Hùng : Lưu Khả Tú.

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❊ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

9
2001

SỐ 291 - NĂM THỨ 38 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

Chào mừng năm học mới!

TS. Phùng Hữu Phú, Chủ tịch HĐND TP Hà Nội và TS. Đinh Sỹ Đại, Hiệu trưởng trường Chu Văn An chúc mừng 6 học sinh vừa đỗ thủ khoa các trường Đại học.

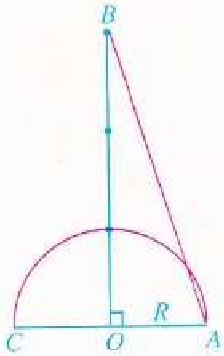
Trường THPT Chu Văn An.

TOÁN HỌC MUÔN MÀU

DỰNG ĐOẠN THẲNG BẰNG NỬA CHU VI ĐƯỜNG TRÒN

Dùng compa và bút chì, thước thẳng (không có vạch chia) thì *không thể dựng được* đoạn thẳng có độ dài πR vì $\pi = 3,1416$ ... là số siêu việt. Tuy nhiên trong thực tiễn (chẳng hạn khi vẽ đồ thị hàm số lượng giác...) nhiều khi phải dựng đoạn thẳng có độ dài gần đúng bằng nửa chu vi đường tròn bán kính R cho trước mà chỉ có dụng cụ vẽ thông thường là compa, bút chì, thước thẳng.

Có thể dựng tam giác OAB vuông tại O (h.1) với $OA = R$, $OB = 3R$ thì $AB = \sqrt{R^2 + 9R^2} = \sqrt{10}R \approx 3,1623\ R$. Đoạn thẳng AB gần bằng cung AC với sai số $0,021R$.



Hình 1

Dành cho bạn đọc

Hãy trình bày cách dựng chính xác hơn cách trên và tương đối đơn giản, bạn sẽ nhận được tặng phẩm.

Lời giải : ĐONG ÍT LẦN NHẤT

1) Giả sử các bình A, B, C có dung tích tương ứng là a, b, c lít với $a \le b \le c$. Muốn chuyển ít hơn c lít thì chỉ dùng bình A và B để đong, còn C chỉ là bình chứa.

Phương pháp xét phương trình nghiệm nguyên

Gọi số lần đổ vào hoặc rót ra khỏi bình A (bình B) là số nguyên u dương hoặc âm (v dương hoặc âm). Việc lấy ra k lít khi bình A, B rỗng và $c = 2k \ge a + b$ chuyển về việc giải phương trình nghiệm nguyên $au + bv = k$ (*)

Phương trình này có nghiệm $(u, v) \Leftrightarrow$ ƯCLN (a, b) là ước của k.

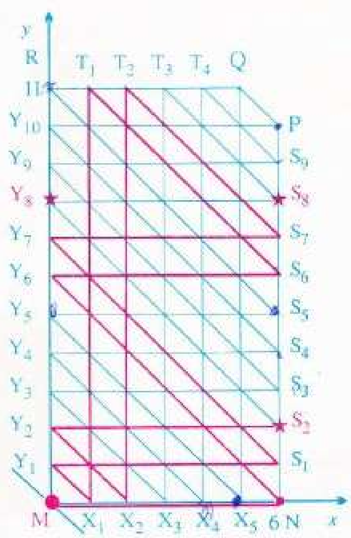
Phương trình $6u + 9v = 8$ vô nghiệm mà $6 + 9 < 16$ nên không thể lấy được 8 lít khi dùng các bình 6 lít và 9 lít.

Phương trình $6u + 11v = 8$ có nghiệm tổng quát là $u = 5 - 11t$, $v = -2 + 6t$ $(t \in Z)$. Gọi x, y, z là số lít đựng trong các bình 6 lít, 11 lít, 16 lít tương ứng (khi không rót). Ứng với nghiệm $u_1 = 5$, $v_1 = -2$ có phương án $(Đ_1)$ đong không lặp gồm 13 lần đong (không kể lần cuối cùng dưới đây) : $(x, y, z) =$

$$(0, 0, 16) \xrightarrow{u=1} (6, 0, 10) \to (0, 6, 10) \xrightarrow{u=2} (6, 6, 4) \to (1, 11, 4)$$

$$\xrightarrow{v=-1} (1, 0, 15) \to (0, 1, 15) \xrightarrow{u=3} (6, 1, 9) \to (0, 7, 9) \xrightarrow{u=4} (6, 7, 3)$$

$$\to (2, 11, 3) \xrightarrow{v=-2} (2, 0, 14) \to (0, 2, 14) \xrightarrow{u=5} (6, 2, 8) \to (0, 8, 8)$$

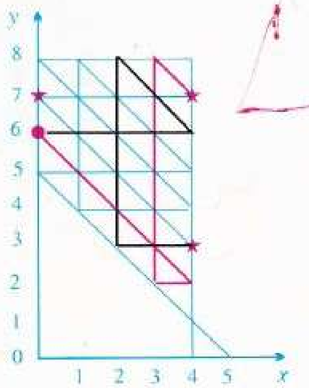


Hình 2

Phương án $(Đ_2)$ ứng với nghiệm $u_2 = -6$, $v_2 = 4$ có 18 lần đong. Với các nghiệm khác thì số lần đong $> |u| + |v| > 23$. Như vậy bằng cách so sánh vài phương án ứng với $|u| + |v|$ nhỏ ta tìm được *phương án có số lần đong ít nhất trong điều kiện lúc đầu các bình A, B đều rỗng và $c = 2k \ge a + b$.*

Nhưng nếu lúc đầu bình A hoặc bình B đã đựng không đầy (hoặc khi $a+b > 2k$ thì có thể xảy ra tình huống (x, y, z) có dạng $(a, 2k-a, 0)$ với $2k-a<b$, hoặc $(2k-b, b, 0)$ với $2k-b<a \Rightarrow$ trở về trường hợp có bình đựng không đầy), thì còn có các phương án khác nên chưa thể khẳng định về số lần đong ít nhất khi xét các nghiệm của phương trình (*).

(Xem tiếp trang 4)



Hình 3

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 38
Số 291 (9-2001)
Tòa soạn : Ngõ 187, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT : 04.5142648 – 04.5142650. FAX : 04.5142648
Email : toantt@hotmail.com

TRONG SỐ NÀY

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

MỘT TIÊU CHUẨN CHIA HẾT

NGUYỄN BỐN, NGUYỄN LÊ HIẾU
(Đà Nẵng)

Trong SGK lớp 6 các bạn đã biết dấu hiệu chia hết cho số p bằng 2, 5, 3, 9 và thêm nữa là 7, 11. Liệu có cách nào khác nữa để nhận biết việc chia hết của một số tự nhiên N cho một số lẻ p không ? Xin nêu ra ở đây một tiêu chuẩn chia hết cho số lẻ p không là bội của 5 trong hệ thập phân, nghĩa là p có dạng $p = 10s + r$ với r bằng 1, 3, 7, 9.

1. Bổ đề. Với mỗi số $p = 10s + r$ với r bằng 1, 3, 7, 9 có thể chọn được số k (phụ thuộc vào s, r) sao cho $10k + 1$ là bội của p, nghĩa là $(10k + 1) \vdots p$.

Thực vậy :

• Với $p = 10s + 1$ ta chọn $k = s + pt$ $(t \in Z)$ thì $10k + 1 = 10(s + pt) + 1 = 10pt + 10s + 1 = p(10t + 1)$.

• Với $p = 10s + 3$ ta chọn $k = 7s + 2 + pt$ $(t \in Z)$ thì $10k + 1 = 10(7s + 2 + pt) + 1 = 10pt + 7(10s + 3) = p(10t + 7)$

• Với $p = 10s + 7$ ta chọn $k = 3s + 2 + pt$ $(t \in Z)$ thì $10k + 1 = 10(3s + 2 + pt) + 1 = 10pt + 3(10s + 7) = p(10t + 3)$.

• Với $p = 10s + 9$ ta chọn $k = 9s + 8 + pt$ $(t \in Z)$ thì $10k + 1 = 10(9s + 8 + pt) + 1 = 10pt + 9(10s + 9) = p(10t + 9)$.

Sử dụng bổ đề có thể đưa ra tiêu chuẩn chia hết sau đây

2. Định lí

Số tự nhiên $N = 10x + a$ chia hết cho số lẻ $p = 10s + r$ với r bằng 1, 3, 7, 9 khi và chỉ khi số $x - ka$ chia hết cho p, trong đó k là số thỏa mãn $10k + 1$ chia hết cho p (số k chọn được theo bổ đề trên)

Chứng minh. Giả sử $10k + 1 = pv$ theo bổ đề. Ta có $N = 10x + a$ bằng $10(x - ka) + 10ka + a = 10(x - ka) + a(10k + 1) = 10(x - ka) + pva$

Vì $(10, p) = 1$ nên từ $N = 10(x - ka) + pva$ suy ra $N \vdots p \Leftrightarrow (x - ka) \vdots p$ (đpcm).

3. Tìm dấu hiệu chia hết

Có thể áp dụng tiêu chuẩn chia hết trên để tìm dấu hiệu chia hết cho các số p cụ thể. Muốn tính toán đỡ phức tạp ta *chọn số k sao cho $|k|$ là nhỏ nhất.*

Để tiện dụng trong bảng dưới đây đã tính số k mà $10k+1$ chia hết cho số lẻ $p \le 81$ và p không là bội 5. Nếu p là số nguyên tố thì được in đậm.

p	**3**	**7**	9	**11**	**13**	**17**	**19**	21
k	−1	2	−1	1	−4	5	−2	2
p	**23**	27	**29**	**31**	33	**37**	39	**41**
k	−7	8	−3	3	−10	11	−4	4
p	**43**	**47**	49	51	**53**	57	**59**	**61**
k	−13	14	−5	5	−16	17	−6	6
p	63	**67**	69	**71**	**73**	77	**79**	81
k	−19	20	−7	7	−22	23	−8	8

Ta hãy áp dụng định lí trên để thử kiểm tra vài dấu hiệu chia hết đã biết.

• Với $p = 3$ hay $p = 9$ thì $N = \overline{a_1a_2...a_t} \vdots 3$ (hay $N \vdots 9$) $\Leftrightarrow (a_1 + a_2 + ... + a_t) \vdots 3$ (hay $\vdots 9$)

• Dấu hiệu chia hết cho 7

$N = (10x+a) \vdots 7 \Leftrightarrow M = (x - 2a) \vdots 7$

VD : $N = 4852463$, $M_1 = 485246 - 6 = 485240$, $M_2 = 48524$, $M_3 = 4852 - 8 = 4844$, $M_4 = 484 - 8 = 476$, $M_5 = 47 - 12 = 35 \vdots 7$.
Vậy 4852463 chia hết cho 7.

$N = 6852463$. Tính $M_5 = 67 - 12 = 45 = 6.7+3$. Vậy 6852463 không chia hết cho 7.

• Với $p = 11$ thì $N = \overline{a_1a_2...a_t} \vdots 11$

$\Leftrightarrow (a_1 - a_2 + a_3 - ... + (-1)^{t-1}a_t) \vdots 11$ vì

$M = \overline{a_1...a_{t-1}} - a_t$; $M_1 = \overline{a_1...a_{t-2}} - (a_{t-1} - a_t)$; v.v...

• Dấu hiệu chia hết cho 13, 17

Số $N = 10x + a$ chia hết cho 13 (hoặc 17) khi và chỉ khi số $M = x + 4a$ (hoặc $M = x - 5a$) chia hết cho 13 (hoặc 17).

Mời các bạn trao đổi thêm về vấn đề này.

DÙNG PHÉP LŨY THỪA ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN CHỨA CĂN THỨC

LÊ QUANG TRUNG
(GV CĐSP Bạc Liêu)

Khi gặp bài tập liên quan đến tính toán, rút gọn hoặc so sánh các biểu thức có "hai tầng" căn thức (chẳng hạn $\sqrt{a+b\sqrt{c}}$), nhiều bạn lúng túng không biết cách khử bỏ dấu căn. Bài này gợi ý cách dùng phép lũy thừa để giải bài tập có hai biểu thức liên hợp.

1. Biểu thức liên hợp

Định nghĩa. Hai biểu thức chứa dấu căn dạng $M = \sqrt[n]{a+b\sqrt{c}}$ và $M' = \sqrt[n]{a-b\sqrt{c}}$, trong đó a, b, c là các biểu thức, gọi là hai biểu thức liên hợp bậc n.

Tính chất của biểu thức liên hợp bậc 2.

$$(\sqrt{a+b\sqrt{c}} \pm \sqrt{a-b\sqrt{c}})^2 = (M \pm M')^2$$
$$= M^2 + M'^2 \pm 2MM'$$
$$= a+b\sqrt{c}+a-b\sqrt{c} \pm 2\sqrt{(a+b\sqrt{c})(a-b\sqrt{c})}$$
$$= 2a \pm 2\sqrt{a^2-b^2c} \qquad (1)$$

Tính chất của biểu thức liên hợp bậc 3

Áp dụng $(M+M')^3 = M^3 + M'^3 + 3MM'(M+M')$ suy ra $M+M' = (\sqrt[3]{a+b\sqrt{c}} + \sqrt[3]{a-b\sqrt{c}})$ là nghiệm của phương trình

$$X^3 - 3\sqrt[3]{a^2-b^2c}\,X - 2a = 0 \qquad (2)$$

2. Vận dụng tính chất biểu thức liên hợp

Khi gặp bài tập tính toán, rút gọn, ... có dạng tổng hay hiệu của hai biểu thức (chứa 2 tầng căn) liên hợp thì có thể dùng phép lũy thừa để biến đổi tương tự như (1) (2) để khử bớt dấu căn.

Ví dụ 1. Rút gọn $A =$

$$= \sqrt{a+b+c+2\sqrt{ac+bc}} + \sqrt{a+b+c-2\sqrt{ac+bc}}$$

trong đó a, b, c là các số không âm.

Giải. Biến đổi tương tự (1) ta có :

$$A^2 = 2(a+b+c) + 2\sqrt{(a+b+c)^2 - 4(ac+bc)}$$
$$= 2(a+b+c) + 2\sqrt{(a+b-c)^2}$$
$$= 2(a+b+c) + 2|a+b-c|$$

Nếu : $a+b \geq c$ thì $A = 2\sqrt{a+b}$ vì $A \geq 0$

Nếu : $a+b \leq c$ thì $A = 2\sqrt{c}$ vì $A \geq 0$

Ví dụ 2. Tính

$$A = \sqrt[3]{1620+12\sqrt{17457}} + \sqrt[3]{1620-12\sqrt{17457}}$$

Giải. Biến đổi tương tự (2) ta có

$$A^3 - 144A - 3240 = 0$$
$$\Leftrightarrow (A-18)(A^2+18A+180) = 0$$

Vì : $A^2 + 18A + 180 > 0$ nên $A = 18$.

Ví dụ 3. Tính giá trị của $f(x) = x^3 + 15x$ với $x_o = \sqrt[3]{5(\sqrt{6}+1)} - \sqrt[3]{5(\sqrt{6}-1)}$

Giải. Biến đổi tương tự (2) có

$$x_o^3 + 15x_o - 10 = 0$$

Vậy $f(x_o) = x_o^3 + 15x_o = 10$

Ví dụ 4. Chứng minh rằng nếu $|x| > 2$ thì

$$\sqrt[3]{\frac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}} = x$$

Giải. Coi vế trái là A biến đổi như ở (2) ta có

$$A^3 - 3A + 3x - x^3 = 0$$
$$\Leftrightarrow (A-x)(A^2+Ax+x^2-3) = 0$$

Vì $|x| > 2$ nên $A^2 + Ax + x^2 - 3 =$

$$= \left(A+\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(x^2-4) > 0.$$ Vậy $A = x$.

3. So sánh các biểu thức chứa căn

Ví dụ 5. So sánh $A = \sqrt{n} + \sqrt{n+m}$ và $B = \sqrt{n+1} + \sqrt{n+m-1}$

Giải. Ta có $A^2 = 2n + m + 2\sqrt{n^2+mn}$

$$B^2 = 2n + m + 2\sqrt{n^2+mn+(m-1)}$$

Vì $m, n \in Z^+$, $A > 0, B > 0$,

$$\sqrt{n^2+mn} \leq \sqrt{n^2+mn+(m-1)}$$

Nên $A \leq B$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $m = 1$.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 45

Problem. Prove that if a and m are two coprime numbers, then the linear congruence

$$ax \equiv b \ (mod\ m)$$

has exactly one solution modulo m.

