TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

3 2012
Số 417

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 49
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

Kết quả Kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT năm 2012 - môn Toán

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT

NĂM 2012 - MÔN TOÁN

NGUYỄN KHẮC MINH
(Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD - Bộ Giáo dục và Đào tạo)

Kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT năm 2012 đã được tổ chức trong các ngày 11 và 12/ 01/ 2012, cho 12 môn học. Tham dự kì thi, ở môn Toán có 421 học sinh (nhiều hơn 9 học sinh so với năm 2011) thuộc 69 đơn vị dự thi (mỗi đơn vị dự thi là một Tỉnh, Thành phố trực thuộc Trung ương hoặc một Đại học, trường đại học có trường THPT chuyên).

I. ĐỀ THI

Ngày thi thứ nhất (11/01/2012)

Bài 1 (5 *điểm*). Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi $x_1 = 3$ và $x_n = \dfrac{n+2}{3n}(x_{n-1}+2)$ với mọi $n \geq 2$.

Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$. Tìm giới hạn đó.

Bài 2 (5 *điểm*). Cho các cấp số cộng (a_n), (b_n) và cho số nguyên $m > 2$. Xét m tam thức bậc hai: $P_k(x) = x^2 + a_k x + b_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Chứng minh rằng nếu hai tam thức $P_1(x)$ và $P_m(x)$ đều không có nghiệm thực thì tất cả các tam thức còn lại cũng không có nghiệm thực.

Bài 3 (5 *điểm*). Trong mặt phẳng, cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O và có các cặp cạnh đối không song song. Gọi M, N tương ứng là giao điểm của các đường thẳng AB và CD, AD và BC. Gọi P, Q, S, T tương ứng là giao điểm các đường phân giác trong của các cặp góc $\widehat{MAN}$ và $\widehat{MBN}$, $\widehat{MBN}$ và $\widehat{MCN}$, $\widehat{MCN}$ và $\widehat{MDN}$, $\widehat{MDN}$ và $\widehat{MAN}$. Giả sử bốn điểm P, Q, S, T đôi một phân biệt.

1) Chứng minh rằng bốn điểm P, Q, S, T cùng nằm trên một đường tròn. Gọi I là tâm của đường tròn đó.

2) Gọi E là giao điểm của các đường chéo AC và BD. Chứng minh rằng ba điểm E, O, I thẳng hàng.

Bài 4 (5 *điểm*). Cho số nguyên dương n. Có n học sinh nam và n học sinh nữ xếp thành một hàng ngang, theo thứ tự tùy ý. Mỗi học sinh X (trong số $2n$ học sinh vừa nêu) được cho một số kẹo bằng đúng số cách chọn ra hai học sinh khác giới với X và đứng ở hai phía của X. Chứng minh rằng tổng số kẹo mà tất cả $2n$ học sinh nhận được không vượt quá $\dfrac{1}{3}n(n^2-1)$.

Ngày thi thứ hai (12/01/2012)

Bài 5 (7 *điểm*). Cho một nhóm gồm 5 cô gái, kí hiệu là G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 và 12 chàng trai. Có 17 chiếc ghế được xếp thành một hàng ngang. Người ta xếp nhóm người đã cho ngồi vào các chiếc ghế đó sao cho các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:

1) Mỗi ghế có đúng một người ngồi;

2) Thứ tự ngồi của các cô gái, xét từ trái qua phải là G_1, G_2, G_3, G_4, G_5;

3) Giữa G_1 và G_2 có ít nhất 3 chàng trai;

4) Giữa G_4 và G_5 có ít nhất 1 chàng trai và nhiều nhất 4 chàng trai.

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp như vậy? (Hai cách xếp được coi là khác nhau nếu tồn tại một chiếc ghế mà người ngồi ở chiếc ghế đó trong hai cách xếp là khác nhau).

Bài 6 (7 *điểm*). Xét các số tự nhiên lẻ a, b mà a là ước số của b^2+2 và b là ước số của a^2+2. Chứng minh rằng a và b là các số hạng của dãy số tự nhiên (v_n) được xác định bởi $v_1 = v_2 = 1$ và $v_n = 4v_{n-1} - v_{n-2}$ với mọi $n \geq 3$.

Bài 7 (6 *điểm*). Tìm tất cả các hàm số f xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}$ và thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

1) f là toàn ánh từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$;

2) f là hàm số tăng trên $\mathbb{R}$;

3) $f(f(x)) = f(x) + 12x$ với mọi số thực x.

(Xem tiếp trang 14)

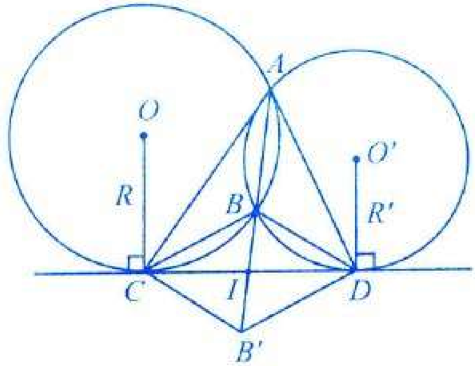
TỪ MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC

NGUYỄN THANH TOÀN
(GV THCS Vũ Vân, Vũ Thư, Thái Bình)

Mỗi bài toán đều chứa đựng rất nhiều điều lí thú và bổ ích, với một vài thao tác và suy luận đơn giản sau khi giải xong nó các bạn có thể tìm thấy những điều này. Thiết nghĩ đó là cách học vô cùng hiệu quả. Bài viết này như một minh chứng cho điều đó. Ta cùng bắt đầu từ một bài toán sau.

✪Bài toán 1. *Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$, $(R > R')$ cắt nhau tại hai điểm A, B. Một tiếp tuyến chung tiếp xúc với đường tròn (O) tại C, với đường tròn (O') tại D. Gọi I là giao điểm của AB với CD. Chứng minh rằng I là trung điểm của CD.*

Lời giải. (h. 1)



Hình 1

Ta có $\widehat{CAI} = \widehat{BCI} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BC} \Rightarrow \Delta ACI \backsim \Delta CBI$ (g, g) $\Rightarrow CI^2 = AI.BI$.

Tương tự ta có $ID^2 = AI.BI$. Do đó $IC = ID$ hay I là trung điểm CD. ❒

***Suy luận* 1.** Nếu lấy B' đối xứng với B qua điểm I thì $IB = IB'$, mà $IC = ID$ suy ra tứ giác $BCB'D$ là hình bình hành. Do đó ta có bài toán sau.

✪Bài toán 2. *Với giả thiết như Bài toán 1. Gọi B' là điểm đối xứng của B qua điểm I. Chứng minh rằng tứ giác BCB'D là hình bình hành.*

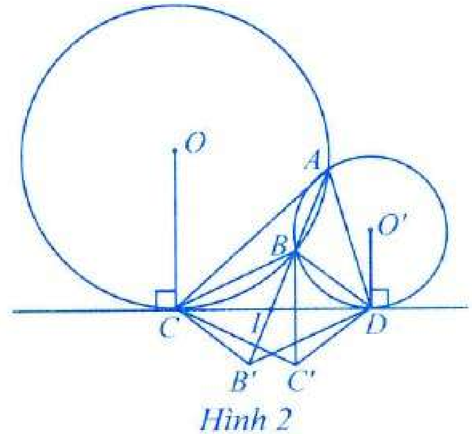
***Suy luận* 2.** Vì $BCB'D$ là hình bình hành nên $\widehat{CBD} = \widehat{CB'D}$. Mặt khác $\widehat{CAD} = \widehat{BCD} + \widehat{CDB}$, suy ra $\widehat{CAD} + \widehat{CB'D} = \widehat{CAD} + \widehat{CBD} = \widehat{BCD} + \widehat{CDB} + \widehat{CBD} = 180^\circ$ (1). Do đó tứ giác $ACB'D$ nội tiếp (2).

Lại có $\Delta CBD = \Delta DB'C$ (c.c.c) nên nếu kí hiệu (MNP) là đường tròn đi qua ba điểm M, N, P thì $(CB'D) = (CBD) = (ACD) = (ACB'D)$. Ta có bài toán sau đây.

✪Bài toán 3. *Với giả thiết của Bài toán 2. Chứng minh rằng hai đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD và tam giác BCD có bán kính bằng nhau.*

✪Bài toán 4. *Với giả thiết của Bài toán 1. Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD cắt AB tại B'. Chứng minh rằng B và B' đối xứng nhau qua điểm I.*

***Suy luận* 3.** Tương tự Bài toán 2 nếu gọi C' là điểm đối xứng của B qua CD (h. 2) thì CD là đường trung trực của BC'. Do đó $\Delta CBD = \Delta CC'D$ suy ra $\widehat{CBD} = \widehat{CC'D}$ (3)

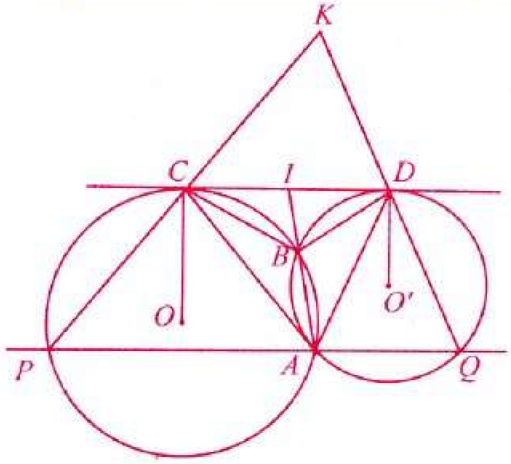


Hình 2

Từ (1) và (3) suy ra $\widehat{CAD} + \widehat{CC'D} = 180^\circ$, do đó tứ giác $ACC'D$ nội tiếp. Kết hợp với (2) ta nhận được bài toán sau.

✪Bài toán 5. *Với giả thiết của Bài toán 2. Gọi C' là điểm đối xứng với B qua CD. Chứng minh rằng năm điểm A, C, B', C', D cùng thuộc một đường tròn.*

***Suy luận* 4.** Từ Bài toán 1, qua A vẽ cát tuyến song song với CD (h. 3) cắt các đường tròn (O)



Hình 3

và (O') lần lượt tại điểm thứ hai là P và Q. Gọi K là giao điểm của PC và QD, ta có $\widehat{APC} = \widehat{CBI}$ (cùng bù với $\widehat{ABC}$); $\widehat{AQD} = \widehat{DBI}$ (cùng bù với $\widehat{ABD}$). Suy ra $\widehat{CBD} + \widehat{CKD} = \widehat{CBI} + \widehat{DBI} + \widehat{CKD}$ $= \widehat{APC} + \widehat{AQD} + \widehat{CKD} = 180^\circ$ (tổng ba góc của tam giác KPQ), do đó tứ giác $BCKD$ nội tiếp. Từ đó ta có bài toán sau.

✪**Bài toán 6.** *Với giả thiết của Bài toán 1. Qua A vẽ cát tuyến song song với CD cắt (O) tại P, cắt (O') tại Q. Gọi K là giao điểm của PC và QD. Chứng minh rằng tứ giác BCKD nội tiếp.*

***Suy luận* 5.** Dễ thấy $\widehat{APC} = \widehat{ACI} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AC}$ (4) mà $\widehat{APC} = \widehat{KCD}$ (đồng vị) nên $\widehat{ACD} = \widehat{KCD}$. Tương tự $\widehat{ADC} = \widehat{KDC}$, suy ra $\Delta ACD = \Delta KCD$ (g.c.g) $\Rightarrow CA = CK$ (5), $DA = DK$. Do vậy CD là đường trung trực của AK hay A, K đối xứng với nhau qua CD. Từ đó ta có bài toán sau

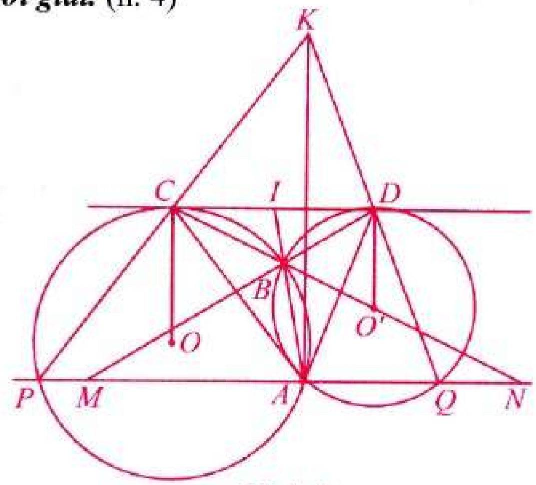
✪**Bài toán 6.** *Với giả thiết của Bài toán 6, chứng minh rằng hai điểm A và K đối xứng nhau qua CD.*

***Suy luận* 6.** Ta có $\widehat{PAC} = \widehat{ACD}$ (cặp góc so le trong), kết hợp với (4) ta được tam giác ACP cân tại C nên $CA = CP$ (6). Từ (5) và (6) suy ra $CP = CK$. Tương tự cũng có $DQ = DK$, nên có bài toán sau.

✪**Bài toán 8.** *Với giả thiết của Bài toán 6, chứng minh rằng CD là đường trung bình của tam giác KPQ.*

✪**Bài toán 9.** *Với giả thiết của Bài toán 6, gọi M, N lần lượt là giao điểm của DB, CB với PQ. Chứng minh rằng A là trung điểm của MN.*

Lời giải. (h. 4)



Hình 4

Vì $CD//PQ$ nên theo hệ quả của định lí Thales ta có $\frac{CI}{AN} = \frac{BI}{BA}$ và $\frac{DI}{AM} = \frac{BI}{BA}$ suy ra $\frac{CI}{AN} = \frac{DI}{AM}$ mà $CI = DI$ nên $AM = AN$. (đpcm). ❑

***Suy luận* 7.** Từ Suy luận 5, ta có $AK \perp CD$ mà $CD//PQ$ ($CD//MN$) suy ra $AK \perp MN$ kết hợp với kết quả Bài toán 8 thu được AK là trung trực của MN, ta có thêm bài toán sau.

✪**Bài toán 10.** *Với giả thiết của Bài toán 9. Chứng minh rằng AK là trung trực của MN.*

Cứ tiếp tục như vậy ta sẽ tìm thấy rất nhiều bài toán mới từ một bài toán quen thuộc. Cuối cùng mời các bạn cùng thử sức với hai bài tập sau:

1. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A cắt hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) ở M và N. Giả sử d cắt (O) tại điểm thứ hai E, MC cắt BN tại F. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

2. Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến AB, AC với (O) (B, C là hai tiếp điểm). Điểm M thuộc cung nhỏ BC (M khác B, M khác C). Gọi I, K, H lần lượt là hình chiếu của M trên CB, BA, AC. Biết MB cắt IH tại E; MC cắt IK tại F; đường tròn ngoại tiếp các tam giác MFK và MEH cắt nhau tại điểm thứ hai là N. Chứng tỏ rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên cung nhỏ BC.

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI, HẢI DƯƠNG

Năm học 2011 - 2012

(Đề thi đã đăng trên THTT số 416, tháng 2 năm 2012)

Câu 1. 1) Xét biểu thức $(a-2)(b-2)(c-2)$
$=abc-2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)-8$
$=abc-2abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+4.2-8=0$. (đpcm).

2) Áp dụng đẳng thức $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ với $n=1, 2, \ldots, 2011$, ta được

$$S=\left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{2011}-\frac{1}{2012}\right)$$
$$=2012-\frac{1}{2012}=\frac{2012^2-1}{2012}.$$

Câu 2. 1) ĐK $x\geq -3$. PT đã cho tương đương với $x^2-2x+1=x+3-4\sqrt{x+3}+4$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=\left(\sqrt{x+3}-2\right)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=\sqrt{x+3}-2 \\ x-1=2-\sqrt{x+3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=\sqrt{x+3} \\ \sqrt{x+3}=3-x\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x=1$ là nghiệm duy nhất của PT đã cho.

2) Gọi ba phương trình của hệ đã cho lần lượt là (1), (2), (3). Lấy (1) trừ (2) và lấy (2) trừ (3) theo vế ta được

$$(x-z)(x+y+z)=-3 \quad (4)$$
$$(y-x)(x+y+z)=-3 \quad (5)$$

Suy ra $x+y+z\neq 0$. Lấy (4) trừ (5) theo vế được

$$2x-y-z=0\Leftrightarrow 2x=y+z \quad (6)$$

Lấy (1) trừ (3) theo vế rồi kết hợp với (6) thu được $y=x-\frac{1}{x}$ và $z=x+\frac{1}{x}$. Thế vào PT (2) ta được $x=\pm1; x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Vậy HPT có bốn nghiệm $(x;y;z)$ là $(1;0;2), (-1;0;-2)$,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{-2}{\sqrt{3}};\frac{4}{\sqrt{3}}\right),\ \left(\frac{-1}{\sqrt{3}};\frac{2}{\sqrt{3}};\frac{-4}{\sqrt{3}}\right).$$

Câu 3. 1) • Nếu $d<0$ thì bất đẳng thức cần chứng minh hiển nhiên đúng.

• Nếu $d>0$, giả sử $a=dm$ và $b=dn$ (m, n là số nguyên dương).

Ta có $\frac{(a+b)^2+a+b}{ab}=\frac{d(m^2+n^2)+m+n}{dmn}+2$ là số nguyên $\Rightarrow m+n \,\vdots\, d$. Do đó

$$d\leq m+n\Leftrightarrow d\leq\frac{a+b}{d}\Leftrightarrow d^2\leq a+b\Leftrightarrow d\leq\sqrt{a+b}.$$

Chứng tỏ $d\leq\left[\sqrt{a+b}\right]$. (đpcm).

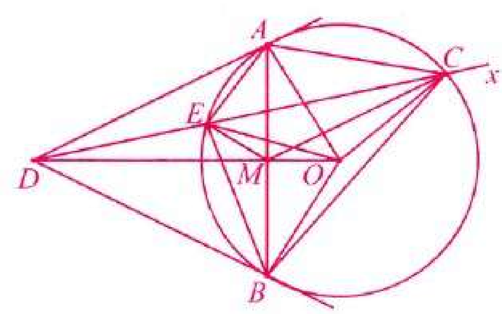
2) • Nếu $x=0$ hoặc $y=0$ thì $\sqrt{1-xy}=1$ là số hữu tỉ.

• Nếu $x\neq 0$ và $y\neq 0$ thì $(x+y)^3=xy(3x+3y+2)$

$$\Leftrightarrow x^3+y^3=2xy\Leftrightarrow \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=2$$

$$\Rightarrow \frac{x^4}{y^2}+\frac{y^4}{x^2}+2xy=4\Rightarrow \sqrt{1-xy}=\frac{1}{2}\left|\frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x}\right|$$ là số hữu tỉ.

Câu 4. (h.1). 1) Dễ thấy $\Delta DBE \backsim \Delta DCB$ (g, g), do đó $DC.DE=DB^2$ (1). Tam giác DBO vuông tại B, BM là đường cao nên $DB^2=DO.DM$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $DC.DE=DO.DM$, nên $\Delta DME\backsim\Delta DCO\Rightarrow \widehat{DME}=\widehat{DCO}$. Do đó tứ giác $OMEC$ nội tiếp.



