https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❊ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

# Toán học & Tuổi trẻ

5
2002

SỐ 299 - NĂM THỨ 39 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

Ban biên tập Toán
Chi nhánh NXB Giáo dục
tại TP. Hồ Chí Minh

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 39
Số 299 (5-2002)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

## TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học cơ sở – For Lower Secondary Schools**
*Nguyễn Việt Hải* - Dấu hiệu chia hết trong hệ thập phân

2 *VKT* – Về Hội nghị Toán học toàn quốc lần thứ 6

3 **Chuẩn bị thi vào Đại học – University Entrance Preparation**
*Trần Xuân Bang* – Bài toán về đường thẳng cắt đồ thị hàm bậc ba

6 Đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán - Tin trường Đại học Sư phạm Hà Nội năm 2001

7 *Nguyễn Văn Thông* – Tìm cực trị của hàm số nhiều biến bằng cách khảo sát lần lượt từng biến

8 **Lịch sử toán học – History of Math**
*Hoàng Chúng* – Ramanujan - Một thần đồng toán học

10 *Tạ Duy Phượng* – Thi giải toán trên máy tính bỏ túi

12 **Đề ra kì này - Problems in this Issue**
T1/299, ..., T10/299, L1, L2/299

14 **Giải bài kì trước - Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 295

22 **Bạn có biết ? – Do you know ?**
*Phan Thanh Quang* – Chuyện thú vị về số nguyên tố

23 **Tiếng Anh qua các bài toán - English through Math Problems**
Ngô Việt Trung - Bài số 53

24 **Câu lạc bộ - Math Club**

**Sai lầm ở đâu ? - Where's the Mistake ?**

*Bìa 3 :* **Giải trí toán học – Math Recreation**

*Bìa 4 :* Chi nhánh Nhà xuất bản Giáo dục tại thành phố Hồ Chí Minh

*Tổng biên tập :*
NGUYỄN CẢNH TOÀN
*Phó tổng biên tập :*
NGÔ ĐẠT TỨ
HOÀNG CHÚNG

*Chịu trách nhiệm xuất bản :*
Giám đốc NXB Giáo dục :
NGÔ TRẦN ÁI
Tổng biên tập NXB Giáo dục :
VŨ DƯƠNG THỤY

*Trưởng ban biên tập :* NGUYỄN VIỆT HẢI. *Biên tập :* VŨ KIM THỦY, HỒ QUANG VINH
*Trị sự :* VŨ ANH THƯ. *Trình bày :* NGUYỄN THỊ OANH, NGUYỄN THANH LONG, NGUYỄN TIẾN DŨNG
*Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Tp. Hồ Chí Minh.* ĐT : 08.8309049

### THỂ LỆ GỬI BÀI CHO TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

- *Bài cần đánh máy hoặc viết tay không dập xóa trên một mặt giấy. Hình vẽ rõ ràng. Không nhận bản photocopy*
- *Mỗi bài dài không quá 2000 chữ hoặc không quá 6 trang đánh máy. Đề ra cần gửi kèm lời giải. Không nhận đề của học sinh phổ thông.*
- *Ghi đầy đủ họ và tên thật, địa chỉ để tiện liên hệ. Mỗi bài chỉ gửi một lần.*
- *Ảnh gửi cho tạp chí phải là ảnh màu, cỡ nhỏ nhất là 9 × 12, không ép plastic. Sau ảnh ghi rõ nội dung ảnh và tên người chụp.*
- *Đối với bài giải dự thi, mỗi bài viết trên một tờ giấy riêng (vì mỗi bài do 1 giáo viên chấm). Phía trên bên trái ghi số của bài, bên phải ghi họ tên và lớp, trường, huyện (quận), tỉnh (thành phố). Bài giải chỉ gửi về một địa chỉ : **Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội**. Ngoài phong bì ghi rõ: **Dự thi giải toán số tạp chí...** Không gửi bài của nhiều số tạp chí trong cùng một phong bì.*
- *Thời hạn nhận bài giải **Giải bài kì trước** là hai tháng tính từ cuối tháng ra số tạp chí đó. Các bài giải của chuyên mục khác là 1 tháng.*

THTT

*Dành cho các bạn*
**TRUNG HỌC CƠ SỞ**

# DẤU HIỆU CHIA HẾT TRONG HỆ THẬP PHÂN

NGUYỄN VIỆT HẢI

Trong THTT số 291 (9/2001) các bạn Nguyễn Bốn, Nguyễn Lê Hiếu đã trình bày "một tiêu chuẩn chia hết" cho các số lẻ $p$ không là bội của 5. Phát triển ý tưởng này có thể xây dựng một tiêu chuẩn chia hết tương tự cho số lẻ $p$ không là bội 5 để dẫn đến một dấu hiệu chia hết cho $p$ một cách tổng quát trong hệ thập phân.

Trong bài này ta luôn kí hiệu $p$ là số lẻ lớn hơn 1 mà không là bội của 5, nghĩa là $(p, 10) = 1$. Với $p \in N^*$ và các số $m, n, t \in Z$ thỏa mãn $m = pt + n$ ta cũng viết là $m \equiv n \pmod p$

**Mệnh đề 1.** *Với mỗi số $p = 10s + r$ với $r = 1, 3, 7, 9$ luôn tìm được số nguyên $k$ (phụ thuộc vào $s, r$) để $10k \equiv 1 \pmod p$, nghĩa là $10k - 1$ chia hết cho $p$.*

***Chứng minh :***

• Với $p = 10s + 1$ ta chọn $k \equiv -s \pmod p$ hay $k = pt - s$ $(t \in Z)$ thì $10k - 1 = 10(pt - s) - 1 = 10pt - (10s + 1) = p(10t - 1)$.

• Với $p = 10s + 3$ ta chọn $k \equiv 3s + 1 \pmod p$ hay $k = pt + 3s + 1$ $(t \in Z)$ thì $10k - 1 = 10(pt + 3s + 1) - 1 = 10pt + 3(10s + 3) = p(10t + 3)$

• Với $p = 10s + 7$ ta chọn $k \equiv -(3s + 2) \pmod p$ hay $k = pt - 3s - 2$ $(t \in Z)$ thì $10k - 1 = 10(pt - 3s - 2) - 1 = 10pt - 3(10s + 7) = p(10t - 3)$

• Với $p = 10s + 9$ ta chọn $k \equiv s + 1 \pmod p$ hay $k = pt + s + 1$ $(t \in Z)$ thì $10k - 1 = 10(pt + s + 1) - 1 = 10pt + (10s + 9) = p(10t + 1)$ (đpcm).

Từ cách chọn trên dễ thấy rằng

• Với $p = 10s \pm 1$ thì $|k| \le \dfrac{p+1}{10}$

• Với $p = 10s \pm 3$ thì $|k| \le \dfrac{p}{3}$

Trong bảng dưới đây đã chọn số $k$ có giá trị tuyệt đối nhỏ nhất tương ứng với số lẻ $p$ không là bội 5 mà $p \le 101$, trong đó $p$ là số nguyên tố thì được in đậm.

| $p$ | **3** | **7** | 9 | **11** | **13** | **17** | **19** | 21 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | 1 | −2 | 1 | −1 | 4 | −5 | 2 | −2 |
| $p$ | **23** | **27** | **29** | **31** | 33 | **37** | 39 | **41** |
| $k$ | 7 | −8 | 3 | −3 | 10 | −11 | 4 | −4 |
| $p$ | **43** | **47** | 49 | 51 | **53** | 57 | **59** | **61** |
| $k$ | 13 | −14 | 5 | −5 | 16 | −17 | 6 | −6 |
| $p$ | 63 | **67** | 69 | **71** | **73** | 77 | **79** | 81 |
| $k$ | 19 | −20 | 7 | −7 | 22 | −23 | 8 | −8 |
| $p$ | **83** | 87 | **89** | 91 | 93 | **97** | 99 | **101** |
| $k$ | 25 | −26 | 9 | −9 | 28 | −29 | 10 | −10 |

**Mệnh đề 2.** *Số tự nhiên $N = \overline{a_1a_2a_3...a_t}$ có cùng số dư với số nguyên $10^{t-1}.D = 10^{t-1}(a_1 + ka_2 + k^2a_3 + ... + k^{t-1}a_t)$ khi chia cho số $p = 10s + r$ với $r = 1, 3, 7, 9$, còn $k$ là số thỏa mãn $10k \equiv 1 \pmod p$.*

*Nói ngắn gọn là $N \equiv 10^{t-1}D \pmod p$.*

***Chứng minh :*** Ta chứng minh bằng quy nạp theo $t$.

• Với $t=1$ thì $N = 1 \times D = a_1$ mệnh đề (MĐ) đúng.

• Giả sử MĐ đúng với $t$. Xét số $N_1$ có $t + 1$ chữ số. $N_1 = \overline{a_1a_2...a_ta_{t+1}} = 10N + a_{t+1}$ với $N = \overline{a_1a_2...a_t}$.

Theo MĐ1 có $10k - 1 = pv$ với $v \in Z$. Từ đó $N_1 = 10N + a_{t+1} = 10(N + ka_{t+1}) - (10k - 1)a_{t+1} = 10(N + ka_{t+1}) - pva_{t+1}$ hay $N_1 \equiv 10N + 10ka_{t+1} \pmod p$

Theo giả thiết quy nạp thì $N \equiv 10^{t-1}D \pmod p$ nên $N_1 \equiv 10^t D + 10ka_{t+1} \pmod p$ (1)

Xét $10^t D_1 = 10^t(a_1 + ka_2 + ... + k^{t-1}a_t + k^t a_{t+1})$

$= 10^t.D + 10^t k^t a_{t+1}$

$= 10^t.D + 10k(10^{t-1}k^{t-1} - 1)a_{t+1} + 10ka_{t+1}$

Với $t > 1$ thì $10^{t-1}k^{t-1} - 1$ chia hết cho $10k - 1 = pv$ nên $10^t D_1 \equiv 10^t.D + 10ka_{t+1} \pmod p$ (2)

Với $t=1$ thì $10^t D_1 = 10^t.D + 10ka_{t+1}$ cũng có (2)

So sánh (1) và (2) rút ra $N_1 \equiv 10^t D_1 \pmod p$, nghĩa là MĐ đúng với $t + 1$. Vậy MĐ2 đúng với mọi $t \in N^*$.

Từ MĐ 2 rút ra ngay hệ quả sau.

**Mệnh đề 3.** *Số tự nhiên $N = \overline{a_1a_2...a_t}$ chia hết cho $p$ khi và chỉ khi $D = a_1 + ka_2 + k^2a_3 +$*

*... + $k^{t-1}a_t$ chia hết cho p, trong đó p = 10s + r với r = 1, 3, 7, 9, còn k là số thỏa mãn 10k ≡ 1 (mod p)*

Như vậy dấu hiệu chia hết cho số $p = 10s + r$ ($r$ = 1, 3, 7, 9) tương ứng với một dãy số, gọi là *dãy số chia cho p*, kí hiệu là $d_p = (1, k, k^2, k^3, ...)$

Dưới đây áp dụng MĐ3 cho các số $p$ = 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19 và sử dụng bảng giá trị $k$ ứng với $p$ ở trên ta tìm được *dãy số chia cho p*, trong đó các số của dãy được tính sao cho giá trị tuyệt đối của số đó nhỏ hơn $\frac{p+1}{2}$. Các dãy số này tuần hoàn, gọi chu kì tuần hoàn là $h$.

$d_3 = d_9 = (1, 1, 1, 1, ...)$, $h = 1$

$d_7 = (1, -2, 4, -1, 2, -4, 1, -2, ...)$, $h = 6$

$d_{11} = (1, -1, 1, -1, 1, ...)$, $h = 2$

$d_{13} = (1, 4, 3, -1, -4, -3, 1, ...)$, $h = 6$

$d_{17} = (1, -5, 8, -6, -4, 3, 2, 7, -1, 5, ...)$, $h = 16$

$d_{19} = (1, 2, 4, 8, -3, -6, 7, -5, 9, -1, ...)$, $h = 18$

**Mệnh đề 4.** *Dãy số chia cho số lẻ p không là bội 5 là dãy số tuần hoàn có chu kì là ước số của số Ơle φ(p).*

***Chứng minh:*** Số $k$ được chọn thỏa mãn $10k \equiv 1 \pmod p$ nên $(k, p) = 1$. Theo định lí Ơle thì $k^{\varphi(p)} \equiv 1 \pmod p$, trong đó $p = p_1^{a_1}...p_s^{a_s}$ là sự phân tích $p$ ra thừa số nguyên tố,

$$\varphi(p) = \prod_{i=1}^{s} \varphi\left(p_i^{a_i}\right) = \prod_{i=1}^{s} p_i^{a_i-1}\left(p_i - 1\right)$$

Gọi $h$ là ước số nhỏ nhất của $\varphi(p)$ thỏa mãn $k^h \equiv 1 \pmod p$. Với mỗi số $t = hq + r$ $(0 \le r \le h-1)$ ta có $k^t = k^{hq+r} = k^{hq}.k^r \equiv k^r \pmod p$, với mọi $r = 0, 1, ..., h-1$, suy ra dãy số $1, k, k^2, ..., k^{h-1}, 1, ...$ là dãy số tuần hoàn có chu kì $h$.

Từ bảng tính $k$ trên, các bạn có thể tính được dãy số chia cho mỗi số $p \le 101$ mà $(p, 10) = 1$.

**Tìm số dư trong phép chia cho p**

*Khi đã tính sẵn được dãy số $d_p$* ta có thể tìm được khá đơn giản và nhanh (đặc biệt với p khá lớn) số dư $R$ trong phép chia số $N = \overline{a_1a_2...a_t}$ cho $p$ nhờ MĐ 2, đó là $R \equiv 10^{t-1}.D \pmod p$ với $0 \le R < p$.

**Ví dụ 1.** Tìm giá trị của $a$ sao cho số $N = \overline{35a65148}$ chia hết cho 13.

***Giải.*** $D = 3+4.5+3.a - 1.6 - 4.5 - 3.1 + 1.4 + 4.8 = 30 + 3a = 3(10 + a) \pmod{13}$ nên $N \vdots 13 \Leftrightarrow D \vdots 13 \Leftrightarrow a = 3$.

**Ví dụ 2.** Tìm số dư của số $N$ = 35265148 khi chia cho 13.

## VỀ HỘI NGHỊ TOÁN HỌC TOÀN QUỐC LẦN THỨ 6

Hội nghị Toán học toàn quốc lần thứ 6 do Hội Toán học Việt Nam tổ chức sẽ diễn ra tại Đại học Huế trong các ngày 7, 8, 9, 10 tháng 9 năm 2002.

Hội nghị chia thành 8 tiểu ban : Đại số - Hình học – Tôpô, Giải tích, Phương trình vi phân, Tối ưu và Tính toán khoa học, Xác suất và Thống kê Toán học, Toán học rời rạc và Tin học lí thuyết, Ứng dụng toán học, Giảng dạy toán học. Dự kiến Chương trình khoa học của Hội nghị sẽ báo cáo gồm 4 báo cáo mời toàn thể (60 phút), các báo cáo mời tại các tiểu ban (40 phút) và các thông báo ngắn (15 phút).

Ban tổ chức Hội nghị sẽ xét và tài trợ một phần kinh phí cho một số cán bộ nghiên cứu trẻ và sinh viên toán xuất sắc để tham dự Hội nghị.

Thời hạn nộp tóm tắt báo cáo là trước ngày 31.5.2002. Hội nghị phí mỗi người dự là 100000đ. Trong và sau thời gian hội nghị có tổ chức tham quan danh lam thắng cảnh. Hội nghị sẽ tài trợ phương tiện đi tham quan còn các đại biểu tự túc các chi phí khác.

Địa chỉ liên hệ :

*Ban tổ chức Hội nghị THTQ6*
*Viện Toán học*
*Hộp thư 631 Bờ Hồ, Hà Nội*
*e-mail : hnthtq6@thevinh.ncst.ac.vn*

Ban tổ chức khuyến khích các đại biểu đăng kí trực tiếp trên mạng theo địa chỉ :
http : //www.math.ac.vn/conference/hnthtq6/

VKT

*(Theo Thông tin Toán học)*

***Giải.*** Tính như trên được $D = 36 \equiv -3 \pmod{13}$

Từ $t = 8$ có $10^7 \equiv (-3)^7 \equiv 9^3(-3) \equiv (-4)^3(-3) \equiv 16.12 \equiv -3 \equiv 10 \pmod{13}$.

Suy ra $R \equiv 10(-3) = -30 \equiv 9 \pmod{13}$ nên số dư $R = 9$.

**Ví dụ 3.** Gọi $N$ là số viết bởi $m$ chữ số $a$ như nhau. Chứng minh rằng :

a) $N \vdots 13 \Leftrightarrow m \vdots 6$ ; b) $N \vdots 17 \Leftrightarrow m \vdots 16$

c) $N \vdots 19 \Leftrightarrow m \vdots 18$

***Giải.*** Vì $(a, p) = 1$ với $p$ = 13, 17, 19 nên $N = a \times M \vdots p \Leftrightarrow M \vdots p$, trong đó $M$ viết bởi toàn chữ số 1. Gọi $d_p = (r_1, r_2, ..., r_h)$ là chu kì nhỏ nhất của dãy số chia cho $p$. Ta thấy $\sum_{i=1}^{h} r_i \equiv 0 \pmod p$ còn $\sum_{i=1}^{s} r_i \not\equiv 0 \pmod p$ với mọi $s$ = 1, 2, ..., $k - 1$, từ MĐ3 suy ra điều phải chứng minh.

Từ các kết quả trên các bạn có thể phát triển thêm nhiều vấn đề thú vị hơn nữa. /.

CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC

# BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG THẲNG CẮT ĐỒ THỊ HÀM BẬC BA

TRẦN XUÂN BANG
(GV THPT Đào Duy Từ, Quảng Bình)

Trong Bộ "Đề thi tuyển sinh vào các trường đại học, cao đẳng và trung học chuyên nghiệp môn Toán" (Bộ ĐTTS) cũng như một số đề thi vào các trường đại học và cao đẳng gần đây có những bài toán về đường thẳng cắt đồ thị hàm bậc ba : $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ (1). Gọi $f(x)$ là vế phải của (1).

Bài viết này xin trình bày một số tính chất (TC) của đồ thị hàm số nhằm mục đích cung cấp thêm công cụ cho các bạn chuẩn bị thi vào đại học khi giải các bài toán thuộc loại này.

**TC1:** *Đồ thị hàm số (1) có một tâm đối xứng duy nhất là điểm uốn của nó.*

***Chứng minh.*** Bổ đề sau cần để chứng minh **TC1**.

*Bổ đề:* Đồ thị hàm số $y = f(x)$ xác định trên **R** có tâm đối xứng $\mathbf{T}(u, v)$ khi và chỉ khi $f(x) + f(2u-x) = 2v$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Thật vậy với mỗi điểm $A\ (x_1, f(x_1))$ bất kì thì luôn tồn tại điểm $B\ (x_2, f(x_2))$ cũng thuộc đồ thị là điểm đối xứng của điểm $A$ qua điểm $T$ thỏa mãn $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2u \\ f(x_1) + f(x_2) = 2v \end{cases}$

$\Leftrightarrow f(x_1) + f(2u - x_1) = 2v$ với mọi $x \in \mathbf{R}$ (*)

Bổ đề được chứng minh

Chú ý rằng khi $u$ thuộc tập xác định của $y = f(x)$ thì $f(u) = v$ (theo (*)) nên $T$ thuộc đồ thị.

Áp dụng bổ đề trên ta thấy $T(x_o, y_o)$ là tâm đối xứng của đồ thị hàm số (1) khi và chỉ khi :

$f(x) + f(2x_o - x) = 2y_o, \forall x \in \mathbf{R}$

$\Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d + a(2x_o - x)^3 + b(2x_o - x)^2 + c(2x_o - x) + d = 2y_o, \forall x \in \mathbf{R}$

$\Leftrightarrow (b + 3ax_o)x^2 - 4x_o(b + 3ax_o)x + 2f(x_o) - 2y_o = 0, \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = -\dfrac{b}{3a} \\ y_o = f(x_o) \end{cases}$

Vậy đồ thị hàm số (1) có tâm đối xứng duy nhất chính là điểm uốn của nó (đpcm).

Qua phép biến đổi $\begin{cases} x = x_o + Y \\ y = y_o + Y \end{cases}$ trong đó $T(x_o, y_o)$ là tâm đối xứng của đồ thị hàm số (1) thì PT hàm số này đối với hệ trục $TXY$ có dạng

$$Y = aX^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)X \qquad (2)$$

và đồ thị của hàm số (2) có tâm đối xứng $T$ với tọa độ mới là $X = 0, Y = 0$.

**TC 2:** *Điều kiện cần và đủ để một đường thẳng có hệ số góc k đi qua điểm uốn của đồ thị hàm số (1) và cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt là* $\left[\begin{array}{l} k > c - \dfrac{b^2}{3a} \text{ nếu } a > 0 \\ k < c - \dfrac{b^2}{3a} \text{ nếu } a < 0 \end{array}\right.$

***Chứng minh:*** Tịnh tiến hệ trục $Oxy$ đến hệ trục $TXY$, trong đó $T(x_o, y_o)$ là điểm uốn của đồ thị hàm số (1) thì đối với hệ trục mới, hàm số (1) có phương trình dạng (2).

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (2) với đường thẳng $Y = kX$ là nghiệm của phương trình (PT) : $aX^3 + \left(c - \dfrac{b^2}{3a}\right)X = kX \Leftrightarrow$

$$X\left(aX^2 + c - \frac{b^2}{3a} - k\right) = 0 \qquad (3)$$

Đường thẳng $Y = kX$ cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi PT $aX^2 + \left(c - \dfrac{b^2}{3a} - k\right) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0, nghĩa là : $\dfrac{1}{a}\left(k - c + \dfrac{b^2}{3a}\right) > 0$. Từ đó suy ra đpcm.

(Ta cũng có thể chứng minh TC2 bằng cách so sánh $k$ với đạo hàm của hàm số (2)).

**TC3:** *Với ba điểm A, B, C phân biệt thẳng hàng cùng thuộc đồ thị hàm số (1) điều kiện cần và đủ để AB = BC là B trùng với điểm uốn của đồ thị hàm số đó.*

***Chứng minh:*** Qua phép biến đổi trục: $x = x_o + X$, $y = y_o + Y$ thì độ dài đoạn thẳng không đổi, nên chỉ cần chứng minh **TC3** đối với

đồ thị hàm số dạng $Y = aX^3 + eX$ (2') là đủ. Vì $A(X_1, Y_1)$, $B(X_2, Y_2)$, $C(X_3, Y_3)$ (với $X_1 \neq X_3$) thuộc đồ thị hàm số (2') nên : $Y_1 = aX_1^3 + eX_1$, $Y_2 = aX_2^3 + eX_2$, $Y_3 = aX_3^3 + eX_3$, (4)

$AB = BC \Leftrightarrow 2X_2 = X_1 + X_3$ ; $2Y_2 = Y_1 + Y_3$, thay vào (4) suy ra $(X_1 + X_3)^3 = 4(X_1^3 + X_3^3)$ $\Leftrightarrow (X_1 + X_3)(X_1 - X_3)^2 = 0 \Rightarrow X_1 + X_3 = 0$; $Y_1 + Y_3 = 0$. Từ đó $X_2 = Y_2 = 0$ nghĩa là $B$ trùng với điểm uốn $T$. Đảo lại nếu các điểm $A$, $C$ khác $B(0, 0)$ là giao của đường thẳng $Y = kX$ với đồ thị hàm số (2') thì từ (4) suy ra $aX_1^2 + e = k = aX_3^2 + e$ $\Rightarrow X_1^2 = X_3^2 \Rightarrow X_3 = -X_1 \Rightarrow Y_1 = -Y_3$ nên $X_1 + X_3 = Y_1 + Y_3 = 0$, nghĩa là $AB = BC$

Từ **TC2** và **TC3** cho ta :

**TC4:** *Điều kiện cần và đủ để một đường thẳng có hệ số góc k cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho AB = BC là đường thẳng đó đi qua điểm uốn của đồ thị hàm số (1) với* $k > c - \dfrac{b^2}{3a}$ *khi* $a > 0$, *hoặc* $k < c - \dfrac{b^2}{3a}$ *khi* $a < 0$.

**TC5:** Nếu $y = f(x)$ *mà* $f(x) = f'(x)q(x) + r(x)$ *thì các điểm cực trị (nếu có) của đồ thị hàm số trên thuộc đường thẳng* $y = r(x)$

***Chứng minh.*** Giả sử $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Khi đó $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. Mặt khác do $M_1$, $M_2$ thuộc đồ thị hàm số (1) nên

$$\begin{cases} y_1 = f(x_1) = f'(x_1)q(x_1) + r(x_1) \\ y_2 = f(x_2) = f'(x_2)q(x_2) + r(x_2) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = r(x_1) \\ y_2 = r(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow M_1, M_2$ thuộc đường thẳng $y = r(x)$ (đpcm).

Việc vận dụng các tính chất của đồ thị hàm số (1) vào các bài toán khảo sát sự tương giao giữa một đường thẳng và đồ thị hàm số đó thực sự có hiệu quả. Các bạn thử so sánh hai cách giải cho các bài toán sau

**Bài toán 1.** Cho hàm số $y = x^3 - \dfrac{3}{2}mx^2 + \dfrac{1}{2}m^3$ với $m$ là tham số thực. Xác định $m$ để đường thẳng $y = x$ cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt $A, B, C$ sao cho $AB = BC$.

*(Đề thi ĐH Huế – 2000)*

***Lời giải.*** *Cách 1.* Gọi $x_1, x_2, x_3$ theo thứ tự là hoành độ của các điểm $A, B, C$. Ta có $2x_2 = x_1 + x_3$ và $x_1, x_2, x_3$ là các nghiệm của PT $x^3 - \dfrac{3}{2}mx^2 + \dfrac{1}{2}m^3 = x$

Ta có $2x^3 - 3mx^2 - 2x + m^3 =$
$= 2(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$
$= 2x^3 - 2(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - 2x_1x_2x_3$

Từ đó $x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{3m}{2}$ ; $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -1$ ; $x_1.x_2.x_3 = -\dfrac{m^3}{2}$.

Kết hợp với $2x_2 = x_1 + x_3$ suy ra $m = 0$ ; $m = \pm\sqrt{2}$

*Cách 2.* Đường thẳng $y = x$ có hệ số góc $k = 1 > -\dfrac{3m^2}{4} = c - \dfrac{b^2}{3a}$ $(a = 1 > 0)$. Điểm uốn của đồ thị hàm số là $T\left(\dfrac{m}{2}, \dfrac{m^3}{4}\right)$. Áp dụng tính chất 4 suy ra $T$ thuộc đường thẳng $y = x$. Từ đó $\dfrac{m^3}{4} = \dfrac{m}{2} \Leftrightarrow m = 0$ ; $m = \pm\sqrt{2}$

**Bài toán 2.** Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 2(m^2 + 7m + 2)x - 2m(m+2)$ ($m$ là tham số)

Tìm $m$ để hàm số có cực đại, cực tiểu. Viết PT đường thẳng đi qua điểm cực đại và điểm cực tiểu đó.

*(Đề thi HV Kĩ thuật Mật mã – 1999)*

***Lời giải.*** Hàm số có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi PT $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt hay

$\Delta' = 9(m+1)^2 - 6(m^2 + 7m + 2) > 0$
$\Leftrightarrow m^2 - 8m - 1 > 0 \Leftrightarrow m < 4 - \sqrt{17}$ hoặc $m > 4 + \sqrt{17}$

Đặt $y = f(x) = x^3 - 3(m + 1)x^2 + 2(m^2 + 7m + 2)x - 2m(m + 2)$. Thực hiện phép chia đa thức $f(x)$ cho $f'(x)$ ta được $f(x) = f'(x).q(x) + r(x)$. Trong đó $r(x) = -\dfrac{2}{3}(m^2 - 8m - 1)x + \dfrac{2}{3}(m^3 + 5m^2 + 3m + 2)$ là PT đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị (theo TC5)

**Bài toán 3.** Viết PT Parabol đi qua các điểm cực trị của hàm số $y = (x - 1)^2(x + 1)^2$

***Lời giải.*** Ta có $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$, $y' = f'(x) = 4x^3 - 4x$

*(Xem tiếp trang 8)*

# TIN BUỒN

Nhà giáo ưu tú, Phó Giáo sư Hoàng Chúng sinh ngày 28.01.1931 tại Điện Quang, Điện Bàn, Quảng Nam, nguyên Phó Cục trưởng Cục Đào tạo Bồi dưỡng Bộ Giáo dục, nguyên Hiệu trưởng trường ĐHSP Tp. Hồ Chí Minh, nguyên Phó Tổng biên tập tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, đảng viên Đảng Cộng sản Việt Nam, Huân chương Kháng chiến chống Mỹ cứu nước hạng Nhất, Huân chương Lao động hạng Ba, Huy hiệu 40 năm tuổi Đảng, Huy chương Vì sự nghiệp Giáo dục ; do tuổi cao bệnh trọng đã từ trần hồi 23 giờ ngày 4.5.2002 tại Tp. Hồ Chí Minh. Lễ truy điệu và hỏa táng PGS Hoàng Chúng đã tổ chức tại Tp. Hồ Chí Minh ngày 9.5.2002.

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ xin gửi đến gia quyến PGS Hoàng Chúng lời chia buồn sâu sắc.

**Hội đồng biên tập tạp chí Toán học và Tuổi trẻ**
**Tòa soạn tạp chí Toán học và Tuổi trẻ**

## TIỂU SỬ PGS HOÀNG CHÚNG
## NGUYÊN PHÓ TỔNG BIÊN TẬP TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Phó Giáo sư Hoàng Chúng sinh ngày 28.01.1931, quê ở Điện Quang, huyện Điện Bàn, tỉnh Quảng Nam. Từ năm 1951 đến 1953 là sinh viên trường Sư phạm Cao cấp Khu học xá Việt Nam tại Nam Ninh, Trung Quốc. Từ năm 1953 đến 1959 ông là giáo viên cấp 3 Quảng Ngãi, sau đó Quyền Hiệu trưởng trường Phổ thông cấp III Hà Nội. Năm 1959 là cán bộ giảng dạy và Phó Chủ nhiệm khoa Toán Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, đến 1969 ông nhận công tác tại Bộ Giáo dục. Từ 1975 đến 1983 là Phó Cục trưởng Cục Đào tạo Bồi dưỡng Bộ Giáo dục. Năm 1983 là Hiệu trưởng Đại học Sư phạm Tp. Hồ Chí Minh đến năm 1989. Từ 1990 đến 1997 là Chuyên viên Cao cấp của Trung tâm Bồi dưỡng giáo viên tại Tp. Hồ Chí Minh.

PGS Hoàng Chúng là một trong những người đầu tiên làm báo Toán học và Tuổi trẻ, Thư kí Tòa soạn từ 1964 đến 1983 và là Phó Tổng biên tập tạp chí Toán học và Tuổi trẻ từ 1992 đến nay.

Do những cống hiến với ngành Giáo dục, PGS đã được Nhà nước tặng thưởng hai Huân chương Lao động hạng Ba (1968, 1986), Huân chương Kháng chiến chống Mỹ cứu nước hạng Nhất, được phong danh hiệu Nhà giáo Ưu tú.

PGS Hoàng Chúng là tác giả của nhiều cuốn sách tham khảo về Toán sơ cấp và nhiều bài trên tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

**THTT**

# ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN TOÁN – TIN TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI NĂM 2001

## MÔN TOÁN – VÒNG 1

*Thời gian làm bài : 150 phút*

**Câu 1:** Xét đa thức

$$P(x) = (1 - x + x^2 - x^3 + ... - x^{1999} + x^{2000}) \times$$
$$\times (1 + x + x^2 + ... + x^{1999} + x^{2000})$$

Khai triển và ước lượng các số hạng đồng dạng có thể viết

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{4000}x^{4000}$$

Tính $a_{2001}$

**Câu 2.** Giải phương trình

$$\sqrt{3x^2 - 7x + 3} - \sqrt{x^2 - 2} =$$
$$= \sqrt{3x^2 - 5x - 1} - \sqrt{x^2 - 3x + 4}$$

**Câu 3.** Tìm ba chữ số hàng đơn vị, chục, trăm của số $A = 26^{6^{2001}}$

**Câu 4.** Cho $a$ và $b$ là hai số dương. Biết rằng phương trình

$$x^3 - x^2 + 3ax - b = 0$$

có 3 nghiệm (không nhất thiết phân biệt). Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^3} + 27b \geq 28$$

**Câu 5.** Gọi $A'$, $B'$, $C'$ lần lượt là trung điểm các cung $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, $\overset{\frown}{AB}$ không chứa các đỉnh $A$, $B$, $C$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$. Các cạnh $BC$, $CA$ và $AB$ cắt các cặp đoạn thẳng $C'A'$, $A'B'$ ; $A'B'$, $B'C'$ và $B'C'$, $C'A'$ lần lượt ở các cặp điểm $M$, $N$ ; $P$, $Q$ và $R$, $S$. Chứng minh rằng :

1. Trực tâm $H'$ của tam giác $A'B'C'$ trùng với tâm $I$ đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$.

2. Các đường chéo $MQ$, $NR$ và $PS$ của lục giác $MNPQRS$ đồng quy ở $I$.

3. Ba đoạn $MN$, $PQ$, $RS$ có độ dài bằng nhau khi và chỉ khi tam giác $ABC$ là một tam giác đều.

## MÔN TOÁN – VÒNG 2

*Thời gian làm bài : 150 phút*

**Câu 6.** Với mỗi số $k$ nguyên dương, đặt

$$S_k = (\sqrt{2} + 1)^k + (\sqrt{2} - 1)^k$$

Chứng minh rằng : $S_{m+n} + S_{m-n} = S_m.S_n$ với mọi $m$, $n$ nguyên dương thỏa mãn điều kiện $m > n$.

**Câu 7.** Cho $n$ là một số nguyên dương. Chứng minh rằng tổng $T_n = 1^5 + 2^5 + 3^5 + ... + n^5$ chia hết cho tổng của $n$ số tự nhiên đầu tiên $A_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$

**Câu 8.** Tìm tất cả các số nguyên dương $p > 1$ sao cho phương trình sau có nghiệm duy nhất $x^3 + px^2 + (p - 1 + \frac{1}{p-1})x + 1 = 0$

**Câu 9.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + x^2(y + z) = xyz + 14 \\ y^3 + z^3 + y^2(z + x) = xyz - 21 \\ z^3 + x^3 + z^2(x + y) = xyz + 7 \end{cases}$$

**Câu 10a.** *(Dành riêng cho thí sinh dự thi vào lớp chuyên Toán)*

Cho tam giác $ABC$ cân ở $A$. Kí hiệu $x$, $y$, $z$ lần lượt là khoảng cách $MA'$, $MB'$ và $MC'$ từ một điểm $M$ nằm trong mặt phẳng của tam giác đến các đường thẳng $BC$, $CA$ và $AB$. Tìm quỹ tích những điểm $M$ nằm trong góc $BAC$ sao cho $x^2 = yz$.