Solution. When an arbitrary integer is divided by m, the remainder is one of the numbers i of the set $S = \{0, 1, 2,..., m-1\}$. Suppose that when b is divided by m the remainder is a number k of S. In order to find out whether the above congruence has a solution in S, consider the remainders of the products $a.0$, $a.1$, $a.2$, ..., $a.(m-1)$ when divided by m. Suppose that that division by m of the products $a.i$ and a.j ($i, j \in S, i \neq j$) yields the same remainders. This would means that

$$a(i-j) = mt$$

for some integer t. Since m and a are coprime, m must divide $i-j$. However, $|i-j| < m$, and therefore m cannot divide $i - j$. So we have reached a contradiction. Thus the remainders of the division of $a.0$, $a.1$, $a.2$,...,$a.(m-1)$ by m must all be different. Hence one and only one of these products, say $a.i$, has the same remainder k as the number b. The number i is then a solution of the congruence $ax \equiv b$ $(mod\ m)$, and all remaining solutions are in the same residue class of i modulo m.

Từ mới:

coprime	= nguyên tố cùng nhau (tính từ)
linear	= tuyến tính (tính từ)
congruence	= quan hệ đồng dư, sự tương đẳng
modulo	= môdun
divide	= chia (động từ)
remainder	= phần dư
set	= tập hợp
suppose	= giả sử (động từ)
division	= phép chia
in order to	= nhằm
consider	= xét (động từ)
product	= tích
yield	= cho kết quả (động từ)
same	= cùng, giống nhau (tính từ)
mean	= có nghĩa (động từ)
however	= tuy nhiên (phó từ)
therefore	= bởi vậy, vì thế (phó từ)
reach	= đạt được, đến (động từ)
contradiction	= mâu thuẫn
say	= chẳng hạn
remain	= còn lại (động từ)
residue class	= lớp đồng dư

NGÔ VIỆT TRUNG

TOÁN HỌC MUÔN MÀU *(Tiếp bìa 2)*

Phương pháp đồ thị

Mỗi tình huống (x, y, z) được biểu thị bởi một điểm nguyên có tọa độ (x, y) trong hệ trục tọa độ Oxy. Điều kiện bài toán là : $0 \leq x \leq 6$ (1) ; $0 \leq y \leq 11$ (2) ;

$0 \leq z \leq 16$ (3) $\Leftrightarrow 0 \leq 16 - (x + y) \leq 16 \Leftrightarrow 0 \leq x + y \leq 16$ (3')

Các điểm nguyên này nằm trong (kể cả biên) hình đa giác $MNPQR$ vì MR ứng với $x = 0$, MN ứng với $y = 0$, NP ứng với $x = 6$, RQ ứng với $y = 11$, PQ ứng với $x + y = 16$, Mz ứng với $x + y = 0$ (h.2). Trong bất cứ thời điểm nào (khi không rót) cũng phải xảy ra dấu bằng trong (1) hoặc (2) hoặc (3') nên các điểm nguyên (x, y) luôn nằm trên biên của đa giác $MNPQR$.

Phương án cần tìm là một đường gấp khúc (Đ) đi từ điểm xuất phát $M\ (0, 0, 16)$ đến một trong 3 điểm đích là $Y8(0, 8, 8)$, $S8\ (6, 8, 0)$, $S2\ (6, 2, 8)$ và các đoạn thẳng của (Đ) nối 2 điểm biên của $MNPQR$ phải thỏa mãn :

- khi rót giữa hai bình B và C thì x không đổi nên đoạn này vuông góc với trục hoành
- khi rót giữa hai bình A và C thì y không đổi nên đoạn này vuông góc với trục tung
- khi rót giữa hai bình A và B thì $x + y$ không đổi nên đoạn này song song với Mz.

Để đong không lặp lại thì đường (Đ) không dừng ở mỗi đỉnh quá 1 lần. Có tất cả 4 phương án sau đong không lặp lại (h.2)

$(Đ_1)$: M → N → Y6 → S6 → T1 → X1 → Y1 → S1 → Y7 → S7 → T2 → X2 → Y2 → S2 gồm 13 lần đong.

$(Đ_2)$: M → R → S5 → Y5 → X5 → Q → P → Y10 → S4 → Y4 → X4 → T4 → S9 → Y9 → S3 → Y3 → X3 → T3 → S8 gồm 18 lần đong

$(Đ_3)$: M → N → P → Y10 → (tiếp tục như $Đ_2$) gồm 14 lần đong

$(Đ_4)$: M → R → Q → P → Y10 → (tiếp tục như $Đ_2$) gồm 15 lần đong. Vậy phương án $(Đ_1)$ có số lần đong ít nhất

2) Các bạn tự giải thích theo hình 3.

Xin gửi tặng phẩm cho các bạn sau có lời giải đúng :

1) *Nguyễn Duy Liên*, 12A1, THPT Phan Bội Châu, Phan Thiết, Bình Thuận ;
2) *Chu Đức Cảnh*, 11A5, THPT Lương Ngọc Quyến, Tp. Thái Nguyên ;
3) *Phan Thành Việt*, 7D, THCS Lương Thế Vinh, Tx. Tuy Hòa, Phú Yên

PHI PHI

KÌ THI OLYMPIC TOÁN CHÂU PHI LẦN THỨ 10

TRẦN ANH DŨNG
(GV THPT Lương Thế Vinh – Đồng Nai)

Kì thi Olympic toán châu Phi (Pan – Africa Mathematics Olympiad, viết tắt là PAMO) lần thứ 10 được tổ chức từ ngày 17 đến 24 tháng 1 năm 2000, do trường Đại học Cape Town và Đại học Western Cape ở thành phố Kepơ (Cape) đăng cai.

Có 7 đoàn tham dự kì thi này gồm các nước : Nam Phi, Angiêri, Bênanh, Buôckina Phasô, Mali, Môdămbich, Uganđa. 7 trưởng đoàn và 3 thành viên của Hội Toán học châu Phi họp tại Đại học Cape Town để chọn đề thi cho 2 vòng thi, mỗi vòng thi gồm 3 bài và làm trong 4 giờ 30 phút.

Tất cả các đoàn dự thi đều ở tại ĐH Western Cape. Trong thời gian ban biên soạn đề thi làm việc, các đoàn tổ chức hoạt động giao lưu, tham quan : thăm trung tâm thành phố, du lịch bãi biển, tham quan khu trồng nho nổi tiếng ở phía tây thành phố Cape, đi cáp điện lên núi Table và mua sắm ở khu Waterfront. Các trở ngại về ngôn ngữ nhanh chóng được gỡ bỏ. Sau đó là trận bóng đá giao hữu tại ĐH Werstern Cape với sự tham dự của các sinh viên trường này.

Sau thời gian thi và chấm bài, thí sinh của các đoàn được tham quan đảo Robben, trong đó có khu di tích nhà giam lãnh tụ nổi tiếng của Nam Phi và của phong trào chống chủ nghĩa Apácthai là Nelson Maldela.

Lễ tổng kết được tổ chức long trọng với sự tham dự của hàng trăm nhà toán học của châu Phi và nhiều nước khác trên thế giới. Đội tuyển Nam Phi xếp hạng nhất toàn đoàn với 1 HCV, 1 HCB và 1 HCĐ. Kỳ thi Olympic toán châu Phi lần thứ 11 được tổ chức vào tháng 8 năm 2001 tại nước Burkina Faso.

Sau đây xin được giới thiệu với bạn đọc đề thi của Kì thi Olympic toán châu Phi lần thứ 10 :

NGÀY THỨ NHẤT

Bài 1. Giải phương trình lượng giác :

$$\sin^3 x(1 + \cot g x) + \cos^3(1 + \operatorname{tg} x) = \cos 2x$$

Bài 2. Xác định các đa thức P_o, P_1, P_2, ... cho bởi :

$$P_o(x) = x^3 + 213x^2 - 67x - 2000$$

$$P_n(x) = (x - n)\, P_{n-1}(x) \text{ với } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Bài 3. Chứng minh rằng nếu :

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{1334} + \frac{1}{1335}$$

trong đó p, q là các số tự nhiên thì 2003 là ước số của p.

NGÀY THỨ HAI

Bài 1. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2$. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ (x + a)^2 + (y + b)^2 = (z + c)^2 \end{cases}$$

Bài 2. Từ một điểm P ở ngoài một đường tròn vẽ hai tiếp tuyến PA và PB đến đường tròn. PQR là một cát tuyến (Q, R ở trên đường tròn) bất kì. BS là dây cung của đường tròn và song song với cát tuyến PQR. Chứng minh rằng SA đi qua trung điểm của QR.

Bài 3. Một công ty có 5 giám đốc. Theo quy định của công ty, để mở được cửa phòng bọc thép của công ty phải có từ 3 giám đốc trở lên, còn nếu chỉ có 2 giám đốc hoặc ít hơn thì không thể mở được phòng bọc thép. Phòng bọc thép của công ty có 10 ổ khóa. Phòng chỉ có thể được mở nếu có đủ 10 chìa khóa cho các ổ khóa này. Mỗi giám đốc được cấp 1 bộ gồm n chìa khóa khác nhau. Tìm tất cả các giá trị của n để có thể thực hiện được quy định của công ty.

VỀ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC ...

(Tiếp trang 11)

Phương pháp chuyển việc xét tam giác ABC sang xét tam giác $A_1B_1C_1$ có ba góc nhọn có thể áp dụng để giải nhiều bài toán khác, chẳng hạn như các bài toán sau.

Bài toán 6. Cho tam giác ABC với các đường phân giác trong AA', BB', CC'. Chứng minh rằng

$$A'B' + B'C' + C'A' \geq 3\sqrt{3}\, r$$

Bài toán 7. Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp. IA, IB, IC cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC lần nữa tại các điểm A_1, B_1, C_1 tương ứng. Chứng minh rằng :

$$IA_1 + IB_1 + IC_1 \geq 2R + \frac{IA + IB + IC}{3}$$

CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC

NHỮNG SUY NGHĨ BAN ĐẦU VỀ ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC MÔN TOÁN NĂM 2001

(Tiếp theo kì trước)

LÊ THỐNG NHẤT

2. NHỮNG TRANH LUẬN VỀ ĐỀ THI VÀ ĐÁP ÁN

Đối với đề thi, dư luận thường quan tâm tới :

- Đề thi có chính xác hay không ?

- Đề thi có nằm trong chương trình môn toán theo quy định của Bộ GD&ĐT hay không ?

Một số đề thi gây tranh luận là :

Thí dụ 1. *Cho hàm số :*

$$y = 2x^3 + 3(m-3)x^2 + 11 - 3m \qquad (C_m)$$

Tìm m để hàm số có 2 cực trị. Gọi M_1 và M_2 là các điểm cực trị, tìm m để các điểm M_1, M_2 và $B(0; -1)$ thẳng hàng.

Đây là bài toán khá quen thuộc, đường lối giải tổng quát là viết phương trình đường thẳng đi qua M_1 và M_2, sau đó đặt điều kiện để B thuộc đường thẳng này. Ở bài toán này, hầu hết học sinh (và cả đáp án) đều tìm ra giá trị $m = 4$. Nhưng với $m = 4$ thì B lại trùng với một trong hai điểm M_1, M_2, vậy $m = 4$ có thỏa mãn bài toán hay không ? Đáp án khẳng định thỏa mãn, nhưng nghe chừng không xuôi và cuối cùng Chủ tịch Hội đồng tuyển sinh đành tuyên bố : "Cả hai phương án : lấy hay không lấy $m = 4$ đều được điểm tối đa !" Rõ ràng không bao giờ lại xảy ra điều đó đối với kết quả của một bài toán, làm sao lại có thể kết luận "nước đôi" như thế được ?

Nếu nói 3 điểm *thẳng hàng* mà hiểu rằng 3 điểm phải *phân biệt* thì giá trị $m = 4$ phải loại và kết quả sẽ không có giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Thí dụ 2. *Cho hình chóp SABC đỉnh S, đáy là tam giác cân AB = AC = 3a, BC = 2a. Biết rằng các mặt bên (SAB), (SBC), (SCA) đều hợp với mặt phẳng đáy một góc 60°. Kẻ đường cao SH của hình chóp.*

1) Chứng tỏ rằng H là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác ABC và SA ⊥ BC.

2) Tính thể tích của hình chóp.

Với đề toán này, ngay trong giới giáo viên cũng đã phải tranh luận căng thẳng. Nếu đề bài chỉ cần bỏ đi một từ "phẳng" duy nhất ở giả thiết thì câu 1 sẽ hoàn toàn đúng và đáp án sẽ "suôn sẻ". Các mặt bên đều hợp với *mặt phẳng đáy* một góc 60° là hoàn toàn khác các mặt bên đều hợp với *mặt đáy* một góc 60°. Tranh luận nảy sinh từ sự phân biệt *mặt phẳng đáy* và *mặt đáy*. *Mặt phẳng đáy* là mặt phẳng chứa đáy (ABC) nên có thể xảy ra tình huống (SBC) hợp với *mặt đáy* góc 120°, còn (SBA), (SCA) hợp với *mặt đáy* góc 60° là *thỏa mãn giả thiết*. Khi đó câu 1 yêu cầu chứng tỏ H là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác sẽ sai (vì lúc đó H là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác ABC).

Như vậy, nhiều học sinh sẽ băn khoăn không biết mình nên như thế nào ? Mà đây lại là các học sinh khá, giỏi...

Thí dụ 3: *Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số (chữ số đầu tiên phải khác 0), biết rằng chữ số 2 có mặt đúng 2 lần, chữ số 3 có mặt đúng 3 lần và các chữ số còn lại có mặt không quá 1 lần ?*

Đối với bài toán này, dư luận cho rằng đề bài ra ngoài chương trình được học vì đây là loại toán liên quan tới khái niệm *chỉnh hợp có lặp lại*. Tuy nhiên ai cũng biết bài toán về *chỉnh hợp có lặp lại* luôn có thể giải quyết nhờ *giả thiết tạm* và *chỉnh hợp* (không lặp lại).

Vậy về lý mà nói thì bài toán *vẫn nằm trong chương trình hiện hành.*

Thí dụ 4. *Có 6 học sinh nam và 3 học sinh nữ xếp theo một hàng dọc để đi vào lớp. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp để có đúng 2 học sinh nam đứng xen kẽ 3 học sinh nữ ?*

Bài toán tưởng như rất bình thường nhưng lại gây khó hiểu cho cả học sinh và giáo viên. Lâu nay chúng ta đã quá quen với khái niệm *các phần tử của hai tập hợp xếp xen kẽ nhau.* Chẳng hạn bài toán tìm điều kiện để hai phương trình bậc hai cùng có 2 nghiệm phân biệt và các nghiệm của hai phương trình *xen kẽ nhau.* Khi đó ta hiểu rằng các khả năng $u_1 < v_1 < u_2 < v_2$; $v_1 < u_1 < v_2 < u_2$ với u_1, u_2 là nghiệm của phương trình này và v_1, v_2 là nghiệm của phương trình kia sẽ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhưng ở đề toán này lại yêu cầu "đúng 2 học sinh nam đứng xen kẽ với 3 học sinh nữ" thì bằng tiêu chuẩn nào để *đếm được số phần tử* của tập hợp này *xếp xen kẽ* với các phần tử của tập hợp kia ? Nếu kí hiệu N là bạn nam và n là bạn nữ thì với cách xếp sau đây : N - n - N - n - N - n - N - N - N sẽ đếm được mấy bạn nam đứng xen kẽ với 3 bạn nữ ?

Xin đưa thử ra 2 tiêu chuẩn :

1) Một bạn nam được gọi là xếp xen kẽ với 3 bạn nữ nếu đứng giữa hai bạn nữ nào đó. Với tiêu chuẩn này thì cách xếp trên có 2 bạn nam thỏa mãn.

2) Một bạn nam được gọi là xếp xen kẽ với 3 bạn nữ nếu chỉ đứng kề bạn nữ mà không kề bạn nam khác. Với tiêu chuẩn này thì có 3 bạn nam thỏa mãn.

Như vậy với mỗi tiêu chuẩn sẽ ứng với một kết quả. Vậy sẽ phải giải quyết bài toán này theo tiêu chuẩn nào ?

Tốt nhất là không nên diễn đạt "mập mờ" như bài toán trên mà nên nói rõ hơn để các thí sinh không phải băn khoăn giữa hai cách hiểu.

Một vài suy nghĩ mong các tác giả đề thi lưu ý và cũng có thể là chút kinh nghiệm để bạn đọc tự rút ra cho mình những cách nhìn nhận đề thi.