Hình 1

2) Vì tứ giác $OMEC$ nội tiếp nên $\widehat{OMC}=\widehat{OEC}$; $\widehat{OCE}=\widehat{DME}$. Lại do $OE=OC$ nên $\widehat{OEC}=\widehat{OCE}$. Từ đó ta có $\widehat{CMA}=90^\circ-\widehat{OMC}=90^\circ-\widehat{DME}=\widehat{EMA}$.

3) Ta có $\widehat{BMC}=90^\circ+\widehat{OMC}=90^\circ+\widehat{OEC}$

$$=90^\circ+\frac{180^\circ-\widehat{COE}}{2}=180^\circ-\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{CAE}$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU, VINH, NGHỆ AN

NĂM HỌC 2011 - 2012

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. (3,5 *điểm*)

a) Giải phương trình

$$\sqrt{3x}+\sqrt{15-3x}=\sqrt{8x-5}.$$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy+x+y=3 \\ \dfrac{1}{x^2+2x}+\dfrac{1}{y^2+2y}=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

Câu 2. (1,5 *điểm*) Tìm các số nguyên x và y thỏa mãn $5x^2+2xy+y^2-4x-40=0$.

Câu 3. (3 *điểm*). Cho đường tròn (O) và đường thẳng d cố định ((O) và d không có điểm chung). M là điểm di động trên d. Vẽ hai tiếp tuyến MA, MB phân biệt và cát tuyến MCD của (O) (A, B là tiếp điểm, C nằm giữa M và D, CD không đi qua O). Vẽ dây cung DN của (O) song song với AB. Gọi I là giao điểm của CN và AB. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{IC}{IA}=\dfrac{BC}{BD}$ và $IA=IB$.

b) Điểm I luôn thuộc một đường cố định khi M di động trên đường thẳng d.

Câu 4. (1 *điểm*). Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\sqrt{(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)}$$
$$\geq abc+\sqrt[3]{(a^3+abc)(b^3+abc)(c^3+abc)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Câu 5. (1 *điểm*). Cho một đa giác lồi có chu vi bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn bán kính $\dfrac{1}{4}$ chứa đa giác đó.

THÁI VIẾT THẢO
(*Sở GD&ĐT Nghệ An*) sưu tầm và giới thiệu

$$=\frac{1}{2}(360^\circ-\text{sđ}\,\widehat{CAE})=\frac{1}{2}\text{sđ}\,\widehat{CBE}=\widehat{CAE} \quad (3)$$

Mặt khác $\widehat{CBM}=\widehat{CEA}=\dfrac{1}{2}\text{sđ}\,\widehat{AC}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\Delta BCM \backsim \Delta ECA$ (g, g), nên ta có $\dfrac{MB}{MC}=\dfrac{AE}{AC}$ (5)

Lại có $\Delta DAE \backsim \Delta DCA$ nên $\dfrac{AE}{CA}=\dfrac{DE}{DA}=\dfrac{DA}{DC}$.

Do đó $\left(\dfrac{AE}{AC}\right)^2=\dfrac{DE}{DA}.\dfrac{DA}{DC}=\dfrac{DE}{DC}$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra $\left(\dfrac{MB}{MC}\right)^2=\dfrac{DE}{DC}$. (đpcm).

Câu 5. Đặt $\sqrt[3]{a}=x$; $\sqrt[3]{b}=y$; $\sqrt[3]{c}=z$ thì $x>0$; $y>0$; $z>0$ và $xyz=1$. Khi đó

$$M=\frac{x^3}{y^6+z^6+x^3}+\frac{y^3}{z^6+x^6+y^3}+\frac{z^3}{x^6+y^6+z^3}.$$

Vì $(y-z)(y^5-z^5)\geq 0 \Rightarrow y^6+z^6\geq y^5z+yz^5$

$$\Rightarrow y^6+z^6+x^4yz\geq yz(x^4+y^4+z^4)$$
$$\Rightarrow y^6+z^6+x^3\geq yz(x^4+y^4+z^4) \text{ (do } xyz=1)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{y^6+z^6+x^3}\leq\frac{1}{yz(x^4+y^4+z^4)}$$
$$\Rightarrow \frac{x^4yz}{y^6+z^6+x^3}\leq\frac{x^4}{x^4+y^4+z^4}$$

hay $\dfrac{x^3}{y^6+z^6+x^3}\leq\dfrac{x^4}{x^4+y^4+z^4}$ (1)

Tương tự ta có $\dfrac{y^3}{z^6+x^6+y^3}\leq\dfrac{y^4}{x^4+y^4+z^4}$ (2)

$\dfrac{z^3}{x^6+y^6+z^3}\leq\dfrac{z^4}{x^4+y^4+z^4}$ (3)

Cộng theo vế các BĐT (1), (2) và (3) ta được $M\leq 1$. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$, hay $a=b=c=1$. Vậy giá trị lớn nhất của M là 1 đạt được khi $a=b=c=1$.

ĐINH VĂN ĐÔNG
(*GV THCS Thanh An, Thanh Hà, Hải Dương*)
sưu tầm và giới thiệu

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

BÀI TOÁN VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG VÀ PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

HÀ VĂN THẮNG

(GV THPT Ngô Sĩ Liên, Bắc Giang)

Để tiện trình bày ta quy ước cách viết: $\overrightarrow{u_\Delta}$ là vectơ chỉ phương (VTCP) của đường thẳng Δ; $\overrightarrow{n_\alpha}$ là vectơ pháp tuyến (VTPT) của mặt phẳng (α). Các thí dụ, bài tập trong bài viết này đều xét trong hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$. Chúng ta bắt đầu bằng mối liên hệ giữa quan hệ hình học và quan hệ vectơ sau đây:

1) $a//b \Rightarrow \overrightarrow{u_a};\overrightarrow{u_b}$ cùng phương.

2) $\left[\begin{array}{l} a//(\alpha) \\ a\subset(\alpha)\end{array}\right. \Rightarrow \overrightarrow{u_a}\perp\overrightarrow{n_\alpha}$.

3) $(\alpha)//(\beta) \Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha}$ và $\overrightarrow{n_\beta}$ cùng phương.

4) $a\perp b \Rightarrow \overrightarrow{u_a}\perp\overrightarrow{u_b}$.

5) $a\perp(\alpha) \Rightarrow \overrightarrow{u_a}$ và $\overrightarrow{n_\alpha}$ cùng phương.

6) $(\alpha)\perp(\beta) \Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha}\perp\overrightarrow{n_\beta}$.

I. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

✪DẠNG 1. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M, $\overrightarrow{n_\alpha}\perp\vec{a}$; $\overrightarrow{n_\alpha}\perp\vec{b}$, ($\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương)

Cách giải. Đưa về viết phương trình (PT) mặt phẳng (α) đi qua M và có VTPT $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{u_a},\overrightarrow{u_b}\right]$.

★ **Thí dụ 1.** *Cho mặt phẳng* $(P): x+y+z-1=0$; $(Q): x-y-z-2=0$, *các đường thẳng* $a: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{2}$; $b: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{2}$; $c: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ *và điểm* $M(1;2;1)$.

Viết phương trình mặt phẳng (α):

a) *Qua điểm M, vuông góc với (P) và (Q).*

b) *Qua điểm M, vuông góc với (P) và song song với a.*

c) *Qua điểm M, song song với a và c.*

d) *Chứa điểm M và đường thẳng b.*

e) *Chứa hai đường thẳng song song a và b.*

Hướng dẫn giải

a) $\begin{cases}(\alpha)\perp(P)\\(\alpha)\perp(Q)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{n_\alpha}\perp\overrightarrow{n_P}\\\overrightarrow{n_\alpha}\perp\overrightarrow{n_Q}.\end{cases}$

Chọn $\overrightarrow{n_\alpha}=[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_Q}]=(0;2;-2)$ suy ra PT của (α): $y-z-1=0$.

b) $\begin{cases}(\alpha)\perp(P)\\(\alpha)//a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{n_\alpha}\perp\overrightarrow{n_P}\\\overrightarrow{n_\alpha}\perp\overrightarrow{u_a}.\end{cases}$ Chọn $\overrightarrow{n_\alpha}=[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{u_a}]=(1;-1;0)$

suy ra PT của (α): $x-y+1=0$.

c) $\begin{cases}(\alpha)//a\\(\alpha)//c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{n_\alpha}\perp\overrightarrow{u_a}\\\overrightarrow{n_\alpha}\perp\overrightarrow{u_c}.\end{cases}$ Chọn $\overrightarrow{n_\alpha}=[\overrightarrow{u_a};\overrightarrow{u_c}]=(-1;-1;1)$

suy ra PT của (α): $-x-y+z+2=0$.

d) Lấy $B(-1;1;0)\in b$. Ta có $\begin{cases}(\alpha)\supset BM\\(\alpha)\supset b\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{n_\alpha}\perp\overrightarrow{BM}\\\overrightarrow{n_\alpha}\perp\overrightarrow{u_b}.\end{cases}$ Chọn $\overrightarrow{n_\alpha}=[\overrightarrow{BM};\overrightarrow{u_b}]$ suy ra PT của mặt phẳng (α): $x-3y+z+4=0$.

e) Lấy $A(1;-2;3)\in a$; $B(-1;1;0)\in b$.

Ta có $\begin{cases}(\alpha)\supset AB\\(\alpha)\supset b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{n_\alpha}\perp\overrightarrow{AB}\\\overrightarrow{n_\alpha}\perp\overrightarrow{u_b}.\end{cases}$

Chọn $\overrightarrow{n_\alpha}=[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{u_b}]=(9;1;-5)$ ta được PT của mặt phẳng (α): $9x+y-5z+8=0$. ❒

★**Thí dụ 2.** *Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(1;1;1)$, $B(0;2;2)$ đồng thời (P) cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm M,N (M, N không trùng O) sao cho OM = 2ON.*

Hướng dẫn giải. Từ $M\in Ox, N\in Oy$ suy ra $M(m;0;0)$, $N(0;n;0)$ $(m,n\neq 0)$. Do $OM=2ON$ nên $|m|=2|n|$ suy ra $m=2n$ hoặc $m=-2n$.

• Với $m=2n$ suy ra $\overrightarrow{MN}(-2n;n;0)=n(-2;1;0)$. Đặt $\overrightarrow{u_1}=(-2;1;0)$.

Từ $\begin{cases}(P)\supset MN\\(P)\supset AB\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{u_1}\\\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{AB}.\end{cases}$

Chọn $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{AB}\right]=(1;2;-1)$ suy ra PT của (P): $x+2y-z-2=0$.

• Với $m=-2n$ suy ra $\overrightarrow{MN}(2n;n;0)=n(2;1;0)$.

Đặt $\overrightarrow{u_2}=(2;1;0)$. Ta thấy $\begin{cases}(P)\supset MN\\(P)\supset AB\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{u_2}\\\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{AB}.\end{cases}$

Chọn $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{u_2};\overrightarrow{AB}\right]=(1;-2;3)$ suy ra PT của mặt phẳng (P): $x-2y+3z-2=0$. ❒

✪DẠNG 2. Viết phương trình mặt phẳng (α) khi biết trước (hoặc tìm được) vectơ pháp tuyến

Cách giải. Với $\overrightarrow{n_\alpha}(a;b;c)$ $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$ thì PT(α) có dạng $ax+by+cz+d=0$. Như vậy, muốn viết PT của (α) ta cần đi tìm *d*.

★**Thí dụ 3.** *Cho ba mặt phẳng có phương trình $(P): x+2y+2z-1=0$; $(Q): x+2y+2z+3=0$; $(R): x+2y-z-3=0$ và mặt cầu (S) có PT*

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z-3=0.$$

Viết phương trình mặt phẳng (α):

a) Song song với (P) và cách gốc tọa độ O một khoảng là 3.

b) Song song với (P) đồng thời khoảng cách giữa (α) và (P) bằng hai lần khoảng cách giữa (α) và (Q).

c) Vuông góc với (P) và (R) đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S).

Hướng dẫn giải

a) Từ $(\alpha)//(P)$ suy ra PT (α) có dạng $x+2y+2z+d=0$ $(d\neq -1)$.

Do $d(O;(P))=3\Leftrightarrow\dfrac{|d|}{3}=3\Leftrightarrow d=\pm 9$, từ đó ta có PT của $(\alpha): x+2y+2z+9=0$ hoặc $x+2y+2z-9=0$.

b) Vì $(\alpha)//(P)$ và $(\alpha)//(Q)$ nên (α) có PT $x+2y+2z+d=0$ $(d\neq -1;\ d\neq 3)$. Ta lại có $d((\alpha);(P))=2d((\alpha);(Q))\Leftrightarrow\dfrac{|d+1|}{3}=\dfrac{2|d-3|}{3}$

$\Leftrightarrow d=7$ hoặc $d=\dfrac{5}{3}$ (thỏa mãn điều kiện).

Từ đó PT của (α) là $x+2y+2z+7=0$ hoặc $x+2y+2z+\dfrac{5}{3}=0$.

c) Chọn $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_R}\right]$. Tương tự trên có PT $(\alpha): 2x-y+3\sqrt{5}=0$ hoặc $2x-y-3\sqrt{5}=0$. ❒

✪DẠNG 3. Viết phương trình mặt phẳng chắn

Cách giải. Nếu mặt phẳng (P) cắt các trục tọa độ tại các điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ $(a,b,c\neq 0)$ thì PT mặt phẳng (P) có dạng $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$. Như vậy, để viết PT mặt phẳng (P) ta đi tìm *a, b, c*.

★**Thí dụ 4.** *Cho điểm M(1; 2; 3), N(1 ; 1 ; 1). Viết phương trình mặt phẳng (P) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (A, B, C không trùng với O) thỏa mãn*

a) Tam giác ABC nhận M là trọng tâm.

b) Tam giác ABC nhận M là trực tâm.

c) Tam giác ABC nhận N là tâm đường tròn ngoại tiếp.

d) (P) đi qua M sao cho $S=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$ *nhỏ nhất.*

e) (P) đi qua M sao cho $T=\frac{1}{OA^2}+\frac{4}{OB^2}+\frac{9}{OC^2}$ *nhỏ nhất.*

Hướng dẫn giải. Giả sử $A(a;0;0), B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ suy ra PT (P) có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

a) M là trọng tâm tam giác ABC nên $a=3$; $b=6; c=9$. PT mặt phẳng (P) là $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1$.

b) $\begin{cases} M\in(P)\\ \overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1\\ \frac{3}{b}-\frac{2}{c}=0\\ \frac{3}{a}-\frac{1}{c}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{a}=\frac{1}{14}\\ \frac{1}{b}=\frac{1}{7}\\ \frac{1}{c}=\frac{3}{14}.\end{cases}$

Từ đó ta có PT của (P): $x+2y+3z-14=0$.

Lưu ý. Ta có thể chứng minh OM vuông góc với mặt phẳng (P) từ đó viết được PT của (P).

c) $\begin{cases} N\in(P)\\ NA=NB\\ NA=NC\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1\\ |a-1|=|b-1|\\ |a-1|=|c-1|\end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=3,$

từ đó có PT của mặt phẳng (P): $x+y+z=3$.

d) Do $M\in(P)$ nên $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$.

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky có

$$1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\le\sqrt{(1^2+2^2+3^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}$$

Suy ra $S=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{1}{14}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=14; b=7; c=\frac{14}{3}$ suy ra PT mặt phẳng (P): $x+2y+3z-14=0$.

e) Theo bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$$1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\le\sqrt{(1^2+1^2+1^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}+\frac{9}{c^2}\right)}.$$

Suy ra $T=\frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}+\frac{9}{c^2}\ge\frac{1}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=3; b=6$; $c=9$ nên PT mặt phẳng (P): $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1$. ❐

★Thí dụ 5. *Cho* $A(2;0;0)$, $M(1;1;1)$. *Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và M sao cho (P) cắt trục Oy, Oz lần lượt tại hai điểm B, C thỏa mãn*

a) Diện tích của tam giác ABC bằng $4\sqrt{6}$.

b) Thể tích của khối chóp OABC bằng $\frac{16}{3}$.

Hướng dẫn giải. Giả sử $B(0;b;0), C(0;0;c)$.

Khi đó PT (P) có dạng $\frac{x}{2}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

a) Ta có

$$\begin{cases} M\in(P)\\ S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2-\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}=4\sqrt{6}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} bc=2(b+c)\\ (bc)^2+4(b^2+c^2)-384=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow b=c=4 \text{ hoặc } \begin{cases} b=3\pm\sqrt{21}\\ c=3\mp\sqrt{21}.\end{cases}$$

Suy ra có ba mặt phẳng thỏa mãn đề bài là $(P_1): 2x+y+z-4=0$.

$(P_2): -6x+\left(3-\sqrt{21}\right)y+\left(3+\sqrt{21}\right)z+12=0$.

$(P_3): -6x+\left(3+\sqrt{21}\right)y+\left(3-\sqrt{21}\right)z+12=0$.

b) $\begin{cases} M\in(P)\\ V_{O.ABC}=\frac{16}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} bc=2(b+c)\\ |bc|=16\end{cases}$

$$\Leftrightarrow b=c=4 \text{ hoặc } \begin{cases} b=-4\pm4\sqrt{2}\\ c=-4\mp4\sqrt{2}.\end{cases}$$

Suy ra có ba mặt phẳng thỏa mãn đề bài là $(P_1): 2x+y+z-4=0$

$(P_2): 2x+\left(1+\sqrt{2}\right)y+\left(\sqrt{2}-1\right)z-4=0$.

$(P_3): 2x+\left(\sqrt{2}-1\right)y+\left(1+\sqrt{2}\right)z-4=0$.

Chú ý. Để thiết lập PT mặt phẳng (P) ta cũng có thể làm như sau:

Gọi $\overrightarrow{n_P}(a;b;c)$ (với $a^2+b^2+c^2>0$). Sau đó thiết lập hai PT ba ẩn là a, b, c. Lưu ý đây là bài toán tìm VTPT của một mặt phẳng nên không cần thiết lập đủ ba PT ba ẩn, ta chỉ cần tìm a; b theo c (hoặc tìm b; c theo a hoặc tìm a; c theo b), sau đó ta có thể chọn một giá trị của c để tìm ra a và b. Chẳng hạn $\begin{cases} a=2c \\ b=3c \end{cases}$, khi đó $\overrightarrow{n_P}=(2c;3c;c)=c(2;3;1)$. Như vậy với $c\neq 0$ tùy ý, mặt phẳng (P) luôn có một VTPT là $\overrightarrow{n_P}=(2;3;1)$. ❐

★Thí dụ 6. *Cho tứ diện $ABCD$ có các đỉnh $A(1;2;3), B(-2;1;5), C(2;-1;1)$ và $D(0;3;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng hai lần khoảng cách từ D đến (P).*

Hướng dẫn giải. Giả sử $\overrightarrow{n_P}=(a;b;c)$, với $a^2+b^2+c^2>0$. Do $(P)\supset AB \Rightarrow \overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow b=2c-3a \qquad (1)$

Ta có PT (P): $a(x-1)+b(y-2)+c(z-3)=0$.

Mà $d(C;(P))=2d(D;(P))$

$\Leftrightarrow |a-3b-2c|=2|-a+b-2c| \qquad (2)$

Thế (1) vào (2) ta được $a=4c$ hoặc $9a=4c$.

