https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

T. Hiu

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

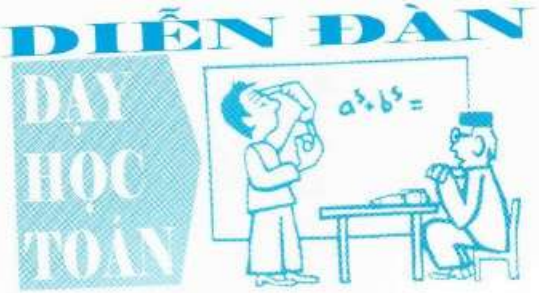
TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

4 2005
SỐ 334

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 42
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187 B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT-Fax: (04) 5144272
Email: toanhoctt@yahoo.com

30 NĂM THỐNG NHẤT ĐẤT NƯỚC 1975 - 2005

Xin chúc mừng NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC
được tặng thưởng CỜ THI ĐUA CỦA CHÍNH PHỦ NĂM 2004
vì đã hoàn thành xuất sắc toàn diện nhiệm vụ công tác, dẫn đầu phong trào thi đua của ngành Giáo dục và Đào tạo năm 2004



CHƯƠNG ĐƯỜNG TRÒN SÁCH GIÁO KHOA TOÁN 9 MỚI

VŨ HỮU BÌNH
(Hà Nội)

Chương II - Đường tròn của sách giáo khoa (SGK) mới Toán 9 vốn là chương I của SGK cũ.

1. Về nội dung

Nội dung kiến thức trong chương không thay đổi nhiều so với SGK cũ. Điểm khác chủ yếu trong SGK mới là các nội dung đó được trình bày mạch lạc và gọn gàng hơn, cách tiếp cận kiến thức tự nhiên hơn, hệ thống các câu hỏi phát hiện và củng cố kiến thức giúp giáo viên tổ chức hoạt động của học sinh dễ dàng hơn.

Sự sắp xếp các kiến thức trong chương có một số thay đổi so với SGK cũ :

Mục *Tính chất đối xứng của đường tròn* được học ngay ở §1 cùng với Sự xác định đường tròn.

Mục *So sánh độ dài của đường kính và dây* được chuyển xuống §2 học cùng với Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây.

Mục *Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây* được cấu tạo thành bài §3 để dễ dạy và dễ học hơn.

Bài *Tiếp tuyến của đường tròn* ở SGK cũ, nay được cấu tạo thành hai bài :

§5. Các dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn ;

§6. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau.

Bài *Vị trí tương đối của hai đường tròn* ở SGK cũ, nay được cấu tạo thành hai bài :

§7 giới thiệu ba vị trí tương đối của hai đường tròn và tính chất đường nối tâm ; §8 giới thiệu hệ thức giữa đoạn nối tâm và các bán kính, giới thiệu tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

Một số mệnh đề thường dùng ở phần *Bài tập* của SGK cũ, nay được chuyển vào phần bài học, chẳng hạn tính chất "Dây cung chung của hai đường tròn cắt nhau thì vuông góc với đường nối tâm và bị đường này chia ra hai phần bằng nhau" nay nêu thành định lí đưa vào mục *Tính chất đường nối tâm* : Nếu hai đường tròn cắt nhau thì đường nối tâm là đường trung trực của dây cung chung.

Giảm bớt một số kiến thức : Không học quỹ tích các điểm M sao cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$ trong đó AB là một đoạn thẳng cho trước, vì kiến thức này sẽ được học ở chương III trong bài *Cung chứa góc*. Tuy nhiên vẫn giới thiệu các kiến thức sau để học sinh vận dụng khi làm bài tập : Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền ; Nếu một tam giác có một cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp thì tam giác đó là tam giác vuông.

Bổ sung thêm những định lí được vận dụng nhiều trong giải toán : Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai tia đi qua các tiếp điểm.

2. Về kĩ năng

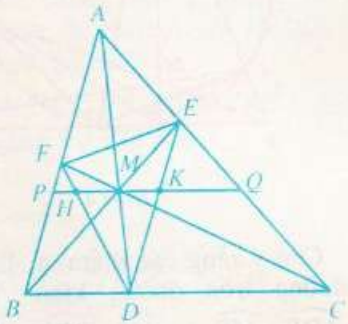
Yêu cầu về chứng minh định lí được nâng cao hơn so với các lớp dưới. Nhiều định lí được chứng minh đầy đủ. Tuy nhiên, vì lí do sư phạm, có những định lí không ghi phần chứng minh

(Xem tiếp trang 26)

VỀ BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY TẠI ĐIỂM THUỘC ĐƯỜNG CAO MỘT TAM GIÁC

NGUYỄN THU DUNG
(SV Kinh tế 28E ĐH Luật Hà Nội)

Trong sách giáo khoa Toán lớp 7 đã nêu lên tính chất của các đường cao của một tam giác : Ba đường cao của một tam giác đồng quy tại một điểm. Ta thử giảm bớt điều kiện của giả thiết để xét vấn đề rộng hơn như sau : Ba đường thẳng đi qua ba đỉnh của một tam giác, trong đó có một đường cao, mà đồng quy thì có tính chất gì ? Từ đó có thể vận dụng tính chất ấy vào các bài toán (BT) liên quan đến đường cao của tam giác.



Hình 1

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC. Lấy điểm M không thuộc các đường thẳng AB, BC, CA sao cho các cặp đường thẳng AM và BC, BM và CA, CM và AB cắt nhau tại D, E, F theo thứ tự. Đường thẳng qua M song song với BC cắt các đường thẳng DE và DF lần lượt tại K và H. Chứng minh rằng DM là trung tuyến của tam giác DKH.*

Chứng minh. Đường thẳng qua điểm M song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại P, Q (h. 1, h. 2). Sử dụng định lí Ta–let ta có :

$$\frac{MP}{MQ}=\frac{BD}{DC},\ \frac{MQ}{MK}=\frac{BC}{BD},\ \frac{MH}{MP}=\frac{DC}{BC}.$$

Nhân theo từng vế của ba đẳng thức trên được:

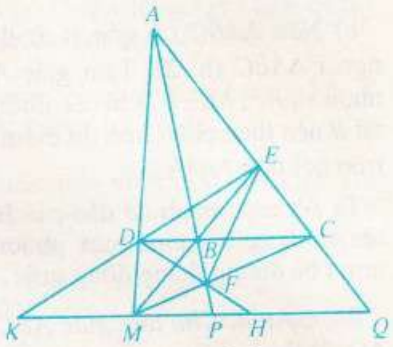
$$\frac{MP}{MQ}\cdot\frac{MQ}{MK}\cdot\frac{MH}{MP}=\frac{BD}{DC}\cdot\frac{BC}{BD}\cdot\frac{DC}{BC}$$

suy ra $MH = MK$.

Chú ý rằng hai điểm H, K luôn nằm về hai phía đối với đường thẳng AD nên DM là trung tuyến của ΔDKH.

Bài toán T4/222 trên THTT số 226 tháng 4.1996 là trường hợp riêng của BT 1 khi chỉ xét điểm M nằm bên trong ΔABC.

Ta sẽ sử dụng kết quả của BT 1 để xét một loạt bài toán liên quan đến ba đường thẳng đồng quy tại điểm nằm trên đường cao của một tam giác.



Hình 2

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC và điểm M không thuộc các đường thẳng AB, BC, CA sao cho các cặp đường thẳng AM và BC, BM và CA, CM và AB cắt nhau tại D, E, F theo thứ tự. Chứng minh rằng*

a) Nếu AD vuông góc với BC thì AD là phân giác trong hoặc phân giác ngoài của tam giác DEF.

b) Đảo lại, nếu AD là phân giác trong hoặc phân giác ngoài của tam giác DEF thì AD vuông góc với BC.

Chứng minh. Theo BT1 đã có $MH = MK$.

a) Giả sử $AD \perp BC$ thì $AD \perp HK$ do đó ΔDKH là tam giác cân. Nếu đường thẳng AD cắt đoạn thẳng EF (h.1, h.3 hoặc các trường hợp tương tự) thì AD là phân giác trong của ΔDEF. Nếu đường thẳng AD không cắt đoạn thẳng EF (h. 2, h.5 hoặc các trường hợp tương tự) thì AD là phân giác ngoài của ΔDEF.

b) Nếu AD là phân giác trong của ΔDEF (h.1) hoặc là phân giác ngoài của ΔDEF (h. 2), đồng thời do $MH = MK$ thì ΔDKH là tam giác cân nên $AD \perp MH$, mà $MH // BC$, suy ra $AD \perp BC$.

Bài toán 3. *Cho tam giác ABC. Các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại M. Chứng minh rằng :*

a) Nếu tam giác ABC có ba góc nhọn thì M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

b) Nếu tam giác ABC có góc ABC tù thì điểm B là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AMC.

Chứng minh. a) Nếu ΔABC có ba góc nhọn thì giao điểm M nằm bên trong ΔABC (h. 1). Theo BT 2 thì DA, EB, FC là các phân giác trong của ΔDEF nên M là giao điểm của ba phân giác trong, suy ra M là tâm đường tròn nội tiếp ΔDEF.

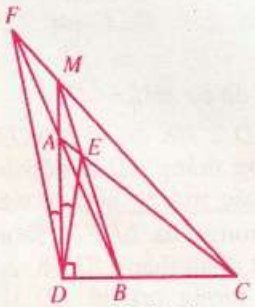
b) Nếu ΔABC có góc B tù thì điểm M nằm ngoài ΔABC (h. 2). Tam giác AMC có ba góc nhọn và AF, ME, CD là các đường cao gặp nhau tại B nên theo phần trên thì điểm B là tâm đường tròn nội tiếp ΔAMC.

Ta xét một mệnh đề đảo của BT2a và sau này sẽ sử dụng nó như một phương pháp chứng minh ba đường thẳng đồng quy.

Bài toán 4. *Cho tam giác ABC với đường cao AD (D thuộc BC).*

a) Giả sử các tia DE, DF nằm về hai phía của đường thẳng AD, cắt các đường thẳng AC và AB tại E và F sao cho $\widehat{ADE} = \widehat{ADF}$. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.

b) Giả sử các tia DE và DF nằm về một phía của đường thẳng AD, cắt các đường thẳng AC và AB tại E và F sao cho $\widehat{ADE} + \widehat{ADF} = 180^o$. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.



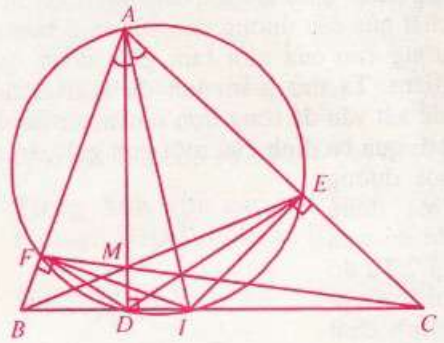
Hình 3

Chứng minh : a) Giả sử tia BE cắt tia DA tại M (h. 1 và h.3. Các bạn tự vẽ thêm trường hợp điểm M nằm giữa A và D), tia CM cắt tia BA tại F'. Theo BT2a thì DA là đường phân giác trong của $\Delta DEF'$ nên $\widehat{ADF'} = \widehat{ADE}$. Theo giả thiết $\widehat{ADE} = \widehat{ADF}$, suy ra $\widehat{ADF'} = \widehat{ADF}$. Do đó F trùng với F', nghĩa là AD, BE, CF đồng quy.

b) Chứng minh tương tự như trên (h.2).

Bài toán 5. *Cho tam giác ABC với đường cao AD. Đường phân giác trong (hoặc phân giác ngoài) của góc BAC cắt đường thẳng BC tại I. Gọi E và F lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ I đến AC và AB. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.*

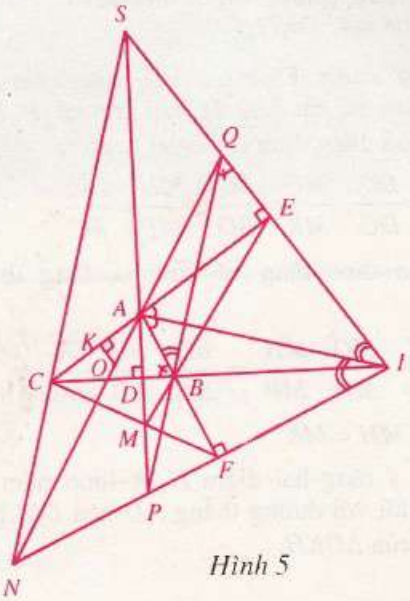
Chứng minh. Xét AI là đường phân giác trong của ΔABC (h. 4. Các bạn tự vẽ và chứng minh trường hợp AI là đường phân giác ngoài). Từ đó có $\widehat{AIE} = \widehat{AIF}$.



Hình 4

Chú ý rằng các điểm A, I, D, E, F nằm trên đường tròn đường kính AI. Vì vậy có : $\widehat{ADF} = \widehat{AIF} = \widehat{AIE} = \widehat{ADE}$. Theo BT4 thì AD, BE, CF đồng quy.

Bài toán 6. *Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn tâm I kẻ các tiếp tuyến AE và AF tới đường tròn đó (E, F là tiếp điểm). Một đường thẳng qua I cắt các đường thẳng AF, AE lần lượt ở B*



Hình 5

(Xem tiếp trang 25)

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN TOÁN TIN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI NĂM 2004

Ngày thứ nhất

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu 1. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19 \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 931 \end{cases}$$

Câu 2. Chứng minh rằng phương trình sau vô nghiệm : $(x+2)\sqrt{x+1} = 2x+1$

Câu 3. Chứng minh rằng :

$$\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^8 > 3^6$$

Câu 4. 1) Chứng minh rằng số $n = 18^{6^{2004}}$ có tính chất là tồn tại hai số nguyên dương p và q thỏa mãn điều kiện :

$$\begin{cases} 0 < p < q < n \\ (p + (p+1) + (p+2) + ... + q) \vdots n \end{cases}$$

2) Số $n = 16^{6^{2004}}$ có tính chất nói trên hay không.

Câu 5. Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 40^\circ$ và điểm P trong tam giác ABC sao cho $\widehat{PAC} = 10^\circ$, $\widehat{PCA} = 20^\circ$, $\widehat{PAB} = 30^\circ$. Giả sử Q là điểm đối xứng với điểm P qua đường trung trực của đoạn AB.

1) Tam giác CPQ là tam giác gì ?

2) Tính $\widehat{CPB}$.

Ngày thứ hai

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu 6. Cho x, y, z là ba số dương thay đổi luôn thỏa mãn điều kiện : $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}$$

Câu 7. Tìm tất cả các bộ ba số dương (x, y, z) thỏa mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x^{2004} = y^6 + z^6 \\ 2y^{2004} = z^6 + x^6 \\ 2z^{2004} = x^6 + y^6 \end{cases}$$

Câu 8. Giải phương trình

$$\frac{2(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})}{(1-\sqrt{2})(1-\sqrt{3})} + \frac{3(x-1)(x-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-\sqrt{3})} + \frac{4(x-1)(x-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = 3x - 1$$

Câu 9. Mỗi bộ ba số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

được gọi là một nghiệm nguyên dương của phương trình này.

1) Hãy chỉ ra bốn nghiệm nguyên dương khác của phương trình đã cho.

2) Chứng minh rằng phương trình đã cho có vô số nghiệm nguyên dương.

Câu 10. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (C). Một đường thẳng (Δ) thay đổi nhưng luôn đi qua A cắt hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (C) tương ứng tại M và N. Giả sử (Δ) cắt lại đường tròn (C) tại E $(E \neq A)$. MC cắt BN tại F. Chứng minh rằng :

1) Tam giác ACN đồng dạng với tam giác MBA. Tam giác MBC đồng dạng với tam giác BCN.

2) Tứ giác $BMEF$ là tứ giác nội tiếp.

3) Đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định (khi (Δ) thay đổi nhưng luôn đi qua A).

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHU VĂN AN VÀ THPT HÀ NỘI - AMSTERDAM HÀ NỘI NĂM 2004

(Đề thi đã đăng trên THTT số 333, tháng 3 năm 2005)

ĐỀ CHUNG

Bài 1. Điều kiện $x > 0$ và $x \neq 1$.

1) Rút gọn $A = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{4\sqrt{x}}{1-x}$; rút gọn B $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^2 = \dfrac{(1-x)^2}{4x}$. Kết quả $P = A.B = \dfrac{1-x}{\sqrt{x}}$.

2) $\dfrac{P}{\sqrt{x}} > 2 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{(\sqrt{x})^2} > 2 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{3}$. Kết hợp với điều kiện ta được : $0 < x < 1/3$.

Bài 2. 1) Phương trình bậc hai này có $a = 1$; $c = -m^2 + 3m - 4 = -\left(m - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{7}{4} < 0$ $(\forall m)$.

Vậy $a.c < 0 \Rightarrow$ Phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt trái dấu.

2) Phương trình có 2 nghiệm trái dấu nên hoặc $x_1 = -2x_2$ hoặc $x_2 = -2x_1$ hay

$(x_1+2x_2)(x_2+2x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + 2(x_1+x_2)^2 = 0$ (*)

Theo định lí Vi–ét thì : $x_1 + x_2 = m - 2$

$x_1x_2 = -m^2 + 3m - 4$. Thay vào (*) được

$m^2 - 5m + 4 = 0 \Leftrightarrow m_1 = 1$; $m = 4$.

Bài 3. 1) Với $k = 1$ thì PT (d) là $x = 1$, (d) không song song với đường thẳng $y = \sqrt{3}x$.

Với $k \neq 1$. Đưa PT (d) về dạng

$$y = -\frac{2k}{k-1}.x + \frac{2}{k-1} \qquad (**)$$

Điều kiện cần và đủ để (d) song song với đường thẳng $y = \sqrt{3}x$ là $\dfrac{-2k}{k-1} = \sqrt{3} \Rightarrow$ $k = \sqrt{3}(2-\sqrt{3})$. Khi đó góc nhọn α tạo bởi (d) với tia Ox có $\text{tg}\alpha = \sqrt{3}$ nên $\alpha = 60^\circ$.

2) Với $k = 1$ thì khoảng cách từ O đến (d) là 1. Với $k = 0$, PT đường thẳng (d) có dạng $y = -2$. Khoảng cách từ O đến (d) là 2. Với $k \neq 0$ và $k \neq 1$, gọi giao điểm của (d) với Ox, Oy là A, B tương ứng. Thay $y = 0$ vào (**) được $x_A = \dfrac{1}{k} \Rightarrow$ $OA = \left|\dfrac{1}{k}\right|$. Thay $x = 0$ vào (**) có $y_B = \dfrac{2}{k-1}$ hay $OB = \left|\dfrac{2}{k-1}\right|$. Rõ ràng (d) không đi qua gốc tọa độ O với mọi $k \neq 0$ và $k \neq 1$. Trong tam giác vuông AOB ta có : $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2}$. Từ đó

$OH = \dfrac{2}{\sqrt{5k^2 - 2k + 1}}$;

Ta có $5k^2 - 2k + 1 = 5\left(k - \dfrac{1}{5}\right)^2 + \dfrac{4}{5} \geq \dfrac{4}{5}$, $(\forall k)$.