LTS. *Khi báo đã lên trang Tòa soạn nhận được thư của nhà giáo Vũ Hữu Khuông, THPT Mỹ Đức, Hà Tây bàn về thí dụ 2. Xin cảm ơn. Tòa soạn rất mong nhận được thư phản ánh, bình luận các bài toán thi tuyển sinh vào Đại học năm 2001.*

VUI !

1 GAM ÁNH SÁNG GIÁ BAO NHIÊU ?

Mặt trời cho chúng ta ánh sáng. Ánh sáng rất cần thiết cho con người cũng như mọi loài sinh vật trên trái đất. Vai trò của ánh sáng là tối cần thiết. Nhưng có khi nào bạn thử suy nghĩ xem ánh sáng có giá trị bằng bao nhiêu không ? Chỉ cần động não một chút, bằng công thức Vật lí lớp 12 ta có thể tính được 1 gam ánh sáng giá bao nhiêu đồng Việt Nam nếu ta phải mua để sử dụng.

Trước hết áp dụng hệ thức Anhxtanh :

$$E = mc^2$$

Với $m = 1\text{g} = 10^{-3}\text{kg}$; $c = 3.10^8$ m/s ta có :

$$E = 10^{-3}.(3.10^8)^2 = 9.10^{13}\ (J)$$

Ta có 1kwh = 1000(w)×3600 (s) = $3{,}6.10^6$ (J).

Ở Việt Nam, chúng ta lấy giá rẻ nhất là : 500 đồng / 1 kwh (tức là tương đương 1 số theo công tơ điện) ta có số tiền phải trả cho 1 gam ánh sáng là : $\dfrac{500\text{đ} \times (9.10^{13})}{3{,}6.10^6} = 12{,}5.10^9$ đồng

Bạn có biết $12{,}5.10^9$ bằng bao nhiêu không? Một con số không phải là nhỏ, tương đương với số tiền làm một cây cầu bê tông cốt thép dài vài trăm mét. Chắc các bạn không ngờ tới thiên nhiên đã ưu đãi chúng ta đến nhường nào !

TRƯỜNG MINH
(205b, phố Lê Hồng Phong, Nam Định)

HÌNH HỌC PHI ƠCLIT *(Tiếp trang 22)*

...của chúng ta mà thôi. Nếu chúng ta chuyển động càng nhanh, thì đồng hồ của chúng ta chuyển động càng chậm và ngược lại. Càng phát triển lí thuyết của mình, Einstein càng đi đến nhiều điều có vẻ phi lí hơn nữa, chẳng hạn, không có khái niệm đồng thời, và năng lượng có thể chuyển hóa thành vật chất và ngược lại...

Thế nhưng, những hệ quả của lí thuyết tương đối dần dần được kiểm chứng, và nhất là ý tưởng biến đổi vật chất thành năng lượng đã dẫn đến việc chế tạo quả bom nguyên tử đó là bằng chứng vật chất không thể chối cãi nổi của sự đúng đắn của nó. Ngày nay, lí thuyết tương đối đã hoàn toàn được công nhận. Thậm chí, học thuyết về sự ra đời và phát triển của vũ trụ cũng được xây dựng lại trên cơ sở lí thuyết tương đối và từ không gian năng lượng đơn thuần. Còn Einstein được công nhận là nhà khoa học lớn nhất thế kỉ XX. Những thành công của ông được xây dựng trên công sức của những nhà toán học thiên tài đã tìm ra và đã hi sinh cho hình học phi Ơclit.

ĐÓN ĐỌC THTT số 292 (10/2001)

Kì nghỉ hè vừa qua rất nhiều bạn đã tham gia cuộc thi *Vui hè 2001* của THTT. Xin mời các bạn đón đọc phần giải đáp các câu đố và danh sách các bạn trúng giải trên số báo tháng 10.

- Lời giải các bài toán thi chọn học sinh giỏi THPT toàn quốc năm 2001.
- Một số sai lầm trong giải toán tìm cực trị.
- Một số bài toán khó trong kì thi tuyển sinh Đại học năm 2001.
- Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh môn Toán trường đại học Xây dựng năm 2001.
- Không giải được hay giải được một bài toán Hình học lớp 9 ?

và các chuyên mục vui khác : *Bạn có biết, Câu lạc bộ, Sai lầm ở đâu ?, Giải trí toán học...*

Các bạn nhớ đặt mua Toán học & Tuổi trẻ quý IV nhé.

ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN TRƯỜNG ĐẠI HỌC THỦY LỢI NĂM HỌC 2001-2002

Câu I. Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + m$ (C)

1) Khảo sát hàm số với $m = 3$.

2) Giả sử đồ thị (C) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt. Hãy xác định m sao cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành có diện tích phần phía trên và phần phía dưới trục hoành bằng nhau.

Câu II. 1) Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x + y = \dfrac{3}{x^2} \\ 2y + x = \dfrac{3}{y^2} \end{cases}$$

2) Giải phương trình :

$$2^{x-1} - 2^{x^2-x} = (x-1)^2$$

Câu III. 1) Giải phương trình lượng giác :

$$\sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2}\right)$$

2) Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là a, b, c và diện tích S thỏa mãn :

$$S = (c + a - b)(c + b - a)$$

Chứng minh rằng : $\text{tg}C = \dfrac{8}{15}$

Câu IV : 1) Tính : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$

2) Tính : $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1 + tgx)dx$

Câu V: Trong không gian với hệ tọa độ trực chuẩn $(Oxyz)$:

1) Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua các điểm $M(0; 0; 1)$, $N(3; 0; 0)$ và tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc $\dfrac{\pi}{3}$.

2) Cho 3 điểm A $(a;\ 0;\ 0)$, B $(0;\ b;\ 0)$, C $(0;\ 0;\ c)$ với a, b, c là ba số dương, thay đổi và luôn thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Xác định a, b, c sao cho khoảng cách từ điểm O $(0; 0; 0)$ đến mặt phẳng (ABC) đạt giá trị lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI

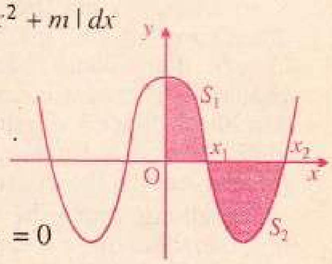
Câu I. 1) Bạn đọc tự giải

2) Gọi x_1, x_2 $(0 < x_1 < x_2)$ là các nghiệm dương của $x^4 - 4x^2 + m = 0$ (1)

Gọi diện tích giới hạn bởi (C) ở phía trên (hoặc ở phía dưới) trục hoành với $x \geq 0$ là S_1 (hoặc S_2). Do (C) nhận Oy làm trục đối xứng nên chỉ cần tìm m để $S_1 = S_2$.

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow \int_0^{x_1} |x^4 - 4x^2 + m|\,dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} |x^4 - 4x^2 + m|\,dx \ .$$



$$\Leftrightarrow \int_0^{x_2} (x^4 - 4x^2 + m)dx = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2\left(\frac{x_2^4}{5} - \frac{4x_2^2}{3} + m\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x_2^4 - 20x_2^2 + 15m = 0 \quad (\text{do } x_2 > 0) \quad (2)$$

Từ (2) và x_2 thỏa mãn (1) suy ra $m = \dfrac{20}{9}$.

Câu II. 1) Với $x, y \neq 0$ hệ đã cho viết dưới dạng sau $\begin{cases} 2x^3 + yx^2 = 3 \\ 2y^3 + xy^2 = 3 \end{cases}$

CÂU LẠC BỘ THTT

CUỘC CHƠI ĐẦU THIÊN NIÊN KỈ MỚI

Mời các bạn tham gia cuộc chơi hàng tháng

ĐOÁN TUỔI VÀ BIẾT AI QUA ẢNH

Bạn hãy cắt phiếu cuộc chơi và *dán ở bên ngoài phong bì* gửi Tòa soạn THTT sau khi đã điền câu trả lời. Bên trong phong bì bạn có thể viết cảm tưởng về cuộc chơi nhưng không gửi bài khác. Nhớ ghi địa chỉ của bạn !

THAM GIA CUỘC CHƠI ĐẦU THIÊN NIÊN KỈ

Người trong ảnh ?

Họ và tên :

. . . .

Ảnh chụp khi . . . . tuổi.

Trừ từng vế của hệ ta được:

$$(x-y)(2x^2+2y^2+3xy)=0 \qquad (*)$$

Do $2x^2+2y^2+3xy = 2\left(x+\frac{3y}{4}\right)^2+\frac{7}{8}y^2>0$

vì $x, y \neq 0$ nên từ (*) suy ra $x = y \neq 0$.

Thay vào hệ đã cho có $x = 1$ và $y = 1$. Thử lại đúng.

2) Ta nhận thấy $x-1 \leq x^2-x$ $(\forall x)$ $\Rightarrow$ $2^{x-1} \leq 2^{x^2-x} \Rightarrow 2^{x-1}-2^{x^2-x} \leq 0$

Mặt khác $(x-1)^2 \geq 0$. Do đó chỉ xảy ra $\begin{cases}(x-1)^2=0\\ 2^{x-1}-2^{x^2-x}=0\end{cases} \Leftrightarrow x=1$ là nghiệm.

Câu III. 1) Đặt $t=\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}$ thì phương trình trở thành $\sin t=\frac{1}{2}\sin 3t \Leftrightarrow \sin t(4\sin^2 t-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin t=0\\ \cos 2t=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=k\pi\\ t=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right. \quad (k\in Z)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{3\pi}{5}+2m\pi\\ x=\frac{14\pi}{15}+2m\pi \quad (m\in Z)\\ x=\frac{4\pi}{15}+2m\pi\end{array}\right.$$

2) $S=c^2-(a-b)^2 \qquad (1)$

Thay $S=\frac{1}{2}ab\sin C$, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ thì (1) $\Leftrightarrow \sin C=4(1-\cos C) \Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}C=\frac{2tg\frac{C}{2}}{1-tg^2\frac{C}{2}}=\frac{8}{15}.$$

Câu IV. 1) Nhân với biểu thức liên hợp để tìm các giới hạn thành phần được :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-(1+x)}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

và $\lim_{x\to 0}\frac{1+x-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}=1$. Từ đó

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-(1+x)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$$

$$=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}.$$

2) Đặt $x=\frac{\pi}{4}-t$

$$\Rightarrow I=-\int_{\pi/4}^{0}\ln\left[1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right]dt$$

$$=\int_0^{\pi/4}\ln\left(\frac{2}{1+\operatorname{tg}t}\right)dt=\int_0^{\pi/4}[\ln 2-\ln(1+\operatorname{tg}t)]dt$$

$$=\frac{\pi}{4}\ln 2-I \Rightarrow I=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

Câu V. 1) Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $Ax+By+Cz+D=0$

(P) qua M, N nên $\begin{cases}C+D=0\\ 3A+D=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}D=-3A\\ C=3A\end{cases}$

$$\Rightarrow Ax+By+3A-3A=0 \qquad (*)$$

Mặt khác (P) tạo với (Oxy) góc $\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{3}=\frac{|3A|}{\sqrt{10A^2+B^2}} \Rightarrow B=\pm A\sqrt{26}$ thay vào (*) được :

$Ax \pm A\sqrt{26}y+3Az-3A=0$. Phương trình mp$(P)$ có dạng $x\pm\sqrt{26}y+3z-3=0$

2) Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Rightarrow bcx+acy+bcz-abc=0$

Giả sử h là khoảng cách từ O đến (ABC) $\Rightarrow$ $h=\frac{|-abc|}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}} \Rightarrow \frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

Từ đó

$$3.\frac{1}{h^2}=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)(a^2+b^2+c^2)\geq 9$$

$\Rightarrow h\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Vậy $h_{\max}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải :

PHÓ ĐỨC ANH, TRỊNH TUÂN,
PHẠM XUÂN ĐỒNG
(GV toán ĐH Thủy Lợi, Hà Nội)

BẠN ĐỌC TÌM TÒI

VỀ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC

TRẦN XUÂN ĐÁNG *(GV THPT Lê Hồng Phong, Nam Định)*
VŨ THÀNH LONG *(12A1, khối PTC Toán – Tin – ĐHSP Hà Nội*

LTS. *Trong THTT 287 (5/2001) đã giới thiệu một số bất đẳng thức (BĐT) hình học do nhà toán học Jack Garfulkel nêu ra mà không ghi chứng minh, trong đó BĐT dưới đây được nhiều bạn đọc quan tâm.*

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng*

$$\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{C-A}{2}$$

$$\ge\frac{2}{\sqrt3}(\sin A+\sin B+\sin C)\qquad(1)$$

Xin giới thiệu 2 cách chứng minh BĐT này. Các bạn có thể tìm ra cách giải nào khác không ?

Cách 1. (của bạn *Trần Xuân Đáng*)

Không mất tính tổng quát, giả sử $A\le B\le C$. Khi đó $A\le\frac{\pi}{3}$. Bất đẳng thức (1)

$$\Leftrightarrow \cos\frac{B-C}{2}+2\cos\frac{B-C}{4}\cos\frac{\pi-3A}{4}$$

$$-\frac{2}{\sqrt3}\sin A-\frac{4}{\sqrt3}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\ge0$$

$$\Leftrightarrow\left(1-\frac{4}{\sqrt3}\cos\frac{A}{2}\right)\left(2\cos^2\frac{B-C}{4}-1\right)+$$

$$+\,2\cos\frac{B-C}{4}\cos\frac{\pi-3A}{4}-\frac{2}{\sqrt3}\sin A\ge0\ (2)$$

Xét hàm số

$$f(x)=\left(1-\frac{4}{\sqrt3}\cos\frac{A}{2}\right)(2x^2-1)+$$

$$+2x\cos\frac{\pi-3A}{4}-\frac{2}{\sqrt3}\sin A \text{ với}$$

$$x=\cos\frac{B-C}{4},\ x\in\left(\frac{\sqrt2}{2};1\right]$$

Dễ dàng chứng minh được $f'(x)<0$,

$$\forall x\in\left(\frac{\sqrt2}{2};1\right)$$

Suy ra $f\left(\cos\frac{B-C}{4}\right)\ge f(1)$ với

$$f(1)=1-\frac{4}{\sqrt3}\cos\frac{A}{2}+2\cos\frac{\pi-3A}{4}-\frac{2}{\sqrt3}\sin A$$

Đặt $t=A\in\left(0;\frac{\pi}{3}\right]$. Xét hàm số

$$g(t)=1-\frac{4}{\sqrt3}\cos\frac{t}{2}+2\cos\frac{\pi-3t}{4}-\frac{2}{\sqrt3}\sin t$$

Ta có

$$g'(t)=-\frac{2}{\sqrt3}\cos t+\frac{2}{\sqrt3}\sin\frac{t}{2}+\frac{3}{2}\sin\frac{\pi-3t}{4}$$

$$=-\frac{2}{\sqrt3}\cos t+\frac{2}{\sqrt3}\sin\frac{t}{2}+\frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{3t}{4}-$$

$$-\frac{3}{2}\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{3t}{4}$$

Biến đổi lượng giác có sử dụng công thức nhân đôi, nhân ba ta được

$$g'(t)=\left(\sin\frac{t}{4}+\cos\frac{t}{4}\right)\left(2\sin\frac{t}{2}-1\right)\times$$

$$\times\left[\frac{2}{\sqrt3}\left(\sin\frac{t}{4}+\cos\frac{t}{4}\right)-\frac{3\sqrt2}{4}\right]$$

Với $t\in\left(0;\frac{\pi}{3}\right)$ thì $0<\frac{t}{4}<\frac{\pi}{12}$ nên

$$\cos\frac{t}{4}>\cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}}=\frac{\sqrt3+1}{2\sqrt2}.$$

Từ đó và từ $0<\sin\frac{t}{2}<\frac{1}{2}$ suy ra $g'(t)<0$, $\forall t\in\left(0;\frac{\pi}{3}\right)$. Như vậy $g(t)\ge g\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$, $\forall t\in\left(0;\frac{\pi}{3}\right]$.

Suy ra $f(1)=g(t)\ge0\Rightarrow f(x)\ge0$, vậy bất đẳng thức (2) đúng.

Suy ra bất đẳng thức (1) đúng.

Bằng cách tương tự, bạn đọc có thể tìm được lời giải của các bài toán sau cũng được đặt ra bởi Jack Garfulkel.

