MỘT SỐ KĨ THUẬT GIẢI NHANH PTLG

MỘT SỐ KĨ THUẬT GIẢI NHANH PTLG

(DÙNG CHO ÔN THI TN – CĐ – ĐH 2011)

NGUYỄN THÀNH LONG

Gửi tặng: www.Mathvn.com

Bỉm sơn. 08.05.2011

MỘT SỐ KĨ THUẬT GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Chú ý: Về sự suy biến của các cung trong các công thức đã học ở trường phổ thông
Ví dụ như các công thức sau
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
$\sin 2x = 2\sin x\cos x$
$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \ldots$
Là những công thức chúng ta đã được học ở trường phổ thông, bây giờ ta thử xem các công thức sau đúng hay không
$\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$
$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 1 - 2\sin^2 2x$
$\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x$
$\sin 9x = 3\sin 3x - 4\sin^3 3x \ldots$Hoàn toán đúng, vậy từ đây ta có thể khái quát và mở rộng như sau
Với $k > 0$ ta có
$\sin^2 kx + \cos^2 kx = 1$
$\cos 2kx = 2\cos^2 kx - 1 = 1 - 2\sin^2 kx$
$\sin 2kx = 2\sin kx\cos kx$
$\sin 3kx = 3\sin kx - 4\sin^3 kx$

1. Dựa vào mối quan hệ giữa các cung

Đôi khi việc giải phương trình lượng giác khi xem xét mối quan hệ giữa các cung để từ đó kết hợp với các công thức lượng giác, các phép biến đổi lượng giác để đưa về các phương trình cơ bản là một vấn đề rất "then chốt" trong việc giải phương trình lượng… chúng ta xét các bài toán sau để thấy được việc xem xét mối quan hệ giữa các cung quan trọng như thế nào

Bài 1: (ĐH – A 2008) Giải phương trình: $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\sin\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right)} = 4.\sin\left(\dfrac{7\pi}{4} - x\right)$

Nhận xét:

Từ sự xuất hiện hai cung $x - \dfrac{3\pi}{2}$ và $\dfrac{7\pi}{4} - x$ mà chúng ta liên tưởng đến việc đưa hai cung hai về cùng một cung x. Để làm được điều này ta có thể sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích hoặc công thức về các góc đặc biệt

Giải:

Sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích

Ta có $\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)=\sin x.\cos\frac{3\pi}{2}-\cos x.\sin\frac{3\pi}{2}=\cos x$

$\sin\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)=\sin\frac{7\pi}{4}\cos(-x)-\cos\frac{7\pi}{4}.\sin(-x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)$

Sử dụng công thức về các góc đặc biệt

Ta có $\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\pi-\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$

Hoặc $\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\left[\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-2\pi\right]=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$

$\sin\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)=\sin\left(-2\pi+\frac{7\pi}{4}-x\right)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)$

Hoặc $\sin\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)=\sin\left[2\pi-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)$

Chú ý: $\begin{cases}\sin(x+k2\pi)=\sin x\\ \cos(x+k2\pi)=\cos x\end{cases},k\in\mathbb{Z}$ và $\begin{cases}\sin(x+\pi+k2\pi)=-\sin x\\ \cos(x+\pi+k2\pi)=-\cos x\end{cases},k\in\mathbb{Z}$

Điều kiện: $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \sin 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=-4\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \sin x+\cos x=-2\sqrt{2}\sin x.\cos x(\sin x+\cos x)$

$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)\left(2\sqrt{2}\sin x.\cos x+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ 2\sqrt{2}\sin x.\cos x+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \sin 2x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ 2x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ 2x=\frac{5\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{8}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{5\pi}{8}+k\pi\end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là

$x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\,;x=-\frac{\pi}{8}+k\pi\,;x=\frac{5\pi}{8}+k\pi$ với $k\in\mathbb{Z}$

Đs: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = -\frac{\pi}{8} + k\pi, x = \frac{5\pi}{8} + k\pi, \ (k \in \mathbb{Z})$

Bài 2: (ĐH – D 2006) Giải phương trình: $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$

Giải:

Từ việc xuất hiện các cung 3x và 2x chúng ta nghĩ ngay đến việc đưa cùng về một cung x bằng công thức nhân ba và nhân đôi của hàm cos

Phương trình $\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x + 2\cos^2 x - 1 - \cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^3 x + \cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\cos^2 x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \sin x = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = k\pi \end{array}\right. ;(k \in \mathbb{Z})$$

Đs: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, x = k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$

Cách 2:
Nhận xét:

Ta có $\frac{3x - x}{2} = x$ và cung 2x cũng biểu diễn qua cung x chính vì thế ta nghĩ đến nhóm các hạng tử bằng cách dùng công thức biến tích thành tổng và công thức nhân đôi đưa về phương sử trình tích

$(\cos 3x - \cos x) - (1 - \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow -2\sin 2x.\sin x - 2\sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x(2\cos x + 1) = 0$

… tương tự như trên

Chú ý:

Công thức nhân ba cho hàm cos và sin không có trong SGK nhưng việc nhớ để vận dụng thì không khó

Công thức nhân ba $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x, \quad \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

Chứng minh: Dựa vào công thức biến đổi tổng thành tích và công thức nhân đôi

Ta có

$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x.\cos x - \sin 2x.\sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x.\sin^2 x$

$= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$

Tương tự cho $\sin 3x$

Bài 3: (ĐHDB – 2003) Giải phương trình: $3\cos 4x - 8\cos^6 x + 2\cos^2 x + 3 = 0$

Giải:
Nhận xét 1:

Từ sự xuất hiện cung 4x mà ta có thể đưa về cung x bằng công thức nhân đôi như sau

$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2\left(2\cos^2 x - 1\right) - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$

Cách 1:

Phương trình $4\cos^6 x - 12\cos^4 x + 11\cos^2 x - 3 = 0$ (pt bậc 6 chẵn)

Đặt $t = \cos^2 x,\ 0 \le t \le 1$

Khi đó ta có $4t^3 - 12t^2 + 11t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ … bạn được giải tiếp được nghiệm $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Nhận xét 2:

Từ sự xuất hiện các lũy thừa bậc chẵn của cos mà ta có thể chuyển về cung 2x bằng công thức ha bậc và từ cung 4x ta chuyển về cung 2x bằng công thức nhân đôi

Cách 2:

Phương trình

$$3\left(\cos^2 2x - 1\right) - 8\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) + 3 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x\left(2\cos^2 2x - 3\cos 2x + 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Nhận xét 3:

Từ sự xuất hiện các hệ số tỉ lệ với nhau mà ta liên tưởng đến việc nhóm các hạng tử và đưa về phương trình tích

Cách 3:

$$\Leftrightarrow 3(1+\cos 4x) - 2\cos^2 x(4\cos^4 x - 1) = 0 \Leftrightarrow 6\cos^2 2x - 2\cos^2 x(2\cos^2 x + 1)(2\cos^2 x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6\cos^2 2x - 2\cos^2 x(2\cos^2 x + 1)\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x\left[3\cos 2x - \cos^2 x(2\cos^2 x + 1)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ 3(2\cos^2 x - 1) - 2\cos^4 x - \cos^2 x = 0 \end{array}\right.$$

Phương trình $\Leftrightarrow -2\cos^4 x + 5\cos^2 x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ \cos^2 x = \dfrac{3}{2}(loai) \end{array}\right.$

Đs: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 4: (ĐH – D 2008) Giải phương trình: $2\sin x\left(1+\cos 2x\right) + \sin 2x = 1 + \cos x$

Giải:

Nhận xét:

Từ sự xuất hiện của cung 2x và cung x mà ta nghĩ tới việc chuyển cung 2x về cung x bằng các công thức nhân đôi của hàm sin và cos từ đó xuất hiện nhân tử chung ở hai vế

Phương trình $\Leftrightarrow 4\sin x.\cos^2 x + 2\sin x.\cos x = 1 + 2\cos x$

$\Leftrightarrow 2\sin x.\cos x(1 + 2\cos x) = 1 + 2\cos x$

$\Leftrightarrow (1+2\cos x)(\sin 2x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{-1}{2} \\ \sin 2x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$$

Đs: $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, \ (k \in \mathbb{Z})$

Bài 5: Giải phương trình $3\sin 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 + 4\sin^3 3x$

Giải:

Nhận xét:

Từ sự xuất hiện các cung 3x và 9x ta liên tưởng tới công thức nhân ba cho sin và cos từ đó đưa về phương trình bậc nhất đối với sin và cos

$\Leftrightarrow 3\sin 3x - 4\sin^3 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 \Leftrightarrow \sin 9x - \sqrt{3}\cos 9x = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 9x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 9x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(9x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{9} \\ x = \dfrac{7\pi}{54} + k\dfrac{2\pi}{9} \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

Bài 6: (ĐHM – 1997) Giải phương trình $\dfrac{\sin 5x}{5\sin x} = 1$

Giải:

Điều kiện: $\sin x \neq 0$

Phương trình $\Leftrightarrow \sin 5x = 5\sin x \Leftrightarrow \sin 5x = 5\sin x$

Nhận xét:

Từ việc xuất hiện hai cung 5x và x làm thế nào để giảm cung đưa cung 5x về x… có hai hướng

Hướng 1: Thêm bớt và áp dụng công thức biến đối tích thành tổng và ngược lại

$\Leftrightarrow \sin 5x - \sin x = 4\sin x \Leftrightarrow 2\cos 3x \sin 2x = 4\sin x$

$\Leftrightarrow 4\cos 3x \sin x \cos x = 4\sin x \Leftrightarrow \cos 3x \cos x = 1$

$$\Leftrightarrow \cos 4x + \cos 2x = 2 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x + \cos 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{3}{2} \ \ (loai) \\ \cos 2x = 1 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow 1 - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \ \ (loai)$

Vậy phương trình vô nghiệm

Hướng 2: Phân tích cung $5x = 2x + 3x$, áp dụng công thức biến đổi tổng thành tích kết hợp với công thức nhân hai, nhân ba

$\sin(3x + 2x) = 5\sin x \Leftrightarrow \sin 3x \cos 2x + \sin 2x \cos 3x = 5\sin x$

$\Leftrightarrow (3\sin x - 4\sin^3 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2\sin x \cos x(4\cos^3 x - 3\cos x) = 5\sin x(\sin^2 x + \cos^2 x)^2$

$\Leftrightarrow 12\sin^5 x + 20\cos^3 x \sin^3 x = 0 \Leftrightarrow 3\sin^2 x + 5\cos^2 x = 0$ … vô nghiệm

Bài 7: (ĐH – D 2002) Tìm $x \in [0;14]$ nghiệm đúng phương trình: $\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x - 4\left(2\cos^2 x - 1\right) + 3\cos x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \cos^3 x - 2\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x(\cos x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Vì $x \in [0;14]$ nên $0 \le \dfrac{\pi}{2} + k\pi \le 14$

Đs: $x = \dfrac{\pi}{2}; x = \dfrac{3\pi}{2}; x = \dfrac{5\pi}{2}; x = \dfrac{7\pi}{2}$

Bài 8: (ĐHTL – 2000) Giải phương trình $\dfrac{\sin 3x}{3} = \dfrac{\sin 5x}{5}$

Giải:

Phương trình $5\sin 3x = 3\sin\left(x + 4x\right) \Leftrightarrow 5\sin x\left(3 - 4\sin^2 x\right) = 3\left(\sin x\cos 4x + \cos x\sin 4x\right)$

$\Leftrightarrow 5\sin x\left(3 - 4\sin^2 x\right) = 3\sin x\left(\cos 4x + 4\cos^2 x\cos 2x\right)$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ 5\left(3 - 4\sin^2 x\right) = 3\left(\cos 4x + 4\cos^2 x\cos 2x\right) \ (*)\end{array}\right.$$

Phương trình $(*) \Leftrightarrow 5\left[3 - 2\left(1 - \cos 2x\right)\right] = 3\left[2\cos^2 x + 2\left(1 + \cos 2x\right)\cos 2x\right]$

$$\Leftrightarrow 12\cos^2 2x - 4\cos 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = \dfrac{5}{6} \\ \cos 2x = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pm\dfrac{1}{2}\alpha + k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi\end{array}\right.$$