**Câu 10b.** *(Dành riêng cho thí sinh dự thi vào lớp chuyên Tin)*

Trong một bảng kẻ ô vuông $2000 \times 2000$ ô (mỗi ô có kích thước 1) đã vẽ một đường tròn với bán kính 10 không đi qua đỉnh nào và cũng không tiếp xúc với cạnh nào của các ô vuông.

1. Đường tròn đã vẽ cắt các cạnh của các ô vuông tại bao nhiêu điểm ?

2. Chứng minh rằng đường tròn đã cho cắt không ít hơn 79 ô vuông.

# TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ NHIỀU BIẾN BẰNG CÁCH KHẢO SÁT LẦN LƯỢT TỪNG BIẾN

*(Tiếp theo kỳ trước)*

NGUYỄN VĂN THÔNG
*(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)*

**Bài toán 4.** *Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $21ab + 2bc + 8ca \le 12$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P(a, b, c) = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$$

*(Đề thi chọn đội tuyển toán quốc gia 2001)*

**Lời giải.** Đặt $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$ thì đề bài chuyển về *bài toán* sau :

*Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $2x + 8y + 21z \le 12xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P(x, y, z) = x + 2y + 3z$.*

*Lời giải.* Từ giả thiết

$$z(12xy - 21) \ge 2x + 8y > 0$$

Từ đó $z \ge \frac{2x + 8y}{12xy - 21}$ với $x > \frac{7}{4y}$ (11)

Suy ra $P(x, y, z) \ge x + 2y + \frac{2x + 8y}{4xy - 7}$ (12)

Xét hàm số

$$f(x) = x + \frac{2x + 8y}{4xy - 7} = \frac{4x^2y - 5x + 8y}{4xy - 7}$$

với biến $x > \frac{7}{4y}$ và $y$ là tham số dương.

Ta có $f'(x) = \frac{16x^2y^2 - 56xy - 32y^2 + 35}{(4xy - 7)^2}$

Trên $\left(\frac{7}{4}y, +\infty\right)$ thì $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất là $x_o = \frac{7}{4y} + \frac{\sqrt{32y^2 + 14}}{4y}$ và qua $x_o$ thì $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x_o$. Từ đó $f(x) \ge f(x_o) = 2x_o - \frac{5}{4y}$, suy ra

$P(x, y, z) \ge f(x) + 2y \ge f(x_o) + 2y = g(y)$ (13)

Xét hàm số $g(y) = 2y + \frac{9}{4y} + \frac{1}{2y}\sqrt{32y^2 + 14}$

Sau khi tính $g'(y)$ ta có : $g'(y) = 0$

$\Leftrightarrow (8y^2 - 9)\sqrt{32y^2 + 14} - 28 = 0$

Đặt $t = \sqrt{32y^2 + 14}$ với $t > 0$ thì phương trình trên trở thành

$t^3 - 50t - 112 = 0 \Leftrightarrow (t - 8)(t^2 + 8t + 14) = 0$

$\Rightarrow t = 8 \Leftrightarrow y = \frac{5}{4}$. Từ đó $g'\left(\frac{5}{4}\right) = 0$

Với $y > 0$ và qua $y_o = \frac{5}{4}$ thì $g'(y)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $g(y)$ đạt cực tiểu tại $y_o = \frac{5}{4}$, lúc đó $g\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{15}{2}$.

Từ đó và (13) suy ra $P(x, y, z) \ge g(y) \ge g\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{15}{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra với $y = \frac{5}{4}$, $x = 3$, $z = \frac{2}{3}$ hay là với $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{4}{3}$, $c = \frac{3}{2}$ thì $\min P(a, b, c) = \frac{15}{2}$.

Phương pháp khảo sát lần lượt từng biến cho thấy đường lối giải rõ ràng hơn so với cách vận dụng bất đẳng thức, đồng thời có thể dùng để giải hàng loạt bài toán tìm cực trị của hàm nhiều biến như dưới đây.

## BÀI TẬP

***Bài 1.*** Xét các số thực dương $x, y, z$ thỏa mãn điều kiện :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \le z < \frac{1}{2}\min\{x\sqrt{2}, y\sqrt{3}\} \\ x + z\sqrt{3} \ge \sqrt{6} \\ y\sqrt{3} + z\sqrt{10} \ge 2\sqrt{5} \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P(x, y, z) = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{y^2} + \frac{3}{z^2}$$

*(Đề thi HS giỏi THPT toàn quốc bảng A – 2001)*

***Bài 2.*** Cho hàm số

$f(x, y, z) = xy + yz + zx - 2xyz$ trên miền $D = \{(x, y, z) : 0 \le x, y, z$ và $x + y + z = 1\}$

Tìm $\min\limits_D f(x, y, z)$ và $\max\limits_D f(x, y, z)$

***Bài 3.*** Chứng minh rằng nếu $x, y, z$ là các số thực đôi một khác nhau thì

$$\frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}} + \frac{|y-z|}{\sqrt{1+y^2}.\sqrt{1+z^2}} > \frac{|x-z|}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+z^2}}$$

***Bài 4.*** Cho $x, y, z \in \mathbf{R}$ thỏa mãn ba điều kiện

$0 < z \le y \le x \le 3$ ; $\frac{3}{xy} + \frac{2}{y^2} \ge 1$ ;

$\frac{18}{x^2y} + \frac{4}{y^2z} + \frac{3}{z^2x} \ge 3$.

Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$F(x, y, z) = \frac{1}{2}xyz + \frac{80}{27}x^3 + \frac{18}{8}y^3.$$

## BÀI TOÁN VỀ ... *(Tiếp trang 4)*

Dễ thấy hàm số có ba điểm cực trị. Thực hiện phép chia đa thức $f(x)$ cho $f'(x)$ ta được $f(x) = f'(x).q(x) + r(x)$, trong đó $r(x) = -x^2 + 1$

Từ đó suy ra Parabol đi qua ba điểm cực trị là $y = -x^2 + 1$. Mời các bạn hãy sử dụng các tính chất của đồ thị hàm số (1) để giải các bài tập (BT) sau.

**BT1 :** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m^2x + m$

Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số thì đối xứng nhau qua đường thẳng $y = \frac{x}{2} - \frac{5}{2}$.

(Đề thi ĐHQG Hà Nội – 2001)

**BT2 :** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$

Xác định $m$ để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

(Đề số 4 – Bộ ĐTTS)

**BT3 :** Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$

Xác định $m$ để đường thẳng $y = x$ cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt $A, B, C$ với $AB = BC$.

(Đề số 142 – Bộ ĐTTS)

**LỊCH SỬ TOÁN HỌC**

# RAMANUJAN
## Một Thần Đồng Toán Học Ấn Độ

HOÀNG CHÚNG

Ra-ma-nu-gian (Ramanujan) sinh ngày 22-12-1887 tại một làng quê của Ấn Độ, cách thành phố Ma-đơ-rat (Madras) khoảng 400km. Sống trong cảnh thiếu thốn, bệnh tật, không được học hành đầy đủ, thiếu sách vở, nhưng Ramanujan đã có những cống hiến rất độc đáo, rất đỗi ngạc nhiên đối với toán học.

*Ramanujan*

Năm 15 tuổi, Ramanujan đã giải được phương trình bậc 3 và bậc 4 theo cách riêng của mình. Trong suốt thời gian học trung học, Ramanujan chỉ tự học, với một cuốn sách duy nhất của Ca (G.S.Carr) "Tóm tắt các kết quả sơ cấp về toán học thuần túy", thời gian này Ramanujan đã bắt đầu có những kết quả nghiên cứu sâu sắc về các chuỗi, về hằng số Ơ-le (Euler), về các số Bec-nu-li (Bernouilli), về hàm eliptic.

Năm 21 tuổi, Ramanujan ốm nặng và phải trải qua một cuộc phẫu thuật. Dù vậy, Ramanujan vẫn tiếp tục nghiên cứu toán, không có người hướng dẫn, không có thông tin gì về thành tựu mới của toán học. Sau một thông báo về kết quả nghiên cứu *các số Bernouilli*[1], Ramanujan đã nổi tiếng trong giới toán học Ấn Độ như một tài năng hiếm có.

Rất may mắn là Ramanujan đã liên hệ được với nhà toán học Anh nổi tiếng Hac-đi (G. H. Hardy) (1877 – 1947). Năm 1914, Ramanujan được học bổng sang học đại học Trinity ở Kem-brit-giơ (Cambridge) nước Anh.

Hardy cùng với Lít-tơn-uốt (Littlewood) đã quan tâm giúp Ramanujan học toán, và nhận thấy rằng "những hạn chế trong kiến thức về toán của anh ta cũng đáng ngạc nhiên như sự sâu sắc của chúng". Đối với Ramanujan, mỗi số nguyên dương là một "người bạn". Một lần đến thăm Ramanujan ở bệnh viện, Hardy nói đùa rằng đã đi xe taxi mang biển số là một "số vô

vị" 1729. Ramanujan nói ngay :"Ồ không, đó là một số lí thú, là số nhỏ nhất trong các số viết được dưới dạng tổng của hai lập phương, theo hai cách khác nhau : $1729 = 1^3+12^3 = 9^3+10^3$".

Năm 1916, Ramanujan lấy bằng cử nhân khoa học. Năm 1918, nhờ nhiều công trình xuất sắc Ramanujan được bầu vào Hội Khoa học Hoàng gia Anh, một tổ chức khoa học uy tín nhất của nước Anh. Năm 1919, Ramanujan trở về Ấn Độ trong niềm vinh quang tột đỉnh. Nhưng sức khỏe của Ramanujan ngày càng kém và ông qua đời ngày 26-4-1920.

Trong cuộc đời ngắn ngủi của mình, Ramanujan đã có ảnh hưởng không nhỏ đối với một số lĩnh vực của lí thuyết số, đến mức có nhà toán học đã coi Ramanujan là nhà số học lớn nhất của thế kỉ 20.

Ramanujan để lại 3000 công thức và định lí, trong đó nhiều kết quả không có chứng minh hoặc chỉ dẫn về chứng minh. Năm 1976, người ta tìm thấy thêm một cuốn sổ tay của Ramanujan, bị thất lạc trong thư viện của trường đại học Cambridge, với 600 công thức. Có nhà toán học đã so sánh cuốn sổ tay này với bản giao hưởng bị thất lạc và được tìm thấy của nhạc sĩ thiên tài Bet-tô-ven (Beethoven) ! Những công thức của Ramanujan "thường chứa đựng nhiều hơn gấp bội những gì mà thoạt đầu chúng ta tưởng" (Hardy). Đến nay, nhiều công thức và định lí của Ramanujan còn được các nhà toán học nghiên cứu, và một số kết quả vẫn còn làm nhiều người sửng sốt, chưa biết cách nào để suy ra chúng !

Sau đây là một vài công thức của Ramanujan

$$\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} \quad (1)$$

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}}=\sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}} \quad (2)$$

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{9}}=\sqrt[3]{\frac{3\sqrt[3]{9}-6}{2}} \quad (3)$$

Công thức (1) đơn giản nhất và có thể chứng minh không mấy khó khăn, đối với hai công thức (2) và (3) thì không phải vậy. Có nhà toán học cho rằng "các công thức đó hoàn toàn sơ cấp, nhưng rất sâu sắc, và chỉ có một nhà toán học hàng đầu mới dự đoán được sự tồn tại của chúng".

Ramanujan đã tìm ra một kết quả làm kinh ngạc nhiều người, là công thức tính giá trị của π sau đây:

$$\frac{1}{\pi}=\frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4.396^{4n}}$$

Số hạng đầu tiên của tổng này là $\frac{1}{\pi}\approx\frac{1103\sqrt{8}}{9801}$, từ đó có π chính xác đến 6 chữ số thập phân ; thêm số hạng thứ hai ta có

$$\frac{1}{\pi}\approx\frac{\sqrt{8}}{9801}\left(1103+\frac{(4!).27493}{396^4}\right)$$

và được giá trị của π chính xác đến 12 chữ số thập phân.

Ramanujan còn tìm ra 14 công thức khác nữa cho $\frac{1}{\pi}$ mà không hề có giải thích, chẳng hạn

$$\frac{1}{\pi}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(C_{2n}^{n}\right)^3\frac{42n+5}{2^{12n+4}} \text{ với } C_{2n}^{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Dựa vào một kết quả của Ramanujan liên quan đến tích phân eliptic, có thể xây dựng thuật toán đệ quy sau đây để tính giá trị gần đúng của π với độ chính xác rất cao.

Giả sử $\alpha_o = 6-4\sqrt{2}$ và $y_o = \sqrt{2}-1$,

$$y_{n+1}=\frac{1-\left(1-y_n^4\right)^{1/4}}{1+\left(1-y_n^4\right)^{1/4}}$$

Từ đó giá trị gần đúng của $\frac{1}{\pi}$ được xác định bởi

$$\alpha_{n+1}=\left(1+y_{n+1}\right)^4\alpha_n-2^{2n+3}y_{n+1}\left(1+y_{n+1}+y_{n+1}^2\right)$$

Chỉ với $\alpha_1$, ta đã có π chính xác đến 9 chữ số, với $\alpha_2$ có π chính xác đến 40 chữ số rồi. Tổng quát, $\alpha_n$ cho giá trị của π chính xác đến hơn $2.4^n$ chữ số.

Ramanujan có một đóng góp quan trọng trong việc tìm công thức cho $p(n)$, là số các cách viết một số nguyên dương dưới dạng tổng của các nguyên dương không tăng. Ví dụ số 4 có 5 cách viết như vậy : 4, 3+1, 2 + 2, 2 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1, nghĩa là $p(4) = 5$. Dễ thấy rằng $p(1) = 1$, $p(2)= 2$, $p(3) = 3$, $p(5) = 7$, $p(6) = 11$, ... và $p(n)$ tăng rất nhanh khi $n$ tăng. Chẳng hạn $p(200) = 3.972.999.029.388$ !

Năm 1918, Ramanujan cùng với Hardy đã lần đầu tiên tìm ra cách tính nhanh $p(n)$ với mọi $n$, đáng chú ý là công thức gần đúng $p(n)\approx\frac{e^{c\sqrt{n}}}{4n\sqrt{3}}$, trong đó $c=\pi\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}$

Công thức này cho $p(200)\approx 4.10^{12}$. Năm 1937, Rademacher đã bổ sung vào công trình của Ramanujan và Hardy, và lần đầu tiên tìm ra một công thức xác định $p(n)$.

Năm 1962, nhân kỉ niệm lần thứ 75 ngày sinh của Ramanujan, bưu điện Ấn Độ đã phát hành một con tem có hình ảnh của nhà toán học thiên tài này.

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

# THI GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH BỎ TÚI

TẠ DUY PHƯỢNG
(*Viện Toán học*)

Ngày 25.3.2001, Vụ Trung học Phổ thông đã tổ chức kì thi khu vực "Giải toán trên máy tính điện tử bỏ túi" lần thứ hai. 38 tỉnh, thành phố đã cử đội tuyển tham dự tại một trong 4 địa điểm : Phú Thọ, Hải Phòng, Đà Nẵng và Tây Ninh. Mỗi đội đầy đủ gồm 5 học sinh THPT và 5 học sinh THCS. Các tỉnh có nhiều thí sinh đoạt giải là Bắc Ninh (10/10) ; Phú Thọ, Hải Phòng, Nam Định, Vĩnh Phúc, Tp. HCM (9/10). Với sự tài trợ của Công ty xuất nhập khẩu Bình Tây, tất cả thí sinh đều được quà lưu niệm, 50% số thí sinh mỗi cấp của từng khu vực được trao giải (nhất : 800000 đồng, nhì : 500000 đồng , ba : 200000 đồng, khuyến khích 150000 đồng).

Bài viết này giới thiệu một số bài trong hai đề dự bị của Phổ thông Trung học cơ sở để bạn đọc tham khảo.

***Bài 1.*** Cho $u_1 = 1$; $u_2 = 2$ và $u_{n+1} = 3u_n + u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$. Lập quy trình tính $u_n$ trên máy **Casio fx-220** và tính $u_{18}; u_{19}; u_{20}$.

***Giải***: Khai báo: 2 [Min] [×] 3 [+] 1 [=]

Và lặp lại:

[SHIFT] [X ↔ M] [+] [MR] [×] 3 [=]

Kết quả: $u_{18}$ =1396700389;

$u_{19} = 4612988018$; $u_{20} = 1523566443$.

**Lời bình**: Dãy $u_1 = a$; $u_2 = b$ và $u_{n+1} = \alpha u_n + \beta u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$ là suy rộng của dãy Phi-bô-na-xi (Fibonacci) : $u_1 = 1$; $u_2 = 1$; $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ (xem quy trình tính $u_n$ trên TH &TT số 6/1993 và 4/1994) và dãy Luy-ca (Lucas) : $u_1 = a$; $u_2 = b$ ; $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ (Thi khu vực năm 2001).

***Bài 2.*** Cho $u_1 = 1$; $u_2 = 1$ và $u_{n+1} = u_n^2 + u_{n-1}^2$ với mọi $n \geq 2$. Lập quy trình tính $u_n$ và quy trình tính phần dư của $u_n$ khi chia cho 7. Hỏi $u_{2002}$ có chia hết cho 7 không.

***Bài 3.*** Tìm hai chữ số cuối cùng của số: $2^{1999} + 2^{2000} + 2^{2001}$.

***Giải***: Ta có:

$2^{1999} + 2^{2000} + 2^{2001} =$

$2^{1999}(1 + 2 + 2^2) = 7 \times 2^9 \times 2^{10} \times 2^{1980}$

$= 7 \times 2^9 \times 2^{10} \times (2^{20})^{99}$

Vì (***dùng máy***):

$2^9 = 512$; $2^{10} = 1024$; $2^{20} = (2^{10})^2$

$= 7 \times 2^9 \times 2^{10} \times (2^{20})^{99}$ và số có hai chữ số tận cùng là 76 luỹ thừa bậc bất kỳ vẫn có hai chữ số tận cùng là 76 (***dùng máy kiểm tra***) nên $(2^{20})^{99}$ cũng có hai chữ số tận cùng là 76.

