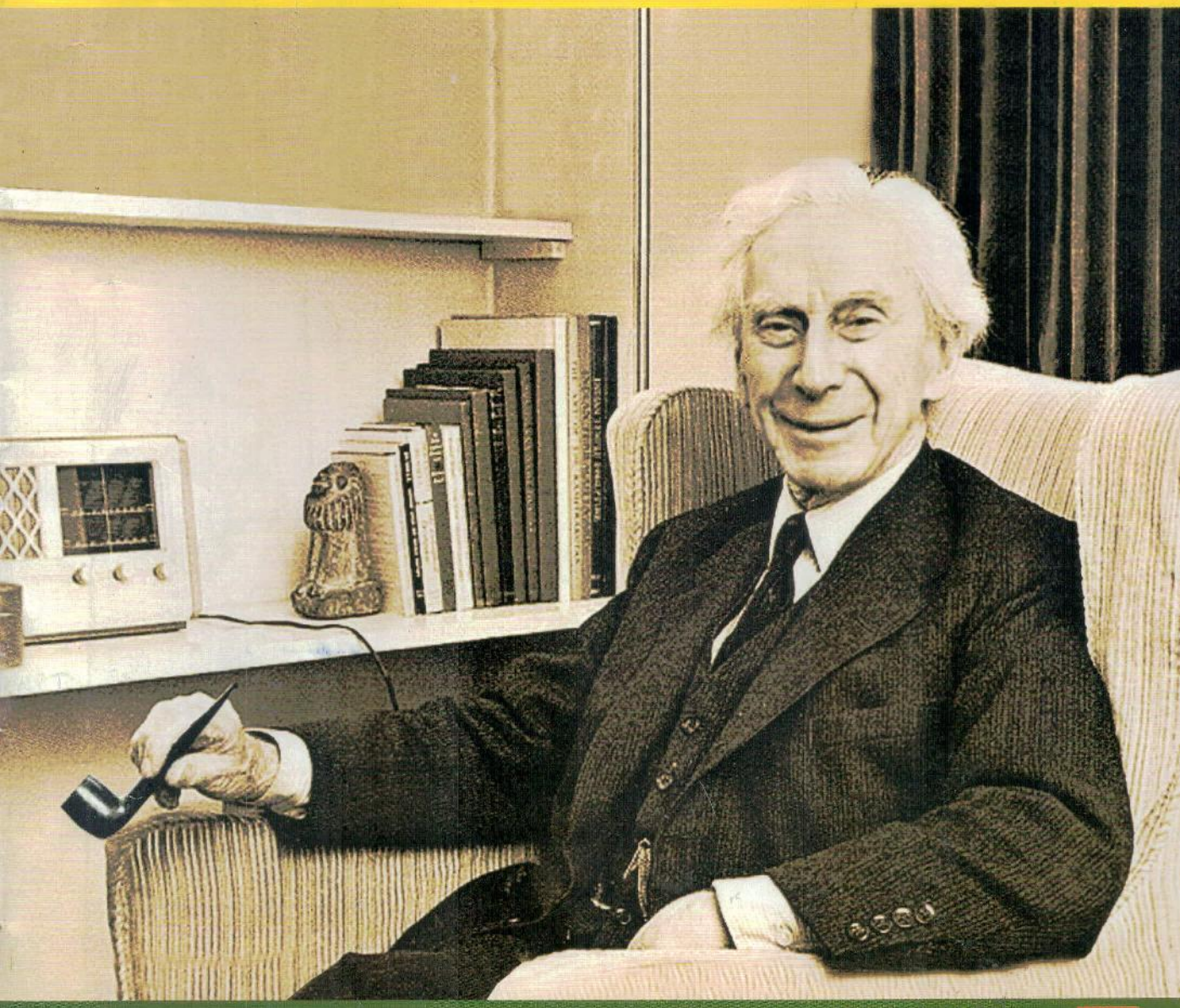
TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

10 2019
Số 508

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 56
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre



Nhà toán học Bertrand Russell (1872 – 1970)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu tới bạn đọc

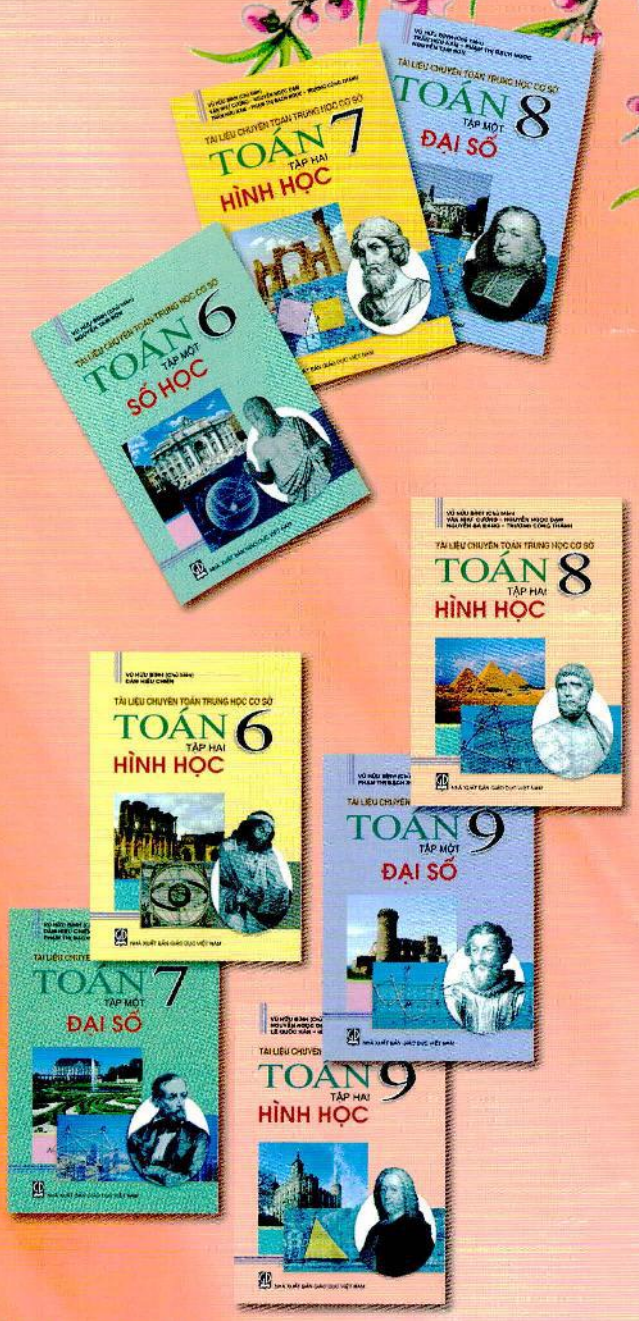
Bộ sách TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN THCS

Bộ sách **"Tài liệu chuyên Toán Trung học cơ sở"** có tất cả 8 cuốn, cho các lớp 6, 7, 8, 9, mỗi lớp gồm 2 tập: tập một là *Đại số* (ở lớp 6, tập một là *Số học*), tập hai là *Hình học*. Nội dung trong mỗi cuốn đều bám sát chương trình Toán ở các lớp THCS.

Mỗi cuốn đều có hai phần: phần *Các chuyên đề cơ bản* (viết theo từng chương của SGK) và phần *Một số chuyên đề nâng cao*. Phần đầu trong mỗi chuyên đề là tóm tắt các kiến thức lí thuyết của chuyên đề mà HS cần nắm vững, tiếp theo giới thiệu một số ví dụ minh hoạ và sau đó là các bài tập đề nghị để HS luyện tập. Những chuyên đề nâng cao nhằm giúp HS hiểu sâu và rộng hơn những nội dung có liên quan đến chương trình. Những ví dụ và các bài tập trình bày trong sách được các tác giả chọn lọc khá kĩ lưỡng, trong đó có nhiều ví dụ, bài tập là những bài thi học sinh giỏi Toán Quốc gia, thi Olympic Toán, ... Bằng việc đọc, giải những ví dụ và bài tập này, HS sẽ được mở rộng, đào sâu những kiến thức đã học, qua đó được rèn luyện khả năng tư duy Toán học. Cuối sách sẽ là phần *Hướng dẫn giải* cho các bài tập được đưa ra ở cuối mỗi chuyên đề.

Nhóm tác giả của bộ sách là những thầy cô giáo đã hoặc đang giảng dạy ở các lớp chuyên Toán của các trường Đại học và các trường Trung học phổ thông có uy tín, là những chuyên gia Toán ở Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ và Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, chẳng hạn như: NGND. *Vũ Hữu Bình* (chủ biên), NGƯT *Nguyễn Tam Sơn*, nhà giáo *Đàm Hiếu Chiến*, PGS.TS. *Văn Như Cương*, PGS.TS *Đàm Văn Nhỉ*, TS. *Phạm Thị Bạch Ngọc*, PGS.TS. *Lê Quốc Hán*, TS. *Trần Hữu Nam*, ...

Hi vọng rằng bộ sách sẽ là một tài liệu thiết thực và bổ ích giúp các em học sinh hiểu sâu sắc những kiến thức Toán đã học, và góp phần vào việc nâng cao chất lượng đào tạo và bồi dưỡng học sinh giỏi Toán ở cấp Trung học cơ sở.



Bạn đọc có thể đặt mua sách tại các Công ty Sách - Thiết bị Trường học ở các địa phương hoặc các Cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

Địa chỉ liên hệ: - **PHÒNG KINH DOANH CTCP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI**

Địa chỉ: Tầng 4, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

Tel: (024) 35121977, số máy lẻ: 120 - Fax: (024) 35123278

- Các cửa hàng Sách Giáo dục của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam trên cả nước

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Cuốn sách

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN VÀ KINH NGHIỆM GIẢI

(Tái bản lần thứ nhất, có chỉnh lí, bổ sung) Của tác giả NGND. VŨ HỮU BÌNH

Sách dày 224 trang, khổ 17 x 24 cm, giá bìa 42000 đồng

Nội dung của sách trình bày các phương pháp giải phương trình với nghiệm nguyên, vốn là một đề tài lý thú của Số học và Đại số, từ các học sinh nhỏ với những bài toán như *Trăm trâu trăm cỏ* đến các chuyên gia toán học với những bài toán như *định lí lớn Fermat.*

Sách gồm 5 chương:

Chương I giới thiệu các phương pháp thường dùng để giải phương trình nghiệm nguyên.

Chương II giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên được sắp xếp theo từng ngày.

Chương III giới thiệu những bài toán đưa về giải phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những bài toán vui, bài toán thực tế.

Chương IV giới thiệu một số phương trình nghiệm nguyên mang tên các nhà toán học như *Pell, Pythagore, Fermat, Diophante, ...*

Chương V giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên chưa được giải quyết và những bước tiến của Toán học để giải những phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những đóng góp của *Andrew Wiles* chứng minh định lý lớn Fermat và Giáo sư *Ngô Bảo Châu* chứng minh Bổ đề cơ bản trong *Chương trình Langlands.*

Phương trình nghiệm nguyên có số phương trình ít hơn số ẩn nên đòi hỏi người giải toán phải vận dụng kiến thức sáng tạo, vì thế phương trình nghiệm nguyên thường có mặt trong các đề thi học sinh giỏi từ bậc tiểu học, trung học cơ sở đến trung học phổ thông. Cuốn sách dành một phần thích đáng nêu những kinh nghiệm giải toán về phương trình nghiệm nguyên như cách phân tích bài toán, cách suy luận để tìm hướng giải, cách phân chia bài toán thành những bài toán nhỏ dễ giải quyết hơn, cách "*đưa khó về dễ, đưa lạ về quen*", cách liên hệ tình huống đang giải quyết với những vấn đề mới, cách chọn hướng đi phù hợp với từng bài toán đặt ra ...tất cả những điều đó đều là những kĩ năng mà mỗi người cần có trong học tập, trong nghiên cứu và trong cuộc sống.

Trong lần tái bản này, cuốn sách bổ sung thêm những kinh nghiệm giải toán, bổ sung thêm một số thí dụ, cập nhật thêm một số sự kiện liên quan đến tiểu sử các nhà toán học, bổ sung thêm một số cách giải.

Với những câu thơ ở đầu mỗi chương, với cách trình bày rõ ràng, dễ hiểu, tươi mát, với những thông tin cập nhật, với những kinh nghiệm thực tế trong bồi dưỡng học sinh giỏi và viết sách, tác giả cuốn sách, NGND *Vũ Hữu Bình* sẽ đem đến cho bạn đọc những kiến thức hệ thống và những kinh nghiệm giải toán giúp giải quyết một loại toán khó ở bậc phổ thông.

Tin rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường Đại học và Cao đẳng ngành Toán, cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học Toán tốt hơn.

Bạn đọc có thể đặt mua ấn phẩm trên tại: Tòa soạn Tạp chí TH&TT; Các cơ sở Bưu điện; Các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương; Các Cửa hàng sách của NXB Giáo dục Việt Nam; Siêu thị trực tuyến www.sachtoan24h.com (hotline: 0973472803, 0912920591).

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, 187B Giảng Võ, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: 024.35121607
- Điện thoại Fax- phát hành: 024. 35121606
- Số tài khoản: 111000002173, tại Ngân hàng Thương mại Cổ phần Công thương Việt Nam - chi nhánh Hoàn Kiếm, Hà Nội.

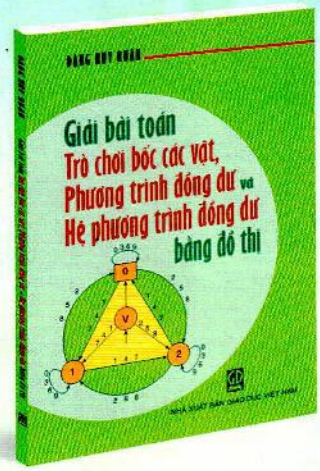
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc cuốn sách mới

GIẢI BÀI TOÁN TRÒ CHƠI BỐC CÁC VẬT, PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG DƯ VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG DƯ BẰNG ĐỒ THỊ

của tác giả GS. TS. NGND ĐẶNG HUY RUẬN

Sách dày 112 trang, khổ 17x24cm, giá bìa: 30.000 đồng.



Nội dung của sách trình bày phương pháp giải bài toán trò chơi bốc các vật, phương trình đồng dư tuyến tính, hệ phương trình đồng dư tuyến tính và phương trình đồng dư bậc cao bằng đồ thị. Nói cụ thể hơn: Nội dung chủ yếu của cuốn sách là trình bày thuật toán xây dựng đồ thị có hướng với các cung được gán nhãn trên bảng chữ cái thập phân mà nhãn của đồ thị nhận được chính là tập nghiệm của phương trình hay hệ phương trình đồng dư.

Sách gồm hai phần chính:

Phần trò chơi bốc các vật trình bày thuật toán để người đi đầu chiến thắng bằng cách bốc được vật cuối cùng (hoặc không phải bốc vật cuối cùng).

Phần phương trình và hệ phương trình đồng dư được trình bày trong bốn chương cuối của cuốn sách.

Chương IV trình bày thuật toán xây dựng đồ thị xác định tập nghiệm của phương trình $ax \equiv b \pmod{m}$ với a, m là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, còn $b \in \{0, 1, ..., m-1\}$.

Chương VI trình bày thuật toán xây dựng đồ thị xác định tập nghiệm của hệ phương trình đồng dư tuyến tính.

Chương VII trình bày thuật toán xây dựng đồ thị xác định tập nghiệm của hệ phương trình đồng dư bậc cao.

Chương V trình bày về thuật toán giải phương trình đồng dư tuyến tính dạng đặc biệt $x \equiv b \pmod{m}$. Tập nghiệm của phương trình này chính là tập số đồng dư với b theo module m. Bởi vậy đồ thị xác định tập nghiệm của phương trình này được gọi là nguồn đồng dư.

Cuốn sách không những trình bày thuật toán xây dựng nguồn đồng dư theo một module, mà còn trình bày thuật toán xây dựng nguồn đồng dư theo nhiều module và một số cấu trúc khác, chẳng hạn, nguồn sinh tất cả các số nguyên dương chia hết cho 7, mà mỗi số này đều có chữ số lẻ và chữ số chẵn đan xen nhau.

Trong khi Quý độc giả giảng dạy, hướng dẫn hoặc làm việc về đồng dư mà có nguồn đồng dư theo module m bên cạnh thì có thể chỉ ra hàng chục số gồm nhiều chữ số chia hết cho m trong chốc lát.

Tin tưởng rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo yêu toán phổ thông mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường đại học và cao đẳng ngành toán cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học tốt môn số học.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, 187B Giảng Võ, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: 024.35121607
- Điện thoại Fax- phát hành: 024. 35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT10M9

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2019

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

MỘT TÍNH CHẤT CỦA HÌNH THANG

THÁI NHẬT PHƯỢNG

(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Tính chất. *Đường thẳng nối giao điểm các đường chéo và giao điểm các đường thẳng chứa hai cạnh bên của hình thang thì đi qua trung điểm của hai đáy.* (*)

Chứng minh. Xét hình thang $ABCD$ (AB // CD), $O = AC \cap BD$, $I = AD \cap BC$, $M = IO \cap AB$, $N = IO \cap CD$.

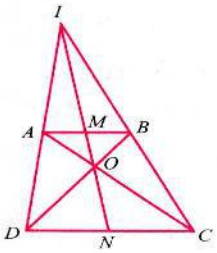
Từ AB // CD suy ra:

$\frac{ND}{MA} = \frac{IN}{IM} = \frac{NC}{MB} = \frac{CD}{AB}$,

$\frac{ND}{MB} = \frac{ON}{OM} = \frac{NC}{MA} = \frac{CD}{AB}$.

Do đó $MA = MB$,

$NC = ND$ (đpcm).



Nhận xét. 1) Vì bốn điểm I, O, M (trung điểm của AB) và N (trung điểm của CD) thẳng hàng nên đường thẳng đi qua hai trong bốn điểm đó sẽ đi qua hai điểm còn lại.

2) Ngược lại, nếu ba trong bốn điểm I, O, M, N thẳng hàng thì AB // CD. Thật vậy, xét trường hợp I, O, N thẳng hàng.

Theo định lí Ceva ta có $\frac{ND}{NC}.\frac{BC}{BI}.\frac{AI}{AD} = 1$. Vì $ND = NC$ nên $\frac{BC}{BI} = \frac{AD}{AI} \Rightarrow AB$ // DC.

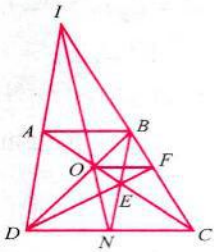
Các trường hợp khác dành cho bạn đọc.

3) Nếu AD // BC thì chỉ có M, O, N thẳng hàng.

Bây giờ ta vận dụng tính chất (*) để giải một số bài toán sau đây.

Bài toán 1. *Cho hình thang $ABCD$ (AB // CD). Gọi $O = AC \cap BD$ chỉ dùng thước thẳng, hãy dựng đường thẳng qua O và song song với hai đáy.*

Lời giải. a) Trường hợp AD và BC cắt nhau.



Cách dựng:

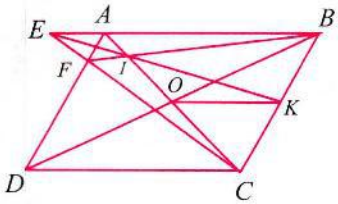
- Dựng $I = AD \cap BC$.
- Dựng $N = IO \cap CD$.
- Dựng $E = BN \cap OC$.
- Dựng $F = DE \cap BC$.
- Nối O với F thì OF là đường thẳng cần dựng.

Chứng minh: Theo tính chất (*) thì $NC = ND$.

Theo nhận xét 2 thì OF // DC.

b) Trường hợp AD // BC.

Cách dựng:

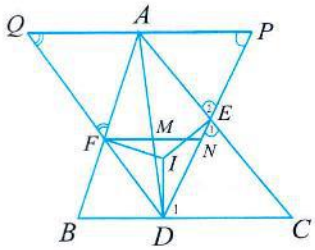


- Dựng đường thẳng qua C cắt tia BA và tia DA lần lượt tại E và F.
- Dựng $I = AC \cap BF$.
- Dựng $K = EI \cap BC$.
- OK là đường thẳng cần dựng.

Chứng minh. Ta có AF // BC; theo tính chất (*) thì EI đi qua K là trung điểm của BC mà $OB = OD$ nên OK // DC.

Bài toán 2. *Gọi I là giao điểm các đường phân giác của ΔABC. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của I trên BC, CA, AB. Đường thẳng qua F và song song với BC cắt AD và DE lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng MF = MN.*

Lời giải. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt DE, DF lần lượt tại P, Q.



Ta có $CD = CE$ $(\Delta CDI = \Delta CEI)$

$\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{E_1}$ mà

$\widehat{D_1} = \widehat{P}\,(AP \,//\, DC)$,

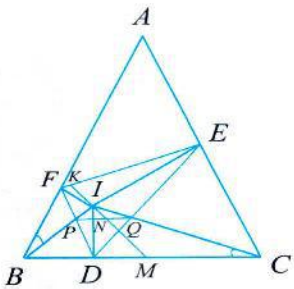
$\widehat{E_1} = \widehat{E_2}$ nên $\widehat{P} = \widehat{E_2}$

$\Rightarrow AP = AE$.

Tương tự $AQ = AF$ mà $AE = AF$ $(\Delta AEI = \Delta AFI)$ nên $AP = AQ$. Lại có $FN \,//\, QP$ do đó $MF = MN$.

Bài toán 3. *Cho ΔABC cân tại A. Lấy điểm I trong tam giác sao cho $\widehat{ABI} = \widehat{BCI}$. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của I trên BC, CA, AB. Gọi $P = IB \cap DF$, $Q = IC \cap DE$. Hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác IFP và IEQ cắt nhau tại $K \neq I$. Chứng minh rằng KI đi qua trung điểm của BC.*

Lời giải. Các tứ giác $BDIF$, $CDIE$ nội tiếp nên suy ra:



$\widehat{FDI} = \widehat{FBI} = \widehat{BCI}$

và

$\widehat{EDI} = \widehat{ECI} = \widehat{CBI}$.

Do đó: $\widehat{PIQ} + \widehat{PDQ} = \widehat{PIQ} + \widehat{FDI} + \widehat{EDI}$

$= \widehat{BIC} + \widehat{BCI} + \widehat{CBI} = 180^0$

$\Rightarrow$ tứ giác $PIQD$ nội tiếp.

Từ đó $\widehat{IPQ} = \widehat{IDQ} = \widehat{ICE} = \widehat{IBC} \Rightarrow PQ \,//\, BC$. KI cắt BC, PQ lần lượt tại M, N. Các tứ giác $FKIP$, $BFID$ nội tiếp và $PQ \,//\, BC$ suy ra:

$$\widehat{NKP} = \widehat{IFP} = \widehat{IBC} = \widehat{IPN}.$$

Do đó: $\Delta NKP \backsim \Delta NPI \Rightarrow NP^2 = NI.NK$.

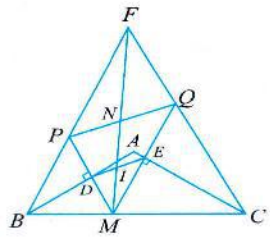
Tương tự: $NQ^2 = NI.NK$, suy ra $NP = NQ$.

Kết hợp với $PQ \,//\, BC$

Suy ra: $MB = MC$ (đpcm).

Bài toán 4. *Cho ΔABC cân tại A có $\widehat{A} = 120^0$. M là một điểm thay đổi trên cạnh BC. Kẻ $MD \perp AB$ tại D, $ME \perp AC$ tại E. Gọi I là trung điểm của DE. Chứng minh rằng MI luôn đi qua một điểm cố định.*

Lời giải. Vẽ tam giác đều BCF với F và A nằm cùng phía đối với BC. Gọi P và Q lần lượt là giao điểm của MD, ME với FB,FC, $N = PQ \cap FM$.



Ta có: $\widehat{ABF} = \widehat{ABC} = \widehat{ACF} = \widehat{ACB} = 30^0$ nên A là tâm của tam giác đều BCF. Từ đó $MP \,//\, QF$ (cùng vuông góc với AB); $MQ \,//\, PF$ (cùng vuông góc với AC). Suy ra $MPFQ$ là hình bình hành nên $NP = NQ$. ΔBPM có $\widehat{DBM} = \widehat{DBP}$ và $BD \perp MP$ nên $DM = DP$. Tương tự $EM = EQ$. Do đó DE là đường trung bình của ΔMPQ nên $DE \,//\, PQ$ mà $ID = IE$ suy ra M, I, N thẳng hàng. Do đó M, I, F thẳng hàng. Vậy MI đi qua điểm cố định F.

Bài toán 5. *Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến AB (B là tiếp điểm) và cát tuyến ACD không qua O (AC < AD). Vẽ đường kính BE. Gọi I và K lần lượt là giao điểm của AO với EC và ED. Chứng minh rằng OI = OK.*

(*Xem tiếp trang* 16)

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC, năm học 2019 - 2020

VÒNG 1

(Dùng cho mọi thí sinh thi vào trường chuyên)

Câu 1. a) ĐK: $x \ge 0; x \ne 4; x \ne 9$.

$$P = \left(\frac{2\sqrt{x}}{9-x} + \frac{1}{3+\sqrt{x}}\right).\frac{x\left(3-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}-2}$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{x}}{(3+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})} + \frac{3-\sqrt{x}}{(3+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})}\right).\frac{x(3-\sqrt{x})}{\sqrt{x}-2}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}+3-\sqrt{x}}{(3+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})}.\frac{x(3-\sqrt{x})}{\sqrt{x}-2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}+3}{(3+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})}.\frac{x(3-\sqrt{x})}{\sqrt{x}-2} = \frac{x}{\sqrt{x}-2}.$$

b) $P = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x}-2} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x + \sqrt{x} - 2 = 0$

. Đặt $t = \sqrt{x}$, ($t > 0; t \ne 2,3$) ta được PT:

$$3t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \frac{2}{3} \end{array}\right..$$

Với $t = -1$ (loại). Với $t = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{4}{9}$.

Câu 2. a) Thay $m = -2$ PT trở thành:

$$x^2 + 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1-\sqrt{7} \\ x = -1+\sqrt{7} \end{array}\right..$$

b) $x^2 - 2(m+1)x + m - 4 = 0$ có

$\Delta' = (m+1)^2 - (m-4) = m^2 + m + 5 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Do đó PT luôn có hai nghệm phân biệt x_1, x_2.

Theo định lý Viète ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1x_2 = m-4 \end{cases}$.

Theo giả thiết: $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 = 25$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 5x_1x_2 = 25 \Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 5(m-4) = 25$

$\Leftrightarrow 4m^2 + 3m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1,\ m = \frac{1}{4}$.

Vậy giá trị cần tìm là: $m = -1; m = \frac{1}{4}$.