Bài 9: (ĐH – D 2009) Giải phương trình: $\sqrt{3}\cos 5x - 2\sin 3x\cos 2x - \sin x = 0$

Giải:

Nhận xét:

Từ sự xuất hiện các cung 5x, 3x, 2x, x và $3x + 2x = 5x$ ta nghĩ ngay tới việc áp dụng công thức biến đổi tổng thành tích để đưa về cung 5x. Còn cung x thì thế nào hãy xem phần chú ý

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 5x - \sin 5x - \sin x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x - \dfrac{1}{2}\sin 5x = \sin x$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}-5x\right)=\sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}-k\frac{\pi}{3} \\ x=-\frac{\pi}{6}-k\frac{\pi}{2} \end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}$$

Đs: $x=\frac{\pi}{18}+k\frac{\pi}{3}, x=-\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}, \ (k\in\mathbb{Z})$

Chú ý:

- Đối với phương trình bậc nhất với sin và cos là $a\sin x+b\cos x=c$ học sinh dễ dàng giải được nhưng nếu gặp phương trình $a\sin x+b\cos x=a'\sin kx+b'\cos kx,\ k\neq 0,1$ thì làm thế nào, cứ bình tĩnh nhé, ta coi như hai vế của phương trình là hai phương trình bậc nhất đối với sin và cos thì cách làm tương tự
- Với ý tưởng như thế ta có thể làm tương tự bài toán sau

Bài 10: (ĐH – B 2009) Giải phương trình: $\sin x+\cos x\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x=2\left(\cos 4x+\sin^3 x\right)$

Giải:

Phương trình

$$\Leftrightarrow \sin x\left(1-2\sin^2 x\right)+\cos x.\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x=2\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x=2\cos 4x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 3x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x=\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x=\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow 4x=\pm\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)+k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{42}+k\frac{2\pi}{7} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

Hoặc:

$$\Leftrightarrow \sin x+\frac{1}{2}\left(\sin 3x+\sin x\right)+\sqrt{3}\cos 3x=2(\cos 4x+\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 3x+\frac{3}{2}\sin x+\sqrt{3}\cos 3x=2\cos 4x+\frac{3}{2}\sin x-\frac{1}{2}\sin 3x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x=2\cos 4x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 3x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x=\cos 4x$$

Đs: $x=\frac{\pi}{42}+\frac{2k\pi}{7}, x=-\frac{\pi}{6}-2k\pi, \ (k\in\mathbb{Z})$

Tương tự: (CĐ – A 2004) Giải phương trình: $\frac{\sin x-\sin 2x}{\cos x-\cos 2x}=\sqrt{3}$

HD:

Điều kiện: $\cos x-\cos 2x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq k2\pi \wedge x\neq \frac{k2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \sin x - \sin 2x = \sqrt{3}\cos x - \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}$

Bài 11: (ĐHXD – 1997) Giải phương trình: $\dfrac{\sin^4 2x + \cos^4 2x}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = \cos^4 4x$

Giải:

Nhận xét:

Từ tổng hai cung $\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\pi}{2}$ nên $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1$ và cung 2x có thể đưa về cung 4x bằng công thức nhân đôi

Điều kiện: $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \neq 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right).\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\cos 2x + \cos\frac{\pi}{2}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq 0$

Phương trình $\Leftrightarrow \sin^4 2x + \cos^4 2x = \cos^4 4x \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x\cos^2 2x = \cos^4 4x \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 4x = \cos^4 4x$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \cos^2 4x\right) = \cos^4 4x \Leftrightarrow 2\cos^4 4x - \cos^2 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos^2 4x = 1 \\ \sin^2 4x = -\frac{1}{2}\ (loai) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \sin 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x = 0\,(loai) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Chú ý:

- Chắc hẳn các bạn sẽ ngạc nhiên bởi cách giải ngắn gọn này, nếu không có sự nhận xét và tổng hai cung mà quy đồng và biến đổi thì…ra không

- Việc giải điều kiện và đối chiếu với điều kiện đặc biệt là những phương trình lượng giác có dạng phân thức như trên nếu không khôn khéo thì rất … phức tạp.

- Với ý tưởng nhận xét về tổng các cung trên ta có thể làm tương tự bài toán sau

(ĐHGTVT – 1999) Giải phương trình: $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8}\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cot\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$

Đs: $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Bài 12: (ĐHTL – 2001) Giải phương trình: $\sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2}\right)$

Giải:

Nhận xét:

Nhìn vào phương trình này ta ngĩ dùng công thức biến đổi sin của một tổng… nhưng đừng vội làm như thế khó ra lắm ta xem mối quan hệ giữa hai cung $\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}$ và $\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2}$ có mối quan hệ với nhau như thế nào

Thật vậy $\sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{10} - \frac{3x}{2}\right) = \sin\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{3x}{2}\right) = \sin 3\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right)$ từ đó ta đặt $t = \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}$ và sử dụng công thức nhân ba là ngon lành

Phương trình $\sin t = \frac{1}{2}\sin 3t \Leftrightarrow \sin t = \frac{1}{2}\left(3\sin t - 4\sin^3 t\right) \Leftrightarrow \sin t\left(1 - \sin^2 t\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin t = 0\\ 1 - \sin^2 t = 0\end{array}\right.$

TH 1: $\sin t = 0 \Leftrightarrow t = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{5} - k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

TH 2: $1 - \sin^2 t = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1 - \cos 2t}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos 2t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{5} \pm \frac{\pi}{6} - k4\pi, k \in \mathbb{Z}$

Chú ý:

- Nếu không quen với cách biến đổi trên ta có thể làm như sau $t = \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{5} - 2t \Rightarrow \frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2} = \pi - t$

- Với cách phân tích cung như trên ta có thể làm bài toán sau

a. (BCVT – 1999) Giải phương trình: $\sin(3x - \frac{\pi}{4}) = \sin 2x \sin(x + \frac{\pi}{4})$

đặt $t = x + \frac{\pi}{4}$

Đs: $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

b. (ĐHQGHN – 1999) Giải phương trình: $8\cos^3\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3x$

đặt $t = x + \frac{\pi}{3}$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = k\pi \end{array}\right.$

c. (PVBCTT – 1998) Giải phương trình: $\sqrt{2}\sin^3(x + \frac{\pi}{4}) = 2\sin x$

đặt $t = x + \frac{\pi}{4}$

Đs: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

d. (QGHCM 1998) Giải phương trình: $\sin^3(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\sin x$

Bài tập tự giải:

Bài 1: (Đề 16 III) Tìm nghiệm $x \in (\frac{\pi}{2}; 3\pi)$ của phương trình sau

$\sin(2x + \frac{5\pi}{2}) - 3\cos(x - \frac{7\pi}{2}) = 1 + 2\sin x$

Đs: $x = \pi, 2\pi, \frac{13\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$

Bài 2: (ĐHYTB – 1997) Giải phương trình

$\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}\right) - \sqrt{6}\sin\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{3}\right) - 2\sin\left(\frac{3x}{5} + \frac{\pi}{6}\right)$

Đs: $x = \frac{5\pi}{4} + k5\pi, x = -\frac{5\pi}{12} + k5\pi, x = -\frac{5\pi}{3} + k5\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

2. Biến đổi tích thành tích và ngược lại

Bài 1: Giải phương trình : $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x + \sin 6x = 0$

Giải:

Nhận xét:

Khi giải phương trình mà gặp dạng tổng (hoặc hiệu) của sin (hoặc cos) ta cần để ý đến cung để sao cho tổng hoặc hiệu các góc bằng nhau

Phương trình $\Leftrightarrow (\sin 6x + \sin x) + (\sin 5x + \sin 2x) + (\sin 4x + \sin 3x) = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{7x}{2}\left[\left(\cos\frac{5x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)+\cos\frac{3x}{2}\right]=0 \Leftrightarrow 4\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2}\left(2\cos x+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\frac{7x}{2}=0\\ \cos\frac{3x}{2}=0\\ 2\cos x+1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{k2\pi}{7}\\ x=\frac{\pi}{3}+\frac{k2\pi}{3}\\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. ;k\in Z$$

Bài 2: Giải phương trình : $\cos 3x\cos^3 x-\sin 3x\sin^3 x=\frac{2-3\sqrt{2}}{8}$

Giải:

Nhận xét:

Đối với bài này mà sử dụng công thức nhân ba của sin và cos thì cũng ra nhưng phức tạp hơn, chính vì thế mà ta khéo léo phân tích để áp dụng công thức biến đổi tích thành tổng

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos^2 x\left(\cos 4x+\cos 2x\right)-\frac{1}{2}\sin^2 x\left(\cos 2x-\cos 4x\right)=\frac{2-3\sqrt{2}}{8}$

$$\Leftrightarrow \cos 4x\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)+\cos 2x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=\frac{2-3\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \cos 4x+\cos^2 2x=\frac{2-3\sqrt{2}}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4\cos 4x+2\left(1+\cos 4x\right)=2-3\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos 4x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\left(k\in Z\right)$$

Cách khác:

Sử dụng công thức nhân ba

$$\cos 3x\cos^3 x-\sin 3x\sin^3 x=\cos 3x\left(\frac{1}{4}\cos 3x+\frac{3}{4}\cos x\right)-\sin x\left(\frac{3}{4}\sin x-\frac{3}{4}\sin 3x\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos 4x$$

Bài tập tự giải:

Bài 1: (HVQHQT – 2000) Giải phương trình: $\cos x+\cos 3x+2\cos 5x=0$

Ds: $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\pm\frac{\alpha_{1,2}}{2}+k\pi\end{array}\right.$ với $\cos\alpha_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{8}$

Bài 2: (ĐHNT 1997) Giải phương trình: $9\sin x+6\cos x-3\sin 2x+\cos 2x=8$

Ds: $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$

Bài 3: (ĐHNTHCM – 2000) Giải phương trình: $1+\sin x+\cos 3x=\cos x+\sin 2x+\cos 2x$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$

Bài 4: (ĐHYN – 2000) Giải phương trình: $\sin 4x = \tan x$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{\alpha}{2} + k\pi \end{array}\right.$ với $\cos\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$

Bài 5: (ĐHYHN – 1996) Giải phương trình: $\left(\cos x - \sin x\right)\cos x\sin x = \cos x\cos 2x$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$

Bài 6: (ĐHHH – 2000) Giải phương trình: $\left(2\sin x + 1\right)\left(3\cos 4x + 2\sin x - 4\right) + 4\cos^2 x = 3$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right.$

Bài 7: (ĐHĐN – 1999) Giải phương trình: $\cos^3 x - \sin^3 x = \sin x - \cos x$

Đs: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

Bài 8: (ĐTTS – 1996) Giải phương trình: $\cos^3 x + \sin^3 x = \sin x - \cos x$

Đs: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Bài 9: (ĐHCSND – 2000) Giải phương trình: $\cos^3 x + \sin^3 x = \sin 2x + \sin x + \cos x$

Đs: $x = \dfrac{k\pi}{2}$

Bài 10: (HVQY – 2000) Giải phương trình: $\cos^2 x + \sin^3 x + \cos x = 0$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} \pm \alpha + k2\pi \end{array}\right.$ với $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - 1$

Bài 11: (HVNHHN – 2000) Giải phương trình: $\cos^3 x + \cos^2 x + 2\sin x - 2 = 0$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=k2\pi \end{array}\right.$

Bài 12: (HVNHHCM – 2000) Giải phương trình: $\sin x+\sin^2 x+\cos^3 x=0$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x=\pi+k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{4}\pm\alpha+k2\pi \end{array}\right.$ với $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}-1$

Bài 13: (DDHBCVTHCM – 1997) Giải phương trình: $\cos^2 x-4\sin x\cos x=0$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\alpha+k\pi \end{array}\right.$ với $\tan\alpha=\dfrac{1}{4}$

Bài 14: (HVKTQS – 1999) Giải phương trình: $2\sin^3 x-\sin x=2\cos^3 x-\cos x+\cos 2x$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2} \\ x=\pi+k2\pi \end{array}\right.$

Bài 15: (ĐHSP I – 2000) Giải phương trình: $4\cos^3 x+3\sqrt{2}\sin 2x=8\cos x$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi \end{array}\right.$

3. Sử dụng công thức hạ bậc

Khi giải phương trình lượng giác gặp bậc của sin và cos là bậc nhất ta thường giảm bậc bằng cách sử dụng các công thức hạ bậc… từ đó đưa về các phương trình cơ bản