Vì vậy $OH \geq \sqrt{5}$ và $OH = \sqrt{5}$ khi $k = 1/5$.

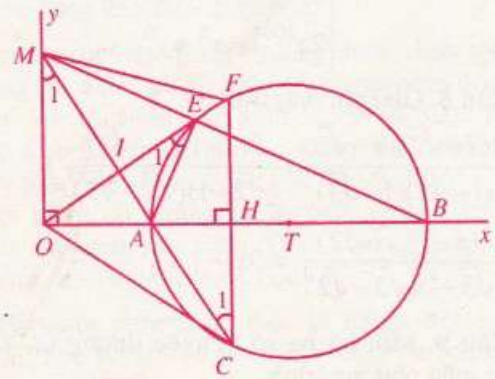
Tóm lại với $k = \dfrac{1}{5}$ thì khoảng cách từ O đến (d) là lớn nhất.

Bài 4. 1) Chú ý $\widehat{AOM} = \widehat{AEM} = 90^\circ$.

2) Tứ giác $OAEM$ nội tiếp nên $\widehat{M_1} = \widehat{E_1}$. Bốn điểm A, C, F, E cùng thuộc đường tròn (T) nên $\widehat{E_1} = \widehat{C_1}$. Do đó $\widehat{M_1} = \widehat{C_1} \Rightarrow FC // OM$. Vậy $OCFM$ là hình thang.

3) $\Delta OFA \backsim \Delta OBE$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{OF}{OB} = \dfrac{OA}{OE}$

$\Rightarrow OE.OF = OA.OB$ (1)



$\Delta OBM \backsim \Delta EBA$ (gg) $\Rightarrow \dfrac{OB}{EB} = \dfrac{BM}{BA}$

$\Rightarrow BE.BM = BA.OB$ (2)

Từ (1) và (2) có $OE.OF + BE.BM = OB^2$.

4) Gọi giao điểm của CM với OF là I, của CF với OB là H.

Hình thang $OCFM$ là hình bình hành $\Leftrightarrow I$ là trung điểm $OF \Leftrightarrow A$ là trọng tâm $\Delta COF \Leftrightarrow OA = 2AH$. Từ đó ta có cách dựng sau : Dựng điểm H trên tia OA thỏa mãn $OA = 2AH$. Qua H dựng đường thẳng vuông góc với OB cắt (T) tại F và C. Nối CA cắt Ox tại M thì M là điểm cần dựng.

4) Khi $OCFM$ là hình bình hành, muốn nó là hình thoi thì $CI \perp OF \Rightarrow \Delta OCF$ đều, A là tâm tam giác đều $OCF \Rightarrow \widehat{CAT} = 60^\circ \Rightarrow OA = AC = AT = AB/2$. Đảo lại bạn đọc tự CM.

ĐỀ CHUYÊN

Bài 5. Biến đổi

$$C = \left(1+\frac{1}{2004}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2003}\right)+...+\left(\frac{1}{2002}+\frac{1}{1003}\right)$$

$$= 2005\left(\frac{1}{2004}+\frac{1}{2.2003}+...+\frac{1}{1002.1003}\right)$$

$= 2005.k$. Vì $A = 2005.k.B$ mà $k.B$ là số nguyên nên $A \vdots 2005$.

Bài 6. 1) Đặt $m - 3x^2 = y \Rightarrow y + 3x^2 = m$.

Ta có hệ $x+3y^2=m$ và $y+3x^2=m$

$\Rightarrow (x - y) + 3(y - x)(y + x) = 0$

$\Rightarrow (y - x)(3x + 3y - 1) = 0$

$\Rightarrow y = x$ hoặc $3x + 3y = 1$. Thế vào phương trình đầu của hệ trên dẫn tới $\left[\begin{array}{l} 3x^2+x-m=0 \\ 9x^2-3x+1-3m=0 \end{array}\right.$ (*)

Với $m = 2$. Giải ra được $x_1 = -1$; $x_2 = \dfrac{2}{3}$; $x_3 = \dfrac{1+\sqrt{21}}{6}$, $x_4 = \dfrac{1-\sqrt{21}}{6}$.

2) Phương trình có nghiệm khi (*) có nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} \Delta_1 \ge 0 \\ \Delta_2 \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1+12m \ge 0 \\ 9-36(1-3m) \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \ge -\frac{1}{12}$$

Bài 7. ĐK : $x \ne 0$.

* Với $x > 0$. Nhân hai vế BPT với x được :

$$\sqrt[3]{25x^4(2x^2+9)} \ge 4x^2+3 \qquad (1)$$

Theo BĐT Cô–si cho ba số dương :

$5x^2 + 5x^2 + (2x^2 + 9) \ge \sqrt[3]{25x^4(2x^2+9)}$ hay

$$4x^2 + 3 \ge \sqrt[3]{25x^4(2x^2+9)} \qquad (2)$$

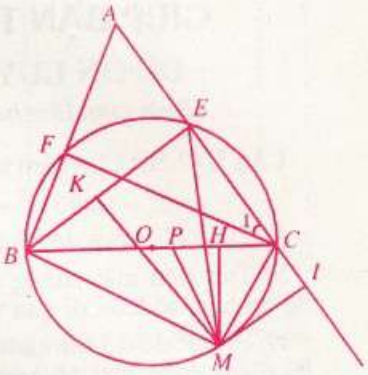
Từ (1), (2) suy ra để BPT có nghiệm, dấu đẳng thức phải xảy ra ở BĐT (2), lúc đó

$5x^2 = 2x^2 + 9 \Rightarrow x = \sqrt{3}$.

* Với $x < 0$. Nhân hai vế với x ta có

$\sqrt[3]{25x^4(2x^2+9)} \le 4x^2 + 3$ nên BPT đúng $\forall x < 0$

Bài 8. 1) Gọi O là trung điểm BC.



Do $\widehat{A} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{C_1} = 30^\circ$

$\Rightarrow \widehat{EOF} = 2\widehat{C_1} = 60^\circ$

$\Rightarrow \Delta EOF$ đều

$\Rightarrow EF = \dfrac{a}{2}$.

2) Lấy điểm P trên BC sao cho $\widehat{BMP} = \widehat{EMC}$.

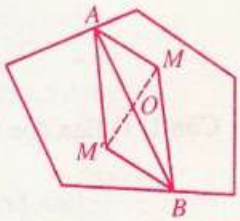
Do $\Delta CME \backsim \Delta PMB$ (gg) $\Rightarrow \dfrac{BP}{MH} = \dfrac{EC}{MI}$;

$\Delta MEB \backsim \Delta MCP$ (gg) $\Rightarrow \dfrac{EB}{MK} = \dfrac{CP}{MH}$. Vậy

$\dfrac{BP+PC}{MH} = \dfrac{EC}{MI} + \dfrac{EB}{MK} \Rightarrow \dfrac{BC}{MH} = \dfrac{EC}{MI} + \dfrac{EB}{MK} \Rightarrow$

$S = \dfrac{2BC}{MH}$. Khi M là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$ thì MH cực đại, lúc đó S cực tiểu và $S_{min} = 4$.

Bài 9. Lấy điểm A trên biên của đa giác. Lấy điểm B trên biên đa giác sao cho AB chia chu vi đa giác thành hai phần có độ dài mỗi phần bằng 1/2. Gọi O là trung điểm của AB. Giả sử M là một điểm tùy ý thuộc biên hoặc miền trong đa giác,



lấy M' đối xứng với M qua O. Tứ giác $AMBM'$ là hình bình hành và $AM + MB < 1/2$ mà $MM' < AM + MB \Rightarrow MM' < 1/2 \Rightarrow OM < 1/4$ $\Rightarrow M$ nằm trong đường tròn tâm O bán kính $r = 1/4$ suy ra đpcm.

VŨ QUỐC LƯƠNG
(GV THCS Chu Văn An, Hà Nội)

GIÚP BẠN TỰ ÔN THI

ĐỀ ÔN LUYỆN SỐ 3

(Thời gian làm bài : 180 phút)

Câu I. (2,5đ) Cho hàm số

$$y = x^3 - (m+3)x^2 + (2+3m)x - 2m \quad (1)$$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với $m = -3/2$.

b) Tìm trên mặt phẳng các điểm cố định mà đồ thị hàm số luôn đi qua với mọi m.

c) Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng theo một thứ tự nào đó.

Câu II. (2đ). a) Cho tam giác ABC có ba góc A, B, C thỏa mãn :

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{A}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{B}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ \cos A + \cos B = 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

b) Giải bất phương trình :

$$\frac{1}{\log_4(x^2+3x)} < \frac{1}{\log_2(3x-1)}$$

Câu III. (2đ).

1) Tính $I = \int_{-1}^{1} \ln(\sqrt{x^2+a^2}+x)dx$

2) Xác định a, b để hàm số

$$y = \begin{cases} ax+b & \text{khi } x \geq 0 \\ \dfrac{\cos 2x - \cos 4x}{x} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

có đạo hàm tại $x = 0$.

Câu IV. (2,5đ). Trong không gian với hệ trục tọa độ Đề-các vuông góc $Oxyz$ cho 2 đường thẳng với phương trình :

$$d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2} \; ; \; d_2 : \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{2}$$

a) Tìm tọa độ giao điểm I của d_1, d_2 và viết phương trình mặt phẳng (Q) qua d_1, d_2.

b) Lập phương trình đường thẳng d_3 qua P (0; −1; 2) cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B khác I sao cho $AI = AB$.

c) Xác định a, b để điểm M (0; a; b) thuộc mặt phẳng (Q) và nằm trong miền góc nhọn tạo bởi d_1, d_2.

Câu V. (1đ). Xét các tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$F = 5\operatorname{cotg}^2 A + 16\operatorname{cotg}^2 B + 27\operatorname{cotg}^2 C$$

ĐỖ VĂN ĐỨC

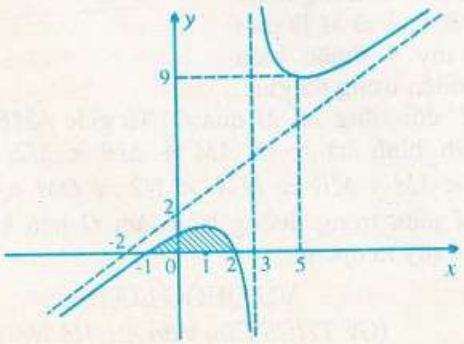
(GV THPT chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình)

HƯỚNG DẪN GIẢI

ĐỀ ÔN LUYỆN SỐ 2

(Đề đã đăng trên THTT số 333, tháng 3 năm 2005)

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải.



2) Phần diện tích hình phẳng cần tính là :

$$S = \int_{-1}^{2}\left(x+2+\frac{4}{x-3}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2}+2x+4\ln|x-3|\right)\Bigg|_{-1}^{2}$$

$$= \frac{15}{2} - 8\ln 2 .$$

Câu II. 1) Gọi biệt thức của các tam thức tương ứng là :

$\Delta_1 = a^2 - 4b$, $\Delta_2 = b^2 - 4c$; $\Delta_3 = c^2 - 4d$.

Ta có : $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = a^2 + b^2 + c^2 - 4(b+c+d)$
$= a^2 + b^2 + c^2 - [2c(a+b) - 2ab]$
$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca$
$= (a+b-c)^2 \geq 0$

Suy ra trong Δ_1, Δ_2, Δ_3 có ít nhất một số không âm. Bất phương trình ứng với biệt số không âm đó sẽ có nghiệm.

2) Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 + 2 \\ x + y = a.xy \end{cases} \quad (x \neq 0, y \neq 0)$$

Với $a = 0$, hệ có hai nghiệm $(1, -1)$ $(-1, 1)$.

Vậy $a = 0$ là một giá trị cần tìm.

Dưới đây xét $a \neq 0$. Từ hệ đã cho suy ra :

$$(1) \begin{cases} x + y = -a \\ xy = -1 \end{cases} \text{ hoặc } (2) \begin{cases} x + y = \dfrac{a^2+2}{a} \\ xy = \dfrac{a^2+2}{a^2} \end{cases}$$

Trong hệ (1) x, y là nghiệm của phương trình : $t^2 + at - 1 = 0$, phương trình này có hai nghiệm phân biệt và khác không với mọi $a \neq 0 \Rightarrow$ hệ (1) có đúng hai nghiệm (x, y) là (t_1, t_2), (t_2, t_1).

Vì vậy, muốn hệ ban đầu có đúng hai nghiệm thì hệ (2) phải vô nghiệm hoặc có nghiệm trùng với hai nghiệm của hệ (1) nhưng điều sau không thể xảy ra nên hệ (2) phải vô nghiệm. Trong hệ (2) x, y là nghiệm của phương trình

$t^2 - \dfrac{a^2+2}{a}t + \dfrac{a^2+2}{a^2} = 0$. Ta phải có $\Delta < 0$

$\Leftrightarrow -\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$ và $a \neq 0$.

Kết luận : Với $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$ hệ ban đầu có đúng hai nghiệm.

Câu III. 1) Phương trình đã cho tương đương với :

$2\cos x.\cos 2x.\cos 3x - 2\sin x.\sin 2x.\sin 3x = 1$
$\Leftrightarrow \cos 2x[\cos 4x + \cos 2x] - \sin 2x[\cos 2x - \cos 4x]$
$= \sin^2 2x + \cos^2 2x$
$\Leftrightarrow \cos 4x.\cos 2x + \cos^2 2x - \sin 2x\cos 2x + \cos 4x\sin 2x$
$= \sin^2 2x + \cos^2 2x$
$\Leftrightarrow \cos 4x[\cos 2x + \sin 2x] - \sin 2x[\cos 2x + \sin 2x] = 0$
$\Leftrightarrow (\cos 2x + \sin 2x)(\cos 4x - \sin 2x) = 0$

a) $\cos 2x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2x + \dfrac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$

b) $\cos 4x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)$

* $4x = \dfrac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{3}$ $(k \in Z)$

* $4x = 2x - \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in Z)$

2) $f(x) = [1 + x + x^3(1+x)]^4 = [(1+x)(1+x^3)]^4$
$= (1+x)^4(1+x^3)^4$
$= \left(C_4^o + C_4^1 x + C_4^2 x^2 + C_4^3 x^3 + C_4^4 x^4\right) \times$
$\left(C_4^o + C_4^1 x^3 + C_4^2 x^6 + C_4^3 x^9 + C_4^4 x^{12}\right)$
$= a_o + a_1 x + ... + \left(C_4^1.C_4^3 + C_4^4 C_4^2\right)x^{10} + ... + a_{16}x^{16}$

Vậy $a_{10} = C_4^1.C_4^3 + C_4^4 C_4^2 = 4.4 + 1.6 = 22$.

Câu IV. 1) a) Giả sử đường thẳng đi qua OA có PT $y = kx$

*) Nếu $k = 0$, hiển nhiên

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$$

*) Nếu $k \neq 0$. Khi đó gọi tọa độ của A, B tương ứng là (x_o, y_o), (x_1, y_1). Ta có :

$$1 = \frac{x_o^2}{a^2} + \frac{k^2x_o^2}{b^2} \Rightarrow x_o^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 + k^2a^2}$$

$$\Rightarrow OA^2 = x_o^2 + k^2x_o^2 = (1+k^2).\frac{a^2b^2}{b^2+k^2a^2} \quad (1)$$

Do $OA \perp OB$ nên đường thẳng đi qua OB có dạng $y = -\dfrac{1}{k}x$.

Từ đó : $1 = \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_1^2}{k^2b^2}$

$$\Rightarrow x_1^2 = \frac{k^2a^2b^2}{a^2+k^2b^2}.$$

$$\Rightarrow OB^2 = x_1^2 + \frac{x_1^2}{k^2} = \frac{a^2b^2(1+k^2)}{a^2+k^2b^2} \quad (2)$$

Từ (1), (2) có

$$\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}.$$

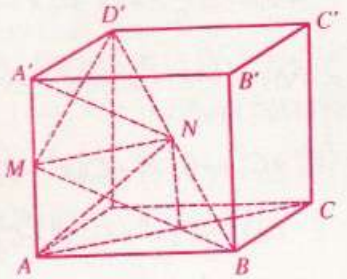
b) Ta có

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$$ không đổi

$\Rightarrow OH$ có độ dài không đổi. Vậy tập hợp các điểm H là đường tròn tâm O, bán kính

$$R=\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}.$$

2) Kí hiệu M, N tương ứng là trung điểm của AA' và BD'. Ta có $NA' = NA$ $\Rightarrow NM \perp AA'$, $MD' = MB$ $\Rightarrow NM \perp BD'$ nên MN là đường vuông góc chung của AA' và BD'.



Vậy khoảng cách giữa hai đường AA' và BD' là $MN = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu V. Chú ý rằng với $a, b > 0$ ta luôn có :

$\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{1}{3}$. Thật vậy, BĐT tương đương với $3(a^2-ab+b^2) \geq a^2+ab+b^2 \Leftrightarrow 2(a-b)^2 \geq 0$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

Ta có :

$$\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}=\frac{(x^3+y^3)(x^6-x^3y^3+y^6)}{x^6+x^3y^3+y^6}$$

$$\geq \frac{x^3+y^3}{3}$$

Áp dụng tương tự cho hai biểu thức còn lại, nhận được :

$$P \geq \frac{x^3+y^3}{3}+\frac{y^3+z^3}{3}+\frac{z^3+x^3}{3} =$$

$$= \frac{2}{3}(x^3+y^3+z^3) \geq \frac{2}{3}(3xyz) = 2$$

Vậy $P_{\min} = 2$ đạt được khi $x = y = z = 1$.

PHẠM HÙNG
(GV ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội)

THÔNG TIN KHOA HỌC

NHIỀU NHÀ TOÁN HỌC VIỆT NAM ĐƯỢC BẦU LÀM VIỆN SĨ, TIẾN SĨ DANH DỰ VÀ ĐƯỢC GIẢI THƯỞNG

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ xin gửi lời chúc mừng tốt đẹp nhất đến các nhà toán học Việt Nam đã có những thành tích, những cương vị cao quý mới :

- Trong phiên họp ngày 23/11/2004 tại Trieste (Italy), Viện Hàn lâm Khoa học thế giới thứ ba (VHLKHTGTB) đã bầu GS-TSKH *Hà Huy Khoái*, làm việc tại Viện Toán học, Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam (VKHCNVN), làm Viện sĩ. VHLKHTGTB gồm hơn 700 viện sĩ, thuộc 10 ngành khoa học khác nhau, trong đó có khoảng hơn 100 người thuộc các nước phát triển (Mỹ, Pháp, Anh,...), số còn lại thuộc hơn 70 nước đang phát triển, nhiều nhất là Trung Quốc, Ấn Độ, Braxin. NgànhToán có gần 70 người, trong đó có những nhà toán học nổi tiếng như *Atiyah* (Giải thưởng Fiedls năm 1966), *Yoccoz* (Giải thưởng Fiedls năm 1994), *Griffiths*,...

