \quad \text{với mọi } n$$

$$\iff a - 1 \leqslant u_n \leqslant a \quad \text{với mọi } n.$$

Đặc biệt $a - 1 \leqslant u_1 \leqslant a$, tức là $a - 1 \leqslant b \leqslant a$. (2)

(2) là điều kiện cần để dãy $\{u_n\}$ hội tụ. Đó cũng là điều kiện đủ.

Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$.

11. Đặt $u_n = \dfrac{x_1 + ... + x_n}{n}$. Cho $\varepsilon > 0$, $\exists N_0$ nguyên dương sao cho $n \geqslant N_0 \Rightarrow |x_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$; $u_n = \dfrac{x_1 + ... + x_{N_0}}{n} + \dfrac{x_{N_0+1} + ... + x_n}{n} = 0$ $(n > N_0)$; $\dfrac{|x_{N_0+1} + ... x_n|}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Vì $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1 + ... + x_{N_0}}{n} = 0$ nên $\exists N > N_0$ sao cho $n \geqslant N \Rightarrow \dfrac{|x_1 + ... + x_{N_0}|}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Vậy $|u_n| < \varepsilon$ với $n \geqslant N$.

12. Đặt $z_n = \dfrac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \dots + x_n y_1}{n}$; $x_n = a + u_n$,

$y_n = b + v_n$. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$ và

$$z_n = ab + \frac{a(v_1 + \dots + v_n)}{n} + \frac{b(u_1 + \dots + u_n)}{n} + \frac{u_1 v_n + \dots + u_n v_1}{n}.$$

$\{v_n\}$ hội tụ nên bị chặn : $\exists M > 0$ sao cho $|v_n| \leqslant M$ với mọi n.

$\dfrac{|u_1 v_n + \dots + u_n v_1|}{n} \leqslant M \dfrac{|u_1| + \dots + |u_n|}{n}$. Từ kết quả của bài tập 1 suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|u_1| + \dots + |u_n|}{n} = 0$. Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = ab$.

13. b) $0 < v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n}}{2} \leqslant \dfrac{v_n - u_n}{2}$, $n \geqslant 0$

$\left(\text{vì } \sqrt{u_n v_n} > \sqrt{u_n u_n} = u_n\right)$. Do đó

$$v_n - u_n \leqslant \frac{v_{n-1} - u_{n-1}}{2} \leqslant \frac{v_{n-2} - u_{n-2}}{2^2} \leqslant \dots \leqslant \frac{v_0 - u_0}{2^n}$$

với mọi $n \geqslant 0$.

14. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_0$ nguyên dương sao cho $n \geqslant N_0 \Rightarrow |u_{n+1} - u_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$,

$$\forall n > N_0,\ |u_n| \leqslant |u_{N_0}| + |u_n - u_{N_0}|,$$

$$|u_n - u_{N_0}| \leqslant |u_{N_0+1} - u_{N_0}| + |u_{N_0+2} - u_{N_0+1}| + \dots + |u_n - u_{n-1}| < (n - N_0)\frac{\varepsilon}{2}$$

$$|u_n| \leqslant |u_{N_0}| + |u_n - u_{N_0}| < |u_{N_0}| + (n - N_0)\frac{\varepsilon}{2}.$$

$\dfrac{|u_n|}{n} < \dfrac{|u_{N_0}|}{n} + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Vì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|u_{N_0}|}{n} = 0$ nên $\exists N \geqslant N_0$ sao cho

$n \geqslant N \Rightarrow \dfrac{|u_{N_0}|}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Do đó $\dfrac{|u_n|}{n} < \varepsilon$ với mọi $n \geqslant N$.

15.* Dãy $\{u_n\}$ hội tụ nên bị chặn. Do đó $\exists \beta > 0$ sao cho $|u_n| \leqslant \beta$ với mọi n. Vì $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$ nên $\exists N_1$ sao cho $|u_n| < \dfrac{\varepsilon}{2\alpha}$ với mọi $n \geqslant N_1$.

$\lim\limits_{n \to \infty} v_n = 0 \Rightarrow \exists N_2$ sao cho $|v_n| < \dfrac{\varepsilon}{2\beta N_1}$ với mọi $n \geqslant N_2$.

$$w_n = \sum_{k=0}^{N_1 - 1} u_k v_{n-k} + \sum_{k=N_1}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Lấy $N > N_1 + N_2$. Khi đó với $n \geqslant N$, ta có

$$\left|\sum_{k=0}^{N_1-1} u_k v_{n-k}\right| \leqslant \beta \sum_{j=n-N_1+1}^{n} |v_j| < \beta . N_1 . \frac{\varepsilon}{2\beta N_1} = \frac{\varepsilon}{2},$$

và

$$\left|\sum_{k=N_1}^{n} u_k v_{n-k}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\alpha} \sum_{k=0}^{n-N_1} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2\alpha} \cdot \alpha = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Do đó $|w_n| < \varepsilon$ với mọi $n \geqslant N$.

16.* b) Từ a) suy ra

$a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n + c_n}{3} \leqslant a_n$, với $n \geqslant 2$. Vậy $\{a_n\}$ là một dãy giảm.

$$\frac{3}{c_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{c_n} \leqslant \frac{1}{c_n} + \frac{1}{c_n} + \frac{1}{c_n} = \frac{3}{c_n} \Rightarrow c_{n+1} \geqslant c_n.$$

với $n \geqslant 2$. Vậy $\{c_n\}$ tăng. Ta có

$$a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant b_n \geqslant c_n \geqslant c_{n-1} \geqslant \ldots \geqslant c_2.$$

Từ đó suy ra các dãy số $\{a_n\}$ và $\{c_n\}$ hội tụ : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$. Từ đẳng thức $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n + c_n}{3}$ suy ra dãy $\{b_n\}$ hội tụ : $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ và

$$a = \frac{a+b+c}{3} \qquad (1).$$

Từ a) suy ra $\qquad a \geqslant b \geqslant c \qquad (2).$

Từ (1) và (2) suy ra $a = b = c$. Đặt $\lambda = a = b = c$.

Trong trường hợp tổng quát tìm λ khá khó. Giả sử $a_1c_1 = b_1^2$. Khi đó $\lambda = b_1$. Ta chứng minh điều này bằng quy nạp :

$$(\forall n)\ b_1 = b_2 = \dots = b_n. \qquad (3)$$

Thật vậy, với $n = 2$, ta có $b_2 = \sqrt[3]{a_1 b_1 c_1} = \sqrt[3]{b_1^3} = b_1$. Giả sử đẳng thức (3) đúng với n. Ta chứng minh nó đúng với n + 1.

Từ định nghĩa của a_n, b_n, c_n suy ra

$$a_n c_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}}{a_{n-1}b_{n-1} + b_{n-1}c_{n-1} + c_{n-1}a_{n-1}} \times a_{n-1}b_{n-1}c_{n-1} \qquad (4).$$

Vì $\qquad b_n = \sqrt[3]{a_{n-1}b_{n-1}c_{n-1}} \qquad$ và $\qquad b_{n-1} = b_n$ nên

$$a_{n-1}c_{n-1} = b_{n-1}^2 = b_n^2 \qquad (5).$$

Từ (4), (5) suy ra

$a_n c_n = a_{n-1}c_{n-1} = b_n^2$. Do đó $b_{n+1} = \sqrt[3]{a_n b_n c_n} = b_n = b_1$.

17. Phản chứng. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = l \in \mathbf{R}$. Khi đó

$\lim\limits_{n\to\infty} [\sin(n+2) - \sin n] = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \cos(n+1)\sin 1 = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \cos(n+1) = 0$. Vì $\cos(n+1) = \cos n\cos 1 - \sin n \sin 1$

và $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n = 0$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = 0$. Do đó

$$\lim_{n\to\infty} (\sin^2 n + \cos^2 n) = 0 \text{ . Vô lí !}$$

18. Nếu tập hợp E không bị chặn trên thì $M = \sup E = +\infty$. $\forall n$, $\exists a_n \in E$ sao cho $a_n > n$. Ta có $\{a_n\} \subset E$ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty = M$.

Nếu E là một tập hợp bị chặn trên thì $M \in \mathbf{R}$ và

$\forall n$ nguyên dương, $\exists a_n \in E$ sao cho $M - \dfrac{1}{n} < a_n \leqslant M$.

19. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l \in \mathbf{R}$

1° Nếu $\exists u_m$ sao cho $u_m > l$ thì $\exists N$ nguyên dương sao cho $n > N \Rightarrow u_n < u_m$. Gọi u_p là số lớn nhất trong các số $u_1, \ldots, u_N$. Ta có $u_p = \sup\limits_n u_n$.

2° Chứng minh tương tự nếu $\exists u_k$ sao cho $u_k < l$ thì $\exists u_q$ sao cho : $u_q = \inf\limits_n u_n$.

3° $u_n = l$ với mọi n.

24. a) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -1$, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $\inf\limits_n a_n = -2$, $\sup\limits_n a_n = \dfrac{3}{2}$,

b) $\liminf\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, $\inf\limits_n b_n = 0$, $\sup\limits_n b_n = +\infty$,

c) $\liminf\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty$, $\limsup\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$, $\inf\limits_n c_n = -\infty$, $\sup\limits_n c_n = +\infty$

25. Lấy $x = 1$, $y = 1$, ta được $f(1) = 2f(1)$. Do đó $f(1) = 0$.

$\forall x \neq 1$, $y = 1$, $f(x) = xf(x)$. Từ đó suy ra $f(x) = 0$.

28. Đặt $a_n = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\ldots\cos\frac{x}{2^n}$. Ta có

$$\sin x = 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = 2^2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\sin\frac{x}{2^2} = \cdots$$

$$= 2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}.$$

- Nếu $x = 0$ thì $a_n = 1$ với mọi n. Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

- Nếu $x \neq 0$ thì $a_n = \sin x \cdot \dfrac{1}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$. Vì $\sin\frac{x}{2^n} \sim \frac{x}{2^n}$ khi

$n \to \infty$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n\sin\frac{x}{2^n} = x$. Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{\sin x}{x}$

29. Tập hợp các điểm gián đoạn của f và g là **Z**.

32. $$\max(f, g)(x) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2},$$

$$\min(f, g)(x) = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}, \quad x \in I.$$

34. Giả sử n là một số nguyên dương lẻ và

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n, \quad a_0 \neq 0.$$

Nếu $a_0 > 0$ thì $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$. Do đó $P(\alpha) < 0$ với $\alpha < 0$ đủ nhỏ và $P(\beta) > 0$ với $\beta > 0$ đủ lớn. Theo định lí Bônzanô–Côsi, tồn tại $c \in (\alpha, \beta)$ sao cho $P(c) = 0$.

35. Hàm số $g(x) = f(x) - x$ liên tục trên $[a, b]$; $g(a) \geqslant 0$, $g(b) \leqslant 0$ vì $f(a) \geqslant a$ và $f(b) \leqslant b$. Theo định lí Bônzanô–Côsi, tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho $g(c) = 0$.

36. Hiển nhiên f liên tục. Từ kết quả của bài tập 35 suy ra tồn tại ít nhất một $c \in [a, b]$ sao cho $g(c) = f(c) - c = 0$.

Hàm số g giảm nghiêm ngặt trên [a, b]. Thật vậy, nếu $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ thì

$$g(x_1) - g(x_2) = [f(x_1) - f(x_2)] + (x_2 - x_1).$$

Theo giả thiết $|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|$. Do đó dấu của $g(x_1) - g(x_2)$ là dấu của $x_2 - x_1$. Vì vậy c là duy nhất.

37. Trước hết ta chứng minh nếu $a < c < b$ thì $f(a) < f(c) < f(b)$. Vì f là một song ánh nên $f(c) \neq f(a)$ và $f(c) \neq f(b)$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - f(a)$, $x \in [a, b]$. Nếu $f(c) < f(a)$ thì $g(c) = f(c) - f(a) < 0$ và $g(b) = f(b) - f(a) > 0$. Hàm số g liên tục trên đoạn [c, b] nên theo định lí Bônzanô–Côsi, tồn tại $d \in (c, b)$ sao cho $g(d) = 0$, tức là $f(d) = f(a)$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết f là một song ánh. Vậy $f(c) > f(a)$. Chứng minh tương tự, $f(c) < f(b)$.

Giả sử $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Khi đó $f(a) \leq f(x_1) < f(b)$. Áp dụng điều vừa chứng minh trên đoạn $[x_1, b]$, ta được $f(x_1) < f(x_2) \leq f(b)$.

40. a) liên tục đều ; b) không liên tục đều.

41. Với mỗi $a \in (0, 1)$, hàm số f liên tục trên đoạn [a, 1]. Do đó f liên tục đều trên đoạn này. Lấy $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = \dfrac{2}{n}$, $n \geq 2$, ta có $|y_n - x_n| = \dfrac{1}{n} \to 0$ khi $n \to \infty$, $|f(y_n) - f(x_n)| = \dfrac{n}{2} \to +\infty$ khi $n \to \infty$. Do đó f không liên tục đều trên (0, 1].

43. Giả sử f liên tục đều trên khoảng (a, b). Áp dụng tiêu chuẩn Côsi về sự tồn tại giới hạn của một hàm số dễ dàng chứng minh được rằng tồn tại $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \alpha$ và $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Hàm số F xác định trên [a, b] bởi

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{với } a < x < b \\ \alpha & \text{với } x = a \\ \beta & \text{với } x = b \end{cases}$$

liên tục trên [a, b] và $F\big|_{(a,b)} = f$.

44. a) Hiển nhiên g tăng trên I. Vì f liên tục trên $I = [0, 1]$ nên liên tục đều trên I. Do đó với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $(\forall x \in I, \forall t)\ x + t \in I$ và $|t| < \delta \Rightarrow |f(x+t) - f(x)| < \varepsilon$.

Do đó

$$\forall x \in I, \sup_{t \in I_{x\delta}} |f(x+t) - f(x)| \leqslant \varepsilon \Rightarrow g(\delta) \leqslant \varepsilon.$$

Từ đó

$$(\forall h \in I)\ 0 < h < \delta \Rightarrow g(h) \leqslant g(\delta) \leqslant \varepsilon.$$

Vậy $\lim\limits_{h \to 0} g(h) = 0$.

b) Từ định nghĩa của g(h) suy ra : nếu $h_1, h_2 > 0$ và $h_1 + h_2 \in I$ thì với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $x_o \in I$ sao cho

$$\sup_{t \in I_{x_o, (h_1 + h_2)}} |f(x_o + t) - f(x_o)| > g(h_1 + h_2) - \varepsilon .$$

Do đó tồn tại t_o sao cho $x_o + t_o \in I$, $|t_o| \leqslant h_1 + h_2$ và

$$|f(x_o + t_o) - f(x_o)| > g(h_1 + h_2) - \varepsilon. \qquad (1)$$

Ta viết t_o dưới dạng $t_o = t_1 + t_2$, trong đó $t_1 \leqslant h_1$, $t_2 \leqslant h_2$, $x_o + t_1 \in I$. Khi đó

$$\begin{aligned} |f(x_o + t_o) - f(x_o)| &\leqslant |f(x_o + t_1 + t_2) - f(x_o + t_1)| + \\ &\quad + |f(x_o + t_1) - f(x_o)| \leqslant \\ &\leqslant g(h_2) + g(h_1) \qquad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$g(h_1 + h_2) - \varepsilon < g(h_1) + g(h_2) \text{ với mọi } \varepsilon > 0.$$

Từ đó có bất đẳng thức cần chứng minh.

46.* Cho $\varepsilon > 0$. Vì f liên tục đều trên $[0, +\infty)$ nên tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$(\forall x', x'' \geqslant 0)\ |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Chia đoạn [0, 1] thành một số hữu hạn đoạn nhỏ bởi các điểm chia $x_o, x_1, ..., x_m$,

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = 1$$

sao cho $|x_i - x_{i-1}| < \delta$, $i = 0, 1, \dots, m$. Theo giả thiết, $\lim_{n \to \infty} f(x_i + n) = 0$, $i = 0, 1, \dots, m$. Do đó tồn tại N sao cho

$f(x_i + n) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ với mọi $n \geqslant N$, $i = 0, 1, \dots, m$. Khi đó với mọi $x \geqslant N$, tồn tại n nguyên dương sao cho $n \leqslant x$ và $x - n < 1$. (Hiển nhiên $n \geqslant N$). Do đó tồn tại x_i sao cho $|x - x_i - n| < \delta$. Từ đó $|f(x) - f(x_i + n)| < \dfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(x)| \leqslant |f(x_i + n)| + \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ với mọi $x \geqslant N$.

47. $\{u_n\}$ là một dãy giảm và bị chặn dưới ; $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$.

48. Đặt $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$; $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-3}$, $\gamma = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+3}$.

Ta có

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1;$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1 - (\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha)} = 1 ,$$

$$x^3 - 3x^2 - 12x + 10 = 0.$$

Đáp số : $x = 5$, $x = -1 \pm \sqrt{3}$.

49. Lấy $x_n = \sqrt{n\pi}$, $y_n = \sqrt{\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi}$, $n = 1, 2, \dots$

$$\lim_{n \to \infty} (y_n - x_n) = 0 , \lim_{n \to \infty} \left| \sin y_n^2 - \sin x_n^2 \right| = 1 .$$

50. Giả sử tồn tại một số nguyên dương n sao cho $g_n(x) \neq 0$ với mọi $x \in \left[0, 1 - \dfrac{1}{n}\right]$. Khi đó g_n giữ dấu không đổi trên đoạn này. Nếu $g_n(x) > 0$ trên $\left[0, 1 - \dfrac{1}{n}\right]$ thì

$$f(1) - f(0) = \sum_{k=1}^{n} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right) \right] = \sum_{k=1}^{n} g_n\left(\frac{k-1}{n}\right) > 0 ;$$

(Trái với giả thiết).

51. a) Cho $\varepsilon > 0$ tùy ý. Tồn tại $x_0 > 0$ sao cho $x \geq x_0 \Rightarrow |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{3}$. Vì f bị chặn trên $[0, x_0]$ nên tồn tại $M_0 > 0$ sao cho $|f(x)| \leq M_0$ với mọi $x \in [0, x_0]$. Do đó $|f(x)| \leq \max\left(M_0, |b| + \frac{\varepsilon}{3}\right)$ với mọi $x \geq 0$.

Vì f liên tục đều trên $[0, x_0]$ nên tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$(\forall x', x'' \in [0, x_0])\ |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Khi đó $(\forall x', x'' \in [0, +\infty))\ |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

b) Đặt $M = \sup\limits_{x \geq 0} f(x)$, $m = \inf\limits_{x \geq 0} f(x)$. Giả sử $M > b$ và gọi α là một số sao cho $b < \alpha < M$. Tồn tại $x_1 > 0$ sao cho $f(x) < \alpha$ với mọi $x \geq x_1$. Khi đó $\sup\limits_{x \in [0, x_1]} f(x) = M$. Do đó tồn tại ít nhất một $\xi \in [0, x_1]$ sao cho $f(\xi) = M$. Chứng minh tương tự nếu $m < b$ thì f đạt cận dưới đúng của nó trên $[0, \infty)$. Nếu $M = m = b$ thì f là một hàm hằng.

BÀI TẬP CHƯƠNG III VÀ LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

ĐẠO HÀM

1. Cho f là một hàm số xác định trên **R** bởi $f(x) = |x|^{\alpha}$, α là một số hữu tỉ dương. Chứng minh rằng f có đạo hàm tại điểm 0 khi và chỉ khi $\alpha > 1$.

2. Cho f là một hàm số xác định trên **R** bởi

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } x \in \mathbf{Q} \\ 1 \text{ nếu } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

Chứng minh rằng hàm $g(x) = x^2 f(x)$, $x \in \mathbf{R}$ chỉ có đạo hàm tại một điểm của $\mathbf{R}$.

3. Giả sử f là một hàm số có đạo hàm trên $(-R, R)$, $R > 0$. Chứng minh rằng nếu f là một hàm số chẵn (lẻ) thì f' là một hàm số lẻ (chẵn), nếu $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì T trên $\mathbf{R}$ thì f' cũng là một hàm số tuần hoàn với chu kì T trên $\mathbf{R}$.

4. Giả sử f là một hàm số có đạo hàm trên $\mathbf{R}$, a, b là hai số dương. Chứng minh rằng

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + bh) - f(x - ah)}{(b + a)h} = f'(x) \text{ với mọi } x \in \mathbf{R}.$$

5. Giả sử f là một hàm số xác định trên khoảng (a, b) $x_0 \in (a, b)$ và tồn tại

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'_s(x_0) \in \mathbf{R} .$$

Giới hạn trên gọi là đạo hàm đối xứng của hàm số f tại điểm x_0.

a) Chứng minh rằng nếu f có đạo hàm trái và đạo hàm phải tại điểm x_0 thì nó có đạo hàm đối xứng tại x_0.

b) Gọi f là hàm số xác định trên $\mathbf{R}$ bởi

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng f không có đạo hàm trái và đạo hàm phải tại điểm x_0 nhưng f có đạo hàm đối xứng tại điểm này.

6. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

có đạo hàm tại mọi điểm của $\mathbf{R}$ và f' không liên tục tại điểm 0.

7.* Giả sử (a, b) là một khoảng chứa điểm 0, f là một hàm số xác định trên (a, b), liên tục tại 0, f(0) = 0 và

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = m \in \mathbf{R} .$$

Chứng minh rằng f có đạo hàm tại điểm 0.

8. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $f(x) = \arcsin \frac{1-x}{1+x}$; b) $f(x) = \arccos \sqrt{1 - x^2}$;

c) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{1-x^2}$; d) $f(x) = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}$;

e) $f(x) = \arcsin \sqrt{\sin x}$; f) $f(x) = \arccos(\cos^2 x)$;

g) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+a}{1-ax}$.

9. Tìm trên parabol $y^2 = x$ điểm gần đường thẳng $x - y + 5 = 0$ nhất.

10. Chứng minh rằng nếu hàm số $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ thỏa mãn bất đẳng thức

$$[f(x) - f(y)]^2 \leqslant |x - y|^3$$

với mọi x, y ∈ $\mathbf{R}$ thì f là một hàm hằng trên $\mathbf{R}$.

11. Cho f là hàm số xác định trên $\mathbf{R}$ bởi

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2} & \text{nếu } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \geqslant 1 . \end{cases}$$

Chứng minh rằng f thỏa mãn các giả thiết của định lí về số gia hữu hạn trên đoạn [0, 2] và tìm tất cả các điểm c ∈ [0, 2] sao cho $f(2) - f(0) = 2f'(c)$.

12. Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng (a, b) (a, b $\in$ **R**). Chứng minh rằng nếu f không bị chặn trên (a, b) thì f' cũng không bị chặn trên khoảng đó.

13. Giả sử f là một hàm số xác định trên đoạn [a, b]. f gọi là thỏa mãn điều kiện Lipsit (Lipschitz) nếu tồn tại một số k > 0 sao cho

$$|f(x) - f(y)| \leq k(|x - y| \text{ với mọi } x, y \in [a, b].$$

a) Chứng minh rằng nếu f có đạo hàm liên tục trên [a, b] thì f thỏa mãn điều kiện Lipsit.

b) Giả sử f có đạo hàm trên [a, b] và f thỏa mãn điều kiện Lipsit. Chứng minh rằng f' bị chặn trên [a, b].

14. Giả sử f là một hàm số có đạo hàm trên khoảng (0, 1], $|f'(x)| < 1$ với mọi $x \in (0, 1]$ và $\{u_n\}$ là một dãy số xác định bởi $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ hội tụ.

15. Giả sử hàm số $f : [0, 1] \to [0, 1]$ liên tục trên đoạn [0, 1], có đạo hàm trên khoảng (0, 1), f(0) = 0, f(1) = 1. Chứng minh rằng

a) Tồn tại ít nhất một điểm $c \in (0, 1)$ sao cho $f(c) = 1 - c$;

b) Tồn tại các số thực a, b $\in$ (0, 1) sao cho $a \neq b$ và $f'(a)f'(b) = 1$.

16. Giả sử f là một hàm số có đạo hàm trên khoảng (a, b). Chứng minh rằng f là tăng nghiêm ngặt khi và chỉ khi $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a, b)$ và tập hợp

$$P = \{x \in (a, b) : f(x) > 0\}$$

trù mật trong (a, b).

17. Giả sử hàm số f có đạo hàm trên **R** ; a, b $\in$ **R**, a < b, y là một số thực nằm giữa f'(a) và f'(b), $y \neq f'(a)$ và $y \neq f'(b)$.

a) Chứng minh rằng tồn tại $h \in (0, b - a)$ sao cho

$$\left| \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - f'(a) \right| < |f'(a) - y| ,$$

và

$$\left| \frac{f(b) - f(b-h)}{h} - f'(b) \right| < |f'(b) - y| \; .$$

Từ đó suy ra rằng y nằm giữa $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ và $\frac{f(b) - f(b-h)}{h}$.

b) Gọi r là hàm số xác định trên **R** bởi

$$r(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (h \in \mathbf{R},\ 0 < h < b - a).$$

Chứng minh rằng tồn tại $x \in (a, b - h)$ sao cho $r(x) = y$.

c) Từ đó suy ra rằng tồn tại $x \in (a, b)$ sao cho $f'(x) = y$.

18. Giả sử f là một hàm số liên tục trên đoạn [a, b] và có đạo hàm trên khoảng (a, b).

a) Chứng minh rằng nếu f' không triệt tiêu trên (a, b) thì f đơn điệu trên [a, b].

b) Giả sử f có đạo hàm phải tại a và đạo hàm trái tại b. Chứng minh rằng nếu $f'(a+0).f'(b-0) < 0$ thì f' lấy giá trị 0 ít nhất tại một điểm của (a, b). Từ đó suy ra rằng nếu $f'(a+0) \neq f'(b-0)$ thì f' lấy trên (a, b) mọi giá trị trung gian giữa $f'(a+0)$ và $f'(b-0)$. (Như vậy đạo hàm của một hàm số trên một khoảng của **R** thỏa mãn định lí về giá trị trung gian ngay cả trong trường hợp nó không liên tục).

19. Giả sử hàm số $f : [0, 1] \to [0, 1]$ có đạo hàm liên tục trên [0, 1] và $|f'(x)| < 1$ với mọi $x \in [0, 1]$.

a) Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ có một nghiệm duy nhất α thuộc đoạn [0, 1].

b) Giả sử $\{u_n\}$ là dãy số xác định bởi $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \geq 1$, u_1 là một số thực cho trước thuộc [0, 1]. Chứng minh rằng tồn tại $k \in (0, 1)$ sao cho

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha| \qquad \text{với mọi } n \geq 1.$$

Từ đó tìm $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$.

20. Giả sử hàm số f có đạo hàm trên đoạn [a, b]. Chứng minh rằng nếu f có n nghiệm thuộc [a, b], $n \geqslant 2$ thì f' có $n - 1$ nghiệm thuộc đoạn đó.

21. Định lí Rôn mở rộng.

Giả sử f là một hàm số liên tục trên $[a, +\infty)$, có đạo hàm trên $(a, +\infty)$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một số thực $c > a$ sao cho $f'(c) = 0$.

22. Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) $\sin(x + h) < \sin x + h\cos x$ với $0 \leqslant x < x + h \leqslant \dfrac{\pi}{2}$,

b) $\dfrac{\beta - \alpha}{\cos^2\alpha} < \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha < \dfrac{\beta - \alpha}{\cos^2\beta}$ với $0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$,

c) $\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$ với mọi $x > 0$.

23. Cho n số thực $a_1, a_2, ..., a_n$. Tìm $x \in \mathbf{R}$ sao cho tổng $\sum\limits_{k=1}^{n} (x - a_k)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

24. Giả sử hàm số f có đạo hàm trên [a, b] $(a > 0)$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{1}{a - b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(c) - cf'(c).$$

25. Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp n trên [a, b]. Chứng minh rằng nếu f triệt tiêu tại $n + 1$ điểm phân biệt thuộc [a, b] thì $f^{(n)}$ triệt tiêu ít nhất tại một điểm thuộc (a, b).

26. Giả sử hàm số f liên tục trên [a, b], có đạo hàm cấp hai trên (a, b), $f(a) = f(b) = 0$ và c là một điểm cho trước của (a, b). Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một điểm $d \in (a, b)$ sao cho

$$f(c) = (c - a)(c - b)\frac{f''(d)}{2}.$$

27. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Chứng minh rằng

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}},$$

trong đó $P_n(x)$ là một đa thức bậc n.

Tìm hệ thức giữa $P_{n+1}(x)$ và $P_n(x)$.

28. Cho g_n là hàm số xác định bởi

$$g_n(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\sin\left(n\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x}\right),\ x \neq 0.$$

a) Chứng minh rằng

$$(\mathrm{arctg}x)^{(n)} = g_n(x) \text{ với mọi } x > 0.$$

b) Từ đó suy ra hệ thức giữa $(\mathrm{arctg}x)^{(n)}$ và $g_n(x)$ với $x < 0$.

29. Bằng cách áp dụng công thức Laibnít để tính đạo hàm của hàm số $P(x) = (x-a)^n(x-b)^n$, hãy chứng minh công thức

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{n!}.$$

30. Cho hàm số f liên tục trên $[a-h, a+h]$ và có đạo hàm trên $(a-h, a+h)$ $(h > 0)$.

a) Chứng minh rằng tồn tại $\theta \in (0, 1)$ sao cho

$$f(a+h) - f(a-h) = h[f'(a+\theta h) + f'(a-\theta h)].$$

b) Chứng minh rằng tồn tại $\tau \in (0, 1)$ sao cho

$$f(a+h) - 2f(a) + f(a-h) = h[f'(a+\tau h) - f'(a-\tau h)].$$

c) Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp hai tại điểm a. Hãy tính

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t) - 2f(a) + f(a-t)}{t^2}.$$

31. Giả sử f là một hàm số có đạo hàm cấp n + 1 liên tục trên đoạn $[a - u, a + u]$ $(u > 0)$ và $f^{(n+1)}(a) \neq 0$. Khi đó với $0 \leqslant p \leqslant n$, công thức Taylo với phần dư Lagrang có dạng

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots +$$

$$+ \frac{f^{(p)}(a)}{p!}h^p + \frac{f^{(p+1)}(a + \theta_{p+1}h)}{(p+1)!}h^{p+1},$$

$$\theta_{p+1} = \theta_{p+1}(h) \in (0, 1).$$

Chứng minh rằng $\lim\limits_{h \to 0} \theta_p(h) = \dfrac{1}{p+1}$, nếu $f^{(p+1)}(a) \neq 0$.

32. Giả sử hàm số f có đạo hàm mọi cấp trên **R** thỏa mãn các điều kiện sau :

a) Tồn tại L > 0 sao cho

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant L \text{ với mọi } x \in \mathbf{R},$$

b) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$ với mọi n.

Chứng minh rằng

$$f^{(n)}(0) = 0 \text{ với mọi } n,$$

và

$$f(x) = 0 \text{ với mọi } x \in \mathbf{R}.$$

33. Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp hai trên [a, b] và tồn tại một số k > 0 sao cho

$$|f''(x)| \leqslant k \text{ với mọi } x \in (a, b).$$

Chứng minh rằng

$$|f'(x)| \leqslant \frac{|f(b) - f(a)|}{b - a} + k\frac{b - a}{2} \text{ với mọi } x \in [a, b].$$

34. Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp hai trên đoạn [0, 1], $f(0) = f(1) = 0$ và $\min\limits_{0 \leq x \leq 1} f(x) = -1$. Chứng minh rằng

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)| \geq 8.$$

35. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x$;

b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \operatorname{tg} x}\right)$;

c) $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{2a}{x^2 - a^2} - \frac{1}{x - a}\right)$ $(a \neq 0)$;

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x - \cos x}{x^2 + \sin(2x)}$;

e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin(2x) - 2\arcsin x}{x^3}$;

f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \operatorname{cotg} x - 1}{x^2}$.

36. Giả sử f là một hàm lồi trên khoảng $I \subset \mathbf{R}$. Chứng minh rằng nếu $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ là những số thực không âm sao cho $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ và $x_1, \ldots, x_n \in I$ thì

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

37. Chứng minh rằng nếu f là một hàm lồi trên khoảng I thì với mọi n nguyên dương và với mọi $x_1, \ldots, x_n \in I$, ta đều có

$$f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}.$$

38. Giả sử hàm số f có đạo hàm hữu hạn trên khoảng I. Chứng minh rằng nếu tiếp tuyến của đồ thị của hàm số f tại mỗi điểm của nó đều nằm về phía dưới của đồ thị thì f là một hàm lồi trên I.

39. Cho f là hàm số chẵn trên **R** xác định bởi

$$f(x) = (x - 2)^2 \text{ với } x \geq 0$$

Chứng minh rằng f là một hàm lồi trên $(-\infty, 0]$ và $[0, +\infty)$ nhưng không phải là một hàm lồi trên $\mathbf{R}$.

40. Giả sử f là một hàm lồi trên đoạn [a, b].

a) Chứng minh rằng với mọi $c \in (a, b)$, ta có

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

b) Chứng minh nếu f là một hàm lồi trên [a, b] thì f thỏa mãn điều kiện Lipsit trên một đoạn bất kì $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$.

41. Chứng minh rằng nếu f là một hàm lồi trên (a, b) thì f liên tục trên (a, b).

42. Xác định các hệ số a, b, c sao cho hàm số

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

là lồi trên $[0, +\infty)$ và lõm trên $(-\infty, 0]$.

43. Tùy theo các giá trị của a và b, hãy xét tính lồi của hàm số $f(x) = ax^3 + bx$ trên $\mathbf{R}$ $(a \neq 0)$.

44. Giả sử f là một hàm số có đạo hàm cấp hai trên $\mathbf{R}$, $|f(x)| < 1$ và $|f''(x)| < 1$ với mọi $x \in \mathbf{R}$. Chứng minh rằng $|f'(x)| < 2$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

45. Giả sử f là một hàm số có đạo hàm mọi cấp trên [a, b], $0 \in [a, b]$ và k là một số dương,

$$f^{(n)}(0) = 0, \ \sup_{x \in [a, b]} |f^{(n)}(x)| \leqslant k^n n!, \text{ với mọi } n \in \mathbf{N}^*.$$

Chứng minh rằng $f(x) = 0$ với mọi $x \in \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right]$. Từ đó suy ra rằng $f(x) = 0$ với mọi $x \in [a, b]$.

46. Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp hai liên tục trên [0, 1], $a \in (0, 1)$ và g là hàm số xác định bởi

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ nếu } x \in [0, a) \cup (a, 1], \ g(a) = f'(a).$$

Chứng minh rằng g có đạo hàm tại điểm a và tính g'(a).

47. Giả sử f là một hàm số có đạo hàm cấp hai liên tục trên đoạn $[0, a]$, $a > 0$, $f(0) = 0$ và $\{u_n\}$ là một dãy số thực xác định bởi $u_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$, $n \geqslant \frac{1}{a}$. Chứng minh rằng $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{f'(0)}{2}$.

48. Giả sử hàm số f có đạo hàm mọi cấp trên khoảng (a, b) và tất cả các đạo hàm đều không âm trên (a, b).

a) Chứng minh rằng nếu f bị chặn trên (a, b) bởi số thực M thì với mọi $x \in (a, b)$ và với mọi số thực $r > 0$ sao cho $x + r \in (a, b)$, ta đều có

$$(\forall n \text{ nguyên dương})\ f^{(n)}(x) \leqslant \frac{2Mn!}{r^n}.$$

b) Chứng minh rằng với mọi $\alpha \in (a, b)$, tồn tại một số $r > 0$ sao cho

$$f(x) = f(\alpha) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-\alpha)^k}{k!} f^{(k)}(\alpha)$$

với mọi $x \in (\alpha - r, \alpha + r)$.