Bài 1: (ĐHAG – 2000) Giải phương trình $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=\dfrac{3}{2}$

Giải:
Nhận xét:

Từ sự xuất hiện bậc chẵn của hàm sin và tổng hai cung $\frac{6x+2x}{2}=4x$ mà ta nghĩ đến việc hạ bậc và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích sau đó nhóm các hạng tử đưa về phương trình tích

$\Leftrightarrow \cos 2x+\cos 4x+\cos 6x=0 \Leftrightarrow \cos 4x(2\cos 2x+1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x=0\\ \cos 2x=-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4} \vee x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$

Bài 2: (ĐH – B 2002) Giải phương trình: $\sin^2 3x-\cos^2 4x=\sin^2 5x-\cos^2 6x$

Giải:

Nhận xét:
Từ sự xuất hiện bậc chẵn của hàm sin, cos mà ta nghĩ đến việc hạ bậc và kết hợp với công thức biến đổi tổng thành tích đưa về phương trình tích

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{1-\cos 6x}{2}-\frac{1+\cos 8x}{2}=\frac{1-\cos 10}{2}-\frac{1+\cos 12x}{2}$

$\Leftrightarrow (\cos 12x+\cos 10x)-(\cos 8x+\cos 6x)=0$

$\Leftrightarrow 2\cos 11x.\cos x-2\cos 7x.\cos x=0$

$\Leftrightarrow \cos x(\cos 11x-\cos 7x)=0$

$\Leftrightarrow \cos x.\sin 9x.\sin 2x=0 \Leftrightarrow \sin 9x.\sin 2x=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 9x=0\\ \sin 2x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}9x=k\pi\\ 2x=k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\frac{\pi}{9}\\ x=k\frac{\pi}{2}\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

Đs: $x=k\frac{\pi}{9}; x=k\frac{\pi}{2}, (k\in\mathbb{Z})$

Chú ý: Có thể nhóm $(\cos 12x-\cos 8x)+(\cos 10x-\cos 6x)=0$

Bài 3: (ĐH – D 2003) Giải phương trình: $\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\tan^2 x-\cos^2\frac{x}{2}=0$

Giải:

Nhận xét:
Từ sự xuất hiện bậc chẵn của hàm sin mà ta nghĩ đến việc hạ bậc và nhóm các hạng tử đưa về phương trình tích

Điều kiện: $\cos x\neq 0$

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{\left[1-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]\tan^2 x}{2}-\frac{1+\cos x}{2}=0$

$\Leftrightarrow [1-\sin x]\tan^2 x-1-\cos x=0 \Leftrightarrow [1-\sin x]\sin^2 x-\cos^2 x-\cos^3 x=0$

$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x+\cos x-\sin x)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ 1-\sin x\cos x+\cos x-\sin x=0\end{array}\right.$

Khi $\sin x+\cos x=0 \Leftrightarrow \tan x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{-\pi}{4}+k\pi; k\in\mathbb{Z}$

Khi $1-\sin x\cos x+\cos x-\sin x=0$

Đặt $t=\cos x-\sin x \Rightarrow \sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$

Ta được $t^2+2t+1=0 \Leftrightarrow t=-1$

$\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{3\pi}{4}$

$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\pm\frac{3\pi}{4}+k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=-\pi+k2\pi\end{array}\right.$

So với điều kiện ta chỉ nhận $x=-\pi+k2\pi$

Cách 2:

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[1-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{2}(1+\cos x) \Leftrightarrow (1-\sin x)\sin^2 x=(1+\cos x)\cos^2 x$

$\Leftrightarrow (1-\sin x)(1+\cos x)(\sin x+\cos x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \cos x=-1\\ \tan x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\pi+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện ta được $x=\pi+k2\pi \vee x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$

Chú ý: Vì $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow \sin x\neq \pm 1$ nên ta loại ngay được $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$

Đs: $x=\pi+k2\pi, x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Bài 4: (ĐH – A 2005) Giải phương trình: $\cos^2 3x.\cos 2x-\cos^2 x=0$

Giải:

Cách 1:

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{1+\cos 6x}{2}.\cos 2x-\frac{1+\cos 2x}{2}=0$

$\Leftrightarrow \cos 6x.\cos 2x-1=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\cos 8x+\cos 4x\right)-1=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 4x-1+\cos 4x-2=0$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 4x + \cos 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 4x = 1 \\ \cos 4x = -\dfrac{3}{2} < -1 (loai) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 4x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$$

Cách 2:

$$\Leftrightarrow \cos 6x \cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(4\cos^3 2x - 3\cos 2x\right).\cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\cos^4 2x - 3\cos^2 2x - 1 = 0$$

Đs: $x = \dfrac{k\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$

Cách 3:

$$\Leftrightarrow \cos 6x \cos 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 1 \wedge \cos 6x = 1 \\ \cos 2x = -1 \wedge \cos 6x = -1 \end{array}\right.$$

Khi $\cos 2x = 1$ thì

$\cos 6x = 4\cos^3 2x - 3\cos 2x = 1$

Khi $\cos 2x = -1$ thì

$\cos 6x = 4\cos^3 2x - 3\cos 2x = -1$

Vậy hệ trên tương đương $\sin 2x = 0$ cho ta nghiệm $x = k\dfrac{\pi}{2}$

Chú ý: Một số kết quả thu được $-1 \le \sin x, \cos x \le 1$

$$\sin a.\cos b = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin a = 1 \wedge \cos b = 1 \\ \sin a = -1 \wedge \cos b = -1 \end{array}\right.$$

$$\sin a.\sin b = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin a = 1 \wedge \sin b = 1 \\ \sin a = -1 \wedge \sin b = -1 \end{array}\right.$$

$$\cos a.\cos b = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos a = 1 \wedge \cos b = 1 \\ \cos a = -1 \wedge \cos b = -1 \end{array}\right.$$

Tương tự cho trường hợp vế phải là -1

$$\sin a.\cos b = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin a = 1 \wedge \cos b = -1 \\ \sin a = -1 \wedge \cos b = 1 \end{array}\right.$$

$$\sin a.\sin b = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin a = 1 \wedge \sin b = -1 \\ \sin a = -1 \wedge \sin b = 1 \end{array}\right.$$

$$\cos a.\cos b = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos a = 1 \wedge \cos b = -1 \\ \cos a = -1 \wedge \cos b = 1 \end{array}\right.$$

Bài 5: (ĐHL – 1995) Giải phương trình $\cos^4 x + \sin^4\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

Giải:

Phương trình

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)}{2}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (1+\cos 2x)^2 + (1+\sin 2x)^2 = 1 \Leftrightarrow \cos 2x + \sin 2x = -1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 6: (ĐHDB – 2003) Giải phương trình: $\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)\cos x - 2\sin^2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)}{2\cos x - 1} = 1$

Giải:

Điều kiện: $\cos x \neq \dfrac{1}{2}$

Phương trình

$$\Leftrightarrow (2-\sqrt{3})\cos x - \left[1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] = 2\cos x - 1 \Leftrightarrow -\sqrt{3}\cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ \cos x \neq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + (2n+1)\pi$$

Đs: $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 7: (QGHN – 1998) Giải phương trình $\sin^2 x = \cos^2 2x + \cos^2 3x$

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{1-\cos 2x}{2} = \dfrac{1+\cos 4x}{2} + \dfrac{1+\cos 6x}{2} \Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + 1 + \cos 6x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos 3x\cos x + 2\cos^2 3x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 3x(\cos x + \cos 3x) = 0 \Leftrightarrow 4\cos 3x\cos 2x\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Bài 8: (ĐHKT – 1999) Giải phương trình $3\tan^3 x - \tan x + \dfrac{3(1+\sin x)}{\cos^2 x} - 8\cos^2 x\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) = 0$

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow 3\tan^3 x - \tan x + 3(1+\sin x)\left(1+\tan^2 x\right) - 4\left(1+\sin x\right) = 0$

$\Leftrightarrow 3\tan^3 x - \tan x + 3\left(1+\sin x\right)\tan^2 x - \left(1+\sin x\right) = 0$

$3\tan^2 x\left(1+\sin x + \tan x\right) - \left(1+\sin x + \tan x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(1+\sin x + \tan x\right)\left(3\tan^2 x - 1\right) = 0$

TH 1: $\tan x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

TH 2: $1+\sin x + \tan x = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x + \sin x\cos x = 0$ (pt đối xứng với sin và cos)

Giải phương trình này ta được $x = \dfrac{\pi}{4} \pm \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ với $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

Bài 9: ĐH – B 2007) Giải phương trình: $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$

Giải:

Nhận xét:

Từ sự xuất hiện các cung x, 2x, 7x và $\dfrac{7x+x}{2} = 2.2x$ chính vì thế ta định hướng hạ bậc chẵn và áp dụng công thức biến đổi tổng thành tích

Phương trình $\Leftrightarrow \sin 7x - \sin x - \left(1 - 2\sin^2 2x\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 4x.\sin 3x - \cos 4x = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 4x\left(2\sin 3x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 4x = 0 \\ \sin 3x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ 3x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3} \\ x = \dfrac{5\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Đs: $x = \dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3}; x = \dfrac{5\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3}, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Bài tập tự giải:

Bài 1: (GTVT – 2001) Giải phương trình: $\sin^4 x + \sin^4(x+\frac{\pi}{4})+\sin^4(x-\frac{\pi}{4})=\frac{9}{8}$

Đs: $x=\pm\frac{\alpha}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ với $\cos\alpha=\frac{-2+\sqrt{6}}{2}$

Bài 2: (ĐHQGHN – 1998) Giải phương trình: $\sin^2 x=\cos^2 2x+\cos^2 3x$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3} \\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

Bài 3: (Đề 48 II) Giải phương trình: $\sin^2 2x-\cos^2 8x=\sin\left(\frac{17\pi}{2}+10x\right)$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{10} \\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

Bài 4: (ĐHD – 1999) Giải phương trình: $\sin^2 4x-\cos^2 6x=\sin\left(10,5\pi+10x\right)$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{10} \\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

Bài 5: (TCKT – 2001) $\sin^2 x+\sin^2 3x-3\cos^2 2x=0$

Đs: $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi, x=\pm\frac{\alpha}{2}+k\pi$ với $k\in\mathbb{Z}, \cos\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Bài 6: (ĐHTDTT – 2001) Giải phương trình: $\cos 3x+\sin 7x=2\sin^2(\frac{\pi}{4}+\frac{5x}{2})-2\cos^2\frac{9x}{2}$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{6} \\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

Bài 7: (ĐHNTHCM – 1995) Giải phương trình: $\sin^8 x+\cos^8 x=\frac{17}{16}\cos^2 2x$

Đs: $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}, k\in\mathbb{Z}$

Bài 8: (KTMM – 1999) Giải phương trình: $\sin^8 x+\cos^8 x=\frac{17}{32}$

Đs: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

Bài 9: (HVQY – 1997) Giải phương trình: $\sin^8 2x + \cos^8 2x = \frac{1}{8}$

Đs: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

Bài 10: (ĐHSPHN – A 200) Tìm các nghiệm của phương trình

$\sin x \sin 4x - \sin^2 2x = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - \frac{7}{2}$ thỏa mãn điều kiện $|x-1| < 3$

Đs: $x = -\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}$

Bài 11: (ĐHSP HCM – A 2000) Giải phương trình:

$\sin\frac{x}{2}\sin x - \cos\frac{x}{2}\sin^2 x + 1 = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$

Đs: $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 12: (ĐHCĐ – 2000) Giải phương trình: $2\cos^2 2x + \cos 2x = 4\sin^2 2x\cos^2 x$

Đs: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

5. Sử dụng 7 hằng đẳng thức đáng nhớ và một số đẳng thức quan trọng

$1 + \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = (\sin x + \cos x)^2$

$1 - \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x = (\sin x - \cos x)^2$

$\sin x\cos x = \frac{\sin 2x}{2}$

$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x.\cos x + \cos^2 x) = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x.\cos x)$

$\sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x.\cos x + \cos^2 x) = (\sin x - \cos x)(1 + \sin x.\cos x)$

$\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$, $\cot x - \tan x = 2\cot x$