Câu 3. a) ĐK: $x \ge \frac{1}{2}$. Ta có:

$$4x^2 + 3x + 3 = 4x\sqrt{x+3} + 2\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow \left(4x^2 - 4x\sqrt{x+3} + x + 3\right) + \left(2x - 1 - 2\sqrt{2x-1} + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3} - 2x\right)^2 + \left(\sqrt{2x-1} - 1\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 2x \\ \sqrt{2x-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy PT có nghiệm duy nhất $x = 1$.

b) $\begin{cases} 2x^3 + 3x^2y = 5 \\ y^3 + 6xy^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^3 + 12x^2y = 20 \\ y^3 + 6xy^2 = 7 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 + 3x^2y = 5 \\ (2x+y)^3 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 + 3x^2y = 5 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 + 3x^2(3-2x) = 5 \\ y = 3 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 9x^2 + 5 = 0 \\ y = 3 - 2x \end{cases}$$

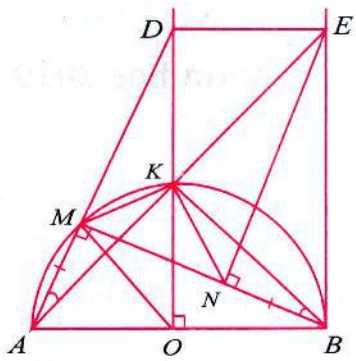
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(4x^2 - 5x - 5) = 0 \\ y = 3 - 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; y = 1 \\ x = \frac{5-\sqrt{105}}{8}; y = \frac{7+\sqrt{105}}{4} \\ x = \frac{5+\sqrt{105}}{8}; y = \frac{7-\sqrt{105}}{4} \end{array}\right..$$

Vậy HPT đã cho có ba nghiệm $(x; y)$ là:

$$(1;1), \left(\frac{5-\sqrt{105}}{8}; \frac{7+\sqrt{105}}{4}\right), \left(\frac{5+\sqrt{105}}{8}; \frac{7-\sqrt{105}}{4}\right).$$

Câu 4.



a) $\widehat{DMK} = \widehat{ABK} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AK} = 45^0$,

mà $\widehat{BMK} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BK} = 45^0 \Rightarrow \widehat{DMK} = \widehat{BMK}$.

Suy ra MK là đường phân giác của $\widehat{DMB}$.

b) Xét hai tam giác AMK và BNK có:

$AK = BK, \widehat{MAK} = \widehat{NBK}, AM = BN$.

Suy ra $\Delta AMK = \Delta BNK \Rightarrow \widehat{AMK} = \widehat{BNK}$.

c) Gọi Δ là đường thẳng đi qua B và vuông góc với AB. Đường thẳng vuông góc với BM tại N luôn cắt Δ tại một điểm E. Ta đi chứng minh E cố định.

Xét hai tam giác vuông AMB và BNE có:

$$AM = BN, \widehat{MAB} = \widehat{NBE} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BM}.$$

Suy ra $\Delta AMB = \Delta BNE \Rightarrow BE = AB = 2R$ (không đổi). Vậy điểm E cố định.

Khi $DE \,//\, AB$ ta có $BODE$ là hình chữ nhật $\Rightarrow OD = BE = AB = 2R$. $AD = \sqrt{OD^2 + OA^2} = R\sqrt{5}$.

Mặt khác, ta có: $\Delta AMB \sim \Delta AOD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AM}{AO} = \frac{AB}{AD}$

$\Rightarrow AM = \frac{AO.AB}{AD} = \frac{2\sqrt{5}R}{5}$. Vậy M là điểm nằm trên cung AK và cách A một khoảng bằng $\frac{2\sqrt{5}R}{5}$.

Câu 5. Ta có:

$$8 = (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc \Rightarrow abc \leq 1;$$

$$8 = (a+b)(b+c)(c+a)$$
$$= (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$$
$$\Rightarrow 8 + abc = (a+b+c)(ab+bc+ca).$$

Áp dụng BĐT: $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$, ta có: $ab+bc+ca \geq \sqrt{3abc(a+b+c)}$

$$\Rightarrow 8 + abc = (a+b+c)(ab+bc+ca)$$
$$\geq (a+b+c)\sqrt{3abc(a+b+c)}$$
$$\Rightarrow \frac{8+abc}{\sqrt{3abc}} \geq \sqrt{(a+b+c)^3}.$$

Mà $\frac{8+abc}{\sqrt{3abc}} \leq \frac{9}{\sqrt{3abc}}$, suy ra:

$$\frac{9}{\sqrt{3abc}} \geq \sqrt{(a+b+c)^3} \Rightarrow \frac{81}{3abc} \geq (a+b+c)^3$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \geq a+b+c \Rightarrow \frac{3}{a+b+c} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Theo BĐT Schwarz ta có:

$$\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{b+2c} + \frac{1}{c+2a} \geq \frac{3}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{3}{a+b+c} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} + \sqrt[3]{abc} \geq 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. Vậy min$P = 2$.

VÒNG 2

(Dùng cho thí sinh thi vào chuyên Toán và chuyên Tin)

Câu 1. a) PT $x^2 - 2x - 2\sqrt{x^2 - 2x + 2} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 - 2\sqrt{x^2 - 2x + 2} - 3 = 0$ (1).

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x + 2} = \sqrt{(x-1)^2 + 1}$ (ĐK: $t \geq 1$).

PT(1) trở thành: $t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 3 \end{array}\right.$.

Kết hợp với ĐK ta được $t = 3$. Với $t = 3$, ta có:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + 2\sqrt{2} \\ x = 1 - 2\sqrt{2} \end{array}\right..$$

Vậy PT có hai nghiệm phân biệt là

$$x=1+2\sqrt{2};x=1-2\sqrt{2}.$$

b) Nhận xét:

$$2x^2-x+1=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}\geq\frac{7}{8}>0\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Do đó $2x^2-x+3>0;\ 2x^2-x+7>0.$

Đặt $t=2x^2-x+1$ (ĐK: $t\geq\frac{7}{8}$). PT đã cho trở thành: $\frac{1}{t}+\frac{3}{t+2}=\frac{10}{t+6}$

$\Leftrightarrow(t+2)(t+6)+3t(t+6)=10t(t+2)$

$\Leftrightarrow t^2-t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=-1\ \text{(loại)}\end{array}\right.$.

Với $t=2$ có: $2x^2-x+1=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$.

Vậy PT có hai nghiệm là: $x=1;x=-\frac{1}{2}$

c) Kí hiệu $\begin{cases}2\sqrt{x+3y+2}-3\sqrt{y}=\sqrt{x+2} & (1)\\ y^2+xy+x^2=4y+1 & (2)\end{cases}$

ĐK: $\begin{cases}x+3y+2\geq0\\x+2\geq0\\y\geq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq-2\\y\geq0\end{cases}$ (*)

$(1)\Leftrightarrow2\sqrt{x+3y+2}=\sqrt{x+2}+3\sqrt{y}$

$\Rightarrow4(x+3y+2)=x+2+9y+6\sqrt{y(x+2)}$

$\Leftrightarrow(x+2)-2\sqrt{(x+2)y}+y=0$

$\Leftrightarrow(\sqrt{x+2}-\sqrt{y})^2=0\Leftrightarrow y=x+2$ (3).

Thay (3) vào (2) ta được:

$3x^2+2x-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=3\\x=-\frac{5}{3}\Rightarrow y=\frac{1}{3}\end{array}\right.$ (thỏa mãn (*))

Vậy hệ có hai nghiệm $(x;y)$ là: $(1;3),\left(-\frac{5}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Câu 2. a) Ta có

$$9x^2-3xy-24x-2y^2+y+28=0$$

$$\Leftrightarrow(y+3x-3)(2y-3x+5)=13.$$

Do $x,y\in\mathbb{Z}\Rightarrow y+3x-3;2y-3x+5\in\mathbb{Z}$ và $y+3x-3;2y-3x+5\in Ư(13)$ nên ta có bốn trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases}y+3x-3=1\\2y-3x+5=13\end{cases}\Rightarrow3y+2=14\Leftrightarrow y=4\Rightarrow x=0.$

TH2: $\begin{cases}y+3x-3=-1\\2y-3x+5=-13\end{cases}\Rightarrow3y+2=-14$

$\Leftrightarrow y=\frac{-16}{3}$ (loại).

TH3: $\begin{cases}y+3x-3=13\\2y-3x+5=1\end{cases}\Rightarrow3y+2=14\Leftrightarrow y=4\Rightarrow x=4.$

TH4: $\begin{cases}y+3x-3=-13\\2y-3x+5=-1\end{cases}\Rightarrow3y+2=-14$

$\Leftrightarrow y=\frac{-16}{3}$ (loại).

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên $(x;y)=(0;4);(x;y)=(4;4)$.

b) Giả sử tìm được các số nguyên dương p,m,n thỏa mãn yêu cầu.

Từ $2^mp^2+1=n^5$ suy ra n lẻ và $n>1$. Ta có:

$2^mp^2=n^5-1\Leftrightarrow2^mp^2=(n-1)(n^4+n^3+n^2+n+1)$

Đặt $q=n^4+n^3+n^2+n+1\Rightarrow q$ lẻ và $q>n+1>n-1>1$. Khi đó $2^mp^2=(n-1)q$ (1)

Nếu $p=2$ ta được $2^{m+2}=(n-1)q\Rightarrow2^{m+2}\vdots q$ (vô lý do q lẻ và $q>1$). Vậy p là số nguyên tố lẻ.

Từ $2^mp^2=(n-1)q$ suy ra: $\left[\begin{array}{l}n-1=2^mp;q=p\\n-1=2^m;q=p^2\end{array}\right.$

(do $q>1$).

TH1: $n-1=2^mp;q=p\Rightarrow\ n-1=2^mp>p=q$ (không thỏa mãn $q>n-1$).

TH2: $n-1=2^m;q=p^2$. Đặt $p=2k+1$. Ta có:

$n^4+n^3+n^2+n+1=q\Leftrightarrow n(n^2+1)(n+1)=p^2-1$

$\Leftrightarrow(2^{2m}+2.2^m+2)(2^{2m}+3.2^m+2)=4k(k+1)$ (*)

Nếu $m\geq2$, VT(*) chia cho 8 dư 4, nhưng VP(*) chia hết cho 8 (vô lý). Vậy $m=1$. Khi đó thì $n=3$ và $p=11$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy

$m=1, n=3, p=11$.

Câu 3. Áp dụng BĐT Schwarz, ta có:

$$\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}}+\frac{b}{\sqrt{c+\sqrt{ab}}}+\frac{c}{\sqrt{a+\sqrt{bc}}}$$
$$\geq \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}+\sqrt{c+\sqrt{ab}}+\sqrt{a+\sqrt{bc}}} \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$\sqrt{b+\sqrt{ac}}=\frac{2\sqrt{2(b+\sqrt{ac})}}{2\sqrt{2}}\leq\frac{2+b+\sqrt{ac}}{2\sqrt{2}} \quad (2)$$

Tương tự: $\sqrt{c+\sqrt{ab}}\leq\frac{2+c+\sqrt{ab}}{2\sqrt{2}}$ (3);

$$\sqrt{a+\sqrt{bc}}\leq\frac{2+a+\sqrt{bc}}{2\sqrt{2}} \quad (4).$$

Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra:

$$\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}}+\frac{b}{\sqrt{c+\sqrt{ab}}}+\frac{c}{\sqrt{a+\sqrt{bc}}}$$
$$\geq\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{(2+b+\sqrt{ac})+(2+c+\sqrt{ab})+(2+a+\sqrt{bc})}$$
$$\Leftrightarrow\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}}+\frac{b}{\sqrt{c+\sqrt{ab}}}+\frac{c}{\sqrt{a+\sqrt{bc}}}$$
$$\geq\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{a+b+c+\sqrt{ac}+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+6}.$$

Ta chứng minh:

$$\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{a+b+c+\sqrt{ac}+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+6}\geq\frac{3}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

Thật vậy: (5) $\Leftrightarrow 4(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$

$$\geq 3(a+b+c+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+6)$$
$$\Leftrightarrow a+b+c+5(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})\geq 18 \quad (6).$$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

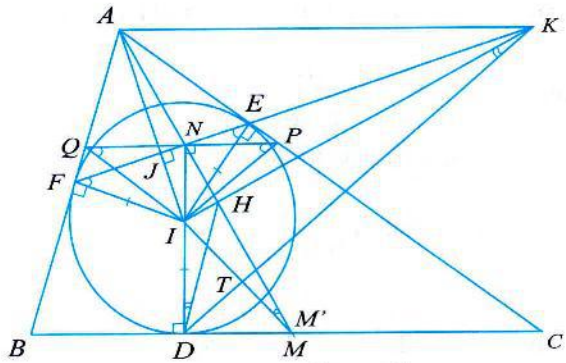
$$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}\geq 3;$$
$$5(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})\geq 5.3.\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\geq 15.$$

Vậy (6) đúng. Do đó

$$\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}}+\frac{b}{\sqrt{c+\sqrt{ab}}}+\frac{c}{\sqrt{a+\sqrt{bc}}}\geq\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Câu 4.



a) Ta có: $IN\perp PQ\Rightarrow\widehat{INP}=\widehat{IEP}=90^0\Rightarrow$ tứ giác $INEP$ nội tiếp đường tròn (1).

Tương tự: $\widehat{INQ}=\widehat{IFQ}=90^0\Rightarrow$ tứ giác $INQF$ nội tiếp (2).

Mặt khác ΔIEF cân tại I nên $\widehat{IEN}=\widehat{IFN}$ (3).

Từ (1) suy ra $\widehat{IPN}=\widehat{IEN}$, từ (2) suy ra $\widehat{IQN}=\widehat{IFN}$. Do đó $\widehat{IPN}=\widehat{IQN}\Rightarrow\Delta IPQ$ cân tại I.

b) Theo a) ΔIPQ cân tại I, suy ra N là trung điểm PQ. Kéo dài AN cắt BC tại M', cắt IK tại H. Khi đó áp dụng định lý Thales ta có:

$$\frac{QN}{BM'}=\frac{AN}{AM'}=\frac{NP}{M'C}\Rightarrow BM'=M'C\Rightarrow M'\equiv M.$$

Vậy ba điểm A, N, M thẳng hàng.

Xét ΔAIK có: $NK\perp AI; IN\perp AK$ (do $AK\,//\,BC$) $\Rightarrow$ N là trực tâm ΔAIK $\Rightarrow AN\perp IK$.

c) Đặt $J=EF\cap AI; T=IM\cap DK$.

Ta có: $\Delta IAH\sim\Delta IKJ$ (g.g), suy ra:

$$\frac{IH}{IJ}=\frac{IA}{IK}\Rightarrow IH.IK=IJ.IA \quad (4)$$

(Xem tiếp trang 8)

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN HÀ NỘI
NĂM HỌC 2019 - 2020

Dành cho thí sinh thi vào lớp chuyên Toán.
Thời gian làm bài: 150 phút.

Bài I (2 *điểm*). 1) Giải phương trình

$$x^2+3x+8=(x+5)\sqrt{x^2+x+2}.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^2-2xy=8x^2-6x+1 \\ y^2=x^3+8x^2-x+1 \end{cases}.$$

Bài II (2,5 *điểm*).

1) Cho p,q là hai số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh $p^4+2019q^4$ chia hết cho 20.

2) Cho các số nguyên dương a,b,c,d thỏa mãn $a<b\le c<d;\ ad=bc$ và $\sqrt{d}-\sqrt{a}\le 1$.

a) Chứng minh $a+d>b+c$.

b) Chứng minh a là một số chính phương.

Bài III (1,5 *điểm*).

1) Với x,y,z là các số thực thỏa mãn $xyz=1$, chứng minh

$$\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}=1.$$

2) Với x,y,z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{2x^2+y^2+3}}+\frac{1}{\sqrt{2y^2+z^2+3}}+\frac{1}{\sqrt{2z^2+x^2+3}}.$$

Bài IV (3 *điểm*). Cho tứ giác $ABCD$ (không có hai cạnh nào song song) nội tiếp đường tròn (O). Các tia BA và CD cắt nhau tại điểm F. Gọi E là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Vẽ hình bình hành $AEDK$.

1) Chứng minh tam giác FKD đồng dạng với tam giác FEB.

2) Gọi M, N tương ứng là trung điểm của các cạnh AD, BC. Chứng minh đường thẳng MN đi qua trung điểm của đoạn thẳng EF.

3) Chứng minh đường thẳng EF tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp của tam giác EMN.

Bài V (1 *điểm*). Cho tập hợp

$$S=\{x\in\mathbb{Z}\mid 1\le x\le 50\}.$$

Xét A là một tập hợp con bất kì của tập hợp S và có tính chất: Không có ba phần tử nào của tập hợp A là số đo độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

1) Tìm một tập hợp A có đúng 40 phần tử và thỏa mãn điều kiện đề bài.

2) Có hay không có một tập hợp A có đúng 41 phần tử và thỏa mãn điều kiện đề bài ? Hãy giải thích câu trả lời.

Dành cho thí sinh thi vào lớp chuyên Tin.
Thời gian làm bài: 150 phút.

Bài I (2 *điểm*).

1) Giải phương trình

$$x^2+2x+7=(x+3)\sqrt{x^2+5}.$$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=1 \\ (x+y)(x^2+y^2)=1 \end{cases}.$

Bài II (2,5 *điểm*).

1) Tìm tất cả cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $4x^2+8xy+3y^2+2x+y+2=0$.

2) Cho hai số nguyên dương a,b thỏa mãn $3a^2+a=4b^2-b$. Chứng minh $a+b$ là một số chính phương.

Bài III (1,5 *điểm*). 1) Với x,y,z là các số thực thay đổi và thỏa mãn $xyz=1$, chứng minh

$$\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}=1.$$

2) Với x,y,z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $xyz\geq 1$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{xy+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{yz+y+1}}+\frac{1}{\sqrt{zx+z+1}}$.

Bài IV (3 *điểm*). Cho tam giác nhọn ABC cân tại A, đường cao BE và nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Kẻ đường kính BD của đường tròn (O). Đường thẳng BE cắt các đường thẳng AD và AO lần lượt tại các điểm I và H.

1) Chứng minh $BH.BI=2R^2$.

2) Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Lấy điểm N thuộc tia đối của tia OA sao cho $ON=\frac{R}{2}$. Chứng minh tứ giác $AMNC$ là tứ giác nội tiếp.

3) Gọi K là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh đường thẳng KE đi qua trung điểm của đoạn thẳng OI.

Bài V (1 *điểm*). Trên một đường tròn cho 2018 điểm phân biệt. *An* và *Bình* cùng chơi trò chơi như sau: Mỗi lượt chơi, một bạn sẽ nối 2 điểm trong 2018 điểm đã cho để được một dây cung sao cho dây cung vừa được vẽ không có điểm chung với bất kì dây cung nào đã vẽ trước đó. Hai bạn luân phiên thực hiện lượt chơi của mình. Bạn đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc. Nếu *An* là người đi trước, hãy chỉ ra chiến thuật chơi để *An* luôn là người thắng cuộc.

DƯƠNG TÚ (*Hà Nội*) **Giới thiệu**

HƯỚNG DẪN GIẢI... (*Tiếp theo trang 6*)

Ta có: $\Delta IJE\sim\Delta IEA$ (g.g), suy ra:

$$\frac{IJ}{IE}=\frac{IE}{IA}\Rightarrow IJ.IA=IE^2=ID^2 \quad (5)$$

Từ (4), (5) suy ra: $IH.IK=ID^2\Rightarrow\frac{IH}{ID}=\frac{ID}{IK}$

$\Rightarrow\Delta IHD\sim\Delta IDK$ (c.g.c)$\Rightarrow\widehat{IDH}=\widehat{IKD}$ (6)

Lại có $\widehat{IHM}=\widehat{IDM}=90^0\Rightarrow$ tứ giác $IDMH$ nội tiếp, suy ra $\widehat{IDH}=\widehat{IMH}$ (7)

Từ (6), (7) suy ra:

$$\widehat{ITK}=180^0-\widehat{TIK}-\widehat{IKD}=180^0-\widehat{TIK}-\widehat{IMH}$$
$$=\widehat{IHM}=90^0\Rightarrow IM\perp DK.$$

Câu 5. Ký hiệu (x, d, v) là bộ gồm x bi xanh, d bi đỏ và v bi vàng sau k lần thực hiện theo quy tắc của trò chơi.

Khi đó, ở lần thứ $k+1$, *Bình* có:
hoặc $(x+2, d-1, v-1)$ hoặc $(x-1, d+2, v-1)$ hoặc $(x-1, d-1, v+2)$. Để ý rằng:

$$(x+2)-(d-1)\equiv(x-1)-(d+2)$$
$$\equiv(x-1)-(d-1)\equiv x-d \pmod 3,$$

nên số dư của $x-d$ khi chia cho 3 không đổi qua mỗi lần đổi màu.

Sau mỗi lần thực hiện quy tắc trên thì tổng số bi là không thay đổi. Giả sử sau một số hữu hạn bước thực hiện, *Bình* thu được toàn bi một màu, tức là *Bình* thu được hoặc (63,0,0) hoặc (0,63,0) hoặc (0,0,63), tức là $x-d$; $d-v$; $v-x\ \vdots\ 3$. Nhưng ban đầu *Bình* có $x-d=19-21=-2$; $d-v=-2$; $v-x=4$ đều không chia hết cho 3. Vậy không thể thu được toàn bi một màu bằng quy tắc đổi màu trên.

TRẦN MẠNH CƯỜNG

(*GV THCS Kim Xá, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc*) **Giới thiệu**

PHÂN TÍCH, BÌNH LUẬN ĐỀ THI THPT QUỐC GIA MÔN TOÁN - NĂM 2019

NGUYỄN KHẢI *và Ban quản trị Nhóm Toán VD - VDC*

Năm học 2018-2019 chính thức khép lại với kỳ thi THPT Quốc gia. Bài thi môn Toán năm nay, nội dung đề thi nằm trong chương trình cấp THPT, chủ yếu là chương trình lớp 12, đảm bảo ngưỡng cơ bản để xét tốt nghiệp THPT và có độ phân hóa phù hợp để các cơ sở giáo dục đại học, giáo dục nghề nghiệp làm cơ sở cho tuyển sinh. So với năm 2017 và 2018 đề thi năm nay có sự phân hóa tốt hơn và tránh được tình trạng "mưa điểm 10" như năm 2017.

Đề thi gồm 24 mã đề được sinh ra từ 4 mã đề gốc 101, 102, 103, 104. Các mã đề gốc có nội dung tương tự nhau, trong đó 30 câu đầu ở mức độ nhận biết, thông hiểu được ra trong các mã đề nhằm kiểm tra kiến thức cơ bản của lớp 11, lớp 12; từ câu 31 đến câu 40 ở mức độ vận dụng, từ câu 41 đến câu 50 ở mức độ vận dụng cao đã thể hiện rõ tính phân hoá bằng cách sử dụng tổng hợp các kiến thức trong chương trình THPT. Các em có học lực khá, giỏi; có kỹ năng phân tích, tổng hợp, tính toán, liên hệ tốt thì mới có thể hoàn thành tốt bài thi.

Để có cái nhìn một cách toàn diện về đề thi môn Toán năm 2019, bên cạnh việc chỉ ra những kiến thức cơ bản vận dụng, những kỹ năng cần thiết để trả lời nhanh câu hỏi trắc nghiệm và định hướng phát triển hoặc tổng quát hoá bài toán. Ban quản trị Nhóm Toán VD-VDC xin giới thiệu với quý thầy cô và các em học sinh bài viết: "*Phân tích, bình luận đề thi THPT Quốc gia năm 2019*". Hy vọng, bài viết sẽ giúp quý thầy cô có cái nhìn toàn diện, các em học sinh rèn luyện tốt kỹ năng thi trắc nghiệm bài thi môn Toán.

Câu 31. *Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số* $f(x)=\dfrac{2x-1}{(x+1)^2}$ *trên khoảng* $(-1;+\infty)$ *là*

A. $2\ln(x+1)+\dfrac{2}{x+1}+C$. **B.** $2\ln(x+1)+\dfrac{3}{x+1}+C$.

C. $2\ln(x+1)-\dfrac{2}{x+1}+C$. **D.** $2\ln(x+1)-\dfrac{3}{x+1}+C$.

Lời giải. Ta có:

$$f(x)=\frac{2x-1}{(x+1)^2}=\frac{2(x+1)-3}{(x+1)^2}=\frac{2}{x+1}-\frac{3}{(x+1)^2} \text{ nên}$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x=2\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}-3\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2}=2\ln(x+1)+\frac{3}{x+1}+C,$$

$\forall x\in(-1;+\infty)\Rightarrow$ chọn B.

Đây là dạng toán tìm nguyên hàm phân thức hữu tỉ quen thuộc, xuất hiện thường xuyên trong những năm gần đây. Trong đề tham khảo 2019 cũng đã đề cập đến dạng này. Do đó, học sinh đa phần làm tốt câu này. Đối với dạng phân thức biến đổi thành tổng các biểu thức dạng $\dfrac{A}{(ax+1)^n}$.

Câu 32. *Cho hàm số* $f(x)$. *Biết* $f(0)=4$ *và* $f'(x)=2\cos^2 x+1, \forall x\in\mathbb{R}$, *khi đó* $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$ *bằng*

A. $\dfrac{\pi^2+4}{16}$. **B.** $\dfrac{\pi^2+14\pi}{16}$.

C. $\dfrac{\pi^2+16\pi+4}{16}$. **D.** $\dfrac{\pi^2+16\pi+16}{16}$.

Lời giải. Ta có: $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(2\cos^2 x+1)\mathrm{d}x$

$$=\int(2+\cos 2x)\mathrm{d}x=2x+\frac{1}{2}\sin 2x+C.$$

Vì $f(0)=4\Rightarrow 2.0+\dfrac{1}{2}.\sin 0+C=4\Leftrightarrow C=4$

$\Rightarrow f(x)=2x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+4$.

Vậy: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+4\right)\mathrm{d}x$

$$=\left(x^2-\frac{\cos 2x}{4}+4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2+16\pi+4}{16}\Rightarrow \text{chọn } C.$$

Đây là câu hỏi, mặc dù cơ bản, nhưng học sinh ít ôn tập nên sẽ gây khó khăn cho không ít học sinh. Việc lồng hai dạng toán vào một câu hỏi cũng làm tăng thời gian tính toán của học sinh.

Câu 33. *Trong không gian Oxyz, cho các điểm $A(1;2;0)$ $B(2;0;2)$, $C(2;-1;3)$ và $D(1;1;3)$. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABD) có phương trình là*

A. $\begin{cases} x=-2-4t \\ y=-2-3t. \\ z=2-t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=2+4t \\ y=-1+3t. \\ z=3-t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=-2+4t \\ y=-4+3t. \\ z=2+t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=4+2t \\ y=3-t \\ z=1+3t \end{cases}$.

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-2;2)$, $\overrightarrow{AD}=(0;-1;3)$.

Mặt phẳng (ABD) có một VTPT là

$$\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]=(-4;-3;-1).$$

Đường thẳng đi qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABD) có VTCP là $\vec{u}=\vec{n}=(-4;-3;-1)$.

Phương trình đường thẳng cần tìm là

$$\begin{cases} x=-2+4t \\ y=-4+3t \\ z=2+t \end{cases} \Rightarrow \text{chọn } C.$$

Câu hỏi này, cũng lồng ghép hai dạng toán quen thuộc: mặt phẳng qua 3 điểm và đường thẳng qua một điểm và vuông góc với một mặt phẳng.

Câu 34. *Cho số phức z thỏa mãn*

$$3(\bar{z}+i)-(2-i)z=3+10i.$$

Môđun của z bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải. Đặt $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$. Thay vào giả thiết ta được: $3\left[a+(1-b)i\right]-(2-i)(a+bi)=3+10i$

$\Leftrightarrow (a-b)+(a-5b+3)i=3+10i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=3 \\ a-5b+3=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$

$\Rightarrow z=2-i \Rightarrow |z|=\sqrt{5} \Rightarrow$ chọn C.

Đây là câu hỏi chỉ cần học sinh thành thạo các phép toán trên tập số phức là giải quyết được.

Câu 35. *Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:*

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(4;+\infty)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải. Đây dạng toán xét tính đơn điệu của hàm số $y=f(u(x))$ dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ hoặc đồ thị hàm số $y=f'(x)$. Học sinh khi làm dạng bài tập này cần lưu ý công thức tính đạo hàm của hàm hợp.

Ta có $y'=\left[f(3-2x)\right]'=-2f'(3-2x)$

Cho $y'=0 \Leftrightarrow 3-2x=-3 \vee 3-2x=-1 \vee 3-2x=1$

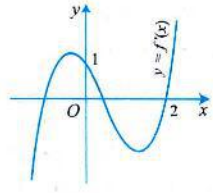
$\Leftrightarrow x=3 \vee x=2 \vee x=1$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(2;3) \Rightarrow$ chọn B.