49. Giả sử f là một hàm số có đạo hàm cấp hai liên tục trên **R**. Chứng minh rằng

$$\lim_{h\to 0} \frac{2f(x+3h) - 3f(x+2h) + f(x)}{3h^2} = f''(x).$$

50.* Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp hai $f''(x) > 0$ với mọi $x > 0$ và đồ thị của f có tiệm cận xiên $y = ax + b$ khi $x \to +\infty$.

a) Chứng minh rằng hàm số $g(x) = f(x) - ax - b$ có đạo hàm $g'(x) \leqslant 0$ với mọi $x > 0$.

b) Chứng minh rằng đồ thị của f nằm về phía trên của tiệm cận (với $x > 0$).

BÀI GIẢI VÀ HƯỚNG DẪN

2. g có đạo hàm tại điểm 0, $g'(0) = 0$.

4. $$\frac{f(x+bh) - f(x-ah)}{(b+a)h} = \frac{f(x+bh) - f(x)}{bh} \times \frac{b}{b+a} + \\ + \frac{f(x-ah) - f(x)}{-ah} \times \frac{a}{b+a}.$$

Khi $h \to 0$ vế phải của đẳng thức trên dẫn đến $f'(x)\dfrac{b}{b+a} + f'(x)\dfrac{a}{b+a} = f'(x)$.

7. Có thể đưa về trường hợp $m = 0$ bằng cách xét hàm số $\varphi(x) = f(x) - mx$, $x \in (a, b)$. Cho $\varepsilon > 0$ bất kì. Tồn tại $\delta > 0$ sao cho $(-2\delta, 2\delta) \subset (a, b)$ và

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow |f(2x) - f(x)| < \varepsilon|x|.$$

Vì $0 < \dfrac{|x|}{2^n} < \delta$ với $0 < |x| < \delta$ và với mọi n, nên

$$\left| f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) \right| < \varepsilon\frac{|x|}{2^n} \text{ với mọi } n \geq 1 \text{ và } 0 < |x| < \delta.$$

Do đó

$$\left| f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) \right| \leqslant \left| f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) \right| + \left| f\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(\frac{x}{2^2}\right) \right| + \ldots + \\ + \left| f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) \right| < \\ < \varepsilon|x|\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) < \varepsilon|x| \text{ với mọi } n.$$

Vì f liên tục tại điểm 0 nên $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0) = 0$. Trong bất đẳng thức trên cho $n \to \infty$, ta được

$$|f(x)| \leqslant \varepsilon|x| \text{ với } 0 < |x| < \delta.$$

Vậy $f'(0) = 0$.

8. a) $-\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$ $(x > 0)$; b) $\dfrac{\operatorname{sign}x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$;

c) $\dfrac{1+x^2}{1-x^2+x^4}$; d) $2\sqrt{a^2 - x^2}$;

e) $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x - \sin^2 x}}$ $(0 < \sin x < 1)$;

f) $\dfrac{2\operatorname{sign}(\sin x)\,.\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$; g) $\dfrac{1}{1+x^2}$, $(ax \neq 1)$.

9. $\left(\dfrac{3}{2}, 3\right)$.

10. $[f(x+h) - f(x)]^2 \leqslant |h|^3$ với mọi x, $h \in \mathbf{R}$. Do đó $\left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \leqslant \sqrt{|h|}$ với mọi $x \in \mathbf{R}$, $h \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbf{R} \Rightarrow f(x) = \text{const}$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

11. $c_1 = \dfrac{1}{2}$; $c_2 = \sqrt{2}$.

12. Cố định $x_0 \in (a, b)$. Với mọi $x \in (a, b)$, tồn tại $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0, 1)$ sao cho $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$. Từ đó suy ra

$$|f'(c)| \geqslant \frac{|f(x) - f(x_0)|}{b-a}.$$

14. Với mọi n, p nguyên dương,

$$|u_{n+p} - u_n| = \left| f\left(\frac{1}{n+p}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = |f'(c_n)| \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}\right),$$

$\frac{1}{n+p} < c_n < \frac{1}{n}$. Do đó $|u_{n+p} - u_n| < \frac{1}{n}$. Từ đó, theo tiêu chuẩn Côsi về sự hội tụ của dãy số, suy ra dãy $\{u_n\}$ hội tụ.

15. a) Hàm số $\varphi(x) = f(x) + x - 1$ liên tục trên đoạn $[0, 1]$, $\varphi(0) = -1$, $\varphi(1) = 1$. Do đó, theo định lí Bônzanô - Côsi, tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $\varphi(c) = 0$. Từ đó ta có $f(c) = 1 - c$.

b) Theo định lí Lagrăng, tồn tại $a \in (0, c)$ và $b \in (c, 1)$ sao cho $f'(a) = \frac{f(c) - f(0)}{c} = \frac{1-c}{c}$ và $f'(b) = \frac{f(1) - f(c)}{1-c} = \frac{c}{1-c}$. Từ đó suy ra $f'(a)f'(b) = 1$.

16. Nếu f tăng nghiêm ngặt trên (a, b) thì $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a, b)$. $(\forall x, y \in (a, b))\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. Tồn tại $c \in (x, y)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0$. Vậy P trù mật trong (a, b).

Đảo lại, nếu $f'(x) \geq 0$ thì f tăng trên (a, b). Nếu f không tăng nghiêm ngặt trên (a, b) thì tồn tại $x, y \in (a, b)$ sao cho $x < y$ và $f(y) = f(x)$. Khi đó $f'(t) = 0$ với mọi $t \in (x, y)$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết P trù mật trong (a, b).

18. a) Nếu $f(a) = f(b)$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$. Điều này trái với giả thiết. Vậy $f(a) \neq f(b)$. Giả sử $f(a) < f(b)$. Bằng phản chứng dễ dàng chứng minh được rằng khi đó f tăng nghiêm ngặt trên đoạn [a, b]. Nếu $f(a) > f(b)$ thì $-f(a) < -f(b)$. Do đó $-f$ tăng nghiêm ngặt trên [a, b]. Từ đó suy ra f giảm nghiêm ngặt trên [a, b].

b) Phản chứng : Giả sử $f'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a, b)$. Khi đó f đơn điệu trên [a, b]. Nếu f tăng trên [a, b] thì $f'(a + 0) \geq 0$ và $f'(b - 0) \geq 0$. Do đó $f'(a + 0)\ f'(b - 0) \geq 0$, trái với giả thiết.

Giả sử $f'(a + 0) < f'(b - 0)$ và $\alpha \in (f'(a + 0), f'(b - 0))$. Khi đó hàm số $g(x) = f(x) - \alpha x$ có đạo hàm trên (a, b) và có đạo hàm phải tại a, đạo hàm trái tại b. $g'(a + 0) = f'(a + 0) - \alpha < 0$, $g'(b - 0) = f'(b - 0) - \alpha > 0$. Do đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $g'(c) = 0$. Từ đó $f'(c) = \alpha$.

19. a) Vì $f : [0, 1] \to [0, 1]$ liên tục nên phương trình $f(x) = x$ có ít nhất một nghiệm $\alpha \in [0, 1]$ (xem bài tập 35 chương II). Hàm số $\varphi(x) = f(x) - x$ giảm nghiêm ngặt trên $[0, 1]$ vì $\varphi'(x) = f'(x) - 1 < 0$ với mọi $x \in (a, b)$. Do đó nghiệm α của phương trình $f(x) = x$ là duy nhất.

b) $|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| = |f'(c)(u_n - \alpha)| \leqslant k|u_n - \alpha|$, với c nằm giữa α và u_n, $k = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f'(x)|$. Hiển nhiên $k < 1$.

Do đó

$$|u_2 - \alpha| \leqslant k|u_1 - \alpha|,$$
$$|u_3 - \alpha| \leqslant k|u_2 - \alpha| \leqslant k^2|u_1 - \alpha|,$$
$$|u_n - \alpha| \leqslant k^{n-1}|u_1 - \alpha| \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

20. Bạn đọc nhớ đừng bỏ qua trường hợp f có nghiệm bội thuộc $[a, b]$. Nếu x_0 là một nghiệm bội k của f thì nó là một nghiệm bội $k - 1$ của f'.

21. Nếu $f(x) = f(a)$ với mọi $x > a$ thì lấy c là một số bất kì lớn hơn a. Giả sử tồn tại $b > a$ sao cho $f(b) \neq f(a)$, chẳng hạn $f(b) > f(a)$. Gọi μ là một số thực bất kì thuộc $(f(a), f(b))$. Theo định lí Bônzanô – Côsi, tồn tại $\alpha \in (a, b)$ sao cho $f(\alpha) = \mu$. Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a) < \mu$ nên tồn tại $d > b$ sao cho $f(d) < \mu$. Lại theo định lí Bônzanô – Côsi, tồn tại $\beta \in (b, d)$ sao cho $f(\beta) = \mu = f(\alpha)$. Do đó, theo định lí Rôn, tồn tại $c \in (\alpha, \beta)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Có thể áp dụng kết quả của bài tập 51 chương II : f bị chặn trên $[a, +\infty)$. Đặt $m = \inf\limits_{x \geqslant a} f(x)$, $M = \sup\limits_{x \geqslant a} f(x)$. Ít nhất một trong hai giá trị m, M khác f(a), chẳng hạn m ≠ f(a). Tồn tại c > a sao cho f(c) = m. Vì f có đạo hàm tại c nên f'(c) = 0.

23. $x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$.

24. Áp dụng định lí Côsi với hai hàm số $u(x) = \frac{f(x)}{x}$, $v(x) = \frac{1}{x}$ trên đoạn [a, b].

25. Chứng minh bằng quy nạp. Áp dụng định lí Rôn.

26. Đặt $g(x) = (x - a)(x - b)\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$, $x \in [a, b]$. Hàm số g liên tục trên [a, b], $g(a) = g(b) = 0$, $g(c) = f(c)$;

$$g'(x) = \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(2x - a - b),\ x \in (a, b).$$

Xét hàm số $\varphi(x) = f(x) - g(x)$, $x \in [a, b]$. Hàm số φ liên tục trên [a, b], $\varphi(a) = \varphi(c) = \varphi(b) = 0$,

$$\varphi'(x) = f'(x) - g'(x),\ x \in (a, b).$$

Theo định lí Rôn, tồn tại $\alpha \in (a, c)$ và $\beta \in (c, b)$ sao cho $\varphi'(\alpha) = \varphi'(\beta) = 0$. Vì φ' liên tục trên $[\alpha, \beta]$, φ' có đạo hàm trên (α, β)

$$\varphi''(x) = f''(x) - g''(x) = f''(x) - \frac{2f(c)}{(c-a)(c-b)},\ x \in (a, b)$$

nên theo định lí Rôn, tồn tại $d \in (\alpha, \beta)$ sao cho $\varphi''(d) = 0$. Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.

27. Chứng minh bằng quy nạp.

$$P_{n+1}(x) = (1 + x^2)P_n'(x) - (2n + 1)xP_n(x).$$

28. a) Chứng minh bằng quy nạp.

b) $(\mathrm{arctg}x)^{(n)} = (-1)^n g_n(x)$ với $x < 0$.

29. Khai triển $(x-a)^n$ và $(x-b)^n$. Tích của chúng, $P(x)$ là một đa thức bậc $2n$ mà số hạng bậc $2n$ là x^{2n} ; $P^{(n)}(x)$ là một đa thức bậc n mà số hạng bậc n là

$$2n(2n-1)\ldots(n+1)x^n \qquad (1).$$

Áp dụng công thức Laibnit, ta được

$$P^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k((x-a)^n)^{(k)}((x-b)^n)^{(n-k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k n(n-1)\ldots(n-k+1)(x-a)^{n-k}.n(n-1)\ldots(k+1)(x-b)^k$$

$$= n!\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2(x-a)^{n-k}(x-b)^k.$$

Số hạng bậc n của $P^{(n)}(x)$ là

$$\left(n!\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2\right)x^n \qquad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$n!\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 = 2n(2n-1)\ldots(n+1).$$

Từ đó có đẳng thức cần chứng minh.

30. a) Áp dụng định lí Lagrăng cho hàm số

$\varphi(x) = f(a+x) - f(a-x)$ trên đoạn $[0, h]$.

b) Áp dụng định lí Lagrăng cho hàm số

$\psi(x) = f(a+x) + f(a-x)$ trên $[0, h]$.

c) Theo công thức Taylo – Iang, ta có

$$f(a+t) = f(a) + tf'(a) + \frac{t^2}{2}f''(a) + t^2\alpha(t),$$

$$f(a - t) = f(a) - tf'(a) + \frac{t^2}{2}f''(a) + t^2\beta(t),$$

trong đó $\alpha(t) \to 0$ và $\beta(t) \to 0$ khi $t \to 0$. Do đó

$$f(a + t) - 2f(a) + f(a - t) = t^2f''(a) + t^2[\alpha(t) + \beta(t)].$$

$$\frac{f(a+t) - 2f(a) + f(a-t)}{t^2} = f''(a) + \alpha(t) + \beta(t) \text{ với } t \neq 0.$$

Do đó

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+t) - 2f(a) + f(a-t)}{t^2} = f''(a).$$

31. $$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(p-1)}(a)}{(p-1)!}h^{p-1} + \frac{f^{(p)}(a+\theta_p h)}{p!}h^p,$$

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(p-1)}(a)}{(p-1)!}h^{p-1} + \frac{f^{(p)}(a)}{p!}h^p + \frac{f^{(p+1)}(a+\theta_{p+1}h)}{(p+1)!}h^{p+1},$$

với $|h| \leq u$, ($\theta_p = \theta_p(h)$ và $\theta_{p+1} = (\theta_{p+1}(h)$ đều thuộc $(0, 1)$). Từ hai đẳng thức trên suy ra

$$f^{(p)}(a + \theta_p h) - f^{(p)}(a) = \frac{1}{p+1}f^{(p+1)}(a + \theta_{p+1}h)h. \qquad (1)$$

Theo định lí về số gia hữu hạn, tồn tại $\tau \in (0, 1)$ sao cho

$$f^{(p)}(a + \theta_p h) - f^{(p)}(a) = \theta_p h f^{(p+1)}(a + \tau\theta_p h). \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có

$$\theta_p f^{(p+1)}(a + \tau\theta_p h) = \frac{1}{p+1}f^{(p+1)}(a + \theta_{p+1}h). \qquad (3)$$

Vì $f^{(p+1)}$ liên tục tại điểm a nên

$$\lim_{h\to 0} f^{(p+1)}(a + \pi\theta_p h) = \lim_{h\to 0} f^{(p+1)}(a + \theta_{p+1}h) = f^{(p+1)}(a) \neq 0.$$

Do đó từ (3) suy ra $\lim\limits_{h\to 0}\theta_p(h) = \dfrac{1}{p+1}$.

32. Vì f liên tục tại điểm 0 nên $f(0) = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$. Theo định lí Rôn, tồn tại $x_n \in \left(\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right)$ sao cho $f'(x_n) = 0$. Vì f' liên tục tại điểm 0 (f' liên tục trên **R**) và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ nên $f'(0) = \lim\limits_{n\to\infty} f'(x_n) = 0$. Giả sử tồn tại một dãy điểm $\{a_n\}$ giảm nghiêm ngặt của **R** sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ và $f^{(k)}(a_n) = 0$ với mọi n. Khi đó, theo định lí Rôn, tồn tại $\alpha_n \in (a_{n+1}, a_n)$ sao cho $f^{(k+1)}(\alpha_n) = 0$. Hiển nhiên $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$. Vì $f^{(k+1)}$ liên tục tại điểm 0 nên $f^{(k+1)}(0) = \lim\limits_{n\to\infty} f^{(k+1)}(\alpha_n) = 0$. Vậy $f^{(k)}(0) = 0$ với mọi k ≥ 0. Áp dụng công thức Taylo, ta được $f(x) = \dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$ $(0 < \theta < 1)$, với mọi $x \in$ **R**. Do đó $|f(x)| \leq L\dfrac{|x|^n}{n!}$ với mọi n. Vì $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|^n}{n!} = 0$, từ đó suy ra $f(x) = 0$.

33. Giả sử $x \in (a, b)$. Áp dụng công thức Taylo, theo thứ tự, trên $[a, x]$ và $[x, b]$, ta có :

$$f(a) = f(x) + (a - x)f'(x) + \frac{(a-x)^2}{2}f''(x + \theta_1(a - x)),$$

$$f(b) = f(x) + (b - x)f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2}f''(x + \theta_2(b - x)),$$

$\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$. Từ đó

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2}f''(x + \theta_2(b-x)) -$$

$$- \frac{(a-x)^2}{2} f''(x + \theta_1(a - x))$$

$$f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} + \frac{1}{2(b-a)}[(a-x)^2 f''(x + \theta_1(a-x)) -$$

$$- (b-x)^2 f''(x + \theta_2(b-x))].$$

Do đó

$$|f'(x)| \leqslant \frac{|f(b)-f(a)|}{b-a} + \frac{k}{2(b-a)}[(a-x)^2 + (b-x)^2].$$

Vì $(a-x)^2 + (b-x)^2 \leqslant (b-a)^2$ nên từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. Vì f' liên tục trên [a, b] nên bất đẳng thức đúng với cả $x = a$ và $x = b$.

34. Vì f liên tục trên [0, 1] nên tồn tại $x_0 \in (0, 1)$ sao cho $f(x_0) = -1$.

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0 + \theta(x - x_0))}{2}(x - x_0)^2,$$

$$f(x) = -1 + \frac{f''(x_0 + \theta(x - x_0))}{2}(x - x_0)^2, \ 0 < \theta < 1.$$

Do đó

$$0 = f(0) = -1 + f''(x_0 + \theta_0(-x_0))\frac{x_0^2}{2},$$

$$0 = f(1) = -1 + f''(x_0 + \theta_1(1 - x_0))\frac{(1-x_0)^2}{2}.$$

Từ đó $f''(x_0 + \theta_0(-x_0)) = \dfrac{2}{x_0^2}$ và $f''(x_0 + \theta_1(1 - x_0)) = \dfrac{2}{(1-x_0)^2}$.

Ta có ít nhất một trong hai bất đẳng thức $0 < x_0 \leqslant \frac{1}{2}$, $0 < 1 - x_0 < \frac{1}{2}$.

Do đó có ít nhất một trong hai bất đẳng thức $\frac{2}{x_0^2} \geqslant 8$, $\frac{2}{(1-x_0)^2} \geqslant 8$.

Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

35. a) -1 ; b) $\frac{1}{3}$; c) $-\frac{1}{2a}$; d) 0 ; e) 1 ; f) $\frac{1}{3}$.

36. Trước hết ta chứng minh bằng quy nạp rằng nếu $x_1, ..., x_n \in I$ và $\lambda_1, ..., \lambda_n$ là những số thực không âm sao cho $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ thì $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in I$. Thật vậy, hiển nhiên điều khẳng định đúng với n = 2. Giả sử điều khẳng định đúng với n. Ta chứng minh nó đúng với n + 1, tức là nếu $x_1, ..., x_{n+1} \in I$ và $\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}$ là những số thực không âm sao cho $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ thì $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \in I$.

Thật vậy, nếu $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$ thì

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \left(\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} x_1 + ... + \frac{\lambda_n}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} x_n\right) + \lambda_{n+1} x_{n+1}.$$

Từ giả thiết quy nạp suy ra

$$y = \frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} x_n \in I.$$

Do đó $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) y + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in I$. Nếu $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ thì $\lambda_{n+1} = 1$ và $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = x_{n+1} \in I$.

Ta cũng chứng minh bất đẳng thức trong đề bài bằng quy nạp. Hiển nhiên bất đẳng thức đúng với $n = 2$. Giả sử bất đẳng thức đúng với n. Ta chứng minh nó đúng với $n + 1$. Thật vậy, giả sử $x_1, \ldots, x_{n+1} \in I$ và $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ là những số thực không âm sao cho $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.

• Nếu $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$ thì

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\left(\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} x_n\right) + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) f\left(\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} x_n\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}). \quad (1)$$

Theo giả thiết quy nạp, ta có

$$f\left(\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} x_n\right) \leqslant \frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} f(x_1) + \cdots + \frac{\lambda_n}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} f(x_n). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}).$$

- Hiển nhiên bất đẳng thức trên đúng nếu $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$.

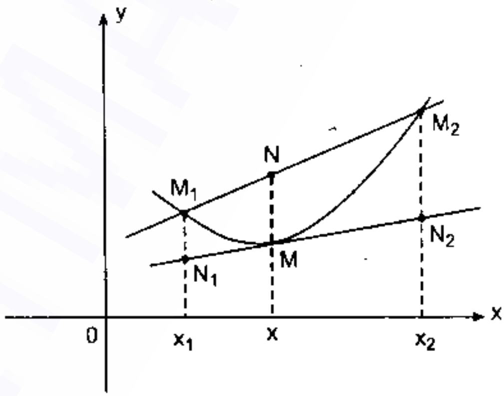
37. Áp dụng bài tập 36.

38. Giả sử $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.

Ta chứng minh trên đoạn $[x_1, x_2]$, đồ thị (C) của hàm số f nằm về phía dưới đoạn thẳng nối hai điểm $M_1(x_1, f(x_1))$ và $M_2(x_2, f(x_2))$, tức là

$$f(x) \leqslant Ax + B$$

với mọi $x \in (x_1, x_2)$, trong đó $Y = AX + B$ là phương trình của đường thẳng M_1M_2.



Hình 31

Thật vậy, giả sử $x \in (x_1, x_2)$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(x, f(x))$ của (C) là

$$Y = f(x) + f'(x)(X - x).$$

Vì tiếp tuyến nằm về phía dưới của (C) nên

$$f(x) + f'(x)(x_1 - x) \leqslant Ax_1 + B,$$
$$f(x) + f'(x)(x_2 - x) \leqslant Ax_2 + B.$$

Từ đó suy ra

$$f'(x) \geqslant \frac{f(x) - Ax_1 - B}{x - x_1}, \qquad (1)$$

$$f'(x) \leqslant \frac{Ax_2 + B - f(x)}{x_2 - x}. \qquad (2)$$

Do đó

$$\frac{f(x) - Ax_1 - B}{x - x_1} \leqslant \frac{Ax_2 + B - f(x)}{x_2 - x}$$

$$\Rightarrow f(x)(x_2 - x + x - x_1) \leqslant (Ax_2 + B)(x - x_1) + (Ax_1 + B)(x_2 - x)$$

$$\Rightarrow f(x) \leqslant Ax + B.$$

Bạn đọc có thể chứng minh hoàn toàn bằng hình học :

Giả sử $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, $M_1(x_1, f(x_1))$, $M_2(x_2, f(x_2))$ là hai điểm của (C). Với mỗi $x \in (x_1, x_2)$ gọi M và N là các giao điểm của đường thẳng $X = x$ với đồ thị (C) và đoạn thẳng M_1M_2. Ta chứng minh $y_M \leqslant y_N$, (xem hình 31). Gọi N_1, N_2, theo thứ tự, là giao điểm của tiếp tuyến tại điểm $M(x, f(x))$ của (C) với hai đường thẳng $X = x_1$ và $X = x_2$. Vì tiếp tuyến nằm về phía dưới của đồ thị (C) nên $y_{N_1} \leqslant y_{M_1}$, $y_{N_2} \leqslant y_{M_2}$. Từ đó suy ra rằng đoạn thẳng N_1N_2 nằm về phía dưới đoạn thẳng M_1M_2. Đặc biệt, ta có $y_M \leqslant y_N$.

40. a) $\forall c \in (a, b)$, $\exists \lambda \in (0, 1)$ sao cho $c = \lambda a + (1 - \lambda)b$. Do đó

$$f(c) \leqslant \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b) \Rightarrow f(c) - f(a) \leqslant (1 - \lambda)[f(b) - f(a)].$$

$$\Rightarrow \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leqslant \frac{(1 - \lambda)[f(b) - f(a)]}{(1 - \lambda)(b - a)} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

b) Lấy $a_1 \in (a, \alpha)$; $b_1 \in (\beta, b)$. Với một cặp số bất kì $x, y \in [\alpha, \beta]$ sao cho $x < y$, ta có $a < a_1 < x < y < b_1 < b$. Do đó, theo a),

$$\frac{f(a_1) - f(a)}{a_1 - a} \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(b) - f(b_1)}{b - b_1}.$$

Đặt $k = \max\left\{\frac{|f(a_1) - f(a)|}{a_1 - a}, \frac{|f(b) - f(b_1)|}{b - b_1}\right\}$, ta được

$$|f(y) - f(x)| \leqslant k|y - x|.$$

41. $\forall x \in (a, b)$, $\exists \alpha, \beta$ sao cho $x \in [\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Theo bài tập 40b), f thỏa mãn điều kiện Lipsit trên $[\alpha, \beta]$. Do đó f liên tục tại x.

42. $f''(x) = 6x + 2a$ với mọi $x \in \mathbf{R}$. Ta phải có

$$\begin{cases} 6x + 2a \geqslant 0 \text{ với mọi } x \geqslant 0 \\ 6x + 2a \leqslant 0 \text{ với mọi } x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0,\ b,\ c \text{ tùy ý.}$$

43. Nếu $a > 0$ thì hàm số lồi trên $[0, +\infty)$, lõm trên $(-\infty, 0]$. Nếu $a < 0$ thì hàm số lồi trên $(-\infty, 0]$, lõm trên $[0, +\infty)$.

44. Ta có

$$f(x + 2) = f(x) + 2f'(x) + \frac{f''(x + 2\theta)}{2}2^2, \text{ với mọi } x \in \mathbf{R}.$$

Do đó

$$f'(x) = \frac{1}{2}[f(x + 2) - f(x) - 2f''(x + 2\theta)],\ 0 < \theta < 1.$$

Từ đó $|f'(x)| < 2$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

45. $f(x) = \dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n \Rightarrow |f(x)| \leqslant \dfrac{k^n.n!}{n!}|x|^n = (k|x|)^n \to 0$ khi $n \to \infty$ với $|x| < \dfrac{1}{k}$. Do đó $f(x) = 0$ với mọi $x \in \left(-\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{k}\right)$. Do f liên tục trên $\left[-\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{k}\right]$, từ đó suy ra $f(x) = 0$ với mọi $x \in \left[-\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{k}\right]$. Chia $[a, b]$ thành các đoạn nhỏ có độ dài không vượt quá $\dfrac{1}{k}$. Từ đó chứng minh $f(x) = 0$ với mọi $x \in [a, b]$.

46. $f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \dfrac{f''(a + \theta(x - a))}{2}(x - a)^2$ với mọi $x \in [0, 1]$. Với $x \neq a$, chia hai vế cho $x - a$, ta được

$g(x) = g(a) + \dfrac{f''(a + \theta(x - a))}{2}(x - a)$, $0 < \theta < 1$. Từ đó suy ra $g'(a) = \dfrac{f''(a)}{2}$.

47. Áp dụng công thức Mac – Lôranh.

48. a) $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\exists\ \xi \in (x, x + r)$ sao cho

$$f(x + r) - f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} r^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} r^{n+1}.$$

Vì mọi đạo hàm của f đều không âm, từ đó suy ra

$$\frac{f^{(n)}(x)}{n!} r^n \leqslant f(x + r) - f(x) \leqslant 2M.$$

Từ đó có bất đẳng thức cần chứng minh.

b) Lấy $r > 0$ đủ nhỏ sao cho $[\alpha - 2r, \alpha + 2r] \subset (a, b)$. Đặt $M = \sup\limits_{x \in [\alpha - 2r, \alpha + 2r]} |f(x)|$.

$\forall x \in (\alpha - r, \alpha + r)$, $\exists\ \xi = \alpha + \theta(x - \alpha)$, $0 < \theta < 1$ sao cho

$$f(x) - f(\alpha) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x - \alpha)^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - \alpha)^{n+1}.$$

Vì $f^{(n+1)}(\xi) \leqslant \dfrac{2M(n+1)!}{r^{n+1}}$ nên $\left| f(x) - f(\alpha) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x - \alpha)^k \right| \leqslant$

$\leqslant 2M\left(\dfrac{|x - \alpha|}{r}\right)^{n+1} \to 0$ khi $n \to \infty$. Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.

50. a) Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ và $g''(x) = f''(x) > 0$ với mọi $x > 0$.

Giả sử tồn tại một số thực $x_0 > 0$ sao cho $g'(x_0) > 0$. Khi đó

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} g''(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^2,$$

với mọi $x > 0$ $(0 < \theta < 1)$. Từ đó suy ra $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, trái với giả thiết $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$. Vậy $g'(x) \leqslant 0$ với mọi $x > 0$.

b) Ta chứng minh $g(x) > 0$ với mọi $x > 0$.

Nếu tồn tại $x_1 > 0$ sao cho $g(x_1) < 0$ thì vì g giảm trên $(0, +\infty)$ nên $g(x) \leqslant g(x_1) < 0$ với mọi $x \geqslant x_1$. Do đó $g(x) \to 0$ khi $x \to +\infty$. Điều này trái với giả thiết. Vậy $g(x) \geqslant 0$ với mọi $x > 0$. Nếu tồn tại $x_2 > 0$ sao cho $g(x_2) = 0$ thì $g(x) \leqslant g(x_2) = 0$ với mọi $x \geqslant x_2$. Do đó $g(x) = 0$ với mọi $x \geqslant x_2$. Từ đó $g''(x) = 0$ với mọi $x \geqslant x_2$, điều này trái với giả thiết.

BÀI TẬP CHƯƠNG IV VÀ LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

TÍCH PHÂN

1. Chứng minh rằng hàm số $x \mapsto [x]$ khả tích trên đoạn $[0, 2]$ và tính $\int\limits_0^2 [x]dx$.

2. Giả sử n là một số nguyên dương và f là hàm số xác định trên $[0, 1]$ bởi

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{p^2}{n^2} \text{ với } x \in \left[\dfrac{p}{n}, \dfrac{p+1}{n}\right), \; p = 0, 1, ..., n-1, \\ 1 \text{ với } x = 1. \end{cases}$$

Chứng minh rằng f khả tích trên $[0, 1]$ và tính $\int\limits_0^1 f(x)dx$.

3. Ta viết $x \in [0, 1)$ dưới dạng

$$x = \frac{a}{10} + \frac{b}{100} + c,\ a, b \in \mathbf{N},\ 0 \leqslant a, b \leqslant 9,\ 0 \leqslant c < \frac{1}{100}.$$

Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = \frac{a}{100} + \frac{b}{10} + c,\ x \in [0, 1),$$

khả tích trên [0, 1] và tính $\int_0^1 f(x)dx$.

4. Giả sử f là một hàm số liên tục trên $[0, +\infty)$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$, $l \in \mathbf{R}$, $l > 0$ và $f(0) + f(1) + \dots + f(n) \neq 0$ với mọi n. Chứng minh rằng

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{\int_0^n f(t)dt}{f(0) + f(1) + \cdots + f(n)} \right] = 1.$$

5. Cho f là một hàm số liên tục, giảm, không âm trên $[0, +\infty)$. Với mỗi n nguyên dương, đặt

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)\,,\ I_n = \int_1^n f(t)dt.$$

a) Chứng minh rằng

$$\int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)dt,$$

với mọi $n \geqslant 2$.

b) Chứng minh rằng

$$I_{n+1} - f(0) \leqslant u_n - f(0) \leqslant I_n,$$

với mọi $n \geqslant 2$. Từ đó suy ra rằng hai dãy $\{u_n\}$ và $\{I_n\}$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

6. Giả sử f, g, h là những hàm số liên tục trên [a, b]. Chứng minh rằng

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx \leqslant 2\int_a^b [f(x) - h(x)]^2 dx + 2\int_a^b [g(x) - h(x)]^2 dx.$$

7. Bất đẳng thức Bunhiacốpski (Буняковский)

Giả sử f và g là hai hàm số khả tích trên đoạn [a, b]. Chứng minh rằng

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \int_a^b [f(x)]^2dx \int_a^b [g(x)]^2dx.$$

8. Cho f là một hàm số khả tích trên [a, b]. Chứng minh rằng

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{b-a}\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

9. Giả sử f và g là hai hàm dương, $\sqrt{f}$ và $\sqrt{g}$ là những hàm số khả tích trên [a, b] và $f(x)g(x) \geqslant 1$ với mọi $x \in [a, b]$. Chứng minh rằng

$$\int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)dx \geqslant (b-a)^2.$$

10. Giả sử hàm số f có đạo hàm f' liên tục trên [0, 1] và $f(1) - f(0) = 1$. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 [f'(x)]^2dx \geqslant 1.$$

11. Giả sử f là một hàm số liên tục trên [0, 1],

$$\int_x^1 f(t)\,dt \geqslant \frac{1-x^2}{2} \text{ với mọi } x \in [0, 1],$$

và F là một nguyên hàm của f trên [0, 1].

a) Chứng minh rằng

$$F(1) = \int_0^1 xf(x)\,dx + \int_0^1 F(x)\,dx.$$

b) Từ đó suy ra

$$\int_0^1 xf(x)\,dx \geqslant \frac{1}{3}$$

và

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx \geqslant \frac{1}{3}.$$

12. Giả sử f là một hàm số liên tục không âm trên $[a, b]$ và tồn tại $x_0 \in [a, b]$ sao cho $f(x_0) > 0$. Chứng minh rằng $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

13. Cho f là một hàm số khả tích trên $[a, b]$ và $\int_a^b f(x)\,dx > 0$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một đoạn $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ sao cho $f(x) > 0$ với mọi $x \in [\alpha, \beta]$.

14. Giả sử f là một hàm số khả tích và không âm trên $[a, b]$. Chứng minh rằng nếu $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ thì tập hợp

$$P = \{x \in [a, b] : f(x) = 0\}$$

trù mật trong $[a, b]$.

15. Cho f là một hàm số liên tục, tăng trên $[a, b]$ và $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a, b]$. Chứng minh rằng

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{F(x)+F(y)}{2} \text{ với mọi } x, y \in [a, b].$$

16. Giả sử f là một hàm số liên tục trên $[a, b]$. Chứng minh rằng

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

khi và chỉ khi $f(x) \geqslant 0$ hoặc $f(x) \leqslant 0$ với mọi $x \in [a, b]$.

17. Tìm

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{1 + x^n}\,dx.$$

18. Chứng minh rằng dãy số

$$u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

hội tụ và tìm giới hạn của nó.

19. Chứng minh rằng dãy số

$$I_n = \int_0^n \frac{\sin x}{x} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

hội tụ.

20. Chứng minh rằng

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \geqslant 0 \text{ với mọi } x \geqslant 0.$$

21.* Giả sử hàm số f có đạo hàm liên tục trên [a, b], f(a) = f(b) = 0. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một điểm $x_o \in [a, b]$ sao cho

$$|f'(x_o)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)| dx.$$

22. Giả sử hàm số f có đạo hàm liên tục trên [a, b]. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n \to \infty} \int_a^b f(x) \sin nx \, dx = 0.$

23.* Chứng minh rằng nếu hàm số f liên tục trên [a, b] thì

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x) \sin nx \, dx = 0 \text{ và } \lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x) \cos nx \, dx = 0.$$

24. Giả sử f là một hàm số liên tục trên **R** và F là hàm số xác định bởi

$$F(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

a) Chứng minh rằng F có đạo hàm trên **R** và tính đạo hàm của nó.

b) Cho $f(t) = |t|$. Tìm F.

c) Cho $\lim_{t \to +\infty} f(t) = l \in \mathbf{R}$. Chứng minh rằng $\lim_{x \to +\infty} F(x) = l$.

25. Giả sử f là một hàm số đơn điệu nghiêm ngặt, có đạo hàm trên [a, b] và $x = g(y)$ là hàm số ngược của f. Chứng minh rằng nếu F là một nguyên hàm của f trên [a, b] thì hàm số $G(y) = yg(y) - F[g(y)]$ là một nguyên hàm của g.

26. Cho hàm số f liên tục trên **R**, a, b $\in$ **R**, a < b. Chứng minh rằng hàm số F xác định bởi $F(x) = \int_a^b f(x + t)\cos t\,dt$, $x \in \mathbf{R}$ có đạo hàm trên **R** và tính $F'(x)$.