$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x.\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2 2x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$

$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 + \sin^2 x)(\cos^2 - \sin^2 x) = \cos 2x$

$\sin^6 x + \cos^6 x = \sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \frac{3}{8}\cos 4x + \frac{5}{8}$

$\cos^6 x - \sin^6 x = \cos 2x(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x\cos^2 x)$

$\sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x \mp \frac{\pi}{4}\right)$

$1 + \tan x.\tan\frac{x}{2} = \frac{1}{\cos x}$

Mối quan hệ giữa $\cos x$ và $1 - \sin x$ là $\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{\cos^2 x}{\cos x(1-\sin x)} = \frac{1+\sin x}{\cos x}$

Bài 1: (ĐH – D 2007) Giải phương trình: $\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cos x = 2$

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow \sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + \sqrt{3}\cos x = 2$

$\Leftrightarrow \sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin x.\cos\frac{\pi}{3} + \cos x.\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

Đs: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi,\ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Bài 2: (ĐH – B 2003) Giải phương trình: $\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$

Giải:

Nhận xét:

Từ sự xuất hiện hiệu $\cot x - \tan x$ và $\sin 2x$ ta xem chúng có mối quan hệ thế nào, có đưa về nhân tử chung hay cung một cung 2x hay không

Ta có $\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{\cos 2x}{\sin x\cos x} = \frac{2\cos 2x}{\sin 2x}$ từ đó ta định hướng giải như sau

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} + 4\sin 2x = \dfrac{2}{\sin 2x} \Leftrightarrow \dfrac{\cos 2x}{\sin 2x} + 2\sin 2x = \dfrac{1}{\sin 2x}$

$\Leftrightarrow \cos 2x + 2\sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = \dfrac{-1}{2} \end{array}\right.$

Khi $\cos 2x = 1$ thì $\sin x = 0$ không thỏa ĐK

Khi $\cos 2x = \dfrac{-1}{2}$ thì $\cos^2 x = \dfrac{1}{4}$ thỏa mãn điều kiện

Vậy ta nhận $\cos 2x = \dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$

Đs: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Chú ý:

Từ mối quan hệ giữa $\tan x$ và $\cot x$, giữa $\tan x$ và $\sin 2x$ ta có thể làm như sau

Đặt $t = \tan x \Rightarrow \begin{cases} \cot x = \dfrac{1}{t} \\ \sin 2x = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$

Ta được phương trình $\dfrac{1}{t} - t + 4\dfrac{2t}{1+t^2} = 2\dfrac{1+t^2}{2t}$ … bạn đọc giải tiếp nhé

Bài 3: (ĐH – D 2005) Giải phương trình: $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right).\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{3}{2} = 0$

Giải:

Nhận xét:

Từ đẳng thức $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x$ và hiệu hai cung $\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 2x$

Từ đó ta định hướng đưa về cung một cung 2x

Phương trình $\Leftrightarrow -2\sin^2 x\cos^2 x + \dfrac{1}{2}\left[\sin\left(4x - \dfrac{\pi}{2}\right) + \sin 2x\right] - \dfrac{1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow -\sin^2 2x - \cos 4x + \sin 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

Đs: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Bài 4: Giải phương trình $\cos^6 x - \sin^6 x = \dfrac{13}{8}\cos^2 2x$

Giải:

Nhận xét:

Đề bài xuất hiện cung 2x, ta nghĩ xem liệu hiệu $\cos^6 x - \sin^6 x$ có biểu diễn qua cung 2x để có nhân tử chung hay không ta làm như sau

$\Leftrightarrow (\cos^2 x)^3 - (\sin^2 x)^3 = \dfrac{13}{8}\cos^2 2x$

$\Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^4 x + \sin^4 x + \sin^2 x\cos^2 x) = \dfrac{13}{8}\cos^2 2x$

$\Leftrightarrow \cos 2x\left(1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x + \dfrac{1}{4}\sin^2 2x\right) = \dfrac{13}{8}\cos^2 2x \Leftrightarrow \cos 2x(8 - 2\sin^2 2x) = 13\cos^2 2x$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ 8 - 2\sin^2 2x = 13\cos 2x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ 8 - 2(1 - \cos^2 2x) = 13\cos 2x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ 2\cos^2 2x - 13\cos 2x + 6 = 0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \cos 2x = \dfrac{1}{2}\\ \cos 2x = 6\ \ (loai)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi\end{array}\right.\quad (\mathrm{k} \in \mathbb{Z})$

Bài 5: (GTVT – 1998) Giải phương trình $\tan x + \cot x = 2(\sin 2x + \cos 2x)$

Giải:

Điều kiện $\begin{cases}\cos x \ne 0\\ \sin x \ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \ne 0$

$\tan x + \cot x = 2(\sin 2x + \cos 2x) \Leftrightarrow \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x} = 2(\sin 2x + \cos 2x)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sin x\cos x} = 2(\sin 2x + \cos 2x) \Leftrightarrow \dfrac{2}{\sin 2x} = 2(\sin 2x + \cos 2x)$

$\Leftrightarrow 1 = \sin 2x(\sin 2x + \cos 2x) \Leftrightarrow 1 = \sin^2 2x + \sin 2x\cos 2x$

$\Leftrightarrow \cos^2 2x = \sin 2x\cos 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \tan 2x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \vee x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

Bài 6: (QGHN – 1996) Giải phương trình $\tan x = \cot x + 2\cot^3 2x$

Giải:

Điều kiện $\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin x \neq 0\\ \sin 2x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}$

$\tan x = \cot x + 2\cot^3 2x \Leftrightarrow \dfrac{\sin x}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{\sin x} = 2\cot^3 2x$

$\Leftrightarrow -\dfrac{2\cos 2x}{\sin 2x} = 2\cot^3 2x \Leftrightarrow -\cot 2x = \cot^3 2x$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cot 2x = 0\\ \cot^2 2x = -1\ (loai)\end{array}\right. \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Bài 7: (ĐH – A 2006) Giải phương trình: $\dfrac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x\cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$

Giải:

Điều kiện: $\sin x \neq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Phương trình $\Leftrightarrow 2(\cos^4 x + \sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x) - \sin x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow 2 - 6\sin^2 x\cos^2 x - \sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow 3\sin^2 2x + \sin 2x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi\\ x = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi\end{array}\right. ; k \in \mathbb{Z}$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$

Bài 8: (ĐH – A 2010) Giải phương trình: $\dfrac{(1 + \sin x + \cos 2x)\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases}\tan x \neq -1\\ \cos x \neq 0\end{cases}$

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)(1 + \sin x + \cos 2x) = (1 + \tan x).\cos x$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + \sin x + \cos 2x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x}.\cos x$

$\Leftrightarrow \sin x + \cos 2x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1(loai) \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Đs: $x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 9: (ĐHDB – 2002) Giải phương trình: $\dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x}{5\sin 2x} = \dfrac{1}{2}\cot 2x - \dfrac{1}{8\sin 2x}$

Giải:

Điều kiện: $\sin 2x \ne 0$

Phương trình

$$\Leftrightarrow \frac{1 - 2\sin^2 x.\cos^2 x}{5} = \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x}{5} = \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{8} \Leftrightarrow \cos^2 2x - 5\cos 2x + \frac{9}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = \dfrac{9}{2}(loai) \\ \cos 2x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right.$$

Bài 10: (ĐH – B 2005) Giải phương trình: $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow \sin x + \cos x + (\sin x + \cos x)^2 + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + 2\cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. ; k \in \mathbb{Z}$$

Đs: $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Bài 11: (ĐHDB – 2002) Giải phương trình: $\tan x + \cos x - \cos^2 x = \sin x(1 + \tan x.\tan\dfrac{x}{2})$

HD:

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \ne 0 \\ \cos\dfrac{x}{2} \ne 0 \end{cases}$

Ta có: $1+\tan x.\tan\frac{x}{2}=1+\dfrac{\sin x.\sin\frac{x}{2}}{\cos x.\cos\frac{x}{2}}=\dfrac{\cos x.\cos\frac{x}{2}+\sin x.\sin\frac{x}{2}}{\cos x.\cos\frac{x}{2}}=\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{\cos x.\cos\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{\cos x}$

Phương trình

$\Leftrightarrow \tan x+\cos x-\cos^2 x=\dfrac{\sin x}{\cos x}\Leftrightarrow \cos x(1-\cos x)=0\Leftrightarrow \cos x=1(\cos x\neq 0)\Leftrightarrow x=k2\pi$

Đs: $x=k2\pi;k\in\mathbb{Z}$

Bài 12: (ĐH – B 2006) Giải phương trình: $\cot x+\sin x(1+\tan x\tan\frac{x}{2})=4$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\\ \cos\frac{x}{2}\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$

Phương trình $\Leftrightarrow \cot x+\sin x\left(1+\dfrac{\sin x}{\cos x}.\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)=4$

$$\Leftrightarrow \cot x+\sin x\left(\frac{\cos x.\cos\frac{x}{2}+\sin x.\sin\frac{x}{2}}{\cos x.\cos\frac{x}{2}}\right)=4$$

$$\Leftrightarrow \cot x+\sin x.\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos x.\cos\frac{x}{2}}=4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}=4\Leftrightarrow 1=4\sin x.\cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ 2x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+k\pi\\ x=\frac{5\pi}{12}+k\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là

$x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi\,;x=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi$ với $k\in\mathbb{Z}$

Đs: $x=\frac{\pi}{12}+k\pi; x=\frac{5\pi}{12}+k\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$

Bài 13: (ĐHDB – 2003) Giải phương trình: $\cot x=\tan x+\frac{2\cos 4x}{\sin 2x}$

HD:

Điều kiện: $\sin 2x\neq 0\Leftrightarrow \cos 2x\neq 1$

Phương trình

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos 4x}{\sin x.\cos x}\Leftrightarrow \cos 2x=\cos 4x\Leftrightarrow 2\cos^2 2x-\cos 2x-1=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=1\,(loai)\\ \cos 2x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.$$

Đs: $x=\pm\frac{2\pi}{3}+k\pi; k\in\mathbb{Z}$

Bài 14: (ĐH – A 2009) Giải phương trình: $\frac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)}=\sqrt{3}$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases}\sin x\neq 1\\ \sin x\neq -\frac{1}{2}\end{cases}$

Phương trình $\Leftrightarrow (1-2\sin x)\cos x=\sqrt{3}(1+2\sin x)(1-\sin x)$

$\Leftrightarrow \cos x-2\sin x\cos x=\sqrt{3}+\sqrt{3}\sin x-2\sqrt{3}\sin^2 x$

$\Leftrightarrow \cos x-\sqrt{3}\sin x=\sin 2x+\sqrt{3}(1-2\sin^2 x)$

$$\Leftrightarrow \cos x-\sqrt{3}\sin x=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos x.\cos\frac{\pi}{3}-\sin x.\sin\frac{\pi}{3}=\sin 2x.\sin\frac{\pi}{6}+\cos 2x.\cos\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{6}=\pm\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+k2\pi\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}\end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}$$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là

$x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3},\ (k\in\mathbb{Z})$

Đs: $x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3},\ (k\in\mathbb{Z})$

Hoặc: $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}=\dfrac{\cos^2 x}{\cos x(1-\sin x)}=\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$

Phương trình thành:

$$\frac{(1-2\sin x)(1+\sin x)}{(1+2\sin x)\cos x}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{-\sin x+\cos 2x}{\cos x+\sin 2x}=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{3}\cos x+\sin x\right)+\left(\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x\right)=0\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

Hoặc là:

$\sin\left(\dfrac{3x}{2}+\dfrac{\pi}{12}\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{3x}{2}+\dfrac{\pi}{12}=k\pi\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{18}+k\dfrac{2\pi}{3}$ (biểu diễn trên đường tròn lượng giác ứng với các cung là $\dfrac{-\pi}{18},\dfrac{11\pi}{18},\dfrac{23\pi}{18}$, kiểm tra bằng máy tính thì thỏa các điều kiện ban đầu)

Hoặc là:

$\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+l\pi\Leftrightarrow x=3\dfrac{\pi}{2}+l2\pi$

(khi đó $\sin x=-1$ thỏa điều kiện ban đầu)

Bài tập tự giải:

Bài 1: (HVCTQG – 1999) $8\sqrt{2}\cos^6 x+2\sqrt{2}\sin^3 x\sin 3x-6\sqrt{2}\cos^4 x-1=0$

Đs: $x=\pm\dfrac{\pi}{8}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Bài 2: (ĐHMĐC – 2001) Giải phương trình: $48-\dfrac{1}{\cos^4 x}-\dfrac{2}{\cos^2 x}\left(1+\cot 2x.\cot x\right)=0$

Đs: $x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{4},k\in\mathbb{Z}$

6. Sử dụng các công thức lượng giác đưa phương trình ban đầu về các các phương trình đơn giải đối với một hàm lượng giác

a. Đưa về phương trình đẳng cấp

Bài 1: (ĐH – B 2008) Giải phương trình: $\sin^3 x-\sqrt{3}\cos^3 x=\sin x\cos^2 x-\sqrt{3}\sin^2 x\cos x$

Giải:

Nhận xét:

Thay $\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ vào phương trình ta được $\sin^3 x=0\Leftrightarrow\sin x=0$

nên $x = \frac{\pi}{2} + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$ không phải là nghiệm của phương trình

Khi $\cos x \ne 0$ chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^3 x$ ta được

$\tan^3 x - \sqrt{3} = \tan x - \sqrt{3}.\tan^2 x \Leftrightarrow \tan x\left(\tan^2 x - 1\right) + \sqrt{3}\left(\tan^2 x - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\tan^2 x - 1\right)\left(\tan x + \sqrt{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = \pm 1 \\ \tan x = -\sqrt{3} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. ; k \in \mathbb{Z}$

Đs: $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Bài 2: (ĐHCĐ – 2000) Giải phương trình $1 + 3\tan x = 2\sin 2x$

Giải:

Cách 1: Điều kiện: $\cos x \ne 0$

Phương trình $1 + 3\frac{\sin x}{\cos x} = 4\sin x\cos x \Leftrightarrow \cos x + 3\sin x = 4\sin x\cos^2 x$

Nhận xét: Đây là phương trình đẳng cấp bậc ba nên ta chia hai vế của phương trình cho $\cos^3 x$

Ta được

$\frac{1}{\cos^2 x} + 3\frac{\tan x}{\cos^2 x} = 4\tan x \Leftrightarrow 1 + \tan^2 x + 3\tan\left(1 + \tan^2 x\right) = 4\tan x$

$\Leftrightarrow 3\tan^3 x + \tan^2 x - \tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\tan x + 1\right)\left(3\tan^2 x - 2\tan x + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ vì $3\tan^2 x - 2\tan x + 1 = 0$ vô nghiệm

Chú ý:

- Ta có thể chia từ đầu hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$

- Nhìn vào phương trình ta thấy xuất hiện $\tan x$ và $\sin 2x$ ta nghĩ tới mối quan hệ như giữa chúng

$\sin 2x = \frac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$ hoặc $\sin 2x = 2\sin x\cos x = \frac{\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$ từ đó ta

đặt $t = \tan x$

Cách 2:

Đặt $t=\tan x \Rightarrow \sin 2x = \dfrac{2t}{1+t^2}$

Khi đó ta được $1+3t=\dfrac{4t}{1+t^2} \Leftrightarrow 3t^3+t^2-t+1=0 \Leftrightarrow (t+1)(3t^2-2t+1)=0$

$\Leftrightarrow t=-1 \Leftrightarrow \tan x=-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$

Bài 3: (ĐHQG HCM – 1998) Giải phương trình $\sin^3\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin x$

Giải:

Nhận xét:

Từ phương trình ta nhận thấy bước đầu tiên phải phá bỏ $\sin^3\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ để đưa cung $\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ về cung x từ công thức $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$… đến đây rùi là ra cùng một cung x rùi

Cách 1:

Ta có $\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin x-\cos x$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin^3\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=(\sin x-\cos x)^3 \Leftrightarrow \sin^3\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(\sin x-\cos x)^3$

Phương trình

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(\sin x-\cos x)^3=\sqrt{2}\sin x \Leftrightarrow (\sin x-\cos x)^3=4\sin x \quad (*)$ (pt đẳng cấp bậc ba)

Vì $\cos x=0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia hai vế của phương trình cho $\cos^3 x$

Ta được

$(\tan x-1)^3=4\tan x(1+\tan^2 x) \Leftrightarrow (\tan x+1)(3\tan^2 x+1)=0$

$\Leftrightarrow \tan x=-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

Cách 2:

Từ phương trình (*)

$(*) \Leftrightarrow (\sin x-\cos x)^3=4\sin x \Leftrightarrow (\sin x-\cos x)(\sin x-\cos x)^2=4\sin x$

$\Leftrightarrow (\sin x-\cos x)(1-2\sin x\cos x)=4\sin x \Leftrightarrow -\cos x-3\sin x-2\sin^2 x\cos x+2\sin x\cos^2 x=0$

$\Leftrightarrow \cos x(-2\sin^2 x-1)+\sin x(2\cos^2 x-3)=0 \Leftrightarrow \cos x(\cos 2x-2)+\sin x(\cos 2x-2)=0$

$\Leftrightarrow (\cos 2x-2)(\cos x+\sin x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=2 \text{ (loai)}\\ \tan x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \quad (k\in Z)$

Bài 4: (HVQY – B 2001) Giải phương trình $3\sin x+2\cos x=2+3\tan x$

Giải:

$\Leftrightarrow 3\tan x\cos x+2\cos x=2+3\tan x \Leftrightarrow \cos x(3\tan x+2)=2+3\tan x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\tan x + 2 = 0 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -\dfrac{2}{3} = \tan\beta \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \beta + k\pi \\ x = 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Bài tập tự giải:

Bài 1: (BCVT – 2001) Giải phương trình: $4\sin^3 x\cos 3x + 4\cos^3 x\sin 3x + 3\sqrt{3}\cos 4x = 3$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$

Bài 2: (ĐHNT – 1996) Giải phương trình: $\cos^3 x - 4\sin^3 x - 3\cos x\sin^2 x + \sin x = 0$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

Bài 3: (ĐHH – 1998) Giải phương trình: $\cos^3 x + \sin x - 3\sin^2 x\cos x = 0$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \alpha_1 + k\pi \\ x = \alpha_2 + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$ với $\tan\alpha_1 = 1 + \sqrt{2}; \tan\alpha_2 = 1 - \sqrt{2}$

Bài 4: (ĐHĐN – 1999) Giải phương trình: $\cos^3 x - \sin^3 x = \sin x - \cos x$

Đs: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Bài 5: (HVKTQS – 1996) Giải phương trình: $2\cos^3 x = \sin 3x$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \alpha + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$ với $\tan\alpha = -2$

Bài 6: (ĐHD HCM – 1997) Giải phương trình: $\sin x\sin 2x + \sin 3x = 6\cos^3 x$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x = \alpha + k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$ với $\tan\alpha = 2$

Bài 7: (ĐHYHN – 1999) Giải phương trình: $\sin x + \cos x - 4\sin^3 x = 0$

Đs: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Bài 8: (ĐHQGHN – 1996) Giải phương trình: $1 + 3\sin 2x = 2\tan x$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + n\pi \\ x = \alpha_{1,2} + n\pi \end{array}\right. \quad (n \in \mathbb{Z})$ với $\tan\alpha_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$

Bài 9: (ĐHNN I – B 1999) Giải phương trình: $\sin^2 x(\tan x + 1) = 3\sin x(\cos x - \sin x) + 3$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

b. Đưa về phương trình bậc hai, bậc ba, bậc 4… của một hàm lượng giác

Bài 1: Giải phương trình $2\sin^2 x + \tan^2 x = 2$

Giải:

Cách 1:

Điều kiện: $\cos x \neq 0$

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{2\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} + \tan^2 x = 2 \Leftrightarrow 2\tan^2 x + \tan^2 x + \tan^4 x = 2 + 2\tan^2 x$

$\Leftrightarrow \tan^4 x + \tan^2 x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan^2 x = 1 \\ \tan^2 x = -2 \text{ (loai)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \tan x = \pm 1 = \tan\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi \quad (\text{k} \in \mathbb{Z})$

Cách 2:

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 2 \Leftrightarrow 2\sin^2 x\cos^2 x + \sin^2 x = 2\cos^2 x$

$\Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 x)\cos^2 x + 1 - \cos^2 x = 2\cos^2 x \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 2\cos^4 x + 1 - \cos^2 x = 2\cos^2 x$

$\Leftrightarrow 2\cos^4 x + \cos^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos^2 x = -1 \text{ (loai)} \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \quad (\text{k} \in \text{Z})$

Chú ý:

Đối với phương trình $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$ ta không nên giải trực tiếp vì khi đó có tới 4 nghiệm khi kết hợp và so sánh với điều kiện phức tạp nên ta hạ bậc là tối ưu nhất

Bài 2: Giải phương trình $\sin^8 x + \cos^8 x = \dfrac{1}{8}$

Giải:

$\Leftrightarrow (\sin^4 x)^2 + (\cos^4 x)^2 = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2\sin^4 x\cos^4 x = \dfrac{1}{8}$

$\Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)^2 - 2(\sin x\cos x)^4 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 1-\sin^2 2x+\frac{1}{4}\sin^4 2x - 2\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^4 = \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow 1-\sin^2 2x+\frac{1}{4}\sin^4 2x-\frac{1}{8}\sin^4 2x=\frac{1}{8} \Leftrightarrow 8-8\sin^2 2x+2\sin^4 2x-\sin^4 2x=1$

$\Leftrightarrow \sin^4 2x-8\sin^2 2x+7=0 \Leftrightarrow \sin^2 2x=1 \vee \sin^2 2x=7>1$ (loai)

$\Leftrightarrow \cos 2x=0 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

Chú ý:
Có thể dùng công thức hạ bậc và đặt $t=\cos 2x$

Bài 3: (ĐH – B 2004) Giải phương trình: $5\sin x-2=3(1-\sin x)\tan^2 x$

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow 5\sin x(1-\sin^2 x)-2(1-\sin^2 x)=3\sin^2 x-3\sin^3 x$

$\Leftrightarrow 2\sin^3 x+\sin^2 x-5\sin x+2=0$

Đặt $t=\sin x$ với $t\in[-1;1]$

$\Leftrightarrow 2t^3+t^2-5t+2=0 \Leftrightarrow t-1)(2t^2+3t-2)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{1}{2} \\ t=-2\,(loai) \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \vee x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$

Đs: $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi; x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi, (k\in\mathbb{Z})$

Bài 4: (QGHN – 1996) Giải phương trình $\tan^2 x-\tan x.\tan 3x=2$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \cos 3x\neq 0\end{cases}$

$\tan^2 x-\tan x.\tan 3x=2 \Leftrightarrow \tan x(\tan x-\tan 3x)=2 \Leftrightarrow \frac{-\sin x\sin 2x}{\cos x\cos x\cos 3x}=2 \Leftrightarrow \frac{-2\sin^2 x\cos x}{\cos x\cos x\cos 3x}=2$

$\Leftrightarrow -\sin^2 x=\cos x\cos 3x \Leftrightarrow \cos^2 x-1=4\cos^4 x-3\cos^2 x \Leftrightarrow 4\cos^4 x-4\cos^2 x+1=0$

$\Leftrightarrow (2\cos^2 x-1)^2=0 \Leftrightarrow \cos 2x=0 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

Bài 5: Giải phương trình $2\tan x+\cot 2x=2\sin 2x+\frac{1}{\sin 2x}$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0$

$2\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos 2x}{\sin 2x} = 2\sin 2x + \dfrac{1}{\sin 2x} \Leftrightarrow 2\dfrac{\sin x \sin 2x}{\cos x} + \cos 2x - 2\sin^2 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4\sin^2 x + \cos 2x - 2(1-\cos^2 2x) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2(1-\cos 2x) + \cos 2x - 3 + \cos^2 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 1\ (loai)\ (vì \sin 2x = 0) \\ \cos 2x = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \cos 2x = -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 6: Giải phương trình $\sin 2x + \sin x - \dfrac{1}{2\sin x} - \dfrac{1}{\sin 2x} = 2\cot 2x$

Giải:

Điều kiện: $\sin x \neq 0,\ \cos x \neq 0$

Phương trình $\Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x.\sin x - \cos x - 1 = 2\cos 2x$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 x\sin^2 x + 2\cos x.\sin^2 x - \cos x + 1 - 4\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 x(1-\cos^2 x) + 2\cos x(1-\cos^2 x) - \cos x + 1 - 4\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^4 x + 2\cos^3 x + \cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x + 1)(4\cos^3 x - 2\cos^2 x + 2\cos x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x + 1)(2\cos x - 1)(2\cos^2 x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$

Bài 7: (ĐH – A 2002) Tìm nghiệm $x \in (0;2\pi)$ của phương trình: $5\left(\sin x + \dfrac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3$

Giải:

Ta có: $\cos 3x + \sin 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x =$
$4(\cos x - \sin x)(1 + \sin x\cos x) - 3(\cos x - \sin x) = (\cos x - \sin x)(1 + 4\sin x\cos x)$

Và $1 + 2\sin 2x = 1 + 4\sin x\cos x$

Khi đó phương trình thành:

$5\sin x + 5\cos x - 5\sin x = \cos 2x + 3 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$

Xét $0 < \dfrac{\pi}{3} + k2\pi < 2\pi \Leftrightarrow \dfrac{-1}{6} < k < \dfrac{5}{6} \Leftrightarrow k = 0$ vì $k \in \mathbb{Z}$ ta được $x = \dfrac{\pi}{3}$

Xét $0 < -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi < 2\pi \Leftrightarrow \dfrac{1}{6} < k < \dfrac{7}{6} \Leftrightarrow k = 1$ vì $k \in \mathbb{Z}$ ta được $x = \dfrac{5\pi}{3}$

Đs: $x = \dfrac{\pi}{3}; x = \dfrac{5\pi}{3}$

Cách 2: Quy đồng hai vế… bạn đọc tự giải

Bài tập tự giải:

Bài 1: (ĐHNN – 2000) Giải phương trình: $2\cos 2x - 8\cos x + 7 = \dfrac{1}{\cos x}$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

Bài 2: (ĐHL – 2000) Giải phương trình: $4(\sin 3x - \cos 2x) = 5(\sin x - 1)$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$ với $\sin\alpha = -\dfrac{1}{4}$

c. Đưa về các dạng phương trình đối xứng

Chú ý một số dạng đối xứng bậc chẵn với sin va cos

Dạng 1: $a(\sin^4 x + \cos^4 x) + b\sin 2x + c = 0$

Đặt $t = \sin 2x, |t| \le 1 \Rightarrow \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x$

Dạng 2: $a(\sin^4 x + \cos^4 x) + b\cos 2x + c = 0$

Đặt $t = \cos 2x, |t| \le 1 \Rightarrow \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \dfrac{1}{2}(1 - \cos^2 2x)$

Dạng 3: $a(\sin^6 x + \cos^6 x) + b\sin 2x + c = 0$

Đặt $t = \sin 2x, |t| \le 1 \Rightarrow \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2x$

Dạng 4: $a(\sin^6 x + \cos^6 x) + b\cos 2x + c = 0$

Đặt $t = \cos 2x, |t| \le 1 \Rightarrow \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \dfrac{3}{4}(1 - \cos^2 2x)$

Dạng 5: $a(\sin x + \cos x) + b\sin x\cos x + c = 0$

Đặt $t = \sin x + \cos x, |t| \le \sqrt{2} \Rightarrow \sin x\cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$

Dạng 6: $a(\sin x - \cos x) + b\sin x\cos x + c = 0$

Đặt $t = \sin x - \cos x, |t| \le \sqrt{2} \Rightarrow \sin x\cos x = \dfrac{1 - t^2}{2}$

Dạng 7: $a\sin^4 x + b\cos^4 x + c.\cos 2x + d = 0$

Đặt $t = \cos 2x, |t| \le 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = \dfrac{1-t}{2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1+t}{2} \end{cases}$

Bài 1: (ĐHSP HCM – 2000) Giải phương trình $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sqrt{3}\sin 4x = 2$

Giải:

$\Leftrightarrow 4\left(1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x\right) + \sqrt{3}\sin 4x = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 4x - 2\sin^2 2x = -2 \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 4x + \cos 4x = -1$

$\Leftrightarrow \cos\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

Bài 2: (ĐHXD – 1994) Giải phương trình $\sin^6 x + \cos^6 x = \sin 2x$

Giải:

$\Leftrightarrow 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2x = \sin 2x \Leftrightarrow 3\sin^2 2x + 4\sin 2x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = -2 \ (loai) \\ \sin 2x = 2/3 = \sin\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 3: (ĐH – A 2007) Giải phương trình: $\left(1 + \sin^2 x\right)\cos x + \left(1 + \cos^2 x\right)\sin x = 1 + \sin 2x$

Giải:

Nhận xét:

Phương trình có tính chất đối xứng, điều đó gợi ý cho ta biến đối về phương trình đối xứng với sin và cos bằng cách đặt $t = \sin x + \cos x$

Phương trình $\Leftrightarrow \cos x + \sin^2 x\cos x + \sin x + \cos^2 x\sin x = (\sin x + \cos x)^2$

$\Leftrightarrow \cos x + \sin x + \sin x\cos x(\sin x + \cos x) = (\sin x + \cos x)^2$

$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(1 + \sin x\cos x - \sin x - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin x + \cos x - \sin x\cos x - 1 = 0 \end{array}\right.$

Với phương trình thứ nhất ta có $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

Với phương trình thứ hai đặt $t = \sin x + \cos x$ ta được

$t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \ \Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.; k \in \mathbb{Z}$

Đs: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Bài tập tự giải:

Bài 1: (ĐHH – D 2000) Giải phương trình: $\sin x\cos x + 2\sin x + 2\cos x = 2$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

Bài 2: (ĐHM – 1999) Giải phương trình: $1 + \tan x = 2\sqrt{2}\sin x$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{5\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{11\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

Bài 4: (HVCTQG HCM – 2000) Giải phương trình: $2\sin 2x - 2(\sin x + \cos x) + 1 = 0$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

b. Phương trình đối xứng với tan và cot

Bài 1: Giải phương trình: $\tan^2 x + \cot^2 x + 2(\tan x + \cot x) = 6$ (*)

Giải:

Điều kiện: $\sin x\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$ (k ∈ Z)

$(*) \Leftrightarrow (\tan x + \cot x)^2 - 2 + 2(\tan x + \cot x) = 6$

$\Leftrightarrow (\tan x + \cot x)^2 + 2(\tan x + \cot x) - 8 = 0$

$\Leftrightarrow \tan x + \cot x = 2 \ (1) \vee \tan x + \cot x = -4 \ (2)$

$(1) \Leftrightarrow \tan x + \frac{1}{\tan x} = 2 \Leftrightarrow \tan^2 x - 2\tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\tan x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \tan x = 1 = \tan\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ (k ∈ Z)

$(2) \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = -4 \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = -4\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow -2\sin 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6})$

$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee 2x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$ (k ∈ Z)

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi \ \vee\ x=-\frac{\pi}{12}+k\pi \ \vee\ x=\frac{7\pi}{12}+k\pi \quad (k\in Z)$

Cách 2:

đặt $t=\tan x+\cot x\Rightarrow t^2=(\tan x+\cot x)^2=\tan^2 x+\cot^2 x+2\tan x\cot x=\tan^2 x+\cot^2 x+2$

$\geq 2\sqrt{\tan^2 x\cot^2 x}+2=4\Rightarrow t^2\geq 4\Rightarrow |t|\geq 2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\geq 2\\ t\leq -2\end{array}\right.$

- Khi $t=2\Leftrightarrow \tan x+\cot x=2 \ \Leftrightarrow \tan x+\frac{1}{\tan x}=2\Leftrightarrow \tan^2 x-2\tan x+1=0\Leftrightarrow (\tan x-1)^2=0$

$\Leftrightarrow \tan x=1=\tan\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi \quad (k\in Z)$

- Khi $t=-4\Leftrightarrow \tan x+\cot x=-4 \ \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=-4\Leftrightarrow \sin^2 x+\cos^2 x=-4\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow -2\sin 2x=1\Leftrightarrow \sin 2x=-\frac{1}{2}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow 2x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\vee 2x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{12}+k\pi\vee x=\frac{7\pi}{12}+k\pi \quad (k\in Z)$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi \ \vee\ x=-\frac{\pi}{12}+k\pi \ \vee\ x=\frac{7\pi}{12}+k\pi \quad (k\in Z)$

Bài tập tự giải:

Bài 1: (ĐHCĐ – 1997) Giải phương trình: $\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\tan x+\cot x$

Đs: $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

Bài 2: (ĐHNN – 1997) Giải phương trình: $\cot x-\tan x=\sin x+\cos x$

Đs: $x=-\frac{\pi}{4}\pm\alpha+k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$ với $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$

Bài 3: (ĐHCT – D 1999) Giải phương trình: $3(\tan x+\cot x)=2(2+\sin 2x)$

Đs: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

Bài 4: (ĐHGTVT – 1995) Giải phương trình: $\tan 2x+\cot x=8\cos^2 x$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\\ x=\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$

Bài 5: (ĐHQGHN – B 1996) Giải phương trình: $\tan x=\cot x+2\cot^3 2x$

Đs: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \quad (k\in\mathbb{Z})$

Bài 6: (DLĐĐ – 1997) Giải phương trình: $\tan x + \cot x = 2\left(\sin 2x + \cos 2x\right)$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. \quad \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Bài 7: (DLĐĐ – 1998) Giải phương trình: $\cot x = \tan x + 2\tan 2x$

Đs: $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4} \quad \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Bài 8: (Đề 97 II) Giải phương trình: $6\tan x + 5\cot 3x = \tan 2x$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\alpha}{2} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{\beta}{2} + k\pi \end{array}\right. \quad \left(k \in \mathbb{Z}\right)$ với $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}; \cos\beta = -\dfrac{1}{4}$

Bài 9: (ĐHYHN – 1998) Giải phương trình: $2\left(\cot 2x - \cot 3x\right) = \tan 2x + \cot 3x$

Phương trình vô nghiệm

Bài 10: (QGHN – 1996) Giải phương trình: $\tan^2 x - \tan x \tan 3x = 2$

Đs: $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \quad \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Bài 11: (ĐHTH – 1993) Giải phương trình: $3\tan 2x - 4\tan 3x = \tan^2 3x \tan 2x$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\alpha + k\pi \end{array}\right. \quad \left(k \in \mathbb{Z}\right)$ với $\tan\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{3}{5}}$

Bài 12: (CĐHQ – 2000) Giải phương trình: $3\tan^2 x + 4\tan x + 4\cot gx + 3\cot^2 x + 2 = 0$

Đs: $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \quad \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Bài 13: (ĐHDHN – 2001) Giải phương trình: $\tan^2 x.\cot^2 2x.\cot 3x = \tan^2 x - \cot^2 2x + \cot 3x$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. \quad \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Bài 14: (CĐGT – 2001) Giải phương trình: $\tan^2 x.\tan^2 3x.\tan 4x = \tan^2 - \tan^2 3x + \tan 4x$

Đs: $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. \quad \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Bài 15: (ĐHNT HCM – 1997) Giải phương trình: 2tan x + cot x = $\sqrt{3} + \dfrac{2}{\sin x}$

Đs: $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \quad \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

c. Phương trình dạng thuận ngịch

Dạng 1: $A\left[f^2(x)+\dfrac{k^2}{f^2(x)}\right]+B\left[f(x)+\dfrac{k}{f(x)}\right]+C=0$

Với $\begin{cases} f(x)=\sin x,\cos x \\ k\ge 1\end{cases}$

Đặt $t=f(x)+\dfrac{k}{f(x)}\Rightarrow f^2(x)+\dfrac{k^2}{f^2(x)}=t^2-k$ (tùy từng trường hợp cụ thể để tìm điều kiện của tham số t)

Ta được phương trình $At^2+Bt+C-2Ak=0$

Dạng 2: $A\left(a^2\tan^2 x+b^2\cot^2 x\right)+B\left(a\tan x+b\cot x\right)+C=0$

Đặt $t=a\tan x+b\cot x\Rightarrow a^2\tan^2 x+b^2\cot^2 x=t^2-2ab$

Thay vào phương trình ban đầu ta được một phương trình bậc 2 theo t

Bài 1: Giải phương trình $4\left(\sin^2 x+\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)+4\left(\sin x+\dfrac{1}{\sin x}\right)-7=0$

Giải:

Điều kiện: $\sin x\ne 0$

$\Leftrightarrow 4\left[\left(\sin x+\dfrac{1}{\sin x}\right)^2-2\right]+4\left(\sin x+\dfrac{1}{\sin x}\right)-7=0\Leftrightarrow 4\left(\sin x+\dfrac{1}{\sin x}\right)^2+4\left(\sin x+\dfrac{1}{\sin x}\right)-15=0$

$\Leftrightarrow \sin x+\dfrac{1}{\sin x}=\dfrac{3}{2}\ (1)\vee \sin x+\dfrac{1}{\sin x}=-\dfrac{5}{2}\ (2)$.