Chú ý rằng nếu hàm số f nghịch biến trên khoảng K thì nó cũng nghịch biến trên mỗi khoảng là tập con của K.

Câu 36. *Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x)<x+m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x\in(0;2)$ khi và chỉ khi*



A. $m\ge f(2)-2$. **B.** $m\ge f(0)$.

C. $m>f(2)-2$. **D.** $m>f(0)$.

Lời giải. Ta có: $f(x)<x+m, \forall x\in(0;2)$

$\Leftrightarrow m>f(x)-x, \forall x\in(0;2)$ (*).

Xét hàm số $g(x)=f(x)-x$ có

$g'(x)=f'(x)-1<0$, $\forall x\in(0;2)$ (do trên khoảng $(0;2)$ thì $f'(x)<1$).

Bảng biến thiên

x	0		2
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$g(0)$	$\searrow$	$g(2)$

Suy ra: $m > g(x), \forall x \in (0;2) \Leftrightarrow m \geq g(0)$

$\Leftrightarrow m \geq f(0) \Rightarrow$ chọn B.

Đây là câu hỏi tương tự như câu hỏi trong đề tham khảo 2019 của Bộ GD&ĐT. Đối với dạng toán tìm tham số m để bất phương trình dạng $h(x,m) > 0$ (hoặc $h(x,m) < 0$) nghiệm đúng với mọi x thuộc khoảng $(a;b)$ cho trước thì ta thường cô lập tham số, đưa bất phương trình đã cho về dạng $f(m) > g(x)$, $\forall x \in (a;b)$ hoặc $f(m) < g(x)$, $\forall x \in (a;b)$. Sau đó khảo sát hàm số $y = g(x)$ trên khoảng $(a;b)$. Dạng toán này không quá khó, chỉ yêu cầu học sinh biết cô lập, khảo sát hàm và phải cẩn thận lưu ý có dấu "=" hay không có "=" khi kết luận.

Câu 37. *Chọn ngẫu nhiên 2 số tự nhiên khác nhau từ 25 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng*

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{13}{25}$. **C.** $\frac{12}{25}$. **D.** $\frac{313}{625}$.

Lời giải. Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{25}^2 = 300$. Gọi X là tập hợp 25 số nguyên dương đầu tiên. $X = X_1 \cup X_2$, với

$$X_1 = \{1;3;...23;25\},\ X_2 = \{2;4;...;22;24\}..$$

Gọi A là biến cố: "Chọn được hai số có tổng là một số chẵn". Để chọn ra 2 số thỏa mãn yêu cầu bài toán thì hai số đó cùng tính chẵn lẻ, do đó ta chọn 2 số thuộc tập X_1 hoặc 2 số thuộc tập X_2.

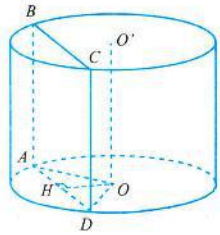
Suy ra $n(A) = C_{13}^2 + C_{12}^2 = 144$. Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{144}{300} = \frac{12}{25} \Rightarrow$ chọn C.

Để tìm được số phần tử của biến cố A, học sinh phải nhận xét được: hai số được chọn có cùng tính chẵn lẻ.

Câu 38. *Cho hình trụ có chiều cao bằng $5\sqrt{3}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 30. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng*

A. $10\sqrt{3}\pi$. **B.** $5\sqrt{39}\pi$. **C.** $20\sqrt{3}\pi$. **D.** $10\sqrt{39}\pi$..

Lời giải. Gọi hình trụ có hai đáy là $(O), (O')$ và bán kính R.



Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục nên thiết diện thu được là hình chữ nhật $ABCD$ với AB là chiều cao của hình trụ, khi đó

$$AB = CD = 5\sqrt{3} \Rightarrow AD = BC = \frac{30}{5\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Gọi H là trung điểm của AD ta có $OH = 1$ suy ra

$$R = \sqrt{OH^2 + \frac{AD^2}{4}} = \sqrt{1 + \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2}{4}} = 2.$$

Vậy diện tích xung quanh hình trụ là

$$S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi.2.5\sqrt{3} = 20\sqrt{3}\pi \Rightarrow \text{chọn C.}$$

Câu 39. *Cho PT $\log_9 x^2 - \log_3(3x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?*

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải. ĐK: $x > \frac{1}{3}$ và $m > 0$. PT tương đương với:

$$\log_3 x - \log_3(3x-1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \log_3 \frac{3x-1}{x} = \log_3 m$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{3x-1}{x} \Leftrightarrow m = f(x) \text{ với } f(x) = \frac{3x-1}{x}.$$

Xét $f(x) = \frac{3x-1}{x}$ có $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0, \forall x > \frac{1}{3}$.

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	3

Suy ra phương trình có nghiệm

$\Leftrightarrow 0 < m < 3 \Rightarrow m = 1, m = 2 \Rightarrow$ chọn A.

Đây là bài toán tìm tham số để phương trình có nghiệm. Hình thức của câu hỏi có dạng $f(x) = g(m)$. Từ đó ta nghĩ ngay tới phương pháp

hàm số (dựa vào bảng biến thiên) để dựa vào bảng biến thiên giải quyết bài toán này.

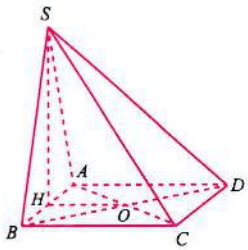
Câu 40. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng*

A. $\frac{\sqrt{21}a}{14}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}a}{7}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{21}a}{28}$.

Lời giải. Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp AB$ (do ΔSAB đều)

$\Rightarrow SH \perp (ABCD)$

(do $(SAB) \perp (ABCD)$).



$H.SBO$ là tam diện vuông tại H nên

$$\frac{1}{d^2(H,(SBO))} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{HO^2} = \frac{28}{3a^2}$$

$\Rightarrow d(H,(SBD)) = \frac{a\sqrt{21}}{14}$. Suy ra:

$d(A,(SBD)) = 2d(H,(SBD)) = \frac{a\sqrt{21}}{7} \Rightarrow$ chọn B.

Đây là câu hỏi tính khoảng cách rất quen thuộc, đa phần học sinh đã được ôn luyện nhiều. Nhưng đa phần học sinh chưa phát hiện ra "tam diện vuông" nên việc tính toán còn dài, làm mất thời gian. Câu hỏi này kiểm tra kiến thức về tỉ số khoảng cách, dựng hình chiếu; phân hóa tốt học sinh: khéo léo trong xử lý tình huống.

Câu 41. *Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(4)=1$ và $\int_0^1 xf(4x)\mathrm{d}x = 1$, khi đó $\int_0^4 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng*

A. $\frac{31}{2}$. **B.** -16. **C.** 8. **D.** 14.

Lời giải. Đặt $t = 4x \Rightarrow \mathrm{d}t = 4\mathrm{d}x$. Khi đó:

$$1 = \int_0^1 xf(4x)\mathrm{d}x = \int_0^4 \frac{t.f(t)}{16}\mathrm{d}t = \frac{1}{16}\int_0^4 t.f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{16}\int_0^4 x.f(x)\mathrm{d}x$$

$\Rightarrow \int_0^4 xf(x)\mathrm{d}x = 16$. Áp dụng công thức tích phân từng phần với $\begin{cases} u = x^2 \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$ ta có:

$$\int_0^4 x^2 f'(x)\mathrm{d}x = x^2 f(x)\Big|_0^4 - \int_0^4 2x.f(x)\mathrm{d}x = 16.f(4) - 2\int_0^4 x.f(x)\mathrm{d}x$$

$$= 16 - 2.16 = -16 \Rightarrow \text{chọn } B.$$

Đây là dạng toán tính tích phân hàm chưa xác định cụ thể hay còn gọi là hàm ẩn. Để tính tích phân dạng này ta sử dụng định nghĩa và phương pháp tính tích phân từng phần để đưa tích phân cần tính về tích phân đã cho trước.

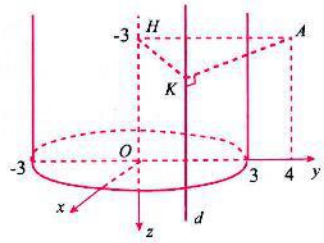
Câu 42. *Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(0;4;-3)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3. Khi khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?*

A. $P(-3;0;-3)$. **B.** $M(0;-3;-5)$.

C. $N(0;3;-5)$. **D.** $Q(0;5;-3)$.

Lời giải. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên trục Oz và đường thẳng d. Ta có $H(0;0;-3) \Rightarrow AH = 4$ và cũng có

$d \perp (AHK)$



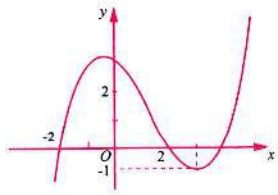
Nên $d \perp KH, HK = 3$. Ta có: $d(A;d) = AK \geq |AH - HK| = 1$ (dấu bằng xảy ra khi A, H, K thẳng hàng và K thuộc đoạn AH). Khi đó $\overrightarrow{AH} = 4\overrightarrow{AK} \Rightarrow K(0;3;-3)$. Suy ra d là đường thẳng đi qua K và song song với Oz.

d có phương trình là: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = -3 + t \end{cases} \Rightarrow$ chọn C.

Chú ý rằng tập hợp các đường thẳng d thỏa điều kiện đã cho là mặt trụ có trục là Oz. Bằng trực quan dễ thấy vị trí của d để khoảng cách từ A đến d lớn nhất hay nhỏ nhất.

Câu 43. *Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình*

$|f(x^3 - 3x)| = \frac{4}{3}$ *là*



A. 3. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải. Đặt $t = x^3 - 3x$, ta có: $t' = 3x^2 - 3$;

$t' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

x	0		-1		1		2
t'		$+$	0	$-$	0	$+$	
t	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Ứng mỗi giá trị $t \in (-2;2)$ ta tìm được ba giá trị của x; ứng mỗi giá trị $t \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$ ta tìm được một giá trị của x (*). Ta có:

$$\left|f(x^3-3x)\right| = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x^3-3x) = \frac{4}{3} \\ f(x^3-3x) = -\frac{4}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-3x = \alpha_1 \\ x^3-3x = \alpha_2 \\ x^3-3x = \alpha_3 \\ x^3-3x = \alpha_4 \end{array}\right.$$

$$\left(\alpha_1 \in (-2;0); \alpha_2 \in (0;2); \alpha_3 \in (2;+\infty); \alpha_4 \in (-\infty;-2)\right)$$

Từ (*), suy ra, phương trình đã cho có $3+3+1+1 = 8$ nghiệm $\Rightarrow$ chọn B.

Đây là câu hỏi tìm số nghiệm của một phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ. Khi đặt ẩn phụ $t = u(x)$, ta phải xác định được mối liên hệ: mỗi giá trị $t = u(x)$ tìm được bao nhiêu giá trị x tương ứng. Ngoài ra, hình thức của câu hỏi có dấu giá trị tuyệt đối, dễ dẫn đến học sinh sa đà vào việc vẽ đồ thị hàm chứa giá trị tuyệt đối, mặc dù vẫn giải quyết được nhưng phức tạp hơn!

Câu 44. *Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn của các số phức $w = \frac{4+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng*

A. $\sqrt{34}$. **B.** 26. **C.** 34. **D.** $\sqrt{26}$.

Lời giải. Để tìm được tập hợp điểm biểu diễn số phức w, ta biến đổi từ điều kiện $|z| = \sqrt{2}$ về môđun của số phức có chứa w, sau đó đặt $w = x + yi$ và tìm mối liên hệ của x, y. Đặt $w = x + yi\,(x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có: $w = \frac{4+iz}{1+z} \Rightarrow z = \frac{w-4}{-w+i}$. Khi đó:

$$|z| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\frac{w-4}{-w+i}\right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |w-4| = \sqrt{2}|-w+i|$$

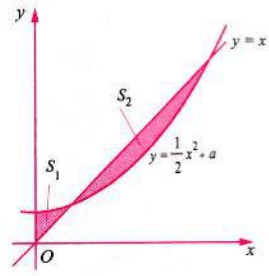
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = \sqrt{2}.\sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 8x - 4y - 14 = 0 \Leftrightarrow (x+4)^2 + (y-2)^2 = 34.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn của các số phức w là đường tròn có bán kính $\sqrt{34} \Rightarrow$ chọn A.

Để tìm được tập hợp điểm biểu diễn số phức w, ta "rút" z từ $w = \frac{4+iz}{1+z}$, sau đó lấy môđun hai vế, từ đó chuyển về dạng toán quen thuộc.

Câu 45. *Cho đường thẳng $y = x$ và parabol $y = \frac{1}{2}x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?*



A. $\left(\frac{3}{7};\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{5}\right)$. **D.** $\left(\frac{2}{5};\frac{3}{7}\right)$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x$ và parabol $y = \frac{1}{2}x^2 + a$ là:

$$\frac{1}{2}x^2 + a = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x + a = 0.$$

Gọi s là nghiệm lớn nhất của phương trình ($s > 0$).

Ta có: $S_1 = S_2 \Leftrightarrow S_1 - S_2 = 0$

$$\Leftrightarrow S_1 - S_2 = \int_0^s \left(\frac{1}{2}x^2 + a - x\right)dx = \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + ax\right)\Big|_0^s$$

$$= \frac{1}{6}s^3 - \frac{1}{2}s^2 + as = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{6}s^2 - \frac{1}{2}s + a = 0.$$

Suy ra: $\begin{cases} \frac{1}{6}s^2 - \frac{1}{2}s + a = 0 \\ \frac{1}{2}s^2 - s + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{3}{8} \Rightarrow$ chọn C.

Câu 46. *Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau*

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ là

A. 9. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải. Để giải bài toán này yêu cầu học sinh phải nắm vững các kiến thức: đạo hàm của hàm hợp $[f(u)]' = f'(u).u'(x)$, đánh giá nghiệm dựa vào tương giao đồ thị. Nhưng lại khó cho học sinh ở chỗ tương giao lại ra các nghiệm thuộc khoảng, như vậy học sinh muốn tìm chính xác số nghiệm của $f'(u)$ cần nắm bắt về đồ thị. Xét hàm số

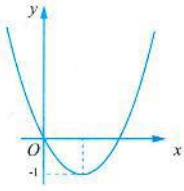
$y = f(x^2 - 2x) \Rightarrow y' = 2(x-1)f'(x^2-2x)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)f'(x^2-2x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ f'(x^2-2x)=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1 & \\ x^2-2x=a\in(-\infty;-1) & (1) \\ x^2-2x=b\in(-1;0) & (2) \\ x^2-2x=c\in(0;1) & (3) \\ x^2-2x=d\in(1;+\infty) & (4) \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'	$+\infty$	a	-3	b	2	c	-1	d	$+\infty$

Vẽ đồ thị hàm số $h(x) = x^2 - 2x$.



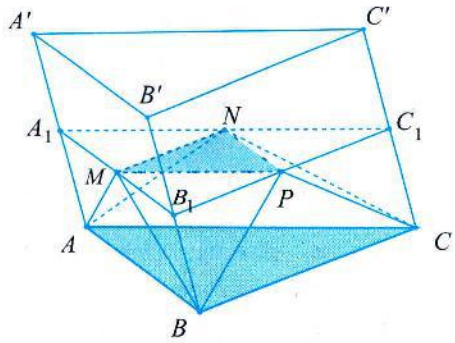
Dựa vào đồ thị ta thấy: phương trình (1) vô nghiệm. Các phương trình $(2),(3),(4)$ mỗi phương trình có 2 nghiệm khác 1. Các nghiệm đều phân biệt nhau. Vậy phương trình $y' = 0$ có 7 nghiệm phân biệt nên hàm số $y = f(x^2-2x)$ có 7 điểm cực trị $\Rightarrow$ chọn C.

Để giải được câu hỏi này, yêu cầu học sinh phải nắm vững kiến thức và kỹ năng về: đạo hàm của hàm hợp $[f(u)]' = f'(u).u'(x)$, đánh giá nghiệm dựa vào sự tương giao đồ thị. Nhưng, khó khăn ở chỗ: dựa vào sự tương giao chỉ ước lượng được các nghiệm chứ không ra ngay con số cụ thể; như vậy học sinh muốn tìm chính xác số nghiệm của $f'(u)$ cần phải có kĩ năng tốt trong việc "đọc" đồ thị.

Câu 47. *Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 6. Gọi M,N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A,B,C,M,N,P bằng*

A. $27\sqrt{3}$. **B.** $21\sqrt{3}$. **C.** $30\sqrt{3}$. **D.** $36\sqrt{3}$.

Lời giải. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', BB', CC'. Khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có chiều cao là 4 và đáy là tam giác đều cạnh 6. Ba khối chóp $A.A_1MN$, $B.B_1MP$, $C.C_1NP$ đều có chiều cao là 4 và đáy là tam giác đều có độ dài cạnh



bằng 3.

Ta có:

$$V_{ABC.MNP} = V_{ABC.A_1B_1C_1} - \left(V_{A.A_1MN} + V_{B.B_1MP} + V_{C.C_1NP}\right)$$

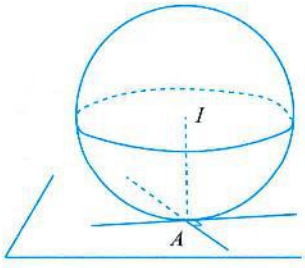
$$= \frac{6^2\sqrt{3}}{4}\cdot 4 - 3.\frac{1}{3}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{4}\cdot 4 = 27\sqrt{3} \Rightarrow \text{chọn A.}$$

Đây không phải là một bài quá dài và khó về thể tích khối đa diện. Nhưng muốn giải quyết nhanh thì học sinh phải có tư duy hình học, cụ thể là cắt ghép hình và tỉ lệ thể tích.

Câu 48. *Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + \left(z+\sqrt{2}\right)^2 = 3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a;b;c)$ (a,b,c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?*

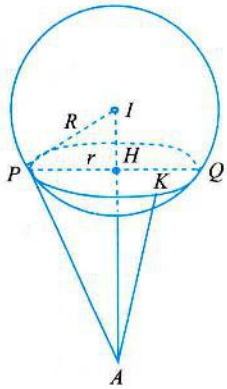
A. 12. **B.** 8.
C. 16. **D.** 4.

Lời giải. Khi A thuộc mặt cầu (S) thì qua A luôn vẽ được hai tiếp tuyến đến (S) vuông góc



nhau. Khi A ở ngoài mặt cầu (S), giả sử qua A vẽ được hai tiếp tuyến AP, AK vuông góc nhau (P, K là các tiếp điểm).

Khi K di động, thì PK thay đổi từ 0 đến đường kính PQ.



Như vậy, $\widehat{PAK}$ thay đổi từ 0° đến $\widehat{PAQ}$. Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \widehat{PAQ} \geq 90^0$

$\Leftrightarrow \widehat{PAI} \geq 45^0 \Leftrightarrow IA \leq \sqrt{2}R.$

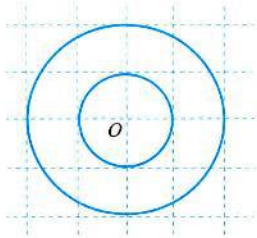
Vậy từ A kẻ được ít nhất 2 tiếp tuyến vuông góc đến mặt cầu khi và chỉ khi

$$R \leq IA \leq R\sqrt{2}.$$

Do $A(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $A(a;b;0)$.

$$R \leq IA \leq R\sqrt{2} \Leftrightarrow 3 \leq a^2+b^2+2 \leq 6 \Leftrightarrow 1 \leq a^2+b^2 \leq 4.$$

Tập các điểm thỏa đề là các điểm nguyên nằm trong hình vành khăn (kể cả biên), nằm trong mặt phẳng (Oxy), tạo bởi 2 đường tròn đồng tâm $O(0;0;0)$ bán kính lần lượt là 1 và 2. Nhìn hình vẽ ta có 12 điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Rightarrow$ chọn A.



Đây là một bài toán hay về tiếp tuyến của mặt cầu. Nếu học sinh không để ý tính chất: Từ một điểm trên mặt cầu (S) luôn kẻ được ít nhất hai tiếp tuyến vuông góc đến (S) thì sẽ không giới hạn được tập hợp điểm cần tìm. Ta chứng minh được kết quả: Cho mặt cầu $S(I;R)$ và điểm A trong không gian, khi đó điều kiện cần và đủ để qua A có thể kẻ được ít nhất 2 tiếp tuyến vuông góc đến $S(I;R)$ là $R^2 \leq AI^2 \leq 2R^2$.

Câu 49. *Cho hai hàm số* $y=\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}$ *và* $y=|x+2|-x+m$ *(m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là* (C_1) *và* (C_2). *Tập hợp tất cả các giá trị của m để* (C_1) *và* (C_2) *cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là*

A. $(-\infty;2]$. **B.** $[2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải. Câu này thuộc dạng về sự tương giao của hai đồ thị, một dạng toán cơ bản mà học sinh thường gặp. Tuy nhiên ở bài toán này, hàm số

$$y=\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}$$

được cho cho có hình thức phức tạp nhằm đánh lừa những học sinh không hiểu sâu về phương pháp chung khi giải loại toán này, thêm vào đó là sự xuất hiện biểu thức chứa giá trị tuyệt đối trong hàm số thứ hai $y=|x+2|-x+m$. Nhìn vào đề bài ta nghĩ ngay đến việc đưa về xét phương trình hoành độ giao điểm và tìm m để phương trình này có 4 nghiệm phân biệt. Định hướng tiếp theo sau đó là dùng phương pháp hàm số, cô lập m, xét sự biến thiên của hàm số và từ đó chỉ ra các giá trị m thỏa mãn đề bài.

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}=|x+2|-x+m.$$

Xét hàm số

$$g(x)=\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}-|x+2|+x$$

$$=\begin{cases}\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}-2 & \text{khi } x\in[-2;+\infty)\setminus\{-1;0;1;2\}\\ \frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+2x+2 & \text{khi } x\in(-\infty;-2)\end{cases}$$

Ta có:

$$g'(x)=\begin{cases}\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}>0, \forall x\in(-2;+\infty)\setminus\{-1;0;1;2\}\\ \frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+2>0, \forall x\in(-\infty;-2)\end{cases}$$

Nên hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;+\infty)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		+	‖	+	‖	+		+		+	‖	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗		$+\infty$	$-\infty$	↗	$-\infty$	↗	$-\infty$	↗	$-\infty$	↗	2

Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có 4 nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=g(x)$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m \geq 2 \Rightarrow$ chọn C.

Nhận xét: Học sinh thường lúng túng ở một số điểm: sự cầu kỳ về hình thức, biểu thức chứa trị tuyệt đối trong các hàm làm học sinh không có định hướng xử lí. Học sinh khó nhận thấy hàm số $g(x)$ không có đạo hàm tại điểm $x=-2$, học sinh không biết cách xử lí về đạo hàm của $g(x)$ khi gặp trị tuyệt đối, hàm số $g(x)$ có nhiều điểm không xác định làm học sinh lúng túng, học sinh gặp sai lầm khi tính các giới hạn của $g(x)$ tại các điểm $\{-1;0;1;2\}$ và khi $x\to\pm\infty$.

Câu 50. *Cho phương trình*

$$\left(4\log_2^2 x+\log_2 x-5\right)\sqrt{7^x-m}=0 \quad (1)$$

(m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt ?

A. 49. **B.** 47. **C.** Vô số. **D.** 48.

Lời giải. Vì $m\in\mathbb{N}^*$ nên $m\ge 1$.

+ Nếu $m=1$ thì (1) trở thành

$$\left(4\log_2^2 x+\log_2 x-5\right)\sqrt{7^x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \left[\begin{array}{l}4\log_2^2 x+\log_2 x-5=0\\ 7^x-1=0\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \left[\begin{array}{l}\log_2 x=1\\ \log_2 x=-\dfrac{5}{4}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=2^{\frac{-5}{4}}\end{array}\right.\text{ (thỏa mãn)}$$

+ Nếu $m\ge 2$, ĐK: $\begin{cases}x>0\\ 7^x-m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x\ge\log_7 m\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\log_7 m$

khi đó $(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}7^x-m=0\\ 4\log_2^2 x+\log_2 x-5=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\log_7 m\\ x=2\\ x=2^{-\frac{5}{4}}\end{array}\right.$.

Phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow 2^{-\frac{5}{4}}<\log_7 m<2\Leftrightarrow 7^{2^{-\frac{5}{4}}}<m<49$$

$$\Leftrightarrow m\in\{3;4;5;...;48\}$$

Vậy $m\in\{1;3;4;5;...;48\}$. Do đó có tất cả 47 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Rightarrow$ chọn B.

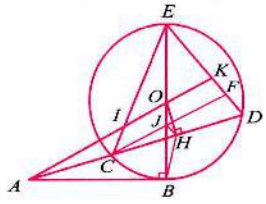
Đây là câu hỏi tìm tham số để phương trình mũ - logarit có đúng n nghiệm. Câu hỏi này xuất hiện khá nhiều trong các đề thi thử. Tuy nhiên cách xây dựng câu hỏi này khai thác điều kiện xác định của phương trình khá hay, đây là chỗ mà học sinh hay mắc sai lầm.

****

CHỨNG MINH MỘT ĐƯỜNG THẲNG...

(Tiếp theo trang 2)

Lời giải. Vẽ $OH\perp CD$ tại H, $CF\,//\,IK$ $(F\in ED)$, CF cắt BE tại J. Ta có



$\widehat{ABO}=\widehat{AHO}=90^o$

$\Rightarrow ABHO$ nội tiếp

$\Rightarrow\widehat{OBH}=\widehat{OAH}=\widehat{JCH}$

$\Rightarrow CJHB$ nội tiếp $\Rightarrow\widehat{BJH}=\widehat{BCH}=\widehat{BED}$

$\Rightarrow JH\,//\,FD$. Mà $HC=HD$ ($OH\perp CD$) nên $JC=JF$. Ta lại có $IK\,//\,CF$ suy ra $OI=OK$.

BÀI TẬP

1. Cho trước đường tròn có tâm O và M là một điểm bất kỳ. Chỉ dùng thước thẳng hãy dựng đường thẳng qua M và vuông góc với đường thẳng d cho trước.

2. Cho trước đường tròn có tâm O. Chỉ dùng thước thẳng hãy dựng cạnh tam giác đều, cạnh hình vuông, cạnh lục giác đều nội tiếp đường tròn (O).

3. Cho hình thang $ABCD$ ($AB\,//\,CD$). Gọi $O=AC\cap BD$. Qua O vẽ đường thẳng song song với AB cắt AD, BC lần lượt tại M, N. Chứng minh $OM=ON$.

4. Trên các cạnh AB, BC, CA của ΔABC lần lượt lấy các điểm D, E, F sao cho AE, BF, CD đồng quy tại I. Đường thẳng qua I và song song với BC cắt ED, EF tại M, N. Chứng minh rằng $IM=IN$.

5. Cho ΔABC có $BC<BA$, đường phân giác BE và đường trung tuyến BD. Đường thẳng qua C và vuông góc với BE cắt BE, BD lần lượt tại F, G. Chứng minh rằng đường thẳng DF đi qua trung điểm của GE.

6. Cho ΔABC. Lấy các điểm M, N, P lần lượt trên các cạnh BC, CA, AB. Nối AM cắt BN và CP lần lượt tại I và K, BN cắt CP tại J. Chứng minh rằng nếu $S_{AIN}=S_{BJP}=S_{CKM}=S_{IJK}$ thì $S_{APJI}=S_{BMKJ}=S_{CNIK}$.

7. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ tiếp tuyến chung CD ($C\in(O), D\in(O')$ và CD gần B hơn A). Qua A vẽ $EF\,//\,CD$ $(E\in(O), F\in(O'))$. Đường thẳng vuông góc với EF tại A cắt EC tại I. Gọi M là trung điểm của EF. Chứng minh rằng CD, IM và AB đồng quy.