27.* Cho f là một hàm lồi và bị chặn trên [a, b]. Chứng minh rằng

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a).$$

28. Giả sử f là một hàm số liên tục trên [a, b], g là một hàm số đơn điệu và có đạo hàm liên tục trên [a, b]. Chứng minh rằng tồn tại một điểm $c \in [a, b]$ sao cho

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx + g(b)\int_c^b f(x)\,dx.$$

29. Chứng minh rằng nếu ε là một số dương cho trước thì

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| < \varepsilon \text{ với } b > a > \frac{4}{\varepsilon}.$$

30. Giả sử f và g là hai hàm số liên tục cùng tăng hoặc cùng giảm trên [0, 1]. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx \geqslant \int_0^1 f(x)\,dx \int_0^1 g(x)\,dx.$$

31. Giả sử f là một hàm số liên tục, g là một hàm số đơn điệu có đạo hàm liên tục trên [a, b]. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một điểm $c \in [a, b]$ sao cho

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(c)\,[g(b) - g(a)].$$

32. Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp hai liên tục trên đoạn $[x_0 - r, x_0 + r]$, $r > 0$. Chứng minh rằng tồn tại

$$c \in [x_0 - r, x_0 + r]$$

sao cho

$$f''(c) = \frac{3}{r^3}\int_{x_0 - r}^{x_0 + r} [f(x) - f(x_0)]\,dx.$$

33. a) Tính tích phân

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx.$$

b) Chứng minh rằng

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx.$$

34. Giả sử f là một hàm số liên tục trên $[0, \pi]$.

a) Chứng minh rằng

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx.$$

b) Tính

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx.$$

35. Tính các tích phân sau :

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\,dx$; b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\,dx$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + (tgx)^{\sqrt{2}}}$.

36. Tính các tích phân sau :

a) $I = \int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{(x - x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4} dx$; b) $J = \int_{1-\frac{\pi^2}{4}}^{1} \cos\sqrt{1 - x}\, dx$.

37. Tính các tích phân sau :

a) $\int_1^e (\ln x)^4 x^m dx$, $m \in \mathbf{N}$, $m \neq 1$; b) $\int_0^1 x^4 e^x dx$;

c) $\int_0^1 2^x . 3^{2x} . 5^{3x} dx$; d) $I = \int_0^x e^{2t}\cos 3t\, dt$ và $J = \int_0^x e^{2t}\sin 3t\, dt$.

38. Cho

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{t^2 + a^2}} dt,\ a \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}.$$

a) Chứng minh rằng

$nI_n(x) = x^{n-1}\sqrt{x^2 + a^2} - (n - 1)a^2 I_{n-2}(x)$ với $n \geqslant 2$.

b) Tính $\int_0^2 \frac{t^5}{\sqrt{t^2 + 5}} dt$.

39. Chứng minh rằng với mọi $R > 0$, ta đều có

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x} dx \leqslant \frac{\pi}{2R}(1 - e^{-R}).$$

40. a) Tính tích phân

$$I_z(y) = \int_z^y \ln\left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right) dx,$$

trong đó $y, z > 0$, $a > 0$.

b) Chứng minh rằng tồn tại giới hạn của $I_z(y)$ khi $z \to 0$ và tính giới hạn $I_0(y)$ đó.

c) Tính $\lim\limits_{y \to +\infty} I_0(y)$.

41. Cho hàm số f xác định trên **R** bởi

$$f(x) = \begin{cases} x\left[1 + \dfrac{1}{3}\sin(\ln x^2)\right] & \text{với } x \neq 0, \\ 0 \quad \text{với} \quad x = 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng f liên tục, đơn điệu trên **R** và f không có đạo hàm tại điểm 0.

42. Cho n số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Chứng minh rằng

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

43. Giả sử f là một hàm số liên tục không âm trên [a, b].

Đặt $M = \sup\limits_{x \in [a, b]} f(x)$, $\quad u_n = \left(\int_a^b f^n(x)\,dx\right)^{\frac{1}{n}}$, $\quad n = 1, 2, \ldots$

a) Chứng minh rằng

$$u_n \leqslant M(b - a)^{\frac{1}{n}} \text{ với mọi } n.$$

b) Chứng minh rằng với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$u_n \geqslant \delta^{\frac{1}{n}}(M - \varepsilon).$$

Từ đó suy ra $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = M$.

44. Cho $f(a) = \int_0^1 \sqrt{1 - x^a}\,dx$, $a > 0$.

a) Chứng minh rằng f tăng nghiêm ngặt trên $(0, +\infty)$.

b) Chứng minh rằng

$$1 - x^a \leqslant \sqrt{1 - x^a} \leqslant 1 - \frac{x^a}{2} \text{ với mọi } x \in [0, 1].$$

c) Từ đó suy ra

$$\frac{a}{a+1} < f(a) < \frac{a + \frac{1}{2}}{a+1}.$$

45. Bất đẳng thức Iang (Young).

Cho hai số thực p, q > 1 sao cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ((p, q) gọi là một cặp số mũ liên hợp). Chứng minh rằng

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \qquad \text{với mọi } x, y \geqslant 0;$$

có đẳng thức khi và chỉ khi $x^p = y^q$.

46.* Bất đẳng thức Hônđơ (Hölder).

Giả sử (p, q) là một cặp số mũ liên hợp, p, q > 1 (xem bài tập 45). Chứng minh rằng nếu f, g là hai hàm số liên tục trên [a, b] thì

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

47.* Bất đẳng thức Mincốpxki (Minkowski).

Giả sử p > 1, f và g là hai hàm số liên tục trên [a, b]. Chứng minh rằng

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

48. a) Chứng minh rằng

$$\sin x + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx) = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}},$$

với mọi $x \neq 2k\pi$.

b) Áp dụng định nghĩa tích phân xác định, tính

$$I = \int_0^{\pi} \sin x \, dx.$$

49. Áp dụng định nghĩa tích phân xác định, tính

$$I = \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)dx, \ \alpha \geqslant 0, \ \alpha \neq 1.$$

50. Tính các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{n^2+1^2} + \dfrac{1}{n^2+2^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2+n^2}\right)$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(1 + \sqrt{\dfrac{n}{n+3}} + \sqrt{\dfrac{n}{n+6}} + \cdots + \sqrt{\dfrac{n}{n+3(n-1)}}\right)$.

51. Cho

$$T_n = \frac{1}{n}\left(\sin\frac{t}{n} + \sin\frac{2t}{n} + \cdots + \sin\frac{(n-1)t}{n}\right), \ n = 1, 2, \ldots, \ t > 0.$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$.

52. Cho hàm số f liên tục và dương trên [0, 1]. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) f\left(\frac{2}{n}\right) \cdots f\left(\frac{n}{n}\right)} = e^{\int_0^1 \ln f(x)dx}.$$

53.* a) Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, ta đều có

$$2^{\frac{1}{n}} > 1 + \frac{\ln 2}{n}.$$

b) Tìm

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right).$$

54.* Cho dãy số $\{a_n\}$ với $a_1 = 1$,

$$a_n = n(a_{n-1} + 1), \qquad n \geq 2.$$

Tìm

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_k}\right)$$

$$\left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_k}\right) = \left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)\right).$$

55. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{với } x > 0, \\ 0 & \text{với } x \leq 0. \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng f có đạo hàm liên tục trên **R**.

b) Chứng minh rằng f có đạo hàm cấp n trên **R** (n nguyên dương bất kì) và $f^{(n)}(x)$ có dạng $f^{(n)}(x) = f(x)P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ nếu $x > 0$, trong đó P_n là một đa thức có bậc n và $f^{(n)}(x) = 0$ nếu $x \leq 0$. Xác định đơn thức có bậc cao nhất đối với $\frac{1}{x}$ của đa thức P_n.

c) Đặt $I(x) = \int_0^x f(t)dt$, $x > 0$. Chứng minh rằng

$$I(x) = f(x)\left[\frac{x^3}{2} + o(x^3)\right] \qquad (x \to 0).$$

56. a) Giả sử f và g là hai hàm số có đạo hàm cấp n liên tục tại điểm x_0 và

$$f(x_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0;$$

$$g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n-1)}(x_0) = 0;\ g^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Chứng minh rằng

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

b) Tìm

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x}, \qquad a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0.$$

57. Chứng minh rằng

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right).$$

58. Giả sử hàm số f xác định trên một lân cận của điểm 0 (hoặc trên $(\alpha, 0]$, $\alpha < 0$ hoặc trên $[0, \beta)$, $\beta > 0$). Nếu trên các khoảng đó f được biểu diễn dưới dạng

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + x^n.o(1) \ (x \to 0) \qquad (1)$$

trong đó $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là những hằng số thì (1) được gọi là khai triển bậc n của f trên một lân cận của 0 (trên $(\alpha, 0]$ hoặc $[0, \beta)$).

Chứng minh rằng nếu f có một khai triển bậc n trên các khoảng nói trên thì khai triển đó là duy nhất.

59. Giả sử f có khai triển bậc n trên một lân cận của điểm 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + x^n.o(1) \quad (x \to 0).$$

Chứng minh rằng

a) Nếu f là một hàm số chẵn thì

$$a_1 = 0,\ a_3 = 0,\ a_5 = 0,\ \ldots$$

b) Nếu f là một hàm số lẻ thì

$$a_0 = 0,\ a_2 = 0,\ a_4 = 0,\ \ldots$$

60. Chứng minh rằng nếu hàm số f có khai triển bậc n trên một khoảng chứa điểm 0 hoặc có một đầu là 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + x^n.o(1) \quad (x \to 0)$$

thì $a_0 = f(0)$, $a_1 = f'(0)$.

61. Giả sử hai hàm số f và g có khai triển bậc n trên một khoảng chứa điểm 0 hoặc có một điểm đầu là 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + x^n.o(1),$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + x^n.o(1) \qquad (x \to 0).$$

a) Chứng minh rằng

$$f(x) + g(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \dots +$$
$$+ (a_n + b_n)x^n + x^n.o(1) \qquad (x \to 0).$$

b) Giả sử

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{2n}x^{2n}$$

là khai triển của tích

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n).$$

Chứng minh rằng

$$f(x)g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + x^n.o(1) \qquad (x \to 0).$$

Áp dụng. Viết khai triển bậc hai của $\sqrt{1 + x}\cos x$ trên một lân cận của điểm 0.

62. Giả sử hai hàm số f, g có khai triển bậc n trên một khoảng chứa điểm 0 hoặc có một điểm đầu là 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + x^n.o(1),$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + x^n.o(1) \qquad (x \to 0),$$

trong đó $b_0 \neq 0$. Đặt

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$
$$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n.$$

Chia P(x) cho Q(x) theo các số hạng có bậc tăng dần cho đến n, ta được

$$P(x) = Q(x)S(x) + x^{n+1}R(x),$$

trong đó S(x) là một đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n và R(x) là một đa thức. Chứng minh rằng nếu

$$S(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n,$$

thì

$$\frac{f(x)}{g(x)} = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + x^n.o(1) \qquad (x \to 0)$$

Áp dụng. Tìm khai triển bậc 6 của tgx trên một lân cận của 0.

63. a) Giả sử

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + x^n.o(1) \qquad (x \to 0).$$

là khai triển bậc n của hàm số f trên một lân cận của điểm 0, g là một hàm số xác định trên một lân cận của điểm 0 và $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.

Giả sử

$$g(x) = b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n + x^n.o(1) \qquad (x \to 0)$$

là khai triển bậc n của g trên một lân cận của 0.

Hãy tìm khai triển bậc n của hàm số hợp $f \circ g$ trên một lân cận của 0.

b) *Áp dụng*. Tìm khai triển bậc hai của $\sqrt{\cos x}$ trên một lân cận của 0.

64. Giả sử hàm số f có đạo hàm mọi cấp trên một lân cận của 0 và

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + x^n.o(1) \qquad (x \to 0)$$

là khai triển bậc n của f trên một lân cận của 0.

Chứng minh rằng

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + x^{n-1}.o(1) \qquad (x \to 0)$$

là khai triển bậc n − 1 của f'.

65. Tìm khai triển bậc n của ln(1 + x) trên một lân cận của 0.

66. Tìm khai triển của arctgx trên một lân cận của 0.

67. Viết công thức khai triển của arcsinx trên một lân cận của 0.

68. Cho hàm số $f(x) = a + bx + ce^{tx}$.

a) Chứng minh rằng tồn tại một số thực duy nhất $\theta \in (0, 1)$ không phụ thuộc vào x sao cho

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h).$$

b) Viết biểu thức θ theo h và viết khai triển bậc hai của θ trên một lân cận của 0.

69. Viết khai triển bậc hai của hàm số $f(x) = \ln x$ trên một lân cận của điểm $a > 0$.

70. Viết khai triển bậc 4 của $\ln(x + \sqrt{\cos x})$ trên một lân cận của 0.

71. Xác định $a > 0$ và $b \in \mathbf{R}$ sao cho hàm số

$$f(x) = \ln(a + x) + b\sqrt{a + x}$$

là một vô cùng bé có bậc cao nhất khi $x \to 0$. Khi đó hãy tìm phần chính của vô cùng bé.

72. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\operatorname{tg}x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + x^2.o(1) \qquad (x \to 0).$$

73. Cho $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$. Chứng minh rằng

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x}.o(1) \quad (x \to +\infty).$$

74. Cho hàm số

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2+\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{2},\ x \in \mathbf{R}.$$

a) Tìm phần chính của f(x) khi $x \to 0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$. Xác định phần chính của vô cùng bé hoặc vô cùng lớn trong ba trường hợp trên.

b) Tìm đạo hàm của f. Tìm các tiệm cận của đồ thị của f.

75. Cho hàm số

$$f(x) = x^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{1+x}, \ x \neq -1.$$

a) Tìm $\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x)$.

b) Viết khai triển của f trên một lân cận của $+\infty$ $(-\infty)$, tức là với $x > 0$ đủ lớn ($x < 0$ đủ nhỏ) dưới dạng

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{khi } x \to +\infty \ (x \to -\infty).$$

Từ đó suy ra rằng đồ thị của f có một tiệm cận. Xác định vị trí của đồ thị đối với tiệm cận này trên lân cận của $+\infty$ $(-\infty)$.

76. a) Tính

$$l = \lim_{x \to 0} \left[\left(\frac{1}{1 - ax^2} - e^{bx^2} \right) \operatorname{cotg}^2 x \right] ; \ a, \ b \in \mathbf{R}.$$

b) Viết công thức khai triển bậc 3 trên một lân cận của điểm 0 của hàm số f xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{1 - ax^2} - e^{bx^2} \right) \operatorname{cotg}^2 x & \text{nếu } x \neq 0, \\ l & \text{nếu } \quad x = 0. \end{cases}$$

c) Tìm tập hợp các điểm (a, b) sao cho khai triển trên không chứa số hạng có bậc hai.

77. Giả sử f là một hàm số liên tục trên $(0, +\infty)$ được biểu diễn dưới dạng

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{r(x)}{x},$$

trong đó $\lim\limits_{x \to +\infty} r(x) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại các số thực α, β, γ sao cho

$$\Phi(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x} + \frac{\rho(x)}{x},$$

trong đó $\lim\limits_{x \to +\infty} \rho(x) = 0$.

78. Tìm $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2} \right)$.

79. Tìm $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{2x - x^4} - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[4]{x^3}}$.

80. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x + 27} - 3}{\sqrt[4]{x + 16} - 2}$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 - 1}} - x\sqrt{2}\right)$.

81. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\ln tgx - tg\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)}{tg^3\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)}$; b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\dfrac{1}{\cos x} \ln\left(x + 1 - \dfrac{\pi}{2}\right) \right]$;

c) $\lim\limits_{x \to e} [(\ln x - 1)\ln|x - e|]$.

82. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[3x - x^2 \ln\left(1 + \dfrac{3}{x}\right) \right]$; b) $\lim\limits_{x \to 0} |x|^{\sin x}$.

83. Cho hàm số f xác định trên $(0, +\infty)$ bởi

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln|x - 2|}{\ln|x|} & \text{với } x \neq 1, \\ -1 & \text{với } x = 1. \end{cases}$$

a) Tính $f'(1)$.

b) Chứng minh rằng f có đạo hàm liên tục tại điểm $x = 1$.

84. a) Tìm

$$\lim_{x \to 1} \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x - 1)^2},\ n \in \mathbf{N}^*.$$

b) Cho hàm số $P_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$, $x \in \mathbf{R}$. Chứng minh rằng nếu n là một số lẻ thì $P_n(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbf{R}$, nếu n là một số chẵn thì phương trình $P_n(x) = 0$ có một nghiệm thực duy nhất.

85. Tính các tích phân sau :

a) $\int \frac{5x-1}{(x+2)^2(x^2-1)}dx$; b) $\int \frac{dx}{1+x^3}$; c) $\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}$.

86. Tìm các nguyên hàm sau :

a) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$; b) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$;

c) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}$; d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}$.

87. Tìm các nguyên hàm sau :

a) $\int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x}dx$; b) $\int \frac{e^x}{\sqrt{3-5e^{2x}}}dx$; c) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3-x^3}}dx$;

d) $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$; e) $\int 3^{\sqrt{2x+1}}dx$; f) $\int x^3\ln(x^2+3)dx$.

88. Tìm các nguyên hàm sau :

a) $\int \frac{2+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$; b) $\int \frac{\sin x+\sin^3 x}{\cos 2x}dx$;

c) $\int \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$; d) $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx$;

e) $\int \frac{\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x}}dx$; f) $\int x\,\mathrm{tg}^2 x\,dx$;

g) $\int \frac{\cos 8x-\cos 7x}{1+2\cos 5x}dx$; h) $\int \frac{x+\cos x}{1+\sin x}dx$.

89. Tính các tích phân sau :

a) $\int\limits_0^x \frac{dt}{sht + 2cht}$; b) $\int\limits_0^x \frac{ch3t}{1 + sht}dt$;

c) $\int ch^3xdx$; d) $\int sh^4xdx$.

90. Tính các tích phân sau :

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4dx}{3 + 5\cos x}$; b) $\int\limits_0^x \frac{dt}{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)\cos t}$;

$(a > 0,\ b > 0,\ x \in (0, \pi))$

c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin xdx}{1 + \cos x + \cos 2x}$; d) $\int\limits_0^x \frac{\sin t + \sin^3 t}{\cos 2t}dt,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$;

e) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^x \frac{\cos^3 t + \cos^5 t}{\sin^2 t + \sin^4 t}dt,\ x \in (0, \pi)$;

f) $\int\limits_0^t \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x}$,

$t \in (-\mathrm{arctg}(\sqrt{2} + 1),\ \mathrm{arctg}(\sqrt{2} - 1))$.

91. Tính các tích phân sau :

a) $\int \cos^6 xdx$; b) $\int \sin^2 x\cos^4 xdx$;

c) $\int\limits_0^x tg^7 tdt,\quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; d) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{dt}{\sin^4 t}$.

92. Tính tích phân

$$\int\limits_1^x \frac{dt}{(2t + 1)^{\frac{2}{3}} - (2t + 1)^{\frac{1}{2}}},\ x \in (0, +\infty).$$

93. Tính các tích phân sau :

a) $\int\limits_a^b \sqrt{(x-a)(x-b)}\,dx$; b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$;

c) $\int\limits_0^x \frac{3t+2}{(t+1)\sqrt{t^2+3t+3}}\,dt$, $x \in (0, +\infty)$.

94. Tính các tích phân sau :

a) $\int\limits_3^x \frac{3t+4}{\sqrt{-t^2+6t-8}}\,dt$, $x \in (3, 4)$;

b) $\int\limits_0^x \frac{dt}{(t-1)\sqrt{-t^2+2t+3}}$, $x \in (0, 1)$.

95. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau :

a) $y = x$, $y = x + \sin^2 x$, $x = 0$, $x = \pi$,

b) $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$, $a > 0$,

c) $y = |\lg x|$, $y = 0$; $x = 0{,}1$; $x = 10$,

d) $y = (x+1)^2$, $x = \sin \pi y$, $y = 0$. $(0 \leqslant y \leqslant 1)$.

96. Tìm tỉ số các diện tích hai phần của hình tròn $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 8\}$ do parabôn $y^2 = 2x$ chia ra.

97. Tìm thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt sau :

a) $x + y + z^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = \frac{c}{a}x$, $z = 0$, $a, b, c > 0$;

c) $z^2 = b(a - x)$, $x^2 + y^2 = ax$, $a, b > 0$.

98. Chứng minh rằng thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant y(x)\},$$

trong đó $x \mapsto y(x)$ là một hàm số liên tục trên $[a, b]$, quay quanh trục Oy là :

$$V = 2\pi \int_a^b xy(x)dx.$$

99. Tính diện tích mặt tròn xoay sinh ra bởi parabôn

$$y^2 = 2px \quad (0 \leqslant x \leqslant a)$$

quay quanh trục Ox.

100. Tính diện tích mặt tròn xoay sinh ra bởi đường cong

$$y = \mathrm{tg}x \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$$

quay quanh trục Ox.

BÀI GIẢI VÀ HƯỚNG DẪN

1. Hàm số $x \mapsto [x]$ bị chặn trên $[0, 2]$ và có hai điểm gián đoạn 1 và 2. Do đó hàm số khả tích trên $[0, 2]$. Ta có

$$\int_0^2 [x]dx = \int_0^1 [x]dx + \int_1^2 [x]dx = 0 + 1 = 1.$$

2. Hàm số f bị chặn và có một số hữu hạn điểm gián đoạn : $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1$. Do đó f khả tích trên $[0, 1]$ và

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{p=0}^{n-1} \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} f(x)dx = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{p^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{p=0}^{n-1} p^2 = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

3. Ta có

$$a = [10x], \ b = [100x] - 10[10x], \ c = x - \frac{[100x]}{100},$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{100}\int_0^1 [10x]dx + \frac{1}{10}\int_0^1 ([100x] - 10[10x])dx +$$

$$+ \int_0^1 xdx - \frac{1}{100}\int_0^1 [100x]dx =$$

$$= \int_0^1 xdx + \frac{9}{100}\int_0^1 [100x]dx - \frac{99}{100}\int_0^1 [10x]dx =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{9}{100} \times \frac{1}{100}(1 + 2 + \cdots + 99) -$$

$$- \frac{99}{100} \times \frac{1}{10}(1 + 2 + \cdots + 9) = \frac{1}{2}.$$

4. Vì $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = l$ nên

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(0) + f(1) + \cdots + f(n)}{n} = l.$$

Theo định lí về giá trị trung bình của tích phân, tồn tại $t_1 \in [0, 1]$, $t_2 \in [1, 2]$,..., $t_n \in [n-1, n]$ sao cho

$$\int_0^n f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt + \cdots + \int_{n-1}^n f(t)\,dt =$$

$$= f(t_1) + f(t_2) + \ldots + f(t_n).$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} f(t_n) = l$ nên

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(t_1) + f(t_2) + \cdots + f(t_n)}{n} = l.$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^n f(t)dt}{n} = l.$$

Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.

5. b) Vì $\{u_n\}$ và $\{I_n\}$ là hai dãy số tăng nên điều cần chứng minh suy ra từ bất đẳng thức trong b).

7. Với mọi $t \in \mathbf{R}$, ta có

$$[tf(x) + g(x)]^2 = t^2f^2(x) + 2tf(x)g(x) + g^2(x)$$

với mọi $x \in [a, b]$. Do đó

$$t^2\int_a^b f^2(x)\,dx + 2t\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx + \int_a^b g^2(x)\,dx \geqslant 0$$

với mọi $t \in \mathbf{R}$. Từ đó suy ra

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right).$$

8. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski (xem bài tập 7), đặt $g(x) = 1$, $x \in [a, b]$,

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b 1^2dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b-a}\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

9. Từ giả thiết suy ra f và g khả tích trên [a, b] và $\sqrt{f(x)g(x)} \geqslant 1$ với mọi $x \in [a, b]$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpski (xem bài tập 7), ta được

$$\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \left(\sqrt{f(x)}\right)^2dx \cdot \int_a^b (\sqrt{g(x)})^2dx \geqslant$$

$$\geqslant \left(\int_a^b \sqrt{f(x)g(x)}\,dx\right)^2 \geqslant \left(\int_a^b dx\right)^2 = (b-a)^2.$$

10. Theo định lí Niutơn – Laibnit, ta có

$$\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0) = 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpski cho hai hàm số f' và $x \mapsto g(x) = 1$, $x \in [0, 1]$, ta có

$$1 = \left(\int_0^1 f'(x)\,.\,1dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 [f'(x)]^2dx\,.\int_0^1 1^2dx = \int_0^1 [f'(x)]^2dx.$$

11. a) Ta có $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in [0, 1]$. Do đó

$$\int_0^1 xf(x)\,dx + \int_0^1 F(x)\,dx = \int_0^1 [xF'(x) + F(x)]\,dx =$$

$$= \int_0^1 [xF(x)]'dx = xF(x)\Big|_0^1 = F(1).$$

b) Ta có $\int_x^1 f(t)dt = F(1) - F(x)$. Do đó từ bất đẳng thức đã cho suy ra

$$F(1) - F(x) \geqslant \frac{1 - x^2}{2} \qquad \text{với mọi } x \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow \int_0^1 F(1)dx - \int_0^1 F(x)dx \geqslant \int_0^1 \frac{1 - x^2}{2}\,dx$$

$$F(1) - \int_0^1 F(x)dx \geqslant \frac{1}{3}. \qquad (1)$$

Từ (1) và bất đẳng thức đã chứng minh trong a) suy ra

$$\int_0^1 xf(x)dx \geqslant \frac{1}{3}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpski cho hai hàm số f và $x \mapsto g(x) = x$, ta được

$$\left(\int_0^1 x^2dx\right)\left(\int_0^1 f^2(x)dx\right) \geqslant \left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2,$$

$$\frac{1}{3}\int_0^1 f^2(x)dx \geqslant \left(\frac{1}{3}\right)^2.$$

Từ đó có bất đẳng thức cần chứng minh.

13. Phản chứng : Giả sử với mọi $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, tồn tại $x \in [\alpha, \beta]$ sao cho $f(x) \leqslant 0$. Gọi $\{\Pi_n\}$ là một dãy chuẩn tắc những phép phân hoạch $[a, b]$,

$$\Pi_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{p_n} = b.$$

Tồn tại ít nhất một $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ sao cho $f(\xi_i) \leqslant 0$, $i = 1, \dots, p_n$; $\sigma_n = \sum_{i=1}^{p_n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant 0$ với mọi n. Do đó

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_n \leqslant 0.$$ Điều này trái với giả thiết.

14. Ta chứng minh với mọi $\alpha, \beta \in [a, b]$, tồn tại $\xi \in [\alpha, \beta]$ sao cho $f(\xi) = 0$ (giả sử $\alpha < \beta$). Thật vậy, nếu không thì tồn tại $\alpha, \beta \in [a, b]$ $(\alpha < \beta)$ sao cho $f(x) > 0$ với mọi $x \in [\alpha, \beta]$. Khi đó

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_\alpha^\beta f(x)dx > 0.$$

15. Ta có $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in [a, b]$. Vì F' tăng trên $[a, b]$ nên F là một hàm lồi trên $[a, b]$. Từ đó có bất đẳng thức cần chứng minh.

16. Hiển nhiên nếu $f(x) \geqslant 0$ với mọi $x \in [a, b]$ hoặc $f(x) \leqslant 0$ với mọi $x \in [a, b]$ thì ta có đẳng thức cần chứng minh. Giả sử tồn tại $x_1, x_2 \in [a, b]$ sao cho $f(x_1) > 0$ và $f(x_2) < 0$. Khi đó

$|f(x)| \geqslant f(x)$ và $|f| \neq f$, $|f(x)| \geqslant -f(x)$ và $|f| \neq -f$ trên $[a, b]$.

Từ bài tập 12 suy ra

$$\int_a^b |f(x)|dx > \int_a^b f(x)dx \text{ và } \int_a^b |f(x)|dx > -\int_a^b f(x)dx.$$

Do đó $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx > \left|\int_a^b f(x)dx\right|.$

17. Ta có $\int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{1 + x^n}\,dx \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{2}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{n}$ với mọi $n \in \mathbf{N}^*$.

Giới hạn cần tìm là 0.

18. Dãy $\{u_n\}$ tăng và bị chặn trên bởi 1 nên hội tụ. Ta có

$$u_n = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^n}{1 + x^n}\right)dx = 1 - \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^n}\,dx,$$

$$0 < \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^n}\,dx \leqslant \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Do đó $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 1$.

19. Ta áp dụng tiêu chuẩn Côsi

$$u_{n+p} - u_n = \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}\,dx = -\int_n^{n+p} \frac{1}{x}\,d(\cos x) =$$

$$= -\frac{\cos x}{x}\Big|_n^{n+p} - \int_n^{n+p} \frac{\cos x}{x^2}\,dx =$$

$$= \frac{\cos n}{n} - \frac{\cos(n+p)}{n+p} - \int_n^{n+p} \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

$$|u_{n+p} - u_n| \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n+p} + \int_n^{n+p} \frac{dx}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} = \frac{2}{n}.$$

20. Với mọi số thực $x \geqslant 0$, tồn tại một số tự nhiên n sao cho $2n\pi \leqslant x < 2(n+1)\pi$. Bằng quy nạp bạn đọc hãy chứng minh

$$\int_0^{2n\pi} \frac{\sin t}{1 + t}\,dt \geqslant 0 \text{ với mọi } n \in \mathbf{N}.$$

- Nếu $x \in [2n\pi, (2n+1)\pi]$ thì

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t+1}\,dt = \int_0^{2n\pi} \frac{\sin t}{t+1}\,dt + \int_{2n\pi}^x \frac{\sin t}{t+1}\,dt \geq 0$$

vì cả hai tích phân ở vế phải của đẳng thức trên đều không âm.

- Nếu $x \in ((2n+1)\pi, 2(n+1)\pi)$ thì

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t+1}\,dt = \int_0^{2(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t+1}\,dt - \int_x^{2(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t+1}\,dt \geq 0$$

vì tích phân thứ nhất ở vế phải của đẳng thức trên không âm và

$$\int_x^{2(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t+1}\,dt \leq 0.$$

21. Vì f' liên tục trên [a, b] nên tồn tại $x_0 \in [a, b]$ sao cho

$$|f'(x_0)| = \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)| = M.$$

Với mọi $x \in (a, b]$, tồn tại $c \in (a, x)$ sao cho

$$f(x) = f(x) - f(a) = f'(c)(x - a).$$

Do đó

$$|f(x)| \leq M(x - a). \qquad (1)$$

Với mọi $x \in [a, b)$, tồn tại $d \in (x, b)$ sao cho

$$-f(x) = f(b) - f(x) = f'(d)(b - x).$$

Do đó

$$|f(x)| \leq M(b - x). \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)|\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)|\,dx \leq$$

$$\leqslant \int_a^{\frac{a+b}{2}} M(x - a)\,dx = \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} M(b - x)\,dx =$$

$$= \frac{M(b-a)^2}{4}.$$

22. Ta có

$$\int_a^b f(x)\sin(nx)dx = -\frac{1}{n}\int_a^b f(x)\,d(\cos(nx)) =$$

$$= -\frac{1}{n} f(x)\cos(nx)\Big|_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos(nx)dx =$$

$$= \frac{1}{n}[f(a)\cos(na) - f(b)\cos(nb)] + \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos(nx)dx.$$

Vì f và f' liên tục trên $[a, b]$ nên chúng bị chặn trên $[a, b]$: Tồn tại $M > 0$ sao cho $|f(x)| \leqslant M$ và $|f'(x)| \leqslant M$ với mọi $x \in [a, b]$.

Do đó

$$\left|\int_a^b f(x)\sin(nx)dx\right| \leqslant \frac{1}{n}(|f(a)| + |f(b)|) + \frac{M(b-a)}{n}.$$

23. Cho $\varepsilon > 0$ bất kì. Vì f liên tục đều trên $[a, b]$ nên tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$(\forall x', x'' \in [a, b])\ |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Gọi π là một phép phân hoạch $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_p = b$$

sao cho $d(\Pi) < \delta$. Khi đó

$$I_n = \int_a^b f(x)\sin(nx)dx = \sum_{i=1}^{p}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\sin(nx)dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_i)]\sin(nx)dx + \sum_{i=1}^{p} f(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin(nx)dx.$$

Vì f liên tục trên [a, b] nên tồn tại $M > 0$ sao cho $|f(x)| \leqslant M$ với mọi $x \in [a, b]$. Do đó

$$\left| \int_a^b f(x)\sin(nx)dx \right| \leqslant \sum_{i=1}^{p} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (x_i - x_{i-1}) +$$

$$+ M \sum_{i=1}^{p} \frac{|\cos(nx_{i-1}) - \cos(nx_i)|}{n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2pM}{n}.$$

$|I_n| < \varepsilon$ với $\dfrac{2pM}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, tức là với $n > \dfrac{4pM}{\varepsilon}$.

24. a) Áp dụng công thức Niutơn – Laibnit, dễ dàng chứng minh được rằng

$$F'(x) = \frac{1}{2} [f(x + 1) - f(x - 1)] \text{ với mọi } x \in \mathbf{R}.$$

b) • Nếu $x - 1 \geqslant 0$, tức là $x \geqslant 1$, thì

$$F(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} tdt = x.$$

• Nếu $x + 1 \leqslant 0$, tức là $x \leqslant -1$, thì

$$F(x) = -\frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} tdt = -x.$$

• Nếu $x - 1 < 0 < x + 1$, tức là $-1 < x < 1$, thì

$$F(x) = \frac{1}{2} (x^2 + 1).$$

c) Áp dụng định lí về giá trị trung bình của tích phân.

26. Thực hiện phép đổi biến số $u = x + t$, ta được

$$F(x) = \int_{x+a}^{x+b} f(u)\cos(u - x)du =$$

$$= \cos x \int_{x+a}^{x+b} f(u)\cos u du + \sin x \int_{x+a}^{x+b} f(u)\sin u du .$$

$$F'(x) = \cos x\,[f(x + b)\cos(x + b) - f(x + a)\cos(x + a)] +$$
$$+ \sin x\,[f(x + b)\sin(x + b) - f(x + a)\sin(x + a)] -$$
$$- \sin x \int_{x+a}^{x+b} f(u)\cos u du + \cos x \int_{x+a}^{x+b} f(u)\sin u du .$$

$$F'(x) = f(x + b)\cos b - f(x + a)\cos a + \int_a^b f(x + t)\sin t dt .$$

27. Hàm số f là lồi trên (a, b) nên liên tục trên (a, b). Ngoài ra f bị chặn trên [a, b]. Do đó f khả tích trên [a, b]. Vì với mọi $x \in [a, b]$,

$$x = \frac{x-a}{b-a}b + \frac{b-x}{b-a}a \quad \text{nên} \quad f(x) \leqslant \frac{x-a}{b-a}f(b) + \frac{b-x}{b-a}f(a).$$

Do đó

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \frac{f(b)}{b-a}\int_a^b (x - a)dx + \frac{f(a)}{b-a}\int_a^b (b - x)dx =$$

$$= \frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a).$$

Để chứng minh bất đẳng thức trái, ta sử dụng phép đổi biến số $x = \frac{a+b}{2} + t$. Khi đó

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f\left(\frac{a+b}{2} + t\right)dt = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{0} f\left(\frac{a+b}{2} + t\right)dt +$$

$$+ \int_0^{\frac{b-a}{2}} f\left(\frac{a+b}{2} + t\right)dt =$$

$$= \int_0^{\frac{b-a}{2}} \left[f\left(\frac{a+b}{2} - t\right) + f\left(\frac{a+b}{2} + t\right) \right] dt. \qquad (1)$$

Vì $\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} - t\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + t\right)$ với mọi $t \in \left[0, \frac{b-a}{2}\right]$ nên

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2} f\left(\frac{a+b}{2} - t\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{a+b}{2} + t\right). \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\int_a^b f(x)dx \geq 2 \int_0^{\frac{b-a}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}\right)dt = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a).$$

28. Gọi F là một nguyên hàm của f trên [a, b]. Khi đó

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)F'(x)dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx. \qquad (1)$$

Vì g đơn điệu trên [a, b] nên g'(x) không đổi dấu trên đoạn này. Theo định lí mở rộng về giá trị trung bình của tích phân, tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho

$$\int_a^b F(x)g'(x)dx = F(c)\int_a^b g'(x)dx = F(c)[g(b) - g(a)].$$

Thay vào (1), ta được

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(c)g(b) + F(c)g(a) =$$

$$= g(a)[F(c) - F(a)] + gb[F(b) - F(c)] =$$

$$= g(a)\int_a^c f(x)dx + g(b)\int_c^b f(x)dx.$$

29. Áp dụng bài tập 28. Đặt $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [a, b]$. Hàm số g giảm trên $[a, b]$ $(0 < a < b)$. Do đó tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}dx\right| = \left|\frac{1}{a}\int_a^c \sin x dx + \frac{1}{b}\int_c^b \sin x dx\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{a}(\cos a - \cos c) + \frac{1}{b}(\cos c - \cos b)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{a} + \frac{2}{b} < \frac{4}{a}.$$

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}dx\right| < \varepsilon \quad \text{nếu} \quad \frac{4}{a} < \varepsilon, \quad \text{tức là } a > \frac{4}{\varepsilon}.$$

30. Giả sử f và g cùng tăng trên $[0, 1]$ (Nếu f và g cùng giảm thì $-f$ và $-g$ cùng tăng). Ta chứng minh

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx \geqslant 0.$$

Tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $\int_0^1 f(x)dx = f(c)$.