(1) $\Leftrightarrow 2\sin^2 x-3\sin x+2=0$ (vô nghiệm)

(2) $\Leftrightarrow 2\sin^2 x+5\sin x+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-2 \text{ (loai)}\\ \sin x=-\dfrac{1}{2}=\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\vee x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

$\left(\cos^2 x+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)-2\left(\dfrac{1}{\cos x}+\cos x\right)+2=0$

Điều kiện: $\cos x\ne 0$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{\cos x}+\cos x\right)^2-2=2\left(\dfrac{1}{\cos x}+\cos x\right)-2\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{\cos x}+\cos x\right)^2=2\left(\dfrac{1}{\cos x}+\cos x\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos x}+\cos x=0\ (1)\vee\dfrac{1}{\cos x}+\cos x=2\ (2)$

(1) $\Leftrightarrow 1+\cos^2 x=0\Leftrightarrow \cos^2 x=-1$ (vô nghiệm)

(2) $\Leftrightarrow \cos^2 x-2\cos x+1=0\Leftrightarrow(\cos x-1)^2=0\Leftrightarrow\cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi\quad (k\in\mathbb{Z})$

Bài 2: (ĐHTM – 2001) Giải phương trình $\dfrac{2}{\sin^2 x}+2\tan^2 x+5(\tan x+\cot x)+4=0$ (1)

Giải:

Nhận xét:

Từ phương trình thấy xuất hiện $\frac{1}{\sin^2 x}$ và $\cot^2 x$ ta nghĩ đến công thức $1+\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$, sau khi thay vào ta được một phương trình đối xứng với tan và cot

Điều kiện: $\sin x\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

$(1) \Leftrightarrow 2(1+\cot^2 x) + 2\tan^2 x + 5(\tan x + \cot x) + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2(\tan^2 x + \cot^2 x) + 5(\tan x + \cot x) + 4 = 0 \Leftrightarrow 2\left[(\tan x + \cot x)^2 - 2\right] + 5(\tan x + \cot x) + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2(\tan x + \cot x)^2 + 5(\tan x + \cot x) = 0 \quad (*)$

Đặt: $t = \tan x + \cot x \Rightarrow t^2 = (\tan x + \cot x)^2 = \tan^2 x + \cot^2 x + 2\tan x\cot x = \tan^2 x + \cot^2 x + 2$

$\geq 2\sqrt{\tan^2 x\cot^2 x} + 2 = 4 \Rightarrow t^2 \geq 4 \Rightarrow |t| \geq 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \geq 2 \\ t \leq -2 \end{array}\right.$.

Phương trình $(*) \Leftrightarrow 2t^2 + 5t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\frac{5}{2} \\ t = 0 \ \text{(loai)} \end{array}\right.$

Khi $t = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = -5\sin x\cos x \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{5} = \sin\alpha$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \alpha + k2\pi \\ 2x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Bài 3: Giải phương trình $\frac{3}{\cos^2 x} + 3\cot^2 x + 4(\tan x + \cot x) - 1 = 0 \quad (1)$.

Giải:

Nhận xét:

Từ phương trình thấy xuất hiện $\frac{1}{\cos^2 x}$ và $\tan^2 x$ ta nghĩ đến công thức $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, sau khi thay vào ta được một phương trình đối xứng với tan và cot

Điều kiện: $\sin x\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

$(1) \Leftrightarrow \frac{3}{\cos^2 x} + 3\cot^2 x + 4(\tan x + \cot x) - 1 = 0 \Leftrightarrow 3(1+\tan^2 x) + 3\cot^2 x + 4(\tan x + \cot x) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 3(\tan^2 x + \cot^2 x) + 4(\tan x + \cot x) + 2 = 0 \Leftrightarrow 3\left[(\tan x + \cot x)^2 - 2\right] + 4(\tan x + \cot x) + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 3(\tan x + \cot x)^2 + 4(\tan x + \cot x) - 4 = 0 \quad (*)$

Đặt: $t = \tan x + \cot x \Rightarrow t^2 = (\tan x + \cot x)^2 = \tan^2 x + \cot^2 x + 2\tan x\cot x = \tan^2 x + \cot^2 x + 2$

$\geq 2\sqrt{\tan^2 x\cot^2 x} + 2 = 4 \Rightarrow t^2 \geq 4 \Rightarrow |t| \geq 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \geq 2 \\ t \leq -2 \end{array}\right.$.

$(*) \Leftrightarrow 3t^2 + 4t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \vee t = \frac{2}{3}$ (loai)

Khi : $t = -2 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = -2 \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = -2\sin x\cos x \Leftrightarrow \sin 2x = -1$

$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

7. Đưa về phương trình tích

Xu hướng trong đề thi đại học các năm gần đây giải phương trình lượng giác thường đưa về phương trình tích bằng cách sử dụng các công thức lượng giác, các phép biến đổi lượng giác, các kĩ năng tách nhóm, đặt nhân tưt chung… quan sát các bài sau đây

a. Môt số bài toán cơ bản

Bài 1: (ĐHNT – D 1997) Giải phương trình $2\tan x + \cot x = \sqrt{3} + \frac{2}{\sin 2x}$

Giải:

Điều kiện: $\sin x\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \frac{2\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \sqrt{3} + \frac{1}{\sin x\cos x}$.

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \cos^2 x = \sqrt{3}\sin x\cos x + 1 \Leftrightarrow 1 + \sin^2 x = \sqrt{3}\sin x\cos x + 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = \sqrt{3}\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \quad (loai) \\ \sin x = \sqrt{3}\cos x \end{array}\right. \Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 2: (GTVT – 1995) Giải phương trình $\tan 2x + \cot x = 8\cos^2 x$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 8\cos^2 x$

$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x\sin x + \cos 2x\cos x}{\cos 2x\sin x} = 8\cos^2 x \Leftrightarrow \cos x = 8\cos^2 x\cos 2x\sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ 8\cos x\cos 2x\sin x = 1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ 4\cos 2x\sin 2x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ 2\sin 4x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin 4x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Bài 3: (GTVT – 1996) Giải phương trình $3(\cot x - \cos x) - 5(\tan x - \sin x) = 2$

Giải:

Điều kiện $\begin{cases}\cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow 3(\cot x - \cos x + 1) - 5(\tan x - \sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow 3\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \cos x + 1\right) - 5\left(\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{\cos x - \sin x\cos x + \sin x}{\sin x}\right) - 5\left(\frac{\sin x - \sin x\cos x + \cos x}{\sin x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x\cos x + \sin x)\left(\frac{3}{\sin x} - \frac{5}{\cos x}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x - \sin x\cos x + \sin x = 0 \quad (1) \\ \dfrac{3}{\sin x} = \dfrac{5}{\cos x} \quad (2)\end{array}\right.$$

$$(1) \Leftrightarrow t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = 1 - \sqrt{2} \\ t = 1 + \sqrt{2}\ (loaïi)\end{array}\right. \quad \left(t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow |t| \leq \sqrt{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sin\alpha \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \alpha + 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{3}{\sin x} = \frac{5}{\cos x} \Leftrightarrow \tan x = \frac{3}{5} = \tan\beta \Leftrightarrow x = \beta + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 4: (QGHN – 1997) Giải phương trình $2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$

Phương trình $\Leftrightarrow 2(\sin x + \cos x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x\cos x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x + \cos x = 0 \\ \sin 2x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = -1 \\ \sin 2x = 1\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + 2m\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + m\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

Bài 5: (ĐHTCKT – 1997) Giải phương trình $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$

Điều kiện: $\cos x \neq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)^2}{\cos x} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)^2 = \cos x + \sin x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x + \sin x = 0 \\ \cos^2 x - \sin^2 x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = -1 \\ \cos 2x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 6: Giải phương trình $2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$

Giải:

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x} \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(2-\frac{1}{\sin x\cos x}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin(x+\frac{\pi}{4})=0\\ \begin{cases}\sin x\cos x\neq 0\\ 2\sin x\cos x=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ \begin{cases}\sin 2x\neq 0\\ \sin 2x=1\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \Rightarrow \sin 2x=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1\neq 0\\ \sin 2x=1\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi \quad (k\in Z)$$

Bài 7: Giải phương trình : $2\sin x(1+\cos 2x)+\sin 2x=1+2\cos x$

Giải:

Cách 1:

Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin x2\cos^2 x+2\sin x\cos x=1+2\cos x \Leftrightarrow (2\cos x+1)(2\sin x\cos x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-\frac{1}{2}\\ \sin 2x=1\end{array}\right.$$

Cách 2:

Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin x\cos 2x-(1-\sin 2x)-2(\cos x-\sin x)=0$

$$\Leftrightarrow 2\sin x(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)-(\cos x-\sin x)^2-2(\cos x-\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)(2\sin x\cos x+2\sin^2 x-\cos x+\sin x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)(2\sin x\cos x-2\cos^2 x-\cos x+\sin x)=0$$

Bài 8: Giải phương trình : $\cos 2x+3\sin 2x+5\sin x-3\cos x=3$

Giải:

$$\Leftrightarrow (6\sin x\cos x-3\cos x)-(2\sin^2 x-5\sin x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow 3\cos x(2\sin x-1)-(2\sin x-1)(\sin x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x-1)(3\cos x-\sin x+2)=0$$

Bài 9: Giải phương trình: $3\tan 3x+\cot 2x=2\tan x+\frac{2}{\sin 4x}$

Giải:

Điều kiện : $\begin{cases}\cos 3x\neq 0\\ \sin 2x\neq 0\\ \cos x\neq 0\\ \sin 4x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq \frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\\ x\neq\frac{k\pi}{4}\end{cases}, k\in\mathbb{Z}$ (*)

Phương trình $\Leftrightarrow 2(\tan 3x - \tan x) + (\tan 3x + \cot 2x) = \dfrac{2}{\sin 4x} \Leftrightarrow \dfrac{2\sin 2x}{\cos 3x \cos x} + \dfrac{\cos x}{\cos 3x \sin 2x} = \dfrac{2}{\sin 4x}$

$\Leftrightarrow 4\sin 4x \sin x + 2\cos 2x \cos x = 2\cos 3x \Leftrightarrow 4\sin 4x \sin x + \cos 3x + \cos x = 2\cos 3x$

$\Leftrightarrow 4\sin 4x \sin x = \cos 3x - \cos x \Leftrightarrow 8\sin 2x \cos 2x \sin x = -2\sin 2x \sin x \qquad (do \ \ (*))$

$\Leftrightarrow \cos 2x = -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}\alpha + m\pi, m \in Z$

nghiệm này thoả mãn ĐK

Bài 10: Giải phương trình : $\dfrac{4\cos^3 x + 2\cos^2 x(2\sin x - 1) - \sin 2x - 2(\sin x + \cos x)}{2\sin^2 x - 1} = 0$

Giải:

Điều kiện : $2\sin^2 x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Phương trình $\Leftrightarrow 4\cos^2 x(\sin x + \cos x) - 2\cos x(\sin x + \cos x) - 2(\sin x + \cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow 2(\sin x + \cos x)(\cos x - 1)(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + m\pi \\ x = m2\pi \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + m2\pi \end{array}\right., m \in \mathbb{Z}$$

Kiểm tra điều kiện ta được nghiệm $x = \dfrac{m2\pi}{3}, m \in Z$

Bài 11: Giải phương trình: $8\sqrt{2}\cos^6 x + 2\sqrt{2}\sin^3 x \sin 3x - 6\sqrt{2}\cos^4 x - 1 = 0$