NHỮNG NGHỊCH LÝ TƯỞNG LÀ ...

NGUYỄN THUỶ THANH

(Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Từ "*nghịch lý*" thường được hiểu theo những nghĩa sau đây. Nghĩa thứ nhất: Đó là những lập luận nhìn bề ngoài thì đúng nhưng lại đưa đến những mâu thuẫn (chẳng hạn, các nghịch lý *Zenon* (490 – 430 tr. CN). Nghĩa thứ hai: Khẳng định thì đúng nhưng không phù hợp với nhận thức trực giác (chẳng hạn, nghịch lý G. *Galilei* (1564 – 1642) nói rằng đoạn thẳng dài hơn không chứa nhiều điểm hơn đoạn thẳng ngắn, ...).

I. Nghịch lý *Zenon*

Ta dành đôi lời để nói về *Zenon*, nhà triết học nổi tiếng của Hy Lạp Cổ đại. Ông sinh ra ở thành Elade, miền nam Iialia, một thuộc địa của Đại Hy Lạp. Tương truyền rằng Ông nổi tiếng vì học giỏi, thông minh và là giáo sư nổi tiếng. Ông còn là nhà hùng biện đã đưa ra nhiều *aporia* (tiếng Hy Lạp, nghĩa là: nghịch lý, ngõ cụt) làm nảy sinh nhiều cuộc tranh luận sôi nổi. Người ta cũng cho rằng Ông là người phát minh ra phép biện chứng và đó là đóng góp to lớn của Ông. Đã hơn hai mươi lăm thế kỷ rồi mà các nghịch lý này vẫn còn cuốn hút các nhà toán học. Mỗi thời đại đều đưa ra cách luận giải của mình về các nghịch lý đó. Hiện nay ở Phương Tây các nghịch lý này vẫn còn là đề tài đầy sức hấp dẫn.

Zenon
(490 - 430 tr.CN)

Theo truyền lại thì *Zenon* đã để lại cho đời sau hơn bốn mươi nghịch lý. Do thất truyền nên chỉ có chín nghịch lý đến được với chúng ta nhờ các công trình của nhà bác học vĩ đại *Aristoteles*
(384 – 322 tr. CN). Bản thân *Zenon* đã không đưa ra cách giải quyết nào đối với mâu thuẫn mà Ông đã nêu ra trong các nghịch lý. Điều đó có lẽ không khó hiểu vì các mâu thuẫn đó có nội dung vượt xa tầm của Hy Lạp Cổ đại như: hữu hạn và vô hạn, liên tục và rời rạc, vận động và đứng yên.

Đặc biệt trong các nghịch lý của mình *Zenon* cũng đã sử dụng khả năng chia được vô hạn định các đoạn thẳng hay vật thể và sau đó xuất phát từ giả thiết để đi đến mâu thuẫn trái với trải nghiệm cảm tính.

Không khó hiểu vì ngay *N. Bourbaki* (bút danh xuất hiện từ đầu những năm ba mươi của nhóm các nhà toán học nổi tiếng Pháp) đã viết rằng: "*Vấn đề chia vô hạn không gian, như ta biết, đã dẫn đến những khó khăn rất lớn trong triết học (và toán học!): Từ thời Êlêat (thế kỷ VI – V tr. CN) đến B.Bolzano (1781 – 1848) và G.Cantor (1845 – 1918) các nhà toán học và triết học không đủ sức giải quyết nghịch lý làm sao mà một đại lượng hữu hạn lại có thể lập nên từ vô số điểm không có kích thước*".

Trong số các nghịch lý *Zenon* để lại, hai nghịch lý "*Phép lưỡng phân*" (dichotomy) và "*Achilles và Rùa*" là nổi tiếng và sâu sắc hơn cả. Đó là hai nghịch lý về chuyển động.

1. "Phép lưỡng phân" (dichotomy: phép chia đôi)

Nội dung của nghịch lý là: *Chuyển động không bao giờ có thể bắt đầu.*

Zenon lập luận như sau. Giả sử vật chuyển động theo đường thẳng từ địa điểm A đến địa điểm B. Để đạt đến đích B, đầu tiên vật phải vượt qua một nửa là AP_1 của khoảng cách AB. Để đạt đến trung điểm P_1 đầu tiên vật cần đến đích P_2 là trung điểm của AP_1 và cứ thế chia đôi đến vô cùng, không bao giờ kết thúc. Từ đó *Zenon* kết luận: *Chuyển động không bao giờ có thể bắt đầu, tức là không có chuyển động.* Rốt cuộc, vật chỉ đứng yên ở vị trí ban đầu. Do đó, theo Ông, thừa nhận vận động là sai lầm.

Bên cạnh cách lập luận trên đây còn có biến thể khác tương tự và đi đến kết luận vật chuyển động từ A đến B không bao giờ đạt đến đích B. Lập luận đó như sau. Để đạt đến đích B vật cần vượt qua phần nửa con đường đến đích ấy. Còn phần nửa thứ hai tiếp theo, trước hết phải vượt qua phần nửa của phần nửa ấy, v.v. và cứ thế tiếp tục đến vô hạn. Điều đó cũng có nghĩa rằng vật không bao giờ kết thúc chuyển động ở vị trí B vì nó không thể vượt qua vô số trung điểm của các nửa trong khoảng thời gian hữu hạn.

Nếu giả thiết dist$(A, B) = 1$ thì từ cách lập luận trên ta có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ hội tụ và $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$.

Tuy nhiên nghịch lý "*Lưỡng phân*" không thể giải quyết được bởi lý lẽ dựa vào sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$.

Để lý giải cái khó khăn ở đây, *H. Weyl* (1885 – 1955) – nhà toán học nổi tiếng Hoa Kỳ đã dẫn ra ví dụ rất lý thú sau đây. Hãy hình dung ta có một máy tính hoàn thành phép toán thứ nhất trong $\frac{1}{2}$ phút, phép toán thứ hai trong $\frac{1}{4}$ phút, phép toán thứ ba trong $\frac{1}{8}$ phút, v.v. Đến cuối phút thứ nhất (tức là gần hết một phút!) máy tính này đã đếm xong hết một lượt toàn bộ tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$. *H. Weyl* kết luận rằng không thể xây dựng một máy tính có thể thực hiện một tập hợp đếm được các phép tính trong vòng một phút!

Nhưng mặt khác, vì vật thể chuyển động diễn ra trước mắt chúng ta hằng ngày... nghĩa là... có lẽ chăng những máy móc đó được chế tạo dễ dàng...?

Vậy cái bí mật của câu chuyện ẩn náu ở đâu???

2. "Achilles và Rùa" hay Chiến binh Achilles thần tốc không đuổi kịp Rùa ... bò)

Giả sử lúc đầu *Achilles* ở vị trí A còn *Rùa* ở vị trí B phía đằng trước *Achilles* và cách A một quãng đường A_0 (có người gọi A_0 là *khoảng cách cao quý* mà *Achilles* dành cho *Rùa*!). Trong cùng một thời điểm cả *Achilles* và *Rùa* đều xuất phát: *Achilles* xuất phát từ A hướng đến B với vận tốc v_A để đuổi theo *Rùa*, còn *Rùa* xuất phát từ B bò trước *Achilles* với vận tốc v_R. Nhà triết học Cổ Hy Lạp *Zenon* khẳng định rằng trong cuộc đua này người chạy nhanh nhất - chiến binh *Achilles* - không bao giờ đuổi kịp *Rùa* bò chậm chạp, thậm chí chàng *Achilles* còn không chạy đến được địa điểm B.

Đối với khẳng định thứ nhất *Zenon* lập luận như sau. Sau lệnh xuất phát, *Achilles* bắt đầu cuộc rượt đuổi theo *Rùa*. *Achilles* phải liên tiếp đạt tới những vị trí mà *Rùa* vừa đến và đã ra đi,

nghĩa là *Achilles* phải vượt qua vô số đoạn đường và mất khoảng thời gian vô tận. Điều đó cũng có nghĩa rằng *Achilles* không bao giờ đuổi kịp *Rùa*. Điều khẳng định thứ hai chính là biến thể "*Phép lưỡng phân*" ở trên. Tóm lại, *Achilles* vẫn không đuổi kịp *Rùa*.

Nghịch lý "*Achilles và Rùa*" có thể diễn tả bằng toán học như sau. Đầu tiên, *Achilles* chạy hết đoạn đường $s_0 = \Delta_0$ để đến vị trí *B* với thời gian $t_0 = \frac{\Delta_0}{v_A}$. Tuy chậm chạp nhưng *Rùa* cũng bò được đoạn đường $s_1 = v_R t_0 = \frac{v_R}{v_A}\Delta_0$. Khi *Achilles* chạy hết đoạn s_1 với $t_1 = \frac{s_1}{v_A} = \frac{v_R}{v_A^2}\Delta_0$ thì *Rùa* cũng bò được đoạn $s_2 = v_R t_1 = \frac{v_R^2}{v_A^2}\Delta_0$ và cứ thế tiếp tục. Từ đó tổng thời gian mà *Achilles* tiêu hao trong cuộc rượt đuổi là

$$t_0 + t_1 + \cdots + t_n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{v_A}\left(\frac{v_R}{v_A}\right)^n \Delta_0,\ 0 < \frac{v_R}{v_A} < 1. \quad (*)$$

Theo *Zenon* thì tổng ở vế phải của (*) bằng ∞ và do đó *Achilles* không bao giờ đuổi kịp *Rùa* hay kẻ chậm nhất luôn luôn dẫn đầu...

Cái khó của nghịch lý "Achilles và Rùa" còn thể hiện ở khía cạnh khác. Thật vậy tương tự như (*) ta có biểu thức sau đây về tổng các quãng đường

$$s_0 + s_1 + \cdots + s_n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{v_R}{v_A}\right)^n \Delta_0,\ s_0 = \Delta_0.$$

Giả sử *Achilles* chạy nhanh gấp *m* lần Rùa và giả sử *Achilles* đuổi kịp *Rùa* ở thời điểm T_0. Khi đó *Achilles* chạy được quãng đường

$$S_A = \Delta_0 + \frac{\Delta_0}{m} + \frac{\Delta_0}{m^2} + \cdots \qquad (**)$$

và *Rùa* cũng bò được quãng đường

$$S_R = \frac{\Delta_0}{m} + \frac{\Delta_0}{m^2} + \cdots \qquad (***)$$

Giả sử số đoạn đường mà *Rùa* đã bò qua được cho đến thời điểm gặp nhau được ký hiệu là λ. Khi đó, số đoạn đường mà *Achilles* đã chạy qua là $1+\lambda$ do *Achilles* chạy nhiều hơn *Rùa* một đoạn Δ_0 và vì vậy $1+\lambda = \lambda$. Đó là nghịch lý Galilei "*Toàn thể bằng bộ phận*".

Các nghịch lý "*Phép lưỡng phân*" cũng như "*Achilles và Rùa*" đều dựa trên sự vận dụng chưa thật tinh tế khái niệm chuỗi hội tụ. Nếu trong nghịch lý "*Phép lưỡng phân*" các phần của phép chia liên tiếp đến vô hạn đoạn thẳng lập thành chuỗi hội tụ do điều kiện của bài toán thì ta không có quyền, như *Zenon* đã làm, xem chuỗi lập nên từ các khoảng thời gian tương ứng là chuỗi phân kỳ. Trong nghịch lý "*Achilles và Rùa*" *Zenon* cũng dựa trên chính những luận giải không nhất quán đó. Các nghịch lý đã xuất hiện chủ yếu khi đối diện với cái vô hạn trong các lập luận toán học hoặc triết học. Đặc biệt, vào thời đó cơn bão khủng hoảng cơ sở toán học Hy Lạp đang hoành hành nên những nghịch lý – ngõ cụt này càng làm cho khủng hoảng thêm trầm trọng. Nhưng rồi khủng hoảng cũng qua đi, người Hy Lạp cũng đã có cách tìm cho mình con đường phát triển toán học sau bão tố khủng hoảng...

II. Một số nghịch lý trong Lý thuyết tập hợp (LTTH)

Người ta cho rằng nghịch lý logic nổi tiếng nhất, thú vị nhất và cổ xưa nhất là nghịch lý "*Người nói dối*". Nó đã làm rạng danh người khám phá ra nó là nhà triết học Hy Lạp cổ đại *Eubulid* xứ Miletos (thế kỷ IV tr.CN).

Năm 1908 nghịch lý này được *B. Russell* (1872 - 1970) đặt ở vị trí đầu tiên trong danh sách các nghịch lý toán - lôgic. Ông phát biểu nghịch lý gọn lại như sau: "*Tôi đang nói dối*" (hay "*Lời*

nhận xét mà tôi nêu ra bây giờ là dối" hoặc "*Lời nhận xét đó là dối*").

Khi giải quyết nghịch lý người nói dối người ta gặp phải tình huống kiểu: một phần tử nào đó thuộc hay không thuộc một tập hợp đều mâu thuẫn.

1. Nghịch lý Cantor

G. Cantor
(1845 – 1918)

Năm 1899 *G. Cantor* (1845 – 1918) đã khám phá ra một nghịch lý và Ông đã thông báo điều này cho *R. Dedekind* (1831 – 1916). Năm 1901, nghịch lý này đã đặc biệt thu hút sự quan tâm của nhà bác học Anh *B. Russell*. Nghịch lý đó như sau. Giả sử $\mathscr{C}$ là *tập hợp tất cả các tập hợp có thể có* và $\mathscr{M}_{\mathscr{C}}$ là *tập hợp mọi tập con của tập hợp* $\mathscr{C}$. Theo định lý *Cantor* khẳng định rằng *lực lượng của tập hợp tất các tập con của bất cứ tập hợp khác* ϕ *nào cũng lớn hơn lực lượng của chính tập hợp đó* (1878) ta thu được kết quả là lực lượng của tập hợp $\mathscr{M}_{\mathscr{C}}$ phải lớn hơn lực lượng của chính $\mathscr{C}$, tức là $card(\mathscr{M}_{\mathscr{C}}) > card(\mathscr{C})$. Mặt khác tập $\mathscr{C}$ là *tập hợp tất cả các tập hợp có thể có* nên M_C là tập hợp con của $\mathscr{C}$ ($\mathscr{M}_{\mathscr{C}}$ là một phần tử của $\mathscr{C}$). Nhưng lực lượng của tập hợp con $\mathscr{M}_{\mathscr{C}}$ không lớn hơn lực lượng của $\mathscr{C}$ nên $card(\mathscr{M}_{\mathscr{C}}) \leq card(\mathscr{C})$. Mâu thuẫn.

Như vậy, chính người sáng tạo ra LTTH, *G. Cantor*, đã nhìn thấy chỗ khuyết nghiêm trọng trong khái niệm cơ bản trong Lý thuyết của mình.

Nghịch lý nổi tiếng nhất trong LTTH là nghịch lý do *B. Russell* khám phá ra năm 1902 và công bố năm 1903.

2. Nghịch lý Russell

B. Russell
(1872 – 1970)

Trong LTTH tồn tại những tập hợp tự chứa nó như một phần tử. Chẳng hạn, tập hợp $\mathscr{M}$ mọi tập hợp có thể có. Rõ ràng là tập hợp $\mathscr{M}$ tự chứa nó như một phần tử vì bản thân $\mathscr{M}$ cũng là một tập hợp. Hay, tập hợp các khái niệm trừu tượng cũng là một khái niệm trừu tượng.

Những tập hợp kiểu này được gọi là *tập hợp bất thường*. Và, do vậy những tập hợp không tự chứa nó như một phần tử được gọi là *tập hợp thông thường* (chẳng hạn, tập hợp $\mathbb{N}$ các số tự nhiên không phải là số tự nhiên, đó là tập hợp thông thường).

Giả sử xét tập hợp tất cả các tập hợp thông thường. Ta ký hiệu nó bởi $\mathscr{N}$. Thế thì $\mathscr{N}$ là tập hợp thông thường hay bất thường.

a) Giả sử đầu tiên $\mathscr{N}$ là tập hợp thông thường. Theo định nghĩa tập hợp N thì mọi phần tử của nó đều là những tập hợp thông thường (kể cả $\mathscr{N}$ do giả thiết $\mathscr{N}$ là tập hợp thông thường). Điều đó có nghĩa rằng tập hợp $\mathscr{N}$ tự chứa nó như một phần tử. Do vậy, $\mathscr{N}$ là tập hợp bất thường. Mâu thuẫn.

b) Bây giờ giả sử $\mathscr{N}$ là tập hợp bất thường. Khi đó, theo định nghĩa tập hợp bất thường thì tập hợp N này phải tự chứa nó như một phần tử. Nhưng mọi phần tử của tập hợp $\mathscr{N}$ đều là những tập hợp thông thường. Do đó $\mathscr{N}$ phải là tập hợp thông thường. Lại mâu thuẫn.

Năm 1918, để giải thích và minh họa nghịch lý của mình một cách đơn giản và phổ cập hơn, *B. Russell* đã nêu ra một biến thể của nó: Nghịch lý "*Người thợ cạo râu*"...

(*Xem tiếp trang* 31)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/508 (Lớp 6). Cho

$A = 11.13.15 + 13.15.17 + ... + 91.93.95 + 93.95.97.$

Hỏi A có chia hết cho 5 không?

PHẠM NĂNG KHÁNH

(Lớp K28G Toán Tin - ĐHSP Hà Nội 2)

Bài T2/508 (Lớp 7). Tìm 2019 số mà mỗi số có giá trị tuyệt đối không lớn hơn 0,5 và tổng của ba số bất kỳ là một số nguyên.

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T3/508. Cho x, y, z là các số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{x^3}{x^2+y^2} + \frac{y^3}{y^2+z^2} + \frac{z^3}{z^2+x^2} - \frac{7}{6}(x+y+z).$$

LẠI QUANG THỌ

(Phòng GD&ĐT Tam Dương, Vĩnh Phúc)

Bài T4/508. Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$ là các góc nhọn. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho $\widehat{DAB} = \widehat{BCM}$. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với CD, đường thẳng này cắt đường trung trực của đoạn thẳng AB ở E. Chứng minh đường thẳng DE và đường thẳng AC vuông góc với nhau.

HUỲNH THANH TÂM

(Bưu điện TX. An Nhơn, Bình Định)

Bài T5/508. Giải phương trình

$$x^{2010} - 2011x^{670} + \sqrt{2010} = 0.$$

HOÀNG SỸ LUYỆN

(GV THPT-DTNT Quỳ Châu, Quỳ Châu, Nghệ An)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/508. Cho a, b, c là ba số thực không âm và không có hai số nào cùng bằng 0. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì

$$\frac{a^{2^n}+b^{2^n}}{a^{2^n}+c^{2^n}} + \frac{b^{2^n}+c^{2^n}}{b^{2^n}+a^{2^n}} + \frac{c^{2^n}+a^{2^n}}{c^{2^n}+b^{2^n}} \ge \frac{a+b}{a+c} + \frac{b+c}{b+a} + \frac{c+a}{c+b}.$$

LÊ QUỐC HÁN

(Nghệ An)

Bài T7/508. Tìm tập giá trị của biểu thức

$$f(A,B,C) = \sin A + \sin B + \sin C - \sin A \sin B \sin C$$

với A, B, C là các góc của một tam giác.

TRẦN TUẤN ANH

(SV lớp Toán Tin 2000, ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

Bài T8/508. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Gọi r là bán kính của mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{r} \ge \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

PHẠM DUY KHÁNH

(GV THPT Quỳ Châu, Nghệ An)

Bài T9/508. Cho a, b, c, d là các số thực dương và theo thứ tự đó tạo thành cấp số cộng tăng, công sai m. Chứng minh rằng

$$e^{a^2}(4m^2+2ma+1) + e^{b^2}.2ma + e^{c^2}(2m^2+2ma) < e^{d^2}.$$

NGUYỄN THANH HẢI

(Học viên Cao học K40 Toán Tin, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/508. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \ge 1$, phương trình $x^{2n+1} = x + 1$ có một nghiệm thực duy nhất, ký hiệu là x_n và tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.

NGUYỄN HÙNG CƯỜNG

(85 Biên Cương, phường Ngô Mây, TP. Quy Nhơn, Bình Định)

Bài T11/508. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x)f(y) + f(x+y) = xf(y) + yf(x) + f(xy) + x + y + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

TRẦN VĂN THƯƠNG

(GV THPT Phú Mỹ, Bà Rịa - Vũng Tàu)

Bài T12/508. Cho tứ giác điều hòa $ABCD$ (tứ giác nội tiếp có tích các cặp cạnh đối bằng nhau), (O) là đường tròn ngoại tiếp. M là trung điểm của AC. X, Y, Z, T theo thứ tự là hình chiếu của M trên AB, BC, CD, DA; $E = AB \cap CD, F = AD \cap CB$, $P = AC \cap BD, Q = XZ \cap YT$. Chứng minh rằng PQ đi qua trung điểm của EF.

NGUYỄN MINH HÀ
(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)
NGUYỄN HỮU TÂM
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định)

Bài L1/508. Một chất điểm có khối lượng $m = 300$g đồng thời thực hiện hai dao động điều hòa cùng phương, cùng tần số. Ở thời điểm t bất kì li độ của dao động thành phần luôn thỏa mãn $16x_1^2 + 9x_2^2 = 25$ (x_1, x_2 tính bằng cm). Biết lực phục hồi cực đại tác dụng lên chất điểm trong quá trình dao động là $F_{max} = 0{,}4$N. Xác định tần số góc của dao động.

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

Bài L2/508. Đặt điện áp xoay chiều $u = 200\sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$(V) vào hai đầu đoạn mạch $AMNB$. Đoạn AM chứa cuộn dây có độ tự cảm L và điện trở $r = 50\Omega$ hoạt động; đoạn mạch MN chỉ chứa bóng đèn dây tóc Đ có công suất định mức 200 W, biết đèn sáng bình thường; đoạn mạch NB chỉ chứa tụ điện có điện dung C tất cả được ghép nối tiếp với nhau. Hãy xác định biểu thức của cường độ dòng điện trong mạch.

THANH LÂM *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/508 (For 6th grade). Let

$A = 11.13.15 + 13.15.17 + ... + 91.93.95 + 93.95.97.$

Is A divisible by 5?

Problem T2/508 (For 7th grade). Find 2019 numbers so that the absolute values of these numbers do not exceed 0,5 and the sum of any 3 arbitrary numbers among these is an integer.

Problem T3/508. Let x, y, z be positive numbers. Find the minimum value of the expression

$$P = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{x^3}{x^2+y^2} + \frac{y^3}{y^2+z^2} + \frac{z^3}{z^2+x^2} - \frac{7}{6}(x+y+z).$$

Problem T4/508. Given a triangle ABC with $\widehat{ABC}$ and $\widehat{ACB}$ are acute. Let M be the midpoint of AB. On the opposite ray of the ray BC choose the point D such that $\widehat{DAB} = \widehat{BCM}$. Through B draw a line perpendicular to CD. This line intersects the perpendicular bisector of AB at E. Show that DE is perpendicular to AC.

Problem T5/508. Solve the equation

$$x^{2010} - 2011x^{670} + \sqrt{2010} = 0.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/508. Given non-negative numbers a, b, c with at most one of them is equal to 0. Show that for every positive integer n we have

$$\frac{a^{2^n}+b^{2^n}}{a^{2^n}+c^{2^n}} + \frac{b^{2^n}+c^{2^n}}{b^{2^n}+a^{2^n}} + \frac{c^{2^n}+a^{2^n}}{c^{2^n}+b^{2^n}} \geq \frac{a+b}{a+c} + \frac{b+c}{b+a} + \frac{c+a}{c+b}.$$

Problem T7/508. Find the value of the expression

$$f(A,B,C) = \sin A + \sin B + \sin C - \sin A \sin B \sin C$$

where A, B, C are the angles of a triangle.

Problem T8/508. Given a tetrahedron $OABC$ with OA, OB, OC are pairwise perpendicular and $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Let r be the radius of the inscribed sphere of $OABC$. Show that

$$\frac{1}{r} \geq \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

(Xem tiếp trang 32)

Bài T1/504. *Tìm số tự nhiên n biết rằng $n^5 + n + 1$ chỉ có một ước số nguyên tố duy nhất.*

Lời giải. Biến đổi như sau:

$$n^5 + n + 1 = n^3(n^2 + n + 1) - n^2(n^2 + n + 1) + n^2 + n + 1$$
$$= (n^2 + n + 1)(n^3 - n^2 + 1).$$

Từ giả thiết $n^5 + n + 1$ chỉ có một ước số nguyên tố duy nhất là p ta viết được:

$$n^5 + n + 1 = p^s = (n^2 + n + 1)(n^3 - n^2 + 1)$$

với số nguyên dương s.

Xảy ra ba trường hợp sau.

1) Nếu $n^2 + n + 1 = 1$ và $n^3 - n^2 + 1 = p^s$, lúc đó $n = 0$ và $p = 1$, không thỏa mãn.

2) Nếu $n^2 + n + 1 = p^s$ và $n^3 - n^2 + 1 = 1$, lúc đó $n > 0$ và $n^2(n - 1) = 0$ nên $n = 1$ và

$$n^5 + n + 1 = 3; p = 3; s = 1: \text{thỏa mãn.}$$

3) Nếu $n^2 + n + 1 = p^r$ và $n^3 - n^2 + 1 = p^v$ với $r + v = s$ mà $r \geq 1$ và $v \geq 1$.

Với $n = 2$ thì $n^2 + n + 1 = 7$ và $n^3 - n^2 + 1 = 5$, không thỏa mãn.

Với $n \geq 3$ thì $n(n - 2) > 1$ nên $n^2(n - 2) > n$, suy ra $n^3 - n^2 + 1 > n^2 + n + 1$, do đó $v > r$.

Ta biến đổi như sau:

$$p^v = n^3 - n^2 + 1$$
$$= n(n^2 + n + 1) - 2(n^2 + n + 1) + n + 3$$
$$= np^r - 2p^r + n + 3,$$

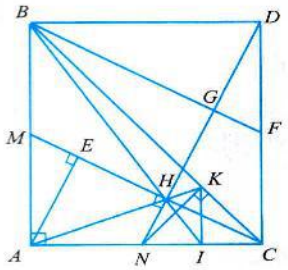
hay là $p^r p^{v-r} = p^r(n - 2) + n + 3$, suy ra $n + 3$ chia hết cho $p^r = n^2 + n + 1$, do đó $n + 3 \geq n^2 + n + 1$, tức là $n^2 \leq 2$, điều này không xảy ra vì $n \geq 3$.

Bài toán có một nghiệm ứng với $n = 1$ và $n^5 + n + 1 = 3$.

Nhận xét. Nhiều bạn lập luận cho trường hợp 3 không đầy đủ hoặc dài. Các bạn sau có lời giải đúng: **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 6C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Nghệ An:** *Lê Văn Quang Hiếu, Nguyễn Cảnh Nam Khánh*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/504. *Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AC và NC; K là hình chiếu của N trên cạnh BC. Chứng minh ba đường thẳng AK, BI và CM đồng quy tại một điểm.*



Lời giải. Gọi E, H lần lượt là hình chiếu của A và N trên đường thẳng CM. Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với AC cắt tia NH tại D. Gọi F là trung điểm của CD, BF cắt ND tại G.