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 [f(x) - f(c)]g(x)dx =$$

$$= \int_0^c [f(x) - f(c)]g(x)dx + \int_c^1 [f(x) - f(c)]g(x)dx. \qquad (1)$$

Vì $f(x) - f(c) \leqslant 0$ với mọi $x \in [0, c]$ và $f(x) - f(c) \geqslant 0$ với mọi $x \in [c, 1]$ nên theo định lí mở rộng về giá trị trung bình của tích phân, tồn tại $a \in [0, c]$ và $b \in [c, 1]$ sao cho

$$\int_0^c [f(x) - f(c)]g(x)dx = g(a) \int_0^c [f(x) - f(c)]dx, \qquad (2)$$

$$\int_c^1 [f(x) - f(c)]g(x)dx = g(b) \int_c^1 [f(x) - f(c)]dx. \qquad (3)$$

Dễ dàng thấy rằng

$$\int_c^1 [f(x) - f(c)]dx = -\int_0^c [f(x) - f(c)]dx. \qquad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 g(x)dx = [g(a) - g(b)] \int_0^c [f(x) - f(c)]dx \geq 0.$$

32. Ta có

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0 + \theta(x - x_0)) \frac{(x - x_0)^2}{2}, \ 0 < \theta < 1$$

với mọi $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$. Do đó

$$\int_{x_0 - r}^{x_0 + r} [f(x) - f(x_0)]dx = \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} f''(x_0 + \theta(x - x_0)) \frac{(x - x_0)^2}{2} dx. \ (1)$$

Theo định lí mở rộng về giá trị trung bình của tích phân, tồn tại số thực $c \in (x_0 - r, x_0 + r)$ sao cho

$$\int_{x_0 - r}^{x_0 + r} f''(x_0 + \theta(x - x_0)) \frac{(x - x_0)^2}{2} dx = f''(c) \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} \frac{(x - x_0)^2}{2} dx =$$

$$= f''(c) \frac{r^3}{3}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra đẳng thức cần chứng minh.

33. a) $I = 0$ vì hàm số dưới dấu tích phân là lẻ trên $[-1, 1]$.

34. b) $I = \dfrac{\pi}{2} \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}$.

35. a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $\frac{\pi}{4}$.

Thực hiện phép đổi biến số $x = \frac{\pi}{2} - t$. Chẳng hạn với a), ta có

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos^3\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\cos^3\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \sin^3\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t}{\sin^3 t + \cos^3 t}\,dt.$$

Do đó

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

36. a) Ta có

$$I = \int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{(x - x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}\,dx = \int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^{\frac{1}{3}}}{x^3}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{1} \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^{\frac{1}{3}} d\left(\frac{1}{x^2} - 1\right).$$

Đổi biến số $t = \frac{1}{x^2} - 1$, ta được $I = 6$.

b) Đổi biến số $t = \sqrt{1 - x}$,

$$J = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,dt = \pi - 2.$$

39. Ta có $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi} x$ với mọi $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Do đó

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x} dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi}x} dx = \frac{\pi}{2R}\left(1 - e^{-R}\right).$$

40. a) Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta được

$$I_z(y) = y\ln\left(1 + \frac{a^2}{y^2}\right) - z\ln\left(1 + \frac{a^2}{z^2}\right) + 2a\,\mathrm{arctg}\frac{y}{a} - 2a\,\mathrm{arctg}\frac{z}{a}.$$

b) Vì $\lim\limits_{z \to 0} z\ln\left(1 + \frac{a^2}{z^2}\right) = 0$ nên

$$I_0(y) = \lim_{z \to 0} I_z(y) = y\ln\left(1 + \frac{a^2}{y^2}\right) + 2a\,\mathrm{arctg}\frac{y}{a}.$$

c) Vì $\lim\limits_{y \to +\infty} y\ln\left(1 + \frac{a^2}{y^2}\right) = \lim\limits_{y \to +\infty} y \cdot \frac{a^2}{y^2} = \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{a^2}{y} = 0$ nên

$$\lim_{y \to +\infty} I_0(y) = 2a \times \frac{\pi}{2} = \pi a.$$

42. Ta có

$$a_1^x = e^{x\ln a_1} \sim 1 + x\ln a_1, \ldots, a_n^x \sim 1 + x\ln a_n \quad (x \to 0).$$

Do đó

$$\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \sim 1 + \frac{x(\ln a_1 + \cdots + \ln a_n)}{n} =$$

$$= 1 + x\ln\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \quad (x \to 0),$$

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{a_1^x + \ldots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0}\left(1 + x\ln\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}\right)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= e^{\ln\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}} = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}.$$

43. b) Tồn tại $x_0 \in [a, b]$ sao cho $f(x_0) = M$. Vì f liên tục tại x_0 nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$(\forall x \in [a, b]) \ |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Giả sử $x_0 > a$. Khi đó

$$u_n \geq \left(\int_{x_0 - \delta}^{x_0} [f(x)]^n dx \right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\int_{x_0 - \delta}^{x_0} (M - \varepsilon)^n dx \right)^{\frac{1}{n}} = (M - \varepsilon)\delta^{\frac{1}{n}}$$

với mọi n. Như vậy, ta có

$$(M - \varepsilon)\, \delta^{\frac{1}{n}} \leq u_n \leq M(b - a)^{\frac{1}{n}} \quad \text{với mọi n.}$$

Do đó

$$M - \varepsilon \leq \liminf_{n \to \infty} u_n \leq \limsup_{n \to \infty} u_n \leq M \text{ với mọi } \varepsilon > 0.$$

Nếu $x_0 = a$ thì xét tích phân của f^n trên $[x_0, x_0 + \delta]$.

45. Hiển nhiên bất đẳng thức cần chứng minh đúng với $x = 0$ hoặc $y = 0$. Giả sử $x > 0$, $y > 0$. Với mỗi $y > 0$ cố định, xét hàm số

$$x \mapsto f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy, \qquad x > 0.$$

$$f'(x) = x^{p-1} - y \ ; \ f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y^{\frac{1}{p-1}}.$$

Dễ thấy f đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x = y^{\frac{1}{p-1}}$. Do đó

$$f(x) \geq f\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right) = 0 \text{ với mọi } x > 0.$$

Có đẳng thức khi và chỉ khi

$$x = y^{\frac{1}{p-1}} \quad \Leftrightarrow \quad x^p = y^q.$$

46. Nếu $f(x) = 0$ hoặc $g(x) = 0$ với mọi $x \in [a, b]$ thì hiển nhiên bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Giả sử f(x) và g(x) không đồng nhất bằng không trên [a, b]. Khi đó

$$\| f\|_p = \Big(\int_a^b |f(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} > 0 \text{ và } \| g\|_q = \Big(\int_a^b |g(x)|^q dx \Big)^{\frac{1}{q}} > 0$$

Áp dụng bất đẳng thức Iang cho hai số $\dfrac{|f(x)|}{\|f\|_p}$ và $\dfrac{|g(x)|}{\|g\|_q}$, ta được

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q},$$

với mọi $x \in [a, b]$. Do đó

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q}\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leqslant \frac{1}{p\|f\|_p^p}\int_a^b |f(x)|^p dx +$$

$$+ \frac{1}{q\|g\|_q^q}\int_a^b |g(x)|^q dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

47. Hiển nhiên bất đẳng thức đúng với $p = 1$. Giả sử $p > 1$ và gọi q là số mũ liên hợp của p. Ta có

$$|f(x) + g(x)|^p \leqslant |f(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} + |g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1},$$

với mọi $x \in [a, b]$. Áp dụng bất đẳng thức Hônđơ (xem bài tập 46), ta được

$$\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \leqslant \int_a^b |f(x)||f(x) + g(x)|^{p-1}dx +$$

$$+ \int_a^b |g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1}dx \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\int_a^b |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{(p-1)q}dx\Big)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ \Big(\int_a^b |g(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Do đó

$$\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \leq \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \right.$$

$$\left. + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right].$$

• Nếu $\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx > 0$ thì chia hai vế của bất đẳng thức trên cho $\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{q}}$, ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

• Nếu $\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx = 0$ thì hiển nhiên bất đẳng thức cần chứng minh đúng.

48. a) Nếu gọi S là tổng ở vế trái của đẳng thức cần chứng minh thì

$$2S\sin\frac{x}{2} = 2\sin x\sin\frac{x}{2} + 2\sin 2x\sin\frac{x}{2} + \cdots + 2\sin nx\sin\frac{x}{2} =$$

$$= \left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) + \left(\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\right) + \cdots +$$

$$+ \left(\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) =$$

$$= \cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x =$$

$$= 2\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}.$$

b) Dễ dàng thấy rằng nếu hàm số f khả tích trên [a, b] thì

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right).$$

Do đó từ a) suy ra I = 2.

49. Ta có

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - 2\alpha\cos\frac{2\pi k}{n} + \alpha^2\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{n} \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 - 2\alpha\cos\frac{2k\pi}{n} + \alpha^2\right)\right).$$

Với $\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$:

$$1 - 2\alpha\cos\frac{2k\pi}{n} + \alpha^2 = \left(\alpha - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)\left(\alpha - e^{-i\frac{2k\pi}{n}}\right),$$

$e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ là những căn bậc n của 1.

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{n} \ln(\alpha^n - 1)^2.$$

Đẳng thức cũng đúng với $\alpha = 0$.

- Nếu $0 \leq \alpha < 1$ thì $I = 0$.
- Nếu $\alpha > 1$ thì $I = 4\pi\ln\alpha$.

50. a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{1}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2}\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{6}{n}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3(n-1)}{n}}}\right) =$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+3x}} = \frac{1}{3}.$$

51. $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \dfrac{1}{t}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{t}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{(k-1)t}{n} = \dfrac{1}{t}\int\limits_0^1 \sin x dx = \dfrac{1-\cos t}{t}.$

53. a) Bất đẳng thức cần chứng minh là một trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức

$$2^x > 1 + x\ln 2 \qquad \text{với mọi } x > 0.$$

Để chứng minh bất đẳng thức này ta xét hàm số

$$f(x) = 2^x - x\ln 2 - 1 \text{ trên } [0, +\infty).$$

Ta có

$$f'(x) = 2^x\ln 2 - \ln 2 = (2^x - 1)\ln 2 > 0 \qquad \text{với mọi } x > 0.$$

Ngoài ra f liên tục trên $[0, +\infty)$. Do đó $f(x) > f(0) = 0$ với mọi $x > 0$.

b) Đặt $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\dfrac{1}{k}}$, ta có $S_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2^{\frac{k}{n}}}{1+\dfrac{1}{kn}}$.

Ta chứng minh

$$2^{\frac{k-1}{n}} < \frac{2^{\frac{k}{n}}}{1+\dfrac{1}{kn}} < 2^{\frac{k}{n}} \qquad \text{với } k \geq 2.$$

Bất đẳng thức phải là hiển nhiên. Ta áp dụng bất đẳng thức trong a) để chứng minh bất đẳng thức trái,

$$\frac{2^{\frac{k}{n}}}{1+\dfrac{1}{kn}} = 2^{\frac{k-1}{n}}\cdot\frac{2^{\frac{1}{n}}}{1+\dfrac{1}{kn}} > 2^{\frac{k-1}{n}}\,\frac{1+\dfrac{\ln 2}{n}}{1+\dfrac{1}{kn}} > 2^{\frac{k-1}{n}} \qquad \text{với } k \geq 2.$$

Theo định lí Bônzanô – Côsi tồn tại $\xi_k \in \left(\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\right)$ sao

cho $2^{\xi_k} = \dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{1+\dfrac{1}{kn}}$, $k \geq 2$. Do đó

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}} + 2^{\xi_2} + 2^{\xi_3} + \cdots + 2^{\xi_n}\right).$$

Từ đó dễ dàng suy ra : $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int\limits_0^1 2^x\,dx = \frac{1}{\ln 2}$.

54. Từ giả thiết suy ra

$$1 + \frac{1}{a_k} = \frac{a_k + 1}{a_k} = \frac{a_{k+1}}{(k+1)a_k}.$$

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{a_k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}}{(k+1)a_k} = \frac{a_{n+1}}{(n+1)!}.$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được rằng

$$a_n = n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \ldots + n!$$

Do đó

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \cdots + \frac{1}{1!} + 1.$$

Vậy $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{a_k}\right) = e.$

55. a) $f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$ với $x > 0$, $f'(x) = 0$ với $x \leq 0$.

b) Chứng minh bằng quy nạp. Đơn thức có bậc cao nhất của P_n đối với $\frac{1}{x}$ là $\left(\frac{2}{x^3}\right)^n$.

c) Đặt $J(h) = \int\limits_h^x e^{-\frac{1}{t^2}}dt$, $0 < h < x$, ta có $I(x) = \lim\limits_{h\to 0^+} J(h)$,

$$J(h) = \frac{1}{2}\int\limits_h^x t^3 d\left(e^{-\frac{1}{t^2}}\right) = \frac{1}{2}x^3e^{-\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{2}h^3e^{-\frac{1}{h^2}} - \frac{3}{2}\int\limits_h^x t^2e^{-\frac{1}{t^2}}dt,$$

$$I(x) = \frac{x^3}{2} f(x) - \frac{3}{2}\int_0^x t^2 e^{-\frac{1}{t^2}} dt \qquad (1)$$

Áp dụng định lí mở rộng về giá trị trung bình của tích phân, ta được

$$\int_0^x t^2 e^{-\frac{1}{t^2}} dt = (\theta x)^2 \int_0^x e^{-\frac{1}{t^2}} dt = \theta^2 x^2 I(x), \quad \theta \in [0, 1] \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $I(x) = \dfrac{1}{1 + \frac{3}{2}\theta^2 x^2} f(x) \dfrac{x^3}{2}$.

Vì $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + \frac{3}{2}\theta^2 x^2} = 1$

nên $I(x) = f(x)\dfrac{x^3}{2}(1 + o(1)) = f(x)\left[\dfrac{x^3}{2} + o(x^3)\right] \quad (x \to 0).$

56. b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{c^x - d^x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x \ln a - b^x \ln b}{c^x \ln c - d^x \ln d} = \dfrac{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{\ln\left(\frac{c}{d}\right)}$.

58. Giả sử

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + x^n.o(1),$$

$$f(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n + x^n.o(1) \qquad (x \to 0),$$

và k là số nguyên bé nhất sao cho $a_k \neq b_k$. Khi đó

$$0 = x^k[(a_k - b_k) + (a_{k+1} - b_{k+1})x + \dots + (a_n - b_n)x^{n-k}] + x^n.o(1).$$

Với $x \neq 0$, ta có

$$0 = (a_k - b_k) + (a_{k+1} - b_{k+1})x + \dots + (a_n - b_n)x^{n-k} + x^{n-k}.o(1)$$

$$(x \to 0).$$

Cho $x \to 0$, ta được $a_k - b_k = 0$. Vô lí !

59. a) Nếu f là một hàm số chẵn thì

$$f(x) = f(-x) = a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \dots + (-1)^n x^n + x^n.o(1)$$
$$(x \to 0).$$

Theo bài tập 58, từ đó suy ra : $a_1 = -a_1$, $a_3 = -a_3$, $a_5 = -a_5, \dots$

Vậy $a_1 = 0$, $a_3 = 0$, $a_5 = 0, \dots$

61. b) Ta có

$$x^n.o(1)(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = x^n.o(1),$$
$$x^n.o(1)(b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n) = x^n.o(1),$$
$$x^n.o(1).x^n.o(1) = x^n.o(1) \qquad (x \to 0) ;$$

$$(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)(b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n) =$$
$$= c_0 + c_1x + \dots + c_{2n}x^{2n} = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n + x^n.o(1)$$
$$(x \to 0).$$

Do đó

$$f(x)g(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n + x^n.o(1) \qquad (x \to 0).$$

Áp dụng. Ta có

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2.o(1),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3.o(1) \qquad (x \to 0).$$

Do đó

$$\sqrt{1 + x}\cos x = 1 + \frac{x}{2} - \frac{5}{8}x^2 + x^2.o(1) \quad (x \to 0).$$

62. Ta có

$$f(x) - x^n.o(1) = [g(x) - x^n.o(1)]S(x) + x^{n+1}R(x),$$
$$f(x) = g(x)S(x) + x^n[o(1) - S(x).o(1) + xR(x)] \qquad (x \to 0),$$

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = S(x) + x^n \dfrac{o(1)}{g(x)}$. Vì $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = b_0 \neq 0$ nên

$$\frac{f(x)}{g(x)} = c_o + c_1x + \dots + c_nx^n + x^n.o(1) \quad (x \to 0).$$

Áp dụng. Vì $x \mapsto \text{tg}x$ là một hàm số lẻ nên chỉ cần viết khai triển bậc 5 của hàm số (xem bài tập 59). Ta có

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^6.o(1),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5.o(1) \qquad (x \to 0).$$

$$\begin{array}{rl|l}
 & x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} & 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} \\ \cline{3-3}
- & x - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^5}{24} & x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15}. \\ \cline{1-2}
 & \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{30} & \\
- & \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{6} & \\ \cline{1-2}
 & \dfrac{2x^5}{15} &
\end{array}$$

(Ta đã không viết các số hạng có bậc lớn hơn 5 trong các phần dư của phép chia).

Vậy

$$\text{tg}x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^6.o(1) \qquad (x \to 0).$$

63. a) Trước hết ta tìm công thức khai triển của một hàm số hợp. Giả sử

$$f(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + x^n.o(1) \qquad (x \to 0)$$

là khai triển bậc n của hàm số f trên một lân cận của điểm 0, g là một hàm số xác định trên một lân cận của điểm 0 và $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.

Khi đó hàm số hợp fog xác định trên một lân cận của 0. Giả sử

$$g(x) = b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n + x^n.o(1) \qquad (x \to 0)$$

là khai triển bậc n của g trên một lân cận của 0.

Khi đó

$f(g(x)) = a_0 + a_1g(x) + a_2g^2(x) + \ldots + a_ng^n(x) + g^n(x).o(1)$ $(x \to 0)$.

Vì

$g(x) = x(b_1 + b_2x + \ldots + b_nx^{n-1} + x^{n-1}.o(1)) = x.O(1)$ $(x \to 0)$,

trong đó O(1) là một hàm số bị chặn trên một lân cận của 0 nên

$$g^n(x).o(1) = x^nO(1).o(1) = x^n.o(1) \qquad (x \to 0).$$

Vì vậy muốn tìm công thức khai triển bậc n của fog, chỉ cần tìm công thức khai triển bậc n của hàm số

$x \longmapsto a_0 + a_1g(x) + \ldots + a_ng^n(x)$ trên một lân cận của 0.

b) Ta có

$\sqrt{\cos x} = \sqrt{1 + (\cos x - 1)}$. Đặt $t = \cos x - 1$, ta có $\lim\limits_{x \to 0} t = 0$ và

$$\sqrt{\cos x} = \sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + t^2.o(1) \qquad (t \to 0)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2.o(1) \qquad (x \to 0),$$

$$\frac{t}{2} = \frac{1}{2}(\cos x - 1) = -\frac{x^2}{4} + x^2.o(1)$$

$$t^2 = (\cos x - 1)^2 = \left(-\frac{x^2}{2} + x^2.o(1)\right)^2 = x^2.o(1) \qquad (x \to 0).$$

Do đó

$$\sqrt{\cos x} = 1 - \frac{x^2}{4} + x^2.o(1) \qquad (x \to 0).$$

64. Theo định lí Taylo – Iang, ta có

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n.o(1) \quad (x \to 0).$$

Do tính duy nhất của khai triển (xem bài tập 58), ta có

$$a_0 = f(0),\ a_1 = \frac{f'(0)}{1}, \ldots, a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \ldots, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Vì f' có đạo hàm mọi cấp trên một lân cận của 0 nên f' có khai triển bậc n − 1 trên một lân cận của 0. Giả sử

$$f'(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_{n-1}x^{n-1} + x^{n-1}.o(1) \quad (x \to 0).$$

Khi đó

$$b_k = \frac{f'^{(k)}(0)}{k!} = \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} = \frac{(k+1)!a_{k+1}}{k!} = (k+1)a_{k+1},$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Do đó

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + x^{n-1}.o(1) \quad (x \to 0)$$

65. Trong bài toán 57, nếu thay đổi vai trò của f và f', ta sẽ được mệnh đề sau :

Nếu f là một hàm số có đạo hàm mọi cấp trên một lân cận của điểm 0 thì khai triển bậc n + 1 của một nguyên hàm của f nhận được nhờ lấy nguyên hàm từng số hạng của khai triển bậc n của f không kể số hạng hằng số (Số hạng hằng được xác định trong các trường hợp cụ thể. Chú ý rằng hàm số f có vô số nguyên hàm).

Trở lại bài toán đang xét, ta có $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$. Ta biết rằng $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^nx^n + x^n.o(1) \quad (x \to 0).$

Do đó

$$\ln(1+x) = \lambda + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}.o(1)$$

$(x \to 0)$.

Vì $\ln(1 + x) = 0$ với $x = 0$ nên $\lambda = 0$. Vậy

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n.o(1) \ (x \to 0).$$

66. Ta có

$$(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n+1}.o(1) \ (x \to 0).$$

Vì $\mathrm{arctg}0 = 0$ nên

$$\mathrm{arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}.o(1)$$

$(x \to 0)$.

67. Ta có $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \cdots +$$

$$+ \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}x^{2n} + x^{2n+1}.o(1) \qquad (x \to 0).$$

Vì $\arcsin 0 = 0$ nên

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}.o(1)$$

$x \to 0)$.

68. Ta có $f'(x) = b + cte^{tx}$

$$f(x + h) - f(x) = a + b(x + h) + ce^{t(x+h)} - (a + bx + ce^{tx}) =$$

$$= bh + ce^{tx}(e^{th} - 1)$$

Theo định lí về số gia hữu hạn, tồn tại $\theta \in (0, 1)$ sao cho

Do đó

$$bh + ce^{tx}(e^{th} - 1) = h(b + cte^{t(x+\theta h)})$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{th} - 1 = hte^{\theta th} \qquad (1).$$

θ không phụ thuộc vào x. Vì hàm số $x \mapsto e^x$ là tăng nghiêm ngặt trên $\mathbf{R}$ nên θ là duy nhất.

b) Từ (1) suy ra :

$$e^{\theta th} = \frac{e^{th} - 1}{ht} \; ; \; \theta = \frac{1}{th}\ln\left(\frac{e^{th} - 1}{th}\right).$$

$$e^{th} - 1 = th + \frac{t^2h^2}{2} + \frac{t^3h^3}{6} + \frac{t^4h^4}{24} + h^4.o(1) \quad (h \to 0).$$

$$\frac{e^{th} - 1}{th} = 1 + \frac{th}{2} + \frac{t^2h^2}{6} + \frac{t^3h^3}{24} + h^3.o(1).$$

$$\ln\left(\frac{e^{th} - 1}{th}\right) = \frac{th}{2} + \frac{t^2h^2}{6} + \frac{t^3h^3}{24} + h^3.o(1) -$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{th}{2} + \frac{t^2h^2}{6} + \frac{t^3h^3}{24} + h^3.o(1)\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{th}{2} + \frac{t^2h^2}{6} + \frac{t^3h^3}{24} + h^3.o(1)\right)^3 + h^3.o(1)$$

$$= \frac{th}{2} + \frac{t^2h^2}{24} + h^3.o(1) \quad (h \to 0).$$

$$\theta = \frac{1}{2} + \frac{th}{24} + h^2.o(1) \qquad (h \to 0).$$

69. Đặt $t = x - a$, ta có

$$\ln x = \ln(a + t) = \ln a + \ln\left(1 + \frac{t}{a}\right)$$

$$= \ln a + \frac{t}{a} - \frac{t^2}{2a^2} + t^2.o(1) \quad (t \to 0)$$

Do đó

$$\ln x = \ln a + \frac{x-a}{a} - \frac{(x-a)^2}{2a^2} + (x-a)^2.o(1) \quad (x \to a).$$

70. Ta có $\sqrt{\cos x} = \sqrt{1 + (\cos x - 1)}$,

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4.o(1) \qquad (x \to 0).$$

Đặt $y = \cos x - 1$,

$$\sqrt{\cos x} = (1+y)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + y^2.o(1) \ (y \to 0).$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4.o(1)\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4.o(1)\right)^2 + x^4.o(1)$$

$$\sqrt{\cos x} = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + x^4.o(1) \qquad (x \to 0),$$

$$x + \sqrt{\cos x} = 1 + x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + x^4.o(1) \qquad (x \to 0).$$

Đặt $t = x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + x^4.o(1)$, ta được

$$\ln(x + \sqrt{\cos x}) = \ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + t^4.o(1) \ (t \to 0).$$

$$\ln(x + \sqrt{\cos x}) = x - \frac{3x^2}{4} + \frac{7x^3}{12} - \frac{13x^4}{24} + x^4.o(1) \ (x \to 0).$$

71. Ta có

$$\ln(a+x) = \ln a + \ln\left(1 + \frac{x}{a}\right) = \ln a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + x^2.o(1),$$

$$b\sqrt{a+x} = b\sqrt{a}\left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = b\sqrt{a}\left(1 + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{8a^2}\right) + x^2.o(1)$$

$(x \to 0)$.

Do đó

$$\ln(a+x) + b\sqrt{a+x} = \ln a + b\sqrt{a} + \frac{b\sqrt{a}+2}{2a}x - \frac{b\sqrt{a}+4}{8a^2}x^2 + x^2.o(1)$$

$(x \to 0)$.

Hàm số f là một vô cùng bé có bậc cao nhất khi $x \to 0$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \ln a + b\sqrt{a} = 0 \\ b\sqrt{a} + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad a = e^2,\ b = -\frac{2}{e}.$$

Khi đó phần chính của vô cùng bé là : $-\dfrac{x^2}{4e^4}$ $(x \to 0)$.

72. Khi $x \to 0$, $\dfrac{1}{\text{tg}x} \to \pm\infty$. Do đó hàm số $x \mapsto \dfrac{1}{\text{tg}x}$ không có khai triển trên một lân cận của 0. Tuy nhiên $x\cdot\dfrac{1}{\text{tg}x} \to 1$. Vì vậy có thể khai triển $\dfrac{x}{\text{tg}x}$ trên một lân cận của 0. Ta có

$$\frac{1}{\text{tg}x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + x^4.o(1)}{x - \dfrac{x^3}{6} + x^4.o(1)},$$

$$\frac{x}{\text{tg}x} = \frac{x - \dfrac{x^3}{2} + x^4.o(1)}{x - \dfrac{x^3}{6} + x^4.o(1)} = \frac{1 - \dfrac{x^2}{2} + x^3.o(1)}{1 - \dfrac{x^2}{6} + x^3.o(1)},$$

$$\frac{x}{\text{tg}x} = 1 - \frac{x^2}{3} + x^3.o(1) \qquad (x \to 0).$$

Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.

73. Đặt $t = \dfrac{1}{x}$, ta được

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} + 1} = \frac{1}{t}(1 + t + t^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (t \to 0),$$

$$(1 + t + t^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{t}{2} + \frac{3}{8}t^2 + t^2.o(1) \qquad (t \to 0).$$

Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.

74. a) Khi $x \to 0$,

$$\sqrt{x^2+4} = 2\left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 2 + \frac{x^2}{4} + x^2.o(1),$$

$$x + 2 + \sqrt{x^2 + 4} = 4 + x + \frac{x^2}{4} + x^2.o(1),$$

$$\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2+\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{2} - \frac{x}{8} + \frac{x^2}{16} + x^2.o(1),$$

$$f(x) = -\frac{x}{8} + \frac{x^2}{16} + x^2.o(1) \ (x \to 0).$$

Phần chính của vô cùng bé f khi $x \to 0$ là : $-\frac{x}{8}$.

Đặt $t = \frac{1}{x}$. Khi $x \to +\infty$, $t \to 0^+$,

$$\sqrt{x^2+4} = \frac{1}{t}(1 + 4t^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{t}(1 + 2t^2 + t^2.o(1)),$$

$$x + 2 + \sqrt{x^2+4} = \frac{2}{t}(1 + t + t^2 + t^2.o(1)),$$

$$\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2+\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{2} - \frac{t}{2} + t^2 + t^2.o(1) \qquad (t \to 0),$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}.o(1) \qquad (x \to +\infty),$$

$$f(x) = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}.o(1) \ (x \to +\infty).$$

Phần chính của vô cùng bé là : $-\frac{1}{2x}$ $(x \to +\infty)$.

Tương tự khi $x \to -\infty$.

$$f(x) = -\frac{x}{2} - 1 - \frac{3}{2x} + \frac{1}{x}.o(1).$$

Vô cùng lớn chính là : $-\frac{x}{2}$. $(x \to -\infty)$.

75. b) Đặt $t = \frac{1}{x}$. Khi $x \to \pm\ \infty$, $t \to 0$,

$$\frac{1}{1+x} = t.\frac{1}{1+t} = t(1 - t + t^2 + t^2.o(1)$$

$$= t - t^2 + t^3 + t^3.o(1) \ (t \to 0).$$

Đặt $y = t - t^2 + t^3 + t^3.o(1,)$ ta được

$$\text{arc tg}\frac{1}{1+x} = \text{arctg} y = y - \frac{y^3}{3} + y^2.o(1).\ (y \to 0).$$

$$= t - t^2 + \frac{2}{3}t^3 + t^3.o(1) \qquad (t \to 0).$$

Do đó

$$x^2\text{arctg}\frac{1}{1+x} = x - 1 + \frac{2}{3x} + \frac{1}{x}.o(1) \ (x \to \pm\infty).$$

Đường thẳng $y = x - 1$ là tiệm cận của đồ thị. Đồ thị nằm về phía trên của tiệm cận khi $x \to +\infty$ và nằm về phía dưới của tiệm cận khi $x \to -\infty$.

76. a) Ta có $\frac{1}{1-ax^2} \sim 1 + ax^2$ $(x \to 0)$, $e^{bx^2} \sim 1 + bx^2$ $(x \to 0)$. Nếu $a \neq b$ thì $l = \lim\limits_{x\to 0} (a-b)x^2 . \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = a - b$. Ta vẫn có kết quả này nếu $a = b$.

b) Vì f là một hàm số chẵn nên chỉ cần viết công thức khai triển bậc 2 của f trên một lân cận của 0. Ta có

$$\frac{1}{1-ax^2} = 1 + ax^2 + a^2x^4 + x^5.o(1),$$

$$e^{bx^2} = 1 + bx^2 + \frac{b^2x^4}{2} + x^5.o(1),$$

$$\frac{1}{1-ax^2} - e^{bx^2} = (a-b)x^2 + \left(a^2 - \frac{b^2}{2}\right)x^4 + x^5.o(1) \quad (x \to 0)$$

$$\cot g^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x},$$

$$\cos 2x = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6 + x^7.o(1),$$

$$1 + \cos 2x = 2 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6 + x^7.o(1),$$

$$1 - \cos 2x = 2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{45}x^6 + x^7.o(1)$$

$$\cot g^2 x = \frac{1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{4}{45}x^6 + x^7.o(1)}{x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45}x^6 + x^7.o(1)},$$

$$x^2\cot g^2 x = \frac{x^2 - x^4 + \frac{x^6}{3} + x^7.o(1)}{x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45}x^6 + x^7.o(1)} = \frac{1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + x^5.o(1)}{1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2}{45}x^4 + x^5.o(1)},$$

$$
\begin{array}{l|l}
1 - x^2 + \dfrac{x^4}{3} & 1 - \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{2}{45}x^4 \\
\cline{2-2}
1 - \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{2}{45}x^4 & 1 - \dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{1}{15}x^4 \\
\cline{1-1}
-\dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{13}{45}x^4 & \\
-\dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{2}{9}x^4 & \\
\cline{1-1}
\dfrac{1}{15}x^4 &
\end{array}
$$

$$x^2\cot g^2 x = 1 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{15}x^4 + x^5.o(1),$$

$$\cot g^2 x = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{15}x^2 + x^3.o(1) \ (x \to 0). \text{ Do đó}$$

$$f(x) = \left[(a - b)x^2 + \left(a^2 - \frac{b^2}{2}\right)x^4 + x^5.o(1)\right]\left[\frac{1}{x^2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{15}x^2 + x^3.o(1)\right]$$

$$= (a - b) + \left[a^2 - \frac{b^2}{2} - \frac{2}{3}(a - b)\right]x^2 + x^3.o(1) \ (x \to 0).$$

c) Khai triển trên không chứa số hạng có bậc hai khi và chỉ khi $a^2 - \dfrac{b^2}{2} - \dfrac{2}{3}(a - b) = 0$. Tập hợp các điểm (a, b) đó là hipebôn

$$\frac{\left(b - \dfrac{2}{3}\right)^2}{\dfrac{2}{9}} - \frac{\left(a - \dfrac{1}{3}\right)^2}{\dfrac{1}{9}} = 1.$$

77. Với mọi $x > 0$,

$$\Phi(x) = \int_x^{x+1}\left(at + b + \frac{c}{t} + \frac{r(t)}{t}\right)dt$$

$$= ax + \frac{a}{2} + b + c\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \int_x^{x+1} \frac{r(t)}{t}\,dt,$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2}\cdot o(1) \quad (x \to +\infty).$$

Theo định lí mở rộng về giá trị trung bình của tích phân, tồn tại $\theta \in [0, 1]$ sao cho

$$\int_x^{x+1} \frac{r(t)}{t}\,dt = r(x + \theta)\int_x^{x+1} \frac{dt}{t} = r(x + \theta)\cdot\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$= r(x + \theta)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2}\cdot o(1)\right) \quad (x \to +\infty).$$

Do đó

$$\Phi(x) = ax + \frac{a}{2} + b + \frac{c}{x} + \frac{1}{x}\left[-\frac{c}{2x} + \frac{1}{x}\cdot o(1) + \right.$$

$$\left. + r(x + \theta)\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\cdot o(1)\right)\right] \quad (x \to +\infty)$$

Ta có đẳng thức nêu trong đề bài với $\alpha = a$, $\beta = \frac{a}{2} + b$, $\gamma = c$.

78. Ta có $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{(x + \sin x)(x - \sin x)}{x^2\sin^2 x}$.

Vì $x + \sin x \sim 2x$, $x - \sin x = \frac{x^3}{6} + x^3.o(1) \sim \frac{x^3}{6}$ khi $x \to 0$

nên $f(x) \sim \frac{2x\,.\,x^3/6}{x^2\,.\,x^2} = \frac{1}{3}$ $(x \to 0)$. Vậy $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{3}$.