Bài toán 2. Cho tam giác ABC nhọn. Hãy khẳng định hoặc phủ định các bất đẳng thức sau :

1) $$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\ge \frac{4}{3}\left(1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

2) $$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\ge \frac{4}{\sqrt3}\left(1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

Bài toán 3. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}+8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\ge 2$$

Cách 2. (của bạn *Vũ Thành Long*)

Đặt $A_1=\dfrac{B+C}{2}$; $B_1=\dfrac{C+A}{2}$; $C_1=\dfrac{A+B}{2}$ thì A_1, B_1, C_1 là các góc nhọn thỏa mãn $A_1+B_1+C_1=A+B+C$.

• Biến đổi vế phải của (1) có sử dụng các đẳng thức lượng giác quen thuộc :

$$\frac{2}{\sqrt3}(\sin A+\sin B+\sin C)=\frac{8}{\sqrt3}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$=\frac{8}{\sqrt3}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}\sin\frac{A+B}{2}$$
$$=\frac{8}{\sqrt3}\sin A_1\sin B_1\sin C_1 \quad (3)$$

• Biến đổi vế trái của (1) :

$$\cos A_1+\cos\frac{B-C}{2}=\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}=$$
$$=2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=2\sin\frac{C+A}{2}\sin\frac{A+B}{2}=$$
$$=2\sin B_1\sin C_1 \quad (4)$$

Lúc đó từ (3) và (4) cùng các đẳng thức tương tự (4) ta chuyển bài toán 1 về bài toán 4 tương đương.

Bài toán 4. *Cho tam giác nhọn $A_1B_1C_1$, chứng minh rằng*

$$2(\sin A_1\sin B_1+\sin B_1\sin C_1+\sin C_1\sin A_1)\ge$$
$$\ge \cos A_1+\cos B_1+\cos C_1+\frac{8}{\sqrt3}\sin A_1\sin B_1\sin C_1 \quad (5)$$

Kí hiệu các cạnh của $\Delta A_1B_1C_1$ là a, b, c. Gọi S, R và r lần lượt là diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của $\Delta A_1B_1C_1$. Nhân hai vế của (5) với $2R^2$, áp dụng định lí hàm số sin và các công thức :

$$S=2R^2\sin A\sin B\sin C$$
$$\cos A+\cos B+\cos C=$$
$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1+\frac{r}{R}$$

thì bài toán 4 tương đương với bài toán 5 sau :

Bài toán 5. *Cho tam giác nhọn $A_1B_1C_1$, chứng minh rằng*

$$ab+bc+ca\ge 2R^2+2Rr+\frac{8S}{\sqrt3} \quad (6)$$

Giải. Để chứng minh (6) ta sử dụng các công thức đã biết sau :

$$2(ab+bc+ca)=a^2+b^2+c^2+4r(r+4R) \quad (7)$$
$$R\ge 2r \quad (8)$$
$$9R^2\ge a^2+b^2+c^2 \quad (9)$$
$$a^2+b^2+c^2\ge 4(R+r)^2 \text{ nếu } \Delta ABC \text{ nhọn} \quad (10)$$

Đẳng thức xảy ra ở mỗi BĐT (8) (9) (10) khi tam giác là đều.

Từ (7) và (10) suy ra

$$ab+bc+ca\ge 2R^2+12Rr+4r^2 \quad (11)$$

Nếu chứng minh được :

$$2R^2+12Rr+4r^2\ge 2R^2+2Rr+\frac{8S}{\sqrt3} \quad (12)$$

thì từ (11), (12) suy ra (6) đúng.

$$(12)\Leftrightarrow 10Rr+4r^2\ge\frac{8pr}{\sqrt3}$$
$$\Leftrightarrow 5R+2r\ge\frac{4p}{\sqrt3} \quad (13)$$

Ta đi chứng minh (13) có sử dụng (7) (8) (9) như sau :

$$16p^2=4(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)$$
$$=4[2(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)]\le 4[18R^2+4r(r+4R)]$$
$$=3(25R^2+20Rr+4r^2)-(3R^2-4Rr-4r^2)$$
$$=3(5R+2r)^2-(R-2r)(3R+2r)$$
$$\le 3(5R+2r)^2$$

Từ đó suy ra (13) đúng $\Rightarrow$ (12) đúng $\Rightarrow$ (6) đúng

(Xem tiếp trang 5)

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/291. Tìm tất cả các giá trị hữu tỉ của x sao cho biểu thức $\dfrac{x^2+2x+3}{x^2-x+1}$ nhận giá trị là số nguyên

VŨ TRÍ ĐỨC
(Ninh Bình)

Bài T2/291. Cho ba số a, b, c đôi một khác nhau và thỏa mãn

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$$

Chứng minh rằng trong ba số đó phải có một số dương và một số âm.

BÙI MINH DUY
(GV THPT Nguyễn Du, Thái Bình)

Bài T3/291. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện : $0 < x < y \le z \le 1$

và $\quad 3x + 2y + z \le 4.$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$3x^2 + 2y^2 + z^2$$

ĐỖ THANH HÂN
(GV THPT chuyên Bạc Liêu)

Bài T4/291. Cho đường tròn tâm O và hai điểm A, B thuộc đường tròn này. Một đường tròn thay đổi nhưng luôn đi qua A và B có tâm là Q. Gọi P là điểm đối xứng của Q qua đường thẳng AB. Đường thẳng AP cắt đường tròn tâm O lần nữa tại E. Đường thẳng BE (khi E khác B) cắt đường tròn tâm Q lần nữa tại F. Chứng minh rằng điểm F luôn nằm trên một đường thẳng khi đường tròn tâm Q thay đổi.

VI QUỐC DŨNG
(GV ĐHSP Thái Nguyên)

Bài T5/291. Cho tam giác ABC với $AB \le AC$ và AD là đường phân giác trong. Lấy điểm M trên cạnh AB và điểm N trên cạnh AC sao cho $BM.CN = k$ không đổi ($k < AB^2$). Xác định vị trí của M, N sao cho diện tích của tứ giác $AMDN$ là lớn nhất.

PHẠM ĐÌNH TRƯỜNG
(K41 khoa Toán Tin ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/291. Tìm tất cả các hàm số $f:\ Q \to Q$ thỏa mãn $f(f(x) + y) = x + f(y)$ với mọi số x, y thuộc tập hợp số hữu tỉ Q.

VŨ ĐỨC SƠN
(K41 khoa Toán – Tin ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội)

Bài T7/291. Tìm tất cả các hàm số $f: N^* \to N^*$ thỏa mãn $f(f(n) + m) = n + f(m + 2001)$ với mọi số m, n thuộc tập hợp số nguyên dương N^*.

NGUYỄN ANH TUẤN
(SV ĐH Xây dựng Hà Nội)

Bài T8/291. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$x^2(y-z) + y^2(z-y) + z^2(1-z)$$

trong đó x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $0 \le x \le y \le z \le 1$

NGUYỄN VĂN THÔNG
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

Bài T9/291. Gọi p, R và r lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của một tam giác ABC. Chứng minh rằng ABC là tam giác đều khi và chỉ khi $p^2 = 6R^2 + 3r^2$

LÊ ANH TUẤN
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

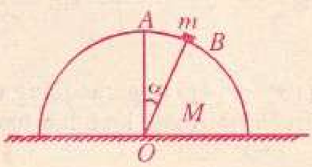
Bài T10/291. Tứ diện $ABCD$ nội tiếp mặt cầu tâm O bán kính R sao cho điểm O nằm trong tứ diện. Các đường thẳng OA, OB, OC, OD cắt các mặt BCD, CDA, DAB, ABC tương ứng ở A', B', C', D'. Chứng minh rằng

$$AA' + BB' + CC' + DD' \ge \frac{16}{3}R$$

NGUYỄN ĐỄ
(Sở GD-ĐT Hải Phòng)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/291. Một bán cầu khối lượng M đặt trên mặt phẳng nằm ngang. Một vật nhỏ $m = \dfrac{M}{10}$ bắt đầu trượt không ma sát, không vận

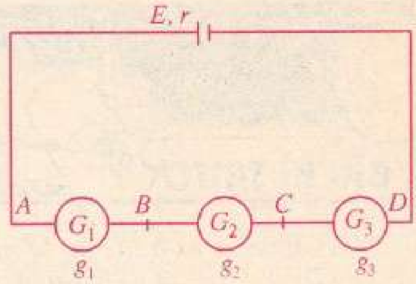


tốc từ đỉnh A của bán cầu. (Hình vẽ). Khi vật trượt đến vị trí B với $\angle AOB = \alpha = 10^\circ$ thì bán cầu bắt đầu trượt trên mặt phẳng nằm ngang. Tìm hệ số ma sát giữa bán cầu và mặt phẳng nằm ngang.

NGUYỄN XUÂN QUANG
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài L2/291. Cho mạch điện như hình bên. Nguồn điện là 1 ăcquy (Sđđ = 2,2V ; điện trở trong r). Ba điện kế có điện trở g_1, g_2, g_3 đều khác 0.

Mắc thêm 1 điện trở $R = 1$ (Ω) lần lượt vào :
- 2 điểm AB, thấy G_1 chỉ 0,05 (A)
- 2 điểm BD, thấy G_2, G_3 chỉ 0,05 (A)
- 2 điểm CD, thấy G_3 chỉ 0,05 (A)
- 2 điểm AC, thấy G_1, G_2 chỉ 0,05 (A)



- 2 điểm BC, thấy G_2 chỉ 0,05 (A)

Hãy tính các điện trở r, g_1, g_2, g_3.

TRẦN VĂN MINH
(GV Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/291. Find all rational values of x, at which expression

$$\frac{x^2+2x+3}{x^2-x+1}$$

takes integral values.

T2/291. Let a, b, c be three distinct numbers satisfying the condition

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$$

Prove that among them, at least one must be positive, one must be negative.

T3/291. The real numbers x, y, z satisfy the conditions :

$$\begin{cases} 0 < x < y \le z \le 1 \\ 3x+2y+z \le 4 \end{cases}$$

Find the greatest value of the expression

$$3x^2+2y^2+z^2$$

T4/291. Let be given a circle (O) with center O and two points A, B on it. A moving circle (Q) with center Q passes through A, B. Let P be the mirrorimage of Q in the line AB. The line AP cuts (O) again at E. The line BE (when B, E are distinct) cuts (Q) again at F. Prove that the point F lies on a fixed line when the circle (Q) moves.

T5/291. Let ABC be a triangle ABC with $AB \le AC$ and let AD be its inner angled - bisector issued from A. M is an arbitrary point on the side AB, N is an arbitrary point on the side AC such that $BM.CN$ = constant k ($k < AB^2$). Determine the position of M and N so that the area of the quadrilateral $AMDN$ attains its greatest value.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/291. Find all functions $f : Q \to Q$ satisfying $f(f(x)+y) = x + f(y)$ for all numbers x, y in the set of rational numbers Q.

T7/291. Find all functions $f : N^* \to N^*$ satisfying

$f(f(n)+m) = n + f(m+2001)$

for all number m, n in the set of positive integers N^*.

T8/291. Find the greatest value of the expression

$$x^2(y-z)+y^2(z-y)+z^2(1-z)$$

where x, y, z are real numbers satisfying the conditions

$$0 \le x \le y \le z \le 1.$$

T9/291. Let p, R and r be respectively the semi-perimeter, the circumradius and the inradius of triangle ABC. Prove that ABC is an equilateral triangle when and only when

$$p^2 = 6R^2 + 3r^2$$

T10/291. The tetrahedron $ABCD$ is inscribed in a sphere with center O, with radius R, such that O lies inside the tetrahedron. The lines OA, OB, OC, OD cut respectively the faces BCD, CDA, DAB, ABC at A', B', C', D'. Prove that

$$AA' + BB' + CC' + DD' \ge \frac{16}{3}R$$

Bài T1/287. *Giả sử a và b là các số nguyên dương sao cho 2a–1, 2b–1 và a+b đều là các số nguyên tố. Chứng minh rằng $a^b + b^a$ và $a^a + b^b$ đều không chia hết cho a + b.*

Lời giải. (của *Vũ Quang Thanh*, 9B, THCS Nguyễn Hữu Tiến, Duy Tiên, **Hà Nam**).

Vì $2a - 1$ và $2b - 1$ là các số nguyên tố nên $a, b > 1$, mà $a + b$ là số nguyên tố nên $a + b$ lẻ. Không giảm tổng quát ta giả sử a chẵn, b lẻ.

Vì b lẻ nên $(a^b + b^b) \vdots (a + b)$

Giả sử $(a^b + b^a) \vdots (a+b)$ thì $(b^{a-b} - 1) \vdots (a+b)$ (1) (vì nếu b^a hoặc b^b chia hết cho $(a + b)$ thì số nguyên tố $a + b$ là ước của $b \Rightarrow$ mâu thuẫn)

Mà theo định lí Fecma nhỏ thì

$$(b^{a+b-1} - 1) \vdots (a + b) \qquad (2)$$

Các bạn tự chứng minh bổ đề sau :

Với mỗi số nguyên tố p > 2, và x không chia hết cho p, d là số nhỏ nhất thỏa mãn $(x^d - 1) \vdots p$ thì với số m bất kì thỏa mãn $(x^m - 1) \vdots p$, ta có $m \vdots d$.

Áp dụng vào (1), (2) ta có

Nếu tồn tại d dương nhỏ nhất thỏa mãn

$(b^d - 1) \vdots (a + b)$ thì $|a - b| \vdots d$ và $(a+b-1) \vdots d$

Suy ra 2a – 1 hoặc 2b – 1 chia hết cho d.

Nhưng 2a – 1 và 2b – 1 đều nguyên tố suy ra d = 1. Vậy ta có $(b-1) \vdots (a+b)$ vô lí. Do đó $(a^b + b^a) \not\vdots (a+b)$. Với $(a^a + b^b) \vdots (a+b)$, bằng cách chứng minh tương tự ta cũng thấy điều đó vô lí.

Vậy $a^b + b^a$ và $a^a + b^b$ đều không chia hết cho a + b.

Nhận xét. Các bạn *Trần Quốc Hoàn*, 8B, THCS Chu Văn An, Thanh Hà, **Hải Dương** và *Nguyễn Duy Hiếu*, 8B, THCS Nguyễn Trường Tộ, **Hà Nội** cũng có lời giải đúng.

TỐ NGUYÊN

Bài T2/287. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$\frac{x-t}{t+y} + \frac{t-y}{y+z} + \frac{y-z}{z+x} + \frac{z-x}{x+t}$$

trong đó x, y, z, t là các số dương.

Lời giải. (của nhiều bạn)

Sử dụng bất đẳng thức Côsi ta dễ dàng có bất đẳng thức $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ với $a, b > 0$. Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a = b$.

Đặt $A = \frac{x-t}{t+y} + \frac{t-y}{y+z} + \frac{y-z}{z+x} + \frac{z-x}{x+t}$, ta có

$$A = \frac{x-t}{t+y} + \frac{t-y}{y+z} + \frac{y-z}{z+x} + \frac{z-x}{x+t} + 4 - 4$$

$$= \left(\frac{x-t}{t+y} + 1\right) + \left(\frac{t-y}{y+z} + 1\right) + \left(\frac{y-z}{z+x} + 1\right) + \left(\frac{z-x}{x+t} + 1\right) - 4$$

$$= \frac{x+y}{t+y} + \frac{t+z}{y+z} + \frac{y+x}{z+x} + \frac{z+t}{x+t} - 4$$

$$= \left(\frac{x+y}{t+y} + \frac{y+x}{z+x}\right) + \left(\frac{t+z}{y+z} + \frac{z+t}{x+t}\right) - 4$$

$$= (x+y)\left(\frac{1}{t+y} + \frac{1}{z+x}\right) + (z+t)\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+t}\right) - 4$$

$$\geq (x+y)\frac{4}{x+y+z+t} + (z+t)\frac{4}{x+y+z+t} - 4$$

$$= 4 - 4 = 0,$$

đẳng thức xảy ra khi $t + y = x + z$ và $y + z = x + t$ $\Leftrightarrow x = y$ và $z = t$.

Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm của A là 0 khi $x = y$ và $z = t$.

Nhận xét. Tuy bài toán này khá đơn giản, nhưng cũng có một số bạn xác định sai giá trị cần tìm, và rất nhiều bạn đi đến điều kiện cần và đủ để đạt giá trị nhỏ nhất là $x = y = z = t$, điều đó không chính xác.