Với $a=4c$, chọn $c=1$ suy ra $a=4$ và $b=-10$ nên PT (P): $4x-10y+z+13=0$.

Với $9a=4c$, chọn $c=9$ suy ra $a=4$ và $b=6$ nên PT(P): $4x+6y+9z-43=0$. ❐

★Thí dụ 7. *Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{-1}$ đồng thời (P) cách điểm $M(1;0;1)$ một khoảng:*

a) $\sqrt{2}$.

b) Lớn nhất.

Hướng dẫn giải. Giả sử $\overrightarrow{n_P}=(a;b;c)$, với $a^2+b^2+c^2>0$. Do $(P)\supset d\Rightarrow \overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{u_d}$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{u_d}=0\Rightarrow c=a+b \qquad (1)$

- $N(1;2;3)\in d\subset(P)$ nên PT (P) có dạng $a(x-1)+b(y-2)+c(z-3)=0$.
- $d(M;(P))=\dfrac{|2b+2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad (2)$

Thế (1) vào (2) ta được

$$d(M;(P))=\sqrt{\frac{2a^2+8ab+8b^2}{a^2+ab+b^2}}.$$

a) Từ giả thiết ta có

$$\frac{2a^2+8ab+8b^2}{a^2+ab+b^2}=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} b=0 \\ a+b=0. \end{array}\right.$$

Với $b=0$, chọn $a=1$ suy ra $c=1$, từ đó ta có PT của (P): $x+z-4=0$.

Với $a+b=0$, chọn $a=1$ suy ra $b=-1$ và $c=0$, ta có PT (P): $x-y+1=0$.

b) Ta có $d^2(M;(P))=\dfrac{2a^2+8ab+8b^2}{a^2+ab+b^2}$.

- Nếu $b=0$ thì $d^2(M;(P))=2\Rightarrow d(M;(P))=\sqrt{2}$.
- Nếu $b\neq 0$ thì

$$d^2(M;(P))=\frac{2a^2+8ab+8b^2}{a^2+ab+b^2}=\frac{2t^2+8t+8}{t^2+t+1}$$

(với $t=\dfrac{a}{b}$).

Đặt $f(t)=\dfrac{2t^2+8t+8}{t^2+t+1}$ thì

$$f'(t)=\frac{-6t^2-12t}{(t^2+t+1)^2}=0\Leftrightarrow t=0 \text{ hoặc } t=-2.$$

Ta có bảng biến thiên của $f(t)$:

t	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	2	↘	0	↗	8	↘	2

Từ bảng biến thiên ta có max $f(t)=8$ khi $t=0$ hay $a=0$ suy ra $c=b$. Chọn $b=1$ suy ra $c=1$. Ta có phương trình (P): $y+z-5=0$. ❐

(Kì sau đăng tiếp)

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 6

(Thời gian làm bài : 180 phút)

PHẦN CHUNG

Câu I. (2 *điểm*)

Cho hàm số $y=\dfrac{mx-1}{x+m}$ (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m=1$.

2) Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của (C_m). Tiếp tuyến tại điểm bất kì của (C_m) cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang tại A và B. Tìm m để diện tích tam giác IAB bằng 12.

Câu II. (2 *điểm*)

Giải các phương trình

1) $(x-1)^2+2(x+1)\sqrt{\dfrac{x-3}{x+1}}=12.$

2) $\dfrac{\cos x+\sin 2x}{\cos 3x}+1=0.$

Câu III. (1 *điểm*) Tính tích phân

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin^2 x}{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Câu IV. (1 *điểm*) Tính thể tích hình cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và các cạnh còn lại đều bằng a.

Câu V. (1 *điểm*) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{3(b+c)}{2a}+\frac{4a+3c}{3b}+\frac{12(b-c)}{2a+3c}$$

trong đó a, b, c là các số thực dương.

PHẦN RIÊNG

(Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VIa. (2 *điểm*)

1) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes Oxy cho điểm A (3 ; 0) và elip (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$. Tìm toạ độ các điểm B, C thuộc (E) sao cho tam giác ABC vuông cân tại đỉnh A.

2) Trong không gian với hệ trục tọa độ Descartes $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) có phương trình $2x+y+z-1=0$ và hai điểm A (1 ; 2 ; 3), B (–2 ; 2 ; 0). Tìm tọa độ điểm M trên mặt phẳng (α) sao cho $|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu VIIa. (1 *điểm*)

Giải hệ phương trình trong tập hợp số phức

$$\begin{cases} z_1-z_2=2-2i \\ \dfrac{1}{z_2}-\dfrac{1}{z_1}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{5}i. \end{cases}$$

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VIb. (2 *điểm*)

1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Descartes Oxy cho tam giác ABC có đỉnh A (1 ; 2); đường phân giác trong và trung tuyến kẻ từ đỉnh B có phương trình lần lượt là (BE): $2x-y+5=0$ và (BM): $7x-y+15=0$. Tính diện tích tam giác ABC.

2) Trong không gian với hệ tọa độ Descartes $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) có phương trình $2x+y+z-1=0$ và hai điểm A (1 ; 2 ; 3), $B(0$; 3 ; 1). Tìm tọa độ điểm M trên mp (α) sao cho tam giác MAB có chu vi nhỏ nhất.

Câu VIIb. (1 *điểm*)

Giải phương trình

$$\log_2(x+6^{\log_3 x})=\log_3 x.$$

DƯƠNG CHÂU DINH

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 4

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải.

2) Ta có $I(1\,;2)$. Giả sử $M\left(x_0\,;\dfrac{2x_0+1}{x_0-1}\right)\in(C)$.

PTTT với (C) tại M là $y-\dfrac{2x_0+1}{x_0-1}=-\dfrac{3}{(x_0-1)^2}(x-x_0)$.

Tìm được $A\left(1;\dfrac{2x_0+4)}{x_0-1}\right)$; $B\left(2x_0-1\,;\,2\right)$.

Do đó $S_{AIB}=\dfrac{1}{2}IA.IB=6$ (đvdt).

Câu II. 1) ĐK $\cos x\neq 0$; $\sin x\neq 0$; PT đã cho tương đương với

$$\frac{\cos x}{\sin 2x.\sin x.\cos^2 x}+1=6\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 2x}=5-3\sin^2 2x.$$

Đáp số. $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$; $x=\pm\dfrac{\alpha}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$

(trong đó $\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$).

2) ĐK $x\geq 1$ hoặc $x\leq\dfrac{3}{4}$. Đưa PT đã cho về dạng

$$(15-27x)\left(\frac{1}{\sqrt{36x^2-63x+27}+2\sqrt{9x^2-9x+3}}-1\right)=0.$$

Đáp số. $x=\dfrac{5}{9}$.

Câu III. Ta có

$$I=\int_0^2\left(\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x+1}{3(x^2+2x+4)}+\frac{1}{x^2+2x+4}\right)dx$$

$$=\int_0^2\frac{d(x+1)}{3(x+1)}-\frac{1}{6}\int_0^2\frac{d(x^2+2x+4)}{x^2+2x+4}+\int_0^2\frac{dx}{x^2+2x+4}.$$

Xét $J=\displaystyle\int_0^2\frac{dx}{(x+1)^2+3}$.

Đặt $x+1=\sqrt{3}.\tan t$, $d(x+1)=\sqrt{3}(1+\tan^2 t)$.

Tìm được $J=\dfrac{\pi\sqrt{3}}{18}$.

Đáp số. $I=\dfrac{1}{6}\ln 3+\dfrac{\pi\sqrt{3}}{18}$.

Câu IV. Kẻ $NJ//AC$ $(J\in AB)$. Nối $B'J$ cắt $A'M$ tại F, trong mp$(B'JN)$ kẻ $FE//JN$ $(E\in B'N)$. Chứng minh $MJ=\dfrac{17}{12}AB$. Từ $\Delta A'B'F\backsim\Delta MJF$ suy ra

$$\frac{B'F}{FJ}=\frac{A'B'}{JM}=\frac{AB}{JM}\Rightarrow\frac{EB'}{NB'}=\frac{B'F}{B'J}.$$

Do $\dfrac{AB}{JM}=\dfrac{12}{17}$ nên $\dfrac{EB'}{NB'}=\dfrac{12}{29}$.

Câu V. Đặt $u=\sqrt{x+1}\geq 0$; $v=\sqrt{y+15}\geq 0$. Ta có

$$\begin{cases}u+v=\dfrac{P}{2}\\ u.v=\dfrac{P^2-4P-64}{8}.\end{cases}$$

Suy ra u, v là hai nghiệm không âm của PT

$$X^2-\frac{P}{2}X+\frac{P^2-4P-64}{8}=0.$$

Khi đó có $\begin{cases}\Delta\geq 0\\ \dfrac{P}{2}\geq 0\\ \dfrac{P^2-4P-64}{8}\geq 0.\end{cases}\Leftrightarrow 2+\sqrt{68}\leq P\leq 16.$

Đáp số. $\max P=16$ khi $(x;y)=(15;1)$.

$\min P=2+\sqrt{68}$ khi $(x;y)=(-1;3+2\sqrt{17});(17+2\sqrt{17};-15)$.

Câu VIa. 1) Lấy M' đối xứng với M qua đường thẳng $x-y=0$ thì $M'\in AC$. Lập PT các đường thẳng AC, AB (hay AM).

Đáp số. $A(1;1)$; $B(3\,;\,7)$; $C\left(3\,;\,\dfrac{5}{3}\right)$.

2) Có hai điểm thỏa mãn đề bài: $M_1(0;-3;0)$ và $M_2(0;3;0)$.

Câu VIIa. ĐK $-1\leq x\leq\dfrac{4}{3}$.

Đặt $t=3\sqrt{x+1}+2\sqrt{4-3x}$.

Khảo sát hàm t theo biến x trên $\left[-1;\dfrac{4}{3}\right]$ ta thấy $\sqrt{21}\leq t\leq 7$. Từ PT đã cho ta có

$t^2-1=mt$ $(\sqrt{21}\leq t\leq 7)$, hay $m=\dfrac{t^2-1}{t}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-1}{t}$ có $f'(t)=\dfrac{t^2+1}{t^2}>0$, $\forall t\in\left[\sqrt{21};7\right]$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\left[\sqrt{21};7\right]$, suy ra $f(\sqrt{21})\leq f(t)\leq f(7)$.

Đáp số. $\dfrac{20}{\sqrt{21}}\leq m\leq\dfrac{48}{7}$.

(Xem tiếp trang 13)

SỬ DỤNG ĐẠO HÀM để chứng minh bất đẳng thức

TRẦN XUÂN ĐÁNG
(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định)

Trong các kì thi tuyển sinh Đại học cũng như trong các kì thi Olympic Toán chúng ta thường gặp các bài toán chứng minh bất đẳng thức (BĐT). Trong bài viết này xin được giới thiệu với bạn đọc một số bài toán chứng minh BĐT trong các kì thi Olympic Toán mà chúng ta có thể giải được bằng cách sử dụng phương pháp đạo hàm.

Bài toán 1. *Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a+b+c=0$ và $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng $a^2b^2c^2 \le \frac{1}{54}$.*

(Đề thi Olympic Toán của Ailen năm 2009)

Lời giải. Ta có $b+c=-a$,

$$bc=\frac{(b+c)^2-(b^2+c^2)}{2}=\frac{a^2-(1-a^2)}{2}=a^2-\frac{1}{2}.$$

Vì $(b+c)^2 \ge 4bc$ nên $a^2 \ge 4a^2-2 \Rightarrow a^2 \le \frac{2}{3}$;

$$a^2b^2c^2=a^2\left(a^2-\frac{1}{2}\right)^2=a^6-a^4+\frac{1}{4}a^2.$$

Xét hàm số $f(x)=x^3-x^2+\frac{1}{4}x\ \left(0\le x\le\frac{2}{3}\right)$.

Ta có $f'(x)=3x^2-2x+\frac{1}{4}$; $f'(x)=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ hoặc $x=\frac{1}{6}$. Ta có bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$\frac{1}{54}$	↘		↗	$\frac{1}{54}$

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta thấy $f(x)\le\frac{1}{54},\ \forall x\in\left[0,\frac{2}{3}\right]$. Suy ra $f(a^2)\le\frac{1}{54}$

$\Rightarrow a^6-a^4+\frac{1}{4}a^2\le\frac{1}{54}\Rightarrow a^2b^2c^2\le\frac{1}{54}$ (đpcm). ❐

Bài toán 2. *Xét ba số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^3+y^3+z^3-3xyz=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $E=x^2+y^2+z^2$.*

(Đề thi chọn đội tuyển Inđônêxia dự thi IMO năm 2009)

Lời giải. Ta có $1=x^3+y^3+z^3-3xyz$

$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \quad (*)$$

suy ra $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\ne 0$.

Vì $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\ge 0\ (\forall x,y,z\in\mathbb{R})$,

nên $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx>0\Rightarrow x+y+z>0$.

Đặt $x+y+z=t\ (t>0)$ để ý đến (*) có $E=\frac{t^2}{3}+\frac{2}{3t}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2}{3}+\frac{2}{3t}\ (t>0)$. Ta có

$$f'(t)=\frac{2t}{3}-\frac{2}{3t^2}=\frac{2}{3t^2}(t^3-1),\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=1.$$

Ta có bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	1	↗	

Từ bảng biến thiên suy ra $f(t)\ge 1,\ \ \forall t>0$. Do đó $E\ge 1$.

Nếu trong ba số x,y,z có một số bằng 1 và hai số bằng 0 thì $E=1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của E là 1. ❐

Bài toán 3. *Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^3+b^3=c^3$. Chứng minh rằng $a^2+b^2-c^2>6(c-a)(c-b)$.*

(Đề thi Olympic Toán của Ấn Độ năm 2009)

Lời giải. Từ $a^3+b^3=c^3$ và $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ suy ra $c>a$ và $c>b$. Ta có

$$a^3+b^3=c^3 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^3+\left(\frac{b}{c}\right)^3=1.$$

Đặt $x=\frac{a}{c};\ y=\frac{b}{c}\ (x,y>0)$ thì $x^3+y^3=1$.

Đặt $x+y=t\ (1<t\le\sqrt[3]{4})$. Ta có $t^3-3xyt=1$ suy ra $xy=\frac{t^3-1}{3t}$ và $x^2+y^2=\frac{t^3+2}{3t}$.

Do đó $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{(c-a)(c-b)}=\dfrac{x^2+y^2-1}{(1-x)(1-y)}$

$$=\frac{t^3-3t+2}{(t-1)^3}=\frac{t+2}{t-1}.$$

Xét hàm số $f(t)=\frac{t+2}{t-1}\ (1<t\le\sqrt[3]{4})$.

Ta có $f'(t)=\frac{-3}{(t-1)^2}<0,\ \forall t\in(1;\sqrt[3]{4})$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ như sau:

t	1	$\sqrt[3]{4}$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	$\searrow$	$\frac{\sqrt[3]{4}+2}{\sqrt[3]{4}-1}$

Từ bảng biến thiên suy ra $f(t)\ge\frac{\sqrt[3]{4}+2}{\sqrt[3]{4}-1}>6$, $\forall t\in(1;\sqrt[3]{4}]$.

Từ đó suy ra điều cần phải chứng minh. ❒

Lưu ý. Bằng phương pháp đã được trình bày ở trên chúng ta chứng minh được BĐT mạnh hơn: $a^2+b^2-c^2\ge k(c-a)(c-b)$ trong đó

$$k=\frac{\sqrt[3]{4}+2}{\sqrt[3]{4}-1}>6.$$

✪**Bài toán 4.** *Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $21ab+2bc+8ca\le 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $E=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}$.*

(Đề thi chọn đội tuyển Việt Nam dự thi IMO năm 2000)

Lời giải. Đặt $x=\frac{1}{a},\ y=\frac{2}{b},\ z=\frac{3}{c}$. Khi đó x,y,z là các số dương thỏa mãn điều kiện $2xyz\ge 2x+4y+7z$ (1) và $E=x+y+z$.

Từ (1) suy ra $z(2xy-7)\ge 2x+4y \Rightarrow 2xy>7$ và $z\ge\frac{2x+4y}{2xy-7}\Rightarrow x+y+z\ge x+y+\frac{2x+4y}{2xy-7}$.

Áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$x+y+\frac{2x+4y}{2xy-7}=x+\frac{11}{2x}+\left(\frac{2xy-7}{2x}\right)+\frac{2x+\frac{14}{x}}{2xy-7}$$

$$\ge x+\frac{11}{2x}+2\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}.$$

Xét hàm số $f(x)=x+\frac{11}{2x}+2\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}\ (x>0)$.

Ta có $f'(x)=1-\frac{11}{2x^2}-\frac{14}{x^2\sqrt{x^2+7}}$, $f'(x)=0$ $\Leftrightarrow x=3$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{15}{2}$	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta thấy $E\ge\frac{15}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=3,\ y=\frac{5}{2},\ z=2$ $\Leftrightarrow a=\frac{1}{3},\ b=\frac{4}{5},\ c=\frac{3}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của E là $\frac{15}{2}$. ❒

✪**Bài toán 5.** *Cho tam giác ABC với độ dài ba cạnh là a, b, c. Chứng minh rằng*

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+3.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a\le\min\{b,c\}$. Đặt $d=\min\{b,c\}$.

Xét hàm số $f(x)=2\left(\frac{x}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{x}\right)-\left(\frac{b}{x}+\frac{c}{b}+\frac{x}{c}\right)$ $(0<x\le d)$.

Ta có

$$f'(x)=\frac{2}{b}-\frac{2c}{x^2}+\frac{b}{x^2}-\frac{1}{c}=\frac{(2c-b)(x^2-bc)}{x^2bc}.$$

Ta có $a\le d\Rightarrow a\le c\Rightarrow 2c\ge a+c>b\Rightarrow 2c-b>0$

$\Rightarrow f'(x)<0,\ \forall x\in(0;d)$.

Ta có bảng biến thiên

x	0 $\qquad\qquad$ d
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$\searrow$ $f(d)$

Từ bảng biến thiên suy ra $f(a)\ge f(d)$.

Trường hợp 1. $b\le c$ thì $d=b\ \Rightarrow f(d)=f(b)$

Mặt khác $f(b)=1+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\ge 3\Rightarrow f(a)\ge 3$.

Suy ra $2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)+3$.

Trường hợp 2. $b>c$ thì $d=c\ \Rightarrow f(d)=f(c)$

Mặt khác $f(c)=1+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\ge 3$

suy ra $2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)+3$. ❐

* * *

Cuối cùng là một số bài tập dành cho bạn đọc.

1. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\sin\frac{3A}{2}+\sin\frac{3B}{2}+\sin\frac{3C}{2}\le\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{C-A}{2}.$$

(Đề thi chọn đội tuyển Mỹ tham dự IMO năm 2002)

2. Cho bốn số thực dương a,b,c,d. Chứng minh rằng

$$a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd\ge a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2.$$

3. Cho bốn số thực dương $a,b,c,d\in[1;2]$. Chứng minh rằng $\frac{a+b}{b+c}+\frac{c+d}{d+a}\le 4\left(\frac{a+c}{b+d}\right)$.