79. Đặt $x = 1 + t$, ta có

$$\sqrt{2x - x^4} = \sqrt{2(1 + t) - (1 + t)^4} = \sqrt{2 + 2t - (1 + 4t + t.o(1))} =$$

$$= (1 - 2t + t.o(1))^{\frac{1}{2}} = 1 - t + t.o(1) \quad (t \to 0),$$

$$\sqrt[3]{x} = (1+t)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{t}{3} + t.o(1) \ (t \to 0)$$

$$\sqrt{2x - x^4} - \sqrt[3]{x} = -\frac{4}{3}t + t.o(1) \ (t \to 0)$$

$$1 - \sqrt[4]{x^3} = 1 - (1+t)^{\frac{3}{4}} = -\frac{3}{4}t + t.o(1) \ (t \to 0)$$

Do đó

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x - x^4} - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[4]{x^3}} \sim \frac{-\frac{4}{3}t}{-\frac{3}{4}t} = \frac{16}{9} \ (t \to 0). \text{ Vậy } \lim_{x \to 1} f(x) = \frac{16}{9}.$$

80. a) 32/27 ; b) 0.

81. a) $+\infty$; b) -1 ; c) 0.

a) Đặt $\alpha = x - \frac{\pi}{4}$, $t = \text{tg}\alpha$, ta được

$$\text{tg}x = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}\alpha} = (1+t)(1-t)^{-1} =$$
$$= (1+t)(1 + t + t.o(1)) =$$
$$= 1 + 2t + t.o(1) \qquad (t \to 0)$$

$$\ln \text{tg}x = \ln(1 + 2t + t.o(1)) = 2t + t.o(1) \quad (t \to 0),$$

$$f(x) = \frac{\ln \text{tg}x - \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\text{tg}^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2t + t.o(1) - t}{t^3} \sim \frac{1}{t^2} \ (t \to 0).$$ Do

đó $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = +\infty$.

82. a) $\frac{9}{2}$; b) 1.

84. a) Áp dụng quy tắc Lôpitan liên tiếp hai lần, ta được giới hạn cần tìm bằng $\frac{n(n+1)}{2}$.

b) Ta có $P_n(x) = (1 + x + x^2 + ... + x^n)'$

$$= \left(\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}\right)' = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} \quad \text{với } x \neq 1$$

$$P_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Bằng cách xét sự biến thiên của hàm số $f(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$, từ đó dễ dàng suy ra điều cần chứng minh.

95. a) $S = \int_0^{\pi} (x + \sin^2 x - x)dx = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}.$

b) $x^2(a^2 - x^2) \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq a$. Vì đồ thị của hàm số đã cho đối xứng qua các trục tọa độ nên

$$S = 4\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = -2\int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} d(a^2 - x^2)$$

$$= \frac{4}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^0 = \frac{4}{3}a^3.$$

c) $S = \int_{0,1}^{10} |\lg x| dx = -\int_{0,1}^{1} \lg x dx + \int_1^{10} \lg x dx$

$$= \lg e\left[-\int_{0,1}^{1} \ln x dx + \int_1^{10} \ln x dx\right] = 9{,}9 - 8{,}1\lg e.$$

d) Ta chọn y làm biến số. Hình phẳng giới hạn bởi các đường

$$x = -1 + \sqrt{y}, \quad x = \sin\pi y, \; 0 \leq y \leq 1.$$

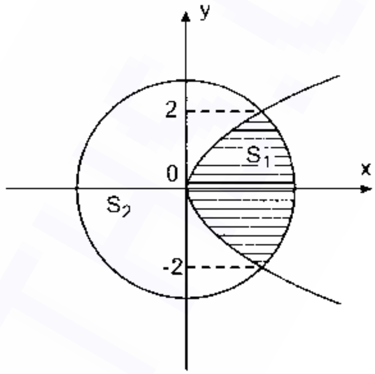
Diện tích hình phẳng là

$$S = \int_0^1 \left[\sin\pi y - (-1 + \sqrt{y})\right]dy = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{3}.$$

96. Parabôn cắt đường tròn tại hai điểm (2, −2) và (2, 2). Parabôn chia hình tròn thành hai phần. Gọi S_1 là phần hình tròn nằm bên phải và S_2 là phần hình tròn nằm bên trái. Diện tích S_1 là

$$S_1 = \int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8 - y^2} - \frac{y^2}{2}\right)dy = 2\pi + \frac{4}{3}.$$

Diện tích hình tròn là : $S = 8\pi$. Diện tích S_2 là : $S - S_1 = 6\pi - \frac{4}{3}$. Tỉ số các diện tích hai phần hình tròn do parabôn chia ra là : $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{9\pi - 2}$.



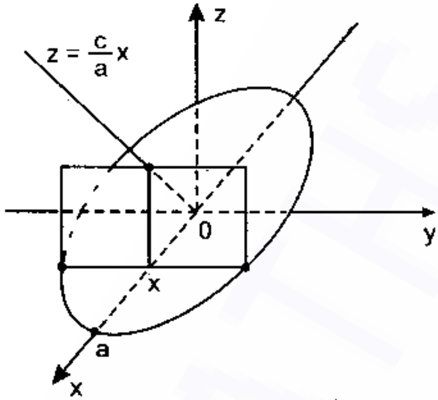
Hình 32

97. a) Vật thể nằm trong góc tam diện vuông $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt $z = \sqrt{1 - x - y}$. Thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Oz tại điểm $(0, 0, z)$ $(0 \leqslant z \leqslant 1)$ là một tam giác vuông cân mà độ dài cạnh góc vuông là $1 - z^2$. Diện tích thiết diện đó là $S(z) = \frac{1}{2}(1 - z^2)^2$. Thể tích vật thể là

$$V = \int_0^1 S(z)dz = \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - 2z^2 + z^4)dz = \frac{4}{15}.$$

b) Vật thể giới hạn bởi mặt trụ đứng có đường chuẩn là elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ trong mặt phẳng Oxy, mặt phẳng đi qua trục Oy và đường thẳng $z = \frac{c}{a}x$ trong mặt phẳng Oxz và mặt phẳng Oxy. Vật thể đối xứng qua trục Oy.

Xét phần vật thể nằm về phía trên mặt phẳng. Thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm $(x, 0, 0)$ là hình chữ nhật mà độ dài hai cạnh là $2y$ và z,



Hình 33

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\ ,\ z = \frac{c}{a}x.$$

Diện tích thiết diện đó là

$$S(x) = 2yz = \frac{2bc}{a}x\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Thể tích vật thể là

$$V = 2\int_0^a S(x)dx = \frac{4bc}{a}\int_0^a x\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx,$$

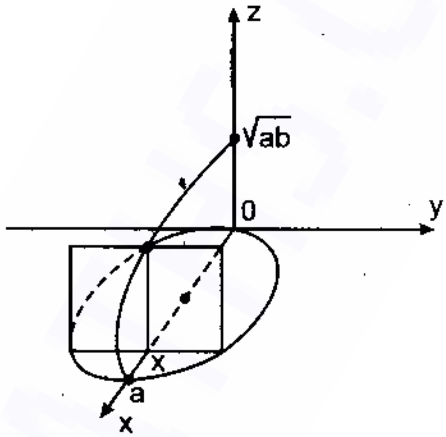
$$V = -2abc\int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{4}{3}abc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^0,$$

$$V = \frac{4}{3}abc.$$

c) Vật thể giới hạn bởi

- Mặt trụ tròn xoay mà đường chuẩn là đường tròn $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^4}{4}$ trong mặt phẳng Oxy,

• Mặt trụ đứng mà đường chuẩn là parabôn $x = a - \frac{z^2}{b}$. Vật thể đối xứng qua mặt phẳng Oxy. Xét phần vật thể nằm về phía trên mặt phẳng Oxy ($0 \leqslant z \leqslant \sqrt{ab}$). Thiết diện của phần này cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm (x, 0, 0) là hình chữ nhật mà độ dài hai cạnh là 2y và z,



Hình 34

$$y = \sqrt{ax - x^2}\ ,\ z = \sqrt{b(a - x)}\ .$$

Diện tích thiết diện đó là : $S(x) = 2yz = 2\sqrt{bx}(a - x)$.

Thể tích vật thể là

$$V = 4\int_0^a (a - x)\sqrt{bx}dx = 4\sqrt{b}\int_0^a (ax^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}})\,dx,$$

$$V = \frac{16}{15}a^2\sqrt{ab}.$$

98. Giả sử $\{\Pi_n\}$ là một dãy chuẩn tắc bất kì những phép phân hoạch đoạn [a, b]

$$a = x_o < x_1 < \ .\ .\ .\ < x_{p_n} = b.$$

Gọi A_i là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = y(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, $i = 1, ..., p_n$.

Đặt $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} y(x)$, , $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} y(x)$,

Hình phẳng A_i chứa trong hình chữ nhật có cạnh là đoạn thẳng $x_{i-1}x_i$ và đường cao M_i và chứa hình chữ nhật có cạnh

$x_{i-1}x_i$ và đường cao m_i. Cho hình phẳng quay quanh trục Oy. Khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng A_i chứa trong khối tròn xoay V_i và chứa khối tròn xoay v_i sinh bởi hai hình chữ nhật đã nêu. Thể tích V_i của khối tròn xoay V_i bằng hiệu các thể tích của hai hình trụ tròn xoay :

$$V_i = \pi x_i^2 M_i - \pi x_{i-1}^2 M_i = \pi M_i(x_i + x_{i-1})\Delta x_i \leqslant 2\pi M_i x_i \Delta x_i.$$

Tương tự thể tích của khối tròn xoay v_i là :

$$v_i = \pi m_i (x_i + x_{i-1}) \Delta x_i \geqslant 2\pi m_i x_{i-1} \Delta x_i, \ i = 1, \ldots, p_n.$$

Khối tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng đã cho chứa trong $\bigcup\limits_{i=1}^{p_n} V_i$ và chứa $\bigcup\limits_{i=1}^{p_n} v_i$. Thể tích của các vật thể $\bigcup\limits_{i=1}^{p_n} V_i$ và $\bigcup\limits_{i=1}^{p_n} v_i$, theo thứ tự, là

$$\sum_{i=1}^{p_n} V_i = \pi \sum_{i=1}^{p_n} M_i(x_i + x_{i-1})\Delta x_i \leqslant 2\pi \sum_{i=1}^{p_n} M_i x_i \Delta x_i, \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{p_n} v_i = \pi \sum_{i=1}^{p_n} m_i(x_i + x_{i-1})\Delta x_i \geqslant 2\pi \sum_{i=1}^{p_n} m_i x_{i-1} \Delta x_i. \qquad (2)$$

Các tổng ở vế phải của (1) và (2) là tổng Đácbu trên và dưới của hàm số $x \longmapsto 2\pi x y(x)$ trên đoạn [a, b] ứng với phép phân hoạch Π_i.

Vì hàm số $x \longmapsto 2\pi x y(x)$ khả tích trên [a, b] nên hai dãy tổng Đácbu của nó ứng với dãy $\{\pi_n\}$ đều hội tụ đến $2\pi \int\limits_a^b xy(x)dx$. Do đó

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{p_n} V_i \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{p_n} v_i \right) = 2\pi \int_a^b xy(x)dx.$$

Vậy khối tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng đã cho quay quanh trục Oy là đo được (theo nghĩa Gioócđan) và thể tích của nó là :

$$V = 2\pi \int_a^b xy(x)dx.$$

99. $$S = 2\pi \int_0^a y(x)\sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx \qquad (1).$$

$2yy' = 2p \Rightarrow y' = \dfrac{p}{y}$; $y'^2 = \dfrac{p^2}{2px} = \dfrac{p}{2x}$. Thay vào (1), ta được

$$S = 2\pi \int_0^a \sqrt{2px}\sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\,dx = 2\pi\sqrt{p}\int_0^a \sqrt{2x + p}\,dx,$$

$$S = \frac{2\pi}{3}\left[(2a + p)\sqrt{p^2 + 2pa} - p^2\right].$$

100. $$S = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}x\sqrt{1 + \frac{1}{\cos^4 x}}\,dx = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}x\sqrt{1 + (1 + \mathrm{tg}^2x)^2}dx =$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1 + (1 + \mathrm{tg}^2x)^2}}{1 + \mathrm{tg}^2x}d(1 + \mathrm{tg}^2x).$$

Đổi biến số $u = 1 + \mathrm{tg}^2x$, ta được

$$S = \pi\int_1^2 \frac{\sqrt{1 + u^2}}{u}du = \pi\int_1^2 \frac{1 + u^2}{u\sqrt{1 + u^2}}du,$$

$$S = \pi\int_1^2 \frac{udu}{\sqrt{1 + u^2}} + \pi\int_1^2 \frac{du}{u\sqrt{1 + u^2}} \qquad (1)$$

$$\int_1^2 \frac{udu}{\sqrt{1 + u^2}} = \sqrt{1 + u^2}\,\Big|_1^2 = \sqrt{5} - \sqrt{2} \qquad (2)$$

$$\int_1^2 \frac{du}{u\sqrt{1 + u^2}} = -\int_1^2 \frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{u^2}}} = \ln\left(\frac{1}{u} + \sqrt{1 + \frac{1}{u^2}}\right)\Big|_2^1 =$$

$$= \ln\frac{(1+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)}{2} \qquad (3).$$

Thay (2) và (3) vào (1), ta được

$$S = \pi\left[\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln\frac{(1+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)}{2}\right].$$

BÀI TẬP CHƯƠNG V VÀ LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

KHÔNG GIAN R^p. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN KHÔNG GIAN R^p

1. Giả sử T là một tập hợp, B(T) là tập hợp các hàm số thực bị chặn trên T.

a) Chứng minh rằng B(T) là một không gian tuyến tính với phép cộng và phép nhân vô hướng xác định như sau :

Nếu $x, y \in B(T)$ và $\lambda \in \mathbf{R}$ thì

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t),$$

$$(\lambda x)(t) = \lambda x(t), \ t \in T.$$

(Người ta nói rằng hai phép toán nói trên được xác định một cách thông thường).

b) Chứng minh rằng

$$B(T) \ni x \mapsto \|x\| = \sup_{t \in T}|x(t)|$$

là một chuẩn trên B(T).

2. Gọi C[a, b] là tập hợp các hàm số thực liên tục trên đoạn [a, b]. Chứng minh rằng

a) C[a, b] là một không gian tuyến tính với phép cộng và phép nhân vô hướng xác định một cách thông thường,

b) Hàm số $\| \| : C[a, b] \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \sup_{t \in [a, b]} |x(t)|$$

là một chuẩn trên C[a, b].

3. Gọi E là tập hợp các hàm số thực liên tục trên [a, b]. Chứng minh rằng hàm số

$$\| \| : E \to \mathbf{R}$$

$$x \mapsto \|x\| = \int_a^b |x(t)|\,dt$$

là một chuẩn trên E.

4. Chứng minh rằng

a) Hàm số

$$\rho(x, y) = |\mathrm{arctg}x - \mathrm{arctg}y|, \quad x, y \in \mathbf{R}$$

là một mêtric trên $\mathbf{R}$,

b) Hàm số

$$d(x, y) = \left| \ln\left(\frac{x}{y}\right) \right|, \quad x, y \in \mathbf{R},\ x, y > 0$$

là một mêtric trên $(0, +\infty)$.

5. Cho không gian mêtric (X, ρ). Chứng minh rằng hàm số

$$d(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}, \qquad x, y \in X$$

là một mêtric trên X.

6. Cho không gian mêtric (X, ρ).

a) Chứng minh rằng hàm số

$$d(x, y) = \min\{\rho(x, y), 1\}, \qquad x, y \in X$$

là một mêtric trên X.

b) Chứng minh rằng tập hợp con U của X là mở đối với mêtric ρ khi và chỉ khi nó là mở đối với mêtric d.

7. Giả sử X là một tập hợp và ρ là hàm số xác định trên $X \times X$ bởi

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \neq y. \\ 0 & \text{nếu } x = y. \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng ρ là một mêtric.

Cặp (X, ρ), trong đó X là một tập hợp, ρ là mêtric xác định như trên gọi là một không gian mêtric rời rạc).

b) Chứng minh rằng trong một không gian mêtric rời rạc, mọi tập hợp đều vừa mở vừa đóng.

8. Giả sử a là một số thực. Chứng minh rằng

$$G_1 = \{x = (\xi_1, \ldots, \xi_p) \in \mathbf{R}^p \mid \xi_1 > a\}$$

là một tập hợp mở trong $\mathbf{R}^p$

9. Cho $a_1, \ldots, a_p \in \mathbf{R}$. Chứng minh rằng tập hợp

$$G = \{x = (\xi_1, \ldots, \xi_p) \in \mathbf{R}^p \mid \xi_i > a_i,\ i = 1, \ldots, p\}$$

là mở trong $\mathbf{R}^p$.

10. Cho $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p \in \mathbf{R}$, $a_i < b_i$, $i = 1, \ldots, p$. Chứng minh rằng

$$U = \{x = (\xi_1, \ldots, \xi_p) \in \mathbf{R}^p \mid a_i < \xi_i < b_i,\ i = 1, \ldots, p\}$$

là một tập hợp mở trong $\mathbf{R}^p$.

11. Cho $a \in \mathbf{R}^p$. Chứng minh rằng

$$F_1 = \{x = (\xi_1, \ldots, \xi_p) \in \mathbf{R}^p \mid \xi_1 \geqslant a\}$$

là một tập hợp đóng trong $\mathbf{R}^p$.

12. Cho $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p \in \mathbf{R}$, $a_i < b_i$, $i = 1, \ldots, p$. Chứng minh rằng

$$F = \{x = (\xi_1, \ldots, \xi_p) \in \mathbf{R}^p \mid a_i \leqslant \xi_i \leqslant b_i,\ i = 1, \ldots, p\}$$

là một tập hợp đóng trong $\mathbf{R}^p$.

13. a) Cho dãy khoảng mở $I_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$ trong $\mathbf{R}$. Giao $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ có phải là một tập hợp mở không ?

b) Cho dãy khoảng mở $J_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$,

$J_1 \supset J_2 \supset \ldots \supset J_n \supset \ldots$ Tập hợp $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$ có phải là một tập hợp mở khác rỗng trong **R** không ?

14. a) Tập hợp $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ có phải là một tập hợp đóng trong **R** không ?

b) Tập hợp $B = \left\{n + \frac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\right\}$ có phải là một tập hợp đóng trong **R** không ?

15. Trong không gian **R** cho tập hợp

$$E = \left\{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\right\} \cup \quad [2, 3].$$

Tìm phần trong, bao đóng, biên và tập hợp dẫn xuất của E.

16. Tìm phần trong, bao đóng, biên và tập hợp dẫn xuất của các tập hợp **Z** và **Q** trong **R**.

17. Tìm phần trong, bao đóng, biên và tập hợp dẫn xuất của

a) tập hợp $A = (0, 2] \cup \{3\}$ trong **R**,

b) tập hợp $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, 3) : 0 < x \leq 1\}$ trong $\mathbf{R}^2$.

18. Giả sử A là một tập hợp con của không gian mêtric (X, ρ), $x \in X$. Số thực không âm

$$d = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$$

gọi là khoảng cách từ điểm x đến tập hợp A, kí hiệu là dist (x, A).

a) Chứng minh rằng $d = 0$ khi và chỉ khi $x \in \overline{A}$.

Từ đó suy ra rằng nếu A là một tập hợp đóng trong X thì $d = 0$ khi và chỉ khi $x \in A$.

b) Cho một ví dụ trong đó $x \notin A$ nhưng dist $(x, A) = 0$.

19. Giả sử A, B là hai tập hợp con của không gian mêtric X. Chứng minh rằng

a) nếu $A \subset B$ thì $\overline{A} \subset \overline{B}$.

b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

c) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Trong c) có thể thay dấu $\subset$ bởi dấu $=$ được không ?

20. Giả sử A là một tập hợp, U là một tập hợp mở trong không gian mêtric X. Chứng minh rằng nếu $U \cap A = \varnothing$ thì $U \cap \overline{A} = \varnothing$.

21. Giả sử A là một tập hợp con của không gian mêtric X.

a) Chứng minh rằng nếu $x \in X \setminus A$ thì x là một điểm tụ của A khi và chỉ khi x là một điểm biên của A.

b) Từ đó suy ra rằng $\overline{A} = A \cup A'$, và

A là một tập hợp đóng trong X khi và chỉ khi mọi điểm tụ của A đều là những phần tử của A.

22. Chứng minh rằng tập hợp dẫn xuất A' của tập hợp A trong không gian mêtric X là một tập hợp đóng trong X.

23. Giả sử A và B là hai tập hợp con của không gian mêtric (X, ρ). Số thực không âm

$$d(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \rho(x, y)$$

gọi là khoảng cách giữa hai tập hợp A và B.

Chứng minh rằng nếu F là một tập hợp đóng, K là một tập hợp compắc trong không gian mêtric X và $d(F, K) = 0$ thì $F \cap K \neq \varnothing$. Nếu K chỉ là một tập hợp đóng chứ không phải là một tập hợp compắc thì kết luận trên có còn đúng nữa không ?

24. Trong không gian mêtric (X, ρ) cho hai tập hợp compắc A và B. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm $a \in A$ và $b \in B$ sao cho

$$\rho(a, b) = d(A, B).$$

$d(A, B)$ là khoảng cách giữa hai tập hợp A và B (xem bài tập 23).

25.* Giả sử $\{F_n\}$ là một dãy tập hợp đóng trong không gian $\mathbf{R}^p$ sao cho không có một tập hợp F_n nào chứa một tập hợp mở khác rỗng (Chẳng hạn F_n là một điểm hoặc một đường thẳng trong $\mathbf{R}^2$) và G là một tập hợp mở khác rỗng.

a) Chứng minh rằng nếu $x_1 \in G \setminus F_1$ thì tồn tại một hình cầu đóng $B[x_1, r_1]$, $0 < r_1 < 1$, sao cho $B[x_1, r_1] \subset G$ và $B[x_1, r_1] \cap F_1 = \varnothing$.

b) Chứng minh rằng nếu $x_2 \in B(x_1, r_1) \setminus F_2$ thì tồn tại một hình cầu đóng $B[x_2, r_2]$, $0 < r_2 < \frac{1}{2}$, sao cho $B[x_2, r_2] \subset B(x_1, r_1)$ và $B[x_2, r_2] \cap F_2 = \varnothing$.

c) Tiếp tục quá trình trên, ta được một dãy hình cầu đóng $\{B[x_n, r_n]\}$ có các tính chất sau :

(i) $B[x_1, r_1] \supset B[x_2, r_2] \supset \dots \supset B[x_n, r_n] \supset \dots$,

$$0 < r_n < \frac{1}{n} \text{ với mọi } n.$$

ii) $B[x_n, r_n] \cap F_n = \varnothing$ với mọi n.

Chứng minh rằng tồn tại một điểm $x_o \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B[x_n, r_n]$. Từ đó suy ra rằng $G \not\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

26. Cho $a, b \in \mathbf{R}$, $a^2 + b^2 > 0$. Tập hợp

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : ax + by + c = 0\}$$

gọi là một đường thẳng trong $\mathbf{R}^2$. Chứng minh rằng $\mathbf{R}^2$ không phải là hợp của một họ đếm được đường thẳng.

27. Ta định nghĩa trên tập hợp các số thực $\mathbf{R}$ quan hệ $\mathcal{R}$ như sau :

$$x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{Z}.$$

a) Chứng minh rằng $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương.

b) Gọi C_x là lớp tương đương chứa số thực x. Chứng minh rằng C_x là một tập hợp đóng trong $\mathbf{R}$.

28. Tìm $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \dfrac{x + y}{x^2 - xy + y^2}$.

29. Tìm $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to a}} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$, $a \in \mathbf{R}$.

30. Tìm $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2 + y^2)^{x^2y^2}$.

31. Tìm $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} (x^2 + y^2)\, e^{-(x+y)}$.

32. Tìm các giới hạn lặp sau :

a) $\lim\limits_{y \to 0^+} \left(\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^y}{1 + x^y} \right)$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{x^y}{1 + x^y} \right)$,

b) $\lim\limits_{y \to \infty} \left(\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{xy} \operatorname{tg} \dfrac{xy}{1 + xy} \right)$ và $\lim\limits_{x \to 0} \left(\lim\limits_{y \to \infty} \dfrac{1}{xy} \operatorname{tg} \dfrac{xy}{1 + xy} \right)$,

c) $\lim\limits_{y \to 0^+} \left(\lim\limits_{x \to 1^-} \log_x (x + y) \right)$ và $\lim\limits_{x \to 1^-} \left(\lim\limits_{y \to 0^+} \log_x (x + y) \right)$.

33. Cho hàm số

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}, \qquad x > 0,\ y > 0.$$

Chứng minh rằng

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} f(x, y) \right) = 1, \quad \lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} f(x, y) \right) = -1,$$

nhưng không tồn tại $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$.

34. Cho hàm số

$$f(x, y) = (x + y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}, \quad x > 0,\ y > 0.$$

Chứng minh rằng cả hai giới hạn lặp $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x, y))$ và $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x, y))$ đều không tồn tại nhưng tồn tại $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$.

35.* a) Cho số thực $\alpha > 0$. Tìm tập hợp xác định của hàm số

$$f(x, y) = \frac{x^{\alpha}}{1 - 2y\cos x + y^2}, \quad x > 0,\ y \in \mathbf{R}.$$

b) Với các giá trị nào của α hàm số f có giới hạn tại điểm (0, 1) ?

36. Trong không gian $\mathbf{R}^2$ cho tập hợp $U = \{(x, y) : x > 0\}$.

a) Chứng minh rằng U là một tập hợp mở và hàm số $f : U \to \mathbf{R}$ xác định bởi $f(x, y) = x^y$ liên tục trên U.

b) Chứng minh rằng f không có giới hạn tại điểm (0, 0).

37. Cho hàm số f xác định trên $\mathbf{R}^2$ bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Chứng minh rằng $f(x, y) \to f(0, 0) = 0$ khi (x, y) dần đến (0, 0) theo một đường thẳng bất kì $x = \alpha t$, $y = \beta t$, nhưng f không liên tục tại điểm (0, 0).

38. Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^y}{x - y} & \text{nếu } (x, y) \neq (x, x), \\ e^x & \text{nếu } (x, y) = (x, x) \end{cases}$$

tại điểm (0, 0).

39. Tìm các điểm liên tục của hàm số f xác định trên $\mathbf{R}^2$ bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{nếu } x, y \in \mathbf{Q}, \\ 0 & \text{nếu } x \notin \mathbf{Q} \text{ hoặc } y \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

40. Giả sử $f, g : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ là hai hàm số liên tục tại điểm $a \in \mathbf{R}^p$. Chứng minh rằng các hàm số sau

$$x \mapsto \max \{f(x), g(x)\},$$

$$x \mapsto \min \{f(x), g(x)\}, \ x \in \mathbf{R}^p$$

đều liên tục tại điểm a.

41. Giả sử X là một tập hợp con của không gian $\mathbf{R}^p$, $f : X \to \mathbf{R}$ là một hàm số liên tục tại điểm $x_0 \in X$, $f(x_0) > 0$. Chứng minh rằng tồn tại một lân cận V của điểm x_0 sao cho

$$f(x) > 0 \text{ với mọi } x \in X \cap V.$$

42. Giả sử $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^p$ là một ánh xạ liên tục. Gọi $g_1, g_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^p$ là hai ánh xạ xác định bởi

$$g_1(x) = f(x, 0), \ g_2(x) = f(0, x), \ x \in \mathbf{R}.$$

Chứng minh rằng g_1 và g_2 là những hàm số liên tục trên $\mathbf{R}$.

43. Giả sử f, g_1, g_2 là các ánh xạ được nêu trong bài tập 42. Hãy chứng tỏ rằng từ tính liên tục của g_1 và g_2 tại điểm 0 của $\mathbf{R}$ không suy ra được tính liên tục của f tại điểm (0, 0).

44. Cho hàm số $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Giả sử với mỗi $y \in \mathbf{R}$, hàm số $x \mapsto f(x, y)$ liên tục và tồn tại một số dương K sao cho

$$|f(x, y') - f(x, y'')| \leqslant K|y' - y''|,$$

với mọi $x, y', y'' \in \mathbf{R}$. Chứng minh rằng f liên tục trên $\mathbf{R}^2$.

45. Cho hàm số $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Giả sử f liên tục theo biến số x (tức là với mỗi $y \in \mathbf{R}$, hàm số $x \mapsto f(x, y)$ liên tục trên $\mathbf{R}$) và liên tục theo biến số y đều đối với x (tức là với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$|y - y_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon$$

với mọi $x \in \mathbf{R}$). Chứng minh rằng f liên tục trên $\mathbf{R}^2$.

46. Giả sử f, g : $\mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ là hai ánh xạ liên tục. Chứng minh rằng tập hợp

$$A = \{x \in \mathbf{R}^p : f(x) = g(x)\}$$

là đóng trong $\mathbf{R}^p$.

47. Chứng minh rằng tập hợp các điểm gián đoạn của hàm số f : $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y} & \text{nếu } y \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } y = 0 \end{cases}$$

không phải là một tập hợp đóng cũng không phải là một tập hợp mở trong $\mathbf{R}^2$.

48. Ánh xạ f : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^q$ gọi là tuần hoàn nếu tồn tại một số $p > 0$ sao cho $f(x + p) = f(x)$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Chứng minh rằng một ánh xạ tuần hoàn liên tục thì bị chặn và liên tục đều trên $\mathbf{R}$.

49. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x, y) = 2x - 3y + 5$$

liên tục đều trên $\mathbf{R}^2$.

50. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

liên tục đều trên $\mathbf{R}^2$.

51. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x, y) = \arcsin\frac{x}{y}$$

liên tục trên tập hợp xác định $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ của nó nhưng không liên tục đều trên Ω.

52. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$$

liên tục nhưng không liên tục đều trên $\mathbf{R}^2$.

53. Giả sử $X \subset \mathbf{R}^p$ và $f : X \to \mathbf{R}^q$ là một ánh xạ liên tục đều trên X. Chứng minh rằng nếu $\{x_n\}$ là một dãy Côsi trong X thì $\{f(x_n)\}$ là một dãy Côsi trong $\mathbf{R}^q$.

54. Gọi B là hình cầu mở đơn vị và B_1 là hình cầu đóng đơn vị trong không gian $\mathbf{R}^p$:

$B = B(0, 1) = \{x \in \mathbf{R}^p : \|x\| < 1\}$, $B_1 = B[0, 1] =$ $= \{x \in \mathbf{R}^p : \|x\| \leqslant 1\}$.

a) Chứng minh rằng $\overline{B} = B_1$.

b) Cho ánh xạ $f : B \to \mathbf{R}^q$. Chứng minh rằng tồn tại một ánh xạ liên tục $F : B_1 \to \mathbf{R}^q$ sao cho $F|_B = f$ khi và chỉ khi f liên tục đều trên B.

55. Chứng minh rằng trong một không gian mêtric, mọi dãy Côsi đều bị chặn.

56. Giả sử B là một tập hợp bị chặn trong không gian $\mathbf{R}^p$ và $f : B \to \mathbf{R}^q$ là một ánh xạ liên tục đều trên B. Chứng minh rằng f là bị chặn trên B (tức là f(B) là một tập hợp bị chặn trong $\mathbf{R}^q$).

Hãy chứng tỏ rằng kết luận trên không còn đúng nữa nếu B không phải là một tập hợp bị chặn trong $\mathbf{R}^p$.

57. Giả sử $f : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ là một ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng tồn tại một số dương K sao cho

$$\|f(x)\| \leqslant K \|x\| \text{ với mọi } x \in \mathbf{R}^p.$$

58. Chứng minh rằng ánh xạ tuyến tính $f : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ là liên tục đều trên $\mathbf{R}^p$.

59. Giả sử K là một tập hợp compắc trong không gian $\mathbf{R}^p$ và $f : K \to \mathbf{R}^q$ là một ánh xạ liên tục trên K. Chứng minh rằng tồn tại $x_1 \in K$ và $x_2 \in K$ sao cho

$$\sup_{x \in K} \| f(x)\| = \| f(x_1)\|,$$

$$\inf_{x \in K} \| f(x)\| = \| f(x_2)\|.$$

60. Giả sử $f : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ là một ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng f là một đơn ánh khi và chỉ khi tồn tại một số $m > 0$ sao cho.

$$\|f(x)\| \geqslant m\|x\| \text{ với mọi } x \in \mathbf{R}^p.$$

61. Chứng minh rằng mọi chuẩn trên không gian $\mathbf{R}^p$ đều tương đương.

62. Giả sử X là một tập hợp, $\mathcal{P}(X)$ là họ tất cả các tập hợp con của X, $\mathcal{T}$ là một họ tập hợp con của X, tức là $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{T}$ gọi là một tôpô trên X nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau :

a) $\varnothing \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$,

b) Nếu $U_1 \in \mathcal{T}$ và $U_2 \in \mathcal{T}$ thì $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$,

c) Nếu $\{U_t\}_{t \in T}$ là một họ tập hợp con của X và $U_t \in \mathcal{T}$ với mọi $t \in T$ thì $\bigcup_{t \in T} U_t \in \mathcal{T}$.

Cặp $(X, \mathcal{T})$ gọi là một không gian tôpô. Mỗi tập hợp $U \in \mathcal{T}$ gọi là một tập hợp mở trong X.

Giả sử (X, ρ) là một không gian mêtric. Gọi $\mathcal{T}$ là họ tất cả các tập hợp mở trong X. Chứng minh rằng $\mathcal{T}$ là một tôpô trên X.

(Như vậy các không gian mêtric là những không gian tôpô).

63. Cho $X = \{a, b, c, d\}$ và $\mathcal{T} = \{X, \varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}\}$.

a) Chứng minh rằng $\mathcal{T}$ là một tôpô trên X.

b) Nếu $(X, \mathcal{T})$ là một không gian tôpô thì một tập hợp con F của X gọi là tập hợp đóng nếu phần bù $X \setminus F$ của F là một tập hợp mở. Hãy tìm các tập hợp đóng trong X.

c) Tìm các tập hợp con của X không phải là một tập hợp mở cũng không phải là một tập hợp đóng.

64. Gọi $\mathcal{T}$ là họ các tập hợp con sau đây của $\mathbf{N}$:

$$\varnothing, \ U_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}, \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Chứng minh rằng $(\mathbf{N}, \mathcal{T})$ là một không gian tôpô.

b) Tìm tất cả các tập hợp mở chứa số 5.

BÀI GIẢI VÀ HƯỚNG DẪN

5. Ta kiểm tra tiên đề tam giác. Hàm số $\varphi(t) = \dfrac{t}{1+t}$, $t \geqslant 0$ tăng (nghiêm ngặt) trên $[0, +\infty)$ vì $\varphi'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2} > 0$ với mọi $t \geqslant 0$. Do đó với mọi x, y, z $\in$ X, ta có

$$d(x, z) = \frac{\rho(x, z)}{1+\rho(x, z)} \leqslant \frac{\rho(x, y)+\rho(y, z)}{1+\rho(x, y)+\rho(y, z)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\rho(x, y)}{1+\rho(x, y)} + \frac{\rho(y, z)}{1+\rho(y, z)} =$$

$$= d(x, y) + d(y, z).$$

8. Giả sử $x_o = (\xi_1^o, ..., \xi_p^o) \in G_1$. Khi đó $\xi_1^o > a$. Do đó $r = \xi_1^o - a > 0$. Ta có $B(x_o, r) \subset G_1$. Thật vậy, nếu $x = (\xi_1, ..., \xi_p) \in B(x_o, r)$ thì

$$\|x - x_o\| = \left[(\xi_1 - \xi_1^o)^2 + \cdots + (\xi_p - \xi_p^o)^2\right]^{\frac{1}{2}} < r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\xi_1 - \xi_1^o| < r \Rightarrow \xi_1^o - \xi_1 < \xi_1^o - a \Rightarrow \xi_1 > a \Rightarrow x \in G_1.$$

Vậy x_o là một điểm trong của G_1. Do đó G_1 là một tập hợp mở trong $\mathbf{R}^p$.

9. Đặt $G_i = \{x = (\xi_1, ..., \xi_p) \in \mathbf{R}^p : \xi_i > a_i\}$, i = 1,... p. $G_1, ..., G_p$ là những tập hợp mở trong $\mathbf{R}^p$. Do đó

$$G = \bigcap_{i=1}^{p} G_i$$ là một tập hợp mở trong $\mathbf{R}^p$.