Cho đến nay, đã có 8 nhà khoa học Việt Nam được bầu làm Viện sĩ VHLKHTGTB là: *Nguyễn Văn Hiệu, Đào Vọng Đức* (Vật Lí), *Nguyễn Văn Đạo, Lê Dũng Tráng, Ngô Việt Trung, Hà Huy Khoái* (Toán học), *Vũ Tuyên Hoàng* (Nông nghiệp), *Nguyễn Huy Phan* (Y học, đã mất).

- Tháng 7 năm 2004, GS-TSKH *Hoàng Xuân Phú* (Viện Toán học, VKHCNVN) được bầu làm Viện sĩ thông tấn Viện Hàn lâm Khoa học Heidelberg. Viện Hàn lâm khoa học Heidelberg là một trong những Viện Hàn lâm nổi tiếng của Đức. CHLB Đức không tổ chức Viện Hàn lâm khoa học của cả nước, mà gồm một số Viện Hàn lâm.

- Tháng 11 năm 2004, GS-TSKH *Nguyễn Khoa Sơn* (Viện Toán học, VKHCNVN) được tặng bằng Tiến sĩ danh dự của Trường Đại học Khác-cốp (U-crai-na).

- Cử nhân *Trần Ngọc Nam*, Khoa Toán, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội được tặng Giải thưởng khoa học năm 2004 của Đại học Quốc gia Hà Nội. Đây là giải thưởng cao nhất về khoa học hàng năm của ĐHQG Hà Nội.

H.K.

LƯU Ý KHI SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC ĐỂ GIẢI TOÁN ĐẠI SỐ

LÊ QUỐC HÁN
(*GV khoa Toán ĐH Vinh*)

Cách đây 25 năm, báo TH&TT có đăng bài "*Phương pháp lượng giác trong đại số*" với các thí dụ đơn giản, nên vào số báo tiếp theo đã đăng bài "*Có những cách giải đơn giản hơn*" nhưng lại sử dụng phương pháp khác. Trong bài báo này, tôi muốn lưu ý các bạn một số điều khi sử dụng phương pháp lượng giác (LG), đặc biệt nêu ra một số thí dụ mà nếu giải trực tiếp bằng công cụ đại số (ĐS) thì sẽ gặp nhiều khó khăn, thậm chí không thể giải được.

Cơ sở của phương pháp lượng giác để giải toán đại số

Phương pháp LG để giải toán ĐS cần đến một số kiến thức lượng giác dựa trên hai cơ sở chủ yếu sau :

1) ***Dựa vào công thức lượng giác:*** Từ công thức quen thuộc đầu tiên khi học sinh học lượng giác $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, suy ra : nếu a và b là hai số thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 = 1$ thì tồn tại số α (số đo góc) với $0 \le \alpha \le 2\pi$ sao cho $\cos\alpha = a$, $\sin\alpha = b$. Đôi khi để α xác định duy nhất ta chỉ chọn một trong hai giá trị 0 hoặc 2π.

Thí dụ 1. *Giải và biện luận hệ phương trình* $x^2 + a^2 = y^2 + b^2 = (x - b)^2 + (y - a)^2$, *trong đó a, b là các tham số.*

Một lời giải trực tiếp bằng cách sử dụng công cụ đại số, tác giả bài báo này vẫn chưa tìm được. Sau đây là lời giải bằng cách sử dụng công cụ lượng giác.

Nếu $a = b = 0$, thì hệ đã cho trở thành $x^2 = y^2 = x^2 + y^2$, hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 0$.

Xét trường hợp $a^2 + b^2 \ne 0$. Đặt $x^2 + a^2 = y^2 + b^2 = (x - b)^2 + (y - a)^2 = R^2$ (với $R > 0$). Từ $\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{a}{R}\right)^2 = 1$ suy ra tồn tại α với $0 \le \alpha < 2\pi$ sao cho

$$\frac{x}{R} = \cos\alpha,\ \frac{a}{R} = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = R\cos\alpha \\ a = R\sin\alpha \end{cases}$$

Tương tự, tồn tại β với $0 \le \beta < 2\pi$ sao cho $y = R\cos\beta$, $b = R\sin\beta$.

Thay vào đẳng thức $(x - b)^2 + (y - a)^2 = R^2$ và rút gọn (chú ý $R \ne 0$), ta có $\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha+\beta = \frac{\pi}{6} + k.2\pi \\ \alpha+\beta = \frac{5\pi}{6} + k.2\pi \end{array}\right. \quad \text{với } k \in Z.$$

Ta xét trường hợp $\alpha+\beta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$. Khi đó

$$x = R\cos\left(\frac{\pi}{6} - \beta\right) = R\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\beta + \sin\frac{\pi}{6}\sin\beta\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}.R\cos\beta + \frac{1}{2}R\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}b.$$

Ta lại có

$$a = R\sin\left(\frac{\pi}{6} - \beta\right) = \frac{1}{2}R\cos\beta - \frac{\sqrt{3}}{2}R\sin\beta$$

$$= \frac{1}{2}.y - \frac{\sqrt{3}}{2}b \Rightarrow y = 2a + \sqrt{3}b \Rightarrow x = \sqrt{3}a + 2b$$

Trường hợp $\alpha + \beta = \frac{5\pi}{6} + k.2\pi$ được giải hoàn toàn tương tự.

2) Dựa vào phương trình lượng giác cơ bản :

Từ cách giải phương trình lượng giác (PTLG) cơ bản, suy ra :

+ Nếu số a thỏa mãn điều kiện $|a| \le 1$ thì tồn tại các số (số đo góc) α và β tương ứng duy nhất

với $0 \le \alpha < 2\pi$; $-\frac{\pi}{2} \le \beta < \frac{\pi}{2}$ sao cho $\cos\alpha = a$ và $\sin\beta = b$. Trường hợp thứ nhất hay dùng hơn, vì công thức liên quan đến hàm số lượng giác côsin phong phú hơn :

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2},\ 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \ldots$$

+ Với mọi số thực a, tồn tại duy nhất α với $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ sao cho $\mathrm{tg}\alpha = a$ (ta không dùng hàm lượng giác côtang, vì người ta ít sử dụng công thức liên quan đến hàm số đó).

Khi sử dụng các PTLG này, thường dùng hai kết quả sau đây (chứng minh khá đơn giản xin dành cho bạn đọc).

Mệnh đề 1:

$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma = \mathrm{tg}\alpha.\mathrm{tg}\beta.\mathrm{tg}\gamma$ khi và chỉ khi $\alpha + \beta + \gamma = k\pi$ với $k \in Z$.

Mệnh đề 2 :

$\mathrm{tg}\alpha.\mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\beta.\mathrm{tg}\gamma + \mathrm{tg}\gamma.\mathrm{tg}\alpha = 1$ khi và chỉ khi $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}+k\pi$ với $k \in Z$.

Thí dụ 2: *Cho ba số x, y, z thỏa mãn điều kiện* $xy+xz+yz=1$ *và* $x,y,z \in (0,1)$. *Chứng minh bất đẳng thức* $\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải. Vì $x, y, z \in (0, 1)$ nên có thể chọn được (một cách duy nhất) α, β, γ sao cho $\mathrm{tg}\alpha = x$, $\mathrm{tg}\beta = y$, $\mathrm{tg}\gamma = z$ với $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Khi đó từ $xy + xz + yz = 1$ có $\mathrm{tg}\alpha.\mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\alpha.\mathrm{tg}\gamma + \mathrm{tg}\beta.\mathrm{tg}\gamma = 1$.

Theo MĐ2 thì $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} + k\pi$ với $k \in Z$ nên $2\alpha+2\beta+2\gamma = \pi+(2k).\pi$ với $k \in Z$.

Theo MĐ1 có

$$\mathrm{tg}2\alpha + \mathrm{tg}2\beta + \mathrm{tg}2\gamma = \mathrm{tg}2\alpha.\mathrm{tg}2\beta.\mathrm{tg}2\gamma \quad (1)$$

Vì $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ nên $2\alpha, 2\beta, 2\gamma \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$ $\mathrm{tg}2\alpha, \mathrm{tg}2\beta, \mathrm{tg}2\gamma > 0$. Do đó nếu đặt $m = \mathrm{tg}2\alpha + \mathrm{tg}2\beta + \mathrm{tg}2\gamma$ thì $m > 0$ (2) và theo (1) ta có $\mathrm{tg}2\alpha.\mathrm{tg}2\beta.\mathrm{tg}2\gamma = m$. Áp dụng BĐT Cô–si cho ba số dương $\mathrm{tg}2\alpha, \mathrm{tg}2\beta, \mathrm{tg}2\gamma$ có :

$$\mathrm{tg}2\alpha + \mathrm{tg}2\beta + \mathrm{tg}2\gamma \ge 3\sqrt[3]{\mathrm{tg}2\alpha.\mathrm{tg}2\beta.\mathrm{tg}2\gamma}$$

$$\Rightarrow m \ge 3\sqrt[3]{m} \Rightarrow m^3 \ge 27m \Rightarrow m^2 \ge 27$$

$$\Rightarrow m \ge 3\sqrt{3} \text{ hay } \mathrm{tg}2\alpha + \mathrm{tg}2\beta + \mathrm{tg}2\gamma \ge 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2} \ge 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Cần chú ý đến cận trên và cận dưới của góc lượng giác được đưa vào để tránh các sai lầm trong lập luận. Trong thí dụ 2 đã nhấn mạnh : từ giả thiết $x, y, z \in (0, 1)$ suy ra $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Thiếu giả thiết ấy, kết luận của bài toán có thể không còn đúng nữa. Ta xét thêm một thí dụ nữa.

Thí dụ 3. *Giải phương trình*

$$x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2(1-x^2)}$$

Lời giải. Điều kiện để phương trình có nghĩa: $1 - x^2 \ge 0 \Rightarrow |x| \le 1$. Đặt $x = \cos\alpha$ với $0 \le \alpha \le \pi$ thì $\sin\alpha \ge 0$ nên $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = |\sin\alpha| = \sin\alpha$. Phương trình đã cho trở thành

$$\cos^3\alpha + \sin^3\alpha = \sqrt{2}\cos\alpha.\sin\alpha \quad (3)$$

Đặt $t = \cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$. Do $0 \le \alpha \le \pi$ nên $\alpha - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \Rightarrow$ $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ hay $t \in \left[-1, \sqrt{2}\right]$ (4).

Phương trình (3) trở thành ; $\frac{3t-t^3}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{t^2-1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow t^3 + \sqrt{2}t^2 - 3t - \sqrt{2} = 0$. Giải ra được $t_1 = \sqrt{2}$; $t_2 = 1-\sqrt{2}$, $t_3 = 1 + \sqrt{2}$. Giá trị t_3 bị loại vì không thỏa mãn điều kiện (4).

Với $t_1 = \sqrt{2}$, dễ thấy $x_1 = \cos\alpha = \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (thỏa mãn điều kiện $\sin\alpha \ge 0$). Với $t_2 = 1-\sqrt{2}$. ta có $\cos\alpha.\sin\alpha = \frac{t^2-1}{2} = \frac{(1-\sqrt{2})^2-1}{2} = 1-\sqrt{2} < 0$ mà $\sin\alpha \ge 0$ nên $\cos\alpha < 0$.

Ô CHỮ KỈ NIỆM NGÀY ĐẤT NƯỚC THỐNG NHẤT

Hãy tìm các ô chữ hàng dọc có in màu với những gợi ý về các dòng từ trên xuống.

1. Nơi bắt đầu con đường nối liền Việt Nam DCCH với các nước XHCN trước đây.

2. Một con đường độc đáo vận chuyển vũ khí chi viện miền Nam.

3. Chiến thắng quyết định dẫn đến giải phóng miền Bắc.

4. Nơi gắn bó, che chở bộ đội ta.

5. Trận đánh đầu tiên điểm huyệt mở đầu chiến dịch Xuân 1975 giải phóng miền Nam.

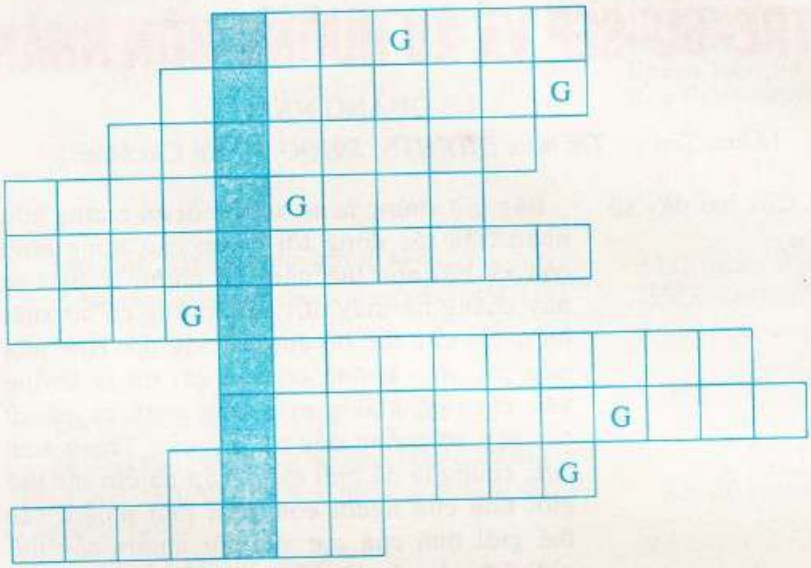
6. Giải phóng thành phố này có ý nghĩa quyết định

7. Nơi cả nước gửi gắm niềm tin.

8. Người lính ra trận nhớ về ...

9. Một trong những nơi bị Hải quân Mỹ phong tỏa ác liệt.

10. Nơi liên tục có phong trào "Một triệu mét vải vì miền Nam ruột thịt".



VŨ ĐÔ QUAN

Khi đó $\begin{cases}\cos\alpha+\sin\alpha=1-\sqrt{2}\\ \cos\alpha.\sin\alpha=1-\sqrt{2}\end{cases}$ nên $\cos\alpha$ và $\sin\alpha$ là nghiệm của phương trình bậc hai

$$X^2-(1-\sqrt{2})X+1-\sqrt{2}=0,$$

trong đó $\cos\alpha$ ứng với nghiệm âm. Do đó

$$x_2=\frac{\left(1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}\right)}{2}.$$

Để kết thúc, mời các bạn sử dụng phương pháp lượng giác để giải các bài toán sau đây.

1) Giả sử $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$, $ac+bd=0$. Chứng minh $a^2+c^2=1$, $b^2+d^2=1$, $ab+cd=0$.

2) Giả sử $x^2+y^2\neq 0$. Chứng minh BĐT

$$-\sqrt{a^2+b^2}\le\frac{2axy+b(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\le\sqrt{a^2+b^2}$$

3) Chứng minh rằng với $\forall a\in R$, $\forall n\in Z$, $n\ge 2$ ta có

$$-(1+a^2)^n\le(2-a)^n+(1-a^2)^n\le(1+a^2)^n$$

4) Trong tất cả các nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x^2+y^2=16\\ z^2+t^2=9\\ xt+yz\ge 12\end{cases}$$

hãy tìm nghiệm (x, y, z, t) sao cho $x+z$ đạt giá trị lớn nhất.

5) Giải phương trình

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=2\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Viết bài này, chúng tôi muốn nhấn mạnh rằng với những kiến thức toán học có được và một chút tưởng tượng chúng ta có thể đưa ra nhiều kết luận thú vị về cuộc sống xung quanh. Dĩ nhiên các kết luận sau chưa chắc đã hoàn toàn đúng trong thực tế nhưng chúng rất cần cho chúng ta thư giãn sau những giờ làm việc căng thẳng.

Ta thử dùng bất đẳng thức Trê–bư–sep để nghiên cứu xu hướng hôn nhân trong xã hội.

BẤT ĐẲNG THỨC TRÊ–BƯ–SÉP VÀ XU HƯỚNG HÔN NHÂN

LÊ QUANG NẪM

(Khoa Toán – Tin học, ĐHKHTN, ĐHQG TP Hồ Chí Minh)

Bất đẳng thức Trê-bư-sep. Cho hai dãy số thực có thứ tự $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$

$$b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n. \qquad (*)$$

Khi đó ta có

$$\frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1}{n} \le$$

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}\right) \le$$

$$\le \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n}$$

Các bạn có thể tìm thấy chứng minh bất đẳng thức nổi tiếng này trong hầu hết các sách toán sơ cấp về bất đẳng thức.

Bây giờ chúng ta tưởng tượng thế này. Giả sử ở một nước **A** nào đó có n cô gái $G_1, G_2, \ldots, G_n$ với chiều cao tương ứng là $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và có n chàng trai $B_1, B_2, \ldots, B_n$ với chiều cao tương ứng là $b_1, b_2, \ldots, b_n$ thỏa mãn điều kiện (*). Khi hôn nhân xảy ra thì có rất nhiều cách ghép cặp (matching) các cô gái với các chàng trai. Tuy nhiên, điều này sẽ rất phức tạp cho các nghiên cứu. Do vậy ngoài cách ghép cặp ngẫu nhiên ta chỉ xét hai xu hướng ghép cặp cực đoan nhất.

Xu hướng tương ứng (Corresponding Trend, CR). *Thấp lấy thấp, cao lấy cao.*

Xu hướng bổ sung (Complementary Trend, CP). *Thấp nhiều lấy cao nhiều, thấp ít lấy cao ít.*

Bây giờ chúng ta sẽ xem mỗi xu hướng hôn nhân trên tác động tới chiều cao trung bình của xã hội như thế nào. Dĩ nhiên chiều cao này chẳng hề thay đổi nếu không có sự xuất hiện của các thế hệ con cái sau đó. Hơn nữa nếu cặp nào không có con cái thì ta không xét. Do vậy, không mất tổng quát, ta giả sử các cặp vợ chồng đều có con cả! Trong sinh học, chúng ta đã biết rằng cặp nhiễm sắc thể giới tính của người con gồm một nhiễm sắc thể giới tính của mẹ và một nhiễm sắc thể giới tính của cha. Do đó cũng thật có lý khi ta giả định rằng: nếu mẹ có chiều cao a và cha có chiều cao b thì các con của cặp vợ chồng này sẽ có chiều cao trung bình là αab (α là một hằng số tỉ lệ).