Nhiều bạn có lời giải giống như lời giải trên, trong đó một số bạn quên không ghi tên và địa chỉ. Các bạn sau đây có lời giải đầy đủ và ngắn gọn hơn cả : **Phú Yên:** *Nguyễn Tâm Đắc Linh*, 9D9 THCS Phú Yên, Tuy Hòa ; **Bình Thuận:** *Đậu Ngọc Tú*, 6T, THCS Nguyễn Trãi, Phan Thiết; **Hòa Bình:** *Nguyễn Ngọc Tuyến*, THCS Lạc Thịnh, Yên Thủy, Lê Thái Hoàng, THCS Hữu Nghị ; **Yên Bái :** *Hoàng Thị Phương*, THCS Dân tộc nội trú Yên Bình, *Nguyễn Đức Tâm*, 9B, THCS Lương Thế Vinh, Mậu A, Văn Yên.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/287. *Giải phương trình*

$$\sqrt[4]{17-x^8}-\sqrt[3]{2x^8-1}=1$$

Lời giải. (dựa theo *Hoàng Thị Phương*, 8C, THCS Dân tộc nội trú Yên Bình, **Yên Bái** và nhiều bạn khác).

Đặt $u=\sqrt[4]{17-x^8}$ $(u\geq 0)$; $v=\sqrt[3]{2x^8-1}$

Ta có hệ :

$$\begin{cases}u-v=1\\2u^4+v^3=33\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=u-1\\2u^4+(u-1)^3=33\end{cases}\quad(*)$$

$(*)\Leftrightarrow 2u^4+u^3-3u^2+3u-34=0$

$\Leftrightarrow (u-2)(2u^3+5u^2+7u+17)=0$

$\Leftrightarrow u=2$ (vì $2u^3+5u^2+7u+17>0$)

Từ đó $\sqrt[4]{17-x^8}=2\Leftrightarrow x^8=1\Leftrightarrow x=\pm 1$. Thử lại đúng.

Nhận xét. 1) Ngoài cách trên, nhiều bạn xét 3 trường hợp : $x^8>1$; $x^8<1$ và $x^8=1$ để tìm được nghiệm $x=\pm 1$.

2) Có 2 sai lầm mà một số bạn mắc phải là : để thiếu nghiệm $x=-1$, đặt điều kiện cho căn bậc lẻ không âm !

3) Các bạn sau có lời giải tốt :

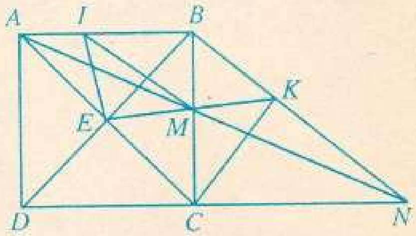
Yên Bái: *Trần Mạnh Cường*, 8B, THCS Lê Hồng Phong, Tx. Yên Bái; **Vĩnh Phúc:** *Đại Thị Hương*, 8B, *Phạm Văn Hoàng*, 9B, THCS Yên Lạc, *Nguyễn Trường Quân*, 9A, THCS Hai Bà Trưng, Phúc Yên, Mê Linh, *Phan Tiến Thành*, và *Nhâm Tùng Giang*, 8A, THCS Vĩnh Yên, Tx. Vĩnh Yên, *Trần Thị Lệ Hằng*, 9A, THCS Hương Canh, Bình Xuyên; **Phú Thọ:** *Nguyễn Trường Thọ*, 8A2, THPT Giấy, Phong Châu, Phù Ninh, *Lê Thanh Tùng*, 9B, THCS Việt Trì, *Nguyễn Bá Gia*, THCS Tam Nông; **Phú Yên:** *Nguyễn Tâm Đắc Linh*, 9D9, THCS Phú Lâm, Tuy Hòa; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Quốc Khánh*, 9B, THCS Yên Phong, *Vương Hữu Dũng*, 9A, THCS Tiên Du, *Ngọc Thị Thanh Châm*, 7A, THCS Thuận Thành, *Chu Thị Minh*, 9A, THCS Yên Phong;

Hà Nội: *Vũ Trường Giang*, khu C, thị trấn Sóc Sơn; **Hà Tây:** *Nguyễn Văn ương*, 9B, THCS Kiều Phú, Quốc Oai; **Hải Dương:** *Lê Đình Huy*, 8A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách, *Khổng Minh Thảo*, 9/3, THCS Lê Quý Đôn, Tp. Hải Dương; **Hòa Bình:** *Lê Thái Hoàng*, 9A1, THCS Hữu Nghị, *Nguyễn Lâm Tuyến*, 9B, THCS Lạc Thịnh, Yên Thủy; **Hải Phòng:** *Trần Xuân Dũng*, 9A, PTNK Trần Phú; **Hưng Yên:** *Doãn Thị Kim Huế*, 7C, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi; **Thái Bình:** *Ngô Xuân Tùng*, 9B1, THCS Lương Thế Vinh, Tx. Thái Bình; *Nguyễn Thái Vĩnh*, 9A5, THCS An Ninh, Quỳnh Phụ; **Hà Nam:** *Vũ Quang Thanh*, 9B, THCS Nguyễn Hữu Tiến, Duy Tiên; **Ninh Bình:** *Đinh Hữu Công*, 9A, THCS Trương Hán Siêu, Tx. Ninh Bình; **Thanh Hóa:** *Bùi Thanh Tùng*, 9B, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn, *Phạm Minh Ngọc*, 9A, THCS Yên Thọ, Yên Định; **Nghệ An:** *Lê Bảo Trung*, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Bùi Công Trường*, 9A, THCS Thị trấn Hòa Bình, Tương Dương, *Lê Thị Hồng Ngân*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Lê Minh Quang*, *Nguyễn Phi Tùng*, 9A, THCS Phan Huy Chú, Thạch Hà, *Phan Hải Hà*, 9_1, *Lê Nam Trường*, 7_1 THCS Lê Văn Thiêm, Tx. Hà Tĩnh; **Đà Nẵng:** *Trần Duy Sơn*, 8/2, THCS Nguyễn Khuyến, Tp. Đà Nẵng; **Quảng Ngãi:** *Bùi Lê Trọng Thanh*, $8C_1$, THPT Nguyễn Nghiêm, Tx. Quảng Ngãi; **Bình Định:** *Lê Tôn Khách*, 7M, THCS Lê Hồng Phong, Tp. Quy Nhơn; **Tp. Hồ Chí Minh:** *Trần Hải Đăng*, 6A9, THCS Trần Đại Nghĩa, Q.3, *Hà Lê Duy*, 9_1, trường Nguyễn Du, Q.1; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Lê Hồng Diễm*, 9A1, THPT Tx. Cao Lãnh.

MAI THẾ DUY

Bài T4/287. *Cho hình vuông ABCD. Hai đường chéo cắt nhau tại E. Một đường thẳng nào đó đi qua A, cắt đường thẳng BC tại M và cắt đường thẳng CD tại N. Gọi K là giao điểm của các đường thẳng EM và BN. Chứng minh rằng $CK\perp BN$.*

Lời giải. Xét trường hợp M thuộc cạnh BC và khi đó N nằm trên CD kéo dài về phía C.



Lấy I trên cạnh BA sao cho $IB=CM$.

Ta có $\Delta IBE=\Delta MCE$ (cgc). Suy ra $EI=EM$. Ta lại có $\angle MEC=\angle BEI$ nên ΔMEI vuông cân.

Từ đó $\angle EMI=45^\circ=\angle BCE$.

Ta có $\dfrac{IB}{AB}=\dfrac{CM}{AD}=\dfrac{MN}{AN}$. Nên $IM//BN$. Suy ra $\angle BCE=\angle EMI=\angle BKE$.

Do đó tứ giác $BECK$ nội tiếp. Từ $\angle BEC=90^\circ$ ta suy ra $\angle CKB=90^\circ$. Vậy $CK\perp BN$.

Các trường hợp M nằm trên BC kéo dài về phía C, M nằm trên BC kéo dài về phía B ta chứng minh tương tự.

Nhận xét. 1) Số đông các bạn không xét đủ các trường hợp mà mặc nhiên coi chỉ có 1 trường hợp như hình vẽ thể hiện.

2) Các bạn có lời giải tốt :

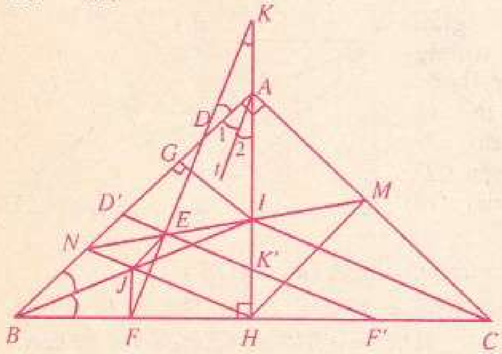
Thái Nguyên: Ninh Trung Kiên, 9A1, THCS Chu Văn An; **Vĩnh Phúc:** Lê Huy Quang, 9A, THCS Vĩnh Tường, Nguyễn Việt Cường, 9B, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh:** Nguyễn Tuấn Minh, 9A, THCS Yên Phong; **Hà Tây:** Nguyễn Duy Khiêm, 9A, THCS Thạch Thất; **Hà Nam:** Trần Phan Bình, 8B, THCS Trần Phú, Phủ Lý; **Hải Phòng:** Phạm Anh Minh, 9A, THPT NK Trần Phú; **Nam Định:** Nguyễn Thanh Thiên, 9B, THCS Hải Hậu, Phạm Kim Hùng, Nguyễn Đăng Hợp, 8A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, **Nghệ An:** Cao Đức Tuấn, 9B, THCS Cao Xuân Huy, TT Diễn Châu.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/287. *Cho tam giác vuông cân ABC với $\angle A = 90^o$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác, M là trung điểm của AC. Đường thẳng MI cắt AB tại N. Gọi E là trung điểm của IN, F là điểm trên cạnh BC sao cho FC = 3FB. Đường thẳng EF cắt AB tại D, cắt đường thẳng AI tại K. Chứng minh rằng tam giác ADK cân.*

Lời giải. Kẻ $IH \perp BC$ và $IG \perp AB$. Vì $MH // AB$ nên $\dfrac{AN}{MH} = \dfrac{IA}{IH}$ (1)

Do BI là đường phân giác của ΔABH nên $\dfrac{IA}{IH} = \dfrac{BA}{BH}$ (2).



Từ (1), (2) và do $AB = 2MH$ nên $AN.BH = MH.AB = \dfrac{1}{2}AB^2 = BH^2 \Rightarrow AN = BH$.

Từ đó $BN = AB - AN = AB - BH = AB - BG = AG = IG \Rightarrow BN = IH$ (3)

Ta đưa về bài toán phụ : *Cho tam giác thường ABH (AB > AH). Gọi N và I lần lượt là các điểm trên cạnh AB và AH sao cho BN = IH. Gọi E và F là trung điểm của NI và BH tương ứng. Thế thì EF song song với đường phân giác trong At của ΔABH.*

Để chứng minh gọi J là trung điểm của BI. Theo tính chất đường trung bình của tam giác ta có : $EJ // BN$ và $2\,EJ = BN$, $JF // IH$ và $2JF = IH$. Từ đó ΔEJF cân. Kẻ $At // EF$ thì $\angle A_1 = \angle JEF = \angle JFE = \angle A_2$ nên At là đường phân giác trong của góc BAH.

Trở lại bài toán : Vì $DK // At$ nên $\angle ADK = \angle A_1 = \angle A_2 = \angle AKD$ nghĩa là ΔADK cân tại A (đpcm).

Nhận xét. 1) Nhiều bạn đã phát hiện được đề ra in nhầm nên đã tự sửa "AC" thành "AI" và chứng minh đúng. Một số bạn đã tính độ dài các đoạn thẳng nên lời giải dài dòng.

2) Các bạn *Nguyễn Quang Tùng* 9H, THCS Trưng Vương, **Hà Nội**, *Lê Bảo Khánh*, 9E, THCS Lê Lợi, Hà Đông, **Hà Tây** phát hiện thêm rằng nếu F' là trung điểm của HC ($F'B = 3F'C$) và đường thẳng $F'E$ cắt AB ở D', cắt AI tại K' thì $\Delta AD'K'$ cân. Thực vậy theo chứng minh trên ΔANH cân nên $\angle BHN = \angle A_2 = \dfrac{45^o}{2} = \angle HCI \Rightarrow NH // IC$. Do EF' là đường trung bình của hình thang $NHCI$ nên $EF' // NH$ mà ΔANH cân ở A nên $\Delta AD'K'$ cũng cân ở A.

3) Các bạn sau có lời giải gọn :

Yên Bái: *Trần Mạnh Cường*, 8B, THCS Lê Hồng Phong, Tx. Yên Bái; **Vĩnh Phúc:** *Phạm Văn Hoàng*, 9B, THCS Yên Lạc; **Hòa Bình:** *Nguyễn Lâm Tuyển*, 9B, THCS Lạc Thịnh, Yên Thủy, *Lê Thái Hoàng*, 9A1, THCS Hữu Nghị; **Hà Tây:** *Nguyễn Ngọc Tuấn*, 9A, THCS Thạch Thất; **Bắc Ninh:** *Vũ Văn Sơn*, 9A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài; **Hải Dương:** *Phạm Huy Hoàng*, 9/3, THCS Lê Quý Đôn, Tp. Hải Dương, *Lê Đình Huy*, 8A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách; **Hải Phòng :** *Bùi Tuấn Anh*, *Nguyễn Đức Phương*, 8A, *Trần Xuân Dũng*, 9A, TH NK Trần Phú; **Nam Định:** *Nguyễn Đăng Hợp*, *Trần Trung Kiên*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, *Nguyễn Thanh Thiện*, 9B, THCS Hải Hậu; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Đình Dũng*, 9A, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Phan Trung Kiên*, 8C, THCS TT Nam Đàn.

VIỆT HẢI

Bài T6/287. *Chứng minh rằng phương trình sau có vô số nghiệm nguyên*

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 2S^3 - 1$$

trong đó S là tổng của n số nguyên dương đầu tiên, n là một số nguyên dương cho trước.

Lời giải. Rõ ràng phương trình có một nghiệm riêng $(x_o, y_o, z_o, t_o) = (S, S, -1, 0)$. Ta sẽ tìm các nghiệm khác dưới dạng $x = S - r$, $y = S + r$, $z = -(l + 1)$, $t = l$.

Khi đó

$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 2S^3 - 1$ tương đương với

$2Sr^2 - l^2 - l = 0$

$\Leftrightarrow (2l+1)^2 - 8Sr^2 = 1.$

Đặt $u = 2l + 1 \Rightarrow u^2 - 4n(n+1)r^2 = 1$ (2)

Ta chỉ cần chứng minh phương trình (1) có vô số nghiệm nguyên dương $(r, l) \Leftrightarrow$ phương trình (2) có vô số nghiệm nguyên dương (u, r) (bởi vì nghiệm u của (2) chắc chắn là số lẻ). Phương trình (2) hiển nhiên có một nghiệm $u_o = 2n + 1$, $r_o = 1$. Đặt $d = 4n(n+1)$. Nếu (u_n, r_n) là một nghiệm của (2) thì

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_o u_n + dr_o r_n \\ r_{n+1} = r_o u_n + u_o r_n \end{cases}$$

cũng là nghiệm của (2). Thật vậy

$u_{n+1}^2 - dr_{n+1}^2 =$

$= (u_o u_n + dr_o r_n)^2 - d(r_o u_n + u_o r_n)^2$

$= (u_n^2 - dr_n^2)(u_o^2 - dr_o^2) = 1$

Vì $u_{n+1} > u_n$, $r_{n+1} > r_n$ nên ta có đpcm.

Nhận xét. 1) Phương trình dạng $x^2 - dy^2 = 1$ (3) được gọi là phương trình Pell. Đây là một phương trình Điôphăng rất nổi tiếng trong số học. Đã chứng minh được rằng phương trình Pell (3) có vô số nghiệm nguyên dương nếu d là một số không chính phương. Các bạn có thể tìm hiểu chi tiết về phương trình Pell trong cuốn sách : "Bài giảng số học", NXB Giáo dục năm 1996.

Như vậy kết luận của bài toán vẫn còn đúng khi thay S bởi một số nguyên dương bất kì sao cho $2S$ không là số chính phương (trong bài S có dạng $\dfrac{n(n+1)}{2}$) do đó dễ thấy $2S = n(n+1)$ không là số chính phương.

2) Do sơ suất nên đề bài in nhầm phương trình trên là $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 3S^3 - 1$ (4). Thành thử không có bạn nào giải được bài toán (4) này. Tòa soạn xin thành thật cáo lỗi cùng bạn đọc.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/287. *Cho các số thực $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$. Chứng minh rằng phương trình*

$$\log_a^4 y + \log_b^4 x + 3\log_a^2 x.\log_b^2 y - 8\log_a y.\log_b x - 16(\log_a^2 y + \log_b^2 x) + 80 = 0\ (*)$$

có hai nghiệm, và gọi hai nghiệm đó là (x_1, y_1), (x_2, y_2) thì $x_1 + x_2 + y_1 + y_2 > 4$

Lời giải. Điều kiện : $x > 0, y > 0$.