11. Vì $F_1 = \mathbf{R}^p \setminus U_1$, trong đó $U_1 = \{x = (\xi_1, ..., \xi_p) \in \mathbf{R}^p : \xi_1 < a\}$ là một tập hợp mở trong $\mathbf{R}^p$ nên F_1 là một tập hợp đóng trong $\mathbf{R}^p$.

Có thể chứng minh bằng cách khác :

Giả sử $x_n = (\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_p^{(n)})$, $n = 1, 2, \dots$, là một dãy điểm của F_1, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_p^0) \in \mathbf{R}^p$. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_1^{(n)} = \xi_1^0$.
Vì $\xi_1^{(n)} \geqslant a$ với mọi n nên từ đó suy ra $\xi_1^0 \geqslant a$. Do đó $x_0 \in F_1$.
Vậy F_1 là một tập hợp đóng trong $\mathbf{R}^p$.

13. a) Ta có $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$. Do đó $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ không phải là một tập hợp mở trong $\mathbf{R}$.

b) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n = \varnothing$.

14. a) Vì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \notin A$ nên A không phải là một tập hợp đóng.

b) Vì $\mathbf{R} \setminus B$ là một tập hợp mở nên B là một tập hợp đóng trong $\mathbf{R}$.

15. $\overset{\circ}{E} = (2, 3)$; $\overline{E} = \left\{0, 1, \dfrac{1}{2}, \dots, \dfrac{1}{n}, \dots\right\} \cup [2, 3]$;

$\partial E = \left\{2, 3, 0, 1, \dfrac{1}{2}, \dots, \dfrac{1}{n}, \dots\right\}$; $E' = \{0\} \cup [2, 3]$.

16. $\overset{\circ}{\mathbf{Z}} = \varnothing$; $\overline{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}$; $\partial\mathbf{Z} = \mathbf{Z}$; $\mathbf{Z}' = \varnothing$.

$\overset{\circ}{\mathbf{Q}} = \varnothing$, $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$; $\partial\mathbf{Q} = \mathbf{R}$; $\mathbf{Q}' = \mathbf{R}$.

17. a) $\overset{\circ}{A} = (0, 2)$; $\overline{A}$ $[0, 2] \cup \{3\}$; $\partial A = \{0, 2, 3\}$; $A' = [0, 2]$.

b) $\overset{\circ}{B} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$; $\overline{B} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 . x^2 + y^2 \leqslant 1\} \cup \{(x, 3) : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$;

$\partial B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, 3) : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$;

$B' = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\} \cup \{(x, 3) : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

18. a) Nếu $d = 0$ thì tồn tại một dãy phần tử $\{y_n\}$ của A sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x, y_n) = 0$, tức là $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$. Do đó $x \in \overline{A}$.

Đảo lại nếu $x \in \overline{A}$ thì tồn tại một dãy phần tử $\{y_n\}$ của A sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$, tức là $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x, y_n) = 0$. Vì $d \leqslant \rho(x, y_n)$ với mọi n, từ đó suy ra $d = 0$.

c) Trong $\mathbf{R}$ lấy $A = (0, 1)$, $x = 0$. Khi đó $x \notin A$ nhưng $d = \mathrm{dist}(x, A) = 0$.

19. a) Nếu $A \subset B$ thì $A \subset \overline{B}$. Vì $\overline{B}$ là một tập hợp đóng chứa A và $\overline{A}$ là tập hợp đóng nhỏ nhất chứa A nên $\overline{A} \subset \overline{B}$.

b) Vì $A \subset A \cup B$ nên $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$.

Tương tự, ta có $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Do đó $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ (1)

Mặt khác, ta có $A \subset \overline{A}$ và $B \subset \overline{B}$. Do đó $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Vì $\overline{A} \cup \overline{B}$ là một tập hợp đóng nên từ đó suy ra

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra đẳng thức cần chứng minh.

c) Ta có $A \cap B \subset A$. Do đó $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$. Tương tự $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$. Do đó $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Ví dụ sau cho thấy không thể thay dấu $\subset$ bởi dấu "=". Trong $\mathbf{R}$ lấy $A = (0, 1)$, $B = (1, 2]$, ta có $A \cap B = \varnothing$, $\overline{A \cap B} = \varnothing$, $\overline{A} = [0, 1]$, $\overline{B} = [1, 2]$, $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$.

20. Từ đẳng thức $U \cap A = \varnothing$ suy ra $A \subset X \setminus U$. Vì $X \setminus U$ là một tập hợp đóng trong X, từ đó suy ra $\overline{A} \subset X \setminus U$. Do đó $U \cap \overline{A} = \varnothing$.

21. b) Từ a) suy ra

$$A' \setminus A = \partial A \setminus A.$$

Do đó

$$A \cup A' = A \cup (A' \setminus A) = A \cup (\partial A \setminus A) = A \cup \partial A = \overline{A}$$

22. Ta chứng minh $X \setminus A'$ là một tập hợp mở. Giả sử $x \in X \setminus A'$. Khi đó tồn tại một lân cận U của x sao cho $(U \setminus \{x\}) \cap A = \varnothing$. Từ đó suy ra mọi điểm của U đều không phải là điểm tụ của A, tức là $U \subset X \setminus A'$. Vậy x là một điểm trong của $X \setminus A'$.

Cách chứng minh khác : Giả sử $\{x_n\} \subset A'$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$. Nếu U là một lân cận bất kì của x thì $x_n \in U$ với n đủ lớn. Vì $x_n \in A'$ và U là một lân cận của x_n nên U chứa vô số phần tử của A. Do đó $x \in A'$. Vậy A' là một tập hợp đóng.

23. Nếu $d(F, K) = 0$ thì tồn tại $\{x_n\} \subset K$, $\{y_n\} \subset F$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$. Vì K là một tập hợp compắc nên $\{x_n\}$ có một dãy con $\{x_{k_n}\}$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = x_o \in K$. Vì $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_{k_n}, y_{k_n}) = 0$ nên từ đó suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(y_{k_n}, x_o) = 0$, tức là $\lim\limits_{n\to\infty} y_{k_n} = x_o$. Do đó vì F là một tập hợp đóng và $\{y_{k_n}\} \subset F$ nên $x_o \in F$. Vậy $F \cap K \neq \varnothing$.

Ví dụ sau cho thấy kết luận trên không còn đúng nữa nếu K chỉ là một tập hợp đóng chứ không compắc :

Trong $\mathbf{R}^2$, $K = \{(x, 0) : x \in \mathbf{R}\}$, $F = \{\left(x, \frac{1}{x}\right) : x > 0\}$ đều là những tập hợp đóng, $F \cap K = \varnothing$ nhưng $d(F, K) = 0$.

24. Tồn tại $\{x_n\} \subset A$ và $\{y_n\} \subset B$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = d(A, B) = \inf\limits_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \rho(x, y)$. Vì A là một tập hợp compắc nên $\{x_n\}$ có một dãy con $\{x_{k_n}\}$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = a \in A$. Vì B là một tập hợp compắc nên $\{y_{k_n}\}$ có một dãy con $\{y_{j_{k_n}}\}$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} y_{j_{k_n}} = b \in B$. Khi đó $\rho(a, b) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_{j_{k_n}}, y_{j_{k_n}}) = d(A, B)$.

25. a) Theo giả thiết $G \setminus F_1 \neq \varnothing$. Vì $G \setminus F_1 = G \cap (X \setminus F_1)$ nên $G \setminus F_1$ là một tập hợp mở. Do đó nếu $x_1 \in G \setminus F_1$ thì tồn tại một số $r_1 \in (0, 1)$ sao cho $B[x_1, r_1] \subset G \setminus F_1$.

b) Từ giả thiết suy ra $B(x_1, r_1) \setminus F_2 \neq \varnothing$. Vì $B(x_1, r_1) \setminus F_2$ là một tập hợp mở nên nếu $x_2 \in B(x_1, r_1) \setminus F_2$ thì tồn tại một số $r_2 \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ sao cho $B[x_2, r_2] \subset B(x_1, r_1) \setminus F_2$.

c) Theo bổ đề Canto, từ (i) suy ra rằng tồn tại một phần tử duy nhất $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B[x_n, r_n]$. Từ đó (ii) suy ra $x_0 \notin F_n$ với mọi n. Do đó $x_0 \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Mặt khác, vì $x_0 \in B[x_1, r_1] \subset G$ nên

$$x_0 \in G \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right). \qquad \text{Vậy} \quad G \not\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

26. Áp dụng bài tập 25 : Lấy $G = \mathbf{R}^2$.

27. b) Giả sử $\{z_n\} \subset C_x$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \in \mathbf{R}$. Khi đó $u_n = z_n - x \in \mathbf{Z}$ với mọi n và $\lim\limits_{n\to\infty} (x + u_n) = z$. Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = z - x$. Vì $\{u_n\}$ là một dãy số nguyên nên từ đó dễ dàng suy ra $z - x \in \mathbf{Z}$, tức là $z \in C_x$. Vậy C_x là một tập hợp đóng trong $\mathbf{R}$.

28. Ta có $x^2 - xy + y^2 \geqslant |xy|$ với mọi $x, y \in \mathbf{R}$. Do đó

$$\left|\frac{x+y}{x^2 - xy + y^2}\right| \leqslant \left|\frac{x+y}{xy}\right| = \frac{1}{|y|} + \frac{1}{|x|} \text{ với mọi } x \neq 0,$$

$y \neq 0$.

Từ đó suy ra

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} = 0.$$

29. Ta có

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = \left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{\frac{x}{x+y}} \text{ với } x \in \mathbf{R} \text{ và } |x| \text{ đủ lớn.}$$

Do đó

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = e.$$

30. Ta có $x^2y^2 \leqslant \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2$ với mọi $x, y \in \mathbf{R}$. Do đó với

$$0 < x^2+y^2 < 1,\ 1 \geqslant (x^2+y^2)^{x^2y^2} \geqslant (x^2+y^2)^{\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2}.$$

Đặt $t = x^2+y^2$, ta được

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2} = \lim_{t\to 0^+} t^{\frac{t^2}{4}} = \lim_{t\to 0^+} e^{\frac{t^2}{4}\ln t} = e^0 = 1.$$

Vậy $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = 1.$

31. Với $x > 0$, $y > 0$, ta có

$$0 < (x^2+y^2)\,e^{-(x+y)} = \frac{x^2}{e^{x+y}} + \frac{y^2}{e^{x+y}} < \frac{x^2}{e^x} + \frac{y^2}{e^y}.$$

Vì $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \left(\frac{x^2}{e^x} + \frac{y^2}{e^y}\right) = 0$ nên từ đó suy ra.

$$\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} (x^2+y^2)\,e^{-(x+y)} = 0.$$

32. a) Với $y > 0, \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^y}{1+x^y} = 1$. Do đó $\lim\limits_{y\to 0^+}\left(\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^y}{1+x^y}\right) = 1.$

Với $x > 0$, $\lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{x^y}{1 + x^y} = \dfrac{1}{2}$. Do đó $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{x^y}{1 + x^y} \right) = \dfrac{1}{2}$.

b) Với $y \neq 0$, $\operatorname{tg} \dfrac{xy}{1 + xy} \sim xy$ khi $x \to 0$. Do đó

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{xy} \operatorname{tg} \dfrac{xy}{1 + xy} = 1$. Vậy $\lim\limits_{y \to \infty} \left(\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{xy} \operatorname{tg} \dfrac{xy}{1 + xy} \right) = 1$.

Với $x \neq 0$, $\lim\limits_{y \to \infty} \operatorname{tg} \dfrac{xy}{1 + xy} = \operatorname{tg} 1$. Do đó $\lim\limits_{y \to \infty} \dfrac{1}{xy} \operatorname{tg} \dfrac{xy}{1 + xy} = 0$.

Vậy $\lim\limits_{x \to 0} \left(\lim\limits_{y \to \infty} \dfrac{1}{xy} \operatorname{tg} \dfrac{xy}{1 + xy} \right) = 0$.

c) Ta có $\log_x(x + y) = \dfrac{\ln(x + y)}{\ln x}$ với $x > 0$, $x \neq 1$, $x + y > 0$.

Với $y > 0$, $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\ln(x + y)}{\ln x} = -\infty$. Do đó $\lim\limits_{y \to 0^+} \left(\lim\limits_{x \to 1^-} \log_x (x + y) \right) = -\infty$.

Với $0 < x < 1$, $\lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{\ln(x + y)}{\ln x} = 1$. Do đó $\lim\limits_{x \to 1^-} \left(\lim\limits_{y \to 0^+} \log_x (x + y) \right) = 1$.

33. Lấy $(x_n, y_n) = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n} \right)$, $n = 1, 2, \ldots$, ta được $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n, y_n) = (0, 0)$ và $f(x_n, y_n) = 0$ với mọi n. Lấy $(x_n', y_n') = \left(\dfrac{2}{n}, \dfrac{1}{n} \right)$, $n = 1, 2, \ldots$ ta được $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n', y_n') = (0, 0)$ và $f(x_n', y_n') = \dfrac{1}{3}$ với mọi n. Vậy $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ không tồn tại.

34. Với $y \neq \dfrac{1}{k\pi}$, k nguyên dương, $y \sin \dfrac{1}{y} \neq 0$. Các dãy $\{x_n\}$ và $\{x_n'\}$ với $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$, $x_n' = \dfrac{1}{2n\pi + \dfrac{\pi}{2}}$, $n = 1, 2, \ldots$ đều hội tụ đến 0.

Ta có $f(x_n, y) = 0$ với mọi n và $f(x_n', y) = (x_n' + y)\sin\frac{1}{y}$ $\to y\sin\frac{1}{y}$ khi $n \to \infty$. Do đó không tồn tại $\lim_{x\to 0^+} f(x, y)$. Tương tự $\lim_{y\to 0^+} f(x, y)$ khôngtồn tại. Bởi vậy cả hai giới hạn lặp đều không tồn tại.

Tuy nhiên, với mọi $x > 0$, $y > 0$,

$$|f(x,y)| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Từ đó suy ra $\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}} f(x, y) = 0$.

35. a) Hàm số f xác định khi và chỉ khi

$$1 - 2y\cos x + y^2 \neq 0 \qquad (1).$$

Vế trái của (1) là một tam thức bậc hai theo y. Biệt thức của nó là

$$\Delta'(y) = \cos^2 x - 1 \leq 0 \text{ với mọi } x > 0.$$

Nếu $\cos x \neq \pm 1$ thì tam thức dương với mọi $y \in \mathbf{R}$.

- Nếu $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$, $k = 1, 2, \ldots$ thì tam thức trở thành $(1 - y)^2$. Khi đó f xác định với $y \neq 1$.
- Nếu $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = (2k + 1)\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ thì tam thức trở thành $(1 + y)^2$. Khi đó f xác định với $y \neq -1$.

Vậy tập hợp xác định của f là :

$((0, +\infty) \times \mathbf{R}) \setminus (\{(2k\pi, 1) : k = 1, 2, \ldots\} \cup \{((2k + 1)\pi, -1) : k = 0, 1, 2\ldots\})$.

b) Giả sử $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} f(x, y) = l \in \mathbf{R}$. Khi đó $l = \lim_{y\to 1} f(0, y) = 0$. Ta cũng có $0 = \lim_{x\to 0^+} f(x, 1) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{2(1 - \cos x)} = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha - 2}$, vì

$$\frac{x^\alpha}{2(1 - \cos x)} = \frac{x^\alpha}{4\sin^2\frac{x}{2}} \sim x^{\alpha - 2} \text{ khi } x \to 0.$$

Từ đó suy ra $\alpha - 2 > 0$ Vậy điều kiện cần để f có giới hạn tại điểm (0, 1) là : $\alpha > 2$.

Ta chứng minh đó cũng là điều kiện đủ. Cho $\varepsilon > 0$ bất kì. Khi đó $|f(x, y)| < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{x^{\alpha}}{1 - 2y\cos x + y^2} < \varepsilon$ (2).

Vì với (x, y) thuộc một lân cận đủ nhỏ của (0, 1) và $(x, y) \neq (0, 1)$, ta có $1 - 2y\cos x + y^2 > 0$ nên bất đẳng thức (2) tương đương với

$$x^{\alpha} < \varepsilon(1 - 2y\cos x + y^2) \Leftrightarrow \varepsilon y^2 - 2y\varepsilon\cos x + \varepsilon - x^{\alpha} > 0 \quad (3).$$

Biệt thức của tam thức bậc hai theo y ở vế trái của (3) là :

$$\Delta' = \varepsilon(x^{\alpha} - \varepsilon\sin^2 x).$$

Vì với $\alpha > 2$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{\alpha}}{\varepsilon\sin^2 x} = 0$ nên tồn tại $\delta > 0$ sao cho $0 < x < \delta$ kéo theo $\Delta' < 0$, do đó kéo theo (3), tức là $|f(x, y)| < \varepsilon$ với $0 < x < \delta$ và với mọi $y \in \mathbb{R}$. Vậy với $\alpha > 2$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x, y) = 0$.

36. a) Nếu $(x_0, y_0) \in U$ thì $x_0 > 0$. Vì

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x^y = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} e^{y\ln x} =$$

$$= e^{y_0\ln x_0} = x_0^{y_0} = f(x_0, y_0)$$

nên f liên tục tại điểm (x_0, y_0).

b) Dãy $\{(x_n, y_n)\} = \left\{\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)\right\}$ dần đến (0; 0) khi $n \to \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}} = 1$. Dãy $\{(x_n', y_n')\} = \left\{\left(e^{-n}, \dfrac{1}{n}\right)\right\}$ dần đến (0 , 0) khi $n \to \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n', y_n') = \lim\limits_{n\to\infty} e^{-n\cdot\frac{1}{n}} = e^{-1}$.

Vậy f không có giới hạn tại điểm (0, 0).

37. Ta có $f(\alpha t, \beta t) = \dfrac{\alpha\beta^2 t^3}{\alpha^2 t^2 + \beta^4 t^4} = \dfrac{\alpha\beta^2 t}{\alpha^2 + \beta^4 t^2} \to 0$ khi $t \to 0$.

Tuy nhiên nếu $(x, y) \to (0, 0)$ dọc theo parabôn $x = y^2$ thì $f(y^2, y) = \dfrac{y^4}{y^4 + y^4} = \dfrac{1}{2} \not\to 0$ khi $y \to 0$. Do đó f không có giới hạn tại điểm (0, 0). Vậy f gián đoạn tại điểm (0, 0).

38. Ta có $f(0, 0) = e^0 = 1$. Với $x \neq y$, ta có

$$e^x - e^y = (x - y)e^{y + \theta(x - y)}, \qquad 0 < \theta < 1,$$

$$f(x, y) = e^{y + \theta(x - y)}.$$

Đẳng thức đúng cả với $x = y$. Vì

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} e^{y + \theta(x - y)} = e^0 = 1 = f(0, 0).$$

nên f liên tục tại điểm (0, 0).

39. Điểm (0, 0) là điểm liên tục duy nhất của hàm số đã cho.

40. Tính liên tục của hai hàm số được xét suy ra từ hai đẳng thức sau :

$$\max\{\alpha, \beta\} = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{|\alpha - \beta|}{2},$$

$$\min\{\alpha, \beta\} = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{|\alpha - \beta|}{2}, \qquad \text{với mọi } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

41. Vì f liên tục tại điểm x_0 nên tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$(\forall x \in X)\ \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad f(x_0) - f(x) < \frac{f(x_0)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0 \text{ với mọi } x \in X \cap V,$$

trong đó $V = B(x_0, \delta)$.

42. Gọi $\nu_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ và $\nu_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$

$x \mapsto (x, 0)$ $\qquad$ $x \mapsto (0,x)$

là hai phép nhúng chuẩn tắc không gian $\mathbf{R}$ vào không gian $\mathbf{R}^2$. Ta biết rằng ν_1 và ν_2 là những ánh xạ liên tục. Dễ thấy

$$g_1 = f \circ \nu_1 \text{ và } g_2 = f \circ \nu_2.$$

Vì g_1 và g_2 là hợp của hai ánh xạ liên tục nên chúng liên tục.

43. Gọi $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ là hàm số xác định bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ta biết rằng f gián đoạn tại điểm (0, 0). Tuy nhiên, ta có

$$g_1(x) = f(x, 0) = 0 \text{ với mọi } x \in \mathbf{R},$$

$$g_2(x) = f(0, y) = 0 \text{ với mọi } y \in \mathbf{R}.$$

g_1 và g_2 đều liên tục tại điểm 0.

44. Giả sử $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ và $\varepsilon > 0$. Với mọi $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)|.$$

Vì hàm số $x \mapsto f(x, y_0)$ liên tục tại điểm x_0 nên tồn tại $\eta > 0$ sao cho

$$|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Theo giả thiết,

$$|f(x,y) - f(x, y_0)| \leq K\,|y - y_0| \text{ với mọi } x \in \mathbf{R}.$$

Do đó

$|f(x, y) - f(x, y_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ với $K\,|y - y_0| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, tức là $|y - y_0| < \dfrac{\varepsilon}{2K}$.

Đặt $\delta = \min\left\{\eta, \dfrac{\varepsilon}{2K}\right\}$. Khi đó

$$|x - x_0| < \delta,\ |y - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

45. Giả sử $(x_o, y_o) \in \mathbf{R}^2$ và $\varepsilon > 0$. Với mọi $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, ta có

$$|f(x, y) - f(x_o, y_o)| \leqslant |f(x, y) - f(x, y_o)| + |f(x, y_o) - f(x_o, y_o)|.$$

Vì hàm số $y \longmapsto f(x,y)$ liên tục tại điểm y_o đều đối với x nên tồn tại $\delta_1 > 0$ sao cho

$$|y - y_o| < \delta_1 \Rightarrow |f(x, y) - f(x, y_o)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ với mọi } x \in \mathbf{R}.$$

Vì hàm số $x \longmapsto f(x, y_o)$ liên tục tại điểm x_o nên tồn tại $\delta_2 > 0$ sao cho

$$|x - x_o| < \delta_2 \Rightarrow |f(x, y_o) - f(x_o, y_o)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Với $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, ta có

$$|x - x_o| < \delta, \ |y - y_o| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x_o, y_o)| < \varepsilon.$$

46. Giả sử $\{x_n\} \subset A$ và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_o \in \mathbf{R}^p$. Khi đó $f(x_n) = g(x_n)$ với mọi n. Vì f và g liên tục tại x_o nên $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_o)$ và $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_o)$. Từ đó suy ra $f(x_o) = g(x_o)$. Vậy $x_o \in A$ và A là một tập hợp đóng trong $\mathbf{R}^p$.

47. Dễ dàng thấy rằng hàm số f liên tục tại mọi điểm $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ với $y \neq 0$ và tại điểm $(0, 0)$. Ta chứng minh f gián đoạn tại các điểm $(x, 0)$ với $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$. Thật vậy, giả sử $x_o \in \mathbf{R}$, $x_o \neq 0$. Với $x_n = x_o + \dfrac{1}{n}$, $y_n = \dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi}$, ta có

$(x_n, y_n) \to (x_o, 0)$ và $f(x_n, y_n) = x_o + \dfrac{1}{n} \to x_o$ khi $n \to \infty$. Như vậy $f(x_n, y_n) \to f(x_o, 0)$ khi $n \to \infty$. Vậy f gián đoạn tại điểm $(x_o, 0)$. Tập hợp các điểm gián đoạn của f là

$$A = \{(x, 0) : x \in \mathbf{R}, x \neq 0\}.$$

Vì $(0, 0)$ là một điểm biên của A và $(0, 0) \notin A$ nên A không phải là một tập hợp đóng trong $\mathbf{R}^2$. Hiển nhiên một điểm bất kì của A không phải là một điểm trong của A nên A không phải là một tập hợp mở.

49. Cho $\varepsilon > 0$ bất kì. Với mọi $x, x', y, y' \in \mathbf{R}$,

$$|f(x, y) - f(x', y')| = |2x - 3y + 5 - (2x' - 3y' + 5)| \leqslant$$
$$\leqslant 2|x - x'| + 3|y - y'|.$$

Với $\delta = \dfrac{\varepsilon}{6}$, ta có

$$|x - x'| < \delta, \ |y - y'| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(x', y')| < \varepsilon.$$

50. Cho $\varepsilon > 0$. Với mọi $x, x', y, y' \in \mathbf{R}$,

$$|f(x, y) - f(x', y')| = \left|\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x'^2 + y'^2}\right| =$$
$$= \left|\frac{x^2 - x'^2 + y^2 - y'^2}{\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2}}\right| \leqslant$$
$$\leqslant |x - x'| \frac{|x + x'|}{\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2}} +$$
$$+ |y - y'| \frac{|y + y'|}{\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2}} \leqslant$$
$$\leqslant |x - x'| + |y - y'|.$$

Từ bất đẳng thức trên dễ dàng suy ra tính liên tục đều của f.

51. Tập hợp xác định của f là

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| \leqslant |y|, \ y \neq 0\}.$$

Dễ dàng thấy rằng f liên tục trên Ω. Với hai dãy điểm của Ω

$$M_n = (x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \text{ và } M_n' = (x_n', y_n') = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right),$$

$n = 1, 2, \ldots$ ta có

$$M_nM_n' = \sqrt{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{2}{n} \to 0 \text{ khi } n \to \infty,$$

nhưng $|f(x_n, y_n) - f(x_n', y_n')| = |\arcsin 1 - \arcsin(-1)| = 2\text{acr}\sin 1 = \pi$ với mọi n. Vậy f không liên tục đều trên Ω.

52. Dễ thấy f liên tục trên $\mathbf{R}^2$. Với hai dãy điểm của $\mathbf{R}^2$

$M_n = (x_n, y_n) = (\sqrt{n\pi}\cos\alpha, \sqrt{n\pi}\sin\alpha)$,

$M_n' = (x_n', y_n') = \left(\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\ \cos\alpha, \sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\ \sin\alpha\right)$,

$n = 1, 2, \ldots$

trong đó α là một góc sao cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, ta có

$$M_nM_n' = \sqrt{(x_n - x_n')^2 + (y_n - y_n')^2} = \sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} - \sqrt{n\pi} \to 0$$

khi $n \to \infty$, nhưng

$|f(x_n, y_n) - f(x_n', y_n')| = \left|\sin n\pi - \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right| = 1$ với mọi n. Vậy f không liên tục đều trên $\mathbf{R}^2$.

54. a) Vì $B \subset B_1$ và B_1 là một tập hợp đóng trong $\mathbf{R}^p$ nên $\overline{B} \subset B_1$. Mặt khác, nếu $x \in B_1$ thì $\|x\| \leqslant 1$. Gọi $\{\lambda_n\}$ là một dãy số dương nhỏ hơn 1 sao cho $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = 1$. Khi đó $\lambda_n x \in B$ với mọi n và $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n x = x$. Do đó $x \in \overline{B}$. Vậy $B_1 \subset \overline{B}$. Từ hai bao hàm thức đã chứng minh suy ra $\overline{B} = B_1$.

b) Giả sử tồn tại một ánh xạ liên tục $F : B_1 \to \mathbf{R}^q$ sao cho $F|_B = f$. Vì F liên tục trên tập hợp compắc B_1 nên F liên tục đều trên B_1. Do đó f liên tục đều trên B. Đảo lại giả sử f liên tục đều trên B và ε là một số dương cho trước. Khi đó tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$(\forall x', x'' \in B)\ \|x' - x''\| < \delta \Rightarrow \|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon.$$

Nếu $x_0 \in \partial B$ thì $\|x_0\| = 1$ và

$(\forall x_1, x_2 \in B)\ \|x_1 - x_0\| < \dfrac{\delta}{2}, \|x_2 - x_0\| < \dfrac{\delta}{2} \Rightarrow$ $\|f(x_1) - f(x_2)\| < \varepsilon$ vì $\|x_1 - x_2\| < \delta$. Theo tiêu chuẩn Côsi, tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \mathbf{R}^q$.

Gọi $F : B_1 \to \mathbf{R}^q$ là ánh xạ xác định bởi

$$F(x) = \begin{cases} f(x) \text{ nếu } x \in B, \\ \lim\limits_{u \to x} f(u) \text{ nếu } x \in \partial B. \end{cases}$$

F liên tục trên B_1 và $F|_B = f$.

55. Giả sử $\{x_n\}$ là một dãy Côsi trong không gian mêtric (X, ρ). Khi đó tồn tại một số N nguyên dương sao cho

$$m \geqslant N,\ n \geqslant N \Rightarrow \rho(x_m, x_n) < 1.$$

Đặt $r = \max\{\rho(x_N, x_1), \rho(x_N, x_2), ..., \rho(x_N, x_{N-1}), 1\}$, ta có $\{x_n\} \subset B[x_N, r]$.

56. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử f không bị chặn trên B. Khi đó với mỗi n nguyên dương, tồn tại $x_n \in B$ sao cho

$$\|f(x_n)\| > n.$$

Vì B là một tập hợp bị chặn trong $\mathbf{R}^p$ nên dãy $\{x_n\}$ có một dãy con $\{x_{k_n}\}$ hội tụ : $\lim\limits_{n \to \infty} x_{k_n} = x_0 \in \mathbf{R}^p$. Do đó $\{x_{k_n}\}$ là một dãy Côsi trong B. Vì $f : B \to \mathbf{R}^q$ là một ánh xạ liên tục đều, từ đó suy ra $\{f(x_{k_n})\}$ là một dãy Côsi trong $\mathbf{R}^q$ (xem bài tập 53). Theo bài tập 55, $\{f(x_{k_n})\}$ là một tập hợp bị chặn trong $\mathbf{R}^q$. Mặt khác, ta có $\|f(x_{k_n})\| > k_n$ với mọi n. Ta đi đến mâu thuẫn.

57. Gọi

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qp} \end{pmatrix}$$

là ma trận của ánh xạ tuyến tính f trong các cơ sở tự nhiên ủa $\mathbf{R}^p$ và $\mathbf{R}^q$. Khi đó, nếu $x = (\xi_1, ..., \xi_p) \in \mathbf{R}^p$, thì $f(x) = (\eta_1, ..., \eta_q)$ với

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\xi_j, \; i = 1, ..., q.$$

Ta có

$$\| f(x) \| = \Big(\sum_{i=1}^{q} \eta_i^2 \Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{i=1}^{q} \Big(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\xi_j \Big)^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \qquad (1)$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacốpxki, ta có

$$\Big(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\xi_j \Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}^2 \Big) \Big(\sum_{j=1}^{p} \xi_j^2 \Big) = \Big(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}^2 \Big) \| x \|^2 \; (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\| f(x) \| \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} a_{ij}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \| x \|.$$

Ta được bất đẳng thức cần chứng minh với $K = \Big(\sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} a_{ij}^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$.

58. Theo bài tập 57, tồn tại một hằng số $K > 0$ sao cho

$$\| f(x) \| \leqslant K \| x \| \text{ với mọi } x \in \mathbf{R}^p.$$

Do đó

$(\forall x', x'' \in \mathbf{R}^p)\; \| f(x') - f(x'') \| = \| f(x' - x'') \| \leqslant K \| x' - x'' \|$.

Từ đó suy ra tính liên tục đều của f.

59. Vì $\| \; \| : \mathbf{R}^q \to \mathbf{R}$ là một hàm số liên tục trên $\mathbf{R}^q$ và $x \mapsto \| x \|$

$f : K \to \mathbf{R}^q$ là một ánh xạ liên tục nên ánh xạ hợp

$$K \ni x \xmapsto{f} f(x) \in \mathbf{R}^q \xmapsto{\| \; \|} \| f(x) \| \in \mathbf{R}$$

là một hàm số liên tục trên tập hợp K. Do K là một tập hợp compắc nên tồn tại $x_1, x_2 \in K$ thỏa mãn hai đẳng thức nêu trong đề bài.

60. Giả sử tồn tại một số thực m > 0 sao cho

$$\|f(x)\| \geqslant m\|x\| \text{ với mọi } x \in \mathbf{R}^p,$$

và $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^p$, $x_1 \neq x_2$. Khi đó

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| = \|f(x_1 - x_2)\| \geqslant m\|x_1 - x_2\| > 0.$$

Do đó $f(x_1) \neq f(x_2)$. Vậy f là một đơn ánh.

Đảo lại, giả sử f là một đơn ánh tuyến tính. Gọi S là mặt cầu đơn vị trong $\mathbf{R}^p$:

$$S = \{x = (\xi_1, ..., \xi_p) \in \mathbf{R}^p : \|x\| = \Big(\sum_{i=1}^{p} \xi_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} = 1\}.$$

Vì S là một tập hợp đóng và bị chặn trong $\mathbf{R}^p$ nên nó là một tập hợp compắc. Theo bài tập 58, f là một ánh xạ liên tục trên $\mathbf{R}^p$. Do đó $S \ni x \mapsto \|f(x)\| \in \mathbf{R}$ là một hàm số liên tục trên S. Theo bài tập 59, tồn tại $x_o \in S$ sao cho $\inf\limits_{x \in S} \|f(x)\| = \|f(x_o)\|$. Vì f là một đơn ánh và $x_o \neq 0$ nên

$m = \|f(x_o)\| > 0$. Với mọi $x \in \mathbf{R}^p$, $x \neq 0$, ta có $\dfrac{x}{\|x\|} \in S$.

Do đó $\Big\| f\Big(\dfrac{x}{\|x\|}\Big)\Big\| \geqslant m$. Từ đó suy ra $\|f(x)\| \geqslant m\|x\|$. Hiển nhiên bất đẳng thức đúng với $x = 0$.

61. Gọi $\| \ \| : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ là chuẩn trên $\mathbf{R}^p$ xác định bởi
$x \mapsto \|x\|$

$$\|x\| = \|(\xi_1, ..., \xi_p)\| = \Big(\sum_{i=1}^{p} \xi_i^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

và $N : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, $x \mapsto N(x)$ là một chuẩn bất kì trên $\mathbf{R}^p$. Ta chứng minh N tương đương với $\| \ \|$, tức là tồn tại hai số thực dương α và β sao cho

$$\alpha\|x\| \leqslant N(x) \leqslant \beta\|x\| \text{ với mọi } x = (\xi_1, ..., \xi_p) \in \mathbf{R}^p.$$

Gọi $(e_1, ..., e_p)$ là cơ sở tự nhiên của $\mathbf{R}^p$. Khi đó $x = \sum_{i=1}^{p} \xi_i e_i$ và

$$N(x) \leqslant \sum_{i=1}^{p} |\xi_i| \, N(e_i) \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{p} \xi_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{p} N^2(e_i)\Big)^{\frac{1}{2}} = \beta \| x \|,$$

với $\beta = \Big(\sum_{i=1}^{p} N^2(e_i)\Big)^{\frac{1}{2}}$. Từ bất đẳng thức trên suy ra

$$(\forall x', x'' \in \mathbf{R}^p) \; |N(x') - N(x'')| \leqslant N(x' - x'') \leqslant \beta \| x' - x'' \|.$$

Vậy $N : (\mathbf{R}^p, \| \;\|) \to \mathbf{R}$ là một hàm số liên tục. Mặt cầu đơn vị

$$S = \{x \in \mathbf{R}^p : \|x\| = 1\}$$

là một tập hợp compắc trong không gian $(\mathbf{R}^p, \| \;\|)$. Hàm số $S \ni x \mapsto N(x)$ liên tục trên S nên tồn tại $x_o \in S$ sao cho $N(x_o) = \inf_{x \in S} N(x)$. Vì N là một chuẩn trên $\mathbf{R}^p$ và $x_o \neq 0$ nên

$\alpha = N(x_o) > 0$. Với mọi $x \in \mathbf{R}^p$, $x \neq 0$, ta có $\dfrac{x}{\|x\|} \in S$.

Do đó $N\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) \geqslant \alpha$. Từ đó suy ra $N(x) \geqslant \alpha \|x\|$.

Hiển nhiên bất đẳng thức đúng với $x = 0$. Vậy N tương đương với $\| \;\|$.

63. b) Các tập hợp đóng trong X là

$$\varnothing, X, \{b, c, d\}, \{a, b\}, \{b\}.$$

c) Các tập hợp sau đây không phải là tập hợp đóng cũng không phải là tập hợp mở trong X :

$\{c\}$, $\{d\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$.