Do đó:

$2^{1999} + 2^{2000} + 2^{2001} = 7 \times 2^9 \times 2^{10} \times (2^{20})^{99} =$

$7 \times 512 \times 1024 \times (...76) = ...16$.

Vậy hai chữ số cuối cùng của số: $2^{1999} + 2^{2000} + 2^{2001}$ là 16.

***Bài 4.*** **a**) Tìm số tự nhiên nhỏ nhất mà bình phương của nó là một số bắt đầu bằng chữ số 19 và kết thúc bằng chữ số 89.

**b**) Tìm tất cả các số tự nhiên $n$ sao cho $n^2$ là một số gồm 12 chữ số có dạng: $n^2 = 2525******89$ (trong đó sáu dấu * biểu thị sáu chữ số, có thể khác nhau).

***Giải***: **a**) Để $a^2$ là một số bắt đầu bằng chữ số 19 thì nó phải có dạng:

$19 \times 10^n \leq a^2 < 20 \times 10^n$

hay $19 \leq a^2 \times 10^{-n} < 20$.

Nếu $n = 2k$ thì (***dùng máy***): $4.3588989 \approx \sqrt{19} \leq a \times 10^{-k}$

$= 7 \times 2^9 \times 2^{10} \times (2^{20})^{99}$.

Nếu $n = 2k + 1$ thì (***dùng máy***): $13.78404875 \approx \sqrt{190} \leq a \times 10^{-k}$

$< \sqrt{200} \approx 14.14213562$.

Cho $k = 0; 1; 2$ ta được: $a = 14$; 44 ; 138 ; 139 ; 140 ; 141 ; 436 ; ... ; 447 ; 1379 ; 1380 ; ... ; 1414.

Vì $a^2$ có tận cùng là 9 nên $a$ chỉ có thể có tận cùng là 3 hoặc 7. ***Thử trên máy*** các số:

13; 23; ...; 83; 93; 17; 27; ...; 87; 97 ta tìm được: để $a^2$ có tận cùng là 89 thì $a$ phải có hai số tận cùng là một trong các số sau: 17; 33; 67; 83.

Vậy trong các số $a$ có tận cùng là 17; 33; 67; 83 và $a^2$ là một số bắt đầu bằng chữ số 19 thì số bé nhất phải tìm là: 1383. Thử lại (*dùng máy*): $1383^2 = 1912689$.

**b)** Ta có: $2525 \times 10^8 \le x^2 < 2526 \times 10^8$. Nghĩa là : $50.24937811 \times 10^4 \approx \sqrt{2525} \times 10^4 \le x < \sqrt{2526} \times 10^4 \approx 50.25932749 \times$

Vậy $502493 < x < 502593$. Theo câu **a)** thì số cần tìm có tận cùng là: 17; 33; 67; 83. Suy ra các số cần tìm là: 502517; 502533; 502567; 502583.

***Bài 5.*** Tìm số tự nhiên $n$ $(1000 \le n \le 2000)$ để $a_n = \sqrt{57121 + 35n}$ cũng là số tự nhiên.

***Giải***: Vì $1000 \le n \le 2000$ nên (***dùng máy***): $303{,}51441 \approx \sqrt{57121 + 35 \times 1000} \le a_n = \sqrt{57121 + 35n} \le \sqrt{57121 + 35 \times 2000} \approx 356{,}54032$.

Suy ra: $304 \le a_n \le 356$.

Vì $a_n^2 = 57121 + 35n$ nên $a_n^2 - 1 = 35(1632 + n)$ phải chia hết cho $35 = 5 \times 7$. Chứng tỏ hoặc $a_n + 1$ hoặc $a_n - 1$ phải chia hết cho 7, hay $a_n = 7k - 1$ hoặc $a_n = 7k + 1$.

Nếu $a_n = 7k + 1$ thì $304 \le a_n = 7k + 1 \le 356$ hay $44 \le k \le 50$.

Vì $a_n^2 - 1$ chia hết cho 5 nên $k = 44$ ; 45 ; 49 50. Từ đó ta được 4 số: $k = 44$, $a_n = 309$, $n = 1096$ ; $k = 45$, $a_n = 316$, $n = 1221$ ; $k = 49$, $a_n = 344$ ; $n = 1749$ ; $k = 50$ ; $a_n = 351$, $n = 1888$.

Tương tự, nếu $a_n = 7k - 1$ thì ta được thêm 4 số: $k = 45$, $a_n = 314$, $n = 1185$ ; $k = 46$, $a_n = 321$ ; $n = 1312$ ; $k = 50$, $a_n$ 349 ; $n = 1848$ ; $k = 51$ ; $a_n = 356$ ; $n = 1889$.

***Bài 6.*** Tìm số tự nhiên $n$ nhỏ nhất sao cho $n^3$ là một số có ba chữ số đầu và bốn chữ số cuối đều bằng 1.

***Giải***: Để $n^3$ có tận cùng là 11 thì $n$ có đuôi là 1. ***Thử trên máy*** các số 11, 21, 31, 41, 51, 61,71, 81, 91 được duy nhất 71 khi luỹ thừa bậc ba được số có tận cùng là 11. Tương tự, (***thử trên máy***) để $n^3$ có tận cùng là 111 thì $n$ phải có tận cùng là: 471 và để $n^3$ có tận cùng là 1111 thì $n$ phải có tận cùng là: 8471.

Giả sử $m$ là số chữ số đứng giữa các số 111 và 1111. Nếu $m = 3k, k \ge 0$ thì $111 \times 10^{3k+4} < n^3 = 111...1111 < 112 \times 10^{3k+4}$. Suy ra (***tính trên máy***):

$$10{,}35398805 \times 10^{k+1} \approx \sqrt[3]{1110} \times 10^{k+1} < n^3 = 111...1111 < 112 \times 10^{3k+4}.$$

Do đó $k \ge 1$. Cho $k = 1$ ta được: $n$ bắt đầu bằng số 103, nghĩa là $n = 103...8471$. Số nhỏ nhất trong các số đó là: $n =$ 1038471.

Khi $m = 3k + 1$ và $m = 3k + 2, k \ge 0$ ta được các số dạng này đều vượt quá số 1038471.

Vậy số nhỏ nhất trong các số đó là: $n =$ 1038471; $n^3 = 1\,119\,909\,991\,289\,361\,111$.

**Chú ý**: ***Không thể dùng máy tính trực tiếp*** số $n = 1038471^3 = 1.119909991^{(18)}$ vì ***tràn màn hình***. Ta phải ***kết hợp giữa tính trên máy và trên giấy*** như sau:

$1038471^3 = (1038 \times 10^3 + 471)^3 = 1038^3 \times 10^9 + 3 \times 1038^2 \times 10^6 \times 471 + 3 \times 1038 \times 10^3 \times 471^2 + 471^3 =$

(tính trên máy) =

= 1118386872000000000 +

+ 152242837200000 + 690812874000 +

+ 104487111

= (tính trên giấy) 1119909991289361111.

*(Kì sau đăng tiếp)*

**Đón đọc THTT SỐ 300 (6/2002)**

- Đề thi vào lớp 10 chuyên trường THPT năng khiếu ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh năm 2001.
- Một số hệ thức liên hệ giữa đường thẳng và đường tròn
- Ứng dụng tính đối xứng của hàm bậc 4 vào giải toán.
- Ý kiến bạn đọc về sự tiếp xúc của hai đồ thị hàm số.
- Thi giải toán bằng máy tính bỏ túi (đăng tiếp)
- Các bài đố vui trong Câu lạc bộ, Giải trí, Toán học muôn màu...

Các bạn nhớ đặt mua THTT quý III nhé !

**THTT**

# ĐỀ RA KÌ NÀY

## CÁC LỚP THCS

**Bài T1/299.** Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^{2002} + y^{2002} = 2003^{2001}(x^3 + y^3)$

LÊ KHẮC HÒA
*(SV 42C4 ĐH Thủy Lợi Hà Nội)*

**Bài T2/299.** Cho hai số dương $m$, $n$ với $m < n$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \le \frac{3}{2} + \frac{(n-m)^2}{2m(n+m)}$$

trong đó các số $a, b, c$ thỏa mãn $m \le a, b, c \le n$.

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

PHẠM HUY HOÀNG
*(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)*

**Bài T3/299.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 12x^2 - 48x + 64 = y^3 \\ 12y^2 - 48y + 64 = z^3 \\ 12z^3 - 48z + 64 = x^3 \end{cases}$$

PHAN HOÀNG NINH
*(SV Toán B – K33, ĐHSP Thái Nguyên)*

**Bài T4/299.** Cho tam giác cân $ABC$ ($AB = AC$). Lấy điểm $P$ nào đó trên đường thẳng $BC$ ($P$ khác $B$, $C$). Gọi $M$, $N$ lần lượt là điểm đối xứng của $P$ qua $AB$, $AC$. Dựng hình bình hành $MPNQ$. Chứng minh rằng điểm $Q$ luôn nằm trên một đường thẳng khi $P$ di chuyển trên đường thẳng $BC$.

TRẦN HÀ
*(GV THCS chuyên Vĩnh Bảo, Hải Phòng)*

**Bài T5/299.** Cho đường tròn tâm $O$ đường kính $MN$ cố định và một điểm $A$ nằm trong đoạn $MN$. Gọi $\delta$ là tiếp tuyến của đường tròn với tiếp điểm $N$. Đường tròn tâm $T$ nào đó thuộc $\delta$, đi qua $A$, cắt đường tròn tâm $O$ tại $E$ và $F$, cắt $\delta$ tại $B$ và $C$. Chứng minh rằng khi điểm $T$ di chuyển trên $\delta$ thì :

1) Đường thẳng $EF$ luôn đi qua một điểm cố định

2) Đường thẳng $PQ$ luôn đi qua một điểm cố định, trong đó $P$, $Q$ là các giao điểm của $MB$, $MC$ với đường tròn tâm $O$.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
*(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)*

## CÁC LỚP THPT

**Bài T6/299.** Biết rằng 10 số nguyên tố sau đây lập thành cấp số cộng với công sai $d = 210$ : 199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089.

Chứng minh rằng không tồn tại cấp số cộng gồm 11 số nguyên tố với công sai $d$ thỏa mãn $1 < d < 2310$.

ĐẶNG HÙNG THẮNG
*(ĐH KHTN – ĐHQG Hà Nội)*

**Bài T7/299.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^{19} + y^5 = 1890z + z^{2001} \\ y^{19} + z^5 = 1890x + x^{2001} \\ z^{19} + x^5 = 1890y + y^{2001} \end{cases}$$

TRIỆU VĂN HƯNG
*(GV THPT Văn Giang, Hưng Yên)*

**Bài T8/299.** Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \le \frac{1}{1 + n(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}$$

trong đó $n \ge 2$ và $0 < x_1, x_2, \ldots, x_n \le 1$. Đẳng thức xảy ra khi nào ?

NGÔ VĂN THÁI
*(GV THPT BC Quỳnh Phụ, Thái Bình)*

**Bài T9/299.** Chứng minh rằng trong tam giác $ABC$ luôn có :

$$\sin A + \sin B + \sin C \ge \sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C + \sin A \sin B \sin C$$

VŨ TIẾN VIỆT
*(ĐH An Ninh, Hà Nội)*

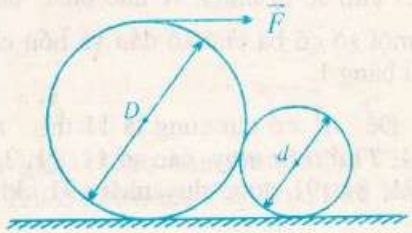
**Bài T10/299.** Gọi $O$ và $I$ lần lượt là tâm các mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp tứ diện $ABCD$. Năm mặt cầu tâm $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, $Q_4$, $Q_5$ bán kính bằng nhau, sắp xếp bên trong tứ diện $ABCD$ sao cho các mặt cầu tâm $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, $Q_4$ theo thứ tự tiếp xúc với các mặt của góc tam diện của tứ diện có đỉnh $A$, $B$, $C$, $D$, còn mặt cầu tâm $Q_5$ tiếp xúc với cả 4 mặt cầu tâm $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, $Q_4$.

Chứng minh rằng các điểm $O$, $I$, $Q_5$ thẳng hàng.

ĐÀO TAM
*(Khoa Toán, ĐH Vinh, Nghệ An)*

## CÁC ĐỀ VẬT LÍ

**Bài L1/299.** Hai vật hình trụ cấu tạo đồng chất, cùng chiều cao có đường kính tiết diện là $D$, $d$, được đặt nằm, tiếp xúc nhau trên mặt phẳng ngang. Hệ số ma sát ở mọi mặt tiếp xúc



là $k$. Quấn một sợi dây mảnh không dãn quanh trụ lớn và tác dụng vào đầu dây một lực $\vec{F}$ hướng nằm ngang (hình vẽ). Hệ số ma sát $k$ phải có giá trị như thế nào để có thể di chuyển trụ lớn vượt qua trụ nhỏ ? Tính giá trị cần thiết của lực $\vec{F}$ để thực hiện được di chuyển trên. Biết $D = 2d$, khối lượng trụ lớn $M = 10$kg. Lấy $g = 10$m/s$^2$.

NGUYỄN XUÂN QUANG
*(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)*

**Bài L2/299.** Trong thí nghiệm Iâng, khoảng cách hai khe là $a = 1$mm. Màn quan sát $E$ song song, cách mặt phẳng chứa hai khe là $D = 2$m. Điểm $A$ nằm trên đường trung trực của $S_1S_2$, cách trung điểm $I$ của $S_1S_2$ là $d = 40$cm. Nguồn $S$ phát ra ánh sáng đơn sắc, chuyển động tròn đều xung quanh $A$ với bán kính quỹ đạo $r = 2$mm (coi $r \ll d$) và vận tốc $v = 3{,}14$mm/s trong mặt phẳng chứa $AI$ và vuông góc với mặt phẳng chứa hai khe ; ban đầu $S$ ở trên $IA$.

a) Hỏi vân sáng trung tâm dịch chuyển như thế nào ?

b) Ngay sau $S_1$, $S_2$ đặt hai bản mặt song song có bề dày và chiết suất tương ứng $l_1 = 10\mu$m, $n_1 = 1{,}7$ và $l_2 = 5\mu$m, $n_2 = 1{,}6$. Hỏi vân trung tâm dịch chuyển như thế nào ?

TRẦN MẠNH HÙNG
*(GV Khối chuyên Toán - Tin, ĐHSP Vinh)*

# PROBLEMS IN THIS ISSUE

## FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

**T1/299.** Find all integer - solutions of the equation : $x^{2002} + y^{2002} = 2003^{2001}(x^3 + y^3)$

**T2/299.** Let $m$, $n$ be two positive numbers, $m < n$. Prove that :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \le \frac{3}{2} + \frac{(n-m)^2}{2m(n+m)}$$

where the numbers $a$, $b$, $c$ satisfy the conditions $m \le a, b, c \le n$.

When does equality occur ?

**T3/299.** Solve the system of equations

$$\begin{cases} 12x^2 - 48x + 64 = y^3 \\ 12y^2 - 48y + 64 = z^3 \\ 12z^3 - 48z + 64 = x^3 \end{cases}$$

**T4/299.** Let $ABC$ be an isoscels triangle ($AB = AC$). $P$ is a point on the line $BC$ ($P$ distinct from $B$, $C$). Let $M$, $N$ be the mirror - images of $P$ respectively through $AB$, $AC$. Construct the parallelogram $MPNQ$. Prove that $Q$ lies on a fixed line when $P$ moves on the line $BC$.

**T5/299.** Let be given a circle $(O)$ with center $O$, its fixed diameter $MN$ and a point $A$ on the segment $MN$. Let $\delta$ be the tangent of $(O)$ at $N$. A circle with center $T$ on the line $\delta$, passes through $A$ and cuts $(O)$ at $E$ and $F$ and cuts $\delta$ at $B$ and $C$. Prove that when $T$ moves on $\delta$, then :

i) the line EF passes through a fixed point,

ii) the line $PQ$ passes through a fixed point, where $P$, $Q$ are the points of intersection of $MB$, $MC$ with $(O)$.

## FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

**T6/299.** It is easily seen that the following ten prime numbers form an arithmetic progression with common difference $d = 210$ : 199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089.

Prove that there does not exist an arithmetic progression consisting of 11 prime numbers with common difference $d$ satisfying $1<d<2310$.

**T7/299.** Solve the system of equations :

$$\begin{cases} x^{19} + y^5 = 1890z + z^{2001} \\ y^{19} + z^5 = 1890x + x^{2001} \\ z^{19} + x^5 = 1890y + y^{2001} \end{cases}$$

**T8/299.** Prove the inequality

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \le \frac{1}{1 + n(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}$$

where $n \ge 2$ and $0 < x_1, x_2, \ldots, x_n \le 1$.

When does equality occur ?

**T9/299.** Prove that for all triangles $ABC$ :

$\sin A + \sin B + \sin C \ge \sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C + \sin A \sin B \sin C$

**T10/299.** Let $O$ and $I$ be respectively the centers of the circumscribed and the inscribed spheres of a tetrahedron $A_1A_2A_3A_4$. Five spheres with centers $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, $Q_4$, $Q_5$, with equal radii are arranged inside the tetrahedron tetrahedron $A_1A_2A_3A_4$ so that the sphere with center $A_i$ (for every $i = 1, 2, 3, 4$) touches the three faces passing through $A_i$ of the tetrahedron and the sphere with center $Q_5$ touches all four spheres with centers $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, $Q_4$. Prove that the points $O$, $I$, $Q_5$ are collinear.