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos^3 x(4\cos^3 x - 3\cos x) + 2\sqrt{2}\sin^3 x \sin 3x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x.2\cos x \cos 3x + 2\sin^2 x.2\sin x \sin x3x = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (1 + \cos 2x)(\cos 2x + \cos 4x) + (1 - \cos 2x)(\cos 2x - \cos 4x) = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2(\cos 2x + \cos 2x \cos 4x) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos 2x(1 + \cos 4x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos 2x.\cos^2 2x = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{8} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Bài 12: Giải phương trình $\dfrac{1}{\tan x + \cot 2x} = \dfrac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}{\cot x - 1}$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x.\sin 2x.\sin x.(\tan x + \cot 2x) \neq 0 \\ \cot x \neq 1 \end{cases}$

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}} = \dfrac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}{\dfrac{\cos x}{\sin x} - 1} \Leftrightarrow \dfrac{\cos x.\sin 2x}{\cos x} = \sqrt{2}\sin x$

$\Leftrightarrow 2\sin x.\cos x = \sqrt{2}\sin x$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện, ta được họ nghiệm của phương trình đã cho là $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Bài 13: Giải phương trình: $\sin 2x(\cos x + 3) - 2\sqrt{3}\cos^3 x - 3\sqrt{3}\cos 2x + 8\left(\sqrt{3}\cos x - \sin x\right) - 3\sqrt{3} = 0$

Giải

$\sin 2x(\cos x + 3) - 2\sqrt{3}.\cos^3 x - 3\sqrt{3}.\cos 2x + 8(\sqrt{3}.\cos x - \sin x) - 3\sqrt{3} = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x.\cos^2 x + 6\sin x.\cos x - 2\sqrt{3}.\cos^3 x - 6\sqrt{3}\cos^2 x + 3\sqrt{3} + 8(\sqrt{3}.\cos x - \sin x) - 3\sqrt{3} = 0$

$\Leftrightarrow -2\cos^2 x(\sqrt{3}\cos x - \sin x) - 6.\cos x(\sqrt{3}\cos x - \sin x) + 8(\sqrt{3}\cos x - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{3}\cos x - \sin x)(-2\cos^2 x - 6\cos x + 8) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{3}\cos x - \sin x = 0 \\ \cos^2 x + 3\cos x - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = \sqrt{3} \\ \cos x = 1 \\ \cos x = 4 \quad (loai) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Bài 14: (ĐH – A 2003) Giải phương trình: $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x$

Giải:

Điều kiện: $\cos x \neq 0, \sin x \neq 0, \tan x \neq -1$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = \frac{\cos x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)}{\cos x + \sin x} + \sin^2 x - \sin x\cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = \cos^2 x - \sin x\cos x + \sin^2 x - \sin x\cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = 1 - 2\sin x\cos x$$

$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = \sin x(\cos x - \sin x)^2 \Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(1 - \sin x\cos x + \sin^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(2\tan^2 x - \tan x + 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ (thỏa mãn điều kiện) (vì $2\tan^2 x - \tan x + 1 = 0$ vô nghiệm)

Đs: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Bài 15: (ĐH – D 2004) Giải phương trình: $\left(2\cos x-1\right)\left(2\sin x+\cos x\right)=\sin 2x-\sin x$

Giải:

$\Leftrightarrow \left(2\cos x-1\right)\left(2\sin x+\cos x\right)=\sin x\left(2\cos x-1\right)$

$\Leftrightarrow (2\cos x-1)(\sin x+\cos x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\cos x-1=0\\ \sin x+\cos x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{1}{2}\\ \tan x=-1\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}$

Đs: $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Bài 16: (ĐH – A 2007) Giải phương trình: $\left(1+\sin^2 x\right)\cos x+\left(1+\cos^2 x\right)\sin x=1+\sin 2x$

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow \cos x+\sin^2 x\cos x+\sin x+\cos^2 x\sin x=(\sin x+\cos x)^2$

$\Leftrightarrow \cos x+\sin x+\sin x\cos x(\sin x+\cos x)=(\sin x+\cos x)^2$

$\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)(1+\sin x\cos x-\sin x-\cos x)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0\\ \sin x+\cos x-\sin x\cos x-1=0\end{array}\right.$

Với phương trình thứ nhất ta có $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$

Với phương trình thứ hai đặt $t=\sin x+\cos x$ ta được

$t^2-2t+1=0\Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}$

Đs: $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi, x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, x=k2\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Bài 17: ĐH – B 2007) Giải phương trình: $2\sin^2 2x+\sin 7x-1=\sin x$

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow \sin 7x-\sin x-\left(1-2\sin^2 2x\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\cos 4x.\sin 3x-\cos 4x=0$

$\Leftrightarrow \cos 4x\left(2\sin 3x-1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x=0\\ \sin 3x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 3x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right. ,k \in \mathbb{Z}$$

Đs: $x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}; x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Bài 18: (ĐH – D 2008) Giải phương trình: $2\sin x\left(1 + \cos 2x\right) + \sin 2x = 1 + \cos x$

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow 4\sin x.\cos^2 x + 2\sin x.\cos x = 1 + 2\cos x$

$\Leftrightarrow 2\sin x.\cos x(1 + 2\cos x) = 1 + 2\cos x$

$\Leftrightarrow (1 + 2\cos x)(\sin 2x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{-1}{2} \\ \sin 2x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$$

Đs: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Bài 19: (ĐH – B 2010) Giải phương trình: $\left(\sin 2x + \cos 2x\right)\cos x + 2\cos 2x - \sin x = 0$

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin^2 x.\cos x - \sin x + \cos 2x.\cos x + 2\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\left(2\cos^2 x - 1\right) + \left(\cos x + 2\right)\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x\left(\sin x + \cos x + 2\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} < -1\left(loai\right) \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Đs: $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Bài 20: (ĐH – D 2010) Giải phương trình : $\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 1 = 0$

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin x\cos x - 1 + 2\sin^2 x + 3\sin x - \cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos(2\sin x - 1) + 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) + (2\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\cos x + \sin x + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \cos x + \sin x = -2\,(VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Bài 21: (ĐHDB – 2003) Giải phương trình: $3 - \tan x\left(\tan x + 2\sin x\right) + 6\cos x = 0$

HD:
Điều kiện: cosx $\neq 0$
Phương trình

$$\Leftrightarrow 3 - \frac{\sin x}{\cos x}\left(\frac{\sin x + 2\sin x\cos x}{\cos x}\right) + 6\cos x = 0 \Leftrightarrow 3\cos^2 x - \sin^2 x(1 + 2\cos x) + 6\cos^3 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\cos^2 x(1 + 2\cos x) - \sin^2 x(1 + 2\cos x) = 0 \Leftrightarrow (1 + 2\cos x)(3\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{1}{2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 + \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$$

Đs: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

Bài 22: (ĐHDB – 2003) Giải phương trình: $\cos 2x + \cos x\left(2\tan^2 x - 1\right) = 2$

HD:
Điều kiện: cosx $\neq 0$
Phương trình

$$\Leftrightarrow \cos 2x + 2\frac{\sin^2 x}{\cos x} - \cos x = 2 \Leftrightarrow 2\frac{\sin^2 x}{\cos x} - \cos x = 2 - \cos 2x = 1 + 2\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right) = 1 + \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 x)(1 - \cos x) = (1 + \cos x)\cos x \Leftrightarrow (1 + \cos x)[2(1 - \cos x)^2 - \cos x] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Đs: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 23: (ĐHDB – 2003) Giải phương trình: $\dfrac{\cos^2 x(\cos x - 1)}{\sin x + \cos x} = 2(1 + \sin x)$

HD:

Điều kiện: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \neq 0$

Phương trình $\Leftrightarrow (1-\sin^2 x)(\cos x-1)=2(\sin x+\cos x)(1+\sin x)$

$\Leftrightarrow (1+\sin x)[(1-\sin x)(\cos x-1)-2(\sin x+\cos x)]=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\(1+\cos x)(1+\sin x)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\\cos x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\x=\pi+k2\pi\end{array}\right.$$

Đs: $x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, x=\pi+k2\pi; k\in\mathbb{Z}$

b. Một số bài toán đặc biệt

Bài 1: (QGHN – B 1999) Giải phương trình $\sin^6 x+\cos^6 x=2(\sin^8 x+\cos^8 x)$

Giải:

$\Leftrightarrow \sin^6 x-2\sin^8 x=2\cos^8 x-\cos^6 x$

$\Leftrightarrow \sin^6 x(1-2\sin^2 x)=\cos^6 x(2\cos^2 x-1) \Leftrightarrow \sin^6 x\cos 2x=\cos^6 x\cos 2x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\\sin^6 x=\cos^6 x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\\tan^6 x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\\tan x=\pm 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+m\dfrac{\pi}{2}\\x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+m\dfrac{\pi}{2}\quad (m\in Z)$$

Bài 2: (ĐHNT – D 2000) Giải phương trình $\sin^8 x+\cos^8 x=2(\sin^{10} x+\cos^{10} x)+\dfrac{5}{4}\cos 2x$

Giải:

$\Leftrightarrow 2\cos^{10} x-\cos^8 x+2\sin^8 x-\sin^8 x+\dfrac{5}{4}\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow \cos^8 x(2\cos^2 x-1)-\sin^8 x(1-2\sin^2 x)+\dfrac{5}{4}\cos 2x=0 \Leftrightarrow \cos^8 x\cos 2x-\sin^8 x\cos 2x+\dfrac{5}{4}\cos 2x=0$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\left(\cos^8 x-\sin^8 x+\dfrac{5}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\\sin^8 x=\cos^8 x+\dfrac{5}{4}>1\ VN\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$$

Bài 3: (ĐHQGHN – D 1998) Giải phương trình $\sin^3 x+\cos^3 x=2(\sin^5 x+\cos^5 x)$

Giải:

Cách 1:

$\Leftrightarrow \sin^3 x-2\sin^5 x=2\cos^5 x-\cos^3 x$

$\Leftrightarrow \sin^3 x(1-2\sin^2 x)=\cos^3 x(2\cos^2 x-1) \Leftrightarrow \sin^3 x\cos 2x=\cos^3 x\cos 2x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\\sin^3 x=\cos^3 x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\\tan^3 x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\\tan x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+m\dfrac{\pi}{2}\vee x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+m\dfrac{\pi}{2}\quad (m\in Z)$$

Cách 2:

$\sin^3 x+\cos^3 x=2(\sin^5 x+\cos^5 x)$

$\Leftrightarrow (\sin^3 x+\cos^3 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)=2(\sin^5 x+\cos^5 x)$

$\Leftrightarrow \sin^3 x\cos^2 x+\cos^3 x\sin^2 x=\sin^5 x+\cos^5 x \Leftrightarrow \sin^3 x(\cos^2 x-\sin^2 x)=\cos^3 x(\cos^2 x-\sin^2 x)$

$$\Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^3 x - \sin^3 x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos^2 x - \sin^2 x = 0\\ \cos^3 x - \sin^3 x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos^2 x - \sin^2 x = 0\\ \cos x = \sin x\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos^2 x - \sin^2 x = 0\\ \cos x = \sin x\end{array}\right. \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad (\mathrm{k} \in \mathrm{Z})$$

LỜI KẾT

Lượng giác và ứng dụng của lượng giác là một phần không thể thiếu trong các đề thi đại học, chính vì thế ngoài việc nắm bắt các công thức và vận dụng linh hoạt đòi hỏi các bạn học sinh phải thuần thục các kĩ năng, kĩ sảo, quan sát một cách tinh tế mới có thể làm được

Hi vọng qua chuyên mục nhỏ này sẽ giúp các em vững tin hơn khi bước vào phòng thi, tài liệu không thể tránh khỏi những sai sót và hạn chế vì tuổi đời còn trẻ kinh nghiệm và kiến thức còn hạn chế rất mong các bạn bỏ qua

Góp ý theo địa chỉ Email: Loinguyen1310@gmail.com hoặc địa chỉ: Nguyễn Thành Long
Số nhà 15 – Khu phố 6 – Phường ngọc trạo – Thị xã bỉm sơn – Thành phố thanh hóa

"Vì một ngày mai tươi sáng, các em hãy cố lên, chúc các em học tốt và đạt kết quả cao… chào thân ái"