64. b) Các tập hợp mở chứa số 5 là :

$\mathbf{N}$, $U_1 = \{1, 2, 3, ...\}$, $U_2 = \{2, 3, 4, ...\}$, $U_3 = \{3, 4, 5, ...\}$, $U_4 = \{4, 5, 6, ...\}$, $U_5 = \{5, 6, 7, ...\}$.

BÀI TẬP CHƯƠNG VI VÀ LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

ĐẠO HÀM CỦA HÀM MỘT BIẾN SỐ. ĐẠO HÀM RIÊNG CỦA HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

1. Cho $f : [0,2\pi] \to \mathbf{R}^3$ là ánh xạ xác định bởi

$$f(t) = (t, \cos t, \sin t).$$

Chứng minh rằng ta không có công thức số gia hữu hạn

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = \frac{\pi}{2} f'(c),\ c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

2. Giả sử ánh xạ $f : (a, b) \to \mathbf{R}^3$ có đạo hàm tại điểm $x \in (a, b)$ và $a < a_n < x < b_n < b$ với $n = 1, 2, \ldots$ Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = \lim\limits_{x\to\infty} b_n = x$ thì

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(x).$$

3. Ta đồng nhất không gian tuyến tính thực $\mathbf{C}$ với $\mathbf{R}^2$ và gọi f, g là hai hàm số phức xác định trên khoảng (0, 1) bởi

$$f(x) = x,\ g(x) = x + x^2 e^{\frac{i}{x^2}}.$$

Tính $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ và $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

4. Cho $f : (-1, 1) \to \mathbf{R}^3$ là ánh xạ xác định bởi

$$f(t) = (\sin t, \operatorname{tg} t, \ln(1 + t)).$$

Viết công thức khai triển bậc ba của f trên một lân cận của điểm 0.

5. Gọi E là không gian tuyến tính các vectơ tự do trong không gian thông thường, $x \mapsto \vec{V}_1(x)$, $x \mapsto \vec{V}_2(x)$, $x \mapsto \vec{V}_3(x)$ là ba ánh xạ từ khoảng (a, b) vào E, có các đạo hàm tại điểm $x_0 \in (a, b)$. Chứng minh rằng hàm số $x \mapsto (\vec{V}_1(x), \vec{V}_2(x), \vec{V}_3(x))$

có đạo hàm tại x_0 và tính đạo hàm đó $((\vec{V}_1(x), \vec{V}_2(x), \vec{V}_3(x))$ là tích hỗn tạp của ba vectơ $\vec{V}_1(x), \vec{V}_2(x), \vec{V}_3(x))$.

6. Giả sử f là một hàm số liên tục trên đoạn [0, a], $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$. Tìm các đạo hàm riêng của hàm số F xác định trên $[0, a] \times [0, a]$ bởi

$$F(x, y) = \int_0^y (x - t)^2 \frac{\text{sh}t}{\sqrt{1 + t^2}} dt.$$

7. Giả sử U là một tập hợp mở trong $\mathbf{R}^3$, $X : U \to \mathbf{R}^3$ là ánh xạ xác định bởi

$$X(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),$$

trong đó P, Q, R là những hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên U. Hàm số xác định trên U

$$(x, y, z) \longmapsto \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)$$

gọi là đivécgiăng của ánh xạ X, kí hiệu là divX.

Giả sử X là ánh xạ xác định trên $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ bởi

$$X(x, y, z) = \left(-\frac{xz}{x^2 + y^2 + z^2}, -\frac{yz}{x^2 + y^2 + z^2}, t(x, y, z)\right),$$

trong đó hàm số t có các đạo hàm riêng liên tục trên $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Xác định t sao cho $t(x, y, 0) = \ln(x^2 + y^2)$ và $\text{div}X = 0$.

8. Giả sử f, g là những hàm số có đạo hàm cấp hai trên $\mathbf{R}$; x, y là hai hàm số xác định trên $\mathbf{R}^2$ bởi

$x(u, v) = f(u)\cos v$, $y(u, v) = g(u)\sin v$. Tìm f và g sao cho

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial y}{\partial v}(u, v), \quad \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) = -\frac{\partial y}{\partial u}(u, v), \quad f(0) = 1, \ g(0) = 0.$$

HD. Người ta chứng minh được rằng mọi hàm số f thỏa mãn $f''(x) = f(x), x \in \mathbf{R}$ đều có dạng $f(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$, c_1 và c_2 là những hằng số.

9. Cho hàm số

$$u(x, y) = 2x^3 + 5y^3, \ (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

hàm số f có đạo hàm liên tục trên $\mathbf{R}$ sao cho

$$f[u(x, y)] + x^2 > 0 \text{ với mọi } (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

và hàm số g xác định trên $\mathbf{R}^2$ bởi

$$g(x, y) = \sqrt{x^2 + f[u(x, y)]}.$$

Chứng minh rằng tồn tại hai số thực a và b sao cho

$$ay^2 g(x, y)\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + bx^2 g(x, y)\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = xy^2 \text{ trên } \mathbf{R}^2.$$

10. Giả sử f là một hàm số có các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai liên tục trên $\mathbf{R}^2$, thỏa mãn phương trình

$$x^2 f''_{x^2}(x, y) + 2xyf''_{xy}(x, y) + y^2 f''_{y^2}(x, y) = 0$$

với mọi $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Gọi g là hàm số xác định trên $\mathbf{R}^2$ bởi

$$g(x, u) = f(x, ux).$$

Chứng minh rằng

$$g''_{x^2}(x, u) = 0 \text{ với mọi } (x, u) \in \mathbf{R}^2.$$

11. Cho hàm số f xác định trên $\mathbf{R}^2$ bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng f liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trên $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

b) Chứng minh rằng f gián đoạn tại điểm (0, 0).

c) Tính các đạo hàm riêng của f tại điểm (0, 0). Xét tính liên tục của các đạo hàm riêng của f tại điểm (0, 0).

d) Các đạo hàm riêng cấp hai $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ và $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ có tồn tại không ?

12. Cho f là hàm số xác định trên $\mathbf{R}^2$ bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng f có các đạo hàm riêng liên tục.

b) Chứng minh rằng $f''_{xy}(0, 0) = f''_{yx}(0, 0)$.

13. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

gián đoạn tại điểm (0, 0) nhưng có các đạo hàm riêng liên tục tại điểm này.

14. Giả sử f là hàm số xác định trên $\mathbf{R}^2$ bởi $f(x, y) = g(x)$, trong đó $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ là một hàm số không có đạo hàm tại mọi điểm của $\mathbf{R}$. Chứng minh rằng f''_{yx} liên tục trên $\mathbf{R}^2$ nhưng $f'_x(x, y)$ không tồn tại tại mọi điểm $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

15. Chứng minh rằng nếu hàm số f có các đạo hàm riêng liên tục và bị chặn trên $\mathbf{R}^2$ thì f liên tục đều trên $\mathbf{R}^2$.

16. Giả sử hàm số $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ liên tục theo biến số x (tức $(x, y) \mapsto f(x, y)$
là với mỗi $y \in \mathbf{R}$, hàm số $x \mapsto f(x, y)$ liên tục trên $\mathbf{R}$) và có đạo hàm riêng f'_y bị chặn trên $\mathbf{R}^2$. Chứng minh rằng f liên tục trên $\mathbf{R}^2$.

17. Cho $0 < x < y$. Gọi f là hàm số xác định bởi

$$f(x, y) = \int_x^y e^t \ln t \, dt.$$

Tính các đạo hàm riêng cấp hai của f.

18. Xác định một đa thức đẳng cấp bậc ba hai biến số P ($P \in \mathbf{R}[x, y]$) sao cho

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,\ y) + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,\ y) = 0 \text{ với mọi } (x,\ y) \in \mathbf{R}^2.$$

19. Giả sử f là một hàm số có các đạo hàm riêng cấp 1 và cấp 2 liên tục trên $\mathbf{R}^3$. Đặt

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

f gọi là một hàm số điều hòa trên $\mathbf{R}^3$ nếu $\Delta f = 0$.

a) Chứng minh rằng nếu f là một hàm số điều hòa trên $\mathbf{R}^3$ và f có các đạo hàm riêng cấp ba liên tục trên $\mathbf{R}^3$ thì $yf'_x - xf'_y$ là một hàm số điều hòa trên $\mathbf{R}^3$.

b) Chứng minh rằng nếu hàm số điều hòa f có các đạo hàm riêng mọi cấp liên tục trên $\mathbf{R}^3$ thì các đạo hàm riêng đó là những hàm số điều hòa trên $\mathbf{R}^3$.

20. Giả sử $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ là một hàm số có các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai liên tục trên $\mathbf{R}^2$. Đặt $u = x + y$, $v = x - y$ và gọi F là hàm số xác định trên $\mathbf{R}^2$ bởi

$$F(u,\ v) = f\left(\frac{u+v}{2},\ \frac{u-v}{2}\right).$$

Chứng minh rằng f thỏa mãn hệ thức

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,\ y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,\ y) - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,\ y) = 0$$

trên $\mathbf{R}^2$ khi và chỉ khi F thỏa mãn trên $\mathbf{R}^2$ hệ thức

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(u,\ v) = 0.$$

21. Giả sử hàm số f có các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai liên tục trên $\mathbf{R}^2$ sao cho

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,\ y) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,\ y) = 0 \qquad (1)$$

với mọi $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, trong đó c là một hằng số thực. Đặt

$$u = x + cy, \; v = x - cy, \; f(x, y) = g(u, v).$$

a) Chứng minh rằng

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) = 0.$$

b) Từ đó suy ra rằng nghiệm tổng quát của (1) là

$$f(x, y) = X(x + cy) + Y(x - cy),$$

trong đó X và Y là những hàm số tùy ý có các đạo hàm cấp hai liên tục trên **R**.

22. Cho hàm số $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $x^2 + y^2 + z^2 > 0$.

Tìm

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

và

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

23. Giả sử hàm số $u = f(r)$ có đạo hàm cấp hai trên **R**, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Chứng minh rằng

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = F(r)$$

và tìm F(r).

24. Giả sử $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ là một hàm số đẳng cấp bậc n và có các đạo hàm riêng cấp m liên tục trên $\mathbf{R}^3$. Chứng minh rằng

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x, y, z) = n(n-1)\cdots(n-m+1)\, f(x, y, z)$$

với mọi $(x, y, z) \in \mathbf{R}^2$ $(m \leqslant n)$.

(f gọi là đẳng cấp bậc n nếu

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z) \text{ với mọi } x, y, z, t \in \mathbf{R}) \quad (1).$$

25. Cho hàm số f xác định trên $\mathbf{R}^2$ bởi

$$f(x, y) = \sin x \sin y.$$

Chứng minh rằng

$$f(x, y) = P(x, y) + o((x^2 + y^2)^2) \qquad (\sqrt{x^2 + y^2} \to 0)$$

trên một lân cận của điểm (0, 0), trong đó P là một đa thức bậc 4.

26. Viết khai triển của hàm số $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x - y}{1 + xy}$ trên một lân cận của điểm (0, 0).

27. Cho hàm số $f(x, y) = x^2 - y^2$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Tìm đạo hàm của f theo hướng p tại điểm (1, 1), p là tia đi qua điểm (1, 1) và tạo với trục hoành góc 60°.

28. Tìm đạo hàm của hàm số $f(x, y) = 1 - \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)$ tại điểm $M\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$ theo hướng của pháp tuyến trong tại điểm M của elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

29. Giả sử hàm số $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ có các đạo hàm riêng liên tục trên một lân cận của điểm $M_o = (x_o, y_o, z_o) \in \mathbf{R}^3$, $\vec{e_1} = (\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1)$, $\vec{e_2} = (\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2)$, $\vec{e_3} = (\cos\alpha_3, \cos\beta_3, \cos\gamma_3)$ là ba vectơ đơn vị đôi một trực giao với nhau. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{\partial f}{\partial e_1}(M_o)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial e_2}(M_o)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial e_3}(M_o)\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(M_o)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(M_o)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}(M_o)\right)^2.$$

30. Tìm hàm số f xác định trên $\mathbf{R}^2$ thỏa mãn các điều kiện sau :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + 2y \text{ với mọi } (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

$f(x, x^2) = 1$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

31. Tìm nghiệm $(x, y) \longmapsto z(x, y)$ của phương trình

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y,$$

thỏa mãn các điều kiện : $z(x, 0) = x$, $z(0, y) = y^2$ với mọi $x, y \in \mathbf{R}$. (Hàm số z có các đạo hàm riêng liên tục trên $\mathbf{R}^2$).

32. Tìm nghiệm $z = z(x, y)$ của phương trình $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$ thỏa mãn các điều kiện : $z(x, 0) = 1$, $z_y'(x, 0) = x$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

33. Tính $d\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}\right)$ và $d(x^y)$.

34. Tính $d(z^{xy})$ và $d((xy)^z)$.

35. Cho hàm số f xác định trên $\mathbf{R}^2$ bởi

$$f(u, v) = \sin(u^2 - v^2)$$

và ánh xạ $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ xác định bởi

$$g(x, y) = (x + y, x - y).$$

Tính $d_{(x, y)}(f \circ g)$.

36. Kí hiệu $(\mathbf{R}^3)^*$ chỉ không gian liên hợp đại số của không gian $\mathbf{R}^3$, tức là không gian các dạng tuyến tính trên $\mathbf{R}^3$; $(\mathbf{R}^3)^*$ là một không gian tuyến tính thực với phép cộng và phép nhân vô hướng xác định một cách thông thường : Nếu φ và ψ là hai dạng tuyến tính trên $\mathbf{R}^3$ và λ là một số thực thì

$$(\varphi + \psi)(M) = \varphi(M) + \psi(M),$$

$$(\lambda\varphi)(M) = \lambda\varphi(M) \text{ với mọi } M = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

Giả sử U là một tập hợp mở trong $\mathbf{R}^3$; P, Q, R là những hàm số xác định trên U. Ánh xạ $\omega : U \to (\mathbf{R}^3)^*$ xác định bởi

$$M = (x, y, z) \longmapsto \omega(M) = P(M)dx + Q(M)dy + R(M)dz$$

được gọi là một dạng vi phân trên U.

(Dạng vi phân $\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ trên một tập hợp mở trong $\mathbf{R}^2$ được định nghĩa tương tự).

Cho dạng vi phân

$$\omega = xdy - ydx.$$

Đặt $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Hãy tính ω theo r, θ, dr và $d\theta$.

37. a) Giả sử $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ là một dạng vi phân, trong đó P và Q là những hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên một tập hợp mở U của $\mathbf{R}^2$. Chứng minh rằng nếu ω là vi phân của một hàm số f có các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai liên tục trên U thì

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \qquad \text{với mọi } (x, y) \in U.$$

b) Cho dạng vi phân

$$\omega = \left(y + \frac{z^2 y}{x^2 + y^2}\right)dx - \left(x + \frac{z^2 x}{x^2 + y^2}\right)dy,$$

trong đó $z = z(x, y)$ là một hàm số thực liên tục và có các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai liên tục trên tập hợp mở $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$. Chứng minh rằng điều kiện cần để ω là vi phân của một hàm số có các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai liên tục trên U là z là nghiệm của một phương trình chứa $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ mà ta sẽ xác định.

c) Gọi phương trình đó là (1). Ta thực hiện phép đổi biến số $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ với $r > 0$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Đặt $Z(r, \theta) = z(x, y)$. Chứng minh rằng phương trình (1) nhận được trong b) trở thành

$$Z\frac{\partial z}{\partial r} + r = 0. \qquad (2)$$

d) Chứng minh rằng các nghiệm $Z(r, \theta)$ của (2) được xác định bởi $[Z(r, \theta)]^2 = f(\theta) - r^2$, trong đó f là một hàm số có đạo hàm liên tục bất kì trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

38. Cho dạng vi phân

$$\omega = (1 + e^{-y})dx + (x - 2)dy.$$

a) ω có phải là vi phân của một hàm số thực f có các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai liên tục trên $\mathbf{R}^2$ hay không ?

b) Xác định một hàm số $y \longmapsto g(y)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbf{R}$ sao cho $g(0) = 1$ và $g(y).\omega$ là vi phân của một hàm số xác định trên $\mathbf{R}^2$.

c) Tìm các hàm số f sao cho $df(x, y) = g(y).\omega$.

39. Giả sử

$$\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

là một dạng vi phân xác định trên một tập hợp mở U trong $\mathbf{R}^3$, trong đó P, Q, R là ba hàm số liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trên U. Chứng minh rằng nếu tồn tại một hàm số f liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trên U sao cho $f(x, y, z).\omega$ là vi phân của một hàm số F thì

$$fP\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + fQ\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + fR\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$$

trên U.

40. Xác định các hàm số $x = x(\theta)$, $y = y(\theta)$, $z = z(\theta)$, $\theta \in \mathbf{R}$ sao cho

$$(x - z)^2 + y^2 = 1 \text{ và } dx + dy = 2dz.$$

41. Tìm các điểm cực trị của hàm số

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27, \ (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

42. Tìm cực trị của hàm số

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy, \ (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

43. Tìm cực trị của hàm số

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2, \ (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

44. Xét cực trị của hàm số

$$f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{tại điểm } (0, 0).$$

45. Tìm cực trị của hàm số

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}, \ (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

46. Giả sử U là một tập hợp mở trong $\mathbf{R}^3$ và $f : U \to \mathbf{R}$ là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên U. Vectơ

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(M), \frac{\partial f}{\partial y}(M), \frac{\partial f}{\partial z}(M) \right)$$

gọi là gradian của hàm số f tại điểm $M = (x, y, z) \in U$, kí hiệu là $(\mathrm{grad} f)(M)$.

Xác định tập hợp mở U trong $\mathbf{R}^2$, trên đó hàm số

$$f(x, y) = \ln[(x - a)^2 + (y - b)^2]$$

có các đạo hàm riêng liên tục. Tính gradian của f tại mỗi điểm $M \in U$.

47. Giả sử U là một tập hợp mở trong $\mathbf{R}^3$,

$$X : U \longrightarrow \mathbf{R}^3$$
$$M = (x, y, z) \longmapsto X(M) = (P(M), Q(M), R(M))$$

là một ánh xạ, trong đó P, Q, R là những hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên U. Vectơ

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y}(M) - \frac{\partial Q}{\partial z}(M), \frac{\partial P}{\partial z}(M) - \frac{\partial R}{\partial x}(M), \frac{\partial Q}{\partial x}(M) - \frac{\partial P}{\partial y}(M) \right)$$

gọi là rôta của X tại điểm M, kí hiệu là $(\mathrm{rot} X)(M)$.

Chứng minh rằng nếu U là một tập hợp mở trong $\mathbf{R}^3$ và $f : U \to \mathbf{R}$ là một hàm số có các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai liên tục trên U thì

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad} f) = 0 \text{ trên } U.$$

48. Tìm các điểm $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ sao cho phương trình $x - \sin y = 0$ xác định trên một lân cận của điểm đó hàm số $x \mapsto y(x)$ có đạo hàm liên tục.

49. a) Chứng minh rằng phương trình

$$f(x, y) = y + x^2 + y^2 + x^3 + y^3 = 0$$

xác định trên một lân cận của điểm 0 một hàm số $y = \varphi(x)$ sao cho $\varphi(0) = 0$

b) Viết khai triển bậc ba của φ trên một lân cận của điểm 0.

50. Chứng minh rằng phương trình

$$f(x, y) = xy^4 - x^3 + y = 0$$

xác định một hàm số ẩn $x \mapsto y = \varphi(x)$ trên một lân cận của điểm 0 và tính hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị của φ tại điểm $(0, 0)$.

51. Tìm các điểm $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ sao cho phương trình

$$x^2 + xy + y^2 = 3$$

xác định trên một lân cận của điểm đó một hàm số ẩn $x \mapsto y = \varphi(x)$. Tính $\varphi'(x)$ và $\varphi''(x)$.

52. Chứng minh rằng phương trình

$$x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0$$

xác định trên một lân cận của điểm $(0, 1)$ một hàm số ẩn $x \mapsto y(x)$.

Tính y', y'', y''' tại điểm 0.

53. Chứng minh rằng phương trình

$$f(x, y, z) = z^3 - 3xyz - a^3 = 0 \qquad (1)$$

xác định trên một lân cận của điểm (x, y, z) ((x, y, z) là một nghiệm của phương trình (1) và $z^2 \neq xy$) một hàm số ẩn $(x, y) \mapsto z(x, y)$. Tính các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai của hàm số z.

54. Chứng minh rằng phương trình

$$f(x, y, z) = xy + xz + yz + 2x + 2y - z = 0$$

xác định một hàm số ẩn $(x, y) \mapsto z = \varphi(x, y)$ trên một lân cận của điểm $(0, 0)$. Tính các đạo hàm riêng φ_x' và φ_y' tại điểm $(0, 0)$.

55. Tìm các điểm cực trị của hàm số ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi phương trình

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0.$$

56. Giả sử U là một tập hợp mở trong $\mathbf{R}^2$; f, g là hai hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên U sao cho

$$af(x, y) + bg(x, y) = 0 \text{ với mọi } (x, y) \in U,\ a, b \in \mathbf{R},\ a \neq 0.$$

Chứng minh rằng

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{trên } U.$$

57. Giả sử (x_0, y_0, z_0) là một nghiệm của phương trình

$$f(x, y, z) = 0 \ (1)$$

trong đó f là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên một tập hợp mở U trong $\mathbf{R}^3$, $f_x'(M_0) \neq 0$, $f_y'(M_0) \neq 0$, $f_z'(M_0) \neq 0$ ($M_0 = (x_0, y_0, z_0)$). Chứng minh rằng phương trình (1) xác định trên một lân cận của điểm M_0 các hàm số ẩn $(y, z) \mapsto x(y, z)$, $(x, z) \mapsto y(x, z)$, $(x, y) \mapsto z(x, y)$ có các đạo hàm riêng và liên tục trên lân cận đó, ta có

$$\frac{\partial x}{\partial y}(y, z) \cdot \frac{\partial y}{\partial z}(x, z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -1.$$

58. Giả sử (x_0, y_0, x_0) là một nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x, y, z) = x + y + z = 0 \\ g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Chứng minh rằng hệ phương trình trên xác định trên một lân cận của điểm $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ $(y_0 \neq z_0)$ một hệ hàm số ẩn $x \mapsto y(x)$, $x \mapsto z(x)$ có các đạo hàm liên tục. Tính $y'(x)$ và $z'(x)$.

59. Chứng minh rằng hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{z^2}{2} \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

xác định trên một lân cận của điểm $M_o(1, -1, 2)$ một hệ hàm số ẩn $z \mapsto x(z)$, $z \mapsto y(z)$. Tính các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai của hai hàm số đó tại điểm $z_o = 2$.

60. Giả sử $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ là những hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên một tập hợp mở U của $\mathbf{R}^2$, $(u_o, v_o) \in U$ và

$$J(u,v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{tại điểm } (u_o, v_o).$$

Tìm các đạo hàm riêng của các hàm số thành phần của hàm ngược

$$(x, y) \mapsto (u, v) = (u(x, y), v(x, y))$$

của hàm

$$(u, v) \mapsto (x, y) = (x(u, v), y(u, v))$$

trên một lân cận đủ nhỏ của điểm $(x_o, y_o) = (x(u_o, v_o), y(u_o, v_o))$.

61. Tìm các điểm $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ sao cho trên một lân cận của điểm đó hệ phương trình

$$x = u + v,\ y = u^2 + v^2,\ z = u^3 + v^3$$

xác định z là một hàm số của x, y. Tính $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ và $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

BÀI GIẢI VÀ HƯỚNG DẪN

2. Ta có

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} - f'(x) = \left[\frac{f(b_n) - f(x)}{b_n - x} - f'(x)\right]\frac{b_n - x}{b_n - a_n} +$$

$$+ \left[\frac{f(x) - f(a_n)}{x - a_n} - f'(x)\right]\frac{x - a_n}{b_n - a_n} \quad (1)$$

vì $\frac{b_n - x}{b_n - a_n} + \frac{x - a_n}{b_n - a_n} = 1$. Do $0 < \frac{b_n - x}{b_n - a_n} < 1$ và $0 < \frac{x - a_n}{b_n - a_n} < 1$

nên vế phải của đẳng thức (1) dần đến 0 khi $n \to \infty$.

3. Ta có $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{1 + xe^{i/x^2}}$ với mọi $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$.

$$|xe^{\frac{i}{x^2}}| = |x| \to 0 \text{ khi } x \to 0. \text{ Do đó } \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{1 + 2xe^{i/x^2} - \frac{2i}{x} e^{i/x^2}};$$

$$\left| 1 + 2xe^{i/x^2} - \frac{2i}{x} e^{i/x^2} \right| \geq \left| \left| \frac{2i}{x} e^{i/x^2} \right| - \left| 1 + 2xe^{i/x^2} \right| \right| \geq$$

$$\geq \left| \frac{2}{x} - 1 - 2x \right| \text{ với mọi } x \in (0, 1).$$

Do đó $\lim_{x \to 0} \left| 1 + 2xe^{i/x^2} - \frac{2i}{x} e^{i/x^2} \right| = +\infty$. Vậy $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$.

4. Ta có

$$f(t) = f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{2} f''(0) + \frac{t^3}{6} f'''(0) + t^3.o(1) \quad (t \to 0)$$

trong đó $f(0) = (0, 0, 0)$, $f'(0) = (1, 1, 1)$, $f''(0) = (0, 0, -1)$, $f'''(0) = (-1, 2, 2)$.

5. $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)'(x) = \vec{V}_1'(x) \wedge \vec{V}_2(x) + \vec{V}_1(x) \wedge \vec{V}_2'(x)$,

$$((\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2).\vec{V}_3)'(x) = (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)'(x).\vec{V}_3(x) + (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)(x).\vec{V}_3'(x) =$$

$$= (\vec{V}_1'(x), \vec{V}_2(x), \vec{V}_3(x)) + (\vec{V}_1(x), \vec{V}_2'(x), \vec{V}_3(x)) + $$
$$+ (\vec{V}_1(x), \vec{V}_2(x), \vec{V}_3'(x))$$

với mọi $x \in (a, b)$.

6. $F'_x(x, y) = \int_0^y 2(x - t) \dfrac{\text{sh}t}{\sqrt{1 + t^2}} dt$; $F'_y(x, y) = (x - y)^2 \dfrac{\text{sh}y}{\sqrt{1 + y^2}}$.

7. $\dfrac{\partial P}{\partial x} = -\dfrac{z}{x^2 + y^2 + z^2} + \dfrac{2x^2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$; $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = -\dfrac{z}{x^2 + y^2 + z^2} +$
$+ \dfrac{2y^2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$;

$\text{div}X = -\dfrac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} + \dfrac{2z(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \dfrac{\partial t}{\partial z}$. Vì vậy $\text{div}V = 0$ khi và chỉ khi $\dfrac{\partial t}{\partial z} = \dfrac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} - \dfrac{2z(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$. Do đó

$$t = \ln(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \varphi(x, y),$$

φ là một hàm số bất kì có các đạo hàm riêng liên tục trên $\mathbf{R}^2$. Vì t thỏa mãn điều kiện $t(x, y, 0) = \ln(x^2 + y^2)$ nên từ đó suy ra $\varphi(x, y) = -1$ với mọi $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Do đó

$$t = \ln(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \text{ với } x^2 + y^2 + z^2 > 0.$$

8. $\dfrac{\partial x}{\partial u} = f'(u)\cos v$, $\dfrac{\partial x}{\partial v} = -f(u)\sin v$, $\dfrac{\partial y}{\partial u} = g'(u)\sin v$, $\dfrac{\partial y}{\partial v} = g(u)\cos v$.

Theo giả thiết, ta có

$$\begin{cases} f'(u)\cos v = g(u)\cos v \\ -f(u)\sin v = -g'(u)\sin v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(u) = g(u) \\ g'(u) = f(u) \end{cases}$$

Do đó $f''(u) = f(u)$. Theo hướng dẫn trong đề bài, dễ dàng tìm được $f(u) = \text{ch}u$ và $g(u) = \text{sh}u$.

9. Ta có

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{2x + \frac{\partial}{\partial x} f[u(x,y)]}{2\sqrt{x^2 + f[u(x,y)]}} = \frac{2x + f'[u(x,y)]u_x'(x,y)}{2\sqrt{x^2 + f[u(x,y)]}} = \frac{x + 3x^2 f'[u(x,y)]}{\sqrt{x^2 + f[u(x,y)]}},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{f'[u(x,y)]u_y'(x,y)}{2\sqrt{x^2 + f[u(x,y)]}} = \frac{15y^2 f'[u(x,y)]}{2\sqrt{x^2 + f[u(x,y)]}}.$$

Thay vào phương trình đã cho trong đề bài, chuyển vế và rút gọn ta được

$$(a - 1)xy^2 + \left(3a + \frac{15}{2}b\right) f'[u(x,y)]x^2y^2 = 0.$$

Từ đó ta tìm được $a = 1$, $b = -\frac{2}{5}$.

10. Ta có $g_x'(x, u) = f_x'(x, ux) + f_y'(x, ux)u$,

$$g_{x^2}''(x, u) = f_{x^2}''(x, ux) + 2f_{xy}''(x, ux)u + f_{y^2}''(x, ux)u^2.$$

Đặt $ux = y$, ta được $u = \frac{y}{x}$ với $x \neq 0$ và

$$g_{x^2}''(x, u) = f_{x^2}''(x, y) + 2f_{xy}''(x, y)\frac{y}{x} + f_{y^2}''(x, y)\frac{y^2}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{x^2}[x^2 f_{x^2}''(x, y) + 2xyf_{xy}''(x, y) + y^2 f_{y^2}''(x, y)] = 0$$

với mọi $(x, u) \in \mathbf{R}^2$, $x \neq 0$. Vì g_{x^2}'' liên tục trên $\mathbf{R}^2$ nên từ đó suy ra $g_{x^2}''(0, u) = 0$ với mọi $u \in \mathbf{R}$. Vậy $g_{x^2}''(x, u) = 0$ với mọi $(x, u) \in \mathbf{R}^2$.

11. c) Ta có $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) =$
$= \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2y}{(x^2 + y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$ nếu

$(x, y) \neq (0, 0)$. Vì $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ và $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ không có giới hạn tại điểm $(0, 0)$ nên $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ và $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ gián đoạn tại điểm $(0, 0)$.

d) Vì $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{1}{y^2} = +\infty$

nên không tồn tại $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$. Tương tự không tồn tại $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$.

12. a) Ta có $f_x'(x, y) = -\dfrac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$, $f_y'(x, y) = \dfrac{4x^2y^3 + 2y^5}{(x^2 + y^2)^2}$ với $(x, y) \neq (0, 0)$. Vì $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f_x'(x, y) = 0 = f_x'(0, 0)$ và

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f_y'(x, y) = 0 = f_y'(0, 0)$ nên f_x' và f_y' liên tục tại điểm $(0, 0)$.

b) $$f_{xy}''(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f_x'(0, y) - f_x'(0, 0)}{y} = 0\ ;$$

$$f_{yx}''(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f_y'(x, 0) - f_y'(0, 0)}{x} = 0.$$

15. Theo giả thiết, tồn tại một số thực $M > 0$ sao cho

$$|f_x'(x, y)| \leq M \text{ và } |f_y'(x, y)| \leq M \text{ với mọi } (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Theo định lí Lagrăng, tồn tại một số $\theta \in (0, 1)$ sao cho

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = (x_2 - x_1)\frac{\partial f}{\partial x}(x_1 + \theta(x_2 - x_1), y_1 + \theta(y_2 - y_1)) +$$

$$+ (y_2 - y_1)\frac{\partial f}{\partial y}(x_1 + \theta(x_2 - x_1), y_1 + \theta(y_2 - y_1)).$$

Do đó

$|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| \leq M(|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|)$ với mọi $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbf{R}^2$.

Từ đó dễ dàng suy ra rằng f liên tục đều trên $\mathbf{R}^2$.

16. Theo giả thiết, tồn tại một số $M > 0$ sao cho

$$|f'_y(x, y)| \leq M \text{ với mọi } (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Giả sử $(x_o, y_o) \in \mathbf{R}^2$ và ε là một số dương cho trước bất kì. Với mọi $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$|f(x, y) - f(x_o, y_o)| \leq |f(x, y) - f(x, y_o)| + |f(x, y_o) - f(x_o, y_o)|$$

Theo định lí về số gia hữu hạn, tồn tại $\theta \in (0, 1)$ sao cho

$$f(x, y) - f(x, y_o) = f'_y(x, y_o + \theta(y - y_o))\,(y - y_o).$$

Do đó

$$|f(x, y) - f(x, y_o)| \leq M|y - y_o|$$

$$\Rightarrow \quad |f(x, y) - f(x, y_o)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ nếu } |y - y_o| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Vì hàm số $x \mapsto f(x, y_o)$ liên tục tại x_o nên tồn tại $\delta_1 > 0$ sao cho

$$|x - x_o| < \delta_1 \Rightarrow |f(x, y_o) - f(x_o, y_o)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Đặt $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2M}, \delta_1\right\}$. Khi đó

$|x - x_o| < \delta,\ |y - y_o| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x_o, y_o)| < \varepsilon.$

17. $f'_x(x, y) = -e^x \ln x$; $f'_y(x, y) = e^y \ln y$;

$$f''_{x^2}(x, y) = -e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right) ; \quad f''_{y^2} = e^y\left(\ln y + \frac{1}{y}\right) ;$$

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 0.$$

18. $P(x, y) = a(x^3 - 3xy^2) + b(3x^2y - y^3)$, $a, b \in \mathbf{R}$.

22. Đặt $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, ta được $u = \frac{1}{r}$. Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cdot r'_x = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}$$ Tương tự

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{r^3},\ \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}.$$

Do đó

$$\Delta_1 u = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^6} = \frac{1}{r^4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} - x\left(-\frac{3}{r^4}\right)r'_x = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5},\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}.$$ Do đó

$$\Delta_2 u = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0.$$

24. Lấy đạo hàm theo t đẳng thức (1) trong đề bài, ta được

$$nt^{n-1}f(x,\ y,\ z) = \left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right)(tx,\ ty,\ tz) =$$

$$= \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right) f(tx,\ ty,\ tz),$$

$$n(n-1)t^{n-2}f(x, y, z) = \left(x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + z^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)(tx, ty, tz) +$$

$$+\left(2xy\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + 2xz\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} + 2yz\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}\right)(tx,\ ty,\ tz) =$$

$$= \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f(tx,\ ty,\ tz),$$

. . . .

$$n(n-1)\ \ldots\ (n-m+1)t^{n-m}f(x,\ y,\ z) =$$

$$= \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(tx,\ ty,\ tz).$$

Thay $t = 1$, ta được đẳng thức cần chứng minh.