Trong nước **A** nói trên, chiều cao trung bình của các cô gái và các chàng trai tương ứng là $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ và $\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}$. Do vậy, khi hôn nhân ngẫu nhiên xảy ra, chiều cao trung bình của thế hệ con cái xấp xỉ khoảng

$$H_e = \alpha\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}\right)$$

Nếu hôn nhân xảy ra theo xu hướng tương ứng (CR), tức là cô G_1 lấy anh B_1, ..., cô G_n lấy anh B_n thì n cặp trên sẽ cho ra đời các đứa con có chiều cao lần lượt là $\alpha a_1b_1, \ldots, \alpha a_nb_n$. Bởi thế, chiều cao trung bình của thế hệ sau sẽ là $H_R = \alpha\left(\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n}\right)$.

Tương tự như vậy, nếu hôn nhân xảy ra theo xu hướng bổ sung (CP), tức là cô G_1 lấy anh B_n, ..., cô G_n lấy anh B_1 thì n cặp trên sẽ cho ra đời các đứa con có chiều cao lần lượt là $\alpha\, a_1b_n$, ..., $\alpha\, a_nb_1$. Bởi thế, chiều cao trung bình của thế hệ sau sẽ là

$$H_P = \alpha\left(\frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1}{n}\right).$$

Theo bất đẳng thức Trê–bư–sép, ta có

$$H_P \le H_e \le H_R.$$

Đến đây ta tạm kết luận :

Kết luận đầu tiên. *Hôn nhân theo xu hướng tương ứng sẽ cho ra đời các thế hệ sau có chiều cao trung bình lớn hơn hôn nhân ngẫu nhiên. Hôn nhân theo xu hướng bổ sung sẽ cho ra đời các thế hệ sau có chiều cao trung bình thấp hơn hôn nhân ngẫu nhiên.*

Như đã nói trên, hai xu hướng hôn nhân tuân thủ tuyệt đối cách ghép cặp kiểu (CR) và (CP) rất khó xảy ra ở bất cứ xã hội nào. Tuy nhiên, dựa vào thống kê, ta có thể đánh giá được xu hướng hôn nhân của một xã hội thiên về (CR) hay (CP). Hơn nữa, Luật số lớn trong xác suất thống kê khẳng định rằng, một xu hướng xảy ra với số lượng cá thể lớn trong một quần thể diễn tả xu hướng chung của quần thể đó. Vì thế, dựa vào những lập luận trên, ta có kết luận :

Kết luận 2. *Nếu một xã hội có chiều cao trung bình càng ngày càng tăng thì hôn nhân trong xã hội đó càng thiên về xu hướng tương ứng. Nếu một xã hội có chiều cao trung bình càng ngày càng giảm thì hôn nhân trong xã hội đó càng thiên về xu hướng bổ sung.*

Theo các tài liệu công bố gần đây, sau 70 năm từ 1930 đến 2000, chiều cao trung bình của người Việt Nam tăng rất ít, còn chiều cao trung bình của người Nhật tăng 15cm. Nếu bỏ qua các điều kiện khác như chế độ dinh dưỡng, môi trường sống, ... có thể tạm kết luận :

Kết luận 3. *Hôn nhân ở nước ta thiên về xu hướng bổ sung. Hôn nhân ở nước Nhật thiên về xu hướng tương ứng.*

Hiện nay, ở mỗi nước trên thế giới, tỉ lệ giữa nam và nữ cũng như chiều cao trung bình của hai phái gần bằng nhau. Do đó nếu hôn nhân xảy ra theo xu hướng (CR) thì một cô gái sẽ lấy được một chàng trai có chiều cao bằng mình hay cao thấp hơn chút đỉnh. Hơn nữa, xu hướng (CR) làm cho loài người ngày càng phát triển và cao lên. Do đó có thể dẫn đến kết luận tiếp theo là

Kết luận 4. *Về mặt xã hội, lấy người cao gần bằng mình là tốt nhất.*

Dĩ nhiên, khi đưa ra các kết luận trên, ta đã bỏ qua rất nhiều các yếu tố chi phối chiều cao của đứa trẻ cũng như tỉ lệ người trẻ và người già trong xã hội.

PROBLEMS *(Tiếp trang 15)*

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/334. Let be given n distinct positive numbers ($n \ge 4$). Prove that among them there are at least two numbers such that their sum and their difference do not coincide with any number of n-2 other given nubers.

T9/334. Prove that the sum $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k}$ has a finite limit when n tends to infinity and find this limit (C_n^k are binomial coefficients).

T10/334. Find the least value of the sum

$$P = \mathrm{tg}^2x.\mathrm{tg}^2y + \mathrm{tg}^2y.\mathrm{tg}^2z + \mathrm{tg}^2z.\mathrm{tg}^2x$$

where x, y, z are positive numbers satisfying the conditions :

$$x+y+z = \frac{\pi}{2};\ \cos(x-z) \le \frac{7}{5}\sin y;\ \cos(x-y) \ge 3\sin z$$

T11/334. Let d_a, d_b, d_c be the lengths of the inner angle bisectors of triangle ABC issued respectively from the vertices A, B, C. Let p be the semi-perimeter of ΔABC. Prove that

$$d_a.\cos(A/2) + d_b.\cos(B/2) + d_c\cos(C/2) \ge$$
$$\ge p(\cos A + \cos B + \cos C)$$

T12/334. Let ABC be a triangle right at A ; let M be the midpoint of BC. On the line d passing through M perpendicular to the plane (ABC), take a point S distinct from M. The plane (Q) containing BC, perpendicullar to the plane (SAB), cuts the line SA at D. Determine the position of S on the line d so that the volume of the tetraheron $ABCD$ attains its greatest value.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/334. (Lớp 6). Tính tổng S gồm 23 số hạng :

$$S = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + ... + \frac{1}{(n-1)n(n+1)} + ... + \frac{1}{23.24.25}$$

ĐẶNG NHƯ TUẤN
(SV K48, A1S, ĐHKHTN Hà Nội)

Bài T2/334. (Lớp 7). Cho tam giác ABC với góc A không vuông và góc B khác 135°. Gọi M là trung điểm của BC. Về phía ngoài ΔABC vẽ tam giác ABD vuông cân đáy AB. Đường thẳng qua A vuông góc với AB và đường thẳng qua C song song với MD cắt nhau tại E. Đường thẳng AB cắt CE tại P và cắt DM tại Q. Chứng minh rằng Q là trung điểm của BP.

NGUYỄN PHƯỚC
(GV THCS Hương Long, Thừa Thiên - Huế)

Bài T3/334. Tìm số tự nhiên lẻ n nhỏ nhất sao cho n^2 biểu diễn được thành tổng của một số lẻ các số chính phương liên tiếp.

NGUYỄN DUY LIÊN
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T4/334. Tìm các số dương a_1, a_2, a_3, a_4 thỏa mãn các điều kiện :

$$\frac{a_1^2}{a_2+a_3} + \frac{a_2^2}{a_3+a_4} + \frac{a_3^2}{a_4+a_1} + \frac{a_4^2}{a_1+a_2} = 1$$

và $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \geq 1$.

PHẠM VIỆT HẢI
(SV K 49 khoa Toán, ĐH KHTN Hà Nội)

Bài T5/334. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{a^2}{a^2+(b+c)^2} + \frac{b^2}{b^2+(c+a)^2} + \frac{c^2}{c^2+(a+b)^2}$$

trong đó a, b, c là các số thực khác 0.

HUỲNH LÂM LINH
(SV Toán 2003 ĐHSP TP Hồ Chí Minh)

Bài T6/334. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường thẳng qua A vuông góc với IA cắt các đường thẳng DE, DF tương ứng tại M, N. Đường thẳng qua B vuông góc với IB cắt các đường thẳng EF, ED tương ứng tại P, Q. Đường thẳng qua C vuông góc với IC cắt các đường thẳng FD, FE tương ứng tại S, T. Chứng minh rằng

$$MN + PQ + ST \geq AB + BC + CA.$$

ĐÀO QUỐC DŨNG
(GV THPT DTNT Quỳ Hợp, Nghệ An)

Bài T7/334. Cho tam giác ABC vuông cân đáy BC. Tìm quỹ tích những điểm M thỏa mãn điều kiện : $MB^2 - MC^2 = 2MA^2$.

VŨ HỮU BÌNH
(GV Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T8/334. Cho n số dương khác nhau ($n \geq 4$). Chứng minh rằng bao giờ cũng chọn được ít nhất hai số sao cho tổng và hiệu của chúng không trùng với số nào trong $n - 2$ số còn lại.

TRẦN TUẤN ANH
(Khoa Toán – Tin, ĐHKHTN TP Hồ Chí Minh)

Bài T9/334. Chứng minh rằng tổng

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k}$$

(trong đó C_n^k là tổ hợp chập k của n) có giới hạn khi n tăng lên vô hạn và tìm giới hạn đó.

NGUYỄN VĂN HIỀN
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đông Hà, Quảng Trị).

Bài T10/334. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng :

$$P = \text{tg}^2x.\text{tg}^2y + \text{tg}^2y.\text{tg}^2z + \text{tg}^2z.\text{tg}^2x$$

trong đó x, y, z là ba số dương thỏa mãn các điều kiện :

$$x+y+z = \frac{\pi}{2}\ ;\ \cos(x-z) \leq \frac{7}{5}\sin y\ ;\ \cos(x-y) \geq 3\sin z$$

TRIỆU VĂN HƯNG
(GV THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, Hưng Yên)

Bài T11/334. Gọi d_a, d_b, d_c lần lượt là độ dài các đường phân giác trong xuất phát từ các đỉnh

A, B, C của tam giác ABC và p là nửa chu vi tam giác đó. Chứng minh rằng :

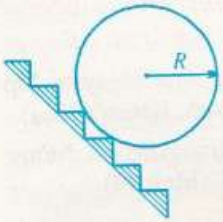
$$d_a.\cos(A/2) + d_b.\cos(B/2) + d_c\cos(C/2) \geq$$
$$\geq p(\cos A + \cos B + \cos C)$$

TRẦN QUANG VINH
(SV K27C khoa Toán, ĐHSP TP Hồ Chí Minh)

Bài T12/334. Cho tam giác ABC vuông ở A và M là trung điểm của BC. Trên đường thẳng d qua M vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm S (S khác M). Mặt phẳng (Q) qua BC vuông góc với mặt phẳng (SAB), cắt SA tại D. Hãy xác định vị trí của điểm S trên đường thẳng d sao cho tứ diện $ABCD$ có thể tích lớn nhất.

TRẦN TUYẾT THANH
(GV Học viện Phòng không Không quân, Sơn Tây, Hà Tây)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

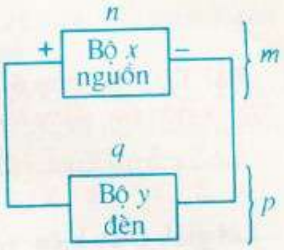


Bài L1/234. Một quả cầu bán kính R lăn trên một cầu thang, bề rộng và chiều cao của các bậc thang đều bằng a (hình vẽ). Va chạm của quả cầu với các bậc thang là không đàn hồi. Quả cầu sẽ đạt được vận tốc lớn nhất bằng bao nhiêu khi chiều dài cầu thang là đủ lớn.

Biết a khá nhỏ so với R và bỏ qua ma sát.

NGUYỄN XUÂN QUANG
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài L2/334. Một bộ nguồn gồm $x = 16$ nguồn điện được mắc thành m dãy song song, mỗi dãy có n nguồn mắc nối tiếp. Suất điện động của mỗi nguồn là $E_1 = 12V$ và điện trở trong $r_1 = 2\Omega$. Dùng bộ nguồn này để cung cấp điện cho một bộ đèn gồm $y = 12$ đèn được mắc thành p dãy song song, mỗi dãy có q đèn mắc nối tiếp. Trên mỗi đèn có ghi 9V-18W. Hãy chỉ ra :



a) Các cách mắc nguồn (tìm m, n) và các cách mắc bóng đèn tương ứng (tìm p, q) để các đèn sáng bình thường.

b) Hiệu suất của bộ nguồn không đổi đối với các cách mắc trên.

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/334. (for 6th grade)

Calculate the following sum S (consisting of 23 terms)

$$S = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n(n+1)} + \ldots + \frac{1}{23.24.25}$$

T2/334. (for 7th grade)

Let ABC be a triangle with $\widehat{A} \neq 90^\circ$, $\widehat{B} \neq 135^\circ$. Let M be the midpoint of BC. At the outside of ΔABC, construct the isosceles, right triangle ABD with base AB. The line passing through A perpendicular to AB and the line passing through C parallel to MD intersect at E. The line AB cuts CE at P and cuts DM at Q. Prove that Q is the midpoint of BP.

T3/334. Find the least odd natural number n such that n^2 is a sum of an odd number of perfect squares.

T4/334. Find postitive numbers a_1, a_2, a_3, a_4 satisfying the following conditions :

$$\frac{a_1^2}{a_2+a_3} + \frac{a_2^2}{a_3+a_4} + \frac{a_3^2}{a_4+a_1} + \frac{a_4^2}{a_1+a_2} = 1,$$

and $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \geq 1$.

T5/334. Find the least value of the expression

$$T = \frac{a^2}{a^2+(b+c)^2} + \frac{b^2}{b^2+(c+a)^2} + \frac{c^2}{c^2+(a+b)^2},$$

where a, b, c are real numbers ($abc \neq 0$).

T6/334. The incircle with center I of triangle ABC touches the sides BC, CA, AB respectively at D, E, F. The line passing through A perpendicular to IA cuts the lines DE, DF respectively at M, N. The line passing through B perpendicular to IB cuts the lines EF, ED respectively at P, Q. The line passing though C perpendicular to IC cuts the line FD, FE respectively at S, T. Prove that

$$MN + PQ + ST \geq AB + BC + CA.$$

T7/334. Let be given an isosceles, right triangle ABC with base BC. Find the locus of points M satisfying the condition $MB^2 - MC^2 = 2MA^2$.

(Xem tiếp trang 13)

Bài T1/330. (Lớp 6). *Tìm các số nguyên x, y, z thỏa mãn các đẳng thức :*

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} = \frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z} = x+y+z = 3.$$

Lời giải. Điều kiện $x, y, z \neq 0$.

Từ giả thiết ta có

$$\frac{x+y+z}{y}+\frac{x+y+z}{z}+\frac{x+y+z}{x}=9,$$

mà $x+y+z=3$ nên ta được $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=3$ (1).

Để ý rằng, nếu x là một số nguyên (dương hoặc âm) ta đều có $\frac{1}{x} \leq 1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Cũng tương tự : $\frac{1}{y} \leq 1$, $\frac{1}{z} \leq 1$.

Do đó $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\leq 3$ (2). Từ (1) và (2), dễ dàng suy ra $x = y = z = 1$.

Nhận xét. 1. Số đông các bạn có lời giải như trên và cách giải này đã sử dụng tất cả các giả thiết của bài toán.

Ta có thể giải bài toán bằng cách khác mà không cần đến giả thiết x, y, z là các số nguyên, tuy nhiên biến đổi không dễ dàng. Tóm tắt như sau :

Từ giả thiết $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}$ suy ra

$$x^2z+y^2x+z^2y-y^2z-z^2x-x^2y=0$$

Biến đổi thành $(x-y)(y-z)(z-x)=0$.

Nếu $x = y$: thay vào giả thiết ta được

$$\frac{x}{z}+\frac{z}{x}=2 \Rightarrow (x-z)^2=0 \Rightarrow x=y=z \quad (3).$$

Nếu y = z hoặc z = x : kết quả tương tự.

Từ (3) và $x+y+z=3$ suy ra $x=y=z=1$.

2. Các bạn sau đây có bài giải tốt:

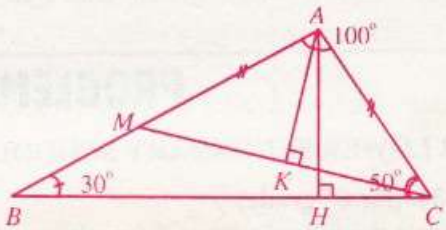
Hà Nội: Phạm Minh Trang, 6B, Hà Nội – Amsterdam; Vũ Minh Đức, Lê Quang Huy, 6H1, THCS Trưng Vương, Hoàn Kiếm ; **Vĩnh Phúc:** Đỗ Quyền Quý, 6A, THCS Lập Thạch, Lập Thạch ; Kim Anh Tùng, Nguyễn Thùy Dung, Lê Thị Tuyết Mai, Nguyễn Thị Giang A, Nguyễn Văn Phương, Phùng Anh Quất, Nguyễn Thị Kim Tuyến, Hoàng Thị Yến, 6A1, Nguyễn Trung Đức, 6I, THCS Yên Lạc ; **Nghệ An:** Vũ Đình Long, 6A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nguyễn Đức Thế, 6A, THCS Quán Hành, Nghi Lộc ; **Yên Bái:** Bùi Thị Thu Trang, 6G, THCS Lê Hồng Phong, TP Yên Bái ; **Phú Thọ:** Nguyễn Anh Phương, 6A, THCS Đoan Hùng, H. Đoan Hùng; Phạm Mai Phương, 6B, THCS Phong Châu, TX Phú Thọ; **Lâm Đồng:** Tạ Minh Đức Toàn, 6A, THCS Lê Lợi, Di Linh ; **Bắc Giang:** Ngô Văn Bắc 6D, THCS Thị Trấn Cao Thượng, Tân Yên ; **Hà Tây:** Trần Thị Quỳnh Châu, 6B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa ; **Khánh Hòa:** Trần Thị Ánh Nguyên, 6^7, THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Thanh Hóa:** Lê Văn Tuấn Đạt, 6A, THCS Cao Bá Quát, Bỉm Sơn; Lê Ngọc Tư, Trịnh Quang Dũng, 6A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc ; **Nam Định:** Nguyễn Ngọc Linh, 6C, THCS Đào Sư Tích, TT Cổ Lễ, Trực Ninh.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T2/330. (Lớp 7). *Tam giác ABC có $\widehat{ACB} = 50^o$, $\widehat{BAC} = 100^o$. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho AM = AC. Hãy so sánh CM và AB.*

Lời giải. (Của bạn *Trần Thị Ánh Nguyên*, lớp 6/7, THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh, **Khánh Hòa**).

Kẻ đường cao AH của tam giác ABC và đường cao AK của tam giác cân AMC (hình vẽ).



ΔABH vuông, có $\widehat{B} = 30^o$ nên $AH = \frac{1}{2}AB$ (1)

ΔAMC cân tại A nên AK là đường phân giác và đường trung tuyến, do đó $\widehat{CAK} = 50^o$, $CK = \frac{1}{2}CM$ (2). Hai tam giác vuông AHC và CKA có AC là cạnh chung, $\widehat{ACH}=\widehat{CAK} = 50^o$, do đó $\Delta AHC = \Delta CKA \Rightarrow AH = CK$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $AB = CM$.

Nhận xét. 1) Bài toán này có rất đông bạn tham gia giải và đều cho lời giải đúng. Hầu hết các bạn dùng phương pháp vẽ thêm hình phụ : Vẽ tam giác đều ABD sao cho D và C thuộc cùng nửa mặt phẳng bờ AB rồi chứng minh $\Delta AMC = \Delta CAD$.

2) Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn hoặc có nhiều cách giải :

Phú Thọ: *Tạ Hồng Hà*, 7A3, THCS Lâm Thao, huyện Lâm Thao , *Phạm Mai Phương*, 6B, THCS Phong Châu, TX Phú Thọ ; **Vĩnh Phúc :** *Vũ Doãn Tảo, Vũ Trung Đức*, 7A, THCS Lập Thạch ; Thị trấn Lập Thạch, *Nguyễn Thùy Dung*, 6A1, THCS Yên Lạc ; **Hà Tây:** *Bùi Thái Thông*, 6B, THCS Kiều Phú, Quốc Oai ; **Hải Dương :** *Nguyễn Văn Tuấn*, 7/1, THCS Hợp Tiến, Nam Sách ; **Nam Định:** *Nguyễn Văn Tín*, 7B, THCS Đào Sư Tích, Trực Ninh ; **Thanh Hóa:** *Lê Thị Quỳnh Nga*, 7B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, *Nguyễn Hữu Thương Hải*, 7B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn ; **Nghệ An :** *Dương Hoàng Hưng*, 7B, THCS Lí Nhật Quang, Đô Lương ; **Quảng Ngãi :** *Lương Thị Yến Anh*, 7C, THCS Huỳnh Thúc Kháng, Nghĩa Hành ; **Phú Yên :** *Nguyễn Vũ Minh*, 7E, THCS Hoàng Văn Thụ, Sông Cầu ; **Lâm Đồng :** *Tạ Minh Đức Toàn*, 6A, THCS Lê Lợi, Di Linh ; **Tiền Giang :** *Nguyễn Minh Hiếu*, 6/4, THCS Đăng Hữu Phước, Chợ Gạo.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/330. *Tìm tất cả nghiệm nguyên dương của phương trình*

$$x^y + y^z + z^x = 2(x+y+z) \qquad (1)$$

Lời giải. Xét hai trường hợp sau :

a) Nếu ba số x, y, z đều không nhỏ hơn 2 thì $x^y + y^z + z^x \geq x^2 + y^2 + z^2 \geq 2x + 2y + 2z = 2(x+y+z)$

Đẳng thức xảy ra chỉ khi $x = y = z = 2$.

b) Tồn tại ít nhất một số nhỏ hơn 2, chẳng hạn là $z = 1$ (khi cho $x = 1$ hoặc $y = 1$ ta có các nghiệm khác).

Lúc đó PT (1) trở thành

$$x^y = 2x + y + 1 \qquad (2)$$

• Nếu có ít nhất một số nhỏ hơn 4 :

Với $y = 2$ thì $x = 3$ và khi $x = 3$ thì $y = 2$.

Với $y = 3$ thì $x = 2$ và khi $x = 2$ thì $y = 3$.

• Nếu cả hai số x, y đều không nhỏ hơn 4 :

Từ $(x-4)(y-4) \geq 0$ suy ra

$$xy \geq 2x+2y+2(x+y-8) \geq 2x + 2y > 2x+y+1 \qquad (3)$$

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng $x^y > xy$ (4) thì từ (3), (4) suy ra $x^y > 2x+y+1$, nghĩa là PT (2) vô nghiệm với $x \geq 4$, $y \geq 4$.

Với $y = 4$ thì từ $x^4 = x.x^3 > 4x$ nên (4) đúng. Giả sử (4) đúng với mọi $y = k \geq 4$. Ta có $x^{k+1} = x.x^k > x.x.k \geq x.4k = x(k+3k) > x(k+1)$ nghĩa là (4) cũng đúng với $k+1$. Vậy theo quy nạp thì (4) đúng với mọi $x \geq 4$, $y \geq 4$.

Tóm lại PT (1) có nghiệm (x, y, z) là (2, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).

Nhận xét. 1) Khá nhiều bạn viết sai rằng : "vai trò của x, y, z như nhau nên giả sử được $x \geq y \geq z$". Vai trò của x, y, z ở đây chỉ là hoán vị vòng quanh nhưng không bình đẳng. Một số bạn khác giải thiếu nghiệm.

2) Các bạn sau có lời giải đúng :

Phú Thọ: *Đào Đức Trung*, 9A3, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, *Nguyễn Sơn Tùng*, 9B, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông ; **Hà Nội :** *Tô Việt Anh*, 9A1, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa ; **Bắc Ninh :** *Lê Thế Tài*, 9B, THCS Từ Sơn ; **Hưng Yên :** *Lương Xuân Huy*, 8A, THCS Tiên Lữ ; **Nam Định :** *Cao Mạnh Hùng*, 9A, THCS Yên Định, Hải Hậu, *Trần Quang Anh*, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, TP Nam Định ; **Thanh Hóa :** *Trịnh Hùng Linh*, 9C1, THCS Lê Thánh Tông, Thọ Xuân ; **Thừa Thiên – Huế :** *Nguyễn Vũ Thanh Long*, 9/1, THCS Chu Văn An, TP Huế ; **Quảng Nam :** *Phan Thị Thu Trang*, 9/4, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Điện Bàn ; **Khánh Hòa:** *Võ Thái Thông*, 9/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

VIỆT HẢI

Bài T4/330. *Giải phương trình*

$$\sqrt{\sqrt{3}-x} = x\sqrt{\sqrt{3}+x}$$

Lời giải. (Của bạn *Nguyễn Tiến Thanh*, 9C, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, **Phú Thọ**).

Điều kiện : $\begin{cases} \sqrt{3}-x \geq 0 \\ x \geq 0 \\ \sqrt{3}+x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \sqrt{3}$.

Khi đó phương trình đã cho tương đương với:

$$\sqrt{3}-x = x^2(\sqrt{3}+x) \Leftrightarrow x^3 + \sqrt{3}x^2 + x - \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3.x^2.\frac{1}{\sqrt{3}} + 3x\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3$$

$$= \sqrt{3} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{10}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt[3]{10}-1}{\sqrt{3}}$$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là : $x = \dfrac{\sqrt[3]{10}-1}{\sqrt{3}}$

Nhận xét. 1) Hầu hết các bạn tham gia đều giải tương tự như trên và ra đúng kết quả. Bạn *Nguyễn Tiến Thanh* đã đưa ra các nhận xét đúng là :

Từ cách giải trên, ta có ngay cách giải cho bài toán tổng quát hơn như sau :

"Giải phương trình $\sqrt{bx+c} = x\sqrt{px+q}$ trong đó $b, c, p, q \in R$ và $q^2 = -3pb$ (1)"

Bài T4/330 ứng với trường hợp $p = 1$; $c = q = \sqrt{3}$ và $b = -1$.

2) Các bạn có lời giải gọn gàng là : **Phú Thọ:** *Nguyễn Sơn Tùng*, 9B, *Nguyễn Tiến Thanh*, *Nguyễn Ngọc Hải*, 9C, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông ; **Bắc Ninh :** *Ngô Sơn Tùng*, 9A3, THCS Nguyễn Đăng Đạo, TX Bắc Ninh ; **Vĩnh Phúc:** *Phạm Lê Quang*, 9A4, THCS Hai Bà Trưng, TX Phú Yên ; **Nghệ An :** *Lê Tuấn Hiệp*, 8C, THCS Thái Sơn, Đô Lương ; **Hà Tĩnh :** *Nguyễn Thành Trung*, 9D, THCS Thị trấn Kỳ Anh ; **Bạc Liêu :** *Trần Mỹ Linh*, 9/1, THCS Trần Huỳnh, TX Bạc Liêu ; **Hà Nội:** *Bùi Huy Hoàng*, 9E, Trường Hà Nội – Amsterdam.

TRẦN HỮU NAM

Bài T5/330. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc}+\frac{a^2+b^2}{c^2+ab}+\frac{b^2+c^2}{a^2+bc}+\frac{c^2+a^2}{b^2+ac}\geq\frac{9}{2}$$

trong đó a, b, c là các số thực dương.

Lời giải. (Của *Ngô Sơn Tùng*, 9A3, THCS Nguyễn Đăng Đạo, TX Bắc Ninh, **Bắc Ninh**). Gọi vế trái của BĐT cần chứng minh là A, ta có:

$$A=\frac{a^2}{2bc}+\frac{b^2}{2ac}+\frac{c^2}{2ab}+\frac{a^2+b^2}{c^2+ab}+\frac{b^2+c^2}{a^2+bc}+\frac{c^2+a^2}{b^2+ac}$$

$$=\frac{a^2+bc}{2bc}+\frac{b^2+c^2}{a^2+bc}+\frac{b^2+ac}{2ac}+\frac{c^2+a^2}{b^2+ac}+$$

$$\frac{c^2+ab}{2ab}+\frac{a^2+b^2}{c^2+ab}-\frac{3}{2}$$

Áp dụng BĐT $X^2+Y^2\geq 2XY$ ta có :

$$A\geq\left(\frac{a^2+bc}{2bc}+\frac{2bc}{a^2+bc}\right)+\left(\frac{b^2+ac}{2ac}+\frac{2ac}{b^2+ac}\right)+$$

$$+\left(\frac{c^2+ab}{2ab}+\frac{2ab}{c^2+ab}\right)-\frac{3}{2}$$

Áp dụng BĐT Cô–si cho các cặp số trong các dấu ngoặc đơn ta có :

$$A\geq 2+2+2-\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Nhận xét. Tòa soạn đã nhận được 160 bài giải đúng, trong đó có nhiều cách giải khác nhau. Sau đây là các bạn có lời giải tốt : *Trần Trọng Trâm Anh* và *Phạm Thu Hằng*, 7A9, THCS Nguyễn Trãi, TP. Long Xuyên, **An Giang** ; *Phạm Thu Hằng*, 9B, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Bảo, **Hải Phòng** ; *Trịnh Thị Quỳnh Như*, 8C1, THCS Nguyễn Nghiêm, TX Quảng Ngãi, **Quảng Ngãi**, *Nguyễn Vũ Thanh Long*, 9/1, THCS Chu Văn An, **TP Huế**, *Tô Việt Anh*, 9A1, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa, **Hà Nội** ; *Trần Mỹ Linh*, 9/1 THCS Trần Huỳnh, TX Bạc Liêu, **Bạc Liêu** , *Kiều Minh Quân*, 9A, THCS Nguyễn Dũ, **TP Yên Bái** ; *Nguyễn Đức Việt*, 9A1, *Vũ Ngọc Bích*, 8A1, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Lê Tiến Thắng*, 9C, THCS Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc** ; *Phạm Ngọc Trâm*, 9A, THCS Thái Phú, Thái Thụy, **Thái Bình**; *Đinh Ngọc Thái*, 9A8, THCS Vũng Tàu, TP **Vũng Tàu** ; *Khuất Văn Phiến*, 9D, THCS Thạch Thất, **Hà Tây**; *Nguyễn Xuân Đạt*, 9A6, THCS Vân Đồn, **TP. Hồ Chí Minh** ; *Phạm Tiến Duật*, 9B, THCS Trần Huy Liệu, Vụ Bản, **Nam Định** ; *Phạm Thị Thùy Dung*, 9A, THCS Đại Đức, Kim Thành, **Hải Dương** ; *Trương Xuân Nhã*, 9A, THCS Nguyễn Huệ, Đông Hà, **Quảng Trị** ; *Nguyễn Lưu Bách*, 9C, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, **Thanh Hóa**; *Đinh Đắc Linh*, 9D, THCS 49, Krông Năng, **Đắc Lắc** ; *Nguyễn Thành Trung*, 9D, THCS TT Kì Anh, **Hà Tĩnh**; *Lê Tuấn Hiệp*, 8C, THCS Thái Sơn, Đô Lương, **Nghệ An**.

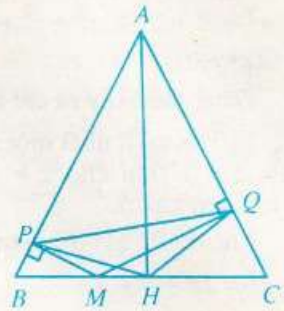
PHAN DOÃN THOẠI

Bài T6/330. *Cho tam giác ABC có AB = AC. Từ điểm M trên BC kẻ MP ⊥ AB và MQ ⊥ AC sao cho P, Q lần lượt nằm trên các đường thẳng AB, AC. Chứng minh rằng đường trung trực của PQ luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên cạnh BC.*

Lời giải. Vẽ $AH\perp BC$ thì H là trung điểm của BC và AH đồng thời là phân giác của góc $\widehat{BAC}$. Ta có ba điểm H, P, Q nằm trên đường tròn đường kính AM.

• Nếu Q nằm trong đoạn AC (hình 1). Ta có $\widehat{BAH}=\widehat{HAP}$, $\widehat{CAH}=\widehat{HAQ}$ (1)

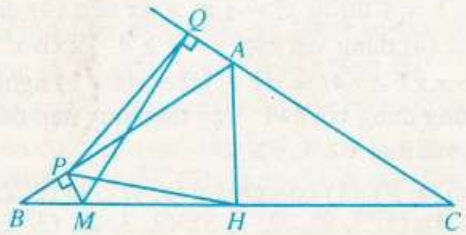
Tứ giác $APHQ$ nội tiếp nên $\widehat{HAP}=\widehat{HQP}$, $\widehat{HAQ}=\widehat{HPQ}$ (2)



Hình 1

Từ (1), (2) và kết hợp với $\widehat{BAH}=\widehat{CAH}$ có $\widehat{HPQ}=\widehat{HQP}$ tức ΔHPQ cân tại H. Do đó $HP=HQ$. Vậy H thuộc đường trung trực của đoạn PQ.

• Nếu Q nằm ngoài đoạn AC (hình 2) vẫn có kết quả như vậy. Trong chứng minh trên chỉ khác $\widehat{CAH}+\widehat{HAQ}=180^o$ (1') $\widehat{HAQ}+\widehat{HPQ}=180^o$ (2')



Hình 2

• Trong trường hợp P nằm ngoài đoạn AB chứng minh tương tự. Khi $M \equiv B$ hoặc $M \equiv C$ kết quả khá hiển nhiên. Vậy khi M di động trên cạnh BC của ΔABC thì đường trung trực của đoạn PQ luôn đi qua điểm H cố định (chân đường cao kẻ từ đỉnh A của ΔABC).

Nhận xét. 1. Một số bạn còn xét trường hợp M nằm ngoài cạnh BC vẫn cho kết quả đúng.

2. Các bạn sau có lời giải tốt :

Phú Thọ : *Đào Đức Trung*, 9A3, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, *Nguyễn Tiến Thanh*, 9C, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông ; **Hà Nội** : *Đỗ Như Mi Lan*, 8A1, Chu Văn An ; **Nam Định** : *Trần Quang Anh*, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh; **Thanh Hóa** : *Trịnh Hùng Linh*, 9C, THCS Lê Thánh Tông, Thọ Xuân ; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thành Trung*, 9D, THCS TT Kỳ Anh, *Bùi Hoàng Đan*, 9/4, THCS Lê Văn Thiêm, TX Hà Tĩnh ; **Thừa Thiên – Huế** : *Nguyễn Vũ Thanh Long*, 9/1, THCS Chu Văn An, Huế ; **Quảng Ngãi** : *Lê Tiến Hảo*, 8B, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, *Võ Thị Ánh Thùy*, 9A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành ; **Khánh Hòa** : *Võ Thái Thông*, 9/4 Trường Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

VŨ KIM THỦY

Bài T7/330. *Cho tam giác ABC với đường cao AH (H khác B, C). Kẻ HE//AC và HM⊥AB sao cho E, M nằm trên đường thẳng AB. Kẻ HF//AB và HN ⊥ AC sao cho F, N nằm trên đường thẳng AC. Chứng minh rằng ba đường thẳng EF, MN và BC đồng quy.*

Lời giải. (Dựa theo *Vũ Duy Thành*, 9C, THCS Đào Sư Tích, Trực Ninh, **Nam Định**).

Chúng ta xét trường hợp *H thuộc đoạn BC*, trường hợp *H nằm ngoài đoạn BC*, phép chứng minh hoàn toàn tương tự. Gọi I là giao điểm của EF và BC, áp dụng định lí Ta–let trong ΔIFC với $EH//FC$ ta có $\dfrac{IH}{IC}=\dfrac{HE}{CF}$ (1)

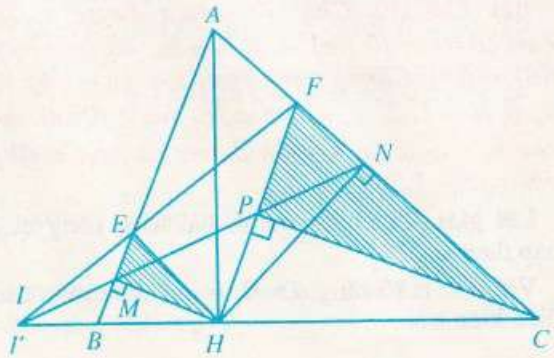
Giả sử I' là giao điểm của MN với BC, P là giao điểm của FH và MN, khi đó $\widehat{ABH}=\widehat{FHC}$ (cặp góc đồng vị). Mà $\widehat{ABH}=\widehat{MHA}=\widehat{MNA}$ nên $\widehat{FHC}=\widehat{MNA}$ suy ra bốn điểm H, P, N, C cùng nằm trên một đường tròn. Từ giả thiết $\widehat{HNC}=90^o$ ta thấy $\widehat{HPC}=90^o$, hay $CP \perp HF$, lại vì $MH \perp AB$, $HF//AB$ do đó $CP//MH$, dẫn tới

$$\frac{I'H}{I'C}=\frac{MH}{CP} \qquad (2)$$

Nhận xét rằng $\Delta EMH \backsim \Delta FPC$ ta đi đến

$$\frac{MH}{CP}=\frac{HE}{CF} \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) thu được $\dfrac{IH}{IC}=\dfrac{I'H}{I'C} \Rightarrow I \equiv I'$, nói cách khác ba đường thẳng EF, MN và BC đồng quy (đpcm).



Nhận xét. 1) Rất nhiều bài gửi về TS đều giải theo hướng sử dụng định lí Mê–nê–la–uýt thuận cho ΔABC với cát tuyến (IMN) (I là giao điểm của MN với BC) tiếp. theo sử dụng định lí Mê–nê–la–uýt đảo cho tam giác đó để suy ra I, E, F thẳng hàng. Một số bạn nhận xét đúng là đề bài phải thêm giả thiết *ΔABC không cân tại A* lúc đó mới tồn tại điểm đồng quy của ba đường thẳng EF, MN và BC. Một số bạn khác đã nhận ra kết quả bài toán này tương tự như kết quả bài T11/330.

2) Sau đây là danh sách các bạn có lời giải gọn :

Hà Nội : *Bùi Huy Hoàng*, 9E, THPT Hà Nội – Amsterdam, Đỗ Như Milan, 8A1, THCS Chu Văn An, *Hoàng Minh Trí*, 9A, THCS Kim Liên ; **Vĩnh Phúc** : *Hoàng Anh Sơn*, 9A, THCS Yên Lạc, Yên Lạc ; **Phú Thọ** : *Nguyễn Tiến Thanh*, 9C, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông ; **Bắc Ninh** : *Lê Thế Tài*, 9B, THCS Huyện Từ Sơn ; **Hà Tây** : *Trần Ngọc Thúy*, 8B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa ; **Thanh Hóa:** *Hoàng Đức Ý*, 9E, THCS Trần Mai Ninh, TP Thanh Hóa, *Lê Thị Dung*, *Nguyễn Thị Quý*, 9D, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn ; **Nghệ An** : *Lê Tuấn Hiệp*, 8C, THCS Thái Sơn, Đô Lương, *Võ Hoàng Nga*, 6A, THCS Hermann Gmeiner, TP Vinh ; **Hà Tĩnh** : *Bùi Hoàng Đan*, 9/4, THCS Lê Văn Thiêm, TX Hà Tĩnh ; **Đà Nẵng** : *Nguyễn Như Đức Trung*, 9/1, THCS Lý Thường Kiệt, Q. Hải Châu ; **Bạc Liêu:** *Trần Mỹ Linh*, 9/1, THCS Trần Huỳnh, TX Bạc Liêu ; **TP Hồ Chí Minh** : *Trần Duy Minh Tâm*, 9[1], THCS Hồng Bàng, Q. 5.

HỒ QUANG VINH

✳ **Bài T8/330.** *Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = x^{y^z}$ trong đó x, y, z là các số nguyên lớn hơn 2 và thỏa mãn $x + y + z = 20$.*

Lời giải. (Dựa trên ý của bạn *Trịnh Ngọc Tú*, 10 Toán, THPT Nguyễn Huệ, **Hà Tây** và bạn *Bùi Khắc Kiên*, 11, THPT Lam Sơn, **Thanh Hóa**).

a) Tìm giá trị nhỏ nhất.

Ta chứng minh $x^{y^z} \geq 14^{3^3} \Leftrightarrow y^z \ln x \geq 27\ln 14$

Nếu $y \geq 5$ thì $y^z\ln x \geq 5^3\ln 3 > 125 > 27\ln 14$

Nếu $y = 4$, $z \geq 4$ thì $y^z\ln x \geq 4^4\ln 3 > 256 > 27\ln 14$

Nếu $y = 4$, $z = 3$ thì $x = 13$ và $y^3\ln x = 4^3\ln 13 = 64.\ln 13 > 27\ln 14$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P *là* 14^{3^3}.

b) *Tìm giá trị lớn nhất* : Ta có nhận xét

$y^z\ln x \leq y^{17-y}\ln 3$.

Thật vậy, với $x = 3$ thì có dấu bằng. Với $x \geq 4$ ta có $y^z \ln x \leq y^{16-y}\ln x = y^{17-y}\ln 3.\dfrac{\ln x}{y.\ln 3} < y^{17-y}\ln 3$ (vì $\dfrac{\ln x}{y\ln 3} \leq \dfrac{\ln 14}{3} < 1$ do $x \leq 14$).

Vậy $P \leq 3^{y^{17-y}}$.

Xét hàm số $f(y) = y^{17-y}$ với $y \in [3; 14]$. Có $\ln f(y) = (17-y)\ln y$.

Đặt $g(y) = \ln f(y)$ ta có $g'(y) = \dfrac{17-y-y\ln y}{y}$

Dễ thấy $g'(y) < 0$ với $y \geq 7$, $g'(y) > 0$ với $y \leq 6$.

Lại có $g(6) > g(7)$, do đó giá trị lớn nhất của $g(y)$ trên đoạn $[3; 14]$ đạt tại $y = 6$. Giá trị lớn nhất của $f(y)$ là $f(0) = 6^{11}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $3^{6^{11}}$.

Nhận xét. Đa số các bạn gửi lời giải cho kết quả đúng. Ngoài hai bạn trên các bạn sau đây có lời giải tốt :

Vương Hồng Quang, 11 THPT Hải Hậu, **Nam Định** ; *Nguyễn Quang Huy*, 11A1, THPT Hùng Vương, **Phú Thọ** ; *Trương Ngọc Sơn*, 10T, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương**, *Vũ Văn Tân*, 10T, THPT Lam Sơn, **Thanh Hóa** ; *Nguyễn Thế Nam*, 12 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, *Đỗ Việt Kiên*, 11A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc** ; *Hoàng Minh Tuấn*, 11A, THPT chuyên **Bắc Giang** ; *Nguyễn Tuấn Khương*, 11 Toán, THPT Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/330. *Gọi M và m là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số*

$$f(x) = \cos(2002x) + k\cos(x+\alpha)$$

trong đó k, α là các tham số thực. Chứng minh rằng $M^2 + m^2 \geq 2$.

Lời giải. (Của đa số các bạn)

Ta có : $f(0) = 1 + k\cos\alpha \leq M$

$f(\pi) = 1 - k\cos\alpha \leq M$

Suy ra $f(0) + f(\pi) = 2 \leq 2M$ hay $M^2 \geq 1$ (1)

Tương tự, ta lại có

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 - k\sin\alpha \geq m$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 + k\sin\alpha \geq m$$

Suy ra $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -2 \geq 2m$

hay $m^2 \geq 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Nhận xét. Nhiều bạn gửi lời giải đúng và hầu hết theo cách giải đã trình bày. Nhiều bạn đã có nhận xét rằng bài toán trên chính là trường hợp riêng của bài toán sau :

Gọi M và m lần lượt là các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \beta\cos(2(2n+1)x) + k\cos(x+\alpha)$, trong đó k, α, β là các tham số thực, $\beta > 0$, $n \in N$. Chứng minh rằng $M^2 + m^2 \geq 2\beta^2$.

Xin nêu tên một số bạn lớp 10 có lời giải đúng :

Bắc Giang : *Phạm Mạnh Khương*, 10, THPT Hiệp Hòa ; **Bắc Ninh :** *Nguyễn Văn Huyện*, 10 THPT Yên Phong 1 ; **Bình Định:** *Trần Lâm Ân, Võ Văn Vĩ*, 10 THPT chuyên ; **Đắk Lắk :** *Đỗ Thanh Tùng*, 10, THPT Nguyễn Du ; **Đà Nẵng :** *Hồ Thị Thùy Trang*, 10, THPT chuyên ; **Hải Dương :** *Trương Ngọc Sơn, Trịnh Thiết Trường, Phan Xuân Hiếu*, 10T1, THPT Nguyễn Trãi, *Nguyễn Quang Thắng*, 10, THPT Phả Lại, *Trần Văn Trình*, 10, THPT Nam Sách, *Nguyễn Xuân Thủy Đáp*, 10, THPT Nhị Chiểu, Kinh Môn ; **Hà Nam:** *Nguyễn Mạnh An*, 10, THPT chuyên ; **Hà Nội :** *Phạm Duy Tùng, Phan Duy Khánh*, 10, ĐHKHTN, *Nhữ Anh Tuấn*, 10, ĐHSP ; **Hà Tây :** *Nguyễn Quang Phương, Trịnh Ngọc Tú*, 10 THPT Nguyễn Huệ, *Tô Quang Ngọc*, THPT Sơn Tây ; **Hà Tĩnh :** *Trần Vĩnh Phúc*, 10, THPT chuyên ; **Nghệ An:** *Lê Ngọc Thạch, Trần Đức Nhân, Hồ Bá Linh, Trịnh Văn Nam*, 10A1, THPT Phan Bội Châu; **Thanh Hóa :** *Trịnh Hà Linh, Hoàng Vũ Hạnh, Trịnh Huy Giang, Lê Trung Thành*, 10 THPT chuyên, *Phạm Khắc Thanh*, 10 THPT Triệu Sơn, *Nguyễn Hải*, 10, THPT Đông Sơn 1 ; **Phú Thọ:** *Nguyễn Việt Thắng*, 10 THPT chuyên ; **Quảng Bình :** *Đặng Ngọc Thanh, Phạm Tiến Đồng*, 10, THPT chuyên ; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Trần Hồng Trí*, 10, THPT chuyên ; **Vĩnh Phúc :** *Lê Xuân Thịnh*, 10, THPT chuyên Nguyễn Viết Xuân, *Nguyễn Hoài Nam*, 10, THPT chuyên.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/330. *Cho số nguyên dương n. Xét hàm số* $f(x) : [0 ; n] \to R$ *liên tục và thỏa mãn* $f(0) = f(n)$. *Chứng minh rằng tồn tại n cặp số* a_i, b_i $(i = 1, 2, ..., n)$ *với* a_i, b_i *thuộc* $[0; n]$ *sao cho* $b_i - a_i$ *là số nguyên dương và* $f(a_i) = f(b_i)$ *với mọi* $i = 1, 2, ..., n$.

Lời giải. Ta chứng minh bài toán bằng quy nạp theo n.

Với $n = 1$, rõ ràng $a = 0$, $b = 1$ thỏa mãn các điều kiện trên.

Giả sử khẳng định trên đã đúng với $n = k \in N^*$, ta chứng minh khẳng định đó cũng đúng với $n = k+1$. Giả sử $f(x) : [0; k+1] \to R$ là hàm số liên tục và $f(0) = f(k+1)$. Xét hàm số $g(x) : [0, k] \to R$ được xác định như sau :

$g(x) = f(x+1) - f(x)$.

Ta có $g(x)$ là hàm số liên tục,

$g(0)+g(1)+...+g(k) = f(1)-f(0)+f(2)-f(1)+...$
$+ f(k+1) - f(k) = f(k+1) - f(0) = 0$.

Do đó tồn tại $i, j \in \{0, 1, ..., k\}$ mà $g(i).g(j) \le 0$.

Hệ quả : Theo định lí Bôxanô–Côsi cho hàm số liên tục, tồn tại $\overline{x} \in [0; k]$ thỏa mãn $g(\overline{x}) = 0$, tức là $f(\overline{x}+1) = f(\overline{x})$.

Ta lấy : $a_1 = \overline{x}$, $b_1 = \overline{x}+1$.

Xét hàm số $h(x) : [0; k] \to R$ được xác định như sau :

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ nếu } 0 \le x \le \overline{x} \\ f(x+1) \text{ nếu } \overline{x} < x \le k \end{cases}$$

Vì $f(x)$ là hàm số liên tục và $f(\overline{x}) = f(\overline{x}+1)$ suy ra $h(x)$ là hàm số liên tục. Mặt khác $h(0) = f(0)$, $h(k) = f(k+1) = f(0)$. Do đó theo giả thiết quy nạp tồn tại k cặp số c_i, d_i $(i = 1, 2, ..., k)$ với $c_i, d_i \in [0; k]$ sao cho $d_i - c_i$ là số nguyên dương và $h(c_i) = h(d_i)$ với mọi $i = 1, 2, ..., k$.

Đặt $a_{i+1} = \begin{cases} c_i \text{ nếu } c_i \le k \\ c_i+1 \text{ nếu } c_i > k \end{cases}$;

$$b_{i+1} = \begin{cases} d_i \text{ nếu } d_i \le k \\ d_i+1 \text{ nếu } d_i > k \end{cases}$$

với $i = 1, 2, 3, ..., k$.

Ta có $\begin{cases} b_i - a_i \in N^* \\ f(a_i) = f(b_i) \end{cases}$, $a_i, b_i \in [0; k+1]$

với mọi $i = 1, 2, ..., k+1$.

Bài toán đã được chứng minh.

Nhận xét. Đây là bài toán giải tích hay, khá khó. Tòa soạn nhận được lời giải của một số bạn, nhưng không có bạn nào giải hoàn chỉnh bài toán.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T11/330. *Trong mặt phẳng cho đường thẳng xy và đoạn thẳng AB vuông góc với xy tại A. Trên tia Ax lấy điểm C, trên tia Ay lấy điểm D (C, D khác A). Kẻ AE ⊥ BC (E thuộc BC) và AF ⊥ BD (F thuộc BD). Một đường thẳng đi qua trung điểm Q của AB lần lượt cắt các đường thẳng xy, BC, BD ở P, M, N. Chứng minh rằng các điểm P, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi Q là trung điểm của MN.*

Lời giải. Trước hết xin phát biểu không chứng minh một bổ đề.

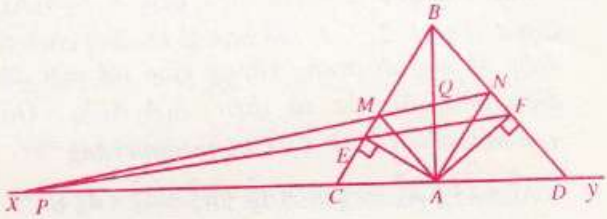
Bổ đề. Cho hai đường thẳng Δ, Δ' cắt nhau tại O. Các điểm A, B, C thuộc Δ và các điểm A', B', C' thuộc Δ'. Khi đó : AA', BB', CC' đồng quy hoặc đôi một song song khi và chỉ khi $(OABC) = (OA'B'C')$, trong đó kí hiệu tỉ số kép :

$$(OABC) = \frac{\overline{BO}}{\overline{BA}} : \frac{\overline{CO}}{\overline{CA}}.$$

Bổ đề trên được chứng minh rất đơn giản bằng những hiểu biết ban đầu về tỉ số kép của một hàng điểm. Việc thực hiện chi tiết xin dành cho bạn đọc. Trở lại việc giải bài toán.

Chứng minh điều kiện đủ.

Vì Q là trung điểm của AB và MN nên $AMBN$



là hình bình hành. Từ đó, theo định lí Ta–let và hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có :

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} : \frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} : \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{AD}.\overline{AC}}{\overline{AB}^2} \quad (1)$$

$$\frac{\overline{NB}}{\overline{ND}} : \frac{\overline{FB}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AD}^2} = \frac{\overline{AC}.\overline{AD}}{\overline{AB}^2} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra : $(BCME) = (BDNF)$

Từ đó với chú ý rằng P là giao điểm của MN và CD, theo bổ đề trên, ta có P, E, F thẳng hàng.

Chứng minh điều kiện cần : Trên BC, BD lấy M', N' sao cho $BM'AN'$ là hình bình hành. Ta có Q là trung điểm của $M'N'$ (1).

Vì P, E, F thẳng hàng nên EF cắt xy và $CA \ne DA \Rightarrow M'N'$ cắt xy. Giả sử $M'N'$ cắt xy tại P'. Từ (1), theo phép chứng minh điều kiện đủ, ta có P', E, F thẳng hàng $\Rightarrow P'$ trùng $P \Rightarrow$ Đường thẳng $P'Q$ trùng với đường thẳng PQ. Suy ra : M' trùng M và N' trùng N (2).

Từ (1), (2) suy ra Q là trung điểm của MN.

Nhận xét. 1) Rất nhiều bạn tham gia giải bài toán này tuy nhiên, rất ít bạn có lời giải gọn gàng, sáng sủa.

2) Đây là bài toán hai chiều nên nhiều bạn sử dụng phương pháp biến đổi tương đương. Tuy nhiên, các bạn này hoặc cho lời giải dài hoặc cho lời giải không chính xác. Trong lời giải trên đã chứng minh điều kiện cần bằng cách dựa vào phép chứng minh điều kiện đủ. Đó là biện pháp khá thuận lợi trong việc giải các bài toán hai chiều. Các bạn nên chú ý !

3) Trong lời giải trên, nếu không muốn sử dụng bổ đề thì bạn phải sử dụng định lí Mê–nê–la–uyt hai lần.

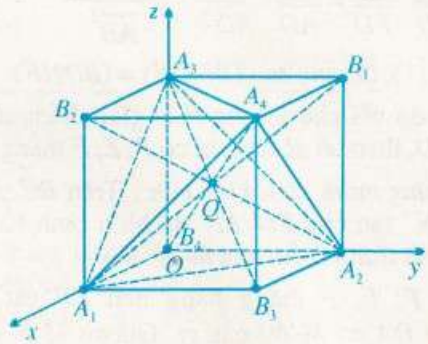
4) Các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt : **Thanh Hóa :** *Nguyễn Hải*, 10A1, THPT Đông Sơn I, Đông Sơn, *Vũ Văn Tân*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, TP Thanh Hóa; **Hải Dương :** *Trương Ngọc Sơn*, 10T, THPT Nguyễn Trãi ; **Đồng Nai :** *Nguyễn Đào Xuân Uyên*, 10A1, THPT Tân Phú ; **Nghệ An :** *Lê Ngọc Thạch*, 10T, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Đàm Thanh Thủy*, 10A1, khối PTCT ĐH Vinh ; **Quảng Nam :** *Đỗ Xuân*, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TX Tam Kì ; **Hà Nội :** *Nguyễn Hoàng Việt*, 11A1, *Nhữ Anh Tuấn*, 10A2, khối PTCT–ĐHSP Hà Nội.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T12/330. *Cho tứ diện đều $A_1A_2A_3A_4$. Gọi d_i ($i = 1, 2, 3, 4$) lần lượt là khoảng cách từ điểm M nào đó trong không gian tới mặt đối diện đỉnh A_i của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Đặt $x_i = MA_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Chứng minh rằng*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \le 9(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2) \quad (*)$$

Lời giải. Ta tính các khoảng cách d_i từ điểm M đến mặt $\alpha_i = (A_jA_kA_l)$ và khoảng cách $x_i = MA_i$ từ điểm M đến đỉnh A_i của tứ diện với $i = 1, 2, 3, 4$. Vì phải tính khoảng cách từ một điểm đến nhiều mặt phẳng nên ta sử dụng *phương pháp tọa độ*.



Dựng hình lập phương $A_1B_3A_2B_4B_2A_4B_1A_3$ ngoại tiếp tứ diện đều $A_1A_2A_3A_4$ (hình vẽ). Gọi Q là trọng tâm của tứ diện đều đã cho thì B_i đối xứng với A_i qua Q và Q (điểm đồng quy của các đường chéo A_iB_i ($i = 1, 2, 3, 4$)) cũng là tâm của hình lập phương vừa dựng.

Kí hiệu a và c lần lượt là độ dài cạnh và đường chéo của hình lập phương, b là độ dài cạnh của tứ diện đều nội tiếp ; dễ thấy rằng : $b = a\sqrt{2}$ và $c = a\sqrt{3}$.

Chọn hệ trục tọa độ Đề–các vuông góc $Oxyz$ sao cho $A_1 \in Ox$, $A_2 \in Oy$ và $A_3 \in Oz$. Thế thì trong hệ tọa độ này, ta có : A_1 (a; 0; 0), A_2 (0; a; 0), A_3 (0; 0; a), A_4 (a ; a; a) và $Q\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$. Các mặt phẳng α_i chứa các tam giác $A_jA_kA_l$ với $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ có các phương trình :

$$\begin{cases} \alpha_1 = (A_2A_3A_4): x-y-z+a = 0 & (1) \\ \alpha_2 = (A_3A_4A_4): -x+y-z+a = 0 & (2) \\ \alpha_3 = (A_4A_1A_2): -x-y+z+a = 0 & (3) \\ \alpha_4 = (A_1A_2A_3): x+y+z-a = 0 & (4) \end{cases}$$

Trong hệ tọa độ này với điểm M (x_o, y_o, z_o) thì theo các công thức tính khoảng cách, ta có :

$$d_1^2 = \frac{1}{3}(+x_o - y_o - z_o + a)^2,$$

và $x_1^2 = (x_o - a)^2 + y_o^2 + z_o^2$.

Tính tương tự đối với d_2, d_3, d_4, x_2, x_3, x_4.

Từ đó có :

$$9\left(\sum_{i=1}^{4} d_i^2\right) - \sum_{i=1}^{4} x_i^2 =$$

$$= 8\left(x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 - ax_o - ay_o - az_o + \frac{3}{4}a^2\right)$$

$$= 8\left[\left(x_o - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y_o - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(z_o - \frac{a}{2}\right)^2\right]. \text{ Suy ra}$$

$$9\left(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2\right) - \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right) = 8QM^2 \ (**)$$

Từ hệ thức (**) này ta thu được BĐT tương đương với BĐT (*) cần tìm. Đẳng thức ở (*) xảy ra khi và chỉ khi điểm M trùng với trọng tâm Q của tứ diện đều $A_1A_2A_3A_4$.

Nhận xét. 1) Ngoài *lời giải đại số* trên bài toán còn được giải bằng *phương pháp véctơ*. Bạn *Đỗ Thị Hương*, lớp 12A3, THPT Yên Định I, **Thanh Hóa** đã dùng véctơ để tính $\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = \sum_{i=1}^{4} MA_i^2 = \sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{MA_i}^2$ và $\sum_{i=1}^{4} d_i^2 = \sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{MM_i}^2$, trong đó M_i là hình chiếu của M trên mặt phẳng $\alpha_i = (A_jA_kA_l)$. Để tính $\sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{MM_i}^2$, bạn *Hương* đã sử dụng kết

quả nêu trong bài toán T10/202 : $\sum_{i=1}^{4}\overline{MM_i}=\frac{4}{3}\overline{MQ}$, trong đó Q là tâm của tứ diện đều $A_1A_2A_3A_4$.

2) Bạn *Bùi Khắc Kiên*, lớp 11T, THPT Lam Sơn, **Thanh Hóa** đã phối hợp cả hai phương pháp véctơ và tọa độ và cho lời giải khá gọn gàng.

3) Nhờ phương pháp tọa độ chúng ta có thể chứng minh (kiểm nghiệm lại) tính chất *quen thuộc* đã biết của tứ diện đều : *"Tổng các khoảng cách từ một điểm nằm trong một tứ diện đều đến các mặt của nó không phụ thuộc vào vị trí của điểm đó, cụ thể là bằng chiều cao của tứ diện"*.

4) Nếu đưa vào khái niệm *khoảng cách đại số* từ một điểm M trong không gian đến mặt phẳng (α_i) chứa mặt đối diện đỉnh A_i của tứ diện đều $A_1A_2A_3A_4$, kí hiệu là $\overline{d_i}$ và nếu $f_i(x, y, z)$ là vế trái của PT mặt phẳng (α_i) sao cho $f_i(x_i, y_i, z_i) > 0$ trong đó A_i là đỉnh có tọa độ (x_i, y_i, z_i) thì $\overline{d_i} = \frac{1}{\sqrt{3}}f_i(x_o, y_o, z_o)$, trong đó (x_o, y_o, z_o) là các tọa độ của một điểm M bất kì trong không gian.

Từ các PT $f_i(x, y, z) = 0$ của các mặt phẳng (α_i) chứa mặt đối diện đỉnh A_i của tứ diện đều $A_1A_2A_3A_4$ mà vế trái f_i có các dạng (1), (2), (3) và (4) ở trên, ta thu được kết quả *tổng quát*: Với mọi điểm M trong không gian thì

$$\sum_{i=1}^{4}\overline{d_i}(M,\alpha_i)=\overline{d_1}+\overline{d_2}+\overline{d_3}+\overline{d_4}=\frac{1}{\sqrt{3}}(f_1+f_2+f_3+f_4)$$

$$=\frac{2a}{\sqrt{3}}=h=\frac{b\sqrt{6}}{3} \text{ (không đổi).}$$

4) Số các bạn tham gia giải bài toán này không nhiều. Đáng tiếc, có một bạn giải sai. Bạn *Bùi Khắc Kiên* còn nhận xét đúng rằng đây là bài toán *tương tự* trong không gian của bài toán T9/235 (THTT 1/1997).

Ngoài hai bạn trên, các bạn sau đây cũng có lời giải tốt.

Hải Dương : *Phạm Văn Dưỡng, Phạm Hoàng Thái*, 11K, THPT Kim Thành ; **Thanh Hóa :** *Phạm Khắc Thành*, 10B1, THPT Triệu Sơn I, *Trịnh Quốc Trung*, 12A4, THPT Bỉm Sơn; **Nghệ An :** *Hoàng Khắc Hiếu*, 12A1, THPT Nguyễn Xuân Ôn, Diễn Châu ; **Đà Nẵng :** *Nguyễn Tiến Lâm*, 12A1, THPT Lê Quý Đôn ; **Bà Rịa – Vũng Tàu :** *Trần Văn Linh*, 11 Toán, THPT Lê Quý Đôn, TP Vũng Tàu.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

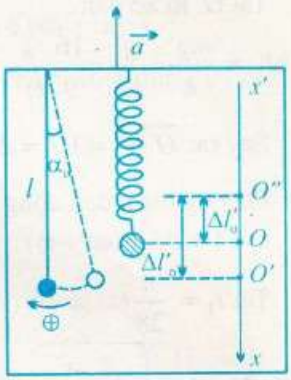
Bài L1/330. *Một buồng thang máy có treo một con lắc lò xo và một con lắc đơn. Con lắc lò xo có độ cứng k = 49N/m. Khi thang máy đứng yên thì phương trình dao động hướng thẳng đứng quanh vị trí cân bằng của chúng lần lượt là: $x = 2\sin(14t - \pi/2)$ (cm) (với con lắc lò xo), $\alpha = 8^o\sin(14t+\pi/2)$ (độ) (với con lắc đơn).*

Khi con lắc đơn qua vị trí cân bằng thì thang máy bắt đầu chuyển động đi lên theo phương thẳng đứng nhanh dần đều với gia tốc $a = (7/9)g$. Sau khi chuyển động được $3\pi/4$ (s) thì dây treo con lắc bị đứt.

a. Viết phương trình dao động mới của các con lắc khi thang máy chuyển động và dây treo chưa bị đứt.

b. Mô tả chuyển động của con lắc kể từ khi dây treo thang máy bị đứt. Lấy $g = 10(m/s^2)$

Lời giải. a) Ban đầu, lúc $t = 0$, $x_o = 2$cm và $\alpha_o = 8^o$: cả hai con lắc đều ở vị trí biên. Do vậy thời điểm chúng qua vị trí cân bằng (lần 1) là :



$t_1=\frac{T}{4}=\frac{\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{28}$ (s).

Vận tốc con lắc lò xo khi đó bằng $v_1 = 28$cm/s.

Ở thời điểm t_1 thang máy bắt đầu chuyển động với gia tốc $\vec{a}$ hướng lên trên. Xét trong hệ quy chiếu không quán tính, gắn với thang máy. Hai con lắc coi như chuyển động trong trọng trường hiệu dụng :

$$\vec{g'}=\frac{m\vec{g}+(-m\vec{a})}{m}=\vec{g}-\vec{a}\Rightarrow g'=g+a=\frac{16}{9}g$$

• *Phương trình dao động mới của con lắc đơn:*

Tần số góc mới :

$$\omega_1=\sqrt{\frac{g'}{l}}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{g}{l}}=\frac{56}{3} \text{ rad/s.}$$

Năng lượng dao động của con lắc đơn :

$$mg'l.\frac{\alpha'^2_o}{2}=mgl.\frac{\alpha_o^2}{2}\Rightarrow \alpha'_o=\frac{3}{4}\alpha_o=6^o.$$

Phương trình dao động mới có dạng :

$\alpha = \alpha'_o\sin(\omega_1 t+\varphi)$ (độ)

Lúc $t_1 = \frac{\pi}{28}$ (s) thì $\alpha_1 = \alpha'_o\sin\left(\frac{56}{3}.\frac{\pi}{28}+\varphi\right) = 0$ với $\left(\text{với } \frac{\pi}{28}\le t<\frac{3\pi}{4}\right)$; và

$$v_1=\omega_1\alpha'_o l\cos\left(\frac{56}{3}.\frac{\pi}{28}+\varphi\right)>0\Rightarrow\varphi=-\frac{2\pi}{3}.$$

Suy ra $\alpha = 6^o\sin\left(\frac{56}{3}t-\frac{2\pi}{3}\right)$ (độ).

• *Phương trình dao động mới của con lắc lò xo :*

Gọi O', O'' là vị trí cân bằng mới và vị trí lò xo không biến dạng.

Tại O lò xo dãn :

$$\Delta l_o = \frac{mg}{k} = \frac{g}{\omega^2}.$$

Tại O' lò xo dãn :

$$\Delta l'_o = \frac{mg'}{k} = \frac{g'}{\omega^2} = \frac{16}{9}\frac{g}{\omega^2}.$$

Suy ra: $\overline{O'O''} = OO' = \Delta l'_o - \Delta l_o = \frac{7}{9}\frac{g}{\omega^2} \approx 4\text{cm}.$

Phương trình dao động mới có dạng :

$x = 4 + A'\sin(\omega t + \varphi)$

Tại $t_1 = \frac{\pi}{28}$ (s) ta có : $x_1 = 4$cm, $v_1 = 28$cm/s,

do đó $A' = \sqrt{x_1^2 + \frac{v_1^2}{\omega^2}} = 2\sqrt{5}$ (cm). Ngoài ra

$x' = \omega A'\cos(\omega t_1 + \varphi) = v_1$. Suy ra : $\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Từ đó : $x = 4 + 2\sqrt{5}\sin(14t + \varphi)$ (cm)

b) Kể từ khi dây treo thang máy bị đứt thì không có ngoại lực tác dụng lên các con lắc. Vật nặng của con lắc đơn chuyển động tròn đều với vận tốc $\frac{2\pi}{63} m/s$. Còn con lắc lò xo sẽ dao động quanh vị trí cân bằng mới O'' với tần số góc 14 rad/s và với biên độ 2cm.

Nhận xét. Bạn *Dương Trung Hiếu*, 12B, THPT NK **Bắc Giang** có lời giải gần hoàn chỉnh.

MAI ANH

Bài L2/330. *Một khe hẹp S, đặt trên một gương phẳng G, cách mặt gương 1(mm). Một màn ảnh E đặt vuông góc với mặt gương, song song với khe S và cách khe 2 (m). Khi chiếu tia sáng đơn sắc qua khe S lên màn ảnh E người ta thấy có những vạch sáng và vạch tối xen kẽ nhau một cách đều đặn. Khoảng cách giữa 15 vạch sáng liên tiếp là 0,84(cm) (hai vạch ngoài cùng của 15 vạch nói trên nằm tại hai vị trí M và N trên màn ảnh E).*

1) Hãy giải thích hiện tượng có những vạch sáng, vạch tối nói trên.

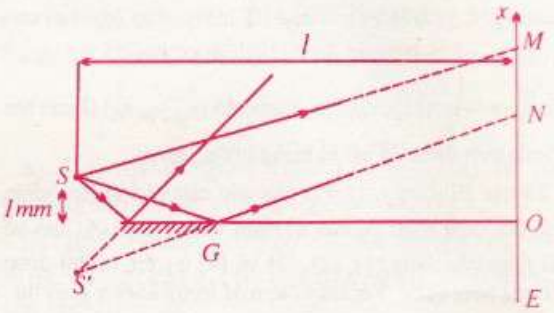
2) Tính bước sóng của ánh sáng đơn sắc λ dùng trong thí nghiệm.

3) Nếu chiếu đồng thời ánh sáng đơn sắc nói trên và ánh sáng đơn sắc khác có bước sóng λ_x chưa biết vào khe S thì trên khoảng MN quan sát được 27 vạch sáng, trong đó 5 vạch là do sự trùng nhau của hai ánh sáng đơn sắc, và 2 trong 5 vạch đó nằm tại M, N. Xác định bước sóng λ_x.

Lời giải. 1) Đây là hiện tượng giao thoa của hai chùm sáng đơn sắc :

+ Một chùm sáng phát trực tiếp từ khe sáng S chiếu đến màn E.

+ Một chùm sáng phát ra từ S, phản xạ trên gương G rồi chiếu đến màn E (xem hình).



+ Hai chùm sáng này là hai chùm sóng kết hợp nên chúng giao thoa với nhau. Các vạch sáng và vạch tối là những vân giao thoa. Có thể xem như đây là giao thoa với khe *Iâng* với các thông số :

Khoảng cách giữa hai khe : $a = SS' = 2$(mm).

Khoảng cách hai khe đến màn E : $D = 2$(m).

2) Giữa 15 vạch sáng liên tiếp có 14 khoảng vân, tức là $14.i = 0{,}84$(cm) $\Rightarrow i = 0{,}06$ (cm).

+ Mặt khác ta lại có $i = \frac{\lambda D}{a}$, nên suy ra :

$\lambda = \frac{a_i}{D} = \frac{2.10^{-3}0{,}06.10^{-2}}{2} = 0{,}6.10^{-6}$ (m) = 0,6 (μm)

3) Mỗi ánh sáng đơn sắc cho một hệ vân giao thoa

+ Tổng số vân giao thoa của cả hai hệ vân trên khoảng MN là : 27 + 5 = 32.

+ Số vân giao thoa trên khoảng MN của hệ vân ứng với ánh sáng đơn sắc λ_x là : 32–15 = 17

+ Giữa 17 vân sáng liên tiếp có 16 khoảng vân, tức là : $16.\frac{\lambda_x D}{a} = MN$

$$\Rightarrow \lambda_x = \frac{a.MN}{16.D} = \frac{2.10^{-3}.0,84.10^{-2}}{16.2}$$

$= 0,525.10^{-6}$(m) = 0,525 (μm)

Nhận xét. Các bạn có lời giải đầy đủ và đáp số đúng : **Bắc Ninh :** *Nguyễn Xuân Nam, Nguyễn Minh Cường, Nguyễn Công Dưỡng*, 11 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh ; **Bắc Giang :** *Dương Trung Hiếu*, 12B, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; **Vĩnh Phúc :** *Trịnh Hữu Phước*, 12A10, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Hưng Yên :** *Nguyễn Mạnh Tuấn*, 12 Lí, THPT chuyên Hưng Yên ; **Đồng Tháp:** *Thái Phan*, 12T, THPT TX Sa Đéc ; **Quảng Ngãi :** *Nguyễn Văn Linh*, 12C1, THPT Trần Quang Khải, Mộ Đức ; **Hải Phòng:** *Phạm Tuấn Hiệp*, 11 Lí, THPT NK Trần Phú ; **Hà Tây :** *Lã Minh Hằng*, 12A28, THPT Lê Quý Đôn ; **Thanh Hóa :** *Đỗ Thị Hương*, 12A3, THPT Yên Định I, Yên Định ; **Hà Nội:** *Bùi Phi Anh*, 12 Lí, THPT Hà Nội – Amsterdam ; **Tiền Giang :** *Trương Huỳnh Thanh Trúc*, 12 Lí, THPT chuyên Tiền Giang ; **Quảng Nam :** *Nguyễn Đình Duy*, 12/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

MAI ANH

VỀ BA ĐƯỜNG THẲNG....

(Tiếp trang 2)

...và C (B, C đều khác A, E, F). Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Đường thẳng AO cắt các đường thẳng IE và IF lần lượt ở Q và N. Các cặp đường thẳng IE và CN, IF và BQ, BE và CF cắt nhau tại S, P, M theo thứ tự. Chứng minh rằng các điểm A, S, P, M thẳng hàng.

Chứng minh. • Theo BT5 có AI là phân giác ngoài của ΔABC và $IE \perp AC$, $IF \perp AB$ nên BE, CF cắt nhau tại điểm M nằm trên đường cao AD của ΔABC.

• Ta sẽ chứng minh rằng P thuộc đường thẳng AD. Kẻ $OK \perp AC$ tại K. Giả sử O nằm trong ΔABC (trường hợp O nằm ngoài thì xét tương tự). Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{AOK} = \widehat{AQI}$ nên tứ giác $ABIQ$ nội tiếp được. Từ đó $\widehat{ABQ} = \widehat{AIQ}$, mà $\widehat{BAI} = \widehat{EAI}$ suy ra $AI \perp BQ$, nghĩa là điểm P là trực tâm của ΔABI nên P thuộc đường thẳng AD.

• Chứng minh tương tự thì điểm S là trực tâm của ΔACI nên S cũng thuộc đường thẳng AD. Vậy A, D, P, M thẳng hàng.

Hi vọng rằng các kết quả trên sẽ giúp ích cho các bạn khi giải các bài toán liên quan đến đường cao trong tam giác và các bài toán về các đường thẳng đồng quy.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 68

Problem. The Fibonacci numbers are defined by the following recursion formula

$f_0 = f_1 = 1,$

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $(n \geq 2)$.

Prove that for $n, m \geq 1$ we have

$$f_{n+m} = f_{n-1}f_{m-1} + f_n f_m \qquad (*)$$

Solution. We shall prove the formula (*) by induction on n. For $n = 1$, the recursion formula implies

$$f_{1+m} = f_{m-1} + f_m = 1.f_{m-1} + 1.f_m = f_0 f_{m-1} + f_1 f_m.$$

Similarly, we can see that (*) holds for $m = 1$. For $n = 2$ and $m \geq 2$ we have

$$f_{2+m} = f_m + f_{m+1} = f_{m-1} + 2f_m = f_1 f_{m-1} + f_2 f_m.$$

For $n \geq 3$ and $m \geq 2$ we may assume that the formula (*) is true for $n \geq k$. In that case,

$$f_{k+1+m} = f_{k+m} + f_{k-1+m}$$
$$= f_{k-1}f_{m-1} + f_k f_m + f_{k-2}f_{m-1} + f_{k-1}f_m$$
$$= (f_{k-1} + f_{k-2})f_{m-1} + (f_k + f_{k-1})f_m$$
$$= f_k f_{m-1} + f_{k+1}f_m$$

This proves that (*) is true for $n = k+1$. The inductive proof is now complete.

Từ mới:

following = tiếp theo, sau đây (tính từ)
define = định nghĩa (động từ)
recursion = đệ quy (danh từ)
formula = công thức
induction = quy nạp
imply = cho thấy, dẫn đến (động từ)
similarly = tương tự (phó từ)
hold = đúng, có hiệu lực (động từ)
inductive = quy nạp (tính từ)
complete = đầy đủ, trọn vẹn, hoàn toàn (tính từ)

NGÔ VIỆT TRUNG

CHƯƠNG ĐƯỜNG TRÒN ...

(Tiếp bìa 2)

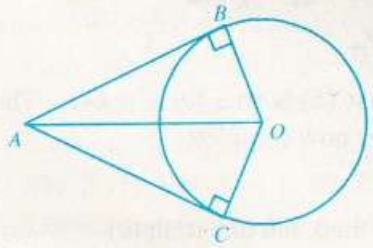
... mà chỉ thông qua các câu hỏi, có những định lí được công nhận, phần chứng minh chúng đều được nêu trong *Sách giáo viên*.

Trong phần bài tập, các bài tập về *tính toán* và *chứng minh* chiếm số lượng lớn, trong đó có nhiều bài được diễn đạt dưới hình thức bài tập trắc nghiệm. Trong chương có một số bài tập *dựng hình*, thường là các bài tập không phức tạp. Các bài tập về *tập hợp điểm* trong chương chỉ hạn chế ở mức độ phát biểu tập hợp điểm (đến chương III mới xét đến cách giải bài toán quỹ tích).

Trong chương có nhiều bài tập gắn với mặt phẳng tọa độ, bài tập gắn với hoạt động thực hành (tìm tâm hình tròn, vẽ hình hoa, vẽ lọ hoa...). Mục *Có thể em chưa biết* giới thiệu những nội dung vui - học và gắn với thực tiễn (dụng cụ tìm tâm hình tròn, thước đo đường kính của một vật hình tròn, hệ thống bánh răng quay khớp với nhau, đường kính và dây cua-roa, vẽ chắp nối trơn, tính tầm nhìn xa tối đa, ...).

3. Về phương pháp dạy - học

Cách trình bày của SGK giúp giáo viên tổ chức các hoạt động dạy - học trên lớp, tạo điều kiện thuận lợi cho giáo viên đổi mới nội dung và phương pháp dạy - học.



Hình 1

a) Học sinh được tập dượt phát hiện kiến thức, tiếp cận định lí trước khi chứng minh.

Ví dụ : Khi học định lí về tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau (§6), trong SGK có câu hỏi tiếp cận định lí :

Cho AB và AC là các tiếp tuyến của đường tròn (O). Hãy kể tên một vài đoạn thẳng bằng nhau, góc bằng nhau trong hình 1.

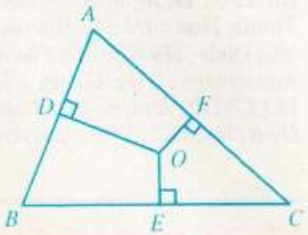
Học sinh dễ dàng phát hiện được nhiều quan hệ, chẳng hạn $OB = OC$, $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^\circ$, $\Delta AOB = \Delta AOC$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông) nên $AB = AC$ (1), $\widehat{OAB} = \widehat{OAC}$ (2), $\widehat{AOB} = \widehat{AOC}$ (3).

Các kết quả (1), (2),(3) chính là các nội dung được đề cập đến trong định lí của bài.

b) Học sinh được củng cố kiến thức bằng những bài toán đơn giản và bổ ích.

Ví dụ: Khi học xong các định lí về liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây (§3), trong SGK có câu hỏi củng cố định lí :

Cho tam giác ABC, O là giao điểm của các đường trung trực các cạnh của tam giác. Gọi D, E, F theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ O đến AB, BC, AC. Cho biết OD > OE, OE = OF. Hãy so sánh các độ dài BC và AC, AB và AC (hình 2)



Hình 2

Sau khi vẽ đường tròn (O) đi qua A, B, C các đoạn thẳng cần so sánh độ dài trở thành các dây của đường tròn (O). Đề bài đã cho quan hệ giữa các khoảng cách từ tâm đến các dây ấy, do đó dễ dàng so sánh được độ dài của các dây ấy :

$OE = OF$ nên $BC = AC$ (hai dây bằng nhau thì cách đều tâm) ; $OD > OE$ mà $OE = OF$ nên $OD > OF$. Suy ra $AB < AC$ (dây xa tâm hơn thì ngắn hơn).

Cả hai định lí 1 và 2 trong bài đều được dùng trong bài tập củng cố trên, và phải vẽ thêm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì mới vận dụng được định lí. Bài toán đơn giản mà vẫn chứa đựng tình huống sư phạm.

c) Các bài tập trong chương được chọn lọc để củng cố được nhiều kiến thức với mức độ phù hợp với số đông học sinh lớp 9 và được nâng cao dần. Các học sinh khá sẽ tìm thấy nhiều bài tập phù hợp trong *Sách bài tập*. Các học sinh giỏi cũng có những cuốn sách riêng đáp ứng yêu cầu đào sâu môn Toán, chẳng hạn cuốn *Nâng cao và phát triển Toán 9*.

Hi vọng rằng SGK mới sẽ mang đến nhiều kiến thức bổ ích và học sinh lớp 9 sẽ hứng thú trong học tập.

Cuộc thi mới
XUÂN RA ĐỀ, HÈ GIẢI ĐÁP

Như đã thông báo trên số 333 (3.2005), cuộc thi mới diễn ra từ tháng 4 và kết thúc vào tháng 8.2005. Tất cả mọi người đều có thể tham dự cuộc thi này. Trên mỗi số THTT tháng 4 và 5.2005 sẽ có 3 đề. Bài giải nhận trong tháng 5 và tháng 6. Các độc giả đoạt giải sẽ tìm thấy lời giải và tên mình trong các số THTT tháng 7 và tháng 8.2005.

Trên bài dự thi cần dán **Phiếu dự thi** *cắt từ tạp chí và ghi đầy đủ : Họ và tên, ngày sinh, địa chỉ (cơ quan, trường lớp hoặc nơi ở). Ba bài của một số báo được bỏ chung vào 1 phong bì, ngoài đề Tham gia cuộc thi Xuân ra đề, Hè giải đáp. Bài chỉ gửi về một địa chỉ :*

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
187B Giảng Võ, Hà Nội

và có dán tem.

Chúc các bạn may mắn.

Sau đây là 3 bài đầu tiên của đợt 1 :

ĐỢT 1

Bài 1. 15.4.2005 là thứ Sáu. Hỏi ngày 15.10.1964 tức ngày ra số báo Toán học và Tuổi trẻ đầu tiên là thứ mấy ? Giải thích tại sao bạn tìm được kết quả như vậy.

Bài 2. **Chuyển quân**

Nhân ngày chiến thắng 30 tháng 4 mời các bạn tham gia trò chơi chuyển quân có liên quan đến số 30 và 4. Có 15 quân hình vuông với cạnh bằng 1 (đơn vị dài), được ghi số từ 1 đến 15 và đặt trên bàn hình vuông với cạnh lớn hơn 4 (đơn vị dài) một chút như ở hình 1. Trong mỗi bước chuyển quân được chọn một quân kề với ô trống để đưa vào ô trống với điều kiện là chỉ được đẩy quân trượt trên mặt bàn (không được nhấc quân khỏi mặt bàn). Hãy chuyển các quân từ hình 1 với số bước chuyển càng ít càng tốt sao cho cuối cùng trên bàn còn 1 ô trống ở góc dưới bên phải và có tổng các số (ghi trên quân) theo hàng ngang, theo cột dọc đều bằng 30.

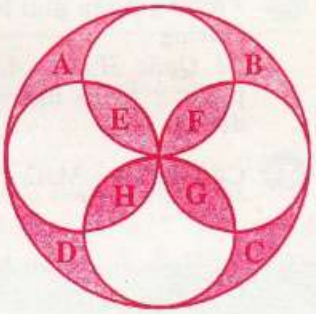
1	5	9	13
2	6	10	15
3	7	11	14
4	8	12	

Hình 1

(Bạn có thể tham khảo về ma phương bậc 4 trên THTT số 304 tháng 10.2002)

Bài 3. Một khuôn viên hình tròn bán kính 7m được chia thành các phần bằng 4 hình tròn nhỏ như hình vẽ. Đất được xúc từ phần định trồng cỏ (A, B, C, D) và phần định trồng hoa (E, F, G, H) được san đều trên phần lát bê tông (màu trắng). Biết rằng diện tích đất đem san sẽ được rộng gấp đôi diện tích đất đào lên. Liệu có phải chở thêm đất ở nơi khác đến ?

(Lấy $\pi \approx \frac{22}{7}$)



Hình 2

PHIẾU DỰ THI **XUÂN RA ĐỀ, HÈ GIẢI ĐÁP**

- Họ và tên : .....
- Ngày sinh : .....
- Địa chỉ : (Trường, lớp, huyện, tỉnh hoặc nơi ở)

.....

.....

- Điện thoại (nếu có) : .....

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 334 (4-2005)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Nguyễn Thu Dung – Về ba đường thẳng đồng quy tại điểm thuộc đường cao một tam giác.

3 Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên toán tin Trường ĐHSP Hà Nội 2004.

4 Hướng dẫn giải Đề toán thi tuyển sinh vào lớp 10 trường THPT Chu Văn An và THPT Hà Nội – Amsterdam 2004.

6 **Chuẩn bị thi vào Đại học – University Entrance Preparation**
Giúp bạn tự ôn thi. Đề ôn luyện số 3 – Giải đề ôn luyện số 2.

9 **Phương pháp giải toán – Math Problem Solving**
Lê Quốc Hán – Lưu ý khi sử dụng phương pháp lượng giác để giải toán đại số

11 **Câu lạc bộ – Math Club**

12 **Toán học và đời sống– Mathematics and Life.**
Lê Quang Nẫm–Bất đẳng thức Trê-bư-sép và xu hướng hôn nhân

14 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/334, ..., T12/334, L1, L2/334

16 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems.**
Giải các bài của số 330.

25 **Tiếng Anh qua các bài toán - English through Math Problems.** Bài số 68

27 **Cuộc thi Xuân ra đề - Hè Giải đáp**

Bìa 2 : **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**
Vũ Hữu Bình - *Chương đường tròn Sách Giáo khoa Toán 9 mới*

Bìa 3 : **Giải trí toán học – Math Recreation**

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NXB Giáo dục
NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NXB Giáo dục
VŨ DƯƠNG THỤY

Trưởng ban biên tập : NGUYỄN VIỆT HẢI.
Thư kí Tòa soạn : VŨ KIM THỦY.
Biên tập : HỒ QUANG VINH.
Trị sự, Chế bản : VŨ ANH THƯ – NGUYỄN THỊ OANH.
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Q. 5, Tp. Hồ Chí Minh. ĐT : 08.8309049

ĐÓN ĐỌC THTT SỐ 335 (5.2005)

- Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh lớp 10 khối PTCTT ĐHSP Hà Nội 2004.
- Hướng dẫn giải Đề ôn luyện số 3. Đề ôn luyện số 4.
- Câu chuyện về niềm vui khám phá.
- Mời các bạn tham gia Cuộc thi Xuân ra đề - Hè giải đáp
- Kết quả Cuộc thi giải toán bằng máy tính bỏ túi 3.2005.

Mời các bạn đạt mua tạp chí THTT tại Bưu điện.

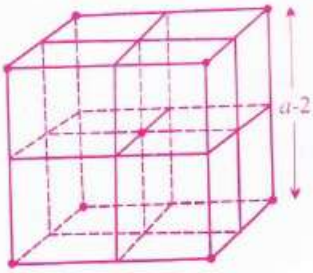
THTT

Giải đáp bài :

HỘP ĐỰNG BI NHỎ NHẤT

(Đề ở THTT số 332, tháng 2 năm 2005)

Giả sử cạnh hình lập phương cần tìm là a. Xét hình lập phương thu được bằng cách dịch chuyển song song các mặt một khoảng $1cm$ vào trong hình lập phương. Hình lập phương thu được có cạnh là $a - 2$. Chia hình lập phương này ra làm 8 hình lập phương bằng 3 mặt phẳng song song với các mặt của hình lập phương và đi qua tâm hình lập phương ban đầu (hình bên). Theo *nguyên lí Dirichlet* có hai tâm điểm của hai hòn bi phải rơi vào cùng một hình lập phương cạnh $\frac{a-2}{2}$. Suy ra đường chéo của hình lập phương này có độ dài nhỏ nhất bằng 2. Vậy ta có $\frac{(a-2)}{2}.\sqrt{3} \geq 2$, hay $a \geq 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$.



Với hình lập phương cạnh lớn hơn $a=2+(4\sqrt{3}/3)$ một chút ta có thể xếp 9 hòn bi sao cho chúng đôi một không có phần chung : một hòn có tâm tại tâm hình lập phương, 8 hòn bi còn lại có tâm tại đỉnh của hình lập phương thu được bằng cách dịch chuyển song song các mặt của hình lập phương ban đầu một khoảng $1cm$ vào phía trong (hình vẽ)

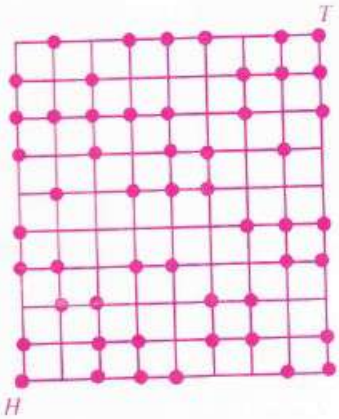
Tóm lại cạnh của hình lập phương cần tìm phải lớn hơn $a = 2 + (4\sqrt{3}/3)$ một chút, chẳng hạn là 4,31cm.

Các bạn sau có lời giải đúng : *Lê Bá Long*, 11 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì, **Phú Thọ**; *Nguyễn Công Dương*, 11 Lý, THPT chuyên Bắc Ninh, **Bắc Ninh** ; *Nguyễn Bá Đông*, 11A26, THPT Lê Quý Đôn, Hà Đông, **Hà Tây** ; *Nguyễn Thị Vân Anh*, 8G, THCS Đặng Thai Mai, TP Vinh, **Nghệ An**.

HỒNG QUANG

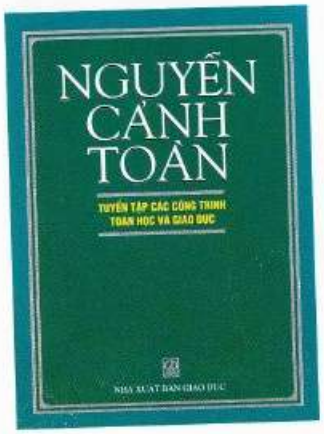
TÌM ĐƯỜNG ONG BAY

Một vườn hoa được trồng hoa theo hình lưới các ô vuông mà tại một số đỉnh các hình vuông nhỏ được trồng các cây hoa như hình bên. Một chú ong đậu trên hoa **H** muốn về tổ **T** theo các *đoạn bay dễ* từ bông hoa này sang bông hoa khác dọc theo cạnh hình vuông và *đoạn bay khó* theo đường chéo mỗi hình vuông. Ong không muốn bay các đoạn dài hơn hai loại đoạn đó. Tìm đường bay để số *đoạn bay khó* là ít nhất.



BÍNH NAM HÀ

SÁCH MỚI



Cuốn **Nguyễn Cảnh Toàn - Tuyển tập các công trình Toán học và Giáo dục** là cuốn sách tuyển chọn các công trình tiêu biểu của GS. TSKH **Nguyễn Cảnh Toàn** về Toán học và Giáo dục đã được công bố trên các sách và tạp chí. Sách gồm hai phần

Phần thứ nhất : Giới thiệu các công trình toán học tiêu biểu.

Phần thứ hai: Tuyển chọn các công trình về giáo dục liên quan đến quan điểm về học và dạy Toán ; giáo dục từ xa ; mối quan hệ giữa dạy - học và nghiên cứu khoa học ; Tư duy chiến lược giáo dục.

Xin trân trọng giới thiệu với bạn đọc.

THTT

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

PHÒNG GIÁO DỤC HUYỆN PHONG ĐIỀN, TỈNH THỪA THIÊN - HUẾ

Đồng chí Nguyễn Đăng Minh
Trưởng phòng GD & ĐT Huyện Phong Điền

Phong Điền là một huyện phía Bắc tỉnh Thừa Thiên - Huế, với địa hình dàn trải từ vùng núi đến biển Đông, được ôm ấp bởi dòng sông Ô Lâu thơ mộng và Phú Tam Giang xinh đẹp.

Nơi đây vốn là một vùng đất rộng, người thưa nhưng lịch sử đã sản sinh nhiều danh nhân hào kiệt như : *Trần Văn Kỷ, Nguyễn Tri Phương, Trương Minh Giảng, Nguyễn Chí Diểu,...*

Tiếp bước truyền thống hiếu học của cha ông, trong những năm gần đây các ngành giáo dục của huyện đã có những khởi sắc đáng kể, nhiều giáo viên đã đoạt các giải cao trong Hội thi giáo viên giỏi Tỉnh và Quốc gia, nhiều học sinh đã đỗ vào các trường Đại học với số điểm rất cao, đặc biệt có nhiều học sinh đoạt giải cao trong các kì thi học sinh giỏi cấp Huyện và Tỉnh.

Trong 5 năm gần đây Phòng Giáo dục huyện Phong Điền đã có nhiều thành tích đáng kể, cụ thể là :

* Đạt 10/10 tiêu chí thi đua theo chuẩn đánh giá của Bộ Giáo dục và Đào tạo đối với Phòng Giáo dục quận, huyện.

* Liên tiếp nhiều năm Phòng Giáo dục Phong Điền hoàn thành xuất sắc nhiệm vụ và đã được UBND tỉnh Thừa Thiên - Huế tặng Bằng khen.

* Năm học 2000-2001 Phòng Giáo dục Phong Điền đạt thành tích xuất sắc và đã được Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo tặng Bằng khen.

* Phòng Giáo dục Phong Điền đã được Thủ tướng Chính phủ tặng Bằng khen vì đã có nhiều thành tích trong công tác giảng dạy và học tập từ năm học 1998-1999 đến năm học 2002-2003, góp phần vào sự nghiệp xây dựng Chủ nghĩa xã hội và bảo vệ Tổ quốc.

* Từ năm học 1999-2000 đến nay liên tục được Tổng Liên đoàn Lao động Việt Nam công nhận là Công đoàn cơ sở vững mạnh.

* Nhiều cán bộ công chức công tác tại Phòng Giáo dục Phong Điền được tặng Bằng khen của Bộ Giáo dục và Đào tạo, Tổng Liên đoàn Lao động Việt Nam, UBND tỉnh Thừa Thiên - Huế.

Lãnh đạo và cán bộ Phòng Giáo dục Huyện Phong Điền

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT36M5

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2005

Giá : 3500 đồng
Ba nghìn năm trăm đồng