**Bài T1/293.** *Tìm bảy số nguyên tố sao cho tích của chúng bằng tổng các lũy thừa bậc sáu của bảy số đó.*

**Lời giải.** Gọi bảy số nguyên tố là $p_1, p_2, ..., p_7$ ta có

$$p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_7 =$$
$$= p_1^6 + p_2^6 + p_3^6 + p_4^6 + p_5^6 + p_6^6 + p_7^6 \quad (*)$$

Ta cần dùng *định lí Phec–ma* nhỏ :

Nếu số nguyên $a$ không chia hết cho 7 thì $a^6 \equiv 1 \pmod 7$.

(Có thể chứng minh trực tiếp điều này thông qua việc biến đổi $a^3 = (7k + r)^3 = 7t \pm 1$ với mọi $r$ thỏa mãn $0 \le r \le 6$, còn $t$ là số nguyên)

Giả sử trong bảy số nguyên tố trên có $k$ số khác 7 với $0 \le k \le 7$.

• Nếu $k = 0$, nghĩa là cả bảy số trên đều bằng 7 thì ta có

$$7.7.7.7.7.7.7 = 7^6+7^6+7^6+7^6+7^6+7^6+7^6$$

thỏa mãn (*)

• Nếu $k = 7$, nghĩa là cả bảy số trên đều là số nguyên tố khác 7 thì vế trái của (*) không chia hết cho 7, còn vế phải của (*) chia hết cho 7 theo định lí Phec–ma, điều này không xảy ra.

• Nếu $1 \le k \le 6$ nghĩa là có $7 - k \ge 1$ số 7 nên vế trái của (*) chia hết cho 7 còn vế phải của (*) chia cho 7 dư $k \ge 1$ theo định lí Phec–ma, điều này không xảy ra.

Vậy chỉ xảy ra bảy số nguyên tố trong đề bài đều là 7.

**Nhận xét.** Trừ một số ít bạn lập luận dài hoặc chưa chuẩn xác, hầu hết các bạn đều làm đúng. Một số bạn đã nêu bài toán tổng quát : Tìm $p$ số nguyên tố sao cho tích của chúng bằng tổng các lũy thừa bậc $p-1$ của $p$ số đó với $p \ge 3$. Các bạn sau có lời giải đúng, trình bày tốt :

**Phú Thọ :** *Nguyễn Xuân Trường, Nguyễn Trung Kiên A*, 8A, THCS Giấy, Phong Châu, Phù Ninh, *Ninh Văn Sơn*, 8A1, THCS Lâm Thao ; **Vĩnh Phúc :** *Bùi Thị ThuHiền, Nguyễn Thị Thúy Hồng*, 9B, THCS Yên Lạc ; **Hòa Bình:** *Ngô Nhất Sơn*, 9A, THCS B Yên Thủy ; **Hà Nội:** *Phạm Hoàng Lê*, 9B, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa, *Vũ Nhật Minh*, 8H , THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy ; **Hưng Yên:** *Doãn Thị Kim Huế*, 8C, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi ; **Hải Phòng :** *Nguyễn Vũ Lân, Vũ Ngọc Linh, Đinh Khang*, 8A, *Trần Hương Giang*, 8B, *Trần Xuân Dũng*, 9A, THPT NK Trần Phú ; **Nam Định :** *Nguyễn Văn Đĩnh*, 9E, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy, *Phạm Duy Hiển, Nguyễn Đức Tâm, Vũ Khắc Kỷ* , 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, Tp. Nam Định ; **Thanh Hóa :** *Lê Thị Thu*, 8A, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, *Trần Mạnh Tuấn*, 9C, THCS Triệu Thị Trinh, Triệu Sơn ; **Nghệ An :** *Quế Anh Lê*, 9B, THCS Đặng Thai Mai, Vinh ; **Bình Định:** *Nguyễn Phúc Thọ*, 9D, THCS Ngô Mây, Phù Cát ; **Khánh Hòa :** *Trần Kiến Thức*, 8/14 THCS Thái Nguyên Nha Trang ; **Tp. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Kiều Long*, 8A, THCS Hồng Bàng, Q.5 ; **Cần Thơ:** *Nguyễn Minh Luân* , 8A, THCS Nguyễn Việt Hồng, Tp. Cần Thơ.

VIỆT HẢI

**Bài T2/295.** *Giải phương trình*

$$x^2 - x - 1000\sqrt{1 + 8000x} = 1000 \quad (1)$$

**Lời giải.** (Của *Phan Tuấn Anh*, 8A, THCS Đức Giang, Yên Dũng, **Bắc Giang**).

Đặt $\sqrt{1 + 8000x} + 1 = 2y$. Kết hợp với (1) ta được hệ :

$$\begin{cases} x^2 - x = 2000y \\ y^2 - y = 2000x \end{cases} \quad (2)$$

Từ hệ (2) suy ra :

$$(x - y)(x + y - 1 + 2000) = 0 \quad (3)$$

Từ hệ (2) cũng dễ thấy :

$$2001(x + y) = x^2 + y^2 > 0$$

Từ đó suy ra $x + y + 1999 > 0$

Vậy từ (3) ta có $y = x$ thay vào (1) được $x^2 - x = 2000x$

Từ đó ta có 2 nghiệm $x_1 = 0$ và $x_2 = 2001$

Nhưng $x_1 = 0$ không phải là nghiệm của (1). Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 2001$.

**Nhận xét.** Rất nhiều bạn giải được bài này nhưng lời giải không được ngắn gọn.

TỐ NGUYÊN

**Bài T3/295.** *Gọi A và B lần lượt là số nhỏ nhất và số lớn nhất trong n số dương $x_1, x_2, ..., x_n$ $(n \ge 2)$. Chứng minh rằng :*

$$A < \frac{(x_1 + x_2 + ... + x_n)^2}{x_1 + 2x_2 + ... + nx_n} < 2B$$

**Lời giải.** (Theo bạn *Huỳnh Thị Thùy Lam*, 8C1, THCS Phú Lâm, Tuy Hòa, **Phú Yên**).

Đặt $C = x_1(x_1 + ... + x_n) + x_2(x_2 + ... + x_n) +$
$+ x_{n-1}(x_{n-1} + x_n) + x_n^2$
$= (x_1^2 + ... + x_n^2) + (x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_1x_n$
$+ x_2x_3 + ... + x_2x_n + ... + x_{n-1}x_n)$ thì
$C < (x_1^2 + ... + x_n^2) + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_1x_n +$
$+ x_2x_3 + ... + x_2x_n + ... + x_{n-1}x_n) =$
$= (x_1 + x_2 + ... + x_n)^2 < 2C$ (1)

Vì $A$ là số nhỏ nhất trong các số $x_1, ..., x_n$ nên
$A(x_1 + 2x_2 + ... + nx_n)$
$= A(x_1 + x_2 + ... + x_n) + A(x_2 + ... + x_n) + ...$
$+ A(x_{n-1} + x_n) + Ax_n \le$
$\le x_1(x_1 + x_2 + ... + x_n) + x_2(x_2 + ... + x_n) + ...$
$+ x_{n-1}(x_{n-1} + x_n) + x_n^2 = C$ (2)

Vì $B$ là số lớn nhất trong các số $x_1, ..., x_n$ nên
$B(x_1 + 2x_2 + ... + nx_n) =$
$= B(x_1 + ... + x_n) + B(x_2 + ... + x_n) + ... +$
$+ B(x_{n-1} + x_n) + Bx_n$
$\ge x_1(x_1 + ... + x_n) + x_2(x_2 + ... + x_n) + ... +$
$+ x_{n-1}(x_{n-1} + x_n) + x_n^2 = C$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có :

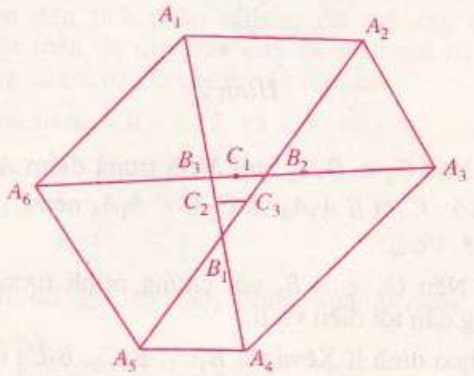
$$A < \frac{(x_1 + x_2 + ... + x_n)^2}{x_1 + 2x_2 + ... + nx_n} < 2B \text{ (đpcm)}$$

**Nhận xét.** Một số bạn sử dụng phương pháp quy nạp toán học cho bài này nên lời giải còn dài. Tất cả các bài gửi về TS đều đúng và trình bày tương tự như cách giải trên. Các bạn sau có lời giải ngắn gọn hơn cả : *Ngô Vĩnh Thái, Nguyễn Xuân Trường*, 8A, THCS Giấy, Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ** ; *Vũ Ngọc Linh*, 8A, *Đặng Ngọc Chiến, Phạm Huy Hoàng*, 8B, *Trần Xuân Dũng, Phạm Anh Minh*, 9A, THPT NK Trần Phú, **Hải Phòng** ; *Đỗ Việt Cường*, 9A, THCS Nam Cao, Lý Nhân, **Hà Nam** ; *Phạm Duy Hiển, Nguyễn Đức Tâm*, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, **Nam Định** ; *Trần Mạnh Tuấn*, 9C, THCS Triệu Thị Trinh, Triệu Sơn, **Thanh Hóa** ; *Hoàng Thị Minh Huệ*, 7C, THCS Tam Dương, **Vĩnh Phúc.**

HỒ QUANG VINH

**Bài T4/295.** *Cho lục giác lồi $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ có các cạnh đối diện song song với nhau. Gọi $B_1, B_2, B_3$ lần lượt là giao điểm của từng cặp đường chéo $A_1A_4$ và $A_2A_5$, $A_2A_5$ và $A_3A_6$, $A_3A_6$ và $A_1A_4$. Gọi $C_1, C_2, C_3$ lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng $A_3A_6$, $A_1A_4$, $A_2A_5$. Chứng minh rằng các đường thẳng $B_1C_1$, $B_2C_2$, $B_3C_3$ đồng quy.*

**Lời giải.** Do $C_2, C_3$ lần lượt là trung điểm của $A_1A_2$, $A_2A_5$ và vì $A_1A_2 // A_5A_4$ nên $C_2C_3 // A_1A_2$. (h. 1) Suy ra $\frac{B_1C_2}{B_1A_1} = \frac{B_1C_3}{B_1A_2}$ (1)




*Hình 1*

Từ $A_1A_2 // A_4A_5$ suy ra $\frac{A_1B_1}{A_1A_4} = \frac{B_1A_2}{A_2A_5}$ (2)

Nhân theo vế của (1) và (2) ta được :

$$\frac{B_1C_3}{A_2A_5} = \frac{B_1C_2}{A_1A_4} \text{ hay } \frac{B_1C_3}{B_1C_2} = \frac{A_2A_5}{A_1A_4} \quad (3)$$

Tương tự như trên ta có

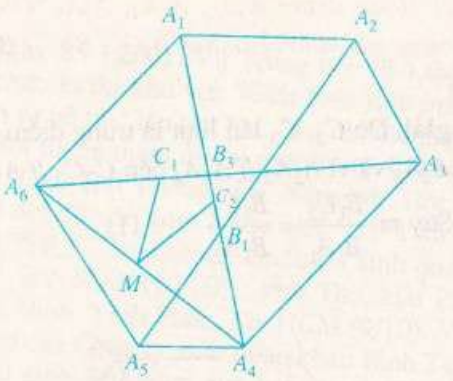
$$\frac{C_2B_3}{B_3C_1} = \frac{A_1A_4}{A_3A_6} \quad (4)$$

$$\frac{C_1B_2}{B_2C_3} = \frac{A_3A_6}{A_2A_5} \quad (5)$$

Từ (3), (4), (5) ta suy ra

$$\frac{B_1C_3}{B_1C_2} \times \frac{C_2B_3}{B_3C_1} \times \frac{C_1B_2}{B_2C_3} = 1$$

Ta có thể chứng tỏ $C_1, C_2, C_3$ nằm trong các đoạn thẳng $B_3B_2$, $B_1B_3$, $B_1B_2$ tương ứng. Thật vậy, giả sử trái lại, nếu có ít nhất 1 điểm nằm ngoài, chẳng hạn $C_1$ nằm ngoài đoạn $B_3B_2$ (và ở trong $A_6B_3$) (h. 2).




*Hình 2*

• Nếu $C_2 \in B_3A_4$, gọi $M$ là trung điểm $A_4A_6$. Ta có : $C_1M \parallel A_3A_4$ và $C_2M \parallel A_1A_6$ nên $C_1M \parallel C_2M$. Vô lí.

• Nếu $C_2 \in A_1B_3$ với chứng minh tương tự cũng dẫn tới điều vô lí.

Theo định lí Xêva thì $B_1C_1$, $B_2C_2$, $B_3C_3$ đồng quy. Nếu trong các điểm $B_1$, $B_2$, $B_3$ có điểm là trung điểm của $A_2A_5$, $A_3A_6$, $A_1A_4$ thì $B_1C_1$, $B_2C_2$, $B_3C_3$ hiển nhiên là đồng quy.

**Nhận xét.** Giải tốt bài này có các bạn

**Phú Thọ:** *Nguyễn Xuân Trường, Nguyễn Trung Kiên*, 8A, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh ; **Hải Phòng :** *Bùi Ngọc Khôi*, 8A, *Phạm Huy Hoàng*, 8B, *Bùi Tuấn Anh, Phạm Anh Minh, Phạm Duy Thành*, 9A, PTNK Trần Phú ; **Nam Định :** *Nguyễn Thế Tiên*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, *Phạm Văn Hải*, 9C, THCS Đào Sư Tích, Trực Ninh, *Hoàng Lê Sơn, Vũ Khắc Kỷ, Nguyễn Đức Tâm*, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh ; **Nghệ An :** *Nguyễn Công Thành*, 8A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Mĩ, Quỳnh Lưu ; **Phú Yên:** *Huỳnh Thị Thùy Lam*, 8C1, THCS Phú Lâm, Tuy Hòa ; **Khánh Hòa :** *Phạm Kiều Anh*, $8^{14}$, THCS Thái Nguyên, Nha Trang, **Tp. Hồ Chí Minh** : *Nguyễn Kiến Lạng*, 81, đường Hồng Bàng, Q.5, ...

VŨ KIM THỦY

**Bài T5/295.** *Cho tam giác ABC ($AB \le AC \le BC$). Tìm quỹ tích những điểm M nằm trong tam giác sao cho tổng khoảng cách từ điểm M đến ba cạnh của tam giác luôn bằng một hằng số.*

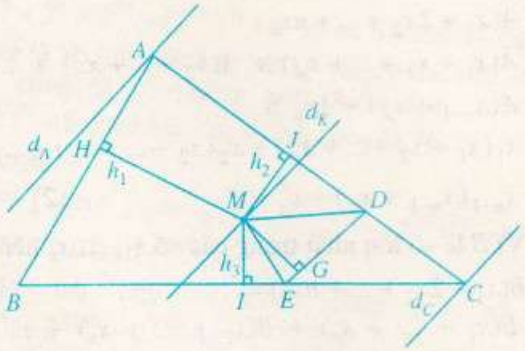
**Lời giải.** (Theo bạn *Trịnh Minh Tuệ*, 8B, THCS Tiến Thủy, Quỳnh Lưu, **Nghệ An**).

Gọi tổng các khoảng cách từ $M$ đến ba cạnh $\Delta ABC$ là $h_1 + h_2 + h_3 = k$ không đổi. Xét 2 trường hợp :

1) $\Delta ABC$ là đều, gọi $h$ là đường cao $\Delta ABC$. Ta có $k.AB = (h_1 + h_2 + h_3)AB =$
$= 2(S_{MAB} + S_{MAC} + S_{MBC}) = 2S_{ABC} = h.AB$ (1)

Từ đó : • nếu $k = h$ thì (1) luôn đúng với mọi điểm $M$ nằm trong (kể cả biên) $\Delta ABC$ nên quỹ tích các điểm $M$ là toàn bộ miền trong (kể cả biên) của $\Delta ABC$

• nếu $k \ne h$ thì quỹ tích trên là tập rỗng (không có điểm $M$ nào thỏa mãn).




2) $\Delta ABC$ không đều, giả sử $AB \le AC \le BC$ (hai đẳng thức không xảy ra đồng thời). Trên cạnh $AC$ lấy điểm $D$ và trên cạnh $BC$ lấy điểm $E$ sao cho $AD = BE = AB$ thì các điểm $D$, $E$ cố định. Ta có $k.AB = (h_1 + h_2 + h_3).AB = h_1.AB + h_2.AD + h_3.BE = 2(S_{MAB} + S_{MAD} + S_{MBE}) =$
$= 2(S_{ADEB} + tS_{MDE}) = 2S_{ADEB} + t.h_4.DE$ (2)

trong đó $h_4 = MG$ là khoảng cách từ $M$ đến $DE$, còn $t = 0$ khi $M$ thuộc đoạn $DE$, $t = 1$ khi $M$ nằm trong $\Delta CDE$, $t = -1$ khi $M$ nằm trong tứ giác $ADEB$ (nếu $D$ trùng với $C$ thì $ADEB$ trở thành $\Delta ABC$ và $h_4 = h_3$). Từ đó

$$MG = h_4 = \frac{t(k.AB - 2S_{ADEB})}{DE} \quad (3)$$

Vậy các điểm $M$ cần tìm nằm trên đường thẳng $d_k$ song song với $DE$ và cách đường thẳng $DE$ một đoạn $h_4$ được xác định bởi (3) (có $DE > 0$ vì $AB < BC$). Vì điểm $M$ nằm trong (kể cả biên) của $\Delta ABC$ nên các điểm $M$ cần tìm là phần của đường thẳng $d_k$ nằm trong $\Delta ABC$.