Đặt $u = \log_a y$, $v = \log_b x$.

Chú ý $\log_a x.\log_b y =$

$= \log_a b.\log_b x.\log_b a.\log_a y = u.v$

Do đó phương trình (*) tương đương với

$0 = u^4 + v^4 + 3u^2v^2 - 8uv - 16(u^2 + v^2) + 80$

$= (u^2 + v^2 - 8)^2 + (uv - 4)^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 8 \\ uv = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v = 2 \\ u = v = -2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_a y = \log_b x = 2 \\ \log_a y = \log_b x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = b^2,\ \ y = a^2 \\ x = \dfrac{1}{b^2},\ y = \dfrac{1}{a^2} \end{array}\right.$$

Bởi vậy $x_1 + x_2 + y_1 + y_2 =$

$= b^2 + \dfrac{1}{b^2} + a^2 + \dfrac{1}{a^2} > 2 + 2 = 4$ (do a $\neq$ 1).

Nhận xét. Tòa soạn nhận được lời giải của gần 300 bạn, hầu hết các bạn đều giải như trên.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/287. *Giả sử phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có 2 nghiệm phân biệt. Xét dãy số $\{x_n\}$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ được xác định bởi số x_o cho trước và các điều kiện*

$x_n(ax_{n-1} + b) + c = 0$ với $n = 1, 2, ...$

Hãy tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ theo x_o.

Lời giải. (Theo cách của *Nguyễn Đức Nhật*, 12B Toán, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội)

Gọi 2 nghiệm của phương trình là m và p, giả sử $|m| \le |p|$. Suy ra $p \neq 0$. Khi đó

$x_n(ax_{n-1} + b) + c = 0$

$\Leftrightarrow x_n\left(x_{n-1} + \dfrac{b}{a}\right) + \dfrac{c}{a} = 0$

$\Leftrightarrow x_n(x_{n-1} - (p+m)) + mp = 0$

$\Leftrightarrow (x_n - p)(x_{n-1} - p) + p(x_{n-1} - p) - m(x_n - p) = 0$ (*)

Từ (*) suy ra ngay kết quả :

+ Nếu $x_o = p$ thì $x_n = p$, $\forall n = 1, 2...$ Suy ra $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = p$

+ Nếu $x_o = m$ thì $x_n = m$, $\forall n = 1, 2, ...$ Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} = m$

+ Nếu $x_o \neq p$ và $x_o \neq m$ thì $x_n \neq p$ và $x_n \neq m$ $(\forall n)$.

Đặt $z_n = \dfrac{1}{x_n - p} \Leftrightarrow x_n = p + \dfrac{1}{z_n}$ ta được

$1 + pz_n - mz_{n-1} = 0$

$\Leftrightarrow z_n = \dfrac{m}{p} z_{n-1} - \dfrac{1}{p}$, $n = 1, 2, ...$

Xét phương trình

$x = \dfrac{m}{p} x - \dfrac{1}{p} \Rightarrow x = \dfrac{1}{m-p}$

Suy ra :

$$\left|z_n - \frac{1}{m-p}\right| = \left|\frac{m}{p} z_{n-1} - \frac{1}{p} - \frac{1}{m-p}\right| =$$

$$= \left|\frac{m}{p}\right| \left|z_{n-1} - \frac{1}{m-p}\right| = ... = \left|\frac{m}{p}\right|^n \left|z_o - \frac{1}{m-p}\right|$$

Nếu $|m| < |p|$ thì $\left|\frac{m}{p}\right|^n \to 0$ khi $n \to \infty$ và

$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \frac{1}{m-p}$ hay $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = m$

Nếu $|m| = |p|$ thì $b = 0$ và

$$\left|z_n - \frac{1}{m-p}\right| = \left|z_o - \frac{1}{m-p}\right|$$

$$\Rightarrow x_n = p + \frac{1}{\frac{1}{m-p} \pm \left|z_o - \frac{1}{m-p}\right|}$$

Trường hợp này không tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt.

Lương Thế Nhân, Trần Anh Hoàng, 11T, ĐHKHTN – ĐHQG **Tp. HCM;** *Nguyễn Văn Thắng*, 10T, chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi** ; *Nguyễn Hoàng Thạch*, 11T, Amsterdam , *Kim Đình Thái*, 11A1, ĐHSP **Hà Nội** ; *Đào Anh Dũng B*, 12T, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương**; *Đậu Thị Ngọc Ánh*, 10A, ĐH Vinh; *Bùi Văn Tùng*, 12B, THPT Trần Nhật Duật, **Nam Định** ; *Nguyễn Xuân Trường*, 11A1, chuyên **Vĩnh Phúc** ; *Vũ Đình Đẩu*, 11T, THPT Trần Phú, **Hải Phòng**; *Nguyễn Thái Ngọc, Nguyễn Lâm Tuyền*, 12T, chuyên Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**; *Nguyễn Thị Thùy Dương*, 11 Sinh, chuyên Hàn Thuyên, **Bắc Ninh**.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/287. *Cho tam giác ABC và n là số nguyên dương. Chứng minh rằng*

a) $\cos A + \cos B + \cos C \le$

$$\le 1 + \frac{1}{6}\left(\cos^2\frac{A-B}{n} + \cos^2\frac{B-C}{n} + \cos^2\frac{C-A}{n}\right) \le \frac{3}{2}$$

với $n \ge 2$ (1)

b) $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le$

$$\le 1 + \frac{1}{6}\left(\cos^2\frac{A-B}{n} + \cos^2\frac{B-C}{n} + \cos^2\frac{C-A}{n}\right) \le \frac{3}{2}$$

với $n \ge 4$ (2)

Lời giải. a) • Ta có :

$$1 + \frac{1}{6}\left(\cos^2\frac{A-B}{n} + \cos^2\frac{B-C}{n} + \cos^2\frac{C-A}{n}\right) \le$$

$$\le 1 + \frac{1}{6}(1+1+1) = \frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

• Ta có :

$$0 \le \left|\frac{A-B}{n}\right| \le \left|\frac{A-B}{2}\right| < \frac{\pi}{2} \ \forall n \ge 2.$$

$$\Rightarrow \cos^2\frac{A-B}{n} \ge \cos^2\frac{A-B}{2} \ \forall n \ge 2.$$

Tương tự ta có : $\cos^2\frac{B-C}{n} \ge \cos^2\frac{B-C}{2}$;

$$\cos^2\frac{C-A}{n} \ge \cos^2\frac{C-A}{2} \ \forall n \ge 2.$$

Vì vậy, thay cho việc chứng minh phần trái của bất đẳng thức (1) ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức

$\cos A + \cos B + \cos C \le$

$$\le 1 + \frac{1}{6}\left(\cos^2\frac{A-B}{2} + \cos^2\frac{B-C}{2} + \cos^2\frac{C-A}{2}\right) \quad (*)$$

Ta có thể chứng minh (*) như sau.

Cách 1. (của bạn *Hoàng Ngọc Minh*, 10A1, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**)

Ta có $\left(\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin\frac{C}{2}\right)^2 \ge 0$

$$\Rightarrow \cos^2\frac{A-B}{2} + 4\sin^2\frac{C}{2} \ge 4\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^2\frac{A-B}{2} + 2(1-\cos C) \ge 2(\cos A + \cos B)$$

$$\Rightarrow \cos^2\frac{A-B}{2} + 2 \ge 2(\cos A + \cos B + \cos C)$$

Vậy :

$$\cos^2\frac{A-B}{2} + \cos^2\frac{B-C}{2} + \cos^2\frac{C-A}{2} + 6 \ge$$

$$\ge 6(\cos A + \cos B + \cos C)$$

Từ đó suy ra (*)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Cách 2. (của bạn *Nguyễn Thị Thùy Dương*, 11 Sinh, THPT NK Hàn Thuyên, **Bắc Ninh**)

Theo bất đẳng thức Côsi ta có :

$$\begin{cases} \sin B + \sin C \ge 2\sqrt{\sin B \sin C} \\ \sin C + \sin A \ge 2\sqrt{\sin C \sin A} \\ \sin A + \sin B \ge 2\sqrt{\sin A \sin B} \end{cases}$$

Nhân theo từng vế của ba BĐT trên có:

$(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A)(\sin A + \sin B) \ge$

$\ge 8\sin A \sin B \sin C$

Sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích và công thức nhân đôi ta được :

$$\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\cos\frac{A-B}{2} \geq$$

$$\geq 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \qquad (\alpha)$$

Vì $1 \geq \cos\frac{B-C}{2}, \cos\frac{C-A}{2}, \cos\frac{A-B}{2} > 0$

nên ta có :

$$\cos^2\frac{B-C}{2}+\cos^2\frac{C-A}{2}+\cos^2\frac{A-B}{2} \geq$$

$$\geq \cos^3\frac{B-C}{2}+\cos^3\frac{C-A}{2}+\cos^3\frac{A-B}{2} \qquad (\beta)$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có :

$$\cos^3\frac{B-C}{2}+\cos^3\frac{C-A}{2}+\cos^3\frac{A-B}{2} \geq$$

$$\geq 3\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\cos\frac{A-B}{2} \qquad (\gamma)$$

Từ (α), (β), (γ) suy ra :

$$\frac{1}{6}\left(\cos^2\frac{B-C}{2}+\cos^2\frac{C-A}{2}+\cos^2\frac{A-B}{2}\right) \geq$$

$$\geq 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}\left(\cos^2\frac{B-C}{2}+\cos^2\frac{C-A}{2}+\cos^2\frac{A-B}{2}\right) \geq$$

$\geq \cos A + \cos B + \cos C - 1$. Từ đó suy ra (*)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

b) Áp dụng (1) cho tam giác với ba góc là $\frac{B+C}{2}, \frac{C+A}{2}, \frac{A+B}{2}$ ta có ngay (2). Biến đổi chi tiết xin dành cho bạn đọc.

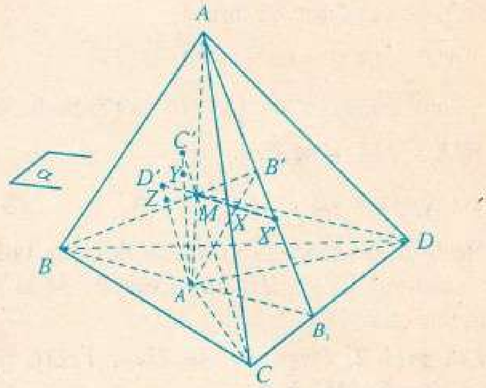
Nhận xét. Đây là bài toán dễ, các bạn sau đây có lời giải tốt. **Quảng Bình :** *Hà Nhật Sang*, 11T, PTNK Quảng Bình; **Đắc Lắc:** *Nguyễn Minh Mẫn*, 11A3, THPT Trần Quốc Toản; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Quốc Hoài Việt*, 10A1, THPT Minh Khai; **Hòa Bình:** *Nguyễn Lâm Tuyền*, 11T, THPT NK Hoàng Văn Thụ; **Nghệ An:** *Hoàng Dũng*, 10A, THPT Lê Viết Thuật; **Vĩnh Phúc :** *Đại Quang Trung*, 11B2, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Đồng Tháp:** *Hoàng Công Thiện*, 12T, THPT Cao Lãnh.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T10/287. *Giả sử M là một điểm nằm trong tứ diện ABCD. Các đường thẳng AM, BM, CM, DM theo thứ tự cắt các mặt phẳng (BCD), (CDA), (DAB), (ABC) tại A', B', C', D'. Mặt phẳng (α) qua M, song song với mặt phẳng (BCD) lần lượt cắt A'B', A'C', A'D' tại X, Y, Z. Chứng minh rằng M là trọng tâm của tam giác XYZ.*

Lời giải. (dựa theo *Lê Phương*, 10T1, THPT chuyên Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**)

Ta sử dụng phương pháp véctơ để giải bài toán này.



– Vì trong không gian, bất kì 4 véctơ nào cũng phụ thuộc tuyến tính nên tồn tại 4 số thực x, y, z, t không đồng thời bằng không sao cho :

$$x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}+z\overrightarrow{MC}+t\overrightarrow{MD}=\vec{0} \qquad (1)$$

(Ngoài ra, cũng để ý rằng cả 4 số x, y, z và t đều dương vì M là một điểm nằm trong tứ diện $ABCD$).

Vì $M \in$ mp(α)//mp(BCD) nên $MX//BA'$, $X \in [A'B']$. Trong tam giác $B'BA'$, $MX//BA'$, áp dụng định lí Talet ta có hệ thức vectơ sau :

$$\overline{MX}=\frac{\overline{MB'}}{\overline{BB'}}\overline{BA'} \qquad (2)$$

– Bây giờ ta chiếu các véc tơ xác định bởi (1) lên đường thẳng BB' theo phương mặt phẳng (ACD), ta được :

$y\overrightarrow{MB}+(z+t+x)\overrightarrow{MB'}=\vec{0}$, hay là :

$$(z+t+x)\overline{MB'}=y\overline{BM} \qquad (1')$$

Từ đó suy ra :

$$\frac{\overline{MB'}}{y}=\frac{\overline{BM}}{z+t+x}=\frac{\overline{BB'}}{x+y+z+t}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{MB'}}{\overline{BB'}}=\frac{y}{x+y+z+t} \quad ; \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) ta được : $\overrightarrow{MX}=ky\overrightarrow{A'B}$, trong đó:

$$k=-\frac{1}{x+y+z+t} \quad (k \neq 0) \qquad (4)$$

Chứng minh tương tự, ta được :

$$\overrightarrow{MY}=kz\overrightarrow{A'C} \qquad (5)$$

$$\overrightarrow{MZ}=kt\overrightarrow{A'D} \qquad (6)$$

– Mặt khác, lại chiếu các vectơ xác định bởi (1) lên mặt phẳng (BCD) theo phương đường thẳng AA', ta được hệ thức :

$$y\overrightarrow{A'B}+z\overrightarrow{A'C}+t\overrightarrow{A'D}+t\vec{0}=\vec{0} \quad (7)$$

– Cuối cùng, từ (4), (5), (6) và (7) ta được :

$$\overrightarrow{MX}+\overrightarrow{MY}+\overrightarrow{MZ}=$$

$$=k(y\overrightarrow{A'B}+z\overrightarrow{A'C}+t\overrightarrow{A'D})=\vec{0} \qquad (8)$$

Hệ thức (8) chứng tỏ rằng M là trọng tâm của hệ ba điểm $\{X, Y, Z\}$, cũng tức là, M là trọng tâm tam giác XYZ.

Lời giải 2. (*Nguyễn An Huy*, 11D1, THPT Chu Văn An, **Hà Nội**)

Kí hiệu S, S_B, S_C và S_D lần lượt là diện tích các tam giác BCD, $A'CD$, $A'DB$ và $A'BC$; thế thì $S = S_B + S_C + S_D$ và ta được hệ thức véctơ sau đây (một hệ thức quen thuộc đã có trong SGK):

$$S_B.\overrightarrow{A'B}+S_C.\overrightarrow{A'C}+S_D.\overrightarrow{A'D}=\vec{0} \qquad (i)$$

Lại để ý rằng trong mặt phẳng (MAB), các đường thẳng AB' và BA' cắt nhau ở một điểm B_1 nào đó trên cạnh CD. Gọi $X' = \text{mp}(\alpha) \cap AB_1$; thế thì vì $M \in \text{mp}(\alpha)//\text{mp}(BCD)$ nên $(\alpha) \cap (MAB) = MX' // BB_1$ và $(\alpha) \cap A'B' = X \in MX'$. Theo định lí Talet, trong các tam giác $B'BB_1$ và $AA'B_1$ có $MX'//BB_1$ nên ta được :

$$\frac{\overline{MX}}{\overline{BA'}}=\frac{\overline{MX'}}{\overline{BB_1}}\left(=\frac{\overline{MB'}}{\overline{BB'}}\right), \text{ và } \frac{\overline{MX'}}{\overline{A'B_1}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{AA'}}$$

Từ đó suy ra :

$$\overrightarrow{MX}=\frac{\overline{MX'}}{\overline{BB_1}}\overrightarrow{BA'}=\frac{\overline{AM}}{\overline{AA'}}.\frac{\overline{A'B_1}}{\overline{BB_1}}\overrightarrow{BA'}=$$

$$=\frac{\overline{AM}}{\overline{AA'}}.\frac{S_B}{S}\overrightarrow{BA'}$$

hay là $\overrightarrow{MX}=\lambda.S_B\overrightarrow{A'B}$, (ii)

trong đó : $\lambda=-\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AA'}}.\dfrac{1}{S}$

Chứng minh tương tự, ta được :

$$\overrightarrow{MY}=\lambda.S_C\overrightarrow{A'C} \qquad (iii)$$

$$\overrightarrow{MZ}=\lambda S_D\overrightarrow{A'D} \qquad (iv)$$

Cộng theo từng vế các đẳng thức (ii), (iii) và (iv) rồi sử dụng (i) ta thu được hệ thức (8) như lời giải 1 ở trên, đó là đpcm.