4. Cho số thực dương a. Xét các số thực k sao cho bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{a}{x+y}\ge\frac{k}{\sqrt{xy}}$ đúng với mọi cặp số thực dương $(x;y)$. Tìm giá trị lớn nhất của k.

5. Cho ba số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a).$$

(Bất đẳng thức Schur)

HƯỚNG DẪN GIẢI... *(Tiếp trang 10)*

Câu VIb. 1) Đặt $\widehat{AOM}=\alpha$, $(0\le\alpha\le 2\pi)$ thì $\widehat{AON}=\alpha+\frac{\pi}{2}$. Do đó $M(OM.\cos\alpha\ ;\ OM.\sin\alpha)$; $N(-ON.\sin\alpha\ ;\ ON.\cos\alpha)$. Vì M, N đều thuộc (E), nên $\frac{OM^2.\cos^2\alpha}{25}+\frac{OM^2.\sin^2\alpha}{4}=1$;

$$\frac{ON^2.\sin^2\alpha}{25}+\frac{ON^2.\cos^2\alpha}{4}=1.$$

Trong tam giác vuông OMN có $OH\perp MN$ nên

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}=\frac{29}{100}.$$

Từ đó H luôn thuộc đường tròn có PT $x^2+y^2=\frac{100}{29}$.

2) Gọi x, y, z lần lượt là số người nhận hai loại sách (Toán; Lí); (Toán; Hóa); (Lí; Hóa) thì $x+y=5; x+z=7; y+z=8\ \Rightarrow\ (x;y;z)=(2;3;5)$.

Số không gian mẫu $n(\Omega)=C_{10}^2.C_8^3.C_5^5=2520$.

Gọi A là biến cố "*Hạnh* và *Vân* nhận được hai loại sách như nhau;

A_1 là biến cố "*Hạnh* và *Vân* nhận được hai loại sách (Toán ; Lí);

A_2 là biến cố "*Hạnh* và *Vân* nhận được hai loại sách (Toán ; Hóa);

A_3 là biến cố "*Hạnh* và *Vân* nhận được hai loại sách (Lí ; Hóa).

Khi đó các biến cố A_1, A_2, A_3 đôi một xung khắc và $A=A_1\cup A_2\cup A_3$. Vì $n(A_1)=C_8^3.C_5^5$;

$n(A_2)=C_8^1.C_7^2.C_5^5$; $n(A_3)=C_8^3.C_5^3.C_2^2$

suy ra $n(A)=n(A_1)+n(A_2)+n(A_3)$. Do đó

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{C_8^3.C_5^5+C_8^1.C_7^2.C_5^5+C_8^3.C_5^3.C_2^2}{C_{10}^2.C_8^3.C_5^5}=\frac{14}{45}.$$

Câu VIIb. ĐK $x>0; y>0; x\ne 1; y\ne 1$. Đặt $X=\log_2 x$; $Y=\log_2 y$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{X}{1+X^2}+\dfrac{Y}{1+Y^2}=\dfrac{9}{10}\\ (X+Y)\left(1+\dfrac{1}{XY}\right)=\dfrac{9}{2}.\end{cases}$$

Lại đặt $u=X+\frac{1}{X}$; $v=Y+\frac{1}{Y}$. Giải hệ với hai ẩn $(u;v)$, tìm được $(u;v)=\left(\frac{5}{2};2\right)$; $(u;v)=\left(2;\frac{5}{2}\right)$.

Đáp số. Hệ đã cho có bốn nghiệm $(x;y)$ là

$$(4;2),(2;4),(\sqrt{2};2),\ (2;\sqrt{2}).$$

ĐƯỜNG ĐỨC HÀO
(GV THPT Hương Khê, Hà Tĩnh)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT NĂM 2012 - MÔN TOÁN

(Tiếp bìa 2)

II. CHẤT LƯỢNG LÀM BÀI CỦA HỌC SINH

Cùng với việc phân tích Đề thi dưới góc độ chuyên môn, các số liệu thống kê dưới đây sẽ giúp độc giả có thể rút ra được kết luận tổng quan về chất lượng làm bài cũng như chất lượng chuyên môn của các thí sinh tham dự kì thi năm nay.

Điểm thi	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0
Ngày 1	13	5	8	21	19	17	17	14	8	8	15	13	19	19	20
Ngày 2	18	52	55	40	35	22	7	14	12	5	13	7	5	9	15

Điểm thi	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10	10,5	11	11,5	12	12,5	13	13,5	14
Ngày 1	22	14	8	3	13	11	14	19	30	19	11	10	6	8
Ngày 2	27	17	7	6	5	3	4	5	2	3	3	3	3	12

Điểm thi	14,5	15	15,5	16	16,5	17	17,5	18	18,5	19	19,5	20
Ngày 1	3	9	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0
Ngày 2	4	1	0	0	0	1	0	0	0	3	2	1

(Trong bảng thống kê trên, số thí sinh có điểm lẻ 0,25 được tính gộp vào số thí sinh có điểm lẻ 0,5; số thí sinh có điểm lẻ 0,75 được tính gộp vào số thí sinh có điểm nguyên gần nhất).

Xét theo từng bài toán thi, nếu với mỗi $n = \overline{1,7}$ kí hiệu $s(n)$ và $l(n)$ tương ứng là số thí sinh đạt điểm tối đa hoặc gần tối đa và số thí sinh đạt không quá 0,5 điểm ở Bài n của đề thi, ta có $s(1) = 248$, $s(2) = 168$, $s(3) = 41$, $s(4) = 10$, $s(5) = 87$, $s(6) = 48$ và $s(7) = 23$; $l(1) = 130$, $l(2) = 220$, $l(3) = 84$, $l(4) = 366$, $l(5) = 251$, $l(6) = 313$ và $l(7) = 392$.

III. GIẢI THƯỞNG

Căn cứ Quy chế thi chọn học sinh giỏi cấp Quốc gia hiện hành và kết quả chấm thi, theo đề nghị của Tổ chấm thi môn Toán và Hội đồng chấm thi chọn HSGQG THPT năm 2012, Lãnh đạo Bộ GD&ĐT đã quyết định trao giải cho 202 thí sinh (chiếm 47,98% tổng số thí sinh), với mức điểm cho mỗi loại giải như sau:

Giải Nhất: Từ 31,50 điểm đến 40 điểm; ***Giải Nhì***: Từ 22,50 điểm đến 31,25 điểm; ***Giải Ba***: Từ 15,50 điểm đến 22,25 điểm; ***Giải Khuyến khích***: Từ 11,00 điểm đến 15,25 điểm.

Dưới đây là danh sách các thí sinh được trao giải.

• **Giải Nhất (5 thí sinh)**: *Nguyễn Đình Toàn* (THPT Hùng Vương, **Bình Phước**); *Đỗ Giáp Linh* (THPT chuyên Hà Nội-Amsterdam, **Hà Nội**); *Vũ Phú Trí* (THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**); *Trần Hoàng Bảo Linh* (Trường PTNK - **ĐHQG TP. Hồ Chí Minh**); *Đậu Hải Đăng* (THPT chuyên **ĐHSP Hà Nội**).

• **Giải Nhì (37 thí sinh)**: *Hoàng Công Đức* (THPT chuyên Lý Tự Trọng, **Cần Thơ**); *Lê Hà Quảng* (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**); *Vũ Duy Thành* (THPT chuyên Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**); *Phạm Thái Hà* (THPT chuyên Biên Hòa, **Hà Nam**); *Nguyễn Tú Anh, Chu Thành Hưng, Nguyễn Hùng Tâm* (THPT chuyên Hà Nội-Amsterdam, **Hà Nội**); *Võ Anh Đức, Lê Thị Thu Hiền* (THPT chuyên **Hà Tĩnh**); *Nguyễn Quốc Hiệp, Nguyễn Phương Hùng, Lưu Hữu Phúc, Nguyễn Thị Thanh Yên* (THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**); *Nguyễn Duy Anh Minh* (THPT chuyên Trần Phú, **Hải Phòng**); *Nguyễn Minh Toàn* (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Khánh Hòa**); *Hà Nhật Cương, Nguyễn Thanh Long, Võ Nguyên Phú* (THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**); *Vũ Hồng Sơn* (THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**); *Đoàn Hữu Nho* (THPT chuyên **Thái Bình**); *Thiều Tất Khánh, Lê Quang Lâm, Lê Thùy Linh, Lê Hữu Tài, Lê Văn Tuấn* (THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**); *Lê Trung Hiếu, Phạm Duy Nam, Trần Đăng Phúc, Nguyễn Văn Thắng* (Trường chuyên Khoa học Tự nhiên, **ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội**); *Phạm Tấn Anh Quân, Cấn Trần Thành Trung* (Trường PTNK - **ĐHQG TP. Hồ Chí Minh**); *Lê Tuấn Anh, Nguyễn Tạ Duy, Hoàng Văn Đông, Nguyễn Phương Minh, Nguyễn Anh Quang* (THPT chuyên **ĐHSP Hà Nội**); *Nguyễn Quyền Linh* (THPT chuyên **ĐH Vinh**).

• **Giải Ba (80 thí sinh):** *Trần Thu Trang* (THPT chuyên **Bắc Giang**); *Bùi Nhật Dương, Nguyễn Công Sơn, Đỗ Quang Khải* (THPT chuyên **Bắc Ninh**); *Lê Thị Minh Thảo* (THPT chuyên **Bến Tre**); *Lê Tấn Linh, Huỳnh Thị Tuyết Nhi* (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định**); *Nguyễn Đức Anh, Lê Quang Bình* (THPT chuyên Quang Trung, **Bình Phước**); *Trần Nguyên An Thắng, Đặng Minh Trí* (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**); *Nguyễn Thái Tùng* (THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Đăk Lăk**); *Trần Hoàng Nhật Linh* (THPT chuyên Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**); *Trịnh Quốc Anh* (THPT chuyên Hùng Vương, **Gia Lai**); *Nguyễn Thị Thu Hiền, Đặng Duy Hiển, Nguyễn Thu Lan* (THPT chuyên Biên Hòa, **Hà Nam**); *Hoàng Công Hậu* (THPT chuyên Hà Nội-Amsterdam, **Hà Nội**); *Nguyễn Mậu Thành, Trần Thị Phương Thảo* (THPT chuyên **Hà Tĩnh**); *Mạc Lưu Phong* (THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**); *Nguyễn Đức Nam, Trần Thị Vân Quỳnh* (THPT chuyên Trần Phú, **Hải Phòng**); *Đào Việt Anh, Dương Mạnh Cường, Lương Đức Hiếu, Trần Văn Hữu* (THPT chuyên **Hưng Yên**); *Lưu Anh Khoa, Nguyễn Đình Luận, Vũ Đức Thạch Sơn* (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Khánh Hòa**); *Cao Thanh Hà* (THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, **Kon Tum**); *Lê Đức Cảnh, Bùi Ngọc Hiển, Lưu Tuấn Kha, Phùng Mạnh Linh, Trần Xuân Nguyên* (THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**); *Vũ Hồng Ái, Nguyễn Văn Bảo, Trần Đại Dương* (THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**); *Đỗ Thanh Bình, Hoàng Hải Đăng, Đinh Ngọc Huy, Nguyễn Thành Luân, Phạm Duy Mạnh, Vũ Thị Tuyết Ngân* (THPT chuyên Lương Văn Tụy, **Ninh Bình**); *Phan Quang Huy* (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Ninh Thuận**); *Phan Quốc Hưng, Nguyễn Thành Toàn* (THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**); *Nguyễn Tiến Mạnh, Lê Như Nguyên* (THPT chuyên **Quảng Bình**); *Đặng Nguyễn Duy Nhân* (THPT Sào Nam, **Quảng Nam**); *Phạm Thái, Nguyễn Đỗ Văn* (THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**); *Đỗ Thu Hằng, Phạm Trung Kiên* (THPT chuyên Hạ Long, **Quảng Ninh**); *Hồ Phước Bảo* (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**); *Mai Trần Hạnh Linh, Nguyễn Thị Huyền Trang, Nguyễn Huy Trung* (THPT chuyên **Thái Bình**); *Nguyễn Tiến Tài* (THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**); *Hoàng Vĩnh Thịnh* (THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên - Huế**); *Nguyễn Quang Minh, Vũ Huy Quân* (THPT Nguyễn Hữu Huân và THPT chuyên Lê Hồng Phong, **TP. Hồ Chí Minh**); *Hoàng Đỗ Kiên, Đặng Thế Mạnh, Nguyễn Quyết Tiến, Đặng Quang Tuấn, Nguyễn Thế Tùng* (THPT chuyên, **Vĩnh Phúc**); *Lương Tuấn Hiệp, Nguyễn Duy Hưng, Nguyễn Hoàng Nam* (Trường chuyên Khoa học Tự nhiên, **ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội**); *Lê Việt Hải, Lê Chí Hiếu, Nguyễn Đình An Vinh* (Trường PTNK - **ĐHQG TP. Hồ Chí Minh**); *Phan Văn Tín, Khuất Quang Vũ* (THPT chuyên **ĐHSP Hà Nội**); *Nguyễn Tuấn Anh, Nguyễn Mạnh Cường, Nguyễn Thanh Hải, Nguyễn Thế Tiến* (THPT chuyên **ĐH Vinh**).

• **Giải Khuyến khích (80 thí sinh):** *Trương Lê Trường Bách* (THPT Thoại Ngọc Hầu, **An Giang**); *Trần Thành Đạt, Vũ Đức Kiên* (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bà Rịa - Vũng Tàu**); *Nguyễn Thị Hương, La Văn Quân, Đinh Thành Tuân* (THPT chuyên **Bắc Giang**); *Trần Thanh Nam, Dương Khắc Nhật, Chiêm Thị Kim Phụng* (THPT chuyên **Bạc Liêu**); *Nguyễn Văn Bình, Đặng Thành Nam* (THPT chuyên **Bắc Ninh**); *Lương Việt Chương, Đặng Trung Duẩn, Trần Quang Trí* (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định**); *Lê Văn Đức, Nguyễn Văn Hiếu, Phan Thị Kim Vân* (THPT Đức Tân và THPT chuyên Trần Hưng Đạo, **Bình Thuận**); *Lê Hoàng Minh* (THPT chuyên Phan Ngọc Hiển, **Cà Mau**); *Phan Lê Hoài Ân* (THPT chuyên Lý Tự Trọng, **Cần Thơ**); *Trần Lê Khoa, Hoàng Cung Phúc, Nguyễn Anh Toàn* (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**); *Nguyễn Tất Cường, Trần Hữu Đạo, Nguyễn Trần Bảo Nghĩa* (THPT chuyên Nguyễn Du, **Đăk Lăk**); *Trần Minh Tuân, Nguyễn Hoàng Vinh, Ngô Thành Ý* (THPT Thống Nhất B, THPT chuyên Lương Thế Vinh và THPT Đoàn Kết, **Đồng Nai**); *Hồ Huỳnh Quốc Chương, Lê Vĩnh Thục* (THPT chuyên Nguyễn Quang Diệu và THPT chuyên Nguyễn Đình Chiểu, **Đồng Tháp**); *Trương Kiều Trinh* (THPT chuyên Hùng Vương, **Gia Lai**); *Nguyễn Hoàng Nam, Nguyễn Xuân Trường* (THPT chuyên Nguyễn Huệ, **Hà Nội**); *Phạm Tiến Dũng, Trần Đức Khôi* (THPT chuyên **Hà Tĩnh**); *Lê Huy Hùng, Nguyễn Anh Tuấn* (THPT chuyên Trần Phú, **Hải Phòng**); *Đặng Hữu Hiếu, Trần Phương Thảo* (THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**); *An Mạnh Công, Vũ Nhật Khánh* (THPT chuyên **Hưng Yên**); *Nguyễn Ngọc Khánh, Trần Thị Tú Trinh* (THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, **Kon Tum**); *Vũ Anh, Trần Minh Đức, Võ Thống* (THPT chuyên Thăng Long, **Lâm Đồng**); *Đặng Vân Anh* (THPT chuyên Chu Văn An, **Lạng Sơn**); *Đỗ Tuấn Anh* (THPT chuyên **Lào Cai**); *Bùi Lê Mạnh Hùng, Trần Công Thiện* (THPT chuyên **Long An**); *Vũ Xuân Trường* (THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**); *Phan Phú Nguyên* (THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**); *Trương Minh Hiển* (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Ninh Thuận**); *Nguyễn Ngọc Linh, Phan Nhật Minh* (THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**); *Nguyễn Thị Kiều Hảo, Phan Hồ Anh Tuấn* (THPT chuyên Lương Văn Chánh, **Phú Yên**); *Trần Quang Toản* (THPT chuyên **Quảng Bình**); *Hà Văn Huỳnh Anh, Võ Văn Quang* (THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Quảng Nam**); *Phạm Viết Hoàng, Trần Vũ Xuân Nhật, Phạm Đình Thuyên* (THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**); *Lê Phương Nhi* (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**); *Ngô Lê Anh Lộc, Đỗ Minh Trí* (THPT chuyên Hoàng Lệ Kha, **Tây Ninh**); *Đinh Thị Nho* (THPT chuyên **Thái Bình**); *Lê Quốc Chinh* (THPT chuyên **Thái Nguyên**); *Trần Nguyễn Tài Quốc* (THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên - Huế**); *Nguyễn Phúc Nghiệp* (THPT chuyên **Tiền Giang**); *Thái Nguyễn Hưng, Nguyễn Hoàng Nam* (THPT Nguyễn Thượng Hiền và THPT chuyên Lê Hồng Phong, **TP. Hồ Chí Minh**); *Đặng Đức Công, Nguyễn Đăng Khánh* (THPT chuyên **Tuyên Quang**); *Phạm Đức Thắng, Phạm Đức Tuấn* (THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, **Yên Bái**); *Chu Tuấn Anh, Nguyễn Việt Dũng, Nguyễn Vũ Anh Tuấn* (Trường chuyên Khoa học Tự nhiên, **ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội**); *Vương Nhật Quân* (THPT chuyên **ĐH Vinh**).

CÁC LỚP THCS

Bài T1/417. (Lớp 6). So sánh hai số A và B, biết rằng $A = 2^{3100}$ và $B = 3^{2100}$.

PHẠM TRUNG KIÊN
(GV THCS Hồ Tùng Mậu, Ân Thi, Hưng Yên)

Bài T2/417. (Lớp 7). Cho tam giác ABC cân tại A. Vẽ trung tuyến BM, trên cạnh BC lấy điểm N sao cho $\widehat{CAN} = \widehat{ABM}$. Chứng minh rằng $CM \geq CN$.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T3/417. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn

$$\begin{cases} |a+b+c| \leq 1 \\ |a-b+c| \leq 1 \\ |4a+2b+c| \leq 8 \\ |4a-2b+c| \leq 8. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $|a|+3|b|+|c| \leq 7$.