25. Ta có $f'_x(x, y) = \cos x \sin y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\sin y$. Bằng quy nạp ta chứng minh được

$f^{(m+n)}_{x^m y^n}(x, y) = \sin\left(x + m\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(y + n\frac{\pi}{2}\right)$. Do đó

$f^{(m+n)}_{x^m y^n}(0, 0) = \sin m\frac{\pi}{2}\sin n\frac{\pi}{2}$; $f^{(m+n)}_{x^m y^n}(0, 0) = 0$ nếu m hoặc n chẵn ;

$$f^{(2k+1+2l+1)}_{x^{2k+1}y^{2l+1}}(0, 0) = \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(l\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k(-1)^l.$$

Áp dụng công thức Mac–Lôranh cho hàm số hai biến số, ta được

$$f(x, y) = f(0, 0) + \sum_{k=1}^{4}\frac{1}{k!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(0, 0) + o((x^2 + y^2)^2)$$

$$(\sqrt{x^2 + y^2} \to 0)$$

$$f(x, y) = xy - \frac{1}{6}xy(x^2 + y^2) + o((x^2 + y^2)^2) \quad (\sqrt{x^2 + y^2} \to 0).$$

26. Ta có $\operatorname{arctg}\frac{x - y}{x + y} = \operatorname{arctg}x - \operatorname{arctg}y$.

$$(\operatorname{arctg}x)' = \frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

$$(x \to 0)$$

$$\operatorname{arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$(x \to 0)$$

$$\operatorname{arctg}y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \ldots + (-1)^n\frac{y^{2n+1}}{2n+1} + o(y^{2n+2})$$

$$(y \to 0)$$

Do đó

$$\text{arctg}\frac{x-y}{1+xy} = x - y - \frac{1}{3}(x^3 - y^3) + \frac{1}{5}(x^5 - y^5) - \frac{1}{7}(x^7 - y^7) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}(x^{2n+1} - y^{2n+1}) + o((x^2 + y^2)^{n+1}) \quad (\sqrt{x^2 + y^2} \to 0).$$

27. Hàm số f có các đạo hàm riêng liên tục trên $\mathbf{R}^2$: $f'_x(x, y) = 2x$; $f'_y(x, y) = -2y$.

$$\frac{\partial f}{\partial p}(1, 1) = f'_x(1, 1)\cos 60^o + f'_y(1, 1)\sin 60^o = 1 - \sqrt{3}.$$

28. Phương trình tiếp tuyến của elip tại điểm (x_o, y_o) là : $\frac{xx_o}{a^2} + \frac{yy_o}{b^2} = 1$. Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm M là : $y'(1, 1) = -\frac{b}{a}$. Vectơ đơn vị chỉ hướng của pháp tuyến trong của elip tại điểm M là : $\vec{n} = \left(-\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$ (ta lấy dấu – vì đó là pháp tuyến trong).

$$\frac{\partial f}{\partial n}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(M)\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}(M)\left(-\frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial n}(M) = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2)}}{ab}.$$

29. Vì f có các đạo hàm riêng liên tục trên một lân cận của điểm M_o nên

$$\frac{\partial f}{\partial e_1}(M_o) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_o)\cos\alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(M_o)\cos\beta_1 + \frac{\partial f}{\partial z}(M_o)\cos\gamma_1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial e_2}(M_o) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_o)\cos\alpha_2 + \frac{\partial f}{\partial y}(M_o)\cos\beta_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(M_o)\cos\gamma_2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial e_3}(M_o) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_o)\cos\alpha_3 + \frac{\partial f}{\partial y}(M_o)\cos\beta_3 + \frac{\partial f}{\partial z}(M_o)\cos\gamma_3.$$

Do đó

$$\operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy} = x - y - \frac{1}{3}(x^3 - y^3) + \frac{1}{5}(x^5 - y^5) - \frac{1}{7}(x^7 - y^7) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}(x^{2n+1} - y^{2n+1}) + o((x^2 + y^2)^{n+1}) \quad (\sqrt{x^2 + y^2} \to 0).$$

27. Hàm số f có các đạo hàm riêng liên tục trên $\mathbf{R}^2$: $f'_x(x, y) = 2x$; $f'_y(x, y) = -2y$.

$$\frac{\partial f}{\partial p}(1, 1) = f'_x(1, 1)\cos 60^\circ + f'_y(1, 1)\sin 60^\circ = 1 - \sqrt{3}.$$

28. Phương trình tiếp tuyến của elip tại điểm (x_o, y_o) là : $\frac{xx_o}{a^2} + \frac{yy_o}{b^2} = 1$. Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm M là : $y'(1, 1) = -\frac{b}{a}$. Vectơ đơn vị chỉ hướng của pháp tuyến trong của elip tại điểm M là : $\vec{n} = \left(-\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$ (ta lấy dấu − vì đó là pháp tuyến trong).

$$\frac{\partial f}{\partial n}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(M)\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}(M)\left(-\frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial n}(M) = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2)}}{ab}.$$

29. Vì f có các đạo hàm riêng liên tục trên một lân cận của điểm M_o nên

$$\frac{\partial f}{\partial e_1}(M_o) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_o)\cos\alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(M_o)\cos\beta_1 + \frac{\partial f}{\partial z}(M_o)\cos\gamma_1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial e_2}(M_o) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_o)\cos\alpha_2 + \frac{\partial f}{\partial y}(M_o)\cos\beta_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(M_o)\cos\gamma_2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial e_3}(M_o) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_o)\cos\alpha_3 + \frac{\partial f}{\partial y}(M_o)\cos\beta_3 + \frac{\partial f}{\partial z}(M_o)\cos\gamma_3.$$

Do đó

$$\left(\frac{\partial f}{\partial e_1}(M_o)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial e_2}(M_o)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial e_3}(M_o)\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(M_o)\right)^2(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3) +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial y}(M_o)\right)^2(\cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\beta_3) +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial z}(M_o)\right)^2(\cos^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_2 + \cos^2\gamma_3) +$$

$$+ 2\frac{\partial f}{\partial x}(M_o)\frac{\partial f}{\partial y}(M_o)(\cos\alpha_1\cos\beta_1 + \cos\alpha_2\cos\beta_2 + \cos\alpha_3\cos\beta_3) +$$

$$+ 2\frac{\partial f}{\partial x}(M_o)\frac{\partial f}{\partial z}(M_o)(\cos\alpha_1\cos\gamma_1 + \cos\alpha_2\cos\gamma_2 + \cos\alpha_3\cos\gamma_3) +$$

$$+ 2\frac{\partial f}{\partial y}(M_o)\frac{\partial f}{\partial z}(M_o)(\cos\beta_1\cos\gamma_1 + \cos\beta_2\cos\gamma_2 + \cos\beta_3\cos\gamma_3).$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix}$$

là ma trận chuyển cơ sở trực chuẩn $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sang cơ sở trực chuẩn $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ nên nó là một ma trận trực giao. Do đó các vectơ dòng của ma trận là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbf{R}^3$. Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.

30. Ta có $f(x, y) = x^2y + y^2 + \varphi(x)$ với mọi $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, trong đó φ là một hàm số bất kì của biến số x xác định trên $\mathbf{R}$. Theo giả thiết, ta có $f(x, x^2) = x^2.x^2 + (x^2)^2 + \varphi(x) = 1$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Do đó $\varphi(x) = 1 - 2x^4$. Vậy

$$f(x, y) = x^2y + y^2 - 2x^4 + 1, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

31. Từ phương trình $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = x + y$ suy ra

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{2} + yx + \varphi(y)$, trong đó $y \mapsto \varphi(y)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbf{R}$. Do đó

$$z(x, y) = \frac{x^2y}{2} + \frac{xy^2}{2} + \int_0^y \varphi(y)dy + \psi(x) \text{ với mọi } (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

trong đó $x \mapsto \psi(x)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbf{R}$.

Từ phương trình $z(x, 0) = x$ suy ra $\psi(x) = x$. Vì vậy

$$z(x, y) = \frac{x^2y}{2} + \frac{xy^2}{2} + \varphi_1(y) + x, \quad \text{với mọi } (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

$y \mapsto \varphi_1(y)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbf{R}$. Từ phương trình $z(0, y) = y^2$ suy ra $\varphi_1(y) = y^2$. Vậy

$$z(x, y) = \frac{x^2y}{2} + \frac{xy^2}{2} + x + y^2 \text{ với mọi } (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

32. $z(x, y) = y^2 + xy + 1$ với mọi $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

33. $$d\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{ydx - xdy}{y^2} =$$

$$= \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}, \text{ với } (x, y) \neq (0, 0).$$

$$d(x^y) = yx^{y-1}dx + x^y\ln x dy \quad (x > 0, y \in \mathbf{R}).$$

34. $d(z^{xy}) = z^{xy}\ln z\, ydx + z^{xy}\ln z\, xdy + xyz^{xy-1}dz,$

$$\begin{aligned} d[(xy)^z] &= z(xy)^{z-1}d(xy) + (xy)^z\ln(xy)dz = \\ &= z(xy)^{z-1}(ydx + xdy) + (xy)^z\ln xy)dz = \\ &= zx^{z-1}y^zdx + zx^zy^{z-1}dy + (xy)^z\ln(xy)dz \quad (xy > 0). \end{aligned}$$

35. $$d_{(u,v)}f = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)du + \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)dv =$$

$$= 2u\cos(u^2 - v^2)du - 2v\cos(u^2 - v^2)dv,$$

$$\begin{aligned} d_{(x,y)}(f \circ g) &= 2(x + y)\cos[(x + y)^2 - (x - y)^2]d_{(x,y)}(x + y) - \\ &- 2(x - y)\cos[(x + y)^2 - (x - y)^2]d_{(x,y)}(x - y) = \end{aligned}$$

$= 2(x + y)\cos(4xy)(dx + dy) - 2(x - y)\cos(4xy)(dx - dy)$;

$d_{(x,\ y)}(f.g) = 4y\cos(4xy)dx + 4x\cos4(xy)dy.$

36. $\omega = r\cos\theta d(r\sin\theta) - r\sin\theta d(r\cos\theta) =$

$= r\cos\theta(\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta) - r\sin\theta(\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta),$

$\omega = r^2 d\theta.$

37. a) Nếu ω là vi phân của một hàm số f trên U thì

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \ , \ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y).$$

Vì $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ và $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ đều liên tục trên U nên chúng bằng nhau trên U. Do đó

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ trên U.}$$

b) Điều kiện cần để ω là vi phân của một hàm số f trên U là

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y + \frac{z^2 y}{x^2 + y^2}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(x + \frac{z^2 x}{x^2 + y^2}\right) \text{ với mọi } (x, y) \in U,$$

$$1 + \frac{z^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2yz}{x^2 + y^2} z_y' = -\left(1 + \frac{z^2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2xz}{x^2 + y^2} z_x'\right)$$

$$\Leftrightarrow \qquad z(xz_x' + yz_y') + x^2 + y^2 = 0. \qquad (1)$$

c) $\frac{\partial Z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = z_x'\cos\theta + z_y'\sin\theta,$

$$r\frac{\partial Z}{\partial r} = xz_x' + yz_y'.$$

Thay vào phương trình (1) và rút gọn ta được phương trình

$$Z\frac{\partial Z}{\partial r} + r = 0. \qquad (2)$$

d) Vì $Z\dfrac{\partial Z(r,\theta)}{\partial r} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial r}(Z^2(r,\theta))$ nên thay vào (2) ta được

$$\frac{\partial}{\partial r}[Z^2(r,\theta)] = -2r.$$

Từ đó dễ dàng suy ra điều cần chứng minh.

38. a) Vì $\dfrac{\partial}{\partial y}(1 + e^{-y}) = -e^{-y} \neq \dfrac{\partial}{\partial x}(x - 2) = 1$ nên ω không phải là vi phân của một hàm số f có các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai liên tục trên $\mathbf{R}^2$.

b) Điều kiện cần để $g(y).\omega$ là vi phân của một hàm số trên $\mathbf{R}^2$ là

$$\frac{\partial}{\partial y}[g(y)(1 + e^{-y})] = \frac{\partial}{\partial x}[g(y)(x - 2)] \text{ với mọi } (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

$$g'(y)(1 + e^{-y}) - g(y)e^{-y} = g(y)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{g'(y)}{g(y)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad g(y) = e^y + C.$$

Từ điều kiện $g(0) = 1$ suy ra $C = 0$. Vậy $g(y) = e^y$, $y \in \mathbf{R}$.

c) Ta sẽ chứng minh rằng đó cũng là điều kiện đủ. Thật vậy, $df(x, y) = g(y).\omega \Leftrightarrow df(x, y) = e^y(1 + e^{-y})dx + e^y(x - 2)dy$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^y + 1 \text{ và } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^y(x - 2) \qquad (1)$$

với mọi $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Từ phương trình thứ nhất của (1) suy ra

$$f(x, y) = xe^y + x + \varphi(y) \qquad (2)$$

trong đó $y \mapsto \varphi(y)$ là một hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbf{R}$. Từ phương trình thứ hai của (1) và phương trình (2) suy ra

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^y + \varphi'(y) = xe^y - 2e^y$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi'(y) = -2e^y \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(y) = -2e^y + C.$$

Vậy $f(x, y) = e^y(x - 2) + x + C$, C là một hằng số thực.

40. Tồn tại $\theta \in \mathbf{R}$ sao cho $x - z = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ Phương trình $dx + dy = 2dz$ kéo theo $2z = x + y + C$

$\Rightarrow z - y = x - z + C = \cos\theta + C \Rightarrow z = \sin\theta + \cos\theta + C.$

$x = z + \cos\theta = \sin\theta + 2\cos\theta + C$, C là một hằng số thực.

41. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 9y$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 9x.$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -9 \ ;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -9 \ ;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3, 3) = 18 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3, 3) = 18 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(3, 3) = -9.$$

- Vì $\Delta(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{vmatrix} = -81 < 0$ nên hàm số f không có cực trị tại điểm (0, 0).

- Vì $\Delta(3, 3) = \begin{vmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{vmatrix} > 0$ và $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3, 3) > 0$ nên f có cực tiểu tại điểm (3, 3).

42. Hàm số f có hai điểm dừng : (0, 0) và (1, 1). Hàm số không có cực trị tại điểm (0, 0). Hàm số có cực tiểu tại điểm (1, 1).

43. $f'_x(x, y) = 4x^3 - 2x - 2y$; $f'_y(x, y) = 4y^3 - 2x - 2y.$

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - x - y = 0 \\ 2y^3 - x - y = 0 \end{cases}$$

ta thấy f có ba điểm dừng : (0, 0) ; (1, 1) ; (−1, −1).

$$f''_{x^2}(x, y) = 12x^2 - 2\ ;\ f''_{y^2}(x, y) = 12y^2 - 2\ ;\ f''_{xy}(x, y) = -2.$$

$$\Delta(\pm 1, \pm 1) = \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = 96 > 0,\ f''_{x^2}(\pm 1, \pm 1) = 10 > 0.$$

Hàm số f có cực tiểu $f(\pm 1, \pm 1) = -2$.

$\Delta(0, 0) = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$. Chưa kết luận được f có cực trị hay không tại điểm $(0, 0)$. Tuy nhiên, ta có $f(0, 0) = 0$. Với $y = -x \neq 0$, $f(x, y) = 2x^2 > 0$. Với $x = y$, $f(x, y) = 2x^2(x^2 - 2) < 0$ nếu $0 < |x| < \sqrt{2}$. Vậy f không có cực trị tại điểm $(0, 0)$.

44. $f'_x(x, y) = \dfrac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ ;\ f'_y(x, y) = \dfrac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ ;\ x^2 + y^2 > 0.$

Hàm số f không có điểm dừng. Tuy nhiên $f(0, 0) = 1$, $f(x, y) < 1$ với mọi $(x, y) \neq (0, 0)$. Vậy f có cực đại tại điểm $(0, 0)$.

45. $$f'_x(x, y) = [2x - 2x(x^2 + y^2)]e^{-(x^2 + y^2)},$$

$$f'_y(x, y) = [2y - 2y(x^2 + y^2)]e^{-(x^2 + y^2)}.$$

Dễ dàng thấy rằng điểm $(0, 0)$ và các điểm $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ sao cho $x^2 + y^2 = 1$ là tất cả các điểm dừng của f.

$$f''_{x^2}(x, y) = [4x^2(x^2 + y^2) - 10x^2 - 2y^2 + 2]\,e^{-(x^2 + y^2)},$$

$$f''_{y^2}(x, y) = [4y^2(x^2 + y^2) - 10y^2 - 2x^2 + 2]\,e^{-(x^2 + y^2)},$$

$$f''_{xy}(x, y) = 4xy(x^2 + y^2 - 2)e^{-(x^2 + y^2)}.$$

$\Delta(0, 0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$, $f''_{x^2}(0, 0) = 2 > 0$. Hàm số f có cực tiểu tại điểm $(0, 0)$.

• Có thể lập luận gọn hơn : $f(0, 0) = 0$, $f(x, y) > 0$ với mọi $(x, y) \neq (0, 0)$. Vậy f có cực tiểu tại điểm $(0, 0)$.

Để xét cực trị của hàm số f tại các điểm $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ sao cho $x^2 + y^2 = 1$, đặt $t = x^2 + y^2$, ta được $z = f(x, y) = te^{-t}$, $t \geq 0$. Ta xem z là hàm số một biến số

$$z' = (1 - t)e^{-t}\ ;\ z' = 0 \iff t = 1.$$

$z'' = (t - 2)e^{-t}$; $z''(1) = -e^{-1} < 0$. Hàm số z có cực đại tại điểm $t = 1$. Do đó hàm số f có cực đại tại các điểm (x, y) thuộc đường tròn $x^2 + y^2 = 1$. Giá trị của f tại các điểm này là : e^{-1}.

46. Hàm số f xác định trên tập hợp $U = \mathbf{R}^2 \setminus \{(a, b)\}$.

$$f'_x(x, y) = \frac{2(x-a)}{(x-a)^2 + (y-b)^2}\ ;\ f'_y(x, y) = \frac{2(y-b)}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

với mọi $(x, y) \in U$; f'_x và f'_y là hai hàm số liên tục trên U.

$$(\text{grad}f)(x, y) = \left(\frac{2(x-a)}{(x-a)^2 + (y-b)^2}, \frac{2(y-b)}{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right),$$

với mọi $M = (x, y) \in U$.

47. $(\text{grad}f)(M) = (f'_x(M), f'_y(M), f'_z(M))$, $M \in U$.

$$\text{rot}(\text{grad}f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \\ f'_z \end{pmatrix} =$$

$$= (f''_{zy} - f''_{yz}, f''_{xz} - f''_{zx}, f''_{yx} - f''_{xy}) = 0 \text{ trên } U,$$

vì các đạo hàm riêng cấp hai của f đều liên tục trên U.

49. a) (0, 0) là một nghiệm của phương trình đã cho.

$f'_x(x, y) = 2x + 3x^2$, $f'_y(x, y) = 1 + 2y + 3y^2$, f'_x và f'_y đều liên tục trên $\mathbf{R}^2$; $f'_y(0, 0) = 1 \neq 0$. Vậy phương trình đã cho xác định trên một lân cận của điểm (0, 0) một hàm số ẩn $y = \varphi(x)$ có đạo hàm liên tục.

b) Ta có

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{\varphi''(0)}{2}x^2 + \frac{\varphi'''(0)}{6}\cdot x^3 + x^3.o(1)\ \ (x \to 0).$$

Lấy đạo hàm phương trình đã cho theo x, xem y là hàm số của x, ta được

$$2x + 3x^2 + (1 + 2y + 3y^2)y' = 0 \qquad (1)$$

Vì $y(0) = 0$ nên thay $x = 0$ vào phương trình trên, ta được $y'(0) = 0$. Lấy đạo hàm theo x phương trình (1), ta được

$$2 + 6x + (2 + 6y)y'^2 + (1 + 2y + 3y^2)y'' = 0 \qquad (2)$$

Thay $x = 0$ vào (2), ta được $y''(0) = -2$.

Lấy đạo hàm theo x phương trình (2), ta được

$$6 + 6y'^3 + 12yy'y'' + (2 + 6y)y'y'' + (1 + 2y + 3y^2)y''' = 0.$$

Thay $x = 0$ vào phương trình trên, ta được $y'''(0) = -6$. Do đó

$$\varphi(x) = -x^2 - x^3 + x^3.o(1) \qquad (x \to 0)$$

50. $\varphi'(x) = -\dfrac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} = \dfrac{3x^2 - y^4}{4xy^3 + 1}$; $\varphi'(0) = 0$.

51. Giả sử (x_o, y_o) là một nghiệm của phương trình đã cho. Ta có $f'_x(x,y) = 2x + y$, $f'_y(x,y) = x + 2y$; f'_x và f'_y đều liên tục trên $\mathbf{R}^2$, $f'_y(x,y) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2y$. Khi đó phương trình đã cho xác định trên một lân cận của điểm (x_o, y_o), $x_o \neq -2y_o$ một hàm số ẩn $y = \varphi(x)$ có đạo hàm liên tục.

$$\varphi'(x) = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} = -\frac{2x + y}{x + 2y},$$

$$\varphi''(x) = -\frac{(x + 2y)(2 + y') - (2x + y)(1 + 2y')}{(x + 2y)^2} = \frac{3xy' - 3y}{(x + 2y)^2},$$

$$\varphi''(x) = \frac{-\dfrac{3x(2x + y)}{x + 2y} - 3y}{(x + 2y)^2} = \frac{-18}{(x + 2y)^3}.$$

52. $y'(0) = 0$; $y''(0) = -\dfrac{2}{3}$; $y'''(0) = -\dfrac{2}{3}$.

53. $f'_x(x, y, z) = -3yz$, $f'_y(x, y, z) = -3xz$, $f'_z(x, y, z) = 3z^2 - 3xy$;

f'_x, f'_y, f'_z đều là những hàm số liên tục trên $\mathbf{R}^3$. Giả sử (x_0, y_0, z_0) là một nghiệm của phương trình đã cho.

$$f'_z(x_0, y_0) = 3z_0^2 - 3x_0y_0 \neq 0 \Leftrightarrow z_0^2 \neq x_0y_0.$$

Khi đó phương trình đã cho xác định trên một lân cận của điểm $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ một hàm số ẩn $(x, y) \mapsto z(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục và

$$z'_x(x, y) = -\frac{f'_x(x, y, z(x, y))}{f'_z(x, y, z(x, y))} = -\frac{-3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{yz}{z^2 - xy},$$

$$z'_y(x, y) = -\frac{f'_y(x, y, z(x, y))}{f'_z(x, y, z(x, y))} = -\frac{-3xz}{3z^2 - 3xy} = \frac{xz}{z^2 - xy},$$

$$z''_{x^2}(x, y) = \frac{(z^2 - xy)yz'_x - yz(2zz'_x - y)}{(z^2 - xy)^2}$$

$$= \frac{y^2z - y(xy + z^2)z'_x}{(z^2 - xy)^2} = \frac{y^2z - y(xy + z^2)\dfrac{yz}{z^2 - xy}}{(z^2 - xy)^2}$$

$$z''_{x^2}(x, y) = -\frac{2xy^3z}{(z^2 - xy)^3},$$

$$z''_{y^2}(x, y) = -\frac{2x^3yz}{(z^2 - xy)^3}.$$

$$z''_{xy}(x, y) = \frac{(z^2 - xy)(z + yz'_y) - yz(2zz'_y - x)}{(z^2 - xy)^2}$$

$$= \frac{z^3 - (xy^2 + yz^2)z'_y}{(z^2 - xy)^2} = \frac{z^3 - \dfrac{(xy^2 + yz^2)xz}{z^2 - xy}}{(z^2 - xy)^2},$$

$$z_{xy}''(x, y) = \frac{z(z^4 - 2xyz^2 - x^2y^2)}{(z^2 - xy)^3}.$$

54. $f_x'(x, y, z) = y + z + 2$; $f_y'(x, y, z) = x + z + 2$; $f_z'(x, y, z) = x + y - 1$; $(0, 0, 0)$ là một nghiệm của phương trình đã cho ; f_x', f_y', f_z' đều liên tục trên $\mathbf{R}^3$, $f_z'(0, 0, 0) = -1 \neq 0$. Do đó phương trình đã cho xác định trên một lân cận của điểm $(0, 0, 0)$ một hàm số ẩn $(x, y) \mapsto z(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục. Lấy đạo hàm riêng theo x và y phương trình đã cho, xem z là một hàm số của x và y, ta được

$$y + z + xz_x' + yz_x' + 2 - z_x' = 0 \qquad (1)$$

$$x + xz_y' + z + yz_y' + 2 - z_y' = 0 \qquad (2)$$

Với $(x, y) = (0, 0)$, ta có $z(0, 0) = 0$. Thay vào phương trình (1) và (2), ta được

$$z_x'(0, 0) = 2 \; ; \; z_y'(0, 0) = 2.$$

55. Giả sử (x, y, z) là một nghiệm của phương trình đã cho. Ta có

$f_x'(x, y, z) = 4x + 8z$; $f_y'(x, y, z) = 4y$; $f_z'(x, y, z) = 2z + 8x - 1$;

f_x', f_y', f_z' đều liên tục trên $\mathbf{R}^3$, $f_z'(x, y, z) \neq 0 \Leftrightarrow z \neq -4x + \frac{1}{2}$.

Khi đó phương trình đã cho xác định trên một lân cận của điểm (x, y, z) một hàm số ẩn $(x, y) \mapsto z(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục.

$$z_x'(x, y) = -\frac{f_x'(x, y, z(x, y))}{f_z'(x, y, z(x, y))} = -\frac{4x + 8z}{8x + 2z - 1},$$

$$z_y'(x, y) = -\frac{f_y'(x, y, z(x, y))}{f_z'(x, y, z(x, y))} = -\frac{4y}{8x + 2z - 1}.$$

Ta tìm các điểm dừng của hàm số $z = z(x, y)$. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0, \\ z_x'(x, y) = 0, \\ z_y'(x, y) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y, z) = 0, \\ 4x + 8z = 0, \\ 4y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x, y, z) = (-2, 0, 1) \\ (x, y, z) = \left(\frac{16}{7}, 0, -\frac{8}{7}\right) \end{array} \right.$$

ta tìm được các điểm dừng của hàm số z : $(-2, 0)$ và $\left(\frac{16}{7}, 0\right)$.

Lấy các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai theo x phương trình đã cho, ta được

$$4x + 2zz_x' + 8z + 8xz_x' - z_x' = 0,$$

$$\Leftrightarrow \qquad 4x + 8z + (2z + 8x - 1)z_x' = 0 \qquad (2)$$

$$4 + 8z_x' + (2z_x' + 8)z_x' + (2z + 8x - 1)z_{x^2}'' = 0.$$

Từ đó ta được : $z_{x^2}''(-2, 0) = \frac{4}{15}$; $z_{x^2}''\left(\frac{16}{7}, 0\right) = -\frac{28}{105}$.

Lấy đạo hàm riêng phương trình (2) theo y, ta được

$$8z_y' + 2z_y'z_x' + (2z + 8x - 1)z_{xy}'' = 0.$$

Từ đó suy ra : $z_{xy}''(-2, 0) = 0$; $z_{xy}''\left(\frac{16}{7}, 0\right) = 0$.

Lấy đạo hàm riêng cấp một và cấp hai theo y phương trình đã cho, ta được

$$4y + 2zz_y' + 8xz_y' - z_y' = 0,$$

$$\Leftrightarrow \qquad 4y + (2z + 8x - 1)z_y' = 0$$

$$4 + 2(z_y')^2 + (2z + 8x - 1)z_{y^2}'' = 0.$$

Do đó $z_{y^2}''(-2, 0) = \frac{4}{15}$; $z_{y^2}''\left(\frac{16}{7}, 0\right) = -\frac{28}{105}$.

Vì $\Delta(-2,\ 0) = \begin{vmatrix} \frac{4}{15} & 0 \\ 0 & \frac{4}{15} \end{vmatrix} > 0,\ z''_{x^2}(-2, 0) > 0$ nên hàm số $z = z(x,\ y)$ có cực tiểu tại điểm $(-2,\ 0)$.

Vì $\Delta\left(\frac{16}{7},\ 0\right) = \begin{vmatrix} -\frac{28}{105} & 0 \\ 0 & -\frac{28}{105} \end{vmatrix} > 0$ và $z''_{x^2}\left(\frac{16}{7},\ 0\right) < 0$ nên hàm số $z = z(x,\ y)$ có cực đại tại điểm $\left(\frac{16}{7},\ 0\right)$.

58.

$f'_y\ (x,\ y,\ z) = 1$, $f'_z\ (x,\ y,\ z) = 1$, $g'_y\ (x,\ y,\ z) = 2y$, $g'_z\ (x,\ y,\ z) = 2z$.

Các đạo hàm riêng của f đều liên tục trên $\mathbf{R}^3$,

$$\frac{D(f,\ g)}{D(y,\ z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2y & 2z \end{vmatrix} = 2(z - y).$$

$$\frac{D(f,\ g)}{D(y,\ z)}\ (x_0,\ y_0,\ z_0) \neq 0 \text{ với } z_0 \neq y_0.$$

Do đó hệ phương trình đã cho xác định trên một lân cận của điểm M_0 một hệ hàm số ẩn $x \mapsto y(x)$, $x \mapsto z(x)$ có các đạo hàm liên tục trên một lân cận của điểm x_0.

Lấy đạo hàm hai phương trình của hệ đã cho (xem y, z là những hàm số của x), ta được

$$\begin{cases} 1 + y' + z' = 0 \\ 2x + 2yy' + 2zz' = 0 \end{cases}$$

$$y'(x) = \frac{z(x) - x}{y(x) - z(x)}\ ,\ z'(x) = \frac{y(x) - x}{z(x) - y(x)}\ .$$

59. $M_0 = (1,\ -1,\ 2)$ là một nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} f(x, y, z) = x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{2} = 0, \\ g(x, y, z) = x + y + z - 2 = 0. \end{cases}$$

$f_x'(x, y, z) = 2x$; $f_y'(x, y, z) = 2y$; $g_x'(x, y, z) = 1$; $g_y'(x, y, z) = 1$.
Các đạo hàm riêng của hai hàm số f và g đều liên tục trên $\mathbf{R}^3$.

$$\frac{D(f, g)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x - y).$$

$\dfrac{D(f, g)}{D(x, y)}(1, -1, 2) = 4 \neq 0$. Do đó hệ phương trình đã cho xác định trên một lân cận của điểm M_0 một hệ hàm số ẩn $z \mapsto x(z)$, $z \mapsto y(z)$ có các đạo hàm liên tục. Lấy đạo hàm hai lần hai phương trình của hệ (I) theo z, ta được

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} 2xx' + 2yy' - z = 0, \\ x' + y' + 1 = 0, \end{cases}$$

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} 2x'^2 + 2xx'' + 2y'^2 + 2yy'' - 1 = 0, \\ x'' + y'' = 0. \end{cases}$$

Thay $(x, y, z) = (1, -1, 2)$ vào hai hệ (II) và (III), ta được

$$\begin{cases} 2x' - 2y' = 2, \\ x' + y' = -1, \end{cases} \Leftrightarrow x'(2) = 0,\ y'(2) = -1 ;$$

$$\begin{cases} 2x'' - 2y'' = -1, \\ x'' + y'' = 0, \end{cases} \Leftrightarrow x''(2) = -\frac{1}{4},\ y''(2) = \frac{1}{4}.$$

60. Theo định lí về hàm ngược, từ giả thiết suy ra rằng tồn tại một lân cận V của điểm (u_0, v_0) và một lân cận W của điểm (x_0, y_0) sao cho ánh xạ

$$(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v)) \quad (1)$$

là một song ánh từ V lên W và các hàm số thành phần của hàm ngược của (1)

$$(x, y) \mapsto (u, v) = (u(x, y), v(x, y))$$

có các đạo hàm riêng liên tục trên W. Ta có

$$\begin{cases} dx = x_u' \, du + x_v' \, dv, \\ dy = y_u' \, du + y_v' \, dv. \end{cases}$$

Từ đó

$$du = \frac{\begin{vmatrix} dx & x_v' \\ dy & y_v' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_u' & x_v' \\ y_u' & y_v' \end{vmatrix}} \quad , \quad dv = \frac{\begin{vmatrix} x_u' & dx \\ y_u' & dy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_u' & x_v' \\ y_u' & y_v' \end{vmatrix}} \; ;$$

$$du = \frac{1}{J(u, v)}(y_v' dx - x_v' dy) \quad ; \quad dv = \frac{1}{J(u, v)}(-y_u' dx + x_u' dy)$$

Do đó

$$u_x'(x, y) = \left(\frac{1}{J(u, v)} y_v'\right)(u(x, y), v(x, y)) \; ;$$

$$u_y'(x, y) = -\left(\frac{1}{J(u, v)} x_v'\right)(u(x, y), v(x, y)),$$

$$v_x'(x, y) = -\left(\frac{1}{J(u, v)} y_u'\right)(u(x, y), v(x, y)) \; ;$$

$$v_y'(x, y) = \left(\frac{1}{J(u, v)} x_u'\right)(u(x, y), v(x, y)).$$

61. Ta có $\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) = 1$, $\frac{\partial x}{\partial v}(u, v) = 1$, $\frac{\partial y}{\partial u}(u, v) = 2u$, $\frac{\partial y}{\partial v}(u, v) = 2v$. Các đạo hàm riêng nói trên đều liên tục trên $\mathbf{R}^2$.

$$J(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2u & 2v \end{vmatrix} = 2(v - u).$$

$J(u, v) \neq 0 \Leftrightarrow v \neq u$.

Vì $(v - u)^2 = 2(u^2 + v^2) - (u + v)^2 = 2y - x^2$ nên

$$v \neq u \quad \Leftrightarrow \quad y > \frac{x^2}{2}.$$

Theo định lí về hàm ngược tồn tại một lân cận V của điểm (u, v) và một lân cận W của điểm $(x, y) = (u + v, u^2 + v^2)$ sao cho hàm

$$(u, v) \mapsto (x, y) = (u + v, u^2 + v^2)$$

là một song ánh từ V lên W và các hàm số thành phần của hàm ngược

$$(x, y) \mapsto (u, v) = (u(x, y), v(x, y))$$

có các đạo hàm riêng liên tục trên W. Hàm số $(x, y) \mapsto z(x, y)$ xác định trên W bởi

$$z(x, y) = [u(x, y)]^3 + [v(x, y)]^3$$

là hàm hợp của hai hàm có các đạo hàm riêng liên tục nên nó có các đạo hàm riêng liên tục trên W. Ta có

$$dz = 3u^2du + 3v^2dv,$$

$$\begin{cases} dx = du + dv, \\ dy = 2udu + 2vdv \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được

$$du = \frac{\begin{vmatrix} dx & 1 \\ dy & 2v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2u & 2v \end{vmatrix}} = \frac{1}{2(v-u)}(2vdx - dy),$$

$$dv = \frac{\begin{vmatrix} 1 & dx \\ 2u & dy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2u & 2v \end{vmatrix}} = \frac{1}{2(v-u)}(-2udx + dy),$$

$$dz = \frac{3u^2}{2(v-u)}(2vdx - dy) + \frac{3v^2}{2(v-u)}(-2udx + dy),$$

$$dz = -3uvdx + \frac{3}{2}(u + v)dy.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -3u(x, y)v(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \frac{3}{2}[u(x, y) + v(x, y)]$$

với mọi $(x, y) \in W$.

MỤC LỤC

CHƯƠNG IV : TÍCH PHÂN

A. Tích phân xác định

B. Hàm số lôgarit. Hàm số mũ. Hàm số lũy thừa. Các hàm số hipebôlic

C. Phép tính nguyên hàm

D. Ứng dụng của tích phân

CHƯƠNG V : KHÔNG GIAN $\mathbf{R}^p$. HÀM LIÊN TỤC TRÊN KHÔNG GIAN $\mathbf{R}^p$

CHƯƠNG VI : ĐẠO HÀM CỦA HÀM MỘT BIẾN SỐ. ĐẠO HÀM RIÊNG CỦA HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

A. Đạo hàm của hàm một biến số

B. Đạo hàm riêng và vi phân của hàm số nhiều biến số. Hàm ẩn và hàm ngược

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Biên tập nội dung :

TRẦN PHƯƠNG DUNG

Sửa bản in :

LÊ THỊ THANH HẰNG

Chế bản :

PHÒNG CHẾ BẢN (NXB GIÁO DỤC)

GIẢI TÍCH – TẬP I

Mã số : 7K182y9 – DAI

In 1.000 cuốn (QĐ: 02), khổ 14,5 x 20,5 cm. In tại Công ty Cổ phần In Phúc Yên.

Địa chỉ : Đường Trần Phú, thị xã Phúc Yên, Vĩnh Phúc.

Số ĐKKH xuất bản : 04 – 2009/CXB/302 – 2117/GD.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2009.

GIẢI TÍCH

GIÁO TRÌNH
LÝ THUYẾT
VÀ
BÀI TẬP
CÓ HƯỚNG DẪN

TẬP 1

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC - DẠY NGHỀ
HEVOBCO
Địa chỉ : 25 Hàn Thuyên, Hà Nội

8 934980 936740

Giá: 39.000đ