Chú ý rằng $AB \le AC \le BC \Leftrightarrow h_C \ge h_B \ge h_A$ (đường cao kẻ từ các đỉnh $C$, $B$, $A$). Khi $h_4$ bằng khoảng cách từ $C$ tới $DE$ thì từ (3) có

$k.AB = 2S_{ADEB} + 2S_{CDE} = 2S_{ABC} = h_C.AB \Leftrightarrow k = h_C$, lúc đó $d_k$ trùng với $d_C$ và $M$ trùng với điểm $C$.

Khi $h_4$ bằng khoảng cách từ $A$ tới $DE$ thì từ (3) có $k.AB = 2S_{ADEB} - 2S_{CDE} = 2S_{ABE} = h_A.AB$ $\Leftrightarrow k = h_A$, lúc đó $d_k$ trùng với $d_A$ và điểm $M$ trùng với điểm $A$. Bài toán có nghiệm khi $h_A \le k \le h_C$.

Đảo lại nếu có điểm $M$ nằm trong $\Delta ABC$ và thỏa mãn (3) thì biến đổi tương đương có (2), suy ra $h_1 + h_2 + h_3 = k$ không đổi. Vậy quỹ tích của $M$ là phần đường thẳng $d_k$ nằm trong $\Delta ABC$.

**Nhận xét.** Chỉ có các bạn sau đây gửi lời giải là bạn *Vũ Khắc Kỷ*, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, **Nam Định**, *Nguyễn Trường Thọ*, 9A, THCS Giấy, Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ**; *Phạm Anh Minh*, 9A, THPT NK Trần Phú, **Hải Phòng**.

VŨ ĐÌNH HÒA

**Bài T6/295.** *Cho ba số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

*1) $(a+b+c)^3(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a) \le 27a^2b^2c^2$*

*2) $(a^2+b^2+c^2)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a) \le$ $\le abc(ab+bc+ca)$*

*3) $(a+b+c)[2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)] \le 9abc$*

**Lời giải.** (Của bạn *Lê Phương*, Lớp 11, THPT Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**)

1) Nếu $(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a) \le 0$ thì BĐT đúng hiển nhiên. Nếu $(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a) > 0$ thì tồn tại tam giác $ABC$ với $BC = a$, $CA = b$ và $AB = c$.

Gọi $S$, $R$, $r$ lần lượt là diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của $\Delta ABC$. Khi đó (1) tương đương với $(a+b+c)^2 \le 27R^2$

Gọi $O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ta có

$$(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2) =$$

$$= 3\left[(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})^2 + (\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})^2\right]$$

$$= 3\left[9R^2 - (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})^2\right] \le 27R^2$$

2) Tương tự như trên ta chỉ cần xét trường hợp $a$, $b$, $c$ là độ dài ba cạnh tam giác $ABC$. Khi đó (2) tương đương với

$$a^2+b^2+c^2 \le R^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)$$

Theo chứng minh ở câu (1) ta có

$$a^2+b^2+c^2 \le 9R^2 \le R^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)$$

3) (của bạn *Hoàng Ngọc Minh*, 11A, THPT Hùng Vương, **Phú Thọ**)

Ta có 3) tương đương với

$$9(p-a)(p-b)(p-c) \le abc \Leftrightarrow \frac{8S^2}{p} \le 4RS$$

$$\Leftrightarrow 2r \le R \Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$$

Đây bất đẳng thức quen thuộc đã biết.

**Nhận xét.** Đây là một bài toán khá cơ bản và được rất nhiều bạn tham gia giải với nhiều cách khác nhau. Nhiều bạn có lời giải tốt trong đó có các bạn *Nguyễn Văn Vinh*, 10A1, THPT Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**, *Nguyễn Võ Vĩnh Lộc*, 11T, Tx. Sa Đéc, **Đồng Tháp**, *Nguyễn Huy Khiêm*, 10T1, THPT Lê Khiết, **Quảng Ngãi** ; *Lê Khắc Tấn*, 10A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc** ; *Phạm Bảo Trung*, ĐHKHTN – ĐHQG **Hà Nội**, *Nguyễn Văn Hoan*, 11A1, THPT Yên Phong, **Bắc Ninh** ; *Nguyễn Thị Quỳnh Trang*, 10A2, THPT Phan Bội Châu, **Nghệ An** ; *Bùi Lê Vũ*, 10 chuyên Toán, PT chuyên Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình** ; *Trịnh Xuân Hiệp*, THPT Lê Văn Hưu, Thiệu Hóa, **Thanh Hóa**.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

**Bài T7/295.** *Hỏi có tất cả bao nhiêu đa thức $P_n(x)$ bậc n chẵn thỏa mãn các điều kiện :*

*1) Các hệ số của $P_n(x)$ thuộc tập hợp $M = \{0, -1, 1\}$ và $P_n(0) \ne 0$*

*2) Tồn tại đa thức $Q(x)$ có các hệ số thuộc M sao cho $P_n(x) \equiv (x^2-1)Q(x)$*

**Lời giải.** Đặt $n = 2m$.

Đa thức $Q(x)$ có bậc $n-2$ :

$$Q(x) = b_o x^{n-2} + b_1 x^{n-3} + \ldots + b_{n-3}x + b_{n-2}$$

Do đó

$$P_n(x) = (x^2-1)Q(x) =$$

$$= b_o x^n + b_1 x^{n-1} + (b_2 - b_o)x^{n-2} + (b_3 - b_1)x^{n-3}$$

$$+ \ldots + (b_{n-2} - b_{n-4})x^2 - b_{n-3}.x - b_{n-2}$$

Như vậy số các đa thức $P_n(x)$ thỏa mãn đề bài bằng số các dãy số $(b_o, b_1, \ldots, b_{n-3}, b_{n-2})$ thỏa mãn điều kiện :

$b_i \in M$ với mọi $0 \le i \le n-2$ (*),

$b_{i+2} - b_i \in M$ với mọi $0 \le i \le n-4$ và

$b_{n-2} \ne 0$ ($b_{n-2} = -P_n(0)$)

Chú ý : $b_i = 1$ thì $b_{i+2} \in \{0, 1\}$, $b_i = -1$ thì $b_{i+2} \in \{-1, 0\}$, $b_i = 0$ thì $b_{i+2} \in \{-1, 0, 1\}$.

Ta kí hiệu : $x_k$ là số dãy $(b_o, b_2, ..., b_{2k})$ thỏa mãn $b_{2i} \in M$ với mọi $0 \le i \le k$, $b_o \ne 0$ và $b_{i+2} - b_i \in M$ $\forall i = 0, 2, ..., 2k-2$ ;

$y_{k-1}$ là số dãy $(b_1, b_3, ..., b_{2k-1})$ thỏa mãn $b_{2i-1} \in M$ với mọi $1 \le i \le k$, $b_{i+2} - b_i \in M$ $\forall i = 1, 3, ..., 2k-3$.

Ta có $x_o = 2$, $x_1 = 4$ và $x_{k+1} = 2x_k + x_{k-1}$ vì nếu $b_{2k} \ne 0$ thì $b_{2k+2} \in \{0, b_{2k}\}$, nếu $b_{2k} = 0$ thì có ba cách lấy $b_{2k+2} \in M$, số dãy $(b_o, b_2, ..., b_{2k})$ mà $b_{2k} = 0$ bằng $x_{k-1}$.

Chứng minh bằng quy nạp theo $k$ được :

$$x_k = \frac{(1+\sqrt{2})^{k+1} - (1-\sqrt{2})^{k+1}}{\sqrt{2}}$$

(dự đoán công thức trên bằng cách dùng phương trình đặc trưng)

Hoàn toàn tương tự có $y_o = 3$, $y_1 = 7$, $y_{k+1} = 2y_k + y_{k-1}$ $\forall k \ge 1$ và

$$y_{k-1} = \frac{(1+\sqrt{2})^{k+1} + (1-\sqrt{2})^{k+1}}{2}$$

Do đó số các dãy $(b_o, b_1, ..., b_{2m-3}, b_{2m-2})$ thỏa mãn (*) bằng

$$(x_{m-1} - x_{m-2}).y_{m-2} =$$

$$= \left((1+\sqrt{2})^{m-1} + (1-\sqrt{2})^{m-1}\right).\frac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^m + (1-\sqrt{2})^m\right)$$

$$= \frac{(1+\sqrt{2})^{2m-1} + (1+\sqrt{2})^{2m-1} + 2.(-1)^{m-1}}{2}$$

$$= \frac{(1+\sqrt{2})^{n-1} + (1-\sqrt{2})^{n-1}}{2} + (-1)^{(\frac{n}{2}-1)}$$

Đó chính là số các đa thức $P_n(x)$ cần tìm.

**Nhận xét.** Đây là bài toán tính toán hay, hơi phức tạp. Tòa soạn nhận được lời giải của 14 bạn, một số bạn đã cho đáp số sai. Các bạn sau có lời giải tốt : **Ninh Bình:** *Trần Minh Mẫn*, 11T, THPT Lương Văn Tụy ; **Quảng Trị:** *Đoàn Quang Trí*, 11T, *Trần Tiến Hoàng*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Văn Thắng*, 11T, THPT Lê Khiết ; **Tp. Hồ Chí Minh:** *Trần Võ Huy*, *Nguyễn Lâm Hưng*, 11T, PTNK-ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội ; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Võ Vĩnh Lộc*, 11T, THPT Tx. Sa Đéc.

NGUYỄN MINH ĐỨC

**Bài T8/295.** *Tìm tất cả các hàm số $f : D \to D$ trong đó $D = [1, +\infty)$ thỏa mãn điều kiện*

*$f(x.f(y)) = y.f(x)$ với mọi $x, y$ thuộc $D$ (1)*

**Lời giải.** Cho $y = f(1)$, từ (1) ta được

$$f(xf(f(1))) = f(1)f(x) \quad (2)$$

Cho $x=1$, $y=1$, từ (1) ta được $f(f(1)) = f(1)$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra : $f(xf(1)) = f(1)f(x)$ $\forall x$

cho $y = 1$ từ (1) có $f(xf(1)) = f(x)$ $\forall x \in D$.

Suy ra $f(1) = 1$

Từ (1), với $x = 1$ có $f(f(y)) = y$ $\forall y \in D$ (4)

Nhận xét rằng $f(y) = 1$ khi và chỉ khi $y = 1$. Thật vậy $f(1) = 1$, còn khi $f(y) = 1$ thì $f(f(y)) = f(1) = 1$. Do vậy và $D$ $[1 ; +\infty)$ nên $f(y) > 1$ khi $y > 0$ (5)

Từ (4), (1), (5) ta có

$$f(x) = f\left(\frac{x}{y}.y\right) = f\left(\frac{x}{y}f(f(y))\right) =$$

$$= f(y)f\left(\frac{x}{y}\right) > f(y) \text{ khi } x > y \ge 1.$$

Do vậy, $f(x)$ là hàm đồng biến trên $D$ với $f(1) = 1$. Giả sử $\exists x_o > 1$ sao cho $f(x_o) > x_o$. Khi đó $f(f(x_o)) > f(x_o)$ hay $f(f(x_o)) = x_o > f(x_o)$, mâu thuẫn.

Cũng như vậy, không tồn tại $x_o > 1$ để $f(x_o) < x_o$. Vậy $f(x) \equiv x$ $\forall x \in D$.

Thử lại, ta thấy $f(x) \equiv x$ thỏa mãn điều kiện bài ra.

**Nhận xét.** 1) Đây là bài toán đã có trong một số tài liệu (chẳng hạn trong cuốn "Tuyển tập 200 bài thi vô địch Toán"). Có gần 200 bài giải đúng. 2) Việc tìm hàm $f : D \to D$ thỏa mãn (1) có thể đưa về tìm hàm thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} f(xy) = f(x)f(y) & \forall x, y \in D \\ f(f(x)) = x & \forall x \in D \end{cases}$$

NGUYỄN VĂN MẬU

**Bài T9/295.** *Gọi $S$, $R$, $r$ lần lượt là diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác $ABC$. Đặt $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Chứng minh rằng*

$$\frac{2S}{R} \le (b+c-a)\sin\frac{A}{2} + (a-b+c)\sin\frac{B}{2} + (a+b-c)\sin\frac{C}{2} \le \frac{S}{r} \quad (1)$$

*Mỗi đẳng thức xảy ra khi nào ?*

**Lời giải.** (Của bạn *Đặng Thế Tùng*, 10T, PTNK Hàn Thuyên, **Bắc Ninh**)

Đặt $P = (b+c-a)\sin\frac{A}{2} + (a-b+c)\sin\frac{B}{2} + (a+b-c)\sin\frac{C}{2}$.

Ta thấy : $\frac{2S}{R} \le P$

$$\Leftrightarrow \frac{2pr}{R} \le 2r\cos\frac{A}{2} + 2r\cos\frac{B}{2} + 2r\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{2R} \le \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C \le \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}$$

Ta có : $\sin A + \sin B + \sin C =$

$$= \frac{\sin B + \sin C}{2} + \frac{\sin C + \sin A}{2} + \frac{\sin A + \sin B}{2}$$

$$\le \sin\frac{B+C}{2} + \sin\frac{C+A}{2} + \sin\frac{A+B}{2}$$

$$= \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}$$

Vậy BĐT bên trái (1) đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\Delta ABC$ đều.

Ta thấy : $P \le \frac{S}{r}$

$$\Leftrightarrow 2(p-a)\text{tg}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} + 2(p-b)\text{tg}\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} + 2(p-c)\text{tg}\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} \le p$$

$$\Leftrightarrow 2r\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right) \le a+b+c$$

$$\Leftrightarrow 8R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right) \le R(\sin A + \sin B + \sin C)$$

$$\Leftrightarrow 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right) \le 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right) \le \text{cotg}\frac{A}{2}\text{cotg}\frac{B}{2}\text{cotg}\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right) \le \text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}$$

Ta có : $2\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right) \le 2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \le \text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}$

Vậy BĐT bên phải (1) đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\Delta ABC$ đều.

**Nhận xét.** 1) Đây là bài toán dễ ; rất nhiều bạn tham gia giải và tất cả đều giải đúng. Có những bạn còn nhận xét rằng từ bài toán này ta lại nhận được kết quả quen thuộc $2r \le R$

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt.

**Hòa Bình:** *Hà Hữu Cao Trình*, THPT NK Hoàng Văn Thụ; **Phú Yên:** *Lâm Bảo Khả Minh*, 10T2, THPT Lương Văn Chánh, Tuy Hòa; **Quảng Ngãi:** *Đặng Quốc Việt*, 10T, THPT Lê Khiết ; **Bạc Liêu:** *Nguyễn Danh Dũng*, 11T, THPT chuyên Bạc Liêu ; **Nghệ An :** *Trần Đình Trung*, 11A Tin, khối PTC Toán – Tin, ĐH Vinh, *Lê Thùy Dương*, THPT Kim Liên, Nam Đàn ; **Đồng Nai:** *Phạm Minh Thành*, 11T, THPT Lương Thế Vinh ; **Phú Thọ :** *Nguyễn Thế Tùng*, 10A1, THPT chuyên Hùng Vương ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Nam Chấn*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

NGUYỄN MINH HÀ

**Bài T10/295.** *Cho tứ diện ABCD nội tiếp một mặt cầu tâm O bán kính R. Hãy xác định vị trí điểm M trên mặt cầu sao cho tổng các bình phương các khoảng cách từ M tới các đỉnh của tứ diện đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.*

**Lời giải.** Gọi $G$ là trọng tâm của tứ điểm $\{A, B, C, D\}$ và đặt $OG = d$, thế thì $0 \le d < R$. Đặt : $s = \varphi(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$, $(\forall M)$ ; rồi khai triển $\overrightarrow{MP}^2 = (\overrightarrow{GP} - \overrightarrow{GM})^2 = \overrightarrow{GP}^2 + \overrightarrow{GM}^2 - 2\overrightarrow{GP}.\overrightarrow{GM}$ với $P \in \{A, B, C, D\}$, ta được : $s = \varphi(M) = \varphi(G) + 4GM^2$, $(\forall M)$ (do $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$) (1)

Cho $M \equiv O$, ta được :

$\varphi(O) = \varphi(G) + 4GO^2 = 4d^2 + \varphi(G) = 4R^2$

Suy ra : $\varphi(G) = 4(R^2 - d^2)$ (2)

Từ (1) và (2), ta thu được hệ thức sau :

$\varphi(M) = s = 4[(R^2 - d^2) + GM^2]$, $\forall M \in \mathscr{C}(O, R)$, tức là $OM = R$ (3)

Mặt khác, trong tam giác $OGM$ ta lại có các *BĐT tam giác* sau :

$R - d = OM - OG \le GM \le OM + OG = R + d$,

hay là : $(R - d)^2 \le GM^2 \le (R + d)^2$ (4)

Từ (4) suy ra :

• $GM = R$ (không đổi) $\Leftrightarrow d = 0 \Leftrightarrow G \equiv O \Leftrightarrow$ $ABCD$ là một tứ diện gần đều.

• $GM \ne R \Leftrightarrow d \ne 0 \Leftrightarrow ABCD$ không phải là một tứ diện gần đều.

Vậy ta đi đến kết luận :

1) Nếu $ABCD$ không phải là một tứ diện gần đều, thì :

a) $s_{\max} = 4[(R^2 - d^2) + (R + d)^2] = 8R(R + d)$,

$\Leftrightarrow M \equiv M_1$ là giao điểm của tia $GO$ với mặt cầu $\mathscr{C}(O, R)$ ; khi đó $O$ thuộc $GM_1$.

b) $s_{\min} = 4[(R^2 - d^2) + (R - d)^2] = 8R(R - d)$

$\Leftrightarrow M \equiv M_2$ là giao điểm của tia $OG$ với mặt cầu $\mathscr{C}(O, R)$ ; khi đó $G$ thuộc $OM_2$.