NGUYỄN DUY LIÊN
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T4/417. Giải phương trình

$$(x-2)(x^2+6x-11)^2 = (5x^2-10x+1)^2.$$

LÊ QUỐC HÁN
(GV Khoa Toán ĐH Vinh, Nghệ An)

Bài T5/417. Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao. Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác HAB và HAC. Đường thẳng IJ cắt các cạnh AB, AC tương ứng tại M và N. Gọi X và Y lần lượt là giao điểm của HI với AB và HJ với AC; BY, CX cắt MN tương ứng tại P và Q. Chứng minh rằng $\dfrac{AI}{AJ} = \dfrac{HP}{HQ}$.

NGUYỄN XUÂN HÙNG
(GV THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/417. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P=(x+2)(y+2)(z+2)$.

TRẦN QUỐC LUẬT
(SV khoa Toán ĐH Vinh, Nghệ An)

Bài T7/417. Cho tam giác ABC. Kí hiệu m_a, m_b, m_c là độ dài các đường trung tuyến; l_a, l_b, l_c là độ dài các đường phân giác trong và p là nửa chu vi tam giác. Chứng minh rằng

$$m_a+m_b+m_c+l_a+l_b+l_c \leq 2\sqrt{3}p.$$

NGUYỄN VĂN QUÝ
(SV K56A1T1, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T8/417. Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt bên SAB là tam giác cân tại S và góc $\widehat{BSA} = 120^\circ$, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng $\dfrac{S_{ABC}}{S_{SAC}} \leq \sqrt{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi nào? (Kí hiệu S_{DEF} là diện tích tam giác DEF).

NGUYỄN QUANG NAM
(GV THPT Quỳ Hợp 2, Nghệ An)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/417. Một số tự nhiên n được gọi là *số tốt* nếu ta có thể chia hình vuông bất kì thành n hình vuông nhỏ có ít nhất hai trong chúng không bằng nhau.

1) Chứng minh rằng nếu n là *số tốt*, thì $n \geq 4$.

2) Chứng minh rằng số 4 và số 5 không phải là *số tốt*.

3) Tìm tất cả các *số tốt*.

VŨ ĐÌNH HÒA
(GV ĐHSP Hà Nội)

Bài T10/417. Cho dãy $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ (với $n \geq 2$) được xác định bởi $a_0 = 0$, $a_k = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{n+k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{a_k}}{n+k+1} + (\ln 2 - a_n)e^{a_n} < 1$$

với $e = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

PHẠM ĐÌNH TRƯỜNG
(SV Lớp Toán Tin, K41, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T11/417. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn $f(x)f(yf(x)) = f(y+f(x))$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}^+$.

($\mathbb{R}^+$ là tập hợp tất cả các số thực dương).

NGUYỄN TRỌNG TUẤN
(GV PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

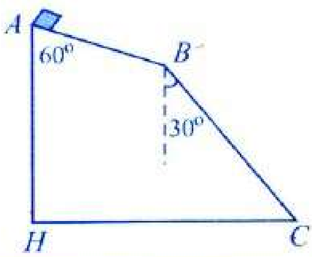
Bài T12/417. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O, R), có trọng tâm G và diện tích S. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2 \geq \left(4\sqrt{3}+\frac{OG^2}{R^2}\right)S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

TRẦN QUANG HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

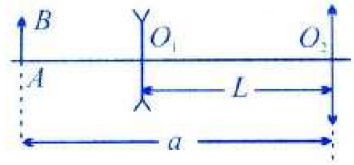
CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/417. Một chiếc nêm có dạng như hình vẽ. Nêm được đặt trên mặt phẳng nằm ngang nhẵn. Một vật nhỏ có khối lượng bằng khối lượng của nêm được giữ nằm yên ở đỉnh nêm A. Buông nhẹ vật thì thấy sau khi rời mặt nêm AB, vật rơi đúng ngay vào chân nêm C. Hãy xác định tỉ số $\dfrac{BC}{AB}$. Bỏ qua mọi ma sát.



PHẠM XUÂN THI
(3CB-38, Biên Hòa, Đồng Nai)

Bài L2/417. Cho một thấu kính O_2 có tiêu cự f_2 = 24cm và vật AB cách thấu kính O_2 một khoảng không đổi a = 44cm. Một thấu kính O_1 có tiêu cự f_1= −15cm được đặt đồng trục với O_2 ở trước và cách O_2 một khoảng L (hình vẽ).



1) Để ảnh cuối cùng A_2B_2 được tạo bởi hệ O_1 và O_2 là ảnh thật thì L phải có độ lớn nằm trong khoảng nào?

2) Hãy xác định L để A_2B_2 có độ phóng đại $k=\dfrac{5}{8}$; A_2B_2 là ảnh thật hay là ảnh ảo?

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/417. (For 6th grade). Which number is bigger: $A=2^{3100}$ or $B=3^{2100}$?

T2/417. (For 7th grade). Let ABC be an isosceles triangle with $AB = AC$. BM is the median from B. N is a point on BC such that $\widehat{CAN}=\widehat{ABM}$. Prove that $CM \geq CN$.

T3/417. Let a, b, c be a positive real numbers such that
$$\begin{cases} |a+b+c| \leq 1 \\ |a-b+c| \leq 1 \\ |4a+2b+c| \leq 8 \\ |4a-2b+c| \leq 8. \end{cases}$$
Prove the inequality $|a|+3|b|+|c| \leq 7$.

T4/417. Solve the equation
$$(x-2)(x^2+6x-11)^2=(5x^2-10x+1)^2.$$

T5/417. Let ABC be a right triangle, with right angle at A, AH is the altitude from A and I, J are the incenters of triangles HAB and HAC, respectively. IJ cuts AB at M and meets AC at N. Let X and Y be the intersections of HI with AB and HJ with AC; BY, CX cuts MN at P and Q, respectively. Prove that $\dfrac{AI}{AJ}=\dfrac{HP}{HQ}$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/417. Let x, y, z be real numbers such that $x^2+y^2+z^2=3$. Find the minimum and maximum value of the expression $P=(x+2)(y+2)(z+2)$.

T7/417. In a triangle ABC, let m_a, m_b, m_c be its median lengths; and l_a, l_b, l_c be the lengths of its inner bisectors. p is half of its perimeter. Prove the inequality
$$m_a+m_b+m_c+l_a+l_b+l_c \leq 2\sqrt{3}p.$$

(Xem tiếp trang 27)

★Bài T1/413. *Trên các mảnh bìa ta viết tất cả các số có năm chữ số từ 11111 đến 99999 sau đó xáo trộn các mảnh bìa rồi đặt chúng thành một dãy để được một số. Chứng minh rằng số mới được tạo thành không thể là lũy thừa của 2.*

Lời giải. Gọi số được tạo thành là A, ta sẽ chứng minh rằng A chia hết cho $m = 11111$. Thật vậy, có tất cả $99999 - 11111 + 1 = 88889$ số có năm chữ số từ 11111 đến 99999. Tách số A thành tổng các số hạng mà mỗi số hạng có dạng $\overline{abcde}.10^{5n}$ với $n = 0, 1, 2, ..., 88888$. Đặt $\overline{abcde} = s$ thì mỗi số hạng có dạng $s.10^{5n} = s.(11111.9+1)^n = s(m.9+1)^n$.

Ta thấy tích hai số
$(m.k+1)(m.h+1) = m(mkh+k+h)+1 = m.t+1$
(với $k, h, t = mkh+k+h$ là các số nguyên) lại có dạng $m.t+1$. Từ đó
$s.10^{5n} = s(m.9+1)^n = s(m.v+1) = m.v.s+s$,
tức là số $s.10^{5n}$ và số s khi chia cho $m = 11111$ thì có cùng số dư. Như vậy số A khi chia cho $m = 11111$ có cùng số dư với số B là tổng của 88889 các số từ 11111 đến 99999.

Ta xét $B = 11111+11112+...+99998+99999$
$B = 99999+99998+...+11112+11111$
thì $2B = (11111+99999).88889 = 11111.888890$, suy ra số B chia hết cho 11111, do đó số A cũng chia hết cho 11111. Vì lũy thừa của 2 không có ước số lẻ nên A không thể là lũy thừa của 2. ❐

➢**Nhận xét.** Một số bạn chỉ ra rằng số A chia hết cho 3, điều này không đúng. Số dư của A khi chia cho 3 bằng số dư của tổng các chữ số của A khi chia cho 3 và cũng bằng số dư của B khi chia cho 3. Tổng của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 3 nên tổng của $88887 = 3.29629$ số nguyên liên tiếp từ 11113 đến 99999 chia hết cho 3, số 11111 chia cho 3 dư 2, do đó số B chia cho 3 dư 2, suy ra số A chia cho 3 dư 2.

VIỆT HẢI

★Bài T2/413. *Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn điều kiện*
$$20abc < 30(ab+bc+ca) < 21abc \quad (1)$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Ta có (1) $\Leftrightarrow \frac{2}{3} < \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} < \frac{7}{10}$ (2)

Vì vai trò của a, b, c như nhau nên ta có thể giả sử $a > b > c > 1$. Khi đó $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < \frac{1}{c}$.

Từ (2) ta có $\frac{2}{3} < \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} < \frac{3}{c} \Rightarrow 2c < 9$ suy ra $c \in \{2;3\}$.

• Với $c = 2$, thay vào (2) ta được
$$\frac{2}{3} < \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{2} < \frac{7}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{6} < \frac{1}{a}+\frac{1}{b} < \frac{1}{5} \quad (3)$$

Từ (3) ta có $\frac{1}{6} < \frac{1}{a}+\frac{1}{b} < \frac{2}{b}$ và $\frac{1}{b} < \frac{1}{5} \Rightarrow 5 < b < 12$
$\Rightarrow b \in \{7;11\}$.

Với $b = 7$, từ (3) ta có $\frac{1}{6} < \frac{1}{a}+\frac{1}{7} < \frac{1}{5}$
$\Leftrightarrow \frac{1}{42} < \frac{1}{a} < \frac{2}{35} \Leftrightarrow 17\frac{1}{2} < a < 42$
$\Rightarrow a \in \{19;23;29;31;37;41\}$.

Với $b = 11$, từ (3) ta có $\frac{1}{6} < \frac{1}{a}+\frac{1}{11} < \frac{1}{5}$
$\Rightarrow \frac{5}{66} < \frac{1}{a} < \frac{6}{55} \Rightarrow 9\frac{1}{6} < a < 13\frac{1}{5} \Rightarrow a = 13$ (do $a > b$).

• Với $c = 3$, thay vào (2) ta có

$$\frac{2}{3} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{3} < \frac{7}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{11}{30} \quad (4)$$

Từ (4) ta có $\frac{1}{3} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{2}{b} \Rightarrow b < 6 \Rightarrow b = 5$ (do $b > c$).

Thay $b = 5$ vào (4) ta có $\frac{1}{3} < \frac{1}{a} + \frac{1}{5} < \frac{11}{30}$

$$\Rightarrow \frac{2}{15} < \frac{1}{a} < \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6 < a < 7\frac{1}{2} \Rightarrow a = 7.$$

Như vậy, ta tìm được 8 bộ ba số nguyên tố $(a;b;c)$ là $(19;7;2),(23;7;2),(29;7;2),(31;7;2),(37;7;2),$ $(41;7;2),(13;11;2),(7;5;3)$.

Dễ thấy các bộ số này đều thỏa mãn (2).

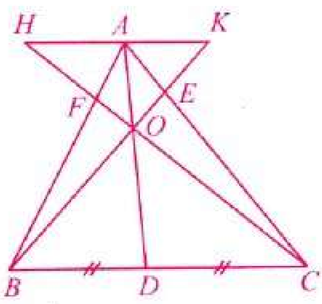
Vậy các bộ số $(a;b;c)$ cần tìm là 8 bộ số trên cùng các hoán vị của nó (tổng số có 48 bộ). ❒

➢**Nhận xét.** Các bạn có lời giải tốt là:

Vĩnh Phúc: *Phạm Thu Hà*, 6A1, *Phan Thị Nguyệt, Bùi Hồng Ánh*, 6A5, THCS Yên Lạc; **Thanh Hóa:** *Lê Quang Dũng*, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Hà Tĩnh:** *Phạm Thị Minh Anh*, 7B, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Quảng Ngãi:** *Võ Nguyên Hải, Trần Thị Mỹ Ninh*, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, *Cao Thị Thúy Điểm*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Đồng Tháp:** *Dương Minh Chánh*, 9A1, THCS Mỹ Quý, Tháp Mười.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T3/413. *Cho tam giác ABC. Trên đường trung tuyến AD lấy điểm O sao cho* $\frac{AO}{AD} = k$ $(0 < k < 1)$*. Các tia BO, CO cắt các cạnh AC, AB lần lượt tại E, F. Xác định k để* $S_{AEOF} = \frac{1}{15} S_{ABC}$.



Lời giải. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC, cắt các tia BO, CO lần lượt tại K, H. Từ giả thiết $\frac{AO}{AD} = k$ suy ra $\frac{AO}{OD} = \frac{k}{1-k}$.

Theo định lí Thales ta có

$$\frac{AH}{DC} = \frac{AO}{OD} = \frac{k}{1-k} \Rightarrow \frac{AH}{BC} = \frac{k}{2(1-k)},$$

mà $\frac{AF}{FB} = \frac{AH}{BC}$ (do $AH // BC$), suy ra

$$\frac{AF}{FB} = \frac{k}{2(1-k)} \Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{k}{2-k}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{AOF}}{S_{ABD}} = \frac{AF}{AB} \cdot \frac{AO}{AD} = \frac{k^2}{2-k} \quad (1)$$

Tương tự, ta có $\frac{S_{AOE}}{S_{ADC}} = \frac{k^2}{2-k}$ (2)

Mặt khác do $DB = DC$ nên $S_{ABD} = S_{ADC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$\frac{S_{AEOF}}{S_{ABC}} = \frac{k^2}{2-k} = \frac{1}{15} \Leftrightarrow 15k^2 + k - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{3};\ k = -\frac{2}{5} \text{ (loại).}$$

Vậy $k = \frac{1}{3}$ là giá trị cần tìm. ❒

➢**Nhận xét.** 1) Đây là bài toán sử dụng kiến thức về định lí Thales và tính chất của dãy tỉ số bằng nhau. Tất cả các bạn tham gia gửi bài đều cho kết quả đúng. Ngoài cách giải nêu trên, một số bạn kẻ qua D đường thẳng song song với BE hoặc CF, cũng đi đến kết quả tương tự.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt hơn cả:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Tuấn Huy, Nguyễn Thị Khánh Huyền*, 8A, *Nguyễn Thị Lan Anh*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ:** *Phạm Ngọc Hải, Nguyễn Tiến Dũng*, 8A3; *Nguyễn Hồng Quân, Cao Trung Đức, Tạ Diệu Ly, Ngô Duy Quang*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Bắc Ninh:** *Lê Thị Hải Linh, Chu Văn Trang, Tạ Thị Nga, Nguyễn Thị Phương, Lưu Đức Mạnh*, 9A, THCS Yên Phong; **Hà Nội:** *Nguyễn Tùng Sơn, Nguyễn Chí Tùng*, 9A10, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Nam Định:** *Vũ Đức Tài*, 8A3, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định; **Thanh Hóa:** *Lê Quang Dũng*, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Thái Bá Mạnh, Thái Văn Đạt, Nguyễn Văn Vinh*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Bùi Quý Bảo*, 9D, *Lê Minh Hiếu*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Hà Tĩnh:** *Thái Lê Hằng, Trần Đoan Trang, Bùi Phương Dung*, 8C, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Quảng Ngãi:** *Cao Thị Thúy Điểm*, 8A, *Tống Thành Nguyên*, 9A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, *Nguyễn Thị Kiều Duyên*, 8A, THCS Nguyễn Kim Vang, *Trần Thị Mỹ Ninh*, 8A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, *Đỗ Đăng Thịnh*, 9A, THCS Đức Thắng, Mộ Đức; **TP. Hồ Chí Minh**: *Phạm Thảo Nguyên, Nguyễn Lê Thùy Dương*, 9A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Đồng Tháp**: *Dương Minh Chánh*, 9A1, THCS Mỹ Quý, Tháp Mười.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ Bài T4/413. *Giải phương trình*

$$\sqrt{x^2+x+19}+\sqrt{7x^2+22x+28}+\sqrt{13x^2+43x+37}=3\sqrt{3}(x+3).$$

Lời giải. Nhận thấy $\sqrt{a^2}=|a|\geq a$, đẳng thức xảy ra khi $a\geq 0$. Ta có

$$\sqrt{x^2+x+19}=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{75}{4}}\geq\sqrt{\frac{75}{4}}=\frac{5\sqrt{3}}{2};$$

$$\sqrt{7x^2+22x+28}=\sqrt{(2x+1)^2+3(x+3)^2}\geq\sqrt{3(x+3)^2}\geq\sqrt{3}(x+3);$$

$$\sqrt{13x^2+43x+37}=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+3\left(2x+\frac{7}{2}\right)^2}\geq\sqrt{3\left(2x+\frac{7}{2}\right)^2}\geq\sqrt{3}\left(2x+\frac{7}{2}\right).$$

Gọi vế trái của phương trình là A thì

$$A\geq\frac{5\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}(x+3)+\sqrt{3}\left(2x+\frac{7}{2}\right)$$

$$=\sqrt{3}\left(\frac{5}{2}+3+\frac{7}{2}+3x\right)=3\sqrt{3}(x+3).$$

Do đó $A=3\sqrt{3}(x+3)$ khi và chỉ khi các BĐT trên đều trở thành đẳng thức, tức là

$$\begin{cases}x+\frac{1}{2}=0\\2x+1=0\\x+3\geq 0\\2x+\frac{7}{2}\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-\frac{1}{2}$. ❐

➤**Nhận xét.** 1) Các bài giải gửi đến tòa soạn đều sử dụng phương pháp bất đẳng thức tương tự như trên. Tuy nhiên đa số bài làm còn biến đổi dài, lập luận thiếu chặt chẽ.

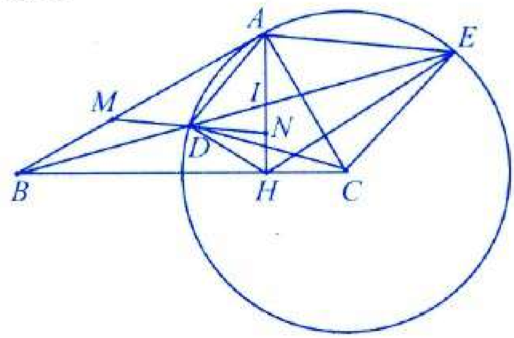
2) Các bạn sau đây có lời giải tốt hơn cả:

Hà Nội: *Nguyễn Chí Tùng*, 9A10, THCS Giảng Võ, Ba Đình, *Nguyễn Công Hà*, 9A1, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Phú Thọ:** *Lê Minh Hoàng, Nguyễn Hoàng Việt*, 9A3, THCS Lâm Thao, *Bùi Tuấn Linh*, 9A, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì; **Nghệ An:** *Nguyễn Tất Quý*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** *Phan Thị Diễm Trang*, 7D, THCS Đức Phong, Mộ Đức; **Phú Yên:** *Nguyễn Trần Hậu*, 8C, THCS Trần Quốc Toản, TP. Tuy Hòa; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Minh Khang*, 9A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Đồng Tháp:** *Dương Minh Thành*, 9A1, THCS Mỹ Quý, Tháp Mười.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ Bài T5/413. *Cho tam giác ABC vuông tại A. D là một điểm nằm trong tam giác đó sao cho CD = CA; M là một điểm trên cạnh AB sao cho $\widehat{BDM}=\frac{1}{2}\widehat{ACD}$; N là giao điểm của MD và đường cao AH của tam giác ABC. Chứng minh rằng DM = DN.*

Lời giải



Vẽ đường tròn (C; CA) cắt đường thẳng BD tại E ($E\neq D$), khi đó BA là tiếp tuyến của đường tròn. Ta có $BD.BE=BA^2$ (do $\Delta BDA\backsim\Delta BAE$), $BH.BC=BA^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC), suy ra

$$BH.BC=BD.BE\Rightarrow\frac{BD}{BH}=\frac{BC}{BE}$$

$\Rightarrow\Delta BDH\backsim\Delta BCE$ (c.g.c)

$\Rightarrow\widehat{BHD}=\widehat{BEC}$ và tứ giác $DHCE$ nội tiếp

$\Rightarrow\widehat{BHD}=\widehat{BEC}=\widehat{CDE}=\widehat{CHE}\Rightarrow\widehat{AHD}=\widehat{AHE}$.