Nhận xét. 1) Ngoài hai lời giải nêu trên, đa số các bạn sử dụng phương pháp thể tích hoặc diện tích cũng đi đến hệ thức (8). Chẳng hạn, có thể biểu thị tỉ số $\dfrac{MB'}{BB'}$ theo tỉ số thể tích hoặc tỉ số diện tích như sau :

$$\frac{MB'}{BB'}=\frac{v(MCDA)}{v(BCDA)}=\frac{AM}{AA'}.\frac{v(A'CDA)}{v(BCDA)}=$$

$$\frac{AM}{AA'}.\frac{s(A'CD)}{s(BCD)}=\frac{AM}{AA'}.\frac{S_B}{S}$$

(*Phan Quốc Hưng*, 12B, THPT Hải Lăng, Quảng Trị)

2) Hai bạn *Bạch Ngọc Bảo Phước*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị và *Nguyễn Mạnh Long*, 11N, THPT Thăng Long, Hà Nội còn có nhận xét rằng bài toán này là bài toán tương tự trong không gian của bài toán T4/222 của cùng tác giả.

3) Ngoài các bạn trên, các bạn sau đây cũng có lời giải tốt :

Hà Nội: *Phạm Văn Hùng*, *Kim Đình Thái*, 11A1, *Phạm Quang Nhật Minh*, 12A1, PTCT–T, ĐHSP Hà Nội; *Võ Văn Thành*, 10 Toán, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội ; *Nguyễn Hoàng Thạch*, 11T, THPT Hà Nội – Amsterdam; **Bắc Ninh:** *Ngô Quang Hùng*, 11CT, PTNK Hàn Thuyên, **Hà Tây:** *Nguyễn Tiết Yết*, 11T1, THPT cuyên Nguyễn Huệ; **Hải Dương:** *Phạm Thành Trung*, 10T, *Phạm Văn Hùng*, 11T, THPT Nguyễn Trãi; **Vĩnh Phúc:** *Vũ Nhật Huy*, 10A1, *Nguyễn Xuân Trường*, 11A, *Nguyễn Văn Giáp*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Hòa Bình:** *Nguyễn Lâm Tuyến*, 11T, THPT NK Hoàng Văn Thụ; **Hà Nam:** *Trần Thị Thu Minh*, 11A1, THPT chuyên Hà Nam; **Thanh Hóa:** *Mai Quang Thành*, 10T1, THPT Lam Sơn; **Bình Định:** *Phạm Thái Dương*, 12T, THPT Lê Quý Đôn, Quy Nhơn; **Đắc Lắc:** *Mai Trọng Mẫn*, 11T, THPT Nguyễn Du, Buôn Mê Thuột; **Đồng Nai:** *Lê Trung Hiếu*, 12T1, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Tp. Hồ Chí Minh:** *Trần Vĩnh Hưng*, *Phạm Văn Thắng*, 11T, ĐHQG Tp.HCM.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

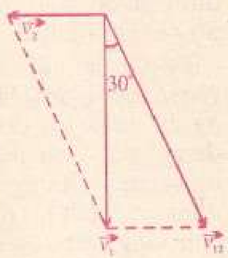
Bài L1/287. *Một giọt mưa nhỏ rời khỏi đám mây trong thời tiết không có gió, ở độ cao lớn. Tại thời điểm gia tốc của giọt mưa bằng $7{,}5m/s^2$ thì vận tốc của nó bằng $20m/s$. Đến gần mặt đất nó rơi với vận tốc không đổi và rơi vào tấm kính bên của một ôtô tạo thành một vết nghiêng 30^o so với phương thẳng đứng.*

Hỏi người lái xe có bị phạt vì đã chạy quá nhanh hay không nếu tốc độ cho phép là 60km/h cho biết lực cản của không khí tỉ lệ với bình phương của vận tốc và lấy g = 10m/s^2.

Hướng dẫn giải. Gia tốc của giọt mưa : $a = \frac{P - F_c}{m} = g - \frac{kv^2}{m}$. Xét tại thời điểm $t = t_1$, giọt mưa có $a = 7{,}5\text{m/s}^2$ và $v = 20\text{m/s}$, ta có :

$7{,}5 = 10 - \frac{k.20^2}{m}$

$\Rightarrow \frac{m}{k} = \frac{400}{2{,}5} = 160.$



Xét tại thời điểm $t = t_2$ giọt mưa chuyển động thẳng đều : $a = 0 \Rightarrow v^2 = \frac{mg}{k} = 1600 \Rightarrow v = 40\text{m/s}$.

Áp dụng công thức cộng vận tốc : $\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, với $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ là vận tốc của giọt mưa và của ôtô đối với mặt đất ; $\vec{v}_{12}$ là vận tốc của giọt mưa đối với ôtô (xem hình bên). Về độ lớn ta tìm được : $v_2 = \frac{40}{\sqrt{3}} m/s > 82\text{km/h} > 60\text{km/h}$: Người lái xe bị phạt.

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn, đầy đủ :

Thanh Hóa: *Nghiêm Hồng Quang*, 10T1, THPT Lam Sơn; **Ninh Bình:** *Lê Thu Hiền*, 11 Lí, THPT Lương Văn Tụy; **Yên Bái:** *Phan Thị Kim Hoa*, 10A1, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Quảng Nam:** *Hoàng Anh Vũ*, 12, THPT Trần Cao Vân, Tam Kì; **Đà Nẵng:** *Lê Anh Vũ*, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thừa Thiên – Huế:** *Võ Phương Nam*, 11 chuyên Lí, Quốc học Huế; **Đồng Nai:** *Ma Nam*, 11 Lí 1, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Quảng Bình:** *Trần Xuân Nhật*, 11 Lí, THPT NK Quảng Bình; **Hải Phòng:** *Trần Đức Trường*, 12 Lí, THPT NK Trần Phú; **Cà Mau:** *Lê Khôi Nguyên*, 11A3, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển; **Nam Định:** *Trần Đức Sinh*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hưng Yên:** *Đào Ngọc Hùng*, 11 Lí, PTNK Hưng Yên; **Vĩnh Phúc :** *Trần Minh Khuê, Dương Quốc Huy*, 11A3, *Dương Ngọc Quang*, 11B2, *Nguyễn Văn Hùng*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Dương:** *Hoàng Trung Trí, Nguyễn Quốc Long*, 10 Lí, PTNK Nguyễn Trãi; **Nghệ An:** *Nguyễn Thị Bích Ngọc*, 11A3, *Phạm Cung Sơn*, 10A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An; **Phú Thọ:** *Ngô Viết Hậu*, 11A2, *Vũ Quốc Hiếu*, 10B1, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì, Phú Thọ; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Ngọc Tuấn, Nguyễn Trọng Tùng*, 12 Lí, THPT NK Hàn Thuyên; **Quảng Ngãi:** *Đỗ Tấn Tài*, 11 Lí– Hóa, *Lê Trung Tín*, 10 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Viết Hưởng*, 11 Lí, *Nguyễn Văn Tý*, 10 Lí, THPT NK Hà Tĩnh.

MAI ANH

Bài L2/287. *Tại trung điểm khoảng cách giữa 2 bản của một tụ điện phẳng có một êlectron đang đứng yên. Tụ được nạp điện bởi một nguồn có hiệu điện thế $U = U_o \sin \omega t$. Trong thời gian bao lâu êlectron đến được một trong 2 bản tụ. Cho biết giữa 2 bản tụ là chân không, khoảng cách giữa 2 bản tụ là d. Bỏ qua tác dụng của trọng lực. Cho rằng trong một chu kì biến đổi của hiệu điện thế, êlectron dịch chuyển được một đoạn rất nhỏ so với d.*

Lời giải. Gia tốc của êlectron :

$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m} = \frac{eU}{md} = \frac{eU_o}{md}\sin\omega t$ (e là độ lớn điện tích êlectron). Vận tốc tức thời của êlectron (chú ý lúc $t = 0$, $v = 0$) :

$\int_o^v dv = \frac{eU_o}{md}\int_o^t \sin\omega t.dt \Rightarrow v = v_o(1 - \cos\omega t)$,

với $v_o = \frac{eU_o}{md\omega}$. Kí hiệu t_o là thời gian êlectron đến bản tụ, nghĩa là thời gian êlectron đi được quãng đường

$s = \frac{d}{2}$, ta có : $s = \frac{d}{2}\int_o^{t_o} vdt$

$= \int_o^{t_o} v_o(1 - \cos\omega t)dt = v_o t_o - \frac{v_o}{\omega}\sin\omega t_o$

$\Rightarrow \frac{d}{2} = v_o t_o - \frac{v_o.T}{2\pi}\sin\omega t_o$, với T là chu kì biến đổi của hiệu điện thế. Theo đề bài $\frac{v_o T}{2} \ll \frac{d}{2}$,

do đó ta có : $\frac{d}{2} \approx v_o t_o \Rightarrow t_o = \frac{d}{2v_o} = \frac{md^2\omega}{2eU_o}$

Nhận xét. Các em có lời giải gọn và đúng :

Hải Dương : *Nguyễn Quốc Long*, 10 Lí, PTNK Nguyễn Trãi; **Hải Phòng :** *Trần Đức Trường*, 12 Lí, THPT NK Trần Phú; **Đồng Nai:** *Ma Nam*, 11 Lí 1, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Hà Tây:** *Nguyễn Minh Chính*, 12 Toán I, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Bắc Giang :** *Trần Hải Linh*, 11B, PTNK Ngô Sĩ Liên; **Phú Thọ:** *Lưu Quốc Tuấn*, 11B, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì; **Vĩnh Phúc :** *Chu Anh Dũng*, 11A3, *Trần Minh Khuê*, 12A3, *Nguyễn Minh Kiên*, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

MAI ANH

HÌNH HỌC PHI ƠCLIT VÀ LÝ THUYẾT TƯƠNG ĐỐI

VŨ ĐÌNH HÒA

Đầu thế kỉ XX có một lí thuyết vật lí mới làm thay đổi tận gốc toàn bộ quan niệm của chúng ta về không gian và thời gian. Bao nhiêu năm sau đó thế giới vẫn còn bận rộn với việc khảo cứu những hệ quả của nó và tìm cách phát triển nó hơn nữa. Hẳn các bạn đều đoán được, đó là lí thuyết tương đối của Einstein.

Nhưng chỉ có ít người biết được và hiểu rõ rằng lí thuyết tương đối được xây dựng duy nhất từ một tiên đề ánh sáng và bằng công cụ hình học phi Ơclit.

Phải nói rõ hình học Ơclit tuy mang tên nhà toán học Ơclit, nhưng lại không phải là công trình riêng của nhà toán học Ơclit. Ông chỉ có công tập trung những kết quả nghiên cứu thời bấy giờ, viết lại thành cuốn sách giáo khoa cơ bản về hình học.

Trong hình học Ơclit, tiên đề về đường thẳng song song đã gây một cuộc tranh cãi lớn ở thế kỉ 19. Nhiều nhà toán học tìm cách chứng minh tiên đề này, nhưng đều thất bại.

Chỉ có hai nhà toán học, Bôyoi người Hung (1823) và Lôbasépxki người Nga (1830), đã mạnh dạn dẫn dắt từ mệnh đề ngược lại, rằng qua một điểm cho trước ở ngoài một đường thẳng đã cho có thể kẻ ít nhất hai đường thẳng song song với đường thẳng cho trước, tới một hệ thống kiến thức mới mà họ gọi tên là hình học phi Ơclit.

Lúc bấy giờ gần như không có nhà toán học nào ủng hộ hình học phi Ơclit, bởi vì nó có rất nhiều mệnh đề "quái gở", chẳng hạn tổng các góc của một tam giác là một hàm số của diện tích tam giác đó, và tồn tại tam giác giới hạn là tam giác có diện tích lớn nhất... Kết quả là tên tuổi những người sáng lập nên hình học phi Ơclit bị người đương thời quên lãng và bị coi là những nhà toán học gàn dở.

Cho đến đầu thế kỉ XX, tên của họ lại được trân trọng nhắc lại với sự ra đời của lí thuyết tương đối. Học thuyết mới của Einstein xuất phát từ nghiên cứu chuyển động của ánh sáng đã thay đổi tận gốc quan niệm của chúng ta về không gian và thời gian và mở ra một kỉ nguyên mới về khám phá vật chất.

Phải nói đôi lời về nguồn gốc phát sinh lí thuyết tương đối để thấy vai trò của hình học phi Ơclit. Tất cả chúng ta đều biết định luật về quán tính, khẳng định sự độc lập của vận tốc nếu vật bay không bị tác động bởi lực bên ngoài. Sự độc lập của vận tốc được Galilei phát hiện đầu tiên, khi ông khảo cứu quỹ đạo bay của các vật thể như đầu đạn đại bác và các hành tinh. Nhưng khi người ta thử áp dụng những định luật vật lí về chuyển động và chuyển động của ánh sáng thì các nhà vật lí gặp phải vấn đề nan giải.

Trước hết, trong thế kỉ 18, người biết rằng ánh sáng không tức thời từ nguồn phát sáng tới mắt người quan sát, mà nó cũng cần một thời gian để vượt khoảng cách này. Họ đo đạc và xác định được vận tốc ánh sáng quãng chừng 300000 km/giây.

Tại sao lại nói rằng vận tốc ánh sáng đo được chỉ là tương đối. Phải nói rằng đó là vận tốc mà người quan sát đo được nó ở trong tình trạng đứng yên. Còn nếu anh ta cũng chuyển động trong môi trường đó, tùy theo hướng chuyển động của anh ta, ngược hay xuôi chiều bay của ánh sáng, vận tốc đo được khác nhau. Có nghĩa là nếu đo vận tốc ánh sáng tại các địa điểm quan sát đặt khác nhau trên trái đất thì kết quả đo được phải không giống nhau.

Thế nhưng kết quả đo đạc trong thí nghiệm nổi tiếng Michelson-Morley năm 1887 chỉ cho kết quả đo được như nhau, thật là một điều kì lạ.

Nói rộng ra, phải chăng nếu đo vận tốc dịch chuyển của ánh sáng từ bất cứ nơi nào và bất cứ trong tình trạng nào, dù người đo đạc có đứng yên hay đang dịch chuyển với vận tốc khủng khiếp, thì kết quả đo được cũng giống nhau chăng ? Rõ ràng điều đó không thể đúng, và chúng ta có thể áp dụng các định luật quen thuộc của vật lí Newton để giải thích điều này.

Nhưng Einstein lại nghĩ khác. Trong năm 1905, ông viết một bài báo khoa học, và chứng minh rằng mọi người đo đạc, dù ở đâu và đang chuyển động như thế nào chăng nữa, anh ta cũng chỉ được kết quả giống nhau khi đo vận tốc chuyển dịch của ánh sáng. Điều đó có nghĩa là nếu kí hiệu vận tốc ánh sáng là $\vec{c}$ thì ta phải có $\vec{a}+\vec{c}=\vec{c}$ cho mọi $\vec{a}$. Thật là phi lí.

Thế nhưng Einstein đã gặp may mắn khi ông lục tìm trong thư viện, và đã tìm được cuốn sách của Lôbasepxki viết về hình học của mình, trong đó cũng có những công thức tương tự.

Bằng tiên đề ánh sáng và công cụ hình học phi Ơclit, Einstein đã xây dựng nên lí thuyết tương đối của mình. Một trong những hệ quả kì lạ của lí thuyết này là thời gian của chúng ta không giống nhau. Mỗi người có một thời gian riêng biệt, chỉ phụ thuộc vận tốc chuyển động

(Xem tiếp trang 7)

VỀ MỘT BÀI TOÁN ĐA THỨC

NGUYỄN TRỌNG TUẤN
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Gia Lai)

Trong kì thi chọn học sinh giỏi quốc gia năm học 1999–2000 có bài toán đa thức (bài số 3, bảng B) sau đây :

Bài toán : *Cho $P(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 97$. Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n, tồn tại số nguyên a_n sao cho $P(a_n)$ chia hết cho 3^n.*

Đây là một bài toán xét giá trị đa thức có pha trộn số học và tương đối lạ nên nhiều học sinh không tìm được quy luật tính giá trị của đa thức trên. Bài viết sau đây nhằm xét vấn đề tổng quát hơn : Tìm lớp các đa thức bậc ba có hệ số nguyên thỏa mãn điều kiện bài toán.