2) Nếu $ABCD$ là một tứ diện gần đều (các cạnh đối diện bằng nhau) thì $G \equiv O \Leftrightarrow d = 0$, khi đó :

$s = 4[(R^2 - d^2) + R^2] = 8R^2$ không đổi, $\forall M \in \mathscr{C}(O, R)$.

**Nhận xét.** 1) Đây là một bài toán dựng hình gắn với tìm cực trị hình học, ở đây điểm phải tìm lại gắn với một giá trị tương ứng với nó là lớn nhất hay nhỏ nhất. Do đó, bài toán đòi hỏi phải xác định vị trí hình học của điểm phải tìm, đồng thời cũng phải chỉ ra được giá trị cực đại hay cực tiểu ứng với điểm tìm được. Khi đó, điểm phải tìm mới thực sự tồn tại và dựng được. Nếu mới chỉ ra được giá trị cực trị mà chưa chỉ ra được vị trí hình học của điểm cần tìm thì mới chỉ chứng tỏ rằng : Nếu điểm phải tìm mà tồn tại thì những giá trị cực đại hay cực tiểu tìm được chỉ là *khả năng* có thể đạt được mà thôi và bài toán dựng hình mới được thực hiện ở bước *phân tích*, chỉ ra được *điều kiện cần* nhưng *chưa đủ*. Ngược lại, nếu chỉ ra được vị trí hình học của điểm phải tìm mà chưa tính cụ thể giá trị cực đại hay cực tiểu ứng với điểm tìm được thì bài toán *chưa được giải trọn vẹn* vì mới chỉ ra được *điều kiện đủ* chứ *chưa cần* (có thể chưa vét hết nghiệm cần tìm).

Chú ý rằng nếu $G \equiv O$ thì đường thẳng $OG$ bất định và $s = \varphi(M) = 8R^2$ không đổi với mọi điểm $M$ trên mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ đã cho, và không có giá trị lớn nhất, cũng như nhỏ nhất. Hầu hết các bạn, do vội vàng mà không biện luận về vị trí tương đối của trọng tâm $G$ của tứ diện $ABCD$ đối với tâm $O$ mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

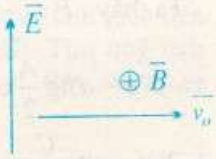
2) Lời giải đưa ra ở trên đã triệt để sử dụng phương pháp véctơ, và đó là lời giải ngắn gọn hơn cả. Các bạn có thể sử dụng công thức về đường trung tuyến trong tam giác (2 lần) nhưng việc tính toán đến kết quả cuối cùng sẽ cồng kềnh, phức tạp hơn nhiều ! Một số bạn đã nêu hướng khái quát hóa bài toán dưới dạng xét một hệ $n$ điểm (trong mặt phẳng $n \ge 4$), còn trong không gian $n \ge 5$) $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ đồng viên, hoặc đồng cầu $\mathscr{C}(O, R)$. Hướng khái quát hóa này không có gì khó khăn, nhưng các bạn này đều quên biện luận bài toán theo khoảng cách $OG = d$, thành thử việc giải bài toán vẫn chưa trọn vẹn !

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt, tương đối gọn gàng và trọn vẹn hơn cả.

**Hà Nội :** *Nguyễn Trung Chính*, 12 Toán, THPT Hà Nội – Amsterdam ; **Phú Thọ :** *Hoàng Ngọc Minh*, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì ; **Hòa Bình:** *Ngô Nhất Sơn*, 10T, *Hà Hữu Cao Trình*, 11T, *Nguyễn Lâm Tuyền*, 12T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ ; **Hải Dương :** *Nguyễn Tiến Thành*, 11 Lý, THPT Nguyễn Trãi ; **Ninh Bình:** *Lê Minh Lợi*, *Trịnh Thùy Nhung*, 11T, THPT Lương Văn Tụy, Ninh Bình ; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Huy Cung*, 12T2, THPT chuyên Lê Khiết ; **Đồng Nai:** *Lê Phương*, 11T1, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa ; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Võ Vĩnh Lộc*, 11T, THPT Tx. Sa Đéc ; **Cần Thơ:** *Nguyễn Minh Luân*, 8A, THPT Nguyễn Việt Hồng, Tp. Cần Thơ.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

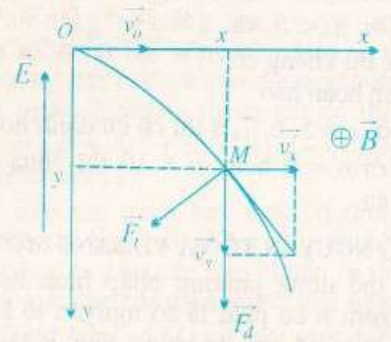
**Bài L1/295.** *Một êlectron đang chuyển động với vận tốc $v_o = 10^5$ m/s thì bay vào vùng có điện trường đều và từ trường đều ; vectơ vận tốc $\vec{v_o} \perp \vec{E}$ và $\vec{v_o} \perp \vec{B}$ (hình vẽ).*




*Xác định độ lớn vận tốc của êlectron ở thời điểm $\vec{v}$ ngược hướng với $\vec{v_o}$. Biết rằng $E = v_oB$ và bỏ qua tác dụng của trọng lực.*

**Hướng dẫn giải.** Kí hiệu $O$ là vị trí êlectron bắt đầu đi vào vùng có điện trường và từ trường. Chọn trục $Ox$ có hướng trùng với $\vec{v_o}$, trục $Oy$ hướng xuống dưới. Ta thấy lực điện trường $\vec{F_d}$ luôn có hướng $Oy$, còn lực từ $\vec{F_t}$ tác dụng lên êlectron luôn vuông góc với véctơ vận tốc $\vec{v}$.

Xét chuyển động theo phương $Ox$, ta có : $-F_{tx} = ma_x \Rightarrow -ev_yB = m\frac{dv_x}{dt} \Rightarrow -eBv_ydt = mdv_x \Rightarrow mdv_x = -eBdy$.




Lấy tích phân 2 vế (với điều kiện $y = 0$ thì $v_x = v_o$) ta được : $v_x = v_o - \frac{eB}{m}y$. Kí hiệu $v$ là vận tốc của êlectron ; tại thời điểm $\vec{v}$ ngược hướng với $\vec{v_o}$, nghĩa là $v_x = -v$, ta có tọa độ của êlectron khi đó : $y = \frac{v + v_o}{eB}m$. (1). Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng (chú ý lực từ $\vec{F_t}$ không thực hiện công) : $\frac{mv_o^2}{2} + eEy = \frac{mv^2}{2}$ (2).

Từ (1) và (2) tìm được $v = 3v_o = 3.10^5$ m/s.

*Chú ý.* Có thể áp dụng phương trình của định luật II Niu-tơn $m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} + e[\vec{v} \times \vec{B}]$, chiếu lên 2 trục và giải hệ phương trình.

**Nhận xét.** Các em có lời giải và đáp số đúng.

**Nghệ An :** *Hồ Quốc Huy*, 11A7, THPT Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An ; **Vĩnh Phúc :** *Kiều Ngọc Thanh*, 11B3, *Chu Anh Dũng*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Văn Tý, Lê Hữu Hà, Lê Đức Đạt*, 11 Lí, THPT NK Hà Tĩnh ; **Hải Dương:** *Nguyễn Quốc Long, Vũ Xuân Thắng*, 11 Lí, THPT NK Nguyễn Trãi, **Hải Dương**.

MAI ANH

**Bài L2/295.** *Đặt hiệu điện thế $u = U_o\sin(\omega t + \varphi)$ vào hai bản của một tụ điện có điện dung $C = 10^{-3}/4\pi$ (F). Ở thời điểm $t_1$ các giá trị tức thời của $u$ và $i$ trong mạch là $u_1 = 100\sqrt{3}$ (V) và $i_1 = -2,5$ (A) ; ở thời điểm $t_1 = 1,5t_1$ ta có $u_2 = 100$(V) và $i_2 = -2,5\sqrt{3}$ (A). Hãy xác định $\omega$, $u_o$, $\varphi$ và $t_1$.*

**Hướng dẫn giải.** Áp dụng định luật Ôm ta có (với mạch chỉ có $C$) : $u = U_o\sin\omega t$ (1)

$\Rightarrow i = I_o\sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$ với $I_o = C\omega U_o$

$\Rightarrow i = C\omega U_o\cos(\omega t + \varphi)$ ) (2)

Từ (1) và (2) rút ra : $u^2 = U_o^2 + \frac{i^2}{C^2\omega^2}$.

Do đó ở các thời điểm $t_1$ và $t_2$ ta có

$u_1^2 = U_o^2 + \frac{i_1^2}{C^2\omega^2}$ ; $u_2^2 = U_o^2 + \frac{i_2^2}{C^2\omega^2}$

Thay $C = \frac{10^{-3}}{4\pi}$ (F), từ đó tìm được :

$\omega = \frac{1}{C}\sqrt{\frac{i_2^2 - i_1^2}{u_1^2 - u_2^2}} = 100\pi$ rad/s và $U_o = 200$V.

Ngoài ra ta cũng có :

• Lúc $t_1$ : $u_1 = 100\sqrt{3} = 200\sin(100\pi t_1 + \varphi)$ ; $i_1 = -2,5 = 5\cos(100\pi t_1 + \varphi)$

• Lúc $t_2 = 1,5t_1$ : $u_2 = 100 = 200\sin(100\pi t_2 + \varphi)$ ;

$i_2 = -2,5\sqrt{3} = 5\cos(100\pi t_2 + \varphi)$.

Từ các phương trình trên tìm được : $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ;

$t_1 = \frac{1}{300} \approx 3,3.10^{-3}$s.

**Nhận xét.** Các bạn có lời giải tốt :

*Hoàng Ngọc Tuấn*, 12A2, THPT Dương Xá, Gia Lâm ; **Quảng Ngãi:** *Bùi Minh Trí*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết ; **Nam Định:** *Trần Vũ Diệu*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong ; **Quảng Bình** : *Hoàng Đức Quang*, 11A, THPT Đào Duy Từ, Đồng Hới ; **Phú Thọ:** *Nguyễn Kim Ngọc*, 11B1, THPT chuyên Hùng Vương; **Vĩnh Phúc :** *Lê Văn Quỳnh, Chu Anh Dũng*, 11A3, THPT ch. Vĩnh Phúc ; **Bình Định:** *Nguyễn Hoàng Phương*, 11 Lí, THPT Lê Quý Đôn, Quy Nhơn ; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Xuân Đức*, 11 Lí, THPT NK Hà Tĩnh ; **Thái Bình:** *Lê Ngọc Hoàn*, 12A1, THPT Vũ Tiên, Vũ Thư ; **Thanh Hóa :** *Lương Đỗ Long*, 11T2, THPT Lam Sơn ; **Nghệ An :** *Nguyễn Văn Lam*, xóm 8, xã Thanh Vân, Thanh Chương.

MAI ANH

**BẠN CÓ BIẾT ?**

# *Chuyện thú vị* VỀ SỐ NGUYÊN TỐ

PHAN THANH QUANG
*(Tp. Hồ Chí Minh)*

Có thể nói kho tàng số nguyên tố là một nguồn cảm hứng vô tận cho những người làm toán. Người ta đã biết rất nhiều về số nguyên tố, nhưng cũng có thể nói người ta chưa biết mấy về số nguyên tố, vì vẫn còn vô hạn điều bí ẩn về số nguyên tố đang chờ "ánh sáng cuối đường hầm".

Định nghĩa về số nguyên tố quá đơn giản : số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1 chỉ có hai ước số là 1 và chính nó.

Xung quanh số nguyên tố có nhiều tìm tòi nho nhỏ từ nghiêm túc đến buồn cười. Sau đây là vài sự kiện thú vị.

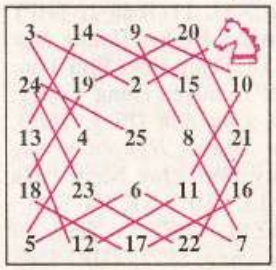
### SỐ NGUYÊN TỐ VÀ BÀN CỜ

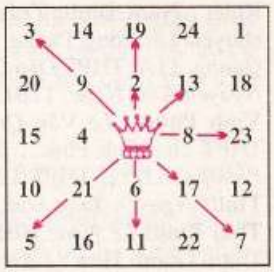
Bài toán này do G.L. Honaker đưa ra năm 1998. Ý tưởng là cho quân mã đi trên bàn cờ $n \times n$ ô vuông sao cho nó đi liên tiếp qua mọi ô vuông, mỗi ô chỉ 1 lần. Đánh số thứ tự bước đi của nó với vị trí đầu tiên là số 1. Sau đó phải đặt quân hậu ở đâu để nó có thể "bắt" tối đa các quân ở vị trí số nguyên tố. Trường hợp quân hậu bắt được tất cả các quân ở số nguyên tố thì gọi là "cú đánh hoàn hảo".

Trường hợp bàn cờ 5 × 5 ô được minh họa như sau :

Khi quân mã đi như ở hình bên phải, đặt quân hậu ở ô 25 chính giữa sẽ có *cú đánh hoàn hảo*.

Với $n = 8$ thì lời giải như hình dưới.




Bài toán đặt ra là : $n$ bằng bao nhiêu để có thể tìm được một đường đi của con mã, sao cho có một cú đánh hoàn hảo ?

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 37 | 24 | 45 | 4 | 39 | 22 | 47 | 62 |
| 44 | 5 | 38 | 23 | 46 | 61 | 40 | 21 |
| 25 | 36 | 43 | 60 | 3 | 20 | 63 | 48 |
| 6 | 59 | 26 | 35 | 64 | 41 | 2 | 19 |
| 27 | 30 | 57 | 42 | 1 | 34 | 49 | 12 |
| 58 | 7 | 54 | 29 | 52 | 13 | 18 | 15 |
| 31 | 28 | 9 | 56 | 33 | 16 | 11 | 50 |
| 8 | 55 | 32 | 53 | 10 | 51 | 14 | 17 |

Bài toán tổng quát *chưa có lời giải*, nhưng người ta biết rằng :

* Với $n < 5$ và $n \geq 11$ thì không có cú đánh hoàn hảo

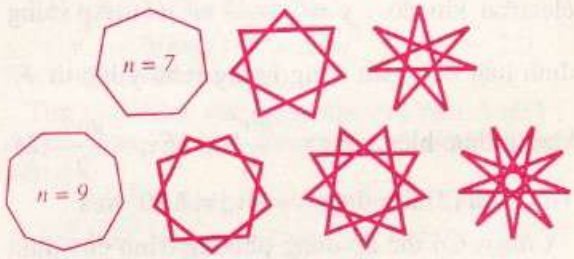
* Với $n = 5, 6, 7, 8$ thì có cú đánh hoàn hảo

* Với $n = 9$ hoặc $n = 10$ thì chưa ai đưa ra kết luận.

### SỐ NGUYÊN TỐ VÀ VẼ BẰNG MỘT NÉT

Có thể dùng phương pháp hình học để xác định xem $n$ có phải là số nguyên tố hay không (trên thực tế chỉ áp dụng cho $n$ là số tương đối nhỏ)

Từ một đỉnh nào đó của đa giác đều $n$ đỉnh, đánh số 1, 2, 3, ..., $n$ vào các đỉnh theo chiều kim đồng hồ. Nối bằng đoạn thẳng đỉnh $m$ ($m$ = 1, 2, ..., $n$) với đỉnh $m+k$ (mod $n$) với số $k$ xác định ($1 \leq k \leq n-1$) ta được những ngôi sao đều, chẳng hạn như hình dưới đây.




Nếu *tất cả* các ngôi sao $n$ đỉnh đều vẽ được bằng một nét (nghĩa là không phải nhấc đầu bút lên mà điểm đầu trùng với điểm cuối) thì $n$ là số nguyên tố. Nếu ít nhất 1 ngôi sao $n$ đỉnh không vẽ được bằng một nét (có ngôi sao vẽ bằng một nét có ít hơn $n$ đỉnh) thì $n$ không phải là số nguyên tố.

Bài toán đặt ra là nếu $n$ không phải là số nguyên tố thì ngôi sao đều $n$ nhánh nào mà khi nối cách $k-1$ điểm không thể vẽ bằng một nét. Câu trả lời : Không thể vẽ bằng một nét nếu $n$ và $k$ có ước chung khác 1).

Ví dụ với $n = 15$, thì những ngôi sao đều $n$ đỉnh vẽ được bằng một nét với $k = 1, 2, 4, 7, 8,$

11, 13, 14 và không vẽ được bằng một nét với $k = 3, 5, 6, 9, 10, 12$.

Liên quan đến vấn đề này, bạn có thể xem thêm bài Hình sao Poinsot ở THTT số 267 (9/1999).

### SỐ XUÔI NGƯỢC. SỐ QUAY VÒNG. SỐ TOÀN ĐƠN. SỐ ĐA NGUYÊN TỐ.

• Số xuôi ngược *(số XN)* là số viết xuôi (từ trái sang phải) và ngược như nhau. Ví dụ : 1234554321. Nhiều nhà "toán học tài tử" đi tìm số XN là số nguyên tố, chẳng hạn 131, 313, 191, 919, ... Họ đã tìm ra số XN nguyên tố nhỏ nhất có mặt 10 chữ số là 1023456987896543201.

Các bạn thử suy nghĩ : Tại sao chỉ có một số XN nguyên tố có số chẵn chữ số là 11 mà thôi ? (hãy xét điều kiện chia hết cho 11).