Mà $AH\perp BC$ nên HA, HB tương ứng là phân giác trong và phân giác ngoài của góc $\widehat{DHE}$. Do đó, nếu I là giao điểm của AH và BE thì

$$\frac{ID}{IE}=\frac{HD}{HE}=\frac{BD}{BE}\qquad(*)$$

Theo giả thiết, ta có $\widehat{MDB}=\frac{1}{2}\widehat{ACD}=\widehat{AEB}$ nên $MN//AE$. Do đó $\frac{MD}{AE}=\frac{BD}{BE},\frac{DN}{AE}=\frac{DI}{IE}$.

Kết hợp với (*) ta có $\frac{MD}{AE}=\frac{DN}{AE}\Rightarrow DM=DN$. ❐

➢**Nhận xét.** 1) Đây là một bài toán khó và có rất ít bạn tham gia giải. Bạn *Chu Văn Trang*, 9A, THCS Yên Phong, **Bắc Ninh** và một nhóm bạn ở lớp 9A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, **TP. Hồ Chí Minh** đưa ra cách giải khác qua 3 bước chứng minh các cặp tam giác sau đồng dạng $\Delta BMD \backsim \Delta BDA$ (g.g), $\Delta CHD \backsim \Delta CDB$ (c.g.c), $\Delta AND \backsim \Delta ADH$ (g.g).

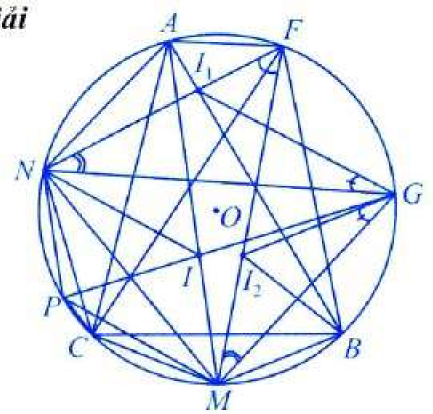
Cách giải này cũng tương đối ngắn gọn và không phải kẻ đường phụ. Tuy nhiên chúng tôi muốn giới thiệu cách giải trên đây vì điểm phụ E là sự kết nối rất đẹp giữa giả thiết và kết luận. Ngoài ra, bạn *Phan Huỳnh Lan Chi*, lớp 9A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, **TP. Hồ Chí Minh** cũng đưa ra một cách giải khác, dù rằng khá phức tạp nhưng rất đáng khen.

2) Ngoài hai bạn *Trang* và *Chi*, các bạn sau đây ở lớp 9A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, **TP. Hồ Chí Minh** có lời giải rõ ràng và ngắn gọn: *Phạm Nguyễn Minh Triết, Nguyễn Minh Quang, Nguyễn Vĩnh Khang, Ngô Trần Minh Khánh, Trần Thế Quang, Bùi Đức Thiên Ngọc Sơn.*

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★**Bài T6/413.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). F là một điểm bất kì thuộc cung $\widehat{AB}$ (không chứa C) (F khác A và B). M là điểm chính giữa của cung $\widehat{BC}$ (không chứa A); N là điểm chính giữa của cung $\widehat{AC}$ (không chứa B). Đường thẳng qua C song song với MN cắt lại đường tròn (O) tại P. Gọi I, I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, FAC, FBC. PI cắt lại đường tròn (O) tại G. Chứng minh rằng bốn điểm I_1, F, G, I_2 cùng nằm trên một đường tròn.*

Lời giải



Nhận xét rằng $I_1 \in NF$; $I_2 \in FM$. Ta có

$$\widehat{MI_2B} = \widehat{I_2FB} + \widehat{I_2BF} = \frac{1}{2}\widehat{CAB} + \frac{1}{2}\widehat{FBC} \quad (1)$$

Mặt khác

$$\widehat{MBI_2} = \widehat{MBC} + \widehat{CBI_2} = \frac{1}{2}\widehat{CAB} + \frac{1}{2}\widehat{FBC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MI_2B} = \widehat{MBI_2}$ hay tam giác MBI_2 cân tại M.

Tóm lại ta có $MB = MC = MI = MI_2$ (3)

Tương tự có $NA = NC = NI = NI_1$ (4)

Từ giả thiết suy ra tứ giác $CPNM$ là hình thang cân nên $PM = NC = NI$; $NP = MC = MI$. Từ đó tứ giác $NPMI$ là hình bình hành, suy ra

$$S_{MPG} = S_{NPG} \Leftrightarrow \frac{1}{2}MP.MG.\sin\widehat{PMG}$$

$$= \frac{1}{2}NP.NG.\sin\widehat{PNG} \Rightarrow MP.MG = NP.NG \quad (5)$$

Mặt khác $NP = MI_2; MP = NI_1$ nên từ (5) ta có $\dfrac{MG}{MI_2} = \dfrac{NG}{NI_1}$. Kết hợp với $\widehat{I_1NG} = \widehat{I_2MG}$ (cùng chắn $\widehat{FG}$) suy ra $\Delta NI_1G \backsim \Delta MI_2G$. Do đó $\widehat{NGI_1} = \widehat{MGI_2} \Rightarrow \widehat{NGM} = \widehat{I_1GI_2}$. Lại vì $\widehat{NGM} = \widehat{I_1FI_2}$ suy ra $\widehat{I_1GI_2} = \widehat{I_1FI_2}$, hay bốn điểm F, I_1, I_2, G cùng nằm trên một đường tròn (đpcm). ☐

➢**Nhận xét.** 1) Một số bạn cho lời giải bài T6/413 bằng cách xét *phép nghịch đảo cực C với phương tích $k > 0$ bất kì.*

2) Những bạn sau có lời giải gọn hơn cả:

Vĩnh Phúc: *Hoàng Đỗ Kiên*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Phú Thọ:** *Đào Văn Lập*, 11A1, THPT Thanh Thủy; **Hưng Yên:** *Nguyễn Thị Việt Hà, Nguyễn Trung Hiếu*, 10 Toán, THPT chuyên Hưng Yên; **Nam Định:** *Vũ Thị Thanh Hiền*, 10 Toán 2, *Trần Thị Hồng Nhung*, 12 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** *Trần Hồng Quân*, 10 Toán 1, *Trần Trung Hiếu*, 11 Toán 2, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hóa:** *Lê Thế Sơn*, 10C8, THPT Bỉm Sơn, *Nguyễn Trọng Nhật, Nguyễn Văn Dũng*, 10T, *Phạm Thế Dương*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Bùi Quang Đông*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, *Lê Kim Nhã*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, *Chu Tự Tài*, 11A12, THPT Diễn Châu 2; **Hà Tĩnh:** *Trần Quốc Dũng, Nguyễn Mậu Thành*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** *Trần Đức Anh*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Nam:** *Phạm Tuấn Anh*, 12/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Bình Định:** *Nguyễn Quang Hải*, 12TN2, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn; **Đồng Nai:** *Phạm Văn Minh*, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh.

HỒ QUANG VINH

★**Bài T7/413.** *Giải phương trình*

$$(2\sin x - 3)(4\sin^2 x - 6\sin x + 3) = 1 + 3\sqrt[3]{6\sin x - 4}.$$

Lời giải. Biến đổi phương trình, ta được

$$8(\sin^3 x - 3\sin^2 x + 3\sin x - 1) = 2 + 3\sqrt[3]{6\sin x - 4}$$

$\Leftrightarrow (2\sin x-2)^3 = 2+3\sqrt[3]{6\sin x-4}$ (1)

Đặt $u=2\sin x-2$; $v=\sqrt[3]{6\sin x-4}$, suy ra $\sin x=\dfrac{u+2}{2}=\dfrac{v^3+4}{6}$.

Kết hợp với (1), ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3=3v+2 & (2)\\ v^3=3u+2 & (3)\end{cases}$$

Trừ theo vế của (2) cho (3), thu được

$$u^3-v^3=3(v-u)$$

$$\Leftrightarrow (u-v)(u^2+uv+v^2+3)=0 \quad (4)$$

Ta có $u^2+uv+v^2+3=\left(u+\dfrac{v}{2}\right)^2+\dfrac{3v^2}{4}+3>0$.

Do đó $(4)\Leftrightarrow u=v$. Thay vào PT(2), ta được

$$u^3-3u-2=0\Leftrightarrow (u+1)^2(u-2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=-1\\ u=2.\end{array}\right.$$

• Với $u=-1$ thì $2\sin x-2=-1\Leftrightarrow \sin x=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ hoặc $x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

• Với $u=2$ thì $2\sin x-2=2\Leftrightarrow \sin x=2$ (loại).

Vậy phương trình có nghiệm là

$x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ hoặc $x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$. ❐

➢**Nhận xét.** 1) Có khá nhiều bạn tham gia gửi bài và hầu hết làm theo cách trên. Ngoài ra có thể giải bài toán bằng cách khác như sau

Biến đổi phương trình thành

$(2\sin x-2)^3+3(2\sin x-2)=(6\sin x-4)+3\sqrt[3]{6\sin x-4}$ (5)

nhận thấy hàm số $f(t)=t^3+3t$ luôn đồng biến (vì $f'(t)=3t^2+3>0$) nên từ (5) suy ra

$f(2\sin x-2)=f\left(\sqrt[3]{6\sin x-4}\right)\Leftrightarrow 2\sin x-2=\sqrt[3]{6\sin x-4}$.

Giải PT trên, được kết quả cần tìm.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Yên Bái: *Lê Minh Tuấn*, 12T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, TP. Yên Bái; **Bắc Ninh**: *Nguyễn Hữu Hùng*, 12 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hải Dương**: *Vũ Đình Việt*, 12A1, THPT Kẻ Sặt, Bình Giang; **Hưng Yên**: *Đào Thị Minh Ngọc*, *Nguyễn Trọng Chúc*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An**: *Hoàng Hữu Đức*, 12A1, THPT Nguyễn Xuân Ôn, Diễn Châu; **Quảng Nam**: *Phạm Tuấn Anh*, 12/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Bình Định**: *Nguyễn Quang Hải*, 12TN2, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn.

NGUYỄN ANH DŨNG

★**Bài T8/413.** *Xét bốn số thực x, y, z, t thuộc đoạn* $\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right]$. *Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=9\left(\frac{x+z}{x+t}\right)^2+16\left(\frac{z+t}{x+y}\right)^2.$$

Lời giải. Sử dụng BĐT Cauchy ta có

$$P\ge\frac{24(x+z)(z+t)}{(x+t)(x+y)}\ge\frac{24\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+t\right)}{(x+t)\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)}$$

$$=\frac{18\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(t+\frac{1}{2}\right)}{x+t}.$$

Lại có $\dfrac{t+\frac{1}{2}}{x+t}=1-\dfrac{x-\frac{1}{2}}{x+t}\ge 1-\dfrac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}$.

Suy ra $P\ge 18$.

Vậy min$P=18$, đạt được khi $x=y=\dfrac{2}{3}, z=t=\dfrac{1}{2}$.

Mặt khác, ta có

$$\frac{x+z}{x+t}\le\frac{x+\frac{2}{3}}{x+t}=1+\frac{\frac{2}{3}-t}{x+t}\le 1+\frac{\frac{2}{3}-t}{\frac{1}{2}+t}=\frac{7}{3(2t+1)},$$

$$\frac{z+t}{x+y}\le\frac{\frac{2}{3}+t}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{3t+2}{3}.$$

Do đó $P\le\dfrac{49}{(2t+1)^2}+\dfrac{16}{9}(3t+2)^2=f(t)$.

Ta có $f'(t)=-\dfrac{196}{(2t+1)^3}+\dfrac{32}{3}(3t+2)$

$=\dfrac{32(3t+2)(2t+1)^3-588}{(2t+1)^3}>0, \forall t\in\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right]$.

Vậy $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right]$.

Suy ra $P\le f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{337}{9}$.

Vậy $\max P = \dfrac{337}{9}$, đạt được khi và chỉ khi $x=y=\dfrac{1}{2}; z=t=\dfrac{2}{3}$. ❒

➤**Nhận xét.** Có rất ít bạn tham gia giải bài toán trên và chỉ có bốn bạn cho lời giải đúng:

Yên Bái: *Lê Minh Tuấn*, 12T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Nghệ An:** *Hồ Bá Đức*, 11A2, THPT Diễn Châu II; **Hưng Yên:** *Nguyễn Trung Hiếu*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Quảng Trị:** *Trần Đức Anh*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN THANH HỒNG

★**Bài T9/413.** *Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố cho trước p thì tồn tại những số tự nhiên x, y, z, t thỏa mãn* $x^2+y^2+z^2-tp=0$ *và* $0<t<p$.

Lời giải. (Theo bạn *Trần Chí Công*, 12A1 Toán, THPT chuyên ĐH Vinh, **Nghệ An**).

- Với $p=2$ ta chọn $x=0, y=z=t=1$.
- Với $p>2$. Xét tập $A=\{x^2\}$ với $x\in\left\{0,1,2,...,\dfrac{p-1}{2}\right\}$ và tập $B=\{-y^2-1\}$ với $y\in\left\{0,1,2...,\dfrac{p-1}{2}\right\}$.

Nhận xét. Nếu $i,j\in\left\{0,1,2...,\dfrac{p-1}{2}\right\}$ và $i^2\equiv j^2 \pmod p$ thì $i=j$.

Thật vậy $i^2-j^2=(i-j)(i+j)\,\vdots\, p$.

Vì $0\le|i-j|\le i+j\le p-1<p$ nên ta phải có $i=j$.

Từ nhận xét trên suy ra các phần tử của A là phân biệt (mod$p$). Các phần tử của B là phân biệt (mod$p$). Mà $|A|+|B|=p+1>p$ nên tồn tại $x_0\in\left\{0,1,2,...\dfrac{p-1}{2}\right\}$ và $y_0\in\left\{0,1,2,...\dfrac{p-1}{2}\right\}$ sao cho $x_0^2\equiv -y_0^2-1 \pmod p \Leftrightarrow x_0^2+y_0^2+1=tp$ với $t\in\mathbb{N}^*$.

Ta có $0<t=\dfrac{x_0^2+y_0^2+1}{p}\le\dfrac{2\left(\dfrac{p-1}{2}\right)^2+1}{p}$

$=\dfrac{p^2-2p+3}{2p}<p$ (vì $(p+3)(p-1)>0$).

Vậy ta lấy $x=x_0, y=y_0, z=1$. ❒

➤**Nhận xét.** Bài này có ít bạn giải nhưng tất cả các bạn tham gia đều có lời giải đúng. Các bạn có lời giải tốt là:

Yên Bái: *Lê Minh Tuấn*, 12T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Bắc Ninh:** *Đỗ Quang Khải*, 11T, THPT chuyên Bắc Ninh; **Thanh Hóa:** *Lê Thị Khanh*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Đồng Nai:** *Đặng Ngọc Sơn*, 10T, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Phú Yên:** *Lê Nhật Thăng*, 11 Toán, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Quảng Ngãi:** *Phạm Đình Thuyên*, 11T1, THPT chuyên Lê Khiết.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★**Bài T10/413.** *Xét dãy số* (u_n) *được cho bởi* $u_1=a$; $u_{n+1}=\dfrac{(\sqrt{2}+1)u_n-1}{\sqrt{2}+1+u_n}$ $(n\ge1)$.

a) *Tìm điều kiện của a để mọi số hạng của dãy số đều xác định.*

b) *Tìm a để* $u_{2011}=2011$.

Lời giải. Đặt $x=\cot\dfrac{\pi}{8}$. Chú ý $1=\cot\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{x^2-1}{2x}$ $\Rightarrow x=\sqrt{2}+1$ (vì $x>0$). Giả sử $a=\cot\alpha, 0<\alpha<\pi$.

Khi đó $u_2=\dfrac{\cot\dfrac{\pi}{8}.\cot\alpha-1}{\cot\dfrac{\pi}{8}+\cot\alpha}=\cot\left(\alpha+\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Tương tự, chứng minh bằng quy nạp ta có

$u_n=\cot\left(\alpha+\dfrac{(n-1)\pi}{8}\right)$ $(n\in\mathbb{N}^*)$.

Do đó dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ tuần hoàn với chu kì $T=8$.

a) Từ nhận xét trên ta suy ra mọi số hạng của dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ đều xác định khi và chỉ khi

$$\alpha+\frac{m\pi}{8}\ne k\pi\,(k\in\mathbb{Z}),\ \forall m=1,2,3,4,5,6,7$$

$\Leftrightarrow \cot\alpha\ne\cot\dfrac{l\pi}{8}, \forall l=1,2,3,4,5,6,7$

$\Leftrightarrow a\notin\left\{\pm\left(\sqrt{2}+1\right),\pm\left(\sqrt{2}-1\right),\pm1,0\right\}$.

b) Ta có $u_{2011}=u_3=\cot\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\cot\alpha.\cot\dfrac{\pi}{4}-1}{\cot\alpha+\cot\dfrac{\pi}{4}}$

$=\dfrac{a-1}{a+1}$. Do đó $u_{2011}=2011\Leftrightarrow\dfrac{a-1}{a+1}=2011$

$\Leftrightarrow a=-\dfrac{2012}{2010}=-\dfrac{1006}{1005}$. □

➤**Nhận xét.** Đây là bài toán đại số giải bằng phương pháp lượng giác. Các bạn học sinh sau có lời giải tốt: **Vĩnh Phúc:** *Hoàng Đỗ Kiên*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thái Bình:** *Trần Hồng Quân*, 10T1, THPT chuyên Thái Bình; **Nghệ An:** *Trương Công Phú, Lê Kim Nhã*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Chu Tự Tài*, 11A2, THPT Diễn Châu 2; **Quảng Trị:** *Trần Đức Anh*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Lâm Đồng:** *Nguyễn Vũ Trung Quân*, 11T1, THPT chuyên Thăng Long, Đà Lạt; **TP. Vũng Tàu:** *Phùng Thanh Dũng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Nai:** *Đặng Ngọc Sơn*, 10T, THPT chuyên Lương Thế Vinh, TP. Biên Hòa.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★**Bài T11/413.** *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện*

$$\frac{f(x+y)+f(x)}{2x+f(y)}=\frac{2y+f(x)}{f(x+y)+f(y)},\ \forall x,y\in\mathbb{N}^* \quad (1)$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn)

• Từ (1) cho $x=n, y=n$, ta được $f(2n)=2n$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$. Vậy $f(x)=x$ với mọi x chẵn.