Xét tập hợp $\mathcal{T} = \{P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d |$ $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$, $a \neq 0$ và $a \equiv 0 \pmod 3$, $b \equiv 0 \pmod 3$, $c \not\equiv 0 \pmod 3)\}$

Mệnh đề 1. Cho đa thức $P(x) \in \mathcal{T}$ thì tồn tại số $r \in \{0, 1, 2\}$ để $P(3x + r) = 3.Q(x)$ với $Q(x) \in \mathcal{T}$.

Chứng minh. Giả sử $P(x) \in \mathcal{T}$, $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a = 3a_1$, $b = 3b_1$, $cr + d = 3d_1$ trong đó $a_1, b_1, d_1 \in \mathbf{Z}$ (vì c không chia hết cho 3 nên luôn tồn tại duy nhất $r \in \{0, 1, 2\}$ để $cr + d \equiv 0 \pmod 3$)).

Trong $P(x)$ thay x bởi $3x+r$ ta được

$P(3x+r) = a(3x+r)^3 + b(3x+r)^2 + c(3x+r) + d$

$= 27ax^3 + 27arx^2 + 9ar^2x + ar^3 + 9bx^2 + 6brx + br^2 + 3cx + cr + d$

$= 27ax^3 + (27ar+9b)x^2 + (9ar^2 + 6br+3c)x + ar^3 + br^2 + cr + d$

$= 3[9ax^3 + (9ar+3b)x^2 + (3ar^2+2br+c)x + a_1r^3 + b_1r^2 + d_1] = 3Q(x)$

Ta thấy $Q(x) \in \mathcal{T}$ vì $9a$, $9ar + 3b$ là các số nguyên chia hết cho 3 ; $3ar^2 + 2br + c$ không chia hết cho 3 do b chia hết cho 3 và c không chia hết cho 3.

Mệnh đề 2. Cho đa thức $P(x) \in \mathcal{T}$, với mỗi số tự nhiên n luôn tồn tại số nguyên a_n sao cho $P(a_n)$ chia hết cho 3^n.

Chứng minh : Áp dụng mệnh đề 1, với mỗi $P(x) \in \mathcal{T}$ luôn có $r_1 \in \{0, 1, 2\}$ sao cho $P(3x + r_1) = 3P_1(x)$ với $P_1(x) \in \mathcal{T}$. Với $P_1(x) \in \mathcal{T}$ có $r_2 \in \{0, 1, 2\}$ sao cho $P_1(3x+r_2) = 3.P_2(x)$ với $P_2(x) \in \mathcal{T}$. Do đó $P(9x+3r_2+r_1) = 9P_2(x)$.

Cứ tiếp tục như vậy ta sẽ được dãy $r_1, r_2, ..., r_n \in \{0, 1, 2\}$ sao cho

$P(3^nx + 3^{n-1}r_n + ... + 3r_2 + r_1) = 3^nP_n(x)$ với $P_n(x) \in \mathcal{T}, n \geq 1$.

Suy ra với mỗi số tự nhiên n luôn tồn tại $a_n = 3^nx + 3^{n-1}r_n + ... + 3r_2 + r_1$ với x nguyên sao cho $P(a_n)$ chia hết cho 3^n. Ta cũng thấy rằng có vô số a_n như vậy.

Chứng minh bài toán HS giỏi :

Cho $P(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 97$. Rõ ràng $P(x) \notin \mathcal{T}$. Thay x bởi $3x+1$ ta có :

$P(3x+1) = 27(x^3 - 2x^2 + x - 3) = 27Q(x)$.

Nhưng $Q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3 \notin \mathcal{T}$. Lại thay x bởi $3x$ ta được

$$P(9x+1) = 81(9x^3 - 6x^2 + x - 1) = 81R(x)$$

Rõ ràng $R(x) \in \mathcal{T}$ và ta suy ra ngay kết quả cần chứng minh.

Chú ý rằng nếu $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ không chia hết cho 3 thì đa thức $P(x)$ không thuộc $\mathcal{T}$.

Thực vậy, giả sử $P(x) \in \mathcal{T}$.

Biến đổi như trong chứng minh mệnh đề 1 ta có $P(3x+r) = 3.S(x) + P(r)$. Vì $P(r) = ar^3 + br^2 + cr + d$ không chia hết cho 3 với r bằng 0, 1, 2 nên $P(x)$ không thỏa mãn mệnh đề 1. Vậy $P(x)$ không thuộc $\mathcal{T}$.

Một vấn đề được đặt ra là : Đa thức ban đầu $P(x)$ phải thỏa mãn những điều kiện gì để sau phép thay x bởi $3^mx + a$ thì ta được một đa thức $Q(x)$ thuộc $\mathcal{T}$ mà

$$P(3^mx + a) = 3^m.Q(x).$$

Rất mong được trao đổi thêm với các bạn.

Kết quả :

CUỘC CHƠI ĐẦU THIÊN NIÊN KỶ

Chỉ có 9 bạn nhận ra GS. Vũ Thanh Khiết, người "gác sân Vật Lý" của tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. Nhưng đến phần tuổi của GS thì số bạn đoán sai là 100%. Chân dung GS được chụp tại Cuộc gặp gỡ thân mật của Tòa soạn TH&TT nhân ngày Báo chí Cách mạng Việt Nam (21–6–2001). Khi ấy ... GS đã 66 tuổi.

Xin trao tặng phẩm cho bạn *Đào Thành Trung*, lớp 10A1, THPT Yên Dũng I, Yên Dũng, **Bắc Giang** là người đoán chỉ sai (ít hơn) có 9 tuổi !

Nào các bạn hãy tiếp tục cuộc chơi tháng này nhé.

CLB

Kết quả : HƯỚNG DẪN ĐÚNG HAY SAI ?

Rất nhiều "bác sĩ" THCS tham gia hội chẩn và kết luận đúng:

– Đây là sai lầm hay "mắc" khi tìm GTLT, GTNN của một phân thức mà tử thức và mẫu thức chưa phải là luôn dương.

Một số bạn lại đưa ra tiếp *những lời giải sai* khác để gọi là bảo vệ đáp số A nhỏ nhất bằng 4.

Kết luận đúng của bài toán này là : A không có giá trị nhỏ nhất.

Thật vậy : Vì $A < 0 \Leftrightarrow x > 1$ nên giả sử A có giá trị nhỏ nhất khi $x = x_o$ thì $x_o > 1$. Khi đó : xét $x_o > x_1 > 1$ thì $\sqrt{x_o} + \sqrt{x_1} > 1 \Rightarrow \sqrt{x_o^2} - \sqrt{x_1^2} > \sqrt{x_o} - \sqrt{x_1} \Rightarrow \sqrt{x_o}(1 - \sqrt{x_o}) < \sqrt{x_1}(1 - \sqrt{x_1}) < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x_o}(1 - \sqrt{x_o})} > \dfrac{1}{\sqrt{x_1}(1 - \sqrt{x_1})} \Rightarrow A(x_o) > A(x_1)$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $A(x_o)$ là giá trị nhỏ nhất của A.

Chứng tỏ A không có GTNN.

Xin trao tặng phẩm cho các bạn : Trần Tiến Hoàng, 12 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị; Phan Thành Việt, 7D, THCS Lương Thế Vinh, Tx. Tuy Hòa, **Phú Yên**; Bùi Ngọc Sáng, 11 Toán, THPT NK Hưng Yên; Nguyễn Văn Đức, 11A1, THPT Hậu Lộc I, Thanh Hóa; Nguyễn Duy Khánh, 10A, THPT Tx. Lào Cai, Lào Cai; Huỳnh Thanh Quang, 28A Hoàng Văn Thụ, phường Cam Lộc, Cam Ranh, Khánh Hòa và bạn Q.G.T ở Hải Dương.

KIHIVI

PHẢI CHĂNG KẾT QUẢ ĐÚNG RỒI ?

Trong một số sách tham khảo hình học 12, ta thường gặp bài toán với lời giải như sau :

Đề toán. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $A(4; 5)$, $B(-2; -7)$ và đường thẳng (d) : $3x - y - 4 = 0$. Tìm điểm M trên (d) sao cho tam giác MAB cân.

Lời giải. Gọi $M(x ; y)$ là điểm cần tìm. $M \in (d) \Leftrightarrow 3x - y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 3x - 4 \Leftrightarrow M(x; 3x - 4)$. ΔMAB cân tại M khi : $MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow (4 - x)^2 + (9 - 3x)^2 = (-2-x)^2 + (-3 - 3x)^2 \Leftrightarrow 84x = 84 \Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow M(1; -1)$.

Bạn thấy lời giải trên có sơ hở gì không ? Nếu sơ hở thì bạn có thể giải quyết bài toán trên như thế nào ?

HỒ CÔNG DŨNG

(GV THPT Trần Hưng Đạo, Bình Thuận)

ĐÍNH CHÍNH

Trong Đề ra kì này THTT số 290 (8/2001) ở đề bài T9/290 in là *tam giác ABC*, xin sửa lại là *tam giác nhọn ABC*.

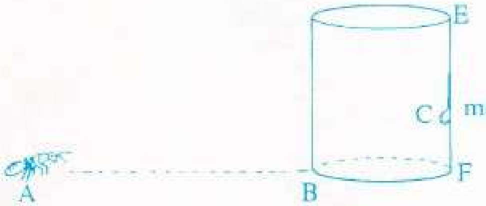
Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.

THTT

TÌM ĐƯỜNG NGẮN NHẤT

Một con kiến A cách đáy cốc hình trụ 25cm. Một giọt mật ở C thuộc *đường sinh EF* xa nhất, cách vành đáy cốc là CF = 6cm. Biết chu vi đáy cốc là 16cm và chiều cao là 9cm. Hỏi chiều dài con đường ngắn nhất mà con kiến có thể đi đến giọt mật là bao nhiêu ?

TCT



XÁC SUẤT RẤT BÉ ?

Ở Châu Âu có ngày hội hóa trang. Trong ngày hội này người ta thường đeo mặt nạ và ăn mặc rất khác thường để không ai nhận được nhau. Có một nhóm bạn gặp nhau trong ngày hội hóa trang sau một lúc vui chơi người ta không biết ai là ai cả. Một anh bạn tìm được một cô gái mà dáng vẻ cô ta làm anh rất thích, anh tỏ tình với cô gái này. Chẳng may cho anh bạn trẻ này đang tỏ tình với chính người vợ của mình. Người vợ đã khôn khéo đánh dấu chiếc khăn của chồng trong lúc hóa trang nên dễ dàng nhận ra. Còn anh bạn của chúng ta vì nghĩ rằng xác suất gặp lại vợ mình là rất bé (!) nên quá tự tin để tỏ tình.

Ở đây có một điều ít ai ngờ tới : Xác suất để *một người* gặp lại vợ mình trong ngày hội đông người là rất bé, nhưng xác suất xảy ra ít nhất 1 lần như thế đối với *cả đám đông người* xấp xỉ bằng 1/3 !

NDT

ĐỌC SÁCH

40 NĂM OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ

Đã lâu lắm rồi, thời còn là học sinh, tôi được đọc cuốn "16 kì thi toán quốc tế" do tạp chí Toán học và Tuổi trẻ xuất bản như là một đặc san nhân dịp kỉ niệm 10 năm thành lập báo (năm 1974).

Từ khi Việt Nam tham gia thi Olympic toán quốc tế, năm nào tạp chí Toán học và Tuổi trẻ cũng giới thiệu đề ra của kì thi này.

Nhưng ai cũng mong có một tuyển tập đầy đủ các đề ra của tất cả các kì thi.

PGS.TS Vũ Dương Thụy và ThS. Nguyễn Văn Nho đã có công kết hợp nhiều tài liệu và cả tư liệu ở các Website trên Internet để biên soạn cuốn "40 năm Olympic toán học quốc tế" (Nhà xuất bản Giáo dục, năm 2001).

Các tác giả đã giúp bạn đọc hiểu thêm về các chuyện "bếp núc" của mỗi kì thi và tìm cách phân loại các bài toán thi theo các chủ đề : Hình học, Số học, Đại số, Giải tích và Hình học Tổ hợp.

Hai tập của cuốn sách đã bao quát hết các bài toán thi Olympic toán cho tới năm 2001.

Dù các bạn không hy vọng mình sẽ được tham gia những kì thi như thế nhưng với lòng ham mê học hỏi, yêu thích môn Toán, các bạn vẫn có thể "đi hết" 40 kì thi.

Với các thầy giáo, cô giáo dạy Toán thì cuốn sách là một cẩm nang không thể thiếu trên giá sách của mình.

Cảm ơn các tác giả và trân trọng giới thiệu với bạn đọc.

LÊ THỐNG NHẤT

TRƯỜNG BƯỞI - CHU VĂN AN

TS. Đinh Sỹ Đại
Hiệu trưởng

Trường được thành lập năm 1908 với tên "Trường trung học Bảo hộ" nhưng nhân dân quen gọi là trường Bưởi. Trái với mục đích của nhà nước bảo hộ, các thế hệ học sinh của trường đã thể hiện lòng yêu nước nồng nàn qua các phong trào đấu tranh, biểu tình, bãi khóa. Nhiều học sinh sau này trở thành các nhà quân sự chính trị lỗi lạc, các nhà văn hóa, khoa học kĩ thuật tài hoa, các chiến sĩ cách mạng kiệt xuất : Ngô Gia Tự, Nguyễn Văn Cừ, Hà Huy Tập, Phạm Văn Đồng...

Năm 1945 trường mang tên danh sư Chu Văn An - vị danh nho đời Trần tài đức, tiết tháo.

Khi cuộc kháng chiến chống Pháp bùng nổ, một bộ phận tập hợp thành trường trung học kháng chiến Chu Văn An ở Phú Thọ, một bộ phận ở lại trong lòng địch cũng tích cực ủng hộ cuộc kháng chiến.

Sau khi hòa bình lập lại (năm 1954) trường đã vinh dự nhiều lần đón Chủ tịch Hồ Chí Minh và các vị lãnh đạo cao cấp của Đảng và Nhà nước đến thăm.

Trong cuộc kháng chiến kháng chiến chống Mỹ cứu nước, thầy trò nhà trường tham gia sản xuất và chiến đấu, đã có nhiều liệt sĩ, anh hùng dũng sĩ. Nhà trường đã đạt được nhiều thành tích trong các phong trào thi đua : Cần công kiệm học, Tam bất kì, Lên đường đánh Mỹ, Dạy tốt - học tốt...

Những kết quả nổi bật :

- 9 giải thi quốc tế về Toán, Vật Lí
- 57 giải thi học sinh giỏi quốc gia
- 19 giải nhất và 198 giải khác trong các kì thi học sinh giỏi thành phố.
- Nhiều thầy cô giáo được nhận huy chương kháng chiến, huy chương vì sự nghiệp giáo dục.

Tháng 1 năm 1993, trường Ba Đình sát nhập với trường Chu Văn An.

- Tháng 2 năm 1995, Thủ tướng Chính phủ quyết định xây dựng trường THPT chất lượng cao Chu Văn An.

Với thành tích đạt được, nhà trường vinh dự nhận phần thưởng cao quý :

- Huân chương Lao động hạng ba năm 1967.
- Huân chương Lao động hạng nhì năm 1992.
- Huân chương Độc lập hạng nhất năm 1998.

Trong năm học vừa qua :

- 100% học sinh đỗ tốt nghiệp THPT với 18% đỗ loại giỏi.
- 64% học sinh lớp 12 trúng tuyển vào các trường Đại học công lập, trong đó 6 thí sinh đỗ thủ khoa.
- 9 học sinh giỏi cấp quốc gia, 127 học sinh giỏi cấp thành phố về các môn văn hóa.
- 13 huy chương về văn nghệ, thể thao trong các cuộc thi toàn quốc và thành phố.

Bước vào năm học mới, phát huy truyền thống 93 năm trường Bưởi - Chu Văn An, nhà trường tiếp tục thi đua dạy tốt - học tốt, bồi dưỡng học sinh giỏi, đẩy mạnh công tác xã hội hóa giáo dục, mở rộng giao lưu quốc tế... nhằm thực hiện Dự án xây dựng trường trọng điểm quốc gia Chu Văn An.

ISN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT93M1
Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, ngõ 187 phố Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2001
Giá : 3000đ
Ba nghìn đồng