• Với một số cho trước, nếu lần lượt chuyển chữ số ở đầu trái sang đầu phải ta được các số quay vòng (số QV) của số đã cho. Ví dụ số 1337 có các số quay vòng là 3371, 3713, 7133, 1337.

Người ta đi tìm số quay vòng nguyên tố, nghĩa là mọi số quay vòng của nó đều là số nguyên tố chẳng hạn : 113, 199, 337. Đến nay mới tìm được 23 số quay vòng nguyên tố.

• Số toàn đơn *(số TĐ)* là số nguyên tố chỉ gồm có chữ số đơn vị. Ví dụ : số gồm $k$ chữ số 1 là số nguyên tố với $k = 2, 23$ và là hợp số khi $k$ là hợp số hoặc $k = 3, 5, 7, 37$.

Có vô hạn hay hữu hạn số TĐ ? Chưa có câu trả lời.

• Số đa nguyên tố *(ĐNT)* là số nguyên tố mà khi lập các số từ các chữ số này, mỗi chữ số một lần thì được nhiều số nguyên tố nữa. VD : Số ĐNT 1973 chứa đến 31 số nguyên tố (3, 7, 13, 17, 19, 31, 37, 71, 73, 79, 97, 137, 139, 173, 179, 193, 197, 317, 379, 397, 719, 739, 937, 971, 1973, 3719, 3917, 7193, 9137, 9173, 9371).

*(Theo Science et Avenir, tháng 8/2000)*

### ĐÍNH CHÍNH

Trong bài *Một số phương pháp tìm cực trị hàm số*, trang 10, THTT số 298 (4/2002) ở lời giải của ví dụ 3 đã biến đổi nhầm, xin được đính chính lại như sau :

$y = 4\sin 2x - 3\cos 2x + 1$ (1) ; PT (1) ẩn $x$ có nghiệm khi và chỉ khi $-4 \le y \le 6$.

Vậy Max $y = 6$, Min $y = -4$.

Thành thật xin lỗi độc giả.

*THTT*

## TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

### *BÀI SỐ 53*

**Problem.** Suppose that you have 6 envelopes with addresses and 6 letters to go with them. Closing your eyes, you randomly stuff one letter into each envelope. What is the probability that precisely two letters are in the wrong envelopes and all others in the correct envelopes?

**Solution.** If just two letters are to be in the wrong envelopes then we have to interchange them to get the correct envelopes. Thus, the number of different ways that we can get just two letters in the wrong envelopes is just the same as the number of different ways that we can choose two letters from among the six letters. This number is

$$\frac{5 \times 6}{2} = 15.$$

Now if we order the envelopes and the corresponding letter with the same numbers from 1 to 6, then a random distribution of the letters among the envelopes just corresponds to a random ordering of the numbers 1 to 6. Thus, the number of different possible ways to distribute 6 letters among 6 envelopes is

$$6! = 720.$$

In conclusion, the probability that all letters but two will be in the correct envelopes is

$$\frac{15}{720} = \frac{1}{48}$$

**Từ mới:**

*suppose* = giả sử (động từ)
*envelope* = phong bì
*address* = địa chỉ
*close* = đóng (động từ)
*eye* = mắt
*random* = ngẫu nhiên, hú hoạ (tính từ)
*stuff* = nhồi, nhét (động từ)
*letter* = thư
*probability* = xác suất
*precise* = chính xác (tính từ)
*wrong* = sai (tính từ)
*correct* = đúng, chính xác (tính từ)
*just* = vừa đúng, vừa đủ, vừa kịp (phó từ)
*order* = sắp xếp (động từ)
*distribution* = sự phân phối
*distribute* = phân phối, phân bổ (động từ)
*conclusion* = sự kết thúc, sự kết luận

NGÔ VIỆT TRUNG

## Cuộc chơi 2002 : AI BIẾT NHIỀU HƠN ?

### CÔNG TRÌNH CỦA AI ?

Dưới đây là bốn công trình của các nhà toán học nổi tiếng mà các bạn có thể đã làm quen. Bạn có biết tên tác giả của từng công trình đó không ? Biết rằng cột thứ ba và cột thứ tư của bảng thống kê là quê hương, năm sinh, mất của đúng các tác giả đó. Hãy thử xem ai biết nhiều hơn nào ?

| *Công trình* | *Tên tác giả* | *Quê hương* | *Năm sinh, mất* |
|---|---|---|---|
| Trong một tam giác $ABC$ có các cạnh là $a$, $b$, $c$ thì : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$ | ? | Ba Tư | ? - 1430 |
| Diện tích một tứ giác lồi nội tiếp có các cạnh $a$, $b$, $c$, $d$ và nửa chu vi $p$ bằng $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ | ? | Ấn Độ | 598 - 660 |
| Nếu $A$, $B$, $C$, $D$ là bốn điểm thẳng hàng thì $\overline{AB}.\overline{CD}^2 + \overline{BC}.\overline{AD}^2 + \overline{CA}.\overline{BD}^2 + \overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA} = 0$ | ? | Xcốt-len | 1717 - 1785 |
| Các cặp cạnh đối (kéo dài) của một lục giác nội tiếp trong một elip cắt nhau tại ba điểm thẳng hàng. | ? | Pháp | 1623 - 1662 |

**CLB**

*Giải đáp bài :*

## CÁC NHÀ NỮ TOÁN HỌC

Qua kì tìm hiểu này chúng ta thấy công việc nghiên cứu toán học không phải dành riêng cho các "đấng mày râu" mà còn có nhiều phụ nữ tham gia và đạt được nhiều kết quả rất nổi tiếng. CLB xin chúc các bạn nữ ở nước ta sẽ có những công trình toán học mới để góp phần xây dựng đất nước ngày càng giàu đẹp hơn. Giới thiệu với các bạn năm nhà nữ toán học nổi tiếng trên thế giới thông qua bảng thống kê chính xác sau.

| *Nhà nữ toán học* | *Quê hương* | *Năm sinh, mất* |
|---|---|---|
| Ghi-pa-ti (HYPATIE) | Ai Cập | 370-415 |
| A-nhê-di M.G AGNESI Maria Gaetana | Ý | 1718-1799 |
| Giéc-mên S. GERMAIN Sophie | Pháp | 1776-1831 |
| Cô-va-lep-skai-a S.V. KOVALEVSKAIA Sophia Vasilievna | Nga | 1850-1891 |
| No-thơ A.E NOETHER Amalie Emmy | Đức | 1882-1935 |

Năm bạn sau đây được nhận tặng phẩm : *Nguyễn Thị Nha Trang*, K25D - Toán Tin, ĐHSP Hà Nội II, **Vĩnh Phúc ;** *Nguyễn Thị Hồng Tâm*, 7E, THCS Sa Đéc, Tx. Phú Thọ, **Phú Thọ** ; *Trần Thị Hồng Thơm*, 10A1, THPT Tĩnh Gia II, **Thanh Hóa** ; *Nguyễn Thị Huyền*, 41E1 Toán, ĐH Vinh, **Nghệ An** ; *Nguyễn Đức Hạnh*, 11T, THPT NK Hàn Thuyên, **Bắc Ninh.** Ngoài ra CLB khen thêm các bạn : *Bùi Văn Đại*, 11 Toán, ĐHKHTN - ĐHQG **Hà Nội** ; *Trương Anh Tuyên*, THPT Liên Hà, Lâm Hà, **Lâm Đồng** ; *Trịnh Quốc Bảo*, 9A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà, **Hải Dương** ; *Bùi Thị Quỳnh Thơ*, 7A, Hermann Gmeiner, Vinh, **Nghệ An.**

NGỌC HIỂN

*Giải đáp bài :*

## ĐÃ ĐÚNG CHƯA !

Rất đông các bạn trên khắp mọi miền đất nước đã gửi bài về TS phân tích chỗ sai không đáng có trong lời giải bài toán này, trong đó có rất nhiều bạn THCS tham gia. Giới thiệu lời bình của bạn *Trần Văn Hội*, 9NK Toán, THCS Tự Lập, Mê Linh, **Vĩnh Phúc** :

*Tiếc quá ! Chỉ còn một chút nữa thôi là "mười phân vẹn mười". Từ kết quả $2^n = 264$ bạn đó đã vội vàng kết luận PT có nghiệm là $x = 264$. Đó là điều kết luận sai, vì không tồn tại $n \in N^*$ để $2^n = 264$. Nếu bạn đó khẳng định là PT vô nghiệm thì lời giải bài toán này đã đúng 100%.*

QUẢNG CÁO

VĂN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

CẨM NANG CỦA NHỮNG NGƯỜI DẠY VÀ HỌC VĂN

***Văn học và Tuổi trẻ*** (VH&TT) là đặc san phục vụ cho việc dạy học môn Văn và Tiếng Việt trong nhà trường phổ thông. Đối tượng phục vụ: Giáo viên, sinh viên, học sinh THPT, THCS và những người yêu thích văn học. Phát hành hàng tháng vào ngày 15. Mỗi số 64 trang, giá bìa 4.000 đ/cuốn. Ấn phẩm này đã ngày càng chiếm được cảm tình của bạn đọc.

VH&TT bao gồm các chuyên mục:

**Nhà văn trong cảm nghĩ của mọi nhà* đăng tải những bài viết là những kỉ niệm hồi ức của các nhà văn về xuất xứ hay hoàn cảnh ra đời các tác phẩm được giảng dạy trong nhà trường.

** Đi tìm vẻ đẹp văn chương* bao gồm các bài viết khám phá vẻ đẹp nội dung, nghệ thuật của các tác phẩm được giảng dạy trong nhà trường.

** Sổ tay - Tư liệu - Trao đổi*

** Cửa sổ văn học* - mở rộng hiểu biết cho bạn đọc về văn học nước ngoài.

** Giúp bạn ôn thi* bao gồm các bài viết giúp học sinh nắm được kĩ năng, phương pháp, kiến thức làm các bài thi.

** Tiếng Việt trong văn - Tiếng Việt quanh ta* bao gồm các bài viết bàn về việc dạy học môn Tiếng Việt và các bài khai thác phương diện ngôn ngữ trong các tác phẩm văn học.

** Mùa đầu văn học* - giới thiệu các sáng tác tiêu biểu của các cây bút trẻ.

Từ số 5- 2002, VH&TT còn ra mắt bạn đọc chuyên mục *Dành cho Tiểu học* giúp giáo viên và học sinh Tiểu học học tốt môn Tiếng Việt.

***Địa chỉ liên hệ viết bài công tác và đặt mua:***

Trung tâm phát hành Sách tham khảo, Nhà xuất bản Giáo dục, 57 Giảng Võ, Hà Nội. ĐT: 04.5141253.

Ông Đào Tiến Dũng, Ban biên tập Văn học và Tuổi trẻ, 57 Giảng Võ, Hà Nội. ĐT: 04.5142649.

Các bưu cục - bưu điện.

Rất mong nhận được sự cộng tác của các bạn. Xin trân trọng cảm ơn !

## Kết quả : THƯ HIỆN, LỜI ẤN

Hai bạn Bùi Ngọc Khánh, 11D, THPT Quảng Xương I, **Thanh Hóa** và *Đinh Quang Miền*, 10V2, THPT Lương Thế Vinh, Khương Đình, **Hà Nội** đã chỉ ra rằng : đây là một loại mã khóa thông tin xuất hiện lần đầu tiên tại đất nước Hy Lạp. Trước tiên người ta quấn băng giấy quanh một cây gậy tiết diện hình tròn, sau đó viết thông tin theo hàng ngang. Băng giấy khi tháo ra sẽ có một dãy các kí tự. Muốn nắm được nội dung thông tin ta phải quấn nó vào một cây gậy tiết diện hình tròn tương thích. Cô gái mỉm cười vì đã đọc được đoạn thơ sau :

*Một chút gì bồi rồi*
*Thoáng qua trong mắt ai*
*Hình như là ngày mai*
*Mùa xuân sang rồi đó*
*Để cho ai nỗi nhớ ...*

Rất đông các bạn tham gia giải mã bức thư và đều "bật mí" được nội dung bức thư đó. TS phải bốc thăm để chọn ra một số bạn may mắn hơn, đó là :

*Phùng Thị Thu Hà, Trần Quỳnh*, 10A1 và 11B3 THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc** ; *Tạ Thu Lan Phương*, 9A2, THCS Nguyễn An Ninh, Vũng Tàu, **Bà Rịa Vũng Tàu**. Cảm ơn hai bạn *Phạm Việt Đức*, 9A, THCS Việt An, Thanh Xuân Bắc, **Hà Nội** ; *Lưu Thị Thu Trang*, 8A, THCS Yên Phong, **Bắc Ninh** đã làm thơ tặng cho chuyên mục Giải trí toán học.

LÊ BÍCH

## XẾP CÁC LON NƯỚC QUẢ

Bạn An đố bạn Ba : Cậu có thể xếp được nhiều hơn 40 lon nước quả đường kính đáy mỗi lon bằng 5cm vào một hộp giấy đáy là hình chữ nhật kích thước 25cm × 40cm ? Ba loay hoay một lúc rồi nói với An là không thể xếp được. Các bạn thử xem Ba nói như vậy có đúng không ?

VŨ ĐÌNH HÒA
*(Hà Nội)*

☛ Ngoài bạn Hội ra TS xin trao tặng phẩm cho bốn bạn sau : *Nguyễn Quỳnh Anh*, 11A, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên** ; *Phạm Trọng Quỳnh*, 10A2, khối PTCT-T, ĐH Vinh, **Nghệ An** ; *Phùng Thanh Huyền*, 9C, THCS Trung Sơn Trầm, Sơn Tây, **Hà Tây** ; *Nguyễn Quốc Thảo*, 11T, THPT Tx.Cao Lãnh, **Đồng Tháp**. Khen thêm các bạn : *Trịnh Hữu Phước*, 9A, THCS Liên Mạc, Mê Linh, **Vĩnh Phúc** ; *Vũ Thanh Hải*, 11A1, THPT Nghi Lộc I, **Nghệ An** ; *Võ Viết Hàn*, 01 ĐHT, ĐHKT **Đà Nẵng** ; *Lê Ngọc Hoàng*, 11A12, THPT Hồng Quang, **Hải Dương** ; *Vũ Dương Thụy Anh*, 12A4, THPT Lương Văn Tụy, **Ninh Bình** ; *Lê Thị Hồng Nhung*, $8^{14}$, THCS Thái Nguyên, Tp. Nha Trang, **Khánh Hòa**.

NGỌC HIỂN

## LỜI GIẢI PHẢI CHĂNG LÀ ĐÚNG !

Trong một giờ học thầy giáo ở một lớp nọ đưa ra bài toán : *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số*

$$f(x) = |1 + 2\cos x| + |1 + 2\sin x|$$

Để tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đó, có một học sinh đã giải như sau :

Với mọi $x \in R$ ta có $f(x) = |1 + 2\cos x| + |1 + 2\sin x| \geq |2 + 2(\cos x + \sin x)| \geq |2 - 2\sqrt{2}| = 2(\sqrt{2} - 1)$

Từ đó suy ra $\min\limits_{x \in R} f(x) = 2(\sqrt{2} - 1)$

Theo bạn lời giải trên đã đúng chưa ? bạn có thể giải lại bài toán này không ?

BÙI KIM HOÀNG
*(Trường THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi)*

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

# CHI NHÁNH NXB GIÁO DỤC TẠI TP. HỒ CHÍ MINH


• Địa chỉ : 231 Nguyễn Văn Cừ, Q.5, Tp. Hồ Chí Minh.

• Điện thoại : (08)8356111 - (08)8353718 - (08)8307141 ;

Fax : (08)8350983


• Giám đốc : Vũ Bá Hòa.

Phó Giám đốc, Phó Tổng biên tập : Vũ Viết Chính.

Phó Giám đốc : Đỗ Trung Thường, Nguyễn Minh Khang

Kế toán trưởng : Trần Phương Lan

• Chi nhánh NXB Giáo dục tại Tp. Hồ Chí Minh tổ chức in và phát hành các sách giáo khoa, giáo trình, sách tham khảo phục vụ các ngành học : mầm non, phổ thông, giáo dục chuyên nghiệp - dạy nghề và giáo dục thường xuyên ở các tỉnh, thành phố phía Nam. Được phân công tổ chức và tham gia biên soạn một phần sách giáo khoa (SGK), sách tham khảo (STK), sách học tiếng dân tộc (Khmer, Hoa, Chăm, v.v...).

• Giúp NXB Giáo dục chỉ đạo công tác phát hành, thư viện trường học và quản lí xuất bản trong ngành giáo dục ở 24 tỉnh, thành phố, từ Phú Yên trở vào.

• Chi nhánh hiện có 156 cán bộ công nhân viên, thuộc các Ban Biên tập : Toán - Tin, Khoa học Tự nhiên, Khoa học Xã hội, Ngoại ngữ, Mĩ thuật, Mầm non và Tiểu học, Thư kí biên tập và các phòng chức năng : Sắp chữ điện tử, Sửa bản in, Quản lí sản xuất, Phát hành sách giáo khoa, Phát hành sách tham khảo, Kho vận, Tổ chức - Lao động Tiền lương, Kế toán Tài vụ, Hành chính Quản trị và Tổng hợp.

• Ban biên tập Toán - Tin của Chi nhánh có 5 biên tập viên gồm 1 tiến sĩ, 1 cao học, 3 cử nhân. Năm 2001 biên tập 7 bản thảo SGK, 12 bản thảo STK mới và 63 STK tái bản. Năm 2002 biên tập 37 bản thảo SGK, 16 bản thảo STK mới và 70 STK tái bản.

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT01M2

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 187B phố Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 2002

Giá : 3000đ
Ba nghìn đồng