• Xét các cặp số lẻ x,y tuỳ ý. Khi đó $x+y$ là số chẵn nên $f(x+y)=x+y$. Từ (1) suy ra

$$\frac{x+y+f(x)}{2x+f(y)}=\frac{2y+f(x)}{x+y+f(y)},$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-x)f(x)+(x-y)f(y)=0,$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\big(x-y-f(x)+(x-y)f(y)\big)=0,$$

$\Rightarrow f(x)-x=f(y)-y$, với mọi x, y lẻ; $x\neq y$ hay $f(x)=x+c$, với mọi x lẻ, $c\in\mathbb{N}^*$ là hằng số (2)

• Xét các cặp số x chẵn, y lẻ tuỳ ý. Khi đó $x+y$ là số lẻ nên

$f(x+y)=x+y+c$; $f(x)=x$; $f(y)=y+c$.

Từ (1) suy ra $\dfrac{(x+y+c)+x}{2x+(y+c)}=\dfrac{2y+x}{(x+y+c)+(y+c)}$,

nên $c=0$. Vậy (2) cho ta $f(x)=x$ với mọi x lẻ. Do đó $f(x)=x$ với mọi $x\in\mathbb{N}^*$.

Thử lại, ta thấy hàm số này thoả mãn điều kiện bài toán.

Kết luận. Hàm số cần tìm là $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{N}^*$. □

➤**Nhận xét.** Đây là dạng toán quen biết về phương trình hàm nên có số lượng lớn các bài giải gửi đến Toà soạn. Các bạn đều có lời giải đúng và cách giải tương tự như cách đã trình bày trên đây: **Yên Bái:** *Lê Minh Tuấn*, 12T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Phú Thọ:** *Đào Văn Lập*, 11A1 THPT Thanh Thuỷ, *Nguyễn Thanh Tú*, 10T, THPT chuyên Hùng Vương; **Vĩnh Phúc:** *Vũ Thị Quỳnh Anh, Hoàng Đỗ Kiên*, 11A1 THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** *Đỗ Quang Khải*, 11T, *Nguyễn Văn Công*, 10T, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hà Nội:** *Phạm Ngọc Lâm*, 11A1, THPT Liên Hà, Đông Anh; **Nam Định:** *Vũ Xuân Trường*, 11T1, *Phùng Mạnh Linh*, 12T2 THPT Lê Hồng Phong; **Hưng Yên:** *Trần Ngọc Tiến*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Thái Bình:** *Trần Hồng Quân*, 10T1, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Văn Dũng, Nguyễn Trọng Nhật*, 10T, *Lê Thị Lan Anh, Phạm Thế Dương*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Hoàng Nghĩa Bảo, Lê Kim Nhã, Dương Nữ Diệp Anh, Trương Công Phú*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Chu Tự Tài, Hồ Bá Đức*, 11A12, THPT Diễn Châu 2, *Nguyễn Tất Phú*, 11T1, THPT Đô Lương 1, *Trần Chí Công*, 12A1 Toán, THPT chuyên ĐH Vinh; **Hà Tĩnh:** *Phạm Tiến Dũng*, 12T2, *Nguyễn Mậu Thành*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Bến Tre:** *Võ Thiện Khang, Nguyễn Vân Anh*, 11T THPT chuyên Bến Tre; **Bình Định:** *Nguyễn Quang Hải*, 12TN2, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn; **Bình Dương:** *Trần Triệu Hải*, 11T2, THPT,chuyên Hùng Vương; **Đồng Nai:** *Phạm Văn Minh, Đặng Ngọc Sơn* 10T, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **TP. Hồ Chí Minh:** *Lê Quảng Nghĩa*, 11CT, THPT Nguyễn Hữu Huân; **Lâm Đồng:** *Nguyễn Vũ Trung Quân*, 11T1, THPT chuyên Thăng Long; **Phú Yên:** *Lê Nhật Thăng*, 11T, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Quảng Nam:** *Phạm Tuấn Anh*, 12T, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Quảng Ngãi:** *Hồ Đăng Triều*, 11T1, THPT chuyên Lê Khiết; **Quảng Trị:** *Hồ Phước Bảo, Trần Đức Anh*, 10T, THPT Lê Quý Đôn; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Phùng Thanh Dũng*, 11T THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu.

NGUYỄN VĂN MẬU

★**Bài T12/413.** *Cho tam giác ABC, $\widehat{BAC}\neq 90^\circ$. D là điểm cố định trên cạnh BC. P là điểm nằm trong tam giác ABC. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của P lên AC, AB. DB_1 cắt AB tại C_2, DC_1 cắt AC tại B_2. Q là giao điểm khác A của các đường tròn ngoại tiếp tam giác AB_1C_1 và AB_2C_2. Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.*

Lời giải. Trước hết, xin giới thiệu không chứng minh ba bổ đề quen thuộc.

Bổ đề 1. Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) cắt nhau tại A, B. Đường thẳng m qua B và theo thứ tự cắt (O_1), (O_2) tại M_1, M_2 (khác B) Đường thẳng n qua B và theo thứ tự cắt (O_1), (O_2) tại N_1, N_2 (khác B). Khi đó các tam giác AM_1M_2, AN_1N_2 đồng dạng cùng hướng.

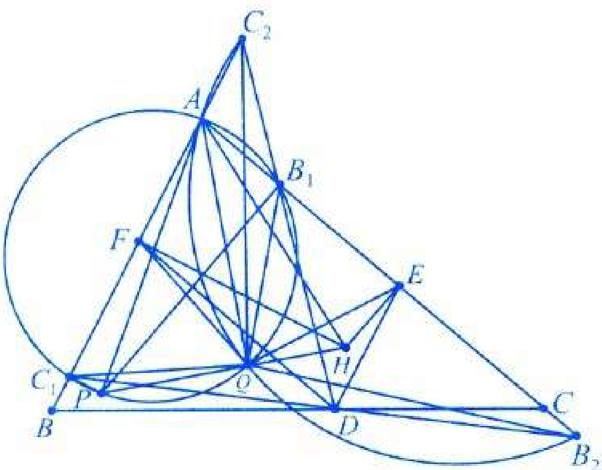
Bổ đề 2. Cho hai tam giác ABC, $A'B'C'$ và các điểm M, M' theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, $B'C'$ sao cho $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \dfrac{\overline{M'B'}}{\overline{M'C'}}$. Khi đó các tam giác ABC, $A'B'C'$ đồng dạng cùng hướng (ngược hướng) khi và chỉ khi các tam giác ABM, $A'B'M'$ đồng dạng cùng hướng (ngược hướng).

Bổ đề 3. Các tam giác OAB, $OA'B'$ đồng dạng cùng hướng khi và chỉ khi các tam giác OAA', OBB' đồng dạng cùng hướng.

Trở lại giải bài toán T12.

Trên AB, AC theo thứ tự lấy các điểm F, E sao cho tứ giác $AFDE$ là hình bình hành.

Gọi H là trực tâm của tam giác DEF (hình vẽ)



Vì B_1, C_1 theo thứ tự là hình chiếu của P trên AC, AB nên đường tròn ngoại tiếp tam giác AB_1C_1 chính là đường tròn đường kính AP.

Do $Q \in (AB_1C_1)$ nên $\widehat{APQ} = 90°$ (1)

Theo Bổ đề 2, các tam giác QB_1B_2, QC_1C_2 đồng dạng cùng hướng (2)

Vì $ED // AC_1$ và $FD // AB_2$ nên theo định lí Thales,

$$\frac{\overline{EB_2}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{DB_2}}{\overline{DC_1}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{FC_1}} \Rightarrow \overline{EB_2}.\overline{FC_1} = \overline{EA}.\overline{FA}.$$

Tương tự $\overline{EB_1}.\overline{FC_2} = \overline{EA}.\overline{FA} \Rightarrow \overline{EB_2}.\overline{FC_1} = \overline{EB_1}.\overline{FC_2}$.

Do đó $\dfrac{\overline{EB_1}}{\overline{EB_2}} = \dfrac{\overline{FC_1}}{\overline{FC_2}}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra các tam giác QB_1E, QC_1F đồng dạng cùng hướng.

Từ đó, theo Bổ đề 3, các tam giác QEF, QB_1C_1 đồng dạng cùng hướng.

Vì A, Q, B_1, C_1 cùng thuộc một đường tròn và AE, AF theo thứ tự vuông góc với HE, HF nên

$(QE,QF) \equiv (QB_1,QC_1) \equiv (AB_1,AC_1) \equiv (AE,AF)$
$\equiv (HE,HF) (\text{mod } 180°)$.

Do đó năm điểm Q, E, F, A, H cùng thuộc một đường tròn.

Từ $EA // FD$ và H là trực tâm của tam giác DEF có

$(QA,QH) \equiv (EA,EH) \equiv (FD,EH) \equiv 90° (\text{mod} 180°)$.

Nói cách khác $\widehat{AQH} = 90°$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra P, Q, H thẳng hàng.

Điều đó có nghĩa là đường thẳng PQ luôn đi qua điểm H cố định. ❐

➢**Nhận xét.** 1) Để có một lời giải hoàn chỉnh cho bài toán này cần phải có những hiểu biết cơ bản về khái niệm hướng (xem các Bổ đề 1, 2, 3).

2) Không cần các giả thiết "*D thuộc BC*" và "*P nằm trong tam giác ABC*", đường thẳng PQ vẫn đi qua H.

3) Có thể chứng minh đẳng thức $\dfrac{\overline{EB_1}}{\overline{EB_2}} = \dfrac{\overline{FC_1}}{\overline{FC_2}}$ bằng khái niệm tỉ số kép.

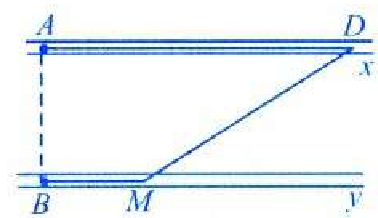
$$\frac{\overline{EB_1}}{\overline{EB_2}} = (B_1B_2E) = D(B_1B_2EF) = D(C_2C_1EF) = D(C_1C_2FE)$$
$$= (C_1C_2F) = \frac{\overline{FC_1}}{\overline{FC_2}}.$$

4) Vì không có những hiểu biết cơ bản về khái niệm hướng nên số bạn tham gia giải bài toán này rất ít và chưa hoàn chỉnh. Xin nêu tên ba bạn có lời giải tương đối tốt:

Vĩnh Phúc: *Đặng Quang Tuấn,* 11A$_1$, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Đồng Nai:** *Phạm Văn Minh,* 11T, THPT chuyên Lương Thế Vinh, TP. Biên Hoà; **Quảng Trị:** *Trần Đức Anh,* 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quảng Trị.

NGUYỄN MINH HÀ

★Bài L1/413. *Có hai người ban đầu đứng ở các vị trí A và B trên hai con đường thẳng song song Ax và By, cách nhau đoạn AB = L = 540m; AB vuông góc với Ax và By, giữa Ax và By là một cánh đồng. Người thứ nhất chuyển động trên đường từ A tới D với vận tốc v_1 = 4m/s. Người thứ hai khởi hành từ B cùng lúc với người thứ nhất và muốn chuyển động đến gặp người thứ nhất theo đường BMD (hình vẽ).*



Vận tốc chuyển động của người thứ hai trên đường BM là $v'_2 = 13$m/s và trên cánh đồng MD là $v_2 = 5$m/s. Tìm khoảng thời gian ngắn nhất từ lúc khởi hành tới lúc hai người gặp nhau và tính các khoảng cách BM, AD.

Lời giải. Gọi t là thời gian từ lúc hai người khởi hành đến khi gặp nhau (tại điểm D), t_1 là thời gian để người thứ hai đi hết đoạn BM, ta có

$$BM = v'_2 t_1 = 13t_1 \qquad (1)$$

$$MD = v_2(t - t_1) = 5(t - t_1) \qquad (2)$$

$$AD = v_1 t = 4t \qquad (3)$$

Từ hình vẽ ta có $AD = BM + \sqrt{MD^2 - L^2}$ (4)

Thay các biểu thức (1), (2) và (3) vào (4) ta được $4t = 13t_1 + \sqrt{25(t - t_1)^2 - 540^2}$.

Suy ra $t = \sqrt{25t_1^2 + 32400} - 3t_1$ (5)

Đạo hàm bậc nhất biểu thức trên theo t_1 rồi cho bằng 0 ta tìm được $t_1 = 27$(s).

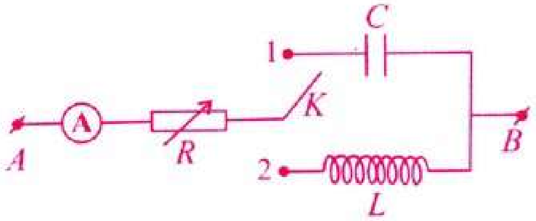
Khi ấy $t = t_{\min} = 144$(s). Từ đó ta tính được $BM = 351$(m); $AD = 576$(m). ❒

➤**Nhận xét.** Các bạn có lời giải đúng và ngắn gọn: **Bắc Ninh:** *Trần Anh Tài*, 9A, THCS Yên Phong, *Nguyễn Văn Long*, 11A4, THPT Thuận Thành 1; **Hải Dương:** *Nguyễn Văn Sơn*, 12A, THPT Kim Thành; **Hà Nội:** *Vũ Hoàng Minh*, 9A10, THCS Giảng Võ; **Phú Thọ:** *Võ Trung Hiếu*, 12A1, THPT Hưng Hóa, Tam Nông; **Thái Bình:** *Nguyễn Văn Sơn*, 11A2, THPT Bắc Đông Quan; *Vũ Xuân Tường*, 11A1, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ; *Vũ Xuân Ngưng*, 10A1, THPT Tây Thụy Anh, Thái Thụy; **Nghệ An:** *Thái Văn Đạt*, 9A, THCS Lý Nhật Quang; *Chu Tự Tài*, 11A1, THPT Diễn Châu 2; *Trần Trung Hiếu*, *Lê Hoàng Hiệp*, 11A1, THPT Thái Hòa; **Thanh Hóa:** *Lê Đình Hoàng Sơn*, 11B1, THPT Triệu Sơn 1; **Quảng Bình:** *Phan Hoàng Hải*, 11A1, THPT số 2 Quảng Trạch; **Bình Định:** *Nguyễn Thịnh Vinh*, 12A2, THPT số 2 An Nhơn; **Gia Lai:** *Trần Đình Nam*, 12A1, THPT Nguyễn Trãi, An Khê.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★ **Bài L2/413.** *Cho mạch điện như hình vẽ*

$$u_{AB} = 120\sqrt{2}\sin 100\pi t\,(\text{V}).$$



Cuộn dây thuần cảm có hệ số tự cảm L. Điện trở ampe kế không đáng kể. Điện trở R có thể thay đổi được.

1) Khi $R = 60\Omega$, cho khóa K chuyển từ vị trí 1 sang vị trí 2 thì số chỉ ampe kế không thay đổi, nhưng hai dòng điện lệch pha nhau $\frac{\pi}{2}$.

a) Xác định hệ số tự cảm L và điện dung C.

b) Cho điện dung C tăng lên $\sqrt{3}$ lần. Khi khóa K để ở 1 hay ở 2 thì hai dòng điện lệch pha bao nhiêu? Viết biểu thức của hai dòng điện đó.

2) Để khóa K ở vị trí 2, cho tần số dòng điện tăng lên hai lần nhưng giữ nguyên giá trị hiệu dụng của $U_{AB} = 120$V, sau đó thay đổi R để công suất tiêu thụ trong mạch đạt cực đại. Xác định giá trị điện trở và công suất cực đại lúc đó.

Lời giải. 1) a) Ta có $\tan\varphi_1 . \tan\varphi_2 = -1$;

$$\frac{-Z_C}{R} . \frac{Z_L}{R} = -1; \quad Z_C . Z_L = R^2 = 3600 \qquad (1)$$

Do $I_1 = I_2$ nên $Z_1 = Z_2 \Rightarrow Z_1^2 = Z_2^2$

$$\Rightarrow R^2 + Z_C^2 = R^2 + Z_L^2 \Rightarrow Z_L = Z_C \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$Z_L = Z_C = 60(\Omega) \Rightarrow L = \frac{0{,}6}{\pi}(\text{H}); C = \frac{10^{-3}}{6\pi}(\text{F}).$$

b) Khi C tăng $\sqrt{3}$ lần thì Z_C giảm $\sqrt{3}$ lần.

$$Z_C = \frac{60}{\sqrt{3}} = 20\sqrt{3}(\Omega), \tan\varphi_1 = -\frac{Z_C}{R} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow \varphi_1 = -\frac{\pi}{6}$. Khi khóa K ở 1 thì

$$Z_1 = \frac{R}{\cos\varphi_1} = \frac{60}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 40\sqrt{3}(\Omega).$$

$$I_{01} = \frac{120\sqrt{2}}{40\sqrt{3}} = \sqrt{6}(\text{A}).$$

Suy ra $i_1 = \sqrt{6}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right)(\text{A})$.

Khi khóa K ở 2 thì $\tan\varphi_2 = \frac{Z_L}{R} = 1 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{4}$.

$$Z_2 = \frac{R}{\cos\frac{\pi}{4}} = 60\sqrt{2}(\Omega).$$

$$I_{02} = \frac{120\sqrt{2}}{60\sqrt{2}} = 2(\mathrm{A}) \Rightarrow i_2 = 2\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right)(\mathrm{A}).$$

Hiệu số pha giữa i_1 và i_2 là $\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{12}$.

2) Khi tần số dòng điện tăng lên hai lần thì

$$Z_L' = 2Z_L = 2.60 = 120(\Omega).$$

Công suất tiêu thụ $\mathscr{P} = \frac{RU_{AB}^2}{R^2 + Z_L'^2} = \frac{U_{AB}^2}{R + \frac{Z_L'^2}{R}}$.

Để $\mathscr{P}$ cực đại thì $R + \frac{Z_L'^2}{R}$ phải cực tiểu. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$R + \frac{Z_L'^2}{R} \geq 2Z_L'.$$

Dấu bằng xảy ra khi $R = Z_L' = 120(\Omega)$.

