BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO * HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

# Toán học & Tuổi trẻ

4
2004

SỐ 322 - NĂM THỨ 41 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Đại tướng Võ Nguyên Giáp và học sinh giỏi của Thủ đô.

## 50 NĂM CHIẾN THẮNG ĐIỆN BIÊN PHỦ

## 7.5.1954 - 7.5.2004


*Nhà giáo Nguyễn Trọng Tuấn sinh ngày 10–3–1964 tại Hoài Thanh, Hoài Nhơn, Bình Định. Tốt nghiệp Đại học Sư phạm Quy Nhơn năm 1986. Giảng dạy tại trường THPT Pleiku (1986–1991), THPT Bán công Phan Bội Châu, Pleiku (1991–1992), THPT Hùng Vương, Pleiku, Gia Lai (từ 1993 đến nay). Đã góp phần bồi dưỡng được nhiều học sinh đoạt giải toán quốc gia. Đến với THTT từ thời học cấp II (1977). Đoạt giải nhì trong cuộc thi giải toán năm 1980. Ông coi THTT là tạp chí chuyên ngành về toán sơ cấp rất bổ ích và thiết thực cho học sinh và giáo viên ; THTT đã để lại những dấu ấn khó quên trong thời học sinh và là niềm an ủi, động viên lớn lao trên bước đường nghề nghiệp hiện nay. Ông mong THTT đến với nhiều bạn đọc hơn nữa, nhất là với học sinh Tây Nguyên.*

# MỘT HÀM SỐ LIÊN QUAN ĐẾN HỆ TAM PHÂN

NGUYỄN TRỌNG TUẤN
*(GV THPT chuyên Hùng Vương, Pleiku, Gia Lai)*

Bài viết này xuất phát từ một đề toán thi Olympic Toán châu Mỹ La tinh năm 1991 sau đây :

***Bài toán:*** *Cho $f$ là một hàm số không giảm trên đoạn $[0 ; 1]$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau đây :*

*1) $f(0) = 0$*

*2) $f(1 - x) = 1 - f(x)$ với mọi $x$ thuộc $[0 ; 1]$*

*3) $f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{f(x)}{2}$ với mọi $x$ thuộc $[0 ; 1]$.*

*Hãy tính $f\left(\frac{18}{1991}\right)$*

Khi tìm tòi lời giải bài này (tôi không có đáp án), tôi đã xét một số tính chất của hàm số $f(x)$ trên, từ đó rút ra cách tính giá trị của hàm số $f(x)$ tại một giá trị bất kì của $x$ trong $[0; 1]$. Từ giả thiết (GT) của đề bài, ta cần biểu diễn số thuộc $[0 ; 1]$ trong hệ tam phân và biết một số tính chất của sự biểu diễn này.

## I. Biểu diễn số trong hệ tam phân

Tương tự như hệ thập phân, trong hệ tam phân dùng 3 chữ số là 0, 1, 2, các chữ số ở hai hàng liên tiếp gấp nhau 3 lần.

***Mệnh đề 1.*** Mỗi số thực $x$ với $0 \le x < 1$ đều biểu diễn được trong hệ tam phân, nghĩa là $x$ có dạng $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \ldots$ trong đó $a_i \in \{0, 1, 2\}$ với $i = 1, 2, 3, \ldots$

Sự biểu diễn này là duy nhất không kể trường hợp $a_i = 2$ với mọi $i \ge n$ kể từ một chỉ số $n$ $(n \ge 1)$ nào đó trở đi.

Ở bài này ta viết số $0 \le x < 1$ trong hệ tam phân dưới dạng $x = \overline{0, a_1a_2a_3\ldots}$, còn $1 = \overline{1,00\ldots}$ với $a_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$

Bạn đọc có thể xem chứng minh chi tiết mệnh đề (MĐ) trên trong cuốn sách *Số học thuật toán* của tác giả *Hà Huy Khoái*, NXB Khoa học, 1997.

Chú ý rằng : 1) $0 = \overline{0,0}$ ;

2) Nếu $x = \overline{0, a_1\ldots a_n a_{n+1}\ldots}$ $(x < 1)$ trong đó $a_i = 2$ với mọi $i \ge n + 1$, còn $a_n \in \{0, 1\}$ $(n \ge 1)$ thì viết $x$ trong dạng $x = \overline{0, a_1\ldots a_{n-1}a}$ với $a = a_n + 1$ để cách viết là duy nhất.

3) $\overline{0, a_1a_2\ldots a_n} = 3.(\overline{0, 0a_1a_2\ldots a_n})$

Tổng quát :

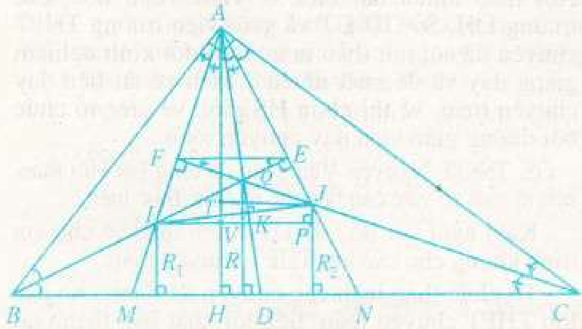
$\overline{0, a_{n+1}\ldots a_{n+m}} = 3^n . \overline{0,0\ldots0a_{n+1}\ldots a_{n+m}}$ với $a_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

*(Xem tiếp trang 8)*


# Một số tính chất của ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP TAM GIÁC VUÔNG

BÙI THƯƠNG THƯƠNG
(GV THCS Phù Cừ, Hưng Yên)

Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ với đường cao $AH$. Gọi tâm và bán kính các đường tròn nội tiếp các tam giác vuông $ABC$, $ABH$, $ACH$ là $Q$ và $R$, $I$ và $R_1$, $J$ và $R_2$ theo thứ tự. Đường phân giác $AD$ cắt $IJ$ tại $K$ (h. 1).




*Hình 1*

Ta thử tìm mối liên hệ giữa đường nối tâm $IJ$, các bán kính $R$, $R_1$, $R_2$ với các yếu tố xác định tam giác $ABC$ là $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $AH = h$. Từ giả thiết có $\widehat{BAF}=\widehat{HAF}=\widehat{BCF}=\widehat{ACF}$ và $\widehat{ABE}=\widehat{CBE}=\widehat{HAE}=\widehat{CAE}$ (hai góc nhọn có các cạnh tương ứng vuông góc) nên các tam giác vuông $ABC$, $HBA$, $HAC$ đồng dạng với nhau (góc, góc), từ đó suy ra được nhiều hệ thức về các đoạn thẳng và các góc.

Ta có: $\Delta ABC \backsim \Delta HBA$ nên $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{R_1}{R}=\dfrac{BH}{AB}$ (1)

$\Delta ABC \backsim \Delta HAC$ nên $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{R_2}{R}=\dfrac{CH}{AC}$ (2)

Từ (1), (2) có $\dfrac{R_1^2+R_2^2}{R^2}=\dfrac{AB^2+AC^2}{BC^2}=1$,

suy ra $R_1^2+R_2^2=R^2$ (3)

Từ $(R_1+R_2)^2 \le 2(R_1^2+R_2^2)$ và (3) có $(R_1+R_2)^2 \le 2R^2$ hay $R_1+R_2 \le \sqrt{2}R$ (4)

Cũng từ (1), (2) và sử dụng BĐT Cô-si có :

$$\frac{R_1+R_2}{R}=\frac{BH}{AB}+\frac{CH}{AC} \ge$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{BH.CH}{AB.AC}}=2\sqrt{\frac{AH^2}{BC.AH}}=2\sqrt{\frac{h}{a}}$$

suy ra $R_1+R_2 \ge 2\sqrt{\dfrac{h}{a}}.R$ (5)

Dễ thấy $h \le AD = \dfrac{a}{2}$ hay đặt $0 < x = \dfrac{h}{a} \le \dfrac{1}{2}$ thì $x(1-2x) \ge 0 \Rightarrow x \ge 2x^2 \Rightarrow \sqrt{x} \ge \sqrt{2}\,x \Rightarrow \sqrt{\dfrac{h}{a}} \ge \sqrt{2}\dfrac{h}{a}$. Từ đó và (5) suy ra

$$R_1+R_2 \ge \frac{2\sqrt{2}h}{a}.R \qquad (6)$$

Đẳng thức xảy ra ở (5) hoặc (6) khi và chỉ khi $R_1 = R_2 \Leftrightarrow AB = AC$, nghĩa là $\Delta ABC$ vuông cân.

Từ (1), (2) cũng có

$$R_1R_2=\frac{R.AB}{BC}.\frac{R.AC}{BC}=\frac{R^2.ah}{a^2}=\frac{R^2h}{a} \qquad (7)$$

Từ tâm $Q$ của đường tròn nội tiếp $\Delta ABC$ vuông hạ đường vuông góc xuống các cạnh của $\Delta ABC$ ta có $b+c = a+2R$. Áp dụng hệ thức này vào các tam giác $ABC$, $HBA$, $HAC$ ta có :

$2(R_1+R_2+R) =$

$= (AH+BH-AB) + (AH+CH-AC) + (AB+AC-BC)$

$= 2AH$

$\Rightarrow R_1+R_2+R = h$ (8)

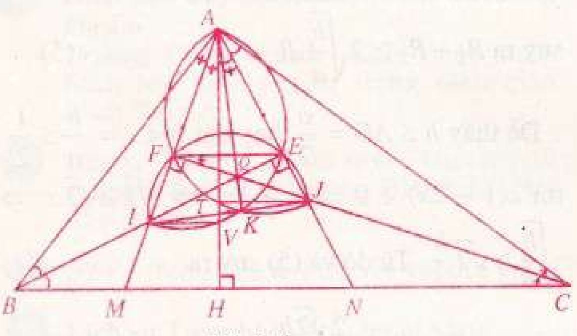
Kẻ $JT \perp AH$ tại $T$ và $JP$ // $AH$, kẻ $IP$//$BC$ cắt $JP$ ở $P$ và cắt $AH$ ở $V$. Từ tam giác vuông $IJP$ có hệ thức $IJ^2 = IP^2 + JP^2$ hay $IJ^2 = (R_1+R_2)^2 + (R_1-R_2)^2 \Rightarrow IJ = \sqrt{2}R = AQ$ (9)

Ta có $\widehat{ABE}+\widehat{BAE}=(\widehat{ABE}+\widehat{HAE})+\widehat{BAH}=\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=90^o$ suy ra $BE \perp AN$ và $BA = BN$,

$AE = EN$. Tương tự $CF \perp AM$ và $CA = CM$, $AF = FM$. Do đó $FE$ là đường trung bình của $\Delta AMN$, nên $FE // BC$, $\widehat{EFC}=\widehat{FCB}$ (10)

Từ đó $I, J, E, F$ nằm trên đường tròn đường kính $IJ$. Từ $IE \perp AJ$, $JF \perp AI$ và $IE$ cắt $JF$ tại $Q$ thì $AK$ chính là đường cao của $\Delta AIJ$. Suy ra $A, J, K, F, T$ nằm trên đường tròn đường kính $AJ$ và $A, I, E, K, V$ nằm trên đường tròn đường kính $AI$. Từ tính chất các góc nội tiếp (h. 2) ta có : $\widehat{EAK}=\widehat{EIK}$ , $\widehat{EIJ}=\widehat{EFJ}$ . Từ đó và (10) suy ra $\widehat{EAK}=\widehat{IAH}$ . Ta có $\Delta IAV \backsim \Delta JAK$ (góc, góc)

nên $\frac{IV}{AI}=\frac{KJ}{AJ} \Rightarrow \frac{R_1}{KJ}=\frac{AI}{AJ}$ (11)




*Hình 2*

Tương tự có $\widehat{FAK}=\widehat{JAH}$ và $\Delta JAT \backsim \Delta IAK$

nên $\frac{R_2}{KI}=\frac{AJ}{AI}$ (12)

Từ (11) và (12) có $\frac{R_1}{KJ}=\frac{KI}{R_2}$ hay

$R_1.R_2 = KI.KJ$ (13)

Kết hợp với (7) ta có $KI.KJ = \frac{R^2.h}{a}$ (14)

Ta có bài toán sau :

*Cho $\Delta ABC$ vuông ở A và đường cao AH. Gọi Q, I, J là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ABH, ACH theo thứ tự. Gọi R là bán kính đường tròn nội tiếp $\Delta ABC$. Chứng minh rằng AQ vuông góc với IJ (tại K) và*

$KI.KJ = \frac{R^2.AH}{BC}$.

Ta còn có thể khai thác thêm nhiều điều thú vị nữa. Chẳng hạn $\Delta QIJ \backsim \Delta QCB$, $\Delta KEF \backsim \Delta ABC$. Mong được tiếp tục trao đổi với các bạn.

## HỘI THẢO CÁC CHUYÊN ĐỀ CHỌN LỌC BỒI DƯỠNG HỌC SINH CHUYÊN TOÁN

Trong hai ngày 20 và 11 tháng 3 năm 2004 tại Hà Nội, được phép của Bộ GD và ĐT, trường ĐH Khoa học tự nhiên ĐHQG Hà Nội phối hợp với các chuyên gia, các nhà khoa học, các giáo viên toán thuộc các trường ĐHSP Hà Nội ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh, ĐH Vinh, Viện Toán học, Hội Toán học Hà Nội, Nhà xuất bản Giáo dục, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, các Sở GD-ĐT, các trường THPT chuyên... tổ chức Hội thảo về các chuyên đề, chọn lọc bồi dưỡng học sinh năng khiếu toán học hệ THPT chuyên.

Phần đầu của Hội thảo là bàn về chương trình khung, danh mục các chuyên đề cho các lớp chuyên toán THPT. Tiếp đó một số nhà toán học, nhà giáo đã trình bày 15 chuyên đề và các kết quả nghiên cứu về Toán học sơ cấp. Trong phần cuối Hội thảo nhiều đại biểu ở Viện Toán học, các trường ĐH, Sở GD-ĐT và giáo viên trường THPT chuyên đã sôi nổi thảo luận, trao đổi kinh nghiệm giảng dạy và đề xuất nhiều ý kiến về tài liệu dạy chuyên toán, về thi chọn HS giỏi, về việc tổ chức bồi dưỡng giáo viên dạy chuyên toán...

GS. TSKH. Nguyễn Văn Mậu đã tổng kết Hội thảo, nêu ra một số việc cần tiếp tục tổ chức thực hiện :

- Kiến nghị với Bộ GD-ĐT chính thức có chương trình khung cho các lớp THPT chuyên toán.
- Tổ chức thảo luận các chuyên đề dành cho các lớp THPT chuyên toán, tiến tới xuất bản thành tài liệu tham khảo.
- Tiếp tục tổ chức các Hội nghị chuyên đề về toán học sơ cấp.
- Đề nghị Bộ GD-ĐT tổ chức tổng kết sau 30 năm học sinh VN tham gia thi Toán quốc tế – Chuẩn bị cho việc VN đăng cai tổ chức thi toán quốc tế vào năm 2007.

NVH

# ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHU VĂN AN & THPT HÀ NỘI - AMSTERDAM

## *NĂM HỌC 2003 - 2004*

## MÔN THI : TOÁN HỌC

**Ngày thi thứ nhất**

*(Dành cho mọi thí sinh)*

*(Thời gian làm bài : 150 phút)*

**Bài 1.** (3 điểm)

Cho biểu thức

$$P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x} - 1}$$

1. Rút gọn $P$.
2. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P$.
3. Tìm $x$ để biểu thức $Q = \dfrac{2\sqrt{x}}{P}$ nhận giá trị là số nguyên.

**Bài 2.** (3 điểm).

Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho Parabol $(P)$ : $y = -x^2$ và đường thẳng $(d)$ đi qua điểm $I\,(0; -1)$ có hệ số góc $k$.

1. Viết phương trình của đường thẳng $(d)$. Chứng minh với mọi giá trị của $k$, $(d)$ luôn cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt $A$ và $B$.
2. Gọi hoành độ của $A$ và $B$ là $x_1$ và $x_2$, chứng minh $|x_1 - x_2| \geq 2$.
3. Chứng minh $\Delta OAB$ vuông.

**Bài 3.** (4 điểm)

Cho đoạn thẳng $AB = 2a$ có trung điểm là $O$. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ $AB$ dựng nửa đường tròn $(O)$ đường kính $AB$ và nửa đường tròn $(O')$ đường kính $AO$. Trên $(O')$ lấy một điểm $M$ (khác $A$ và $O$), tia $OM$ cắt $(O)$ tại $C$, gọi $D$ là giao điểm thứ hai của $CA$ với $(O')$.

1. Chứng minh $\Delta ADM$ cân.
2. Tiếp tuyến tại $C$ của $(O)$ cắt tia $OD$ tại $E$, xác định vị trí tương đối của đường thẳng $EA$ đối với $(O)$ và $(O')$.
3. Đường thẳng $AM$ cắt $OD$ tại $H$, đường tròn ngoại tiếp $\Delta COH$ cắt $(O)$ tại điểm thức hai là $N$. Chứng minh ba điểm $A$, $M$ và $N$ thẳng hàng.
4. Tại vị trí của $M$ sao cho $ME // AB$, hãy tính độ dài đoạn thẳng $OM$ theo $a$.

**Ngày thi thứ hai**

*(Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán & chuyên Tin)*

*(Thời gian làm bài : 150 phút)*

**Bài 4.** (1,5 điểm)

Cho hai số tự nhiên $a$ và $b$, chứng minh rằng nếu $a^2 + b^2$ chia hết cho 3 thì $a$ và $b$ cùng chia hết cho 3.

**Bài 5.** (2 điểm)

Cho phương trình : $\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{x+1}\right)^2 = m.$

1. Giải phương trình với $m = 15$.
2. Tìm $m$ để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

**Bài 6.** (2 điểm)

Cho $x$, $y$ là các số nguyên dương thỏa mãn : $x + y = 2003$.

Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức :

$$P = x(x^2 + y) + y(y^2 + x).$$

**Bài 7.** (3 điểm)

Cho đường tròn $(O)$ với dây $BC$ cố định ($BC < 2R$) và điểm $A$ trên cung lớn $BC$ ($A$ không trùng với $B$, $C$ và điểm chính giữa của cung). Gọi $H$ là hình chiếu của $A$ trên $BC$, $E$ và $F$ lần lượt là hình chiếu của $B$ và $C$ trên đường kính $AA'$.

1. Chứng minh rằng $HE$ vuông góc với $AC$.
2. Chứng minh $\Delta HEF$ đồng dạng với $\Delta ABC$.
3. Khi $A$ di chuyển, chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $HEF$ cố định.

**Bài 8.** (1,5 điểm).

Lấy 4 điểm ở miền trong của một tứ giác để cùng với 4 đỉnh ta được 8 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Biết diện tích của tứ giác là 1, chứng minh rằng tồn tại một tam giác có 3 đỉnh lấy từ 8 điểm đã cho có diện tích không vượt quá $\dfrac{1}{10}$.

Tổng quát hóa bài toán cho $n$ giác lồi với $n$ điểm nằm ở miền trong của đa giác đó.


# Giới thiệu phần HÌNH HỌC KHÔNG GIAN trong sách giáo khoa TOÁN 8

TRƯƠNG CÔNG THÀNH
*(NXB Giáo dục)*

Phần Hình học trong sách giáo khoa Toán 8 mới gồm bốn chương, ba chương đầu thuộc phần hình phẳng,chỉ có một chương thuộc phần "hình học không gian" được xếp vào cuối tập 2.

**1. Mục tiêu, vị trí, những nội dung chủ yếu của chương**

• Mục tiêu của chương này là : giới thiệu cho HS một số **vật thể** trong không gian thông qua mô hình, tranh vẽ, mẫu vật thật. Trên cơ sở quan sát hình hộp chữ nhật, hình lập phương, học sinh nhận biết được một số khái niệm cơ bản của hình học không gian, bao gồm :

– Điểm, đường thẳng, mặt phẳng

– Hai đường thẳng song song trong không gian

– Đường thẳng song song với mặt phẳng

– Hai mặt phẳng song song

– Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

– Hai mặt phẳng vuông góc

• Học sinh nắm vững các công thức được thừa nhận để tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích của hình lăng trụ đứng, hình chóp đều và sử dụng các công thức đó để tính toán.

*Trong mục tiêu của chương, **không yêu cầu** học sinh **biểu diễn hình không gian, không yêu cầu chứng minh** các tính chất hình học.*

• Chương 4, trước đây là nửa chương được xếp ở lớp 9, nay được đưa vào lớp 8, (cũng như chương thống kê ở lớp 7) nhằm :

– Đảm bảo mục tiêu "kép" của nhà trường THCS là chương trình học cần cung cấp vốn kiến thức hoàn chỉnh của cả hình phẳng lẫn hình không gian cho học sinh.

– Đảm bảo tương ứng về chương mục đối với chương trình Toán ở các lớp tương ứng của một số nước phát triển.

– Phù hợp với tâm lí lứa tuổi của học sinh THCS ở Việt Nam.

– Phù hợp với môn công nghệ được học ở lớp 8 (theo chương trình mới).

– Tiếp nối với mảng hình học nhận dạng mà học sinh được học theo chương trình mới ở cấp tiểu học.

Chương IV gồm hai phần :

A. Hình lăng trụ đứng

B. Hình chóp đều.

– Điểm cốt lõi của phần *A* là ở chỗ :

Thông qua mô hình, hình vẽ, mẫu vật thật của hình hộp chữ nhật, hình lập phương, hình lăng trụ đứng và qua các hoạt động học tập nhằm đạt đến mục tiêu là hình thành một cách từ từ các khái niệm cơ bản của hình học không gian : điểm, đường, mặt, *quan hệ liên thuộc, quan hệ song song, quan hệ vuông góc...*

Bên cạnh đó là một lượng bài tập không nhiều nhằm mục đích tính toán, các bài toán cắt, ghép, dán hình... Tuy nhiên, cái "hồn" của phần này vẫn là các quan hệ hình học.

– Điểm chính yếu ở phần B là :

Các khái niệm cơ bản của hình học không gian được củng cố dần dần, khắc sâu và bước đầu hoàn thiện ở các tiết 4, 5, 6, 7, 8, 9.

– Khái niệm về "chiều cao" là một khái niệm khó, được hình thành cho học sinh dần dần, lặp đi lặp lại và kết thúc ở §9 trang 122 với hoạt động : vẽ hình chóp đều.

– Về các công thức diện tích, thể tích, thực ra học sinh đã học ở tiểu học, thông qua việc vẽ hình trên giấy ô vuông, cắt ghép, dán hình... học sinh nhớ lại công thức để làm bài tập qua các loại toán khác nhau.

**II. Phương pháp chủ yếu để dạy các bài trong chương theo hướng phát huy tính tích cực**

Do chương IV là một chương mới đưa vào lớp 8, hơn thế về mặt phương pháp trình bày ở chương này là hoàn toàn khác với cách trình bày truyền thống trước đây nên khi dạy cần có các lưu ý sau :

– Theo cấu trúc của từng tiết học thì thông qua hoạt động, học sinh tự nhớ lại, xây dựng và củng cố các kiến thức đã có.

– Thông qua hình vẽ, tranh, hình ảnh và mô hình thực, học sinh quan sát phát hiện, phỏng đoán và cuối cùng là kết luận...

– Thông qua hoạt động, học sinh sẽ được củng cố kiến thức cũ , tìm tòi và phát hiện kiến thức mới, luyện tập vận dụng kiến thức vào các tình huống khác nhau, nhất là tận dụng được lợi thế của mô hình hình học thực – có vật thật (một cách đa dạng) trong cuộc sống.

– Giáo viên cần có ý thức thường trực trong việc so sánh, đối chiếu khi mở rộng các khái niệm, tính chất đã học trong hình phẳng và hình không gian, từ đó giúp học sinh nắm chắc hơn khái niệm, nâng cao năng lực so sánh và phán đoán.

– Cần tận dụng mô hình, hình vẽ, phương tiện có sẵn và tự làm đồng thời giao việc cho học sinh làm .

– Cần lưu ý rằng tinh thần của chương này là học các *vật thể không gian* chứ chưa phải là hình không gian, không đề cập đến tiên đề, không yêu cầu học sinh *biểu diễn hình*, không có chứng minh.

Trong từng tiết dạy, giáo viên nên quan tâm những điểm sau :

1. Những khái niệm chính trong tiết dạy.

2. Vốn thuật ngữ đã có và mới xuất hiện trong bài. Gần như cả 9 tiết của chương đều có những thuật ngữ nêu lên những *khái niệm, tính chất, định lí, hệ quả*... tuy không viết tường minh, giáo viên cần nghiền ngẫm, đối chiếu với thuật ngữ chính thống – thuật ngữ dân gian.

3. Khi dạy mỗi tiết, tốt nhất là nên thống kê các kiến thức cũ đã được học ở các lớp dưới – những kiến thức đang học có tác dụng nhiều hay ít với các kiến thức sẽ học trong tương lai.

4. Cách giải quyết vấn đề thông qua nghệ thuật giảng dạy và các phương pháp giảng dạy mới.

Dưới đây chúng tôi trình bày thêm một vài ý cụ thể minh họa các điều trên.

Mô hình của mỗi tiết dạy lí thuyết về đại thể, tuân thủ các bước sau :

1) Nghiên cứu thực nghiệm (qua quan sát, cắt, dán, qua hình mẫu thực...) → phỏng đoán.

2) Hợp thức hóa phỏng đoán → lí thuyết : công thức, kết luận, định lí...

3) Kiểm nghiệm phỏng đoán qua các đối tượng khác, từ đó dẫn đến : khẳng định hoặc bác bỏ.

4) Kết luận cuối cùng

Nhìn chung vì thời lượng, vì đồ dùng dạy học, vì trình độ của giáo viên và học sinh nên ở bước 3, chúng tôi đành dành cho bài tập hoặc hướng dẫn trong SGV hoặc những nơi có thời gian, điều kiện thì thực hiện.

Sau đây xin lướt qua một tiết như vậy :

§9. THỂ TÍCH HÌNH CHÓP (Xem SGK)

*Pha 1.* Nghiên cứu thực nghiệm

(Lưu ý rằng học sinh đã học công thức – Bộ đồ dùng dạy học đã có). Học sinh tự làm.

*Pha 2 :* Hợp thức hóa phỏng đoán

(Học sinh yếu nhắc lại – Tự viết công thức)

*Pha 3:* Kiểm nghiệm phỏng đoán

Cho học sinh đong ba lần, đổ ngược lại... (Xem SGV)

*Pha 4 :* Kết luận

Viết công thức, nhắc lại công thức

Thực hành củng cố bằng một bài tập cụ thể.

**Bài toán :** Ta có một cái khay hình hộp chữ nhật, dùng nó để lấy nước pha một dung dịch. Không sử dụng các dụng cụ đo, có thể đong được một lượng nước bằng mấy phần của khay? (không đánh dấu vào thành khay).

Với cách trình bày như ở SGK, rõ ràng là đối tượng để đối chứng là không đa dạng nên chưa tận dụng hết tính *bấp bênh* của phỏng đoán, từ đó chưa tạo ra sự kích thích tối đa trong ganh đua khi học tập, điểm này đành khắc phục bởi một loạt các bài tập để học sinh học theo nhóm.

*(Còn tiếp)*

## PROBLEMS IN THIS ISSUE

*(Tiếp trang 15)*

**T7/322.** The sequence of numbers $(u_n)$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ is defined by $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k!)^2}$ $(n = 1, 2, 3, ...)$. Prove that this sequence has a limit and this limit is an irrational.

**T8/322.** Let $SABC$ be a tetrahedron. The points $M, N, P$ lie respectively on the sides $SA$, $SB$, $SC$ so that $AM = BN = CP$ ($M, N, P$ are distinct from the vertices $S, A, B, C$). Let $G$ be the centroid of triangle $MNP$. Prove that $G$ lies on a fixed line when $M, N, P$ move on $SA, SB, SC$ respectively.

# HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN TOÁN - TIN
# TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2003

***(Đề thi đã đăng trên THTT số 321, tháng 3 năm 2004)***

### VÒNG 1.

**Câu 1.** Để ý rằng

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}=\sqrt[6]{(2-\sqrt{3})^2}=\sqrt[6]{7-4\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{2+\sqrt{5}}=\sqrt[4]{(2+\sqrt{5})^2}=\sqrt[4]{9+4\sqrt{5}}\ ,$$

suy ra $A = 1$.

**Câu 2.** 1) Ta có

$P_k = k.P_{k-1} = P_{k-1} + (k-1)P_{k-1}$ nên

$P_1 = 1$, $P_2 = P_1 + 1.P_1$, $P_3 = P_2 + 2P_2$, ..., $P_{n+1} = P_n + nP_n$. Cộng theo từng vế $(n + 1)$ đẳng thức trên và rút gọn ta được hệ thức cần CM.

2) Nhận xét rằng $\dfrac{k-1}{P_k}=\dfrac{k}{P_k}-\dfrac{1}{P_k}=\dfrac{1}{P_{k-1}}-\dfrac{1}{P_k}$.

Cho $k = 2, 3, ..., n$ rồi cộng theo từng vế $(n - 1)$ đẳng thức tương ứng ta được :

$$\frac{1}{P_2}+\frac{2}{P_3}+...+\frac{n-1}{P_n}=\frac{1}{P_1}-\frac{1}{P_n}=1-\frac{1}{1.2...n}<1.$$

**Câu 3.** Giả sử $2n+2003 = a^2$ và $3n+2005 = b^2$ ($a$, $b$ nguyên dương). Khi đó $3a^2-2b^2 = 1999$ (1). Suy ra $a$ lẻ. Đặt $a = 2a_1+1$ ($a$ nguyên), thế vào (1) ta có $2b^2 = 3.4a_1(a_1 + 1) - 1996 = 3.4a_1(a + 1) - 2000 + 4$.

Từ đó suy ra $b^2 \equiv 2 \pmod 4$. Điều này không xảy ra dù $b$ chẵn hay lẻ. Vậy không tồn tại số nguyên dương $n$ nào thỏa mãn đề bài.

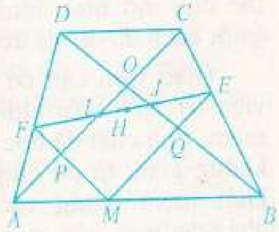
**Câu 4.** Đặt $|x - 1| = t$ $(t \geq 0)$, PT đã cho trở thành $(2t^2+a+3)(t^2+a-1)(t-a-1) = 0$ (1)

1) Với $a = -1$, PT (1) có các nghiệm $t = 0$, $t = \pm\sqrt{2}$. Suy ra PT ban đầu có nghiệm $x = 1$, $x = 1 \pm \sqrt{2}$.

2) Nếu $t$ là nghiệm nào đó của (1) thì do $|x - 1| = t$ nên $t \geq 0$. Nếu $t = 0$ thì PT ẩn $x$ có nghiệm duy nhất $x = 1$. Nếu $t > 0$ thì PT ẩn $x$ có một số chẵn nghiệm do $x = 1 \pm t$. Vì vậy nếu PT ẩn $x$ có đúng 3 nghiệm phân biệt thì $t = 0$ phải là một nghiệm của PT (1) tức là $(a + 3)(a - 1)(- a - 1) = 0$, suy ra $a = -3$ hoặc $a = \pm1$. Thử lại ta thấy với các giá trị này PT ẩn $x$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

**Câu 5.** 1) Có $\dfrac{FI}{IE}=\dfrac{FP}{PM}=\dfrac{DO}{OB}$ (1) ;

$\dfrac{EJ}{FJ}=\dfrac{EQ}{QM}=\dfrac{CO}{OA}$ (2) ; $\dfrac{DO}{OB}=\dfrac{CO}{OA}$ (3)




Từ (1) (2) (3) suy ra $\dfrac{FI}{IE}=\dfrac{EJ}{FJ}$ hay

$FI.FJ = EI.EJ$ (4)

Nếu $H$ là trung điểm của $IJ$ thì từ (4) có

$$\left(FH-\frac{IJ}{2}\right)\left(FH+\frac{IJ}{2}\right)=\left(EH-\frac{IJ}{2}\right)\left(EH+\frac{IJ}{2}\right)\Rightarrow FH=EH$$

2) Nếu $AB = 2CD$ thì $\dfrac{DO}{OB}=\dfrac{CO}{OA}=\dfrac{1}{2}$ nên theo (1) có $\dfrac{FI}{IE}=\dfrac{1}{2}$, suy ra $EF = FI + IE = 3FI$.

Tương tự, từ (3), (2) suy ra $EF = 3EJ$.

Do đó $FI = EJ = IJ = \dfrac{EF}{3}$ với $M$ là điểm bất kì nằm trong đoạn $AB$.

### VÒNG 2.

**Câu 6.** Đặt $x = 2003$. Từ thức của $P$ bằng

$[x^2(x+10) + 31(x+1) - 1][x(x+5) + 4]$
$= (x^3 + 10x^2 + 31x + 30)(x^2 + 5x + 4)$.

Mẫu thức của biểu thức $P$ bằng

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$
$= [(x+2)(x+3)(x+5)](x^2+5x+4)$

Suy ra $P = 1$.

**Câu 7.** Vì $x_1$, $x_2$, $x_3$ khác 0 nên $b \neq 0$. Ta có :

$$\frac{ab}{b^2}=\frac{a}{b}=\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_1}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)^2-\left(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}\right)\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}\right)<0.$$ Vậy $a.b < 0$.

**Câu 8.** Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x_1 = (\sqrt{2}+1)^2 = 3+2\sqrt{2}$ là một nghiệm của PT $ax^2 + bx + c = 0$ (1) và $x_2$ là nghiệm thứ hai của PT này. Ta có $3+2\sqrt{2} = \dfrac{-b+e\sqrt{\Delta}}{2a}$ với $e$ bằng 1 hoặc $-1$. Từ đó $6a + b = e\sqrt{\Delta} - 4a\sqrt{2}$. Suy ra $\sqrt{\Delta}$ không thể là số hữu tỉ và $6a + b = 0$. Từ đó và $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ có $x_2 = 3 - 2\sqrt{2}$.

Vậy PT (1) có 2 nghiệm $x_1$, $x_2$ thỏa mãn $\dfrac{c}{a} = x_1x_2 = (3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}) = 1 \Rightarrow c = a$. Do đó PT đã cho trở thành $(x^2-6x+1)^2 = 0$ có hai nghiệm kép $x_1 = 3 + 2\sqrt{2}$ và $x_2 = 3-2\sqrt{2}$.

**Câu 9.** Sử dụng PP hệ số bất định, tách :

$$\frac{(t-x)(t-y)}{(t-a)(t-b)(t-c)} = \frac{A}{t-a}+\frac{B}{t-b}+\frac{C}{t-c} \quad (1)$$

khi đó $(t-x)(t-y) =$
$= A(t-b)(t-c) + B(t-a)(t-c) + C(t-a)(t-b)$.

Lần lượt cho $t = a$, $t = b$, $t = c$, suy ra

$$A = \frac{(a-x)(a-y)}{(a-b)(a-c)},\ B = \frac{(b-x)(b-y)}{(b-c)(b-a)},$$

$$C = \frac{(c-x)(c-y)}{(c-a)(c-b)}$$ thay vào (1) được

$$\frac{(a-x)(a-y)}{(t-a)(a-b)(a-c)}+\frac{(b-x)(b-y)}{(t-b)(b-c)(b-a)}$$
$$+\frac{(c-x)(c-y)}{(t-c)(c-a)(c-b)} = \frac{(t-x)(t-y)}{(t-a)(t-b)(t-c)}$$

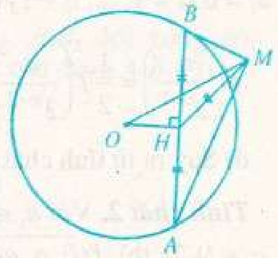
Cho $t = 0$, suy ra $P = \dfrac{xy}{abc}$.

Vì $xy \le \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$ nên $P \le \dfrac{1}{4abc}$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{2}$. Vậy $\max P = \dfrac{1}{4abc}$

**Câu 10.** 1) Gọi $H$ là trung điểm đoạn $AB$, đặt $OH = x$. Ta có $OM \le OH + HM = x + \sqrt{1-x^2}$ suy ra $OM^2 \le \left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2 = 1+2\sqrt{x^2(1-x^2)}$ $\le 1 + (x^2 + 1 - x^2) = 2 \Rightarrow OM \le \sqrt{2}$.

2) Ta thấy $OM = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = OH = HA$ và $H$ thuộc đoạn $OM$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} OA \perp OB \\ M \text{ đối xứng với } O \\ \quad \text{qua } AB \end{cases}$$




Dây $AB$ trương cung 1/4 đường tròn.

# TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ VỚI ĐỘC GIẢ

Trong tháng 2 và 3 năm 2004, cán bộ, biên tập viên tòa soạn đã có các chuyến công tác tới các tỉnh, thành Yên Bái, Phú Thọ, Hải Dương, Hải Phòng... Tại Hải Phòng, đoàn đã làm việc với Phó giám đốc Sở Giáo dục & Đào tạo Đỗ Thế Hùng. Sau đó có các cuộc tiếp xúc với ban giám hiệu và các giáo viên toán trường THPT Trần Phú, THPT Ngô Quyền. Thầy Đặng Đức Trình trường Trần Phú khi nhận xét về báo THTT đã khen đây là tư liệu quý, bổ ích, rất chú ý bài đăng trang nhất vì từ đó thu thập được nhiều vấn đề hữu ích khi còn dạy ở các lớp THCS. Mong muốn THTT có nhiều đề thi vào các trường THPT Chuyên của các tỉnh, thành.

Thầy Khúc Giang Sơn đề nghị báo tăng thêm đề thi HSG các nước. Thầy cho biết hầu như 100% học sinh chuyên toán đều đọc THTT. Nhiều giáo viên lưu giữ được và đóng thành quyển THTT qua nhiều năm. Nên khôi phục mục *Nói chuyện với các bạn trẻ yêu toán*. Thầy Đỗ Thế Hùng lưu ý THTT nên chú trọng mảng Số học vì hiện nay không có trường chuyên THCS, học sinh lên THPT chưa được bồi dưỡng nhiều về phần này. Các bài luyện thi đại học nên viết theo chuyên đề, tránh chỉ in đề rồi lời giải. Các em học sinh được nêu tên trên THTT sẽ được trường khen thưởng, học sinh được giải trên THTT sẽ được lãnh đạo Sở về phát thưởng.

Tại Hải Dương, đã có cuộc trao đổi giữa tòa soạn với thầy Hà Tuấn Phục, Phó phòng GD-ĐT Tp. Hải Dương, thầy Phan Tuấn Cộng, Phó hiệu trưởng THPT chuyên Nguyễn Trãi và thầy Tô Xuân Hải, cộng tác viên của tạp chí.

Các ý kiến cũng xoay quanh vấn đề nên có thêm nhiều bài viết theo kiểu chuyên đề, nhất là với mục *Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào đại học*.

Tại Yên Bái, cán bộ tòa soạn đã gặp lãnh đạo và cán bộ, giáo viên Sở Giáo dục & Đào tạo, trường Cao đẳng Sư phạm Yên Bái và trường THPT chuyên Yên Bái.

Phòng Phổ thông Sở GD-ĐT Yên Bái đã mua tạp chíTH&TT cho cán bộ Phòng Phổ thông và tất cả các trường THPT, THCS của tỉnh. Trường THPT chuyên Yên Bái đã động viên, viết bài và khen thưởng các học sinh có bài giải tốt trên Tạp chí THTT.

BTV

# MỘT HÀM SỐ LIÊN QUAN ĐẾN HỆ TAM PHÂN *(Tiếp bìa 2)*

Để tìm sự biểu diễn này đối với $0 < x < 1$, ta làm như sau :

Đặt $3x = a_1 + x_1$ với $0 \le x_1 < 1$ thì $a_1 = [3x]$ là phần nguyên của $3x$ và $0 \le a_1 < 3$ nên $a_1 \in \{0, 1, 2\}$. Lại đặt $3x_1 = a_2 + x_2$ với $0 \le x_2 < 1$ ta được $a_2 = [3x_1]$. Cứ tiếp tục như thế ta được $x = \overline{0, a_1a_2...}$

***Mệnh đề 2.*** Giả sử các số $x$, $y$ thuộc $[0; 1)$ viết trong hệ tam phân là :

$x = \overline{0, a_1a_2...a_n}$ và $x_o = \overline{0, b_1b_2...b_n}$ trong đó $a_i$, $b_i$ thuộc $\{0, 1, 2\}$ với $i = 1, 2, ..., k-1$ và $a_n$, $b_n$ thuộc $\{1, 2\}$. Thế thì $x + x_o = 1$ khi và chỉ khi $a_i + b_i = 2$ $(i = 1, 2, ..., n-1)$, $a_n + b_n = 3$.

Chứng minh điều kiện đủ không khó khăn, còn điều kiện cần có thể suy ra từ tính chất duy nhất của cách biểu diễn số trong hệ tam phân.

## II. Một số tính chất của hàm $f(x)$

***Tính chất 1.*** a) $f(1) = 1$

b) $f(\overline{0,1}) = f(\overline{0,2}) = \dfrac{1}{2}$

c) $f(\overline{0,0...0a_n...a_{n+t}}) = \dfrac{f(\overline{0,a_n...a_{n+t}})}{2^{n-1}}$ với $a_i = 0$ $(i = 1, 2, ..., n-1)$

d) $f(\overline{0,0...0a_n}) = \dfrac{1}{2^n}$ với $a_i = 0$ $(i = 1, 2, ..., n-1)$ và $a_n \in \{1, 2\}$.

*Chứng minh.*

a) $f(1) = f(1 - 0) = 1 - f(0) = 1$

b) Theo GT (3) và (2) có $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{f(1)}{2} = \dfrac{1}{2}$

và $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = f\left(1 - \dfrac{1}{3}\right) = 1 - f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

c) Đặt $\alpha = \overline{0, a_n...a_{n+t}}$. Theo GT (3) với $a_i = 0$ $(i = 1, ..., n-1)$ có $f(\overline{0,0...0a_n...a_{n+t}}) =$

$$f\left(\frac{\alpha}{3^{n-1}}\right) = \frac{1}{2}f\left(\frac{\alpha}{3^{n-2}}\right) = ... = \frac{1}{2^{n-1}}f(\alpha)$$

d) Suy ra từ tính chất (TC) 1b, 1c.

***Tính chất 2.*** Với $a_i \in \{0, 2\}$ $(i = 1, ..., n-1)$ và $a_n \in \{1, 2\}$ thì $f(\overline{0, a_1a_2...a_n}) =$

$$f(\overline{0,a_1}) + \frac{1}{2}f(\overline{0,a_2}) + ... + \frac{1}{2^{n-2}}f(\overline{0,a_{n-1}}) + \frac{1}{2^n}$$

Viết cách khác :

$$f\left(\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + ... + \frac{a_n}{3^n}\right) =$$

$$= f\left(\frac{a_1}{3}\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{a_2}{3}\right) + ... + \frac{1}{2^{n-2}}f\left(\frac{a_{n-1}}{3}\right) + \frac{1}{2^n}$$

*Chứng minh.* Bằng quy nạp theo $n$.

Với $n=1$ theo TC 1b có $f(\overline{0,1}) = f(\overline{0,2}) = \dfrac{1}{2}$ : đúng.

Giả sử TC 2 đúng với $n$.

Xét $x = \overline{0,a_1a_2...a_na_{n+1}}$, $y = \overline{0,a_2...a_na_{n+1}}$

$x_o = \overline{0,b_1b_2...b_nb_{n+1}}$, $y_o = \overline{0,b_2...b_nb_{n+1}}$ thì $x + x_o = 1$ và $y + y_o = 1$.

• Nếu $a_1 = 0$ thì $x = \overline{0,0a_2...a_na_{n+1}}$ và $y = 3x < 1$ nên theo GT (3) và GT quy nạp có :

$$f(\overline{0,0a_2...a_na_{n+1}}) = f(x) = f\left(\frac{y}{3}\right) = \frac{1}{2}f(y) =$$

$$= \frac{1}{2}f(\overline{0,a_2...a_na_{n+1}}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(f(\overline{0,a_2}) + \frac{1}{2}f(\overline{0,a_3}) + ... + \frac{1}{2^{n-2}}f(\overline{0,a_n}) + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= f(\overline{0,0}) + \frac{1}{2}f(\overline{0,a_2}) + \frac{1}{2^2}f(\overline{0,a_3}) + ...$$

$$+ \frac{1}{2^{n-1}}f(\overline{0,a_n}) + \frac{1}{2^{n+1}}$$ đúng với $n + 1$.

• Nếu $a_1 = 2$ thì $x = \overline{0,2a_2...a_na_{n+1}}$ và $x_o = \overline{0,0b_2...b_nb_{n+1}}$. Có $y_o = 3x_o < 1$ nên theo GT (3), (2) và GT quy nạp có :

$$f(\overline{0,2a_2...a_na_{n+1}}) = f(x) = f(1 - x_o) = 1 - f(x_o)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}f(3x_o) = 1 - \frac{1}{2}f(y_o) = 1 - \frac{1}{2}(1 - f(y))$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f(\overline{0,a_2..a_na_{n+1}})$$

$$= f(\overline{0,2}) + \frac{1}{2}\left(f(\overline{0,a_2}) + \frac{1}{2}f(\overline{0,a_3}) + ... + ... + \frac{1}{2^{n-2}}f(\overline{0,a_n}) + \frac{1}{2^n}\right)$$

$= f(\overline{0,2})+\frac{1}{2}f(\overline{0,a_2})+\frac{1}{2^2}f(\overline{0,a_3})+...$

$... + \frac{1}{2^{n-1}}f(\overline{0,a_n})+\frac{1}{2^{n+1}} =$

đúng với $n + 1$.

Vậy TC 2 đúng với mọi $n$.

***Tính chất 3.*** Giả sử $x = \overline{0,a_1a_2...a_{n-1}1}$, $y = \overline{0,a_1a_2...a_{n-1}2}$ và $z = \overline{0,a_1a_2...a_{n-1}1a_{n+1}a_{n+2}...}$

trong đó $a_i \in \{0, 2\}$ với $i = 1, 2, ..., n-1$. Khi đó $f(x) = f(y) = f(z)$.

*Chứng minh.* Do TC 1d có : $f\left(\frac{1}{3^n}\right)=f\left(\frac{2}{3^n}\right)$.

Áp dụng TC 2 có $f(x) = f(\overline{0,a_1})+\frac{1}{2}f(\overline{0,a_2})+...$

$+\frac{1}{2^{n-2}}f(\overline{0,a_{n-1}})+f\left(\frac{1}{3^n}\right)=f(y)$.

Đặt $t = \overline{0,a_{n+1}a_{n+2}...}$ thì $z = x + \frac{t}{3^n}$

Vì $0 \le t \le 1$ nên $x \le z \le x + \frac{1}{3^n} = y$.

Với $x \le z \le y$ thì $f(x) \le f(z) \le f(y)$ vì $f(x)$ là hàm không giảm, nhưng $f(x) = f(y)$ nên $f(z) = f(x) = f(y)$.

**III. Thuật toán tìm giá trị hàm số $f(x)$**

Sử dụng các tính chất trên ta có thuật toán tìm giá trị của hàm số $f(x)$ với bất kì $x$ thuộc $[0; 1)$ như dưới đây.

1) Biểu diễn số $x$ $(0 < x < 1)$ trong hệ tam phân

$$x=\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+...+\frac{a_n}{3^n}+...=\overline{0,a_1a_2...a_n...}$$

2) Nếu tồn tại chỉ số $n$ nhỏ nhất mà $a_n = 1$, nghĩa là $a_i \in \{0, 2\}$ $(i = 1, 2, ..., n-1)$. Đặt $y = \overline{0,a_1a_2...a_{n-1}1}$. Lúc đó $f(x) = f(y) = f(\overline{0,a_1})+\frac{1}{2}f(\overline{0,a_2})+...+\frac{1}{2^{n-2}}f(\overline{0,a_{n-1}})+\frac{1}{2^n}$

với $f(\overline{0,0}) = 0$, $f(\overline{0,1}) = f(\overline{0,2}) = \frac{1}{2}$.

3) Nếu $a_i \neq 1$ với mọi $i = 1, 2, ...$ và dãy $a_i$ là hữu hạn, nghĩa là $a_n = 2$ còn $a_j = 0$ với mọi $j = n+1, n+2, ...$ Lúc đó $f(x) =$

$f(\overline{0,a_1})+\frac{1}{2}f(\overline{0,a_2})+...+\frac{1}{2^{n-2}}f(\overline{0,a_{n-1}})+\frac{1}{2^n}$

4) Nếu $a_i \neq 1$ với mọi $i = 1, 2, ...$ và dãy $(a_i)$ là vô hạn, nghĩa là $a_i \in \{0, 2\}$ với mọi $i = 1, 2, ...$ Trong trường hợp này nếu dãy $(a_i)$ là vô hạn tuần hoàn thì giá trị $f(x)$ là tổng vô hạn của một cấp số nhân lùi vô hạn.

Còn nếu dãy $(a_i)$ vô hạn không tuần hoàn thì giá trị $f(x)$ là một tổng vô hạn của các số dạng

$$f(x) = f(\overline{0,a_1})+\frac{1}{2}f(\overline{0,a_2})+\frac{1}{2^2}f(\overline{0,a_3})+...$$

được suy ra từ TC 2 và 3.

Ta xét một số ví dụ

***Ví dụ 1.*** Tính $f\left(\frac{18}{1991}\right)$.

Trong hệ tam phân có $\frac{18}{1991}=0{,}000020120...$

Lúc đó

$$f\left(\frac{18}{1991}\right)=f(0{,}0000201)=\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}=\frac{5}{128}$$

***Ví dụ 2.*** Tính $f\left(\frac{2002}{2003}\right)$

Trong hệ tam phân có

$\frac{2002}{2003}=0{,}2222221220...$

Lúc đó $f\left(\frac{2002}{2003}\right)=f(0{,}2222221)=$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}=\frac{127}{128}$$

**Ví dụ 3.** Tính $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Trong hệ tam phân có $\frac{\sqrt{2}}{2}=0{,}201002...$

Lúc đó $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f(0{,}201)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}=\frac{5}{8}$.

***Ví dụ 4.*** *Tính* $f\left(\frac{1}{4}\right)$

Trong hệ tam phân có $\frac{1}{4}=\overline{0{,}020202...}$. Lúc đó

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+...=\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}=\frac{1}{3}.$$


# Lật những trang sử về MẬT MÃ KHÓA CÔNG KHAI

PHẠM HUY ĐIỂN
(Viện Toán học)

Có thể nói *mật mã khóa công khai* đã làm nên một cuộc cách mạng trong công nghệ mã hóa thông tin và đã góp phần giải quyết về căn bản các vấn đề nan giải của an ninh thông tin điện tử. Hơn hai mươi năm qua, Diffie, Hellman và Merkle được xem là những người đã phát minh ra nguyên lí về mật mã khóa công khai, còn Rivest, Shamir và Adleman là người đã thiết lập ra hệ mã RSA – một triển khai đẹp nhất của nguyên lí đó. Tuy nhiên, những thông tin được tiết lộ gần đây cho thấy rằng lịch sử về vấn đề này cần được viết lại.

Từ rất lâu, loài người đã biết dùng mật mã để trao đổi thông tin bí mật và nguyên tắc chung được mọi người thừa nhận là bản tin được *lập mã* bằng chìa nào thì chỉ có thể được *giải mã* bằng chính chìa đó. Một trong những vấn đề nan giải, cũng đã được biết đến từ lâu, của những người sử dụng các hệ mã theo nguyên tắc này là việc *chuyển giao chìa khóa* từ người lập mã đến cho người giải mã. Càng ngày vấn đề càng trở nên nghiêm trọng, khi khả năng nắm bắt các luồng thông tin trên mọi môi trường trở nên dễ dàng (các kênh thông tin bí mật về phương diện "vật lí" hầu như không còn chỗ đứng). Đầu năm 1969, quân đội Anh đã đặt vấn đề tìm giải pháp cho vấn đề này với James Ellis, một trong những chuyên gia thám mã lỗi lạc của Tổng hành dinh Cơ quan truyền thông Chính phủ Anh quốc (Government Communications Headquarters – GCHQ) tại Cheltenham. Ông đã dành nhiều công sức cho việc nghiên cứu đề tài này và phát hiện ra rằng có những giải pháp truyền tin mật mà không đòi hỏi người gửi tin phải "gửi chìa khóa". Một mô hình "vật lí" được ông hình dung là " *người nhận tin* (theo một kênh truyền nào đó) có thể tự mình làm nhiễu đường truyền (bằng một nhiễu nào đó có bản chất mà chỉ riêng mình được biết), còn *người gửi* cứ việc thả thông tin vào kênh truyền nhiễu đó. Người nhận tin (qua đường truyền nhiễu) dễ dàng lọc được nhiễu do chính mình tạo ra, còn kẻ "nghe trộm" trên đường truyền thì chịu.

Đến cuối năm 1969 James Ellis đã coi như đến được với *nguyên lí* cần tìm, khi ông cho rằng vấn đề sẽ được giải quyết nếu tìm được *hàm một chiều có bẫy*. Hàm một chiều có thể được ví như "cái hom giỏ" : người ta chỉ có thể tính được "đầu ra" từ các thông tin "đầu vào",mà không thể tính ngược để tìm thấy "đầu vào" trên cơ sở các thông tin về "đầu ra". Với *hàm một chiều* có "bẫy" thì việc "tính ngược" là thực hiện được khi biết một thông tin đặc biệt nào đó. Có thể hình dung các hàm này như những hòm thư – báo đặt trước cửa nhà hay công sở : người ta chỉ có thể bỏ thư vào thùng, nhưng không thể lấy ra được nếu như không có chìa khóa riêng để mở "cửa hậu" thùng thư. Việc "bỏ thư vào thùng" có thể xem là "lập mã", còn việc dùng chìa khóa riêng để "mở cửa hậu" lấy thư ra có thể xem là "giải mã". Với mô hình này ta có cảm giác không cần dùng đến chìa khóa khi lập mã, nhưng thực ra cái "khe" của mỗi thùng thư có thể xem như một "chìa khóa công cộng" cho tất cả những ai muốn "lập mã" gửi cho ông chủ của thùng thư. Khi có nhiều thùng thư (ứng với nhiều ông chủ khác nhau) thì khái niệm "chìa lập mã" cho từng ông chủ thùng thư còn rõ nét hơn và hoàn toàn phù hợp với thực tế là mỗi người cần có một "khe thư báo" riêng (cho dù chúng đều là *công khai* và có thể trông rất giống nhau).

Ý tưởng về việc dùng *hàm một chiều có bẫy* để đi đến một hệ mã với 2 chìa "lập mã" và "giải mã" riêng biệt cũng chính là điều mà Diffie, Hellman và Merkle đã "phát minh" ra 6 năm sau đó (1975). Tiếc rằng James Ellis không phải là nhà toán học, cho nên khi ấy (1969) cái *hàm một chiều có bẫy* mà ông hình dung ra đã không đến với ông và các đồng nghiệp ở GCHQ trong suốt 3 năm sau đó. Đến tháng 9 năm 1973, một "tân binh" mới gia nhập vào nhóm, đó là Clifford Cocks – một sinh viên mới tốt nghiệp Đại học Cambridge, ngành toán, với chuyên ngành sâu về lĩnh vực *Lý thuyết số* (trước đó 5 năm, 1968, anh đã từng tham dự Kỳ thi Olympic Toán Quốc tế của học sinh phổ thông, tổ chức tại Moscow, Liên Xô). Người hướng dẫn khoa học của tân binh này, ông Patterson, nói cho Cocks về ý tưởng độc đáo của James Ellis như một câu chuyện để biết (chứ không hi vọng có thể giải quyết được gì). Tuy nhiên, Cocks đã suy nghĩ nghiêm túc về vấn đề này, vì anh là người nghiên cứu về lí thuyết số và *hàm một chiều* đối với anh không phải là xa lạ. Số nguyên tố và vấn đề *phân tích ra thừa số* được Cocks chọn làm "ứng cử viên" đầu tiên. Chỉ trong vòng khoảng nửa giờ, mô hình trọn vẹn về *hàm một chiều có bẫy* đã đến với Cocks khá dễ dàng (đến mức bản thân Cocks không tự cảm nhận được đầy đủ ý nghĩa của kết quả mình đạt được). Nguyên lí làm việc của hệ mã này như sau.

Chọn hai số nguyên $p$ và $q$ đủ lớn (có độ dài vào cỡ 150 chữ số viết trong hệ thập phân). Tính $n = p.q$, $\phi(n) = (p-1).(q-1)$ và chọn $e$ sao cho $(e, \phi(n)) = 1$, rồi tính $d \equiv e^{-1} \pmod{\phi(n)}$. Người ta công bố công khai cặp số $(e, n)$ và gọi đó là *chìa khóa công khai* (dùng để lập mã). Bản tin sau khi được chuyển sang dạng số (nhờ một quy tắc đơn giản nào đó) sẽ được phân chia thành các khối số $P$ (không lớn hơn $n$). Việc mã hóa mỗi khối $P$ được thực hiện bằng công thức $C \equiv P^e \pmod{n}$, và $C$ được gọi là khối văn bản mã tương ứng với $P$. Việc "khai căn bậc $e$" của số $C$ (theo mod$n$) để tìm lại $P$ là không thể thực hiện được (trong vòng cả trăm năm, với máy tính mạnh nhất hiện nay). Tuy nhiên, nếu biết được cặp số $(d, n)$ thì ta có thể thể tính ra $P$ từ $C$ một cách khá đơn giản nhờ định lí Euler (một mở rộng của Định lí Fermat nhỏ). Thật vậy, do định lí này ta có $C^{k\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, với mọi số nguyên $k$ bất kì, còn quan hệ nêu trên giữa $d$ và $e$ có nghĩa $de = 1 + k\phi(n)$ với một số nguyên $k$ nào đó, cho nên $C^d \equiv (P^e)^d \pmod{n} \equiv P^{e.d} \pmod{n}$ $\equiv P^{1+k\phi(n)} \pmod{n} \equiv P \pmod{n}$.

Chính vì vậy, cặp số $(d, n)$ được gọi là *chìa khóa bí mật* (dùng để giải mã). Rõ ràng, từ $e$ muốn tính ra $d$ thì phải biết được $\phi(n)$ và, người ta chứng minh được, điều này tương đương với việc phân tích số $n$ thành tích $p.q$, một điều mà các máy tính mạnh nhất hiện nay cũng không thể làm được trong vòng vài trăm năm.

Ta biết rằng cũng chính mô hình này mà 4 năm sau ba tác giả của *RSA* phải "vất vả" trong nhiều tháng ròng mới hoàn thành được. Ý tưởng về một hệ mã như vậy chỉ đến với Rivest, Shamir, và Adleman (ba vị giáo sư của Học viện Công nghệ Massachusetts – MIT) vào mùa Xuân năm 1976 khi họ đọc bài báo của Diffie–Hellman về "Các hướng mới trong Mật mã học", và họ đã cùng nhau làm việc trong 3 tháng: Rivest đề xuất ý tưởng, Adleman phủ định, còn Shamir thì làm mỗi thứ một ít. Đến tháng 4/1977, khi đang trong cơn đau đầu, Rivest bỗng lóa lên ý tưởng : việc nhân 2 số nguyên tố lớn thành ra một tích số thì rất dễ dàng, nhưng phân tích ngược lại (từ tích số tìm ra 2 thừa số đó) thì vô cùng khó khăn, và hàm một chiều được hình thành... Họ chính thức công bố hệ mã vào năm 1978.

Đương nhiên, ngay từ năm 1973, các đồng nghiệp trong GCHQ hiểu rõ tầm quan trọng của vấn đề mà Cocks đã giải quyết. Kết quả của Cocks đã được giữ tuyệt mật. Nó có sức thuyết phục lớn trong nội bộ GCHQ, nhưng nó cũng chịu cái "bất hạnh" của việc "đi trước thời gian". Phương tiện tính toán nghèo nàn và yếu ớt thời đó tại Anh quốc đã không cho phép triển khai ngay được thuật toán, và vì vậy GCHQ chưa khai thác được mật mã với khóa công khai. Năm sau, 1974, Cocks đem vấn đề triển khai thuật toán "phàn nàn" với anh bạn cố tri Malcolm Williamson, người cùng học phổ thông, cùng tốt nghiệp Đại học Cambridge, cùng đi thi toán Quốc tế tại Moscow, bây giờ cũng lại vừa mới đến gia nhập GCHQ. Williamson không tin ngay được kết quả của Cocks, và cố gắng tìm xem Cocks mắc sai lầm ở đâu. Sau một thời gian nghiên cứu, Williamson không tìm được sai lầm nào, nhưng lại tìm ra giải pháp mới cho vấn đề "chuyển chìa" mà các nhà quân sự đang ao ước. Đó cũng chính là giao thức trao đổi chìa "Diffie–Hellman–Merkle" mà các nhà khoa học Hoa Kỳ phát minh ra (gần như cùng thời gian đó).

Tóm lại, cho đến 1975, James Ellis, Clifford Cocks và Malcolm Williamson đã phát minh ra toàn bộ nền tảng cơ sở của *mật mã với khóa công khai*, nhưng đã để trong im lặng, và ngồi dõi theo các nhà khoa học Mỹ "phát minh lại" các kết quả ấy trong 3 năm sau. Chỉ có điều hơi ngược về trình tự, ở Anh người ta tìm ra *hệ mã công khai* trước khi tìm ra *giao thức chuyển chìa khóa*, còn ở Mỹ thì ngược lại.


# HƯỚNG DẪN GIẢI

## ĐỀ TỰ ÔN THI SỐ 2

***(Đề đã đăng trên THTT số 320, tháng 2 năm 2004)***

**Câu I.**

1) Tập xác định : $D = R \setminus \{0\}$

$$y = |x+2| + \frac{1}{x} = \begin{cases} -x-2+\frac{1}{x} (C1) & \text{với } x \le -2 \\ x+2+\frac{1}{x} (C2) & \text{với } x \ge -2 \end{cases}$$

Khảo sát từng hàm số ứng với $(C_1)$, $(C_2)$.

Bảng biến thiên :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | | $+$ | $0$ | $-$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y = f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1/2$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ \|\| $+\infty$ | $\searrow$ | $4$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Bạn đọc tự vẽ đồ thị.

2) Phương trình : $|x+2| + \frac{1}{x} = \log_2(\log_{1/2} m)$ có đúng 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = \log_2(\log_{1/2} m)$ cùng phương trục hoành cắt đồ thị $(C_1)$ và $(C_2)$ tại 3 điểm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} < \log_2(\log_{1/2} m) < 0 \\ \log_2(\log_{1/2} m) > 4 \end{array}\right. \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} < m < \left(\frac{1}{2}\right)^{1/\sqrt{2}} \\ 0 < m < \left(\frac{1}{2}\right)^{16} \end{array}\right.$$

**Câu II.** 1)

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x) - \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin 3x) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 3x + \sqrt{1+\cos x}$$

$$\Leftrightarrow -\sin x = 2\sqrt{1+\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \le 0 \\ \sin^2 x = 4(1+\cos x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \le 0 \\ \cos x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \ (k \in Z)$$

2) Đặt $u = 2^{\sqrt{3-x}} \ge 1$ ;

$$\text{ĐK : } \begin{cases} u \ge 1 \\ 8u + 2u - u^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \ge 1 \\ -2 \le u \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le u \le 4$$

Ta có : (2) $\Leftrightarrow \sqrt{8+2u-u^2} > 5 - 2u$

Xét vế phải BĐT âm hoặc không âm đều dẫn đến $1 < u \le 4$.

Vậy $1 < 2^{\sqrt{3-x}} \le 4 \Leftrightarrow -1 \le x < 3$.

**Câu III.** Ta phải có $0 \le x, y \le 1$

Đặt $\widehat{ABM} = \alpha$ ; $\widehat{CBN} = \beta \Rightarrow \alpha + \beta = 45^o$

$\Rightarrow \text{tg}(\alpha+\beta) = 1 \Rightarrow \text{tg}\alpha + \text{tg}\beta = 1 - \text{tg}\alpha.\text{tg}\beta$

$\Rightarrow x + y = 1 - xy$ ($\text{tg}\alpha = x$ ; $\text{tg}\beta = y$)

Xét $\Delta BMN, \Delta BCN, \Delta BAM$

Ta có : $S_{\Delta BMN} = \frac{1}{2} BM.BN.\sin 45^o$

$$= \frac{1}{2}\frac{x}{\sin\alpha}\frac{y}{\sin\beta}\sin(\alpha+\beta)$$

$$= \frac{1}{2}xy\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2}(x+y) = \frac{1}{2}(1-xy).$$

$S_{\Delta BMN}$ lớn nhất (nhỏ nhất) $\Leftrightarrow$ $xy$ nhỏ nhất (lớn nhất). Đặt $xy = m$. Ta có

$$\begin{cases} x+y = 1-m \\ xy = m \end{cases} \Rightarrow x, y \text{ là nghiệm PT :}$$

$$f(t) = t^2 - (1-m)t + m = 0$$

Yêu cầu trên được thỏa mãn $\Leftrightarrow$ $f(t) = 0$ có nghiệm $t_1, t_2$ thỏa mãn $0 \le t_1 \le t_2 \le 1$. Điều kiện này dẫn đến $0 \le m \le 3 - 2\sqrt{2}$.

$\text{Max}S_{BMN} = \frac{1}{2}$ khi $(x, y)$ bằng $(0, 1)$ hoặc $(1, 0)$. $\text{Min}S_{\Delta BMN} = \sqrt{2}-1$ khi $\begin{cases} x+y = 2(\sqrt{2}-1) \\ xy = 3-2\sqrt{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = y = \sqrt{2}-1$.

**Câu IV.** 1) Mặt phẳng $(\beta)$ // $(\alpha)$ có dạng : $2x + 2y - z + D = 0$ $(D \ne 17)$

Mặt cầu $(I, R)$ có tâm $I$ $(1 ; -2; 3)$ và bán kính $R = 5$. Khoảng cách từ $I$ đến mặt phẳng $(\beta)$ là : $d = \sqrt{25-9} = 4$. Lại có :

# ĐỀ TỰ ÔN THI SỐ 4

*(Thời gian làm bài : 180 phút)*

**Câu I.** (2,5 điểm).

Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+mx-8}{x-m} (C_m)$

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số ứng với $m = 6$.

2) Với giá trị nào của $m$ thì hàm số có cực đại, cực tiểu. Khi đó viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu đó.

3) Tìm tất cả các giá trị của $m$ để đồ thị hàm số $(C_m)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt. Chứng tỏ rằng : Hệ số góc của tiếp tuyến tại các giao điểm đó được tính theo công thức :

$$k = \frac{2x+m}{x-m}$$

**Câu II.** (2 điểm)

1) Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình :

$$4^{1+x}+4^{1-x} = (m+1)(2^{2+x}-2^{2-x}) + 2m$$

có nghiệm thuộc $[0 ; 1]$.

2) Giải phương trình :

$$\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}} = 1+\sqrt{3+2x-x^2}$$

**Câu III.** (2 điểm)

1) Giải phương trình: $\displaystyle\int_0^x \sin 2t.\sqrt{1+\cos^2 t}\, dt = 0$

2) Tính độ lớn các góc của tam giác $ABC$ nếu có : $2\sin A.\sin B(1-\cos C) = 1$

**Câu IV.** (2 điểm)

1) Parabol $y^2 = 2x$ chia diện tích hình tròn $x^2 + y^2 = 8$ theo tỉ số nào ?

2) Tính tổng :

$$S = C_{2003}^0 + \frac{1}{3}C_{2003}^2 + \frac{1}{5}C_{2003}^4 + ... + \frac{1}{2003}C_{2003}^{2002}$$

**Câu V.** (1,5 điểm)

1) Cho họ đường tròn có phương trình :

$$x^2 + y^2 - 2(m+1)x - 4my - 5 = 0$$

a) Tìm điểm cố định thuộc họ đường tròn khi $m$ thay đổi.

b) Tìm tập hợp các điểm có cùng phương tích đối với mọi đường tròn trong họ đường tròn đã cho.

2) Cho hình chóp tứ giác $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a$, góc $ABC$ bằng $60^0$. Chiều cao $SO$ của hình chóp bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, trong đó $O$ là giao điểm của hai đường chéo đáy. Gọi $M$ là trung điểm cạnh $AD$, $(\alpha)$ là mặt phẳng đi qua $BM$, song song với $SA$, cắt $SC$ tại $K$. Tính thể tích hình chóp $K.BCDM$.

NGUYỄN THANH CẢNH
*(GV CĐSP Hưng Yên)*

---

$$d = \frac{|2.1-2.2-3+D|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}} \Rightarrow D = -7.$$

PT mặt phẳng $(\beta)$ là $2x + 2y - z - 7 = 0$

2) Gọi $N$ là trung điểm $BC \Rightarrow AN \perp BC$, $AN = a$. Lại có : $\Delta BMA = \Delta CMA \Rightarrow BM = CM$ $\Rightarrow MN \perp BC \Rightarrow \widehat{MNA} = \beta$ và $\widehat{CMN} = \widehat{BMN} = \dfrac{\alpha}{2}$

$\Delta MAN$ có $AM^2 = MN^2 - AN^2$

a) Trong $\Delta AMN$ có :

$$\text{tg}^2\beta = \frac{AM^2}{AN^2} = \frac{a^2\text{cotg}^2(\alpha/2)-a^2}{a^2} = \frac{\cos\alpha}{\sin^2(\alpha/2)}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\text{tg}^2\beta} = \frac{2\sin^2(\alpha/2)}{\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} - 1.$$

b) $AA' = 2AM = 2a\sqrt{\text{cotg}^2(\alpha/2)-1}$

Mà $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AN.BC = a^2 \Rightarrow V = AA'S_{\Delta ABC}$

$$= 2a^3\sqrt{\text{cotg}^2(\alpha/2)-1} = 2a^3\frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\sin(\alpha/2)}.$$

**Câu V.**

$$A = \left(\frac{a^{1/3}}{b^{1/6}}+\frac{b^{1/2}}{a^{1/6}}\right)^{21} = \sum_{k=0}^{21} C_{21}^k \left(\frac{a^{1/3}}{b^{1/6}}\right)^k \left(\frac{b^{1/2}}{a^{1/6}}\right)^{21-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{21} C_{21}^k a^{\frac{k}{3}-\frac{21-k}{6}}.b^{\frac{21-k}{2}-\frac{k}{6}}$$

Số mũ của $a$ và $b$ trong khai triển là bằng nhau nên $\dfrac{k}{2}-\dfrac{21-k}{6} = \dfrac{21-k}{2}-\dfrac{k}{6} \Leftrightarrow k = 12.$

Vậy số hạng cần tìm : $C_{21}^{12} a^{5/2}.b^{5/2}$

NGUYỄN THANH GIANG


## CÁC LỚP TRUNG HỌC CƠ SỞ

**Bài T1/322. (Lớp 6).**

Tìm tất cả các số nguyên $x$ thỏa mãn :

$|x-3| + |x-10| + |x+101| + |x+990| + |x+1000| = 2004$

NGUYỄN ĐỨC TẤN
*(GV Tp. Hồ Chí Minh)*

**Bài T2/322. (Lớp 7).**

Cho tam giác $ABC$ với đường trung tuyến $AM$. Gọi $O_1$ và $O_2$ theo thứ tự là giao điểm của các đường phân giác trong của các tam giác $ABM$ và $ACM$. Chứng minh rằng $MO_1 = MO_2$ khi và chỉ khi $AB = AC$.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
*(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)*

**Bài T3/322.** Có bốn viên bi mà tổng khối lượng của từng cặp viên bi là $a, b, c, d, e, f$ và thỏa mãn $a+b+c+d+e+f = a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+f^3 = 6$ (đvkl). Tìm khối lượng của các viên bi đó.

PHAN THẾ HẢI
*(GV THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Nghệ An)*

**Bài T4/322.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{a^6}{b^3+c^3}+\frac{b^6}{c^3+a^3}+\frac{c^6}{a^3+b^3}$ trong đó $a, b, c$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$.

CAO XUÂN NAM
*(GV THPT chuyên Hà Giang)*

**Bài T5/322.** Cho đường tròn tâm $O$ ngoại tiếp tam giác $ABC$ với đường kính $AD$. Gọi $I$ là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta ABC$. Các đường thẳng $AI$ và $DI$ cắt đường tròn tâm $O$ lần nữa tại $H$ và $K$ theo thứ tự. Kẻ $IJ \perp BC$ tại $J$. Chứng minh rằng ba điểm $H, K, J$ thẳng hàng.

NGUYỄN NHƯ HIỂN
*(GV THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Bảo, Hải Phòng)*

## CÁC LỚP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

**Bài T6/322.** Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right) \geq n-1+\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

trong đó $x_i$ ($i = 1, 2, ..., n$) là các số thực dương thỏa mãn $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n$, còn $n$ là số nguyên lớn hơn 1.

TRẦN TUẤN ANH
*(SV khoa Toán Tin 2000 ĐHKHTN Tp. HCM)*

**Bài T7/322.** Dãy số $(u_n)$ ($n = 1, 2, 3, ...$) được xác định bởi $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k!)^2}$ với $n = 1, 2, 3, ...$

Chứng minh rằng dãy số này có giới hạn và giới hạn đó là số vô tỉ.

LÊ XUÂN TRƯỜNG
*(GV THPT Trần Đại Nghĩa, Tp. Hồ Chí Minh)*

**Bài T8/322.** Cho hình tứ diện $SABC$. Các điểm $M, N, P$ theo thứ tự nằm trên các cạnh $SA$, $SB$, $SC$ và thỏa mãn $AM = BN = CP$ ($M, N, P$ không trùng các đỉnh $S, A, B, C$). Gọi $G$ là trọng tâm của $\Delta MNP$. Chứng minh rằng điểm $G$ luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi $M, N, P$ di động trên $SA, SB, SC$.

THÁI VIẾT THẢO
*(GV THPT Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An)*

***(Đề Vật lí : Xem tiếp bìa 3)***

## PROBLEMS IN THIS ISSUE

### FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

**T1/322. (for 6th grade)**

Find all integers $x$ satisfying

$|x-3| + |x-10| + |x+101| + |x+990| + |x+1000| = 2004$

**T2/322. (for 7th grade)**

Let $ABC$ be a triangle with its median $AM$. Let $O_1$, $O_2$ be the incenters of triangles $ABM$, $ACM$ respectively. Prove that $MO_1 = MO_2$ when and only when $AB = AC$.

**T3/322.** Consider the six pairs of marbles selected from a set of four given marbles, and consider the sum of masses of two marbles of each pair. Let $a$, $b$, $c$, $d$, e, $f$ be these sums. Determine the mass of each marble, known that $a+b+c+d+e+f = a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+f^3 = 6$

# CUỘC THI GIẢI TOÁN KỈ NIỆM 40 NĂM TẠP CHÍ THTT

*Cuộc thi giải toán đặc biệt kỉ niệm 40 năm Tạp chí THTT sẽ đăng đề thi từ số báo 321 (3.2004) đến số 325 (7.2004). Các bạn THCS có thể giải bài THPT. Thời hạn nhận bài là 2 tháng tính từ cuối tháng của số báo có đăng đề. Mỗi bài giải viết trên một tờ giấy riêng và ghi rõ họ tên, trường lớp (có thể chung phong bì). Ngoài phong bì ghi :* ***Bài dự thi giải toán 40 năm THTT****, có dán tem. Bài giải sẽ đăng lần lượt trên các báo từ số 325 (7.2004) đến 329 (11.2004). Kết quả cuộc thi được công bố trên số 330 (12.2004) và trao giải vào Lễ kỉ niệm 40 năm THTT. Có giải thưởng tập thể dành cho trường có nhiều học sinh tham gia. Rất mong đông đảo bạn đọc tham gia cuộc thi này.*

**THTT**

## CÁC LỚP THCS

**Bài T3/THCS.** Gọi $x$, $y$ là hai số nguyên khác $-1$ sao cho : $\dfrac{x^3+1}{y+1}+\dfrac{y^3+1}{x+1}$ là một số nguyên.

Chứng minh rằng $x^{2004}-1$ chia hết cho $y+1$.

DƯƠNG CHÂU DINH
*(GV THPT Lê Quý Đôn, Đông Hà, Quảng Trị)*

**Bài T4/THCS.** Gọi $H$ là trực tâm của một tam giác $ABC$ không vuông. Gọi $D$ và $E$ lần lượt là trung điểm của $BC$ và $AH$. Gọi $F$ là hình chiếu vuông góc của $H$ trên đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$. Chứng minh rằng ba điểm $D, E, F$ thẳng hàng.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT
*(Hà Nội)*

## CÁC LỚP THPT

**Bài T3/THPT.** Tìm tất cả các số nguyên dương $a, m, n$ thỏa mãn điều kiện :
$(a-1)^m=a^n-1$.

ĐẶNG HÙNG THẮNG
*(GV ĐH KHTN Hà Nội)*

**Bài T4/THPT.** Cho bốn điểm $A, B, C, D$ cùng nằm trên một đường tròn. Chứng minh rằng ba trục đẳng phương của các cặp đường tròn với các đường kính $AB$ và $CD$, $BC$ và $DA$, $AC$ và $BD$ là đồng quy.

TRẦN VIỆT HÙNG
*(Sóc Trăng)*

## CONTEST ON THE 40th ANNIVERSARY OF THE JOURNAL

### FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

**T3/THCS.** Let $x$, $y$ be two integers distinct from $-1$ such that $\dfrac{x^3+1}{y+1}+\dfrac{y^3+1}{x+1}$ is an integer. Prove that $x^{2004}-1$ is devisible by $y+1$.

**T4/THCS.** Let $H$ be the orthocenter of a non right triangle $ABC$. Let $D$ and $E$ be the midpoints of $BC$ and $AH$ respectively. Let $F$ be the orthogonal projection of $H$ on the angle bisector of $\widehat{BAC}$. Prove that $D, E, F$ are collinear.

### FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

**T3/THPT.** Find all positive intgers $a$, $m$, $n$ satisfying the condition $(a-1)^m=a^n-1$.

**T4/THPT.** Let $A, B, C, D$ be four points lying on a circle. Prove that the three radical axes of three pairs of circles respectively with diameters $AB$ and $CD$, $BC$ and $DA$, $AC$ and $BD$ are concurrent.

---

**T4/322.** Find the least value of the expressions

$$\frac{a^6}{b^3+c^3}+\frac{b^6}{c^3+a^3}+\frac{c^6}{a^3+b^3}$$

where $a$, $b$, $c$, $d$ are positive real numbers satisfying the condition $a+b+c=1$.

**T5/322.** The circumcircle of triangle $ABC$ has center $O$ and diameter $AD$. Let $I$ be the incenter of triangle $ABC$. The lines $AI$, $DI$ cut again the circumcircle at $H$, $K$ respectively. Draw the line $IJ$ perpendicular to $BC$ at $J$. Prove that $H, K, J$ are collinear.

### FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

**T6/322.** Prove the inequality

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)\geq n-1+\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

where $x_i$ $(i=1, 2, ..., n)$ are positive real numbers satisfying $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=n$ and $n$ is an integer greater than 1.

*(Xem tiếp trang 5)*


**Bài T1/318. (Lớp 6).** *Tổng các chữ số của một số chính phương có thể bằng một trong các số sau không :*

*a) 2003 ; b) 2004 ; c) 2007 ?*

**Lời giải.** Một số nguyên dương $a$ khi chia cho 3 có các dạng sau :

- $a = 3t$ thì $a^2 = 9k$ với $k$ nguyên dương (1)
- $a = 3t + 1$ hoặc $a = 3t + 2$ thì $a^2 = 3k + 1$ với $k$ nguyên không âm (2)

a) Giả sử số $N = a^2$ có tổng chữ số là $2003 = 3k + 2$, không có dạng (1), (2) nên $N$ không là số chính phương.

b) Giả sử số $N = a^2$ có tổng chữ số là $2004 = 3k$ nên $a^2$ chia hết cho 3 nhưng $a^2$ không chia hết cho 9, nên cũng không có dạng (1), suy ra $N$ không là số chính phương.

c) Giả sử số $N = a^2$ có tổng các chữ số là $2007 = 9k$, có dạng (1). Ta cần tìm ít nhất một số chính phương thỏa mãn đề bài.

Từ nhận xét $99^2 = 9801$, $999^2 = 998001$, ta có thể chọn số

$$N = a^2 = \underbrace{9...9}_{223 \text{ chữ số}}{}^2 = \underbrace{9...9}_{222 \text{ chữ số}}\ 8\ \underbrace{0...0}_{222 \text{ chữ số}}\ 1$$

có tổng các chữ số bằng $9.222 + 8 + 1 = 2007$.

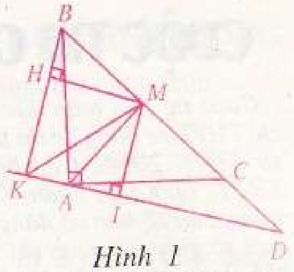
**Nhận xét.** Khi trả lời câu (c) nhiều bạn chỉ nói là *có thể có* mà không tìm ra số cụ thể. Hai bạn ở lớp 6 có lời giải đầy đủ là :

**Nghệ An :** *Tăng Văn Bình*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; **Tp.HCM:** *Tăng Bửu Vinh*, 6/1, THCS Chu Văn An, Q.11.

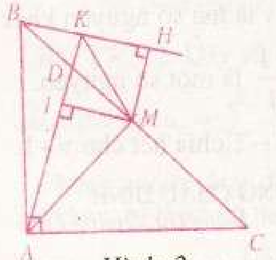
VIỆT HẢI

**Bài T2/318. (Lớp 7).** *Cho tam giác ABC có $AB = AC$, $\widehat{BAC} = 90^o$ và M là trung điểm của BC. Trên tia BC lấy điểm D với D khác B, M. Kẻ BK vuông góc với AD tại K. Chứng minh rằng KM là phân giác trong hoặc phân giác ngoài của $\Delta BKD$ tại đỉnh K.*

**Lời giải.** Khi $D$ trùng với $C$ thì $K$ trùng với $A$ và dễ thấy $MA \perp MB$ nên kết luận đúng. Từ $M$ hạ $MH \perp KB$ tại $H$ và $MI \perp KD$ tại $I$. Ta có $MH \perp MI$ vì $MH // KD$ và $MI \perp KD$. Từ đó $\widehat{AMI} = 90^o - \widehat{AMH} = \widehat{BMH}$ khi $M$ nằm trong $BD$ (hình 1, các bạn tự vẽ trường hợp điểm $D$ nằm trong $MC$) và $\widehat{AMI} = 90^o - \widehat{BMI} = \widehat{BMH}$ khi $M$ nằm ngoài $BD$ (hình 2).



*Hình 1*



*Hình 2*

Hai tam giác vuông $AMI$ và $BMH$ có $\widehat{AMI} = \widehat{BMH}$ và $AM = BM$ nên $\Delta AMI = \Delta BMH$, suy ra $MI = MH$. Như vậy $M$ cách đều hai đường thẳng $KB$ và $KD$, do đó $KM$ là phân giác trong của $\Delta BKD$ khi $M$ nằm trong $BD$ hoặc $KM$ là phân giác ngoài của $\Delta BKD$ khi $M$ nằm ngoài $BD$.

**Nhận xét.** Nhiều bạn dùng đến kiến thức tứ giác nội tiếp hoặc tam giác đồng dạng. Tuy lời giải đúng nhưng những kiến thức này vượt ra ngoài chương trình lớp 7.

2. Các bạn sau đây có lời giải tốt :

**Hà Tây :** *Trần Ngọc Thúy*, 7B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa ; **Hải Phòng :** *Phạm Đức Dương*, 7A1, THCS Hồng Bàng ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Văn Tân*, *Lê Thị Hạnh*, 7A, THCS Nguyễn Chích, huyện Đông Sơn, *Lê Thị Hạnh*, 7A5, THCS Quang Trung, Tp. Thanh Hóa ; **Nghệ An :** *Nguyễn Bảo Trung*, 7A1, THCS Lê Hồng Phong ; **Bình Định :** *Tào Nguyễn Quang Khanh*, *Nguyễn Sử Phương Phúc*, 7A, THCS Ngô Mây, Phù Cát, *Bùi Bảo Khang*, 7A1, THPT An Nhơn 2, huyện An Nhơn ; **Quảng Ngãi :** *Trần Tấn Thanh*, 7C, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành ; **Đak Lăk :** *Phan Duy Bá Hoành*, 7D, THCS Tân Lợi, Tp. Buôn Ma Thuột.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

**Bài T3/318.** *Chứng minh rằng nếu số 2n là tổng của hai số chính phương (lớn hơn 1) phân biệt thì $n^2 + 2n$ viết được thành tổng của bốn số chính phương (lớn hơn 1) phân biệt.*

**Lời giải.** Giả sử $2n = a^2 + b^2$ với $a$, $b$ là các số tự nhiên thỏa mãn $a > b > 1$.

Ta có $4n^2 = (a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2$

$$\Rightarrow n^2 = \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)^2 + (ab)^2 .$$

Ta được :

$$n^2 + 2n = \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)^2 + (ab)^2 + a^2 + b^2 \quad (1)$$

Vì $a > b > 1$ nên $(ab)^2$, $a^2$, $b^2$ là các số chính phương phân biệt và cùng lớn hơn 1. Ta phải chứng minh $\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2$ là số chính phương lớn hơn 1 và khác với cả ba số trên.

Thật vậy, vì $2n = a^2 + b^2$ là một số chẵn nên hai số $a$, $b$ có cùng tính chẵn lẻ. Do đó $\frac{a^2-b^2}{2}$ là một số nguyên dương.

Nếu $\frac{a^2-b^2}{2} = 1 \Rightarrow a^2 = b^2 + 2 < b^2 + 2b + 1$ $\Rightarrow b^2 < a^2 < (b+1)^2$. Vô lí.

Nếu $\frac{a^2-b^2}{2} = a \Rightarrow b^2 = a^2 - 2a$.

Vì $a > 2$ nên $a^2 - 4a + 4 < a^2 - 2a$ $\Rightarrow (a-2)^2 < b^2 < (a-1)^2$. Vô lí.

Nếu $\frac{a^2-b^2}{2} = b \Rightarrow a^2 = b^2 + 2b \Rightarrow b^2 < a^2 < (b+1)^2$. Vô lí.

Nếu $\frac{a^2-b^2}{2} = ab \Rightarrow (a-b)^2 = 2b^2 \Rightarrow a - b = b\sqrt{2}$. Điều này không thể xảy ra vì $a - b$ là một số tự nhiên còn $b\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Vậy từ (1), ta được $n^2 + 2n$ là tổng của bốn số chính phương phân biệt và cùng lớn hơn 1.

**Nhận xét.** Rất nhiều bạn không chứng minh hoặc chứng minh thiếu chặt chẽ : các số hạng trong vế phải của hệ thức (1) là phân biệt và cùng lớn hơn 1. Các bạn sau đây có bài giải tốt.

**Hà Nội :** *Nguyễn Minh Phương*, 9A2, THPT Ngô Sĩ Liên, Hoàn Kiếm ; **Đà Nẵng :** *Lê Tấn Thanh*, 9/12, THCS Trưng Vương, Q. Hải Châu ; **Nghệ An :** *Mai Văn Minh*, 8G, *Tô Hồng Sơn*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, Vinh ; **Thanh Hóa :** *Lê Xuân Thống Nhất*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, *Trịnh Hà Linh*, 9A, THCS Lê Đình Kiên, Yên Định, *Hoàng Vũ Hạnh*, 9B, *Hoàng Mạnh Tèo*, 9C, *Đỗ Xuân Hợp*, 9H, THCS Trần Mai Ninh, Tp. Thanh Hóa ; **Nam Định :** *Phạm Tiến Duật*, *Hoàng Trọng Hiền*, 8B, THCS Trần Huy Liệu, Vụ Bản, *Nguyễn Ngọc Hương*, *Trần Quang Huy*, 9A1, THCS Phùng Chí Kiên, Tp. Nam Định ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Xuân Thọ*, 9B, THCS Vĩnh Yên, Tx. Vĩnh Yên ; **Hải Dương :** *Hoàng Đình Phương*, 9/3, THCS Lê Quý Đôn ; **Phú Thọ :** *Đào Thị Thuần*, 9A1, THCS Lâm Thao, *Đào Đức Trung*, 8A3, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh ; **An Giang :** *Võ Thành Lộc*, 9A17, THPT Nguyễn Trãi, tp. Long Xuyên ; **Đắc Lắc :** *Phạm Duy Khánh*, 9A7, THCS Trần Hưng Đạo, Tp. Buôn Ma Thuột.

NGUYỄN ANH DŨNG

**Bài T4/318.** *Giải hệ phương trình :*

$$\begin{cases} x^2(y+z)^2 = (3x^2+x+1)y^2z^2 & (1) \\ y