Các tam giác vuông NHC, NKC có HI, KI là các trung tuyến thuộc cạnh huyền nên các tam giác NHI, HIK và IKC cân tại I nên ta có:

$$2\widehat{IHN} + 2\widehat{IHK} + 2\widehat{ICK}$$
$$= \widehat{HNC} + \widehat{NHC} + \widehat{HCN} + \widehat{KHC} + \widehat{HKC} + \widehat{HCK}$$
$$= 180^o + 180^o = 360^o. \text{ Hay } 2\widehat{NHK} + 2\widehat{ICK} = 360^o$$
$$\Rightarrow \widehat{NHK} = 180^o - \widehat{ICK} = 135^o. \quad (1)$$

Theo tính chất đường trung bình của tam giác ta có: $EH = HC$. Mà $HC = AE$ ($\Delta AME = \Delta CNH$)

$\Rightarrow EH = EA \quad \Rightarrow \Delta EAH$ vuông cân tại E

$\Rightarrow \widehat{EAH} = \widehat{EHA} = 45^o \quad \Rightarrow \widehat{AHN} = 45^o$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{NHK} + \widehat{AHN} = 180^o$

$\Rightarrow A, H, K$ thẳng hàng. (3)

Ta lại có $\Delta AMC = \Delta CND$ (g.c.g)

$\Rightarrow DC = AC \Rightarrow CF = BM$ $(= AM)$

$\Rightarrow \Delta MBC = \Delta FCB$ (c.g.c.)

$\Rightarrow \widehat{CBF} = \widehat{BCM} \Rightarrow BF // CM.$

Mà $CM \perp ND \Rightarrow BF \perp ND.$

Xét ΔDHC có F là trung điểm của CD, $FG // CH$ suy ra G là trung điểm của HD.

Do đó tam giác BDH cân tại $B \Rightarrow BH = BD$.

Mặt khác $\Delta ABC = \Delta DCB$ (c.g.c)

$\Rightarrow BD = AC \Rightarrow BD = DC = AC = AB$

$\Rightarrow AB = BH \Rightarrow \Delta ABH$ cân tại $B \Rightarrow \widehat{BHA} = \widehat{BAH}$.

Mà $\widehat{EAH} = \widehat{EHA} = 45^o \Rightarrow \widehat{BHM} = \widehat{MAE} = \widehat{HCN}$.

Ta có: $\widehat{BHN} + \widehat{NHI} = \widehat{BHM} + 90^o + \widehat{NHI}$

$= 90^o + \widehat{HCN} + \widehat{HNC} = 180^o$

$\Rightarrow B, H, I$ thẳng hàng. (4)

Từ (3) và (4) suy ra ba đường thẳng AK, BI và CM đồng quy tại H.

Nhận xét. Các bạn sau đây sử dụng định lí Ceva giải đúng: **Hà Nội:** *Hoàng Xuân Tú*, 6A, THCS Tô Hoàng; **Nghệ An:** *Nguyễn Công An*, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Phú Yên:** *Phan Minh Khôi*, 9E, THCS Trần Kiệt, Đông Hòa.

NGUYỄN HIỆP

Bài T3/504. *Cho các số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $a + b = c + d = 2019$ và $ab \geq cd$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{a + 3\sqrt[3]{b} + 2}{\sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{d}}$.*

Lời giải. Để cho gọn ta kí hiệu $x = \sqrt[3]{a}, y = \sqrt[3]{b}, z = \sqrt[3]{c}, t = \sqrt[3]{d}$. Ta có x, y, z, t là các số thực dương, $x^3 + y^3 = z^3 + t^3, xy \geq zt$. Dùng hằng đẳng thức

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = (x+y)[(x+y)^2 - 3xy],$$

$$z^3 + t^3 = (z+t)[(z+t)^2 - 3zt],$$

kết hợp với giả thiết $x^3 + y^3 = z^3 + t^3$, $xy \geq zt$ ta suy ra $x + y \geq z + t$ (vì nếu $x + y < z + t$

$\Rightarrow (x+y)^2 - 3xy < (z+t)^2 - 3zt$

$\Rightarrow (x+y)[(x+y)^2 - 3xy] < (z+t)[(z+t)^2 - 3zt])$.

Do đó: $P = \dfrac{a + 3\sqrt[3]{b} + 2}{\sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{d}} = \dfrac{x^3 + 3y + 2}{z + t}$

$$= \frac{(x^3 - 3x + 2) + 3(x+y)}{z+t}$$

$$= \frac{(x-1)^2(x+2) + 3(x+y)}{z+t} \geq \frac{3(x+y)}{z+t} \geq 3.$$

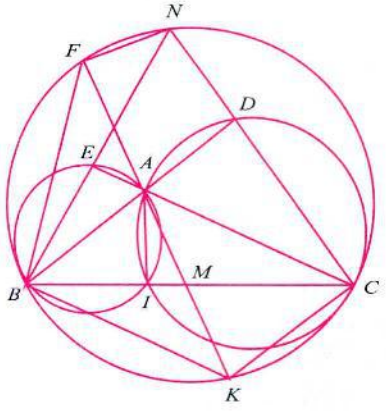
$P = 3$ khi và chỉ khi $x = 1, x + y = z + t, xy = zt \Leftrightarrow a = 1$, $b = 2018$ và hoặc $(c, d) = (1, 2018)$ hoặc $(c, d) = (2018, 1)$. Vậy $\min P = 3$.

Nhận xét. Bài toán bất đẳng thức trên thuộc dạng cơ bản, đơn giản. Các bạn học sinh sau có lời giải đúng: **Hà Nội:** *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Nghệ An:** *Trương Công Cảnh*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Trị:** *Nguyễn Hữu Hoàng Long*, 9G, THCS Nguyễn Trãi, TP. Đông Hà.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T4/504. *Cho tam giác ABC, $\widehat{A} > 90^o$. Lấy điểm I nằm giữa B và C sao cho BA cắt đường tròn ngoại tiếp ΔACI tại D ($D \neq A$) và CA cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABI tại E ($E \neq A$), BE cắt CD tại N. Gọi M là trung điểm của BC, MA cắt đường tròn ngoại tiếp ΔBNC tại F. Chứng minh rằng A, D, E, F, N cùng thuộc một đường tròn.*

Lời giải.



Cách 1 (Theo bạn *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai, **Hà Nội).** Các tứ giác $BEAI$ và $CDAI$ nội tiếp, ta có $\widehat{NEA} = \widehat{AIB} = \widehat{ADC}$, suy ra tứ giác $ADNE$ nội tiếp. Gọi F' là giao điểm thứ hai của hai đường tròn ($ADNE$) và (BNC); M' là giao điểm của $F'A$ và BC. Vì các tứ giác $ADNF'$ và $BCNF'$ nội tiếp nên $\widehat{CBF'} = 180° - \widehat{F'NC} = \widehat{F'AD} = \widehat{BAM'}$.

Từ đó $\widehat{M'BF'} = \widehat{M'AB}$, suy ra $\Delta M'BF' \backsim \Delta M'AB$ (g.g). Do đó $\dfrac{M'B}{M'F'} = \dfrac{M'A}{M'B} \Leftrightarrow M'B^2 = M'A.M'F'$.

Tương tự, ta có $M'C^2 = M'A.M'F'$, nên $M'B = M'C$, tức là $M' \equiv M$ và $F' \equiv F$. Vậy các điểm A, D, E, F, N cùng thuộc một đường tròn.

Cách 2 (Theo bạn *Trương Công Cảnh*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**). Dễ thấy *ADNE* là tứ giác nội tiếp (theo Cách 1). Lấy *K* là điểm đối xứng của *A* qua *M*. Dễ thấy *ABKC* là hình bình hành, ta có $\widehat{BKC} = \widehat{BAC} = \widehat{DAE} = 180° - \widehat{DNE}$. Suy ra *K* thuộc đường tròn (*BNC*). Từ đó $\widehat{MBA} = \widehat{BCK} = \widehat{BFK}$, tức là $\widehat{ABM} = \widehat{BFM}$.

Suy ra $\Delta MBA \backsim \Delta MFB$

$\Rightarrow \widehat{FAD} = \widehat{MAB} = \widehat{MBF} = 180° - \widehat{FNC}$.

Vậy $\widehat{FAD} = 180° - \widehat{FND}$, nên tứ giác *ADNF* nội tiếp, suy ra các điểm *A, D, E, F, N* cùng thuộc một đường tròn.

Nhận xét. Chỉ có bạn *Tùng* và bạn *Cảnh* làm đúng bài toán trên.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/504. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^4 + 3x = y^4 + y \\ x^2 - y^2 = 2 \end{cases}.$$

Lời giải. Đặt $x + y = a$; $x - y = b$ suy ra $x = \dfrac{a+b}{2}$; $y = \dfrac{a-b}{2}$.

Từ phương trình thứ hai trong hệ suy ra

$$ab = 2 \Rightarrow b = \frac{2}{a}.$$

Ta có: $x^2 + y^2 = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2}$;

$$x^4 - y^4 = \left(x^2 - y^2\right)\left(x^2 + y^2\right) = ab\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right) = a^2 + b^2.$$

Phương trình thứ nhất trong hệ có thể viết thành

$$x^4 - y^4 + 3x - y = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 3.\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + a + 2b = 0 \Leftrightarrow a^2 + \frac{4}{a^2} + a + \frac{4}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 + a^3 + 4a + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+1)\left(a^3 + 4\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = -\sqrt[3]{4} \end{array}\right..$$

Với $a = -1 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow x = -\dfrac{3}{2}; y = \dfrac{1}{2}$.

Với $a = -\sqrt[3]{4} \Rightarrow b = -\sqrt[3]{2}$

$\Rightarrow x = -\dfrac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}}{2}$; $y = \dfrac{-\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}}{2}$. Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là

$$(x; y) = \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}}{2}; \frac{-\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}}{2}\right).$$

Nhận xét. Với hệ phương trình có chứa $x^2 - y^2$; $x^4 - y^4$, việc đổi biến số như sau nhiều khi rất hữu ích: Đặt $x + y = a$, $x - y = b$ suy ra

$$x = \frac{a+b}{2};\ y = \frac{a-b}{2} \text{ và } x^2 - y^2 = ab,$$

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2+b^2}{2},\ x^4 - y^4 = ab\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right).$$

Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Quảng Trị**: *Nguyễn Hữu Hoàng Long*, 9G, THCS Nguyễn Trãi, TP. Đông Hà; **Nghệ An**: *Trương Công Cảnh*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Nội** : *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Bà Rịa – Vũng Tàu**: *Phan Trung Kiên*, 9A3, THCS Lê Quang Cường, TP. Bà Rịa.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/504. *Tìm tổng các bình phương tất cả các nghiệm thực của phương trình*

$$x^5 + 2018x^2 + 2019 = x^4 + 2019x^3 + 2020x. \quad (1)$$

Lời giải. Đặt $a = 2019$ thì PT (1) viết lại thành

$$x^5 + (a-1)x^2 + a = x^4 + ax^3 + (a+1)x$$

$$\Leftrightarrow (x^5 - x^4 - x^2 - x) - a(x^3 - x^2 + x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)(x^3 - x^2 - x) - a(x^2+1)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - x - a(x-1) = 0 \text{ (do } x^2 + 1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - (a+1)x + a = 0 \quad (2)$$

Hàm số $f(x) = x^3 - x^2 - (a+1)x + a$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có $f(0) = a > 0$, $f(1) = -1 < 0$, $f(50) = 23519 > 0$, $f(-50) = -24481 < 0$. Do đó, trên mỗi khoảng $(-50; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 50)$ thì PT (2) có ít nhất 1 nghiệm thực. Hơn nữa, (2) là phương trình đa thức bậc ba nên nó có không quá 3 nghiệm. Như vậy PT (2) có đúng 3 nghiệm thực x_1, x_2, x_3. Từ đó suy ra PT (1) có đúng 3 nghiệm thực x_1, x_2, x_3.

Theo định lí Viète, ta có $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ và $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -(a+1)$. Vậy

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$$
$$= 1 + 2(a+1) = 4041.$$

Nhận xét. Việc lập luận PT(2) có 3 nghiệm thực, để đỡ tính toán $f(50)$, $f(-50)$ ta có thể sử dụng giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ nên tồn tại các số thực $a_1>1$, $a_2<0$ để $f(a_1) > 0$, $f(a_2) < 0$. Đa số các bạn gửi bài giải đều cho đáp số đúng. Tuy nhiên, một số bạn sau khi tìm đến PT (2) đã vận dụng ngay định lí Viète mà quên lập luận PT (2) phải có 3 nghiệm thực. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội**: *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Bắc Ninh**: *Đinh Hoài Anh*, 11A, THPT Yên Phong số 2; **Vĩnh Long**: *Trương Gia Bảo*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Cần Thơ**: *Phan Trung Đức*, 10A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Thừa Thiên – Huế:** *Hoàng Bảo Minh Châu*, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Đồng Tháp**: *Huỳnh Tấn Phúc*, 12T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

T7/504. *Cho 3 số thực dương x, y, z sao cho $xyz = 1$. Chứng minh*

$$\frac{1}{x^{k+1}(y+z)} + \frac{1}{y^{k+1}(z+x)} + \frac{1}{z^{k+1}(x+y)} \ge \frac{3}{2}$$

$(k \in \mathbb{N}^*)$.

Lời giải. (Của các bạn gửi bài). Đặt $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$, $c = \frac{1}{z}$, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{a^k}{b+c} + \frac{b^k}{c+a} + \frac{c^k}{a+b} \ge \frac{3}{2} \text{ với } abc = 1.$$

Khi $k = 1$, bất đẳng thức đúng, vì đây là bất đẳng thức Nesbit.

Xét $k \ge 2$, ta có theo bất đẳng thức Cauchy cho k số:

$$\frac{a^k}{b+c} + \frac{b+c}{4} + \frac{k-2}{2} \ge k\sqrt[k]{\frac{a^k}{b+c}\cdot\frac{b+c}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}} = \frac{ka}{2}.$$

Ta có $\frac{a^k}{b+c} \ge \frac{ka}{2} - \left(\frac{b+c}{4} + \frac{k-2}{2}\right)$.

Tương tự với b, c:

$$\frac{b^k}{c+a} \ge \frac{kb}{2} - \left(\frac{c+a}{4} + \frac{k-2}{2}\right),$$

$$\frac{c^k}{a+b} \ge \frac{kc}{2} - \left(\frac{a+b}{4} + \frac{k-2}{2}\right).$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức này, ta có:

$$\frac{a^k}{b+c} + \frac{b^k}{c+a} + \frac{c^k}{a+b} \ge \frac{(k-1)(a+b+c)}{2} - \frac{3(k-2)}{2}.$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho a, b, c, ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh:

$$\frac{a^k}{b+c} + \frac{b^k}{c+a} + \frac{c^k}{a+b} \ge \frac{(k-1)(a+b+c)}{2} - \frac{3(k-2)}{2}$$
$$\ge \frac{3(k-1)}{2} - \frac{3(k-2)}{2} = \frac{3}{2}.$$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $x = y = z = 1$.

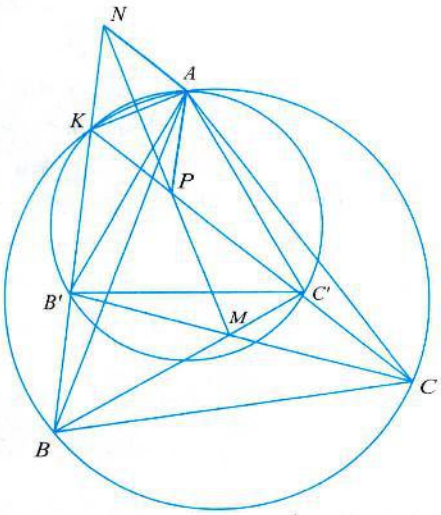
Nhận xét. Có rất nhiều bạn giải bài này, ý tưởng giải của các bạn cũng áp dụng các bất đẳng thức tương tự như lời giải trên. Các bạn có bài giải đúng là các bạn sau đây: **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, THCS Lê Quang Cường, TP. Bà Rịa; **Cần Thơ:** *Trần Danh Nhân*, 10A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP. Cần Thơ; **Hà Nam:** *Ngô Việt Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Biên Hòa; **Hà Nội**: *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hưng Yên:** *Phạm Văn Thông*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Long An:** *Phạm Minh Anh*, 10T1, THPT chuyên Long An; **Nghệ An:** *Trương Công Cảnh*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Phú Yên:** *Đặng Hải Đăng*, 11A6, THPT Ngô Gia Tự, TP. Tuy Hòa; **Quảng Bình:** *Đinh Đoàn Xuân Phương*, 12 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Trị:** *Lê Chí Cường*, 10A8, THPT Cam Lộ, Cam Lộ, *Nguyễn Hữu Hoàng Long*, 10 Toán, THPT Lê Quý Đôn; **Sóc Trăng**: *Đậu Đức Quân*, 10A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, TP. Sóc Trăng, *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An huyện Kế Sách; **Thanh Hóa**: *Lê Phú Tấn*, 10T1, THPT

chuyên Lam Sơn; **Thừa Thiên Huế:** *Trương Tiến Dũng,* 11T2, *Hoàng Bảo Minh Châu, Đỗ Cao Bách Tùng,* 10T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Vĩnh Long:** *Lê Minh Tâm,* 11T1, *Trương Gia Bảo, Lê Ngô Minh Đức,* 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Vĩnh Phúc:** *Lê Ngọc Hoa,* 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T8/504. *ABC và AB'C' là hai tam giác đều cùng hướng. K là giao điểm thứ hai của các đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC, \Delta AB'C'$. M là giao điểm của BC', CB'. Chứng minh rằng MA = MK.*

Lời giải.



Gọi *N*, *P* theo thứ tự là giao điểm của đường trung trực của đoạn thẳng *AK* với *KB*, *KC*. Khi đó ta thấy các tam giác *ANK*, *APK* là tam giác đều. Xét phép quay tâm *A*, góc quay 60° ($R_A^{60^\circ}$) thì

$$R_A^{60^\circ}: B \mapsto C;\ B' \mapsto C';\ N \mapsto K;\ K \mapsto P.$$

Từ đó theo tính chất của phép quay ta có

C(BMNP) = C(BB'NK) = B(CC'KP) = B(CMNP), suy ra ba điểm *M*, *N*, *P* thẳng hàng, dẫn đến *MA = MK* (do *NP* là đường trung trực của đoạn thẳng *AK*) (đpcm).

Nhận xét. Tòa soạn chỉ nhận được một bài giải đúng bằng phương pháp tọa độ của bạn *Phan Trung Đức*, 10A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP. Cần Thơ, **Cần Thơ**.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/504. *Xác định hệ số của x trong khai triển đa thức của biểu thức*

$$(1+x)(1+2x)^2\ldots(1+nx)^n.$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn). Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (1)$$

và với $2 \le k \in \mathbb{N}^*$, thì $(1+kx)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j (kx)^j$. (2)

Khi đó hệ số tự do và hệ số của x trong khai triển đa thức của biểu thức $(1+kx)^k$ lần lượt là 1 và k^2. Suy ra

$$(1+kx)^k = 1+k^2x+P_k(x)x^2,\ k=2,3,\ldots$$

trong đó $P_k(x)$ là các đa thức xác định.

Tiếp theo, lần lượt thay các giá trị k bằng $2,3,\ldots,n$, ta thu được

$$(1+x)(1+2x)^2\ldots(1+nx)^n$$
$$= (1+x)[1+2^2x+P_2(x)x^2]$$
$$[1+3^2x+P_3(x)x^2]\ldots[1+n^2x+P_n(x)x^2].$$

Khi đó hệ số tự do và hệ số của x trong khai triển đa thức của biểu thức

$$(1+x)[1+2^2x+P_2(x)x^2][1+3^2x+P_3(x)x^2]\ldots[1+n^2x+P_n(x)x^2]$$

lần lượt là 1 và $1+2^2+3^2+\ldots+n^2$. Theo (1), thì hệ số của x trong khai triển đa thức của biểu thức $(1+x)(1+2x)^2\ldots(1+nx)^n$ bằng $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Nhận xét. Ta cũng có thể dễ dàng tính hệ số của x trong khai triển đa thức của biểu thức $f(x) := (1+x)(1+2x)^2\ldots(1+nx)^n$ bằng phương pháp tính giá trị đạo hàm $f'(0)$.

Các bạn sau đây có lời giải đúng. **Bắc Ninh**: *Đinh Hoài Anh,* 11A, THPT Yên Phong 2; **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Long An**: *Phạm Minh Anh, Nguyễn Phước Thịnh*, 10T1, THPT chuyên Long An; **Nghệ An**: *Đặng Hữu Khanh, Trương Công Cảnh*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Bình:** *Đinh Đoàn Xuân Phương*, 12T, THPT chuyên Võ Nguyên

Giáp; **Quảng Trị**: *Hoàng Văn Chương*, 10A8, THPT Cam Lộ; **Thanh Hóa**: *Lê Phúc Tấn*, *Đỗ Cao Bách Tùng*, 10T1, THPT chuyên Lam Sơn; **Vĩnh Phúc**: *Lê Ngọc Hoa*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/504. *Cho dãy số thực $\{x_n\}$ được xác định như sau* $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{2x_n}, \forall n \geq 1 \end{cases}$.

Chứng minh rằng $[9x_{81}] = 81$ (ký hiệu $[x]$ là phần nguyên của số thực x).

Lời giải. (Của bạn *Trương Gia Bảo*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long**).

Đặt $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Bước 1. Ta chứng minh $n \leq \sqrt{n}x_n < n + \frac{H_n}{6}$. (1)

Trước hết ta chứng minh $\sqrt{n}x_n \geq n \Leftrightarrow x_n^2 \geq n$. (2)

Chứng minh (2) bằng quy nạp.

Với $n = 1$: (2) đúng.

Giả sử (2) đúng với n: $x_n^2 \geq n$. Khi đó $x_{n+1}^2 \geq n + 1 + \frac{1}{4x_n^2} > n + 1$. Vậy (2) đúng với $n + 1$.

Tiếp theo áp dụng (2) ta có:

$$x_n^2 = x_{n-1}^2 + \frac{1}{4x_{n-1}^2} + 1 = \cdots = x_1^2 + (n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4x_k^2}$$

$$\leq n + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} < n + \frac{1}{4}H_n < \left(\sqrt{n} + \frac{1}{6\sqrt{n}}H_n\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}x_n \leq n + \frac{H_n}{6}.$$

Vậy (1) được chứng minh.

Bước 2. Ta chứng minh

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x, \forall x > 0.$$

Thật vậy xét hàm số

$$f(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}.$$

Dễ thấy $f'(x) < 0$ do đó $f(x)$ giảm trên $(0, +\infty)$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Từ đó $f(x) > 0, \forall x \in (0, +\infty)$

hay $\ln(x+1) - \ln x > \frac{1}{x+1}$. Vậy

$$H_{81} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{81}$$
$$< 1 + \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \cdots$$
$$+ \ln 81 - \ln 80 = 1 + \ln 81 < 6. \quad (3)$$

Vậy áp dụng (1) và (3) ta có

$$81 \leq \sqrt{81}x_{81} < 81 + \frac{H_{81}}{6} < 82.$$

Thành thử $[9x_{81}] = 81$.

Nhận xét. Bài này có ít bạn tham gia giải. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Quảng Bình:** *Hoàng Kim Cả*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 12A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre; **Thanh Hóa:** *Đỗ Cao Bách Tùng*, 10T1, THPT chuyên Lam Sơn, TP. Thanh Hóa; **Vĩnh Phúc:** *Lê Ngọc Hoa*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/504. *Cho số nguyên dương $k \geq 2$ và số nguyên dương $n \geq \frac{k(k+1)}{2}$. Tìm số nguyên dương m lớn nhất để trong n số nguyên dương phân biệt bất kì không vượt quá m luôn tồn tại $k+1$ số phân biệt mà một số bằng tổng của k số còn lại.*

Lời giải. Ta thấy $m \geq n \geq k$. Xét n số nguyên dương $m - n + 1, m - n + 2, \ldots, m - n + k, \ldots, m$.

Tổng của k số phân biệt nhỏ nhất bằng

$$(m - n + 1) + (m - n + 2) + \ldots + (m - n + k)$$
$$= k(m - n) + \frac{k(k+1)}{2}.$$

Suy ra: $m \geq k(m - n) + \frac{k(k+1)}{2}$

$$\Leftrightarrow (k-1)m \leq kn - \frac{k(k+1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow m \le \frac{kn}{k-1} - \frac{k(k+1)}{2(k-1)} \Rightarrow m \le \left[\frac{kn}{k-1} - \frac{k(k+1)}{2(k-1)}\right].$$

Ta sẽ chứng minh $m = \left[\frac{kn}{k-1} - \frac{k(k+1)}{2(k-1)}\right]$ thỏa mãn đề bài. Thật vậy, giả sử $a_1 < a_2 < ... < a_n$ là các số nguyên dương không vượt quá m. Đặt $s = \left[\frac{m-n-1}{k-1}\right] + 1 + k$. Ta có:

$$s - k = \left[\frac{m-n-1}{k-1}\right] + 1 > \frac{m-n-1}{k-1}$$

$$\Rightarrow (s-k)(k-1) > m-n-1$$

$$\Rightarrow (s-k)(k-1) \ge m-n \Rightarrow s \ge \frac{m-n}{k-1} + k.$$

Gọi t là số nguyên nhỏ nhất sao cho $t(s-k) \ge m-n$ thì $t \le k-1$ và $(t-1)(s-k) < m-n$.

Đặt $p = (m-n) - (t-1)(s-k) + k - t + 1$

$$= (m-n) - t(s-k) + s - t + 1$$

thì $k - t + 1 < p \le s - t + 1$. Xét các số nguyên dương: $a_n - a_1 > a_{n-1} - a_1 > ... > a_2 - a_1$ và

$$a_2 + a_3 + ... + a_{k-1} + a_k < a_2 + a_3 + ... + a_{k-1} + a_{k+1} < ... <$$
$$a_2 + a_3 + ... + a_{k-2} + a_{k-1} + a_s < a_2 + a_3 + ... + a_{k-2} + a_k + a_s$$
$$< ... < a_2 + a_3 + ... + a_{k-3} + a_{k-2} + a_{s-1} + a_s$$
$$< a_2 + a_3 + ... + a_{k-3} + a_{k-1} + a_{s-1} + a_s < ...$$
$$< a_2 + a_3 + ... + a_{k-3} + a_{s-2} + a_{s-1} + a_s$$
$$< ... < a_2 + ... + a_{k-t} + a_{k-t+2} + a_{s-t+2} + ... + a_s$$
$$< ... < a_2 + ... + a_{k-t} + a_p + a_{s-t+2} + ... + a_s.$$

Số các số đang xét là:

$$(n-1) + (t-1)(s-k) - 1 + (p-k+t+1) = m.$$

Ta có:

$$a_n - a_i = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + ... + (a_{i+1} - a_i) \ge n - i.$$

Suy ra $a_i \le a_n - n + i \le m - n + i$ với mọi $i = 1, 2, ..., n-1$. Do đó

$$a_2 + ... + a_{k-t} + a_p + a_{s-t+2} + ... + a_s \le (k-1)(m-n) + 2 + ... + (k-t) + p + (s-t+1) + ... + s$$

$$= (k-1)(m-n) + \frac{(k-t+2)(k-t-1)}{2} + m - n - t(s-k) + s - t + 1 + \frac{(2s-t+2)(t-1)}{2}$$

$$= k(m-n) + \frac{k(k+1)}{2} - 1 \le m - 1.$$

Hơn nữa $a_n - a_1 \le m - 1$. Như vậy m số nguyên dương đang xét không vượt quá $m-1$ nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số bằng nhau. Hai số này phải có dạng $a_i - a_1$ và $a_{i_1} + a_{i_2} + ... + a_{i_{k-1}}$ với $2 \le i \le n$ và $2 \le i_1 < i_2 < ... < i_{k-1} < s$ nào đó, tức là: $a_i - a_1 = a_{i_1} + a_{i_2} + ... + a_{i_{k-1}}$

hay $a_i = a_1 + a_{i_1} + a_{i_2} + ... + a_{i_{k-1}}$.

Khi đó: $a_i > a_{i_{k-1}}$ nên $i > i_{k-1}$. Như vậy $k+1$ số $a_i, a_1, a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_{k-1}}$ thỏa mãn đề bài.

Vậy số nguyên lớn nhất thỏa mãn đề bài là

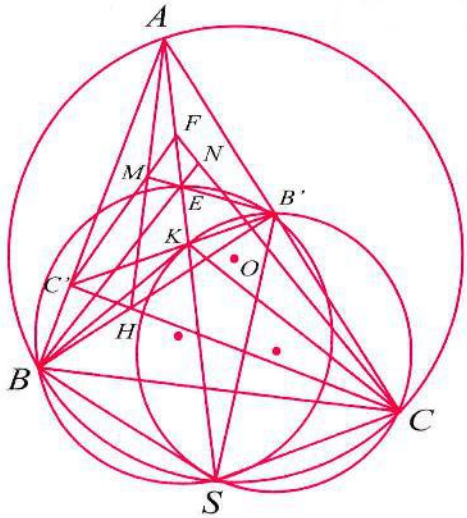
$$m = \left[\frac{kn}{k-1} - \frac{k(k+1)}{2(k-1)}\right].$$

➢***Nhận xét.*** Đây là bài toán khó, không có bạn nào giải được bài này.

TRẦN HỮU NAM

Bài T12/504. *Cho tam giác ABC không vuông. Các đường cao BB' và CC' cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của AH. K là một điểm bất kì trên B'C' (K khác B', C'). Đường thẳng AK cắt MB', MC' theo thứ tự tại E, F. Gọi N là giao điểm của BE và CF. Chứng minh rằng K là trực tâm của tam giác NBC.*

Lời giải. (Theo bạn *Trần Hoàng Minh*, 10T, THPT chuyên Thái Nguyên, **Thái Nguyên**).



Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; S là giao điểm thứ hai của AK và (O). Dễ thấy các bộ bốn điểm A, B, C, S và B, C, B', C' cùng thuộc một đường tròn. Do đó

$$(SC, SK) \equiv (SC, SA) \equiv (BC, BA) \equiv (BC, BC')$$
$$\equiv (B'C, B'C') \equiv (B'C, B'K) (\bmod \pi).$$

Điều đó có nghĩa là bốn điểm C, K, B', S cùng thuộc một đường tròn (1).

Vì $\widehat{AB'H} = 90°$ và $MA = MH$ nên tam giác MAB' cân tại M.

Từ đó, chú ý rằng bốn điểm A, B, C, S cùng thuộc một đường tròn và $MA \perp BC$; $B'A \perp BB'$, suy ra

$$(ES, EB') \equiv (AS, AC) + (AB', MB')$$
$$\equiv (BS, BC) + (MA, B'A) (\bmod \pi)$$
$$\equiv (BS, BC) + (BC, BB') \equiv (BS, BB') (\bmod \pi).$$

Do đó bốn điểm B, B', E, S cùng thuộc một đường tròn (2).

Từ (1) và (2) suy ra

$$(CK, C'B) \equiv (SK, SB') \equiv (SE, SB') \equiv$$
$$(BE, BB') \equiv (BN, BB') (\bmod \pi).$$

Kết hợp với $BB' \perp CB'$, ta có $BN \perp CK$. Tương tự $CN \perp BK$. Vậy K là trực tâm của tam giác NBC.

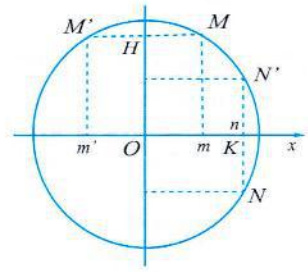
Nhận xét. 1) Bài toán này không khó. Tuy nhiên, ngoài bạn *Minh* chỉ có một bạn tham gia giải: *Nguyễn Trúc Như Bình*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh, **Đồng Tháp.**

2) Bạn *Minh* không biết sử dụng góc định hướng. Do đó lời giải của bạn chỉ đúng trong trường hợp tam giác ABC nhọn và K thuộc đoạn $B'C'$.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/504. *Một vật dao động điều hoà với phương trình $x = 10\cos(2\pi t + \varphi)$ (cm). Biết rằng trong một chu kì, khoảng thời gian ngắn nhất giữa hai lần liên tiếp vật cách vị trí cân bằng một khoảng m (cm) bằng với khoảng thời gian giữa hai lần liên tiếp vật cách vị trí cân bằng một khoảng n (cm); đồng thời khoảng thời gian mà tốc độ không vượt quá $2\pi(m - n)$ (cm/s) là 0,5s. Tính tỉ số $\frac{n}{m}$.*

Lời giải.



Từ hình vẽ ta nhận thấy, khoảng thời gian ngắn nhất giữa hai lần mà vật cách vị trí cân bằng một đoạn m được thể hiện bằng cung MM', khoảng thời gian ngắn nhất giữa hai lần mà vật cách vị trí cân bằng một đoạn n được thể hiện bằng cung NN'. Theo đề bài hai khoảng thời gian này bằng nhau, tức là độ dài hai cung này bằng nhau. Do đó

$HM = HM' = KN = KN' = m$

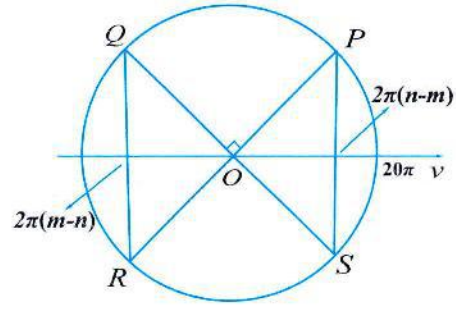
$OH = OK = n \Rightarrow m^2 + n^2 = OM^2 = 100$ (1).

Từ phương trình dao động

$x = 10\cos(2\pi t + \varphi)$ (cm/s), ta có phương trình vận tốc: $v = x' = -20\pi \sin(2\pi t + \varphi)$ (cm/s)

v và x cùng có chu kì là: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ s.

Từ giản đồ Fresnel cho vận tốc (hình vẽ), khoảng thời gian mà $v \le 2\pi(m - n)$ bằng: $0,5\ s = \frac{T}{2}$.



Trên hình vẽ, khoảng thời gian đó được biểu thị bằng tổng độ dài các cung PQ và RS (mỗi cung là $\frac{1}{4}$ đường tròn). PQ và RS (mỗi cung là $\frac{1}{4}$ đường tròn). Do đó: $2\pi(n - m) = \frac{20\pi}{\sqrt{2}} = 10\pi\sqrt{2}$

$\Rightarrow n = m + 5\sqrt{2}$ (2). Thay (2) vào (1), ta được: $m^2 + 5\sqrt{2}\,m - 25 = 0 \Rightarrow m = 2,588$. Thay kết quả

trên vào (2), ta được $n = 9,659$. Từ đó : $\frac{n}{m} = 3,73$.

Nhận xét. Rất tiếc vì không bạn nào có lời giải đúng cho đề ra kì này!

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/504. *Cho đoạn mạch có R, L mắc nối tiếp, điện trở R = 100 Ω, cuộn cảm thuần có độ tự cảm* $L = \frac{\sqrt{3}}{\pi}(H)$. *Giả sử điện áp giữa hai đầu đoạn mạch là* $u = 400\cos^2(50\pi t + \pi)(V)$. *Xác định cường độ dòng điện hiệu dụng qua đoạn mạch bằng*

Lời giải. Ta có: $u = 400\cos^2\left(50\pi t + \pi\right)$

$$= 200 + 200\cos 100\pi t.$$

Dòng điện qua đoạn mạch gồm hai thành phần: thành phần một chiều và xoay chiều.

$$I_{1chieu} = \frac{200}{100} = 2A.$$

$$I_{xc} = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{r^2 + Z_L^2}} = \frac{200}{200\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}A.$$

Theo định nghĩa dòng điện hiệu dụng:

$$P = I^2R = \left(I_{1chieu}^2 + I_{xc}^2\right)R \Rightarrow I = \frac{3}{\sqrt{2}}A.$$

Nhận xét. Rất tiếc vì không bạn nào có lời giải đúng cho đề ra kì này!

NGUYỄN XUÂN QUANG

****

NHỮNG NGHỊCH LÍ...

(*Tiếp theo trang* 20)

Nghịch lý đó như sau: *Một người lính được thượng cấp truyền lệnh: anh ta phải cạo râu cho tất cả mọi binh lính không tự cạo được của đơn vị và nghiêm cấm anh ta cạo râu cho những người tự cạo được.*

Sau một thoáng lúng túng, anh lính ấp úng:

- Dạ, bẩm ngài chỉ huy! Thế ai sẽ cạo râu cho thảo dân này ạ?

Người chỉ huy ngớ người ra, không trả lời được. Bởi lẽ: nếu anh ta tự cạo cho mình thì anh ta thuộc "tập hợp những người tự cạo lấy". Nhưng đối với những người này anh ta không được phép cạo. Nếu anh ta không tự cạo lấy thì anh ta thuộc "tập hợp những người không tự cạo được", tức là những người mà anh ta phải cạo!

Đằng nào anh ta cũng rơi vào tình trạng không lối thoát mặc dù anh ta là người lính tinh anh và dí dỏm!

Đến nay trong LTTH đã có gần hai mươi nghịch lý liên quan đến chính khái niệm của lý thuyết đó. Để tránh các nghịch lý, điều quan trọng là các nhà toán học không sử dụng một cách quá ư tự do các khái niệm của nó và tìm cách loại bỏ một cách trực tiếp những khái niệm dễ dẫn đến nghịch lý (chẳng hạn: tập hợp tất cả các tập hợp có thể có; tập hợp tất cả các tập hợp không tự chứa,...).

Tuy chưa có một tiêu chuẩn nào để biết những khái niệm nào có thể mang mầm họa - nghịch lý, khái niệm nào không, nhưng chúng ta vẫn luôn luôn hy vọng rằng tính mẫn cảm tinh tế mà Thượng Đế đã ban cho các nhà toán học sẽ giúp họ nhanh chóng nhận ra và "*LTTH của G. Cantor vẫn chắc chắn như đá tảng*", điều mà Ông khẳng định không giấu giếm lúc khó khăn.

Math Jokes

Theorem. *All numbers are equal zero.*

Proof. Suppose $a = b$. Then $a = b$, so $a^2 = ab$. By subtracting b^2 from the last equality we get $a^2 - b^2 = ab - b^2$, hence $(a-b)(a+b) = b(a-b)$, thus $a + b = b$, therefore finally $a = 0$.

PROBLEMS ...

(Tiếp theo trang 22)

Problem T9/508. Suppose that the positive numbers a, b, c, d form a pregression (in that order) with the common difference m. Show that

$$e^{a^2}(4m^2+2ma+1)+e^{b^2}.2ma+e^{c^2}(2m^2+2ma)<e^{d^2}.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/508. Show that, for any integer $n \geq 1$, the equation $x^{2n+1}=x+1$ has exactly one real solution which is denoted by x_n. Then find $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Problem T11/508. Find all the functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfying

$$f(x)f(y)+f(x+y)=xf(y)+yf(x)+f(xy)+x+y+1,$$
$$\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Problem T12/508. Given a harmonic quadrilateral $ABCD$ (a cyclic quadrilateral in which the products of two opposite sides are equal) inscribed the circle (O). Let M be the midpoint of AC. Let X, Y, Z, T respectively be the perpendicular projection of M on AB, BC, CD, DA. Let $E=AB\cap CD, F=AD\cap CB, P=AC\cap BD$, $Q=XZ\cap YT$.

Show that PQ passes through the midpoint of EF.

Translate by **NGUYEN PHU HOANG LAN**

(*College of Science Vietnam National University, Hanoi*)

TIN VẮN.

Các chuyên đề toán học cập nhật chương trình và sách giáo khoa mới

Nhằm thực hiện các mục tiêu đổi mới giáo dục của Bộ Giáo dục và Đào tạo thông qua các chương trình bồi dưỡng nâng cao chất lượng chuyên môn cho đội ngũ giáo viên cập nhật các chương trình đào tạo và sách giáo khoa mới và tiếp cận chương trình giáo dục tiên tiến quốc tế, Hội Toán học Hà Nội và Sở Giáo dục và Đào tạo Thanh Hóa đồng tổ chức Hội thảo khoa học ***Các chuyên đề Toán học cập nhật chương trình và sách giáo khoa mới*** vào các ngày 28/09/2019 và 29/09/2019 tại TP. Sầm Sơn, Thanh Hóa.

Đến dự Hội thảo có GS. TSKH. *Trần Văn Nhung*, nguyên Thứ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo, GS. TSKH. *Nguyễn Văn Mậu*, Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội, PGS. TS. *Trần Huy Hổ*, Phó Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội, PGS. TS. *Tống Đình Quỳ*, Chủ tịch Hội Ứng dụng Toán học Việt Nam, NGƯT. *Lê Văn Hoa*, Phó Giám đốc Sở Giáo dục và Đào tạo Thanh Hóa, TS. *Hoàng Văn Thi*, Phó Giám đốc Sở Giáo dục và Đào tạo Thanh Hóa, Ông *Bùi Quốc Đạt*, Phó Chủ tịch UBND TP. Sầm Sơn và hơn 200 đại biểu là các nhà khoa học, chuyên gia toán học từ các viện, trung tâm nghiên cứu, học viện, trường đại học, các tạp chí toán học, đại diện Nhà xuất bản Giáo dục, lãnh đạo, chuyên viên, các thầy cô giáo khối THPT và THCS từ các Sở Giáo dục và Đào tạo của nhiều tỉnh thành trên cả nước (Hà Nội, Hưng Yên, Phú Thọ, Điện Biên, Tây Ninh, Tiền Giang, ...) cùng với lãnh đạo, chuyên viên các phòng ban Sở Giáo dục và Đào tạo Thanh Hóa, đại diện lãnh đạo,

giảng viên Trường Đại học Hồng Đức và các thầy cô giáo cốt cán môn toán cấp THPT và THCS của toàn tỉnh Thanh Hóa.

Chiều ngày 28/09/2019, sau lời khai mạc hội thảo của TS. *Hoàng Văn Thi*, Phó Giám đốc Sở Giáo dục và Đào tạo Thanh Hóa và phát biểu đề dẫn của GS. TSKH. *Nguyễn Văn Mậu*, Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội, Hội thảo đã được nghe các báo cáo khoa học tại phiên toàn thể của GS. TSKH. *Trần Văn Nhung*, PGS. TS. *Tạ Duy Phượng*, TS. *Nguyễn Văn Ngọc*, TS. *Vũ Tiến Việt*, Nhà giáo *Nguyễn Văn Nhiệm*, TS. *Phạm Văn Hoằng*, Nhà giáo *Nguyễn Bá Đang*, Nhà giáo *Nguyễn Đình Thanh*, Nhà giáo *Bùi Văn Bình*, Nhà giáo *Lê Quang Vũ*. Sau đó, GS. TSKH. *Nguyễn Văn Mậu* tổng kết hội thảo.

Sáng ngày 29/09/2019 Hội nghị bàn tròn về ***Các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi Toán và các vấn đề liên quan về dạy và học toán hiện nay*** và các đại biểu tham quan thực địa. Hội thảo khoa học ***Các chuyên đề Toán học cập nhật chương trình và sách giáo khoa mới*** đã thành công tốt đẹp.

NGUYỄN HIỆP

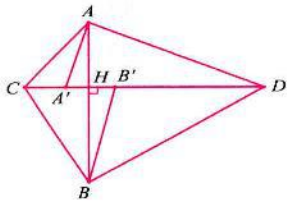
ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ 4 ĐIỂM TRONG CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

LƯƠNG XUÂN VINH - NGUYỄN THÁI HÀ
(GV Trường Đại học Kinh tế Tài chính TP. Hồ Chí Minh)

ĐỊNH LÝ. *Trong mặt phẳng cho 4 điểm A, B, C, D. Khi đó $AB \perp CD$ khi và chỉ khi:*

$$AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2.$$

Nhận xét. Đôi khi sử dụng định lý này để chứng minh hai đường thẳng vuông góc sẽ dễ dàng hơn các phương pháp thông thường. Định lý này hay được sử dụng khi chúng ta có thể tính toán độ dài các cạnh hoặc liên quan đến các tính chất phương tích. Định lý này có rất nhiều cách chứng minh, sau đây chúng tôi xin giới thiệu một cách:



Chứng minh.

Chiều thuận. Gọi AB cắt CD tại H. Khi đó theo định lý Pythagore ta có:

$$AC^2 - AD^2 = \left(AH^2 + HC^2\right) - \left(AH^2 + HD^2\right)$$
$$= HC^2 - HD^2;$$
$$BC^2 - BD^2 = \left(BH^2 + HC^2\right) - \left(BH^2 + HD^2\right)$$
$$= HC^2 - HD^2.$$

Do đó, $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$.

Chiều đảo. Kẻ $AA' \perp CD$ và $BB' \perp CD$, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử các điểm C, A', B', D nằm theo vị trí như trên hình. Áp dụng định lý Pythagore ta có:

$$AC^2 - AD^2 = \left(AA'^2 + A'C^2\right) - \left(AA'^2 + A'D^2\right)$$
$$= A'C^2 - A'D^2;$$
$$BC^2 - BD^2 = \left(BB'^2 + B'C^2\right) - \left(BB'^2 + B'D^2\right)$$
$$= B'C^2 - B'D^2.$$

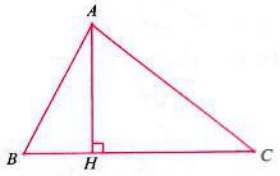
Do đó, $A'C^2 - A'D^2 = B'C^2 - B'D^2$, khai triển hằng đẳng thức hai vế ta có:

$$A'C - A'D = B'C - B'D \Leftrightarrow A'C - B'C = A'D - B'D$$
$$\Leftrightarrow -A'B' = A'B' \Leftrightarrow A'B' = 0$$

như vậy $A' \equiv B'$, từ đó ta có $AB \perp CD$.

CÁC THÍ DỤ

Thí dụ 1. *Cho tam giác ABC có $AC - AB = 7$ cm, AH là đường cao (H nằm giữa B và C). Biết rằng $HB = 6$ cm và $HC = 15$ cm. Tính độ dài các đoạn thẳng AB và AC.*

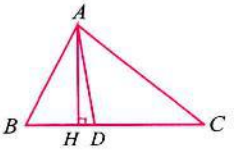


Hướng dẫn. Do $AH \perp BC$ nên áp dụng định lý 4 điểm ta có:

$$AC^2 - AB^2 = HC^2 - HB^2 = 15^2 - 6^2 = 189$$
$$\Rightarrow AC + AB = \frac{189}{AC - AB} = \frac{189}{7} = 27.$$

Do đó: $AC = 17$ cm, $AB = 10$ cm.

Thí dụ 2. *Cho tam giác ABC, đường cao AH, đường phân giác trong AD thỏa mãn $AC - AB = 36$, $DC - DB = 24$. Tính $HC - HB$.*



Hướng dẫn. Để cho đơn giản ta có thể đặt $AB = x$, $DB = y$ với $x, y > 0$, khi đó:

$$AC = x + 36, DC = y + 24.$$

Do AD là đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$ nên:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} \Rightarrow \frac{x+36}{x} = \frac{y+24}{y}$$
$$\Rightarrow \frac{36}{x} = \frac{24}{y} \Rightarrow x = \frac{3}{2}y.$$

Do $AH \perp BC$ nên áp dụng định lý 4 điểm ta có: $AC^2 - AB^2 = HC^2 - HB^2$. Khai triển cả hai vế ta thu được:

$$36(2x+36) = (HC-HB)(2y+24)$$

$$\Rightarrow 36(3y+36) = (HC-HB)(2y+24)$$

Vậy $HC - HB = 54$.

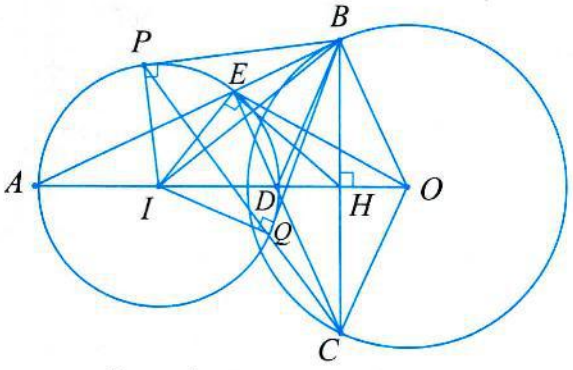
Thí dụ 3. *Cho đường tròn (O) bán kính R và điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A dựng hai tiếp tuyến AB, AC đến (O) với B, C là các tiếp điểm. OA cắt BC tại H. Gọi D là điểm đối xứng của O qua H.*

a) Chứng minh $OA.OH = R^2$ và tứ giác OBDC là hình thoi.

b) CD cắt AB tại E. Chứng minh HE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AD.

c) Từ B kẻ hai tiếp tuyến BP, BQ đến đường tròn đường kính AD. Chứng minh rằng: P, Q, C thẳng hàng.

Hướng dẫn.



a) Hai tiếp tuyến AB và AC cắt nhau tại A nên AO sẽ là phân giác của góc $\widehat{BOC}$. $\triangle BOC$ cân tại O (do $OB = OC$) có OB là phân giác nên vừa là đường cao vừa là trung tuyến $\Rightarrow OA \perp BC$ và H là trung điểm của BC.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác ABO vuông tại B có BH là đường cao ta có:

$$OA.OH = OB^2 = R^2.$$

Xét tứ giác $OBDC$ có H là trung điểm của BC và OD nên $OBDC$ là hình bình hành, lại có $OB = OC$ nên $OBDC$ là hình thoi.

b) Gọi I là trung điểm AD. Ta sẽ chứng minh $HE \perp IE$. Vì $BDCO$ là hình thoi nên $CD // BO \Rightarrow CD \perp AB$.

$\triangle BEC$ vuông tại E có EH là trung tuyến nên: $EH = HC = HB \Rightarrow \triangle HEC$ cân tại H

$\Rightarrow \widehat{HEC} = \widehat{HCE}$. Mà $\widehat{HCE} = \widehat{HBO}$ (hai góc so le trong), $\widehat{HBO} = \widehat{BAO}$ và $\widehat{BAO} = \widehat{IEA}$ nên $\widehat{HEC} = \widehat{IEA} \Rightarrow \widehat{HEC} + \widehat{IEC} = \widehat{IEA} + \widehat{IED}$

$\Rightarrow \widehat{HEI} = \widehat{DEA} = 90^0$.

c) Chứng minh tương tự câu a) ta có $PQ \perp IB$. Ta sẽ chứng minh $CQ \perp IB$ nghĩa là cần chứng minh: $IC^2 - IQ^2 = BC^2 - BQ^2$

$\Leftrightarrow IB^2 - IQ^2 = BC^2 - (IB^2 - IQ^2)$

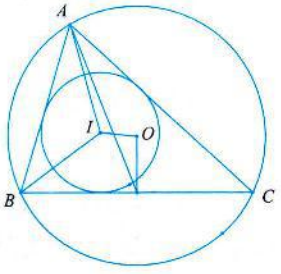
$\Leftrightarrow 2IB^2 - 2IQ^2 = 4BH^2 \Leftrightarrow 2(IH^2 - ID^2) + 2BH^2 = 4BH^2$

$\Leftrightarrow HD.HA = HB.HC$ (đúng).

Vậy $CQ \perp BI$ nên C, P, Q thẳng hàng

Thí dụ 4. *Cho tam giác ABC. M là trung điểm của BC. I, O lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp của tam giác $\triangle ABC$. Chứng minh rằng: $OI \perp AM$ khi và chỉ khi $\frac{2}{BC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.*

Hướng dẫn.



Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi R, r theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp $\triangle ABC$. Ta có: $AM \perp OI$ khi và chỉ khi: $IA^2 - IM^2 = OA^2 - OM^2$ (định lý 4 điểm).

Gọi H là trực tâm của $\triangle ABC$, ta có:

$OM = \frac{1}{2}AH = \frac{a}{2\tan A}$. Như vậy:

$$OA^2 - OM^2 = R^2 - \frac{4R^2\sin^2 A}{4\tan^2 A} = R^2\sin^2 A = \frac{a^2}{4}.$$

Lại có: $IA^2 - IM^2 = IA^2 - \frac{IB^2 + IC^2}{2} + \frac{a^2}{4}$.

Dẫn đến: $2IA^2 = IB^2 + IC^2$. Khai triển hai vế theo các cạnh tam giác ta có:

$$2r^2 + 2\left(\frac{b+c-a}{2}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{a+c-b}{2}\right)^2 + r^2 + \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2.$$

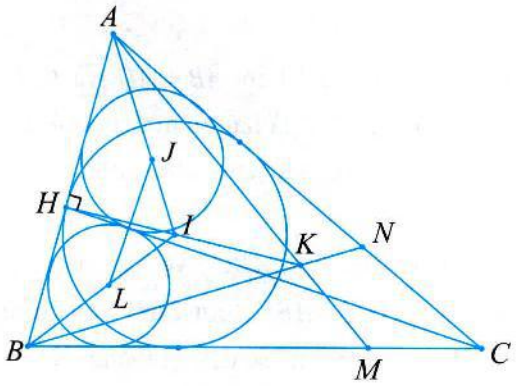
Rút gọn biểu thức này được: $8bc = 4ca + 4ab$,

suy ra $\frac{2}{BC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

Thí dụ 5. *(Đề thi vào lớp 10 chuyên toán TP. Hồ Chí Minh - 2017) Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC < BC$. Trên các cạnh BC, AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AN = AB = BM$. Các đường thẳng AM và BN cắt nhau tại K. Gọi H là hình chiếu của K lên AB. Chứng minh rằng:*

a) Tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ nằm trên đường thẳng KH.

b) Các đường tròn nội tiếp $\triangle ACH$ và $\triangle BCH$ tiếp xúc với nhau.



Hướng dẫn. a) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. $\triangle ABN$ cân tại A nên phân giác góc $\widehat{BAC}$ cũng là đường cao, suy ra $AI \perp BN$. $\triangle ABM$ cân tại B nên phân giác góc $\widehat{ABC}$ cũng là đường cao, suy ra $BI \perp AM$.

Từ đó I là trực tâm $\triangle ABK$, mà $KH \perp AB$ nên K, I, H thẳng hàng. Vậy tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABK nằm trên KH.

b) Gọi (J) là đường tròn nội tiếp $\triangle ACH$ và (L) là đường tròn nội tiếp $\triangle BCH$. Giả sử (J) tiếp xúc với CH tại D và (L) tiếp xúc với CH tại E. Khi đó ta có:

$$HD - HE = \frac{CH + AH - AC - CH - HB + BC}{2}$$

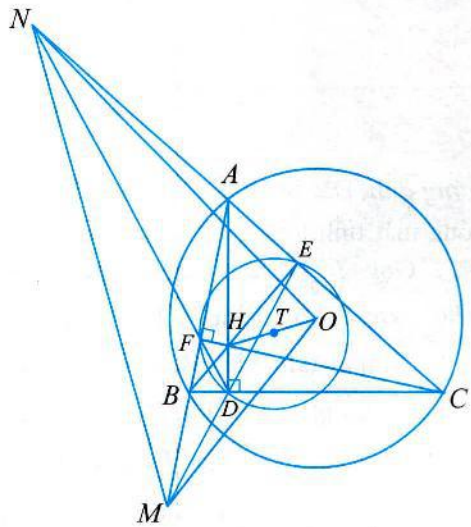
$$= \frac{AH - AC - HB + BC}{2}$$

$$= \frac{\frac{AB + AC - BC}{2} - AC - \frac{BA + BC - AC}{2} + BC}{2} = 0.$$

Do đó $D \equiv E$, suy ra điều cần chứng minh.

Thí dụ 6. *(China MO, 2007) Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AD, BE, CF và trực tâm H. FD cắt AC tại N, ED cắt AB tại M. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giácABC. Chứng minh rằng $OH \perp MN$.*

Hướng dẫn. Gọi T là trung điểm của OH, khi đó T là tâm đường tròn Euler của $\triangle ABC$, do



đó T là tâm đường tròn đi qua ba điểm D, E, F.

Ta có: $NF.ND = NA.NC$ nên

$$P_{N/(T)} = P_{N/(O)} \Rightarrow NT^2 - R_T^2 = NO^2 - R_O^2.$$

Chứng minh tương tự: $MT^2 - R_T^2 = MO^2 - R_O^2$.

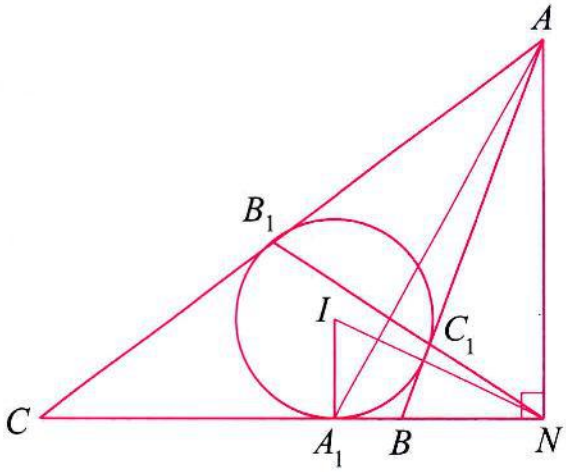
Do đó: $MT^2 - NT^2 = MO^2 - NO^2$.

Theo định lý 4 điểm, dẫn đến $MN \perp OT$, mà T thuộc OH nên $MN \perp OH$.

Thí dụ 7. *(Spring Mathematical Competition Kazanlak) Đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ ($\widehat{B} > 90^0$) có bán kính r, tiếp xúc với ba cạnh AB, BC, CA lần lượt tại C_1, A_1, B_1. Gọi N là giao điểm của BC và B_1C_1 và $AA_1 = 2A_1N = 2r\sqrt{3}$.*

a). *Tính độ dài đoạnh thẳng BN.*

b) *Chứng minh rằng $\widehat{ANC} = 90^o$.*



Hướng dẫn. Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

Không mất tính tổng quát trong ΔABC, giả sử $b > c$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$, khi đó điều kiện $A_1N = r\sqrt{3}$ dẫn tới $\triangle IA_1N$ là nửa tam giác đều. Ta chứng minh $AA_1 \perp IN$. Vì khi đó $\widehat{AA_1N} = 60^0$. Bây giờ nếu gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AA_1 do $AA_1 = 2r\sqrt{3}$ nên $\triangle MNA_1$ là tam giác đều do đó $\triangle AMN$ là tam giác cân có góc ngoài bằng 60° nên $\widehat{ANM} = \widehat{MAN} = 30^o$. Vì vậy, $\widehat{ANC} = 90^o$.

Để chứng minh $AA_1 \perp IN$, ta chứng minh $AI^2 - IA_1^2 = AN^2 - A_1N^2$. Áp dụng định lí côsin cho $\triangle ANB$ ta có:

$$AN^2 = c^2 + BN^2 + 2c.BN\cos\widehat{ABN}$$
$$= c^2 + BN^2 + 2c.BN.\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle ABC$ với cát tuyến B_1C_1N ta có:

$$\frac{C_1A}{C_1B}.\frac{NB}{NC}.\frac{B_1C}{B_1A} = 1 \Leftrightarrow \frac{p-c}{p-b}.\frac{BN}{BN+a} = 1$$
$$\Leftrightarrow BN = \frac{a(p-b)}{b-c}$$

trong đó p là nửa chu vi $\triangle ABC$ và $A_1N = BN + p - b$. Vì vậy:

$$AN^2 - A_1N^2$$
$$= c^2 - (p-b)^2 + BN.\frac{a^2 + c^2 - b^2 - a^2 - ac + ab}{a}$$
$$= c^2 - (p-b)^2 - \frac{a(p-b)}{b-c}.\frac{2(b-c)(p-a)}{a}$$
$$= c^2 - (p-b)^2 - 2(p-a)(p-b) = (p-a)^2$$
$$= AI^2 - IC_1^2 = AI^2 - IA_1^2 \Rightarrow AA_1 \perp IN.$$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

1. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = AD$ và B, D là các góc vuông. E, F là hai điểm thay đổi tương ứng trên CD, BC sao cho $AE \perp DF$. Chứng minh rằng $AF \perp BE$.

2. Về phía ngoài $\triangle ABC$ vẽ các tam giác $\triangle BCD$, $\triangle CAE$, $\triangle ABF$ tương ứng cân tại đỉnh D, E, F. Chứng minh các đường thẳng qua A, B, C và tương ứng vuông góc với EF, FD, DE đồng quy.

3. Cho tam giác ABC cân tại A có góc A nhọn. T là trung điểm của cung nhỏ BC của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. P là một điểm trên tia đối của tia CB. Trên AB, AC lấy tương ứng các điểm X, Y sao cho tứ giác $AXPY$ là hình bình hành. Chứng minh rằng $XY \perp PT$.

4. Cho tam giác ABC có trực tâm H, cho biết:

$$AH.BH.CH = 3;\ AH^2 + BH^2 + CH^2 = 7.$$

(Xem tiếp trang 41)

MỘT MỞ RỘNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC HOÁN VỊ

NGUYỄN ĐÌNH DŨNG

(Khoa Toán Cơ Tin, Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bất đẳng thức hoán vị (*rearrangement inequality*, *permutation inequality*) đối với hai dãy số đơn điệu đã được biết từ lâu và đã được giới thiệu trên Tạp chí TH&TT trong một số bài viết (chẳng hạn số 455 tháng 5/2015,…). Tuy nhiên bất đẳng thức hoán vị không còn đúng nữa nếu áp dụng cho k dãy đơn điệu với $k > 2$. Nhưng nếu bổ sung thêm một số điều kiện thì bất đẳng thức hoán vị vẫn đúng. Bài viết này giới thiệu với bạn đọc một mở rộng của bất đẳng thức hoán vị cho k dãy số với $k \geq 3$ và một số áp dụng trong trường hợp này.

1. Nhắc lại về bất đẳng thức hoán vị

Cho hai dãy số thực hữu hạn: $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n \end{cases} \quad (*)$$

Giả sử $(b_1', b_2', ..., b_n')$ là một hoán vị tùy ý của $(b_1, b_2, ..., b_n)$. Khi đó ta có bất đẳng thức:

$$a_1b_n + a_2b_{n-1} + ... + a_nb_1 \leq a_1b_1' + a_2b_2' + ... + a_nb_n'$$
$$\leq a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \quad (1.1)$$

Chứng minh. Trước tiên ta chứng minh BĐT:

$$a_1b_1' + a_2b_2' + ... + a_nb_n' \leq a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \quad (1.2).$$

Ta đặt: $S = a_1b_1' + a_2b_2' + ... + a_ib_i' + ... + a_nb_n'$

$S^* = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_ib_i + ... + a_nb_n.$

Giả sử $b_1 = b_i'$, khi đó ta kí hiệu:

$$S' = a_1b_1 + a_2b_2' + ... + a_{i-1}b_{i-1}' + a_ib_1' + a_{i+1}b_{i+1}' + ... + a_nb_n'.$$

Khi đó: $S' - S = (a_i - a_1)(b_1' - b_1) \geq 0 \Leftrightarrow S' \geq S.$

Bằng cách đổi chỗ các số b_i', sau $(n-1)$ lần ta được BĐT(1.2). BĐT còn lại trong (1.1) được chứng minh tương tự. Ta gọi BĐT(1.1) là BĐT hoán vị.

Nhận xét. a) Nếu ta có k dãy số thực hữu hạn thỏa mãn điều kiện (*) thì với $k \geq 3$ BĐT(1.1) không còn đúng nữa. Chẳng hạn cho 3 dãy:

$$\begin{cases} -3 < -2 < -1 \\ -3 < -2 < -1 \\ 1 < 2 < 3 \end{cases}.$$

Khi đó: $S^* = (-3)(-3).1 + (-2)(-2).2 + (-1)(-1).3 = 20.$

Tuy nhiên: $S = (-3)(-3).3 + (-2)(-2).2 + (-1)(-1).1 = 36.$

Rõ ràng: $S > S^*$.

b) Nhưng nếu tất cả các phần tử của k dãy $(k \geq 3)$ đều dương hoặc đều âm ta vẫn thu được kết quả tương tự như BĐT hoán vị (1.1). Ta gọi BĐT này là BĐT hoán vị mở rộng.

2. Bất đẳng thức hoán vị mở rộng

Cho k dãy số: $a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, ..., a_n^{(k)}$ thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} 0 < a_1^{(1)} \leq a_2^{(1)} \leq ... \leq a_n^{(1)} \\ 0 < a_1^{(2)} \leq a_2^{(2)} \leq ... \leq a_n^{(2)} \\ ..... \\ 0 < a_1^{(k)} \leq a_2^{(k)} \leq ... \leq a_n^{(k)} \end{cases}.$$

Gọi $b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, ..., b_n^{(i)}$ là một hoán vị tùy ý của $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, ..., a_n^{(i)}$, $i = 2, 3, ..., k$. Khi đó ta có bất đẳng thức:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} b_i^{(2)} ... b_i^{(k)} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} a_i^{(2)} ... a_i^{(k)} \quad (2.1)$$

Để chứng minh BĐT(2.1), trước tiên ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề. *Cho $0 < a < d$ và b, c là hai số thỏa mãn điều kiện: $b, c \in [a; d]$ và $bc = ad$. Khi đó ta có:*

$$a + d \geq b + c \quad (2.2)$$

Chứng minh. Đặt $bc = ad = P$ thì ta có: $c = \frac{P}{b}, d = \frac{P}{a}$. Khi đó:

$$(2.2) \Leftrightarrow a - b + d - c \geq 0 \Leftrightarrow a - b + \frac{P}{a} - \frac{P}{b} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{P}{ab}(b-a) - (b-a) \geq 0 \Leftrightarrow (b-a)\left(\frac{P}{ab} - 1\right) \geq 0 \quad (2.3)$$

Ta có: $\frac{P}{ab} \geq \frac{P}{ad} = 1$, nghĩa là $\frac{P}{ab} - 1 \geq 0$. Mặt khác $b \geq a$, từ đây suy ra BĐT (2.3) đúng.

Bây giờ ta chứng minh BĐT (2.1). Ta đặt

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} b_i^{(2)} \ldots b_i^{(k)} \text{ và } S^* = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} a_i^{(2)} \ldots a_i^{(k)}.$$

Ta có:

$$S = a_1^{(1)} b_1^{(2)} \ldots b_1^{(k)} + \ldots + a_i^{(1)} b_i^{(2)} \ldots b_i^{(k)} + \ldots + a_n^{(1)} b_n^{(2)} \ldots b_n^{(k)}.$$

a) Giả sử $\begin{cases} a_1^{(2)} = b_i^{(2)} \\ b_1^{(3)} \ldots b_1^{(k)} \leq b_i^{(3)} \ldots b_i^{(k)} \end{cases}$. Ta đặt

$$S' = a_1^{(1)} a_1^{(2)} b_1^{(3)} \ldots b_1^{(k)} + \ldots + a_i^{(1)} b_1^{(2)} b_i^{(3)} \ldots b_i^{(k)} + \ldots + a_n^{(1)} b_n^{(2)} \ldots b_n^{(k)}.$$

Gọi $a = a_1^{(1)} a_1^{(2)} b_1^{(3)} \ldots b_1^{(k)}$; $d = a_i^{(1)} b_1^{(2)} b_i^{(3)} \ldots b_i^{(k)}$

$b = a_1^{(1)} b_1^{(2)} b_1^{(3)} \ldots b_1^{(k)}$; $c = a_i^{(1)} b_i^{(2)} b_i^{(3)} \ldots b_i^{(k)}$.

Khi đó: $S' - S = (a + d) - (b + c)$.

Dễ thấy: $0 < a \leq d$; $b, c \in [a; d]$; $ad = bc$ nên theo bổ đề trên ta suy ra:

$$a + d \geq b + c \Leftrightarrow S' \geq S.$$

b) Trường hợp $\begin{cases} a_1^{(2)} = b_i^{(2)} \\ b_1^{(3)} \ldots b_1^{(k)} \geq b_i^{(3)} \ldots b_i^{(k)} \end{cases}$. Ta đặt

$$S'' = a_1^{(1)} a_1^{(2)} b_i^{(3)} \ldots b_i^{(k)} + \ldots + a_i^{(1)} b_1^{(2)} b_1^{(3)} \ldots b_1^{(k)} + \ldots + a_n^{(1)} b_n^{(2)} \ldots b_n^{(k)}.$$

Gọi $a' = a_1^{(1)} a_1^{(2)} b_i^{(3)} \ldots b_i^{(k)}$; $d' = a_i^{(1)} b_1^{(2)} b_1^{(3)} \ldots b_1^{(k)}$

$b = a_1^{(1)} b_1^{(2)} b_1^{(3)} \ldots b_1^{(k)}$; $c = a_i^{(1)} b_i^{(2)} b_i^{(3)} \ldots b_i^{(k)}$.

Khi đó: $S'' - S = (a' + d') - (b + c)$.

Ta cũng có: $0 < a' \leq d'$; $b, c \in [a'; d']$; $a'd' = bc$ và theo bổ đề trên ta có: $a' + d' \geq b + c \Leftrightarrow S'' \geq S$.

Bằng cách đổi vị trí các phần tử của tổng S sau một số hữu hạn bước ta suy ra $S \leq S^*$ và BĐT(2.1) được chứng minh.

Hệ quả. *Nếu ta có*

$$\begin{cases} a_1^{(1)} \leq a_2^{(1)} \leq \ldots \leq a_n^{(1)} < 0 \\ a_1^{(2)} \leq a_2^{(2)} \leq \ldots \leq a_n^{(2)} < 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^{(k)} \leq a_2^{(k)} \leq \ldots \leq a_n^{(k)} < 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

thì $\sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} b_i^{(2)} \ldots b_i^{(k)} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} a_i^{(2)} \ldots a_i^{(k)}$ *nếu k chẵn*

và $\sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} b_i^{(2)} \ldots b_i^{(k)} \geq \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} a_i^{(2)} \ldots a_i^{(k)}$ *nếu k lẻ.*

Thật vậy: $(2.4) \Leftrightarrow \begin{cases} -a_1^{(1)} \geq -a_2^{(1)} \geq \ldots \geq -a_n^{(1)} > 0 \\ -a_1^{(2)} \geq -a_2^{(2)} \geq \ldots \geq -a_n^{(2)} > 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -a_1^{(k)} \geq -a_2^{(k)} \geq \ldots \geq -a_n^{(k)} > 0 \end{cases}$.

Theo BĐT (2.1) ta có:

$$(-1)^k \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} b_i^{(2)} \ldots b_i^{(k)} \leq (-1)^k \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} a_i^{(2)} \ldots a_i^{(k)} \quad (2.5).$$

Nếu $k = 2l$, $l \in \mathbb{N}^*$ thì

$$(2.5) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} b_i^{(2)} \ldots b_i^{(k)} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} a_i^{(2)} \ldots a_i^{(k)} \quad (2.6).$$

Nếu $k = 2l + 1$, thì

$$(2.5) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} b_i^{(2)} \ldots b_i^{(k)} \geq \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} a_i^{(2)} \ldots a_i^{(k)} \quad (2.7).$$

3. Một số áp dụng của bất đẳng thức hoán vị mở rộng

Bài toán 1. *Cho A, B, C là ba góc tam giác ứng với ba cạnh a, b, c. Chứng minh rằng*

$$aB\sin C + bC\sin A + cA\sin B \leq aA\sin A + bB\sin B + cC\sin C.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát ta giả sử rằng $a \leq b \leq c$. Khi đó ta có: $\begin{cases} A \leq B \leq C \\ \sin A \leq \sin B \leq \sin C \end{cases}$.

Áp dụng BĐT hoán vị mở rộng suy ra đpcm.

Bài toán 2. *Cho A, B, C là ba góc của tam giác. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{A\sin B}{\cos\frac{C}{2}} + \frac{B\sin C}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{C\sin A}{\cos\frac{B}{2}}\right) \leq A\sin\frac{A}{2} + B\sin\frac{B}{2} + C\sin\frac{C}{2}.$$

Lời giải. Ta giả sử rằng $A \le B \le C$ (1). Khi đó theo định lí hàm số sin ta suy ra $\sin A \le \sin B \le \sin C$ (2).

Mặt khác do hàm số $y = \cos x$ đơn điệu giảm trên $(0;\pi)$ nên: $\cos\frac{A}{2} \ge \cos\frac{B}{2} \ge \cos\frac{C}{2}$. Từ đó suy ra:

$$\frac{1}{\cos\frac{A}{2}} \le \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} \le \frac{1}{\cos\frac{C}{2}} \quad (3).$$

Dễ thấy các phần tử trong (1), (2), (3) đều dương nên theo BĐT hoán vị mở rộng ta thu được:

$$\frac{A\sin B}{\cos\frac{C}{2}} + \frac{B\sin C}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{C\sin A}{\cos\frac{B}{2}} \le \frac{A\sin A}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{B\sin B}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{C\sin C}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$= 2\left(A\sin\frac{A}{2} + B\sin\frac{B}{2} + C\sin\frac{C}{2}\right).$$

Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 3. *Gọi m_a, m_b, m_c là ba đường trung tuyến ứng với các góc A, B, C của tam giác ABC. Chứng minh rằng*

$$\frac{m_a\cos\frac{B}{2}}{\sin C} + \frac{m_b\cos\frac{C}{2}}{\sin A} + \frac{m_c\cos\frac{A}{2}}{\sin B}$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{m_a}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{m_b}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{m_c}{\sin\frac{C}{2}}\right).$$

Lời giải. Không giảm tính tổng quát, ta giả sử rằng $a \ge b \ge c$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} 0 < m_a \le m_b \le m_c \\ 0 < \cos\frac{A}{2} \le \cos\frac{B}{2} \le \cos\frac{C}{2} \\ 0 < \frac{1}{\sin A} \le \frac{1}{\sin B} \le \frac{1}{\sin C} \end{cases}.$$

Theo BĐT hoán vị mở rộng ta có:

$$\frac{m_a\cos\frac{B}{2}}{\sin C} + \frac{m_b\cos\frac{C}{2}}{\sin A} + \frac{m_c\cos\frac{A}{2}}{\sin B}$$

$$\le \frac{m_a\cos\frac{A}{2}}{\sin A} + \frac{m_b\cos\frac{B}{2}}{\sin B} + \frac{m_c\cos\frac{C}{2}}{\sin C}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{m_a}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{m_b}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{m_c}{\sin\frac{C}{2}}\right).$$

Bài toán 4. *Gọi l_a, l_b, l_c là 3 đường phân giác ứng với 3 cạnh a, b,c; A, B, C là ba góc của tam giác. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sin A}{l_b\cos\frac{C}{2}} + \frac{\sin B}{l_c\cos\frac{A}{2}} + \frac{\sin C}{l_a\cos\frac{B}{2}}\right)$$

$$\le \frac{\sin\frac{A}{2}}{l_a} + \frac{\sin\frac{B}{2}}{l_b} + \frac{\sin\frac{C}{2}}{l_c}.$$

Lời giải. Không giảm tính tổng quát ta giả sử rằng $a \le b \le c$. Khi đó ta có: $l_a \ge l_b \ge l_c$ và

$$\begin{cases} \frac{1}{l_a} \le \frac{1}{l_a} \le \frac{1}{l_a} \\ \sin A \le \sin B \le \sin C \\ \frac{1}{\cos\frac{A}{2}} \le \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} \le \frac{1}{\cos\frac{C}{2}} \end{cases}.$$

Áp dụng BĐT hoán vị mở rộng ta thu được:

$$\frac{\sin A}{l_b\cos\frac{C}{2}} + \frac{\sin B}{l_c\cos\frac{A}{2}} + \frac{\sin C}{l_a\cos\frac{B}{2}}$$

$$\le \frac{\sin A}{l_a\cos\frac{A}{2}} + \frac{\sin B}{l_b\cos\frac{B}{2}} + \frac{\sin C}{l_c\cos\frac{C}{2}}$$

$$= 2\left(\frac{\sin\frac{A}{2}}{l_a} + \frac{\sin\frac{B}{2}}{l_b} + \frac{\sin\frac{C}{2}}{l_c}\right).$$

Từ đây ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 5. *Cho A, B, C là ba góc của tam giác. Chứng minh rằng*

$$\frac{A\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} + \frac{B\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{C\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}} \le$$

$$\le A\tan\frac{A}{2}+B\tan\frac{B}{2}+C\tan\frac{C}{2}.$$

Lời giải. Giả sử $A\le B\le C$. Do hàm số $y=\sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, hàm số $y=\cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, nên ta có:

$$\sin\frac{A}{2}\le\sin\frac{B}{2}\le\sin\frac{C}{2};\ \frac{1}{\cos\frac{A}{2}}\le\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}\le\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}.$$

Sử dụng BĐT hoán vị mở rộng ta có:

$$\frac{A\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}+\frac{B\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{C\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$$

$$\le A\tan\frac{A}{2}+B\tan\frac{B}{2}+C\tan\frac{C}{2}.$$

Bài toán 6. *Cho* $0<a_1\le a_2\le\ldots\le a_n$ (1)

và $b_1\le b_2\le\ldots\le b_n$ (2).

Giả sử $(b_1',b_2',\ldots,b_n')$ *là một hoán vị tùy ý của* $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$. *Chứng minh rằng*

$$a_1^{b_1'}.a_2^{b_2'}\ldots a_n^{b_n'}\le a_1^{b_1}.a_2^{b_2}\ldots a_n^{b_n}\quad(3).$$

Lời giải. Do hàm số $y=\ln x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên từ (1) ta suy ra

$$\ln a_1\le\ln a_2\le\ldots\le\ln a_n\quad(4).$$

Áp dụng BĐT hoán vị cho 2 dãy được sắp thứ tự (2), (4) ta suy ra:

$$b_1'\ln a_1+b_2'\ln a_2+\ldots+b_n'\ln a_n$$
$$\le b_1\ln a_1+b_2\ln a_2+\ldots+b_n\ln a_n$$
$$\Leftrightarrow\ln\left(a_1^{b_1'}.a_2^{b_2'}\ldots a_n^{b_n'}\right)\le\ln\left(a_1^{b_1}.a_2^{b_2}\ldots a_n^{b_n}\right)$$
$$\Leftrightarrow a_1^{b_1'}.a_2^{b_2'}\ldots a_n^{b_n'}\le a_1^{b_1}.a_2^{b_2}\ldots a_n^{b_n}.$$

Bài toán 7. *Cho 3 dãy số thỏa mãn điều kiện*

$$\begin{cases}1<a_1\le a_2\le\ldots\le a_n\\0<b_1\le b_2\le\ldots\le b_n\\0<c_1\le c_2\le\ldots\le c_n\end{cases}\quad(1)$$

Chứng minh rằng nếu $(b_1',b_2',\ldots,b_n')$ *là một hoán vị tùy ý của* $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ *và* $(c_1',c_2',\ldots,c_n')$ *là một hoán vị tùy ý của* $(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ *thì ta có bất đẳng thức:*

$$a_1^{b_1'c_1'}.a_2^{b_2'c_2'}\ldots a_n^{b_n'c_n'}\le a_1^{b_1c_1}.a_2^{b_2c_2}\ldots a_n^{b_nc_n}.$$

Lời giải. Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}0<\ln a_1\le\ln a_2\le\ldots\le\ln a_n\\0<b_1\le b_2\le\ldots\le b_n\\0<c_1\le c_2\le\ldots\le c_n\end{cases}.$$

Áp dụng BĐT hoán vị mở rộng ta có:

$$b_1'c_1'\ln a_1+b_2'c_2'\ln a_2+\ldots+b_n'c_n'\ln a_n$$
$$\le b_1c_1\ln a_1+b_2c_2\ln a_2+\ldots+b_nc_n\ln a_n$$
$$\Leftrightarrow\ln\left(a_1^{b_1'c_1'}.a_2^{b_2'c_2'}\ldots a_n^{b_n'c_n'}\right)\le\ln\left(a_1^{b_1c_1}.a_2^{b_2c_2}\ldots a_n^{b_nc_n}\right)$$
$$\Leftrightarrow a_1^{b_1'c_1'}.a_2^{b_2'c_2'}\ldots a_n^{b_n'c_n'}\le a_1^{b_1c_1}.a_2^{b_2c_2}\ldots a_n^{b_nc_n}.$$

Bài toán 8. *Cho tam giác ABC. Gọi* $h_a,h_b,h_c,m_a,m_b,m_c,l_a,l_b,l_c$ *là các đường cao, trung tuyến, và phân giác của tam giác ứng với các cạnh a, b, c. Gọi* (m_a',m_b',m_c') *là một hoán vị tùy ý của* (m_a,m_b,m_c) *và* (l_a',l_b',l_c') *là một hoán vị tùy ý của* (l_a,l_b,l_c). *Chứng minh rằng khi đó ta luôn có*

$$h_am_a'l_a'+h_bm_b'l_b'+h_cm_c'l_c'\le h_am_al_a+h_bm_bl_b+h_cm_cl_c.$$

Lời giải. Không giảm tính tổng quát ta giả sử rằng $a\ge b\ge c$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases}h_a\le h_b\le h_c\\m_a\le m_b\le m_c\\l_a\le l_b\le l_c\end{cases}.$$

Từ đây áp dụng BĐT hoán vị mở rộng cho ba dãy trên ta có BĐT cần chứng minh:

$$h_am_a'l_a'+h_bm_b'l_b'+h_cm_c'l_c'\le h_am_al_a+h_bm_bl_b+h_cm_cl_c.$$

Bài toán 9. *Cho dãy hữu hạn các góc $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ thỏa mãn điều kiện*

$$0 < \alpha_1 \le \alpha_2 \le ... \le \alpha_n < \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

Chứng minh rằng

$$\alpha_1 \frac{\sin\alpha_2}{\cos\alpha_3} + \alpha_2 \frac{\sin\alpha_3}{\cos\alpha_4} + ... + \alpha_{n-1} \frac{\sin\alpha_n}{\cos\alpha_1} + \alpha_n \frac{\sin\alpha_n}{\cos\alpha_2}$$
$$\le \alpha_1 \tan\alpha_1 + \alpha_2 \tan\alpha_2 + ... + \alpha_n \tan\alpha_n.$$

Lời giải. Do hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên từ hệ thức (1) ta suy ra

$$0 < \sin\alpha_1 \le \sin\alpha_2 \le ... \le \sin\alpha_n \quad (2);$$

$$0 < \frac{1}{\cos\alpha_1} \le \frac{1}{\cos\alpha_2} \le ... \le \frac{1}{\cos\alpha_n} \quad (3).$$

Theo BĐT hoán vị mở rộng ta suy ra:

$$\alpha_1 \frac{\sin\alpha_2}{\cos\alpha_3} + \alpha_2 \frac{\sin\alpha_3}{\cos\alpha_4} + ... + \alpha_{n-1} \frac{\sin\alpha_n}{\cos\alpha_1} + \alpha_n \frac{\sin\alpha_n}{\cos\alpha_2}$$
$$\le \alpha_1 \tan\alpha_1 + \alpha_2 \tan\alpha_2 + ... + \alpha_n \tan\alpha_n.$$

Lời kết. Trên đây là một mở rộng của bất đẳng thức hoán vị cho k dãy số với $k \ge 3$ cùng một số áp dụng của nó. Rất mong nhận được những mở rộng tiếp và trao đổi của bạn đọc.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Văn Mậu - Trần Nam Dũng, 2018, *Chuyên đề chọn lọc tổ hợp va toán rời rạc* - NXBGD Việt Nam.

2. Nguyễn Văn Mậu, 2013. *Bất đẳng thức, định lý và áp dụng* - NXBGD Việt Nam.

3. Titu Andreescu, 2001, *A path to Combinatorics for Undergradutes*.

4. Vlad Matei - Elizabeth Reiland 1998, *Combinatorial Problems*.

****

ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ 4 ĐIỂM ...

(Tiếp theo trang 36)

a) Tìm bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.

b) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác ABC.

5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm (O), đường kính BK. Trên tia đối của các tia BA, BC lấy tương ứng các điểm M, N sao cho $AM = CN = p$ với p là nửa chu vi tam giác ABC. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ABC. Chứng minh rằng: $KI \perp MN$.

6. Cho tam giác ABC có trực tâm H. P là một điểm nằm trong tam giác. Gọi L, M, N lần lượt là chân đường vuông góc vẽ từ H xuống PA, PB, PC. Giả sử X, Y, Z theo thứ tự là giao điểm của các đường thẳng HL, HM, HN với BC, CA, AB. Chứng minh rằng X, Y, Z thẳng hàng.

7. Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AO và BC. Trên đoạn BH lấy một điểm M bất kì, đường thẳng qua M vuông góc với MO cắt AC, AB lần lượt tại P, Q.

a) Chứng minh rằng: tam giác OPQ là tam giác cân.

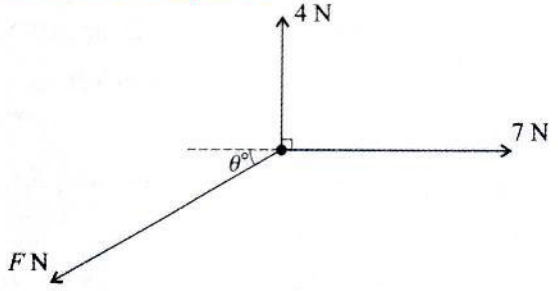
b) Lấy điểm R thuộc CH sao cho $PR \parallel OA$. Chứng minh rằng: $CR = HM$.

c) Kẻ đường kính CD của (O). Gọi K là điểm đối xứng với H qua B, đường thẳng qua B song song với AD cắt AK tại điểm N. Chứng minh rằng: tứ giác $ACDK$ nội tiếp.d) Đường thẳng qua B vuông góc với OC cắt AH tại E. Chứng minh NB là phân giác trong của góc $\widehat{KNE}$.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 49

Problem. *A particle is in equilibrium on a smooth horizontal table when acted on by the three horizontal forces shown in the diagram. Find the direction of the force F (i.e. to determine the angle θ).*



Solution. The particle is in equilibrium position so the resultant force is zero, that means it is 0 in both x-direction and y-direction. Therefore we get $F\cos\theta = 7$ and $F\sin\theta = 4$.

Hence $\dfrac{F\sin\theta}{F\cos\theta} = \dfrac{4}{7}$ or $\tan\theta = \dfrac{4}{7}$.

Thus $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{4}{7}\right) = 29.74$ (2 d.p.).

TỪ VỰNG

particle	*: hạt*
equilibrium	*: cân bằng (vị trí cân bằng)*
diagram	*: lược đồ, sơ đồ*
force	*: lực*
resultant force	*: hợp lực*
d.p. (decimal place)	*: chữ số thập phân*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*College of Science Vietnam National University, Hanoi*)

BÀI DỊCH SỐ 46

Bài toán. *Một hàm $f: X \to Y$ được gọi là đơn ánh nếu $f(x_1) = f(x_2)$ kéo theo $x_1 = x_2$. Hàm $f: X \to Y$ được gọi là toàn ánh nếu $\forall y_0 \in Y, \exists x_0 \in X : f(x_0) = y_0$. Hãy chỉ ra rằng trong trường hợp đặc biệt khi $X = Y$ là một tập hữu hạn thì hàm $f: X \to X$ là đơn ánh khi và chỉ khi nó là toàn ánh.*

Lời giải. Chúng ta có thể giả sử $X = \{1, 2, \dots, n\}$ với n là số nguyên dương.

Đầu tiên ta giả sử rằng hàm $f: X \to X$ là một đơn ánh. Từ định nghĩa ta thấy tập hợp

$$Z = \{f(1), f(2), \dots, f(n)\}$$

bao gồm n phần tử khác nhau. Nhưng Z là tập con của X, có n phần tử khác nhau. Do đó $Z = X$, từ đó chúng ta kết luận rằng hàm $f: X \to X$ là toàn ánh.

Bây giờ, giả sử rằng hàm $f: X \to X$ là toàn ánh. Khi đó ta có $Z = X$ trong đó

$$Z = \{f(1), f(2), \dots, f(n)\}.$$

Suy ra $Z = \{f(1), f(2), \dots, f(n)\}$ là tập hợp n phần tử khác nhau. Vì vậy hàm $f: X \to X$ là một đơn ánh.

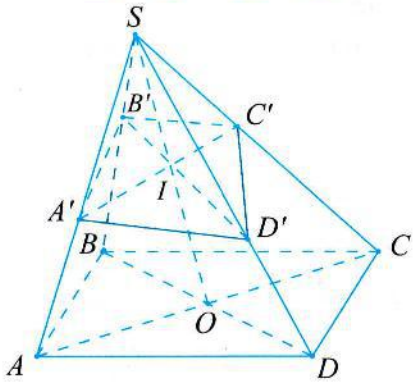
Nhận xét. Các bạn *Lê Thị Minh Thùy*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Lê Ngô Nhật Huy*, 111A, Khu phố 1, Phường 7, TP. Bến Tre, **Bến Tre** có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 29. *Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Một mặt phẳng cắt các đoạn thẳng SA, SB, SC, SD của khối chóp lần lượt tại bốn điểm A', B', C', D' khác với S. Chứng minh rằng*

$$\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}.$$



Lời giải. Gọi I là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$, O là giao điểm của AC và BD.

ĐỊNH HƯỚNG 1. Yêu cầu của bài toán liên quan đến các tỉ số giữa độ dài các đoạn thẳng nên ta có thể hướng đến việc sử dụng tỉ số diện tích và tỉ số thể tích. Với hướng này cho ta cách giải 1 và 2.

Cách 1. *(Sử dụng tỉ số diện tích).* Ta có:

$$\frac{SA'}{SA}+\frac{SC'}{SC}=\frac{S_{\Delta SIA'}}{S_{\Delta SIA}}+\frac{S_{\Delta SIC'}}{S_{\Delta SIC}}=\frac{S_{\Delta SIA'}+S_{\Delta SIC'}}{S_{\Delta SIA}}$$

$$=\frac{S_{\Delta SA'C'}}{\frac{SI}{SO}.S_{\Delta SOA}}=\frac{2SO}{SI}.\frac{S_{\Delta SA'C'}}{S_{\Delta SAC}}=\frac{2SO}{SI}.\frac{SA'.SC'}{SA.SC}.$$

Do đó: $\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{2SO}{SI}$.

Chứng minh tương tự ta được:

$$\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}=\frac{2SO}{SI}.$$

Từ đó suy ra: $\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}$.

Cách 2. *(Sử dụng tỉ số thể tích).* Đầu tiên ta nhắc lại kết quả về tỉ số thể tích thường dùng cho khối chóp tam giác mà việc chứng minh nó xin nhường cho bạn đọc.

Bổ đề 1. Cho khối chóp tam giác $S.ABC$. Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' khác với S. Khi đó:

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}.$$

Áp dụng bổ đề 1 ta có:

$$\frac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.ABD}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SD'}{SD},\ \frac{V_{S.C'B'D'}}{V_{S.CBD}}=\frac{SC'}{SC}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SD'}{SD}.$$

Từ đó:

$$\frac{2V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.ABD}}+\frac{V_{S.C'B'D'}}{V_{S.CBD}}=\frac{SB'}{SB}.\frac{SD'}{SD}\left(\frac{SA'}{SA}+\frac{SC'}{SC}\right).$$

Tương tự:

$$\frac{V_{S.B'A'C'}}{V_{S.BAC}}=\frac{SB'}{SB}.\frac{SA'}{SA}.\frac{SC'}{SC},\ \frac{V_{S.D'A'C'}}{V_{S.DAC}}=\frac{SD'}{SD}.\frac{SA'}{SA}.\frac{SC'}{SC}.$$

Suy ra: $\frac{2V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{V_{S.B'A'C'}}{V_{S.BAC}}+\frac{V_{S.D'A'C'}}{V_{S.DAC}}$

$$=\frac{SA'}{SA}.\frac{SC'}{SC}\left(\frac{SB'}{SB}+\frac{SD'}{SD}\right).$$

Do đó: $\frac{SB'}{SB}.\frac{SD'}{SD}\left(\frac{SA'}{SA}+\frac{SC'}{SC}\right)=\frac{SA'}{SA}.\frac{SC'}{SC}\left(\frac{SB'}{SB}+\frac{SD'}{SD}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}.$$

ĐỊNH HƯỚNG 2. Ngoài việc sử dụng tỉ số diện tích và tỉ số thể tích thì công cụ tỉ số đồng dạng và định lý Menelaus cũng là những công cụ đắc lực trong việc giải quyết các bài toán về

tỉ số đoạn thẳng. Cách 3 và 4 cho ta thấy điều này.

Cách 3. *(Sử dụng tỉ số đồng dạng)*

Trường hợp 1: $A'C' // AC$ và $B'D' // BD$ thì dễ thấy: $\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}=\frac{2SO}{SI}$.

Trường hợp 2: $A'C'$ không song song với AC $\left(\frac{SA'}{SA}<\frac{SC'}{SC}\right)$ và $B'D'$ không song song với BD $\left(\frac{SB'}{SB}<\frac{SD'}{SD}\right)$ (bạn đọc tự vẽ hình).

Qua A' kẻ đường thẳng song song với AC cắt SC tại A''. Qua O kẻ đường thẳng song song với $A'C'$ cắt SC tại C''. Khi đó: $\frac{SA''}{SC}=\frac{SA'}{SA}$

nên $\frac{SA''}{SC'}=\frac{SC.SA'}{SC'.SA}$ suy ra $1-\frac{SA''}{SC'}=1-\frac{SC.SA'}{SC'.SA}$

hay $\frac{A''C'}{SC'}=\frac{SC'.SA-SC.SA'}{SC'.SA}$ (1). Mặt khác

$$\Delta A'C'A''\sim\Delta OC''C\Rightarrow\frac{C'A''}{C''C}=\frac{A'A''}{OC}=\frac{2A'A''}{AC}=\frac{2SA'}{SA}$$

$$\Rightarrow A''C'=\frac{2SA'.C''C}{SA}\ (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{CC''}{SC'}=\frac{SC'.SA-SC.SA'}{2SC'.SA'}$.

Do đó

$$\frac{SO}{SI}=\frac{SC''}{SC'}=\frac{SC}{SC'}+\frac{CC''}{SC'}=\frac{SC}{SC'}+\frac{SC'.SA-SC.SA'}{2SC'.SA'}$$

$$=\frac{SC'.SA+SC.SA'}{2SC'.SA'}=\frac{1}{2}\left(\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}\right)\ (3)$$

Chứng minh tương tự có: $\frac{SO}{SI}=\frac{1}{2}\left(\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}\right)$(4).

Từ (3) và (4) suy ra điều phải chứng minh.

Các trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

Cách 4. *(Sử dụng định lý Menelaus)*

Trường hợp 1: $A'C' // AC$ và $B'D' // BD$ thì dễ thấy:

$$\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}=\frac{2SO}{SI}.$$

Trường hợp 2: $A'C'$ không song song với AC $\left(\frac{SA'}{SA}>\frac{SC'}{SC}\right)$ và $B'D'$ không song song với BD $\left(\frac{SB'}{SB}>\frac{SD'}{SD}\right)$ (bạn đọc tự vẽ hình).

Gọi H là giao điểm của $A'C'$ và AC. Theo định lý Menelaus ta có:

$$\frac{IS}{IO}.\frac{A'A}{A'S}.\frac{HO}{HA}=1;\ \frac{SC'}{C'C}.\frac{A'A}{A'S}.\frac{HC}{HA}=1$$

$$\Rightarrow\frac{HC}{HA}=\frac{C'C}{SC'}.\frac{A'S}{A'A};\frac{HO}{HA}=\frac{IO}{IS}.\frac{A'S}{A'A}$$

$$\Rightarrow\frac{AC}{HA}=\frac{C'C}{SC'}.\frac{A'S}{A'A}-1;\frac{AO}{HA}=\frac{IO}{IS}.\frac{A'S}{A'A}-1.$$

Từ đó suy ra:

$$2\left(\frac{IO}{IS}.\frac{A'S}{A'A}-1\right)=\frac{C'C}{SC'}.\frac{A'S}{A'A}-1,$$

dẫn đến:

$$\frac{IO}{IS}=\frac{SA'.C'C+SC'.AA'}{2SC'.SA'}=\frac{1}{2}\left(\frac{C'C}{SC'}+\frac{AA'}{SA'}\right).$$

Tương tự ta có: $\frac{IO}{IS}=\frac{1}{2}\left(\frac{B'B}{SB'}+\frac{D'D}{SD'}\right)$.

Do đó: $\frac{C'C}{SC'}+\frac{AA'}{SA'}=\frac{B'B}{SB'}+\frac{D'D}{SD'}$

hay $\frac{C'C}{SC'}+1+\frac{AA'}{SA'}+1=\frac{B'B}{SB'}+1+\frac{D'D}{SD'}+1$

$$\Leftrightarrow\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}.$$

Các trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

ĐỊNH HƯỚNG 3. Giả thiết của bài toán cho 4 điểm A', B', C', D' đồng phẳng, điều đó cho ta ý tưởng về điều kiện đồng phẳng. Cách giải 5 sẽ thể hiện ý tưởng này.

Cách 5. *(Sử dụng điều kiện đồng phẳng)*. Trước tiên ta chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề 2. Nếu $\overrightarrow{SA}=x\overrightarrow{SB}+y\overrightarrow{SC}+z\overrightarrow{SD}$ với mọi S và A, B, C, D đồng phẳng thì $x+y+z=1$.

Chứng minh bổ đề. Ta có A, B, C, D đồng phẳng khi các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng. Lúc đó tồn tại duy nhất cặp số m, n sao cho $\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AC} + n\overrightarrow{AD}$. Do đó với mọi điểm S ta có: $\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} = m\left(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}\right) + n\left(\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SA}\right)$

$$\Leftrightarrow (m+n-1)\overrightarrow{SA} = -\overrightarrow{SB} + m\overrightarrow{SC} + n\overrightarrow{SD}.$$

Với $m+n-1=0$ thì $\overrightarrow{SB} = m\overrightarrow{SC} + n\overrightarrow{SD}$. Suy ra $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{SD}$ đồng phẳng hay S, B, C, D đồng phẳng. Điều này là mâu thuẫn. Vậy $m+n-1 \neq 0$, lúc đó

$$(m+n-1)\overrightarrow{SA} = -\overrightarrow{SB} + m\overrightarrow{SC} + n\overrightarrow{SD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SA} = \frac{-1}{m+n-1}\overrightarrow{SB} + \frac{m}{m+n-1}\overrightarrow{SC} + \frac{n}{m+n-1}\overrightarrow{SD}.$$

Đặt $x = \dfrac{-1}{m+n-1}$; $y = \dfrac{m}{m+n-1}$; $z = \dfrac{n}{m+n-1}$ thì $x+y+z=1$.

Chứng minh đẳng thức. Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Khi đó với mọi điểm S ta có: $\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SA}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{SA}{SA'}.\overrightarrow{SA'} = \frac{SB}{SB'}.\overrightarrow{SB'} - \frac{SC}{SC'}.\overrightarrow{SC'} + \frac{SD}{SD'}.\overrightarrow{SD'}.$$

Áp dụng bổ đề 2 ta có điều phải chứng minh.

Sử dụng điều kiện thẳng hàng ta có lời giải sau đây.

Cách 6. *(Sử dụng điều kiện thẳng hàng)*

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề 3. Nếu $\overrightarrow{SA} = x\overrightarrow{SB} + y\overrightarrow{SC}$ với mọi S và A, B, C thẳng hàng thì $x+y=1$.

Chứng minh bổ đề. Ta có A, B, C thẳng hàng khi các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương. Lúc đó tồn tại số $k \neq 0$ sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$. Do đó với mọi điểm S ta có $\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} = k\left(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}\right)$ $(k-1)\overrightarrow{SA} = -\overrightarrow{SB} + k\overrightarrow{SC}$. Với $k=1$ thì $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SC}$. Suy ra $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ cùng phương hay S, B, C thẳng hàng. Điều này là mâu thuẫn. Vậy $k \neq 1$, lúc đó

$$(k-1)\overrightarrow{SA} = -\overrightarrow{SB} + k\overrightarrow{SC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SA} = \frac{-1}{k-1}\overrightarrow{SB} + \frac{k}{k-1}\overrightarrow{SC}.$$

Đặt $x = \dfrac{-1}{k-1}$; $y = \dfrac{k}{k-1}$ thì $x+y=1$.

Chứng minh đẳng thức. Ta có:

$$2\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2SO}{SI}\overrightarrow{SI} = \frac{SA}{SA'}\overrightarrow{SA'} + \frac{SC}{SC'}\overrightarrow{SC'}.$$

Áp dụng bổ đề 3 ta thu được $\dfrac{2SO}{SI} = \dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SC}{SC'}$.

Chứng minh tương tự ta được:

$$\frac{2SO}{SI} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}.$$

Từ đó suy ra: $\dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SD}{SD'}$.

LÊ THẾ THÔNG

(GV THPT Lê Quảng Chí, TX. Kỳ Anh, Hà Tĩnh)

➢***Nhận xét.*** Ngoài 6 cách giải của *Lê Thế Thông*, người giới thiệu đề toán, Tòa soạn Tạp chí TH&TT còn nhận được một số cách giải tương tự như trên của các bạn: *Nguyễn Văn Bản*, GV THCS Thanh yên, huyện Điện Biên, ***Điện Biên***; *Trương Quang An*, xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, **Quảng Ngãi**; *Nguyễn Anh Vũ*, GV THPT chuyên Chu Văn An, Hoài Nhơn, **Bình Định**. Xin hoan nghênh tất cả các bạn.

LÊ MAI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 30 dưới đây về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30.11.2019.

BÀI TOÁN 31. *Giải phương trình*

$$\sqrt{3+\sqrt{3+x}} = x.$$

NGUYỄN DUY THÁI

(GV THPT Nam Hồng, TX. Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

Dưới đây là lời giải bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở TH&TT số 506, T8.2019.

BÀI 37 (APMO 1991). *Cho* $\begin{cases} a_i > 0, b_i > 0, \forall i = \overline{1,n} \\ \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i \end{cases}$.

Chứng minh rằng: $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_i + b_i} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Cách 1. Đặt $P = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_i + b_i}$ và $Q = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{a_i + b_i}$

Dễ thấy $P + Q = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2 + a_i b_i}{a_i + b_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i$ (1)

Sử dụng giả thiết đã cho và áp dụng bất đẳng thức

$a_i b_i \leq \left(\frac{a_i + b_i}{2}\right)^2, \forall i = \overline{1,n}$ (2) thì

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{a_i + b_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i + b_i)^2}{4(a_i + b_i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i + b_i}{4} = \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i \quad (3)$$

Từ (1), (3) suy ra:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_i + b_i} \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i = \overline{1,n}$.

Cách 2. Với giả thiết đã cho, theo BĐT Cauchy thì

$$\frac{a_i^2}{a_i + b_i} = a_i - \frac{a_i b_i}{a_i + b_i} \overset{(*)}{\geq} a_i - \frac{(a_i + b_i)^2}{4(a_i + b_i)}$$

$$= \frac{3a_i - b_i}{4}, \forall i = \overline{1,n}$$

((*) đúng là do áp dụng BĐT (2))

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_i + b_i} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{3a_i - b_i}{4} = \frac{1}{4}\left(3\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Cách 3. Theo BĐT Schwarz ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_i + b_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i}$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{2\sum_{i=1}^{n} a_i} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Cách 4. Với giả thiết đã cho thì

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_i + b_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{a_i + b_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2 - b_i^2}{a_i + b_i} = \sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i = 0.$$

Do đó: $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_i + b_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{a_i + b_i}$, nên

$$2\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_i + b_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2 + b_i^2}{a_i + b_i}$$

$$\overset{(**)}{\geq} \sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i + b_i)^2}{2(a_i + b_i)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

(**) đúng là do BĐT $a_i^2 + b_i^2 \geq \frac{(a_i + b_i)^2}{2}; \forall i = \overline{1,n}$.

Vậy $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_i + b_i} \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i$

Nhận xét. 1) Cách 2 là đáp án của kỳ thi, cách 3 được sưu tầm, cách 1 và cách 4 là của bạn *Ngô Văn Thái*, GV THPT Phạm Quang Thẩm, **Thái Bình**, là người giới thiệu bài toán.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30.11.2019.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI 39. *Cho các số dương* a, b, c *thỏa mãn* $abc = 8$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}} \geq \frac{4}{3}.$$

NGÔ VĂN THÁI

(*GV THPT Phạm Quang Thẩm, Vũ Thư, Thái Bình*)

GIẢI ĐÁP: SAI Ở ĐÂU !

(Đề đăng trên TH&TT số 504, tháng 6 năm 2019)

Phân tích. Lỗi sai do việc giải phương trình (1) không đúng. Ngoài ra không đọc kỹ đề bài, vì A có hoành độ lớn hơn 1, nên $a=1$ sai. Phương trình (1) có tới hai nghiệm $a=1$ (loại) và $a=3$. Từ đó $AB=2a=6$ và diện tích tam giác ABC phải là $\frac{\sqrt{3}}{4}.6^2=9\sqrt{3}$.

Do đó phương án D mới là phương án đúng cho bài này. Do đó cần chú ý khi làm bài tập trắc nghiệm cần phải đọc kỹ đề bài, và cần phải giải đúng bằng tự luận.

Lời giải đúng. Lấy lời giải ở đến chỗ phương trình (1), tức là giải phương trình $(\sqrt{3})^{a-1}=a$ hay

$$(\sqrt{3})^{a-1}-a=0 \quad (1).$$

Xét hàm số: $f(a)=(\sqrt{3})^{a-1}-a, \quad a\in\mathbb{R}$. Ta có:

$f'(a)=(\sqrt{3})^{a}\ln\sqrt{3}-1$; $f''(a)=(\sqrt{3})^{a-1}\ln^2(\sqrt{3})$.

Ta có $f''(a)>0,\forall a\in\mathbb{R}$ nên PT $f'(a)=0$ có nhiều nhất một nghiệm (tức $f'(x)$ đổi dấu nhiều nhất là một lần) trên $\mathbb{R}$. Từ đó suy ra $f(a)=0$ có nhiều nhất là hai nghiệm. Nhận thấy $a=1$ và $a=3$ là hai nghiệm của (1). Do đó (1) có đúng hai nghiệm $a=1$ (loại do điều kiện của A) và $a=3$. Từ đó ta có diện tích tam giác bằng $9\sqrt{3}$.

Nhận xét. Một số bạn bạn tham gia bài này nhưng không phát hiện không đúng sai lầm.

KIHIVI

AI ĐÚNG ?

Trong giờ bài tập phương trình mũ lớp 12 chuyên Sinh, bạn *Thu Thảo* hỏi thầy giáo về một bài toán mà bạn còn phân vân. Thầy giáo đã ghi bài toán đó lên bảng và lấy ý kiến của các bạn trong lớp.

Bài toán: *Số nghiệm thực của phương trình*

$$(x-2)^{x^2+3x}=1 \quad (1) \quad \text{là:}$$

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

Sau khi ghi lên bảng, có ba đề xuất đáp án sau:

• Đề xuất của bạn *Trúc Dịu*: Đây là phương trình mũ, nên ta có ĐK: $\begin{cases}x-2>0\\x-2\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>2\\x\neq 3\end{cases}$.

Khi đó: $(1)\Leftrightarrow x^2+3x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-3\end{array}\right.$, không thỏa mãn ĐK, PT vô nghiệm. Chọn **A**.

• Lời giải của bạn *Tâm Tuệ*: PT(1) không phải PT mũ, ta giải (1) theo tính chất $a^0=1$ $(a\neq 0)$. Ta có:

• PT(1) $\Leftrightarrow\begin{cases}x-2\neq 0\\x^2+3x=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-3\end{array}\right.$. Chọn **C**.

Đề xuất của bạn *Hồng Trâm*: PT(1) là dạng phương trình mũ có ẩn ở cơ số, nên ta xét hai trường hợp sau:

TH1: $x-2=1\Leftrightarrow x=3$ là một nghiệm của PT.

TH2: $\begin{cases}x-2>0\\x-2\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>2\\x\neq 3\end{cases}$. Khi đó:

$(1)\Leftrightarrow x^2+3x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-3\end{array}\right.$, không thỏa mãn điều kiện TH2, PT vô nghiệm. Chọn **B**.

Các bạn trong lớp nhìn nhau phân vân. Còn ý của các bạn thì sao?

NGUYỄN ANH VŨ

(GV THPT chuyên Chu Văn An, Hoài Nhơn, Bình Định)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 508 (10.2019)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 024.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
GS. ĐOÀN QUỲNH
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên
NXBGD Việt Nam
NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam
HOÀNG LÊ BÁCH
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập
NXBGD Việt Nam
PHAN XUÂN THÀNH

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

***Tổng biên tập : TS.* TRẦN HỮU NAM**

***Thư kí Tòa soạn : ThS.* HỒ QUANG VINH**

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, *ThS.* NGUYỄN ANH DŨNG, *TS.* TRẦN NAM DŨNG, *TS.* NGUYỄN MINH ĐỨC, *TS.* NGUYỄN MINH HÀ, *TS.* NGUYỄN VIỆT HẢI, *PGS. TS.* LÊ QUỐC HÁN, *ThS.* PHẠM VĂN HÙNG, *PGS. TS.* VŨ THANH KHIẾT, *GS. TSKH.* NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, *TS.* PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, *PGS. TS.* NGUYỄN ĐĂNG PHẤT, *PGS. TS.* TẠ DUY PHƯỢNG, *ThS.* NGUYỄN THẾ THẠCH, *GS. TSKH.* ĐẶNG HÙNG THẮNG, *PGS. TS.* PHAN DOÃN THOẠI, *ThS.* VŨ KIM THỦY, *PGS. TS.* VŨ DƯƠNG THỤY, *GS. TSKH.* NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
For Lower Secondary School

Thái Nhật Phượng – Một tính chất của hình thang.

3 Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Trường THPT chuyên Vĩnh Phúc, năm học 2019 - 2020.

7 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên Hà Nội, năm học 2019 - 2020.

9 **Chuẩn bị cho kỳ thi THPT Quốc gia**

Nguyễn Khải và Ban quản trị nhóm toán VD-VDC – Phân tích, bình luận đề thi THPT Quốc gia môn Toán – năm 2019.

17 **Lịch sử Toán học**

Nguyễn Thủy Thanh – Những nghịch lý tưởng là…

21 **Đề ra kỳ này**

T1/508, ..., T12/508, L1/508, L2/508.
Problems in This Issue

23 **Giải bài kỳ trước**

T1/504, ..., T12/504, L1/504, L2/504.
Solutions to Previous Problems

32 **Tin vắn**

Nguyễn Hiệp - Các chuyên đề toán học cập nhật chương trình và sách giáo khoa mới.

33 **Bạn đọc tìm tòi**

Lương Xuân Vinh – Nguyễn Thái Hà – Ứng dụng của định lý 4 điểm trong chứng minh hai đường thẳng vuông góc.

37 **Phương pháp giải toán**

Nguyễn Đình Dũng – Một mở rộng của bất đẳng thức hoán vị.

42 **Tiếng Anh qua các bài toán** - *Bài số* 49.
Bài dịch số 46.

43 **Nhiều cách giải cho một bài toán**

46 **Du lịch thế giới qua các bài toán hay**

47 **Sai lầm ở đâu?**

Biên tập: LÊ MAI, NGUYỄN HIỆP
Trị sự, phát hành: LÊ NGUYÊN NGỌC, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: LÊ NGUYÊN NGỌC