Khi đó $\mathscr{P}_{\max} = \frac{U_{AB}^2}{R + \frac{Z_L'^2}{R}} = 60(\mathrm{W})$. ❐

➢**Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Nguyễn Tuấn Anh*, 11A1, THPT Thanh Thủy, *Phạm Linh Đan*, 11A1, THPT Hiền Đa; **Bắc Ninh:** *Trần Danh Khôi, Nguyễn Khắc Tuấn*, 12 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hà Nam:** *Đinh Ngọc Hải*, 12 Lí, THPT chuyên Biên Hòa, Phủ Lý; **Hải Dương:** *Nguyễn Trần Tùng Lâm*, 11A, THPT Kim Thành I; **Nam Định:** *Trịnh Đức Lợi*, 12A1, THPT Giao Thủy B, *Trần Thị Thu Hà*, 12C1, THPT A Hải Hậu; *Bùi Xuân Hiền*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hưng Yên:** *Nguyễn Trung Hiếu*, 12 Lí, *Nguyễn Trọng Chức*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình:** *Nguyễn Văn Minh, Nguyễn Văn Sơn*, 11A2, THPT Bắc Đông Quan, *Hoàng Đình Quang*, 12A1, THPT Quỳnh Côi; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Văn Tiệp*, 12A1, THPT Hậu Lộc IV, *Nguyễn Chí Dương*, 12C5, THPT Lê Văn Hưu, Thiệu Hóa; **Nghệ An:** *Nguyễn Thành Đạt*, 12A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Quảng Trị:** *Nguyễn Tử Bốn*, 12A2, THPT TX. Quảng Trị; **TP. Hồ Chí Minh:** *Phan Đức Huy*, 12A7, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

NGUYỄN VĂN THUẬN

Nhắn tin:

Các bạn đoạt giải trong các kì thi *Vui hè 2011* và *Giải Toán - Vật lí trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ năm học 2010-2011* chưa nhận được giải thưởng hãy gửi gấp địa chỉ mới của mình về Tòa soạn.

THTT

PROBLEMS... *(Tiếp trang 17)*

T8/417. Let $S.ABC$ be a pyramid where surface SAB is a isosceles triangle at S and $\widehat{BSA} = 120^\circ$, the plane (SAB) is perpendicular to (ABC). Prove that $\frac{S_{ABC}}{S_{SAC}} \leq \sqrt{3}$. When does the equality occur? (Denote by S_{DEF} the area of triangle DEF).

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/417. A natural number n is a *good number* if it is possible to partition any square into n smaller squares such that at least two of them are not equal.

1) Prove that if n is a *good number*, then $n \geq 4$.

2) Prove that both 4 and 5 are not *good.*

3) Find all *good numbers*.

T10/417. A sequence $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ (where $n \geq 2$) is defined by $a_0 = 0$, $a_k = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+k}$, $k = 1, 2, ..., n$. Prove the inequality

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{e}^{a_k}}{n+k+1} + (\ln 2 - a_n)\mathrm{e}^{a_n} < 1$$

where $\mathrm{e} = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

T11/417. Find all functions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ satisfying $f(x)f(yf(x)) = f(y + f(x))$ where $x, y \in \mathbb{R}^+$. ($\mathbb{R}^+$ is set of positive real numbers).

T12/417 Given a triangle ABC inscribed in a circle (O, R), with center G and area S. Prove that

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \left(4\sqrt{3} + \frac{OG^2}{R^2}\right)S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

Translated by LE MINH HA

DANH MỤC SÁCH THAM KHẢO CỦA NXBGD VIỆT NAM

ĐỂ NGƯỜI DỰ THI VIẾT GIỚI THIỆU

LTS. Tạp chí TH&TT số 416 đã giới thiệu đến bạn đọc *Thể lệ cuộc thi giới thiệu sách tham khảo của NXBGD Việt Nam.* Trong số này chúng tôi xin giới thiệu Danh mục các cuốn sách để người dự thi viết giới thiệu.

TT	Tên sách	Tác giả	Năm xuất bản	Số trang	Giá bìa	Ghi chú
1	30 tác giả văn chương	Vũ Quần Phương	2009	304	41.500đ	
2	Bộ sách thế giới – những điều em cần biết	Lê Quang Long (CB)				5 tập
3	- Tập 1: Động vật			232	30.000đ	
4	- Tập 2: Thực vật			208	27.000đ	
5	- Tập 3: Bí mật về thế giới			216	28.000đ	
6	- Tập 4: Thiên văn học			216	28.000đ	
7	- Tập 5: Thường thức			224	29.000đ	
8	Việt Nam non xanh nước biếc	Hoàng Thiếu Sơn	2009	180	26.500đ	
9	Văn học trung đại Việt Nam dưới góc nhìn văn hóa	Trần Nho Thìn	2009	720	90.000đ	
10	Các dạng đề và hướng dẫn làm nghị luận xã hội môn Ngữ văn lớp 10, 11, 12	Lê A	2011	200	28.000đ	
11	Các dạng đề và hướng dẫn làm nghị luận văn học	Lê A	2010	232	31.000đ	
12	35 đề ôn luyện Tiếng Việt 1	Lê Phương Nga, Lê Hữu Tỉnh	2012	152	27.000đ	
13	Đến với văn chương Phương Đông	PGS.TS Nguyễn Thị Bích Hải	2009	186	40.000đ	
14	Tiền cổ Việt Nam	Lục Đức Thuận	2009	272	39.000đ	
15	Chủ nghĩa hiện thực huyền ảo và Gabriel Garcia Marquez	PGS.TS Lê Duy Bắc	2009	272	26.000đ	
16	Lý luận tiểu thuyết Việt Nam thế kỷ XX	TS. Nguyễn Văn Tùng	2009	196	26.500đ	
17	Thông tin sợi quang	TS. Nguyễn Văn Tuấn	2010	220	45.000đ	
18	Thông tin viba-vệ tinh	TS. Nguyễn Văn Tuấn	2011	208	63.000đ	
19	Bài tập trắc nghiệm Vật lý đại cương	TS. Nguyễn Bảo	2011	296	47.000đ	
20	Bản đồ tranh ảnh Lịch sử 6	Phan Ngọc Liên (CB)	2010	28	18.000đ	
21	Bản đồ tranh ảnh Lịch sử 7	Phan Ngọc Liên (CB)	2010	32	20.000đ	
22	Bản đồ tranh ảnh Lịch sử 8	Phan Ngọc Liên (CB)	2010	32	20.000đ	
23	Bản đồ tranh ảnh Lịch sử 9	Phan Ngọc Liên (CB)	2010	32	20.000đ	
24	Bản đồ tranh ảnh Lịch sử 10	Nguyễn Quốc Hùng (CB)	2010	32	20.000đ	
25	Bản đồ tranh ảnh Lịch sử 11	Nguyễn Ngọc Cơ (CB)	2010	28	18.000đ	
26	Bản đồ tranh ảnh Lịch sử 12	Nguyễn Xuân Trường (CB)	2010	32	20.000đ	
27	Các nhà hóa học được giải thưởng Nobel	Nguyễn Quốc Tín (CB)	2011	512	180.000đ	
28	Tuyển chọn tranh đẹp học sinh tiểu học	Trịnh Đức Minh	2011	96	96.000đ	
29	Suy ngẫm và lựa chọn - Tập 1	Bùi Tiến Quý	2009	64	10.000đ	3 tập

30	Suy ngẫm và lựa chọn - Tập 2	Bùi Tiến Quý	2009	72	10.000đ	
31	Suy ngẫm và lựa chọn - Tập 3	Bùi Tiến Quý	2009	68	10.000đ	
32	Phương pháp hát tốt Tiếng Việt trong nghệ thuật ca hát	Trần Ngọc Lan	2011	148	28.000đ	
33	Trên đường tới trường	Nguyễn T. Trà Vinh	2009	20	10000đ/c	5 tập
34	Cùng vui học Giáo dục công dân 6	Nguyễn Hữu Khải (CB)	2009	100	13.400đ	
35	Cùng vui học Giáo dục công dân 7	Nguyễn Hữu Khải (CB)	2010	112	16.000đ	
36	Cùng vui học Giáo dục công dân 8	Nguyễn Hữu Khải (CB)	2010	112	16.000đ	
37	Cùng vui học Giáo dục công dân 9	Nguyễn Hữu Khải (CB)	2010	108	14500đ	
38	Rèn kỹ năng làm văn biểu cảm	Trần Thị Thành	2010	196	28900đ	
39	Rèn kỹ năng làm văn thuyết minh	Trần Thị Thành	2010	224	32000đ	
40	Rèn kỹ năng làm văn nghị luận	Trần Thị Thành	2011	232	42000đ	
41	Kể truyện qua tranh vẽ - Bổ trợ tiếng Việt	Trung Hải - Minh Chí	2012	64	16000đ/c	6 cuốn
42	Cổ luật Việt Nam - Quốc triều hình luật và Hoàng Việt luật lệ	Nguyễn Ngọc Nhuận	2009	1008		
43	Các thể loại thơ Việt	Triều Nguyên	2009	392		
44	Lịch sử văn học Hoa Kỳ	Lê Huy Bắc	2010	984		
45	Bộ truyện tranh bổ trợ Tiếng Việt	Bùi Tất Tươm	2012			6 cuốn
46	Bộ sách bé tô màu	Trung Võ – Viết Trung	2011		12000đ/c	14 cuốn
47	Bộ truyện tranh tủ sách tuổi thơ	Trung Hải – Minh Chí				12 cuốn
48	Bộ sách truyện tranh song ngữ Việt - Anh	Kim Dung	2011		10000đ/c	6 cuốn
49	Tủ sách bé rèn luyện kỹ năng sống	Phan Lan Anh, Hồng Thu	2010	16	8600đ/c	8 cuốn
50	Học- thực hành theo chuẩn kiến thức các môn tiểu học		2011			
51	Học- thực hành theo chuẩn kiến thức các môn THCS		2011			
52	Học- thực hành theo chuẩn kiến thức các môn THPT		2011			
53	Thực hành Mỹ thuật 6, 7, 8, 9	Nguyễn Thị Cẩm Nhung	2010	36	8000đ/c	từ lớp 6 đến lớp 8
54	Hướng dẫn học ở nhà (Toán tiểu học)	Nguyễn Đức Tấn (CB)	2011		29000đ/c	5 tập
55	Bài tập nâng cao Toán THCS	Tôn Thân	2011			8 tập
56	Thực hành chính tả (Tiểu học)	Trần Mạnh Hưởng	2011		9000đ/c	9 tập
57	Thực hành thí nghiệm Hóa học (THCS)	Đồng Viết Tạo	2011			2 tập
58	Thực hành thí nghiệm Vật lý (THCS)	Lê Cao Phan	2011			4 tập
59	Thực hành thí nghiệm Sinh học (THCS)	Bùi Văn Thêm	2012			4 tập
60	Giải tích vectơ	Nguyễn Xuân Liêm	2009	468	93.000đ	
61	Môi trường tài nguyên đất Việt Nam	GS Lê Huy Bá	2009	1300	235.000đ	
62	Ô châu cận lục	Nguyễn Khắc Thuần	2010	416	92.000đ	
63	Bộ sách Lê Quý Đôn tuyển tập	Nguyễn Khắc Thuần	2011	900	260.000đ	8 tập
64	Tài liệu dạy học Vật lý 6	Phạm Ngọc Tiến	2011	144	30.000đ	
65	Dạy tốt học tốt ở tiểu học bằng bản đồ tư duy	TS Trần Đình Châu	2011	84	35.000đ	

66	Dạy tốt học tốt các môn bằng bản đồ tư duy	TS Trần Đình Châu	2011	152	50.000đ	sách cho gv,sv sp
67	Bộ sách kỹ năng sống	Huỳnh Công Minh	2011	32	11000đ/c	6 cuốn
68	Bộ sách dịch của NXB Walt Disney	Thế Bảo, Ngọc Lam	2011			18 cuốn
69	Tuyển tập đề bài và bài văn nghị luận xã hội	Nhiều tác giả	2011	231	45000đ/c	2 tập
70	Thiết kế bài dạy Ngữ văn THPT	Nhiều tác giả	2010	223	40.000đ	
71	Thiết kế bài dạy Ngữ văn THCS	Nhiều tác giả	2010	227	40.000đ	
72	Hỏi đáp về các tình huống khó trong dạy học Ngữ văn	Nhiều tác giả	2010	221	35.000đ	
73	Chân dung và nhận định của nhà văn về tác phẩm trong nhà trường	Nhiều tác giả	2010	219	36.000đ	
74	Vẻ đẹp văn học cách mạng	Nhiều tác giả	2010	287	29.000đ	
75	Tuyển tập đề kiểm tra môn tiếng Việt TH.	Lê Hồng Mai	2011	167	33.000đ	
76	Kể chuyện danh nhân cho tuổi thơ	Nguyễn Văn Tùng	2011	108	22.000đ	
77	Kể chuyện lịch sử cho tuổi thơ	GS Lê Văn Lan	2011	96	22.000đ	
78	Trò chơi thơ cho tuổi thơ	Nhiều tác giả	2011	96	22.000đ	
79	Tuyển tập bài văn miêu tả và kể chuyện	Nhiều tác giả	2011	126	22.000đ	
80	Trò chuyện với nhà văn có tác phẩm trong SGK Tiểu học	Nhiều tác giả	2011	120	24.000đ	
81	Việt Nam - đất nước, con người	Lê Thông (CB)	2010	544	275.000đ	
82	Việt Nam - các tỉnh, thành phố	Lê Thông (CB)	2011	1096	710.000đ	
83	Sinh học Biology	Campbell	2011	1464	1.750.000đ	
84	Từ điển giáo khoa Anh - Việt	Nguyễn Phương Sửu (CB)	2008	1540	369.000đ	
85	Tô Hoài - sức sáng tạo một đời văn	GS Hà Minh Đức	2010	216	59.000đ	
86	Huy Cận - ngọn lửa thiêng không tắt	GS Hà Minh Đức	2010	356	66.000đ	
87	Dạy học tích hợp nội dung học tập	Trần Văn Thắng	2011	160	27.000đ	2 cuốn
88	Tuyển tập công trình về Hán Nôm	Nguyễn Tài Cẩn	2011	872	1.400.000đ	
89	Lược khảo lịch sử từ vựng Tiếng Việt	Vũ Đức Nghiệu	2011	516	354.000đ	
90	Giấc mơ tuổi thần tiên - T1	Trần Hoài Dương	2011	132	20.000đ	
91	Dạy trẻ có trái tim yêu thương	Vũ Hoa Mỹ	2010	160	40.000đ	
92	Tật xấu làm mất tương lai	Dương Minh Hào	2011	208	40.000đ	
93	Cha mẹ tốt, con cái tốt - T1	Dương Minh Hào	2011	212	32.000đ	
94	Mười vạn câu hỏi vì sao - Tri thức thế kỷ XXI: Cơ thể người	Nguyễn Văn Mậu	2010	424	42.000đ	
95	Văn học cổ điển Hy Lạp - Anh hùng ca Iliade	Hoàng Hữu Đản (biên dịch)	2009	776	115.000đ	
96	Chuyện lạ thế giới chưa thể giải thích	Dương Minh Hào	2010	200	35.000đ	
97	Sáng danh những anh hùng, hào kiệt Việt Nam	Vũ Xuân Vinh	2010	252	32.000đ	
98	Bộ sách khoa học thú vị của thế kỷ XXI - Môi trường kỳ diệu	Nguyễn Phương Thanh	2011	200	44.000đ	
99	Theo Bác Hồ đi kháng chiến	Trình Quang Phú	2011	296	50.000đ	

BAN TỔ CHỨC CUỘC THI

GIẢI THƯỞNG LÊ VĂN THIÊM

Năm 2011

HÀ HUY KHOÁI
(Viện Toán học Việt Nam)

I. Sơ lược về Giải thưởng Lê Văn Thiêm

Giáo sư *Lê Văn Thiêm* (1918-1991) là Chủ tịch đầu tiên của Hội Toán học Việt Nam. Ông là nhà toán học nổi tiếng, đã có những đóng góp lớn trong nghiên cứu và ứng dụng toán học. Ông cũng là một trong những người đặt nền móng cho nền giáo dục đại học ở nước ta, là người thầy của nhiều thế hệ các nhà toán học Việt Nam. Giáo sư *Lê Văn Thiêm* luôn giành sự quan tâm đặc biệt đến việc giảng dạy toán học ở các trường phổ thông. Ông là một trong những người sáng lập *Hệ thống phổ thông chuyên toán* và Báo *Toán học và Tuổi trẻ*. Giáo sư *Lê Văn Thiêm* đã được Nhà nước tặng Huân chương Độc lập hạng Nhất và Giải thưởng Hồ Chí Minh. Giải thưởng Lê Văn Thiêm do Hội Toán học Việt Nam đặt ra nhằm góp phần ghi nhận những thành tích xuất sắc của những thầy giáo và các em học sinh phổ thông đã khắc phục khó khăn để dạy toán và học toán giỏi, động viên học sinh đi sâu vào môn Toán có vai trò đặc biệt quan trọng trong sự phát triển lâu dài của nền khoa học nước nhà. Giải thưởng Lê Văn Thiêm cũng là sự ghi nhận công lao của Giáo sư *Lê Văn Thiêm*, một nhà toán học lớn, một người thầy đã hết lòng vì sự nghiệp giáo dục.

II. Giải thưởng Lê Văn Thiêm năm 2011

Hội Toán học Việt Nam đã quyết định trao Giải thưởng Lê Văn Thiêm năm 2011 cho những thầy giáo và học sinh sau đây:

1. Thầy giáo: TS *Nguyễn Duy Thái Sơn*, Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng.

Là một nhà nghiên cứu xuất sắc, có nhiều công trình công bố Quốc tế, TS *Nguyễn Duy Thái Sơn* đã rời Viện nghiên cứu và trường đại học để tham gia giảng dạy tại Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng từ năm 2003 đến 2011. Với khả năng và tâm huyết của mình, thầy *Sơn* đã góp phần quan trọng thúc đẩy phong trào học toán ở trường chuyên Lê Quý Đôn. Đặc biệt, hầu hết những học sinh của thầy *Sơn* sau khi đoạt giải trong các kì thi Olympic Quốc tế đã chọn Toán học làm nghề nghiệp tương lai của mình.

2. Học sinh: *Vũ Đình Long*, học sinh Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội.

Trong bối cảnh phong trào học sinh giỏi môn Toán nhìn chung có phần giảm sút, vẫn có nhiều gương sáng mà *Vũ Đình Long* là một ví dụ. Tốt nghiệp THCS ở Đô Lương, một huyện miền núi Nghệ An, *Vũ Đình Long* vào học THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội. *Vũ Đình Long* đoạt nhiều giải cao trong các kì thi học sinh giỏi môn Toán, mà điển hình là Huy chương Bạc Olympic Toán học Quốc tế năm 2010, Giải Nhất kì thi học sinh giỏi Quốc gia năm 2011. Hiện nay, *Vũ Đình Long* đang theo học tại Khoa Toán, Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội.

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 417 (3.2012)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

TRONG SỐ NÀY

Ảnh Bìa 1. Từ trái qua phải:
GS. *Lê Tuấn Hoa*, TS. *Nguyễn Duy Thái Sơn*, *Vũ Đình Long*, GS. *Nguyễn Hữu Dư*, GS. *Hà Huy Khoái* tại Lễ trao Giải thưởng Lê Văn Thiêm năm 2011 (ngày 11/3/2012).

Bìa 2. **Kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT năm 2012 – Môn Toán**

Bìa 3. **Câu lạc bộ – Math Club**

Biên tập : NGUYỄN THỊ THANH
Mĩ thuật : MINH THƠ, THANH LONG
Trị sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THƯ
Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT03M2

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 2012

Giá : 8000 đồng
Tám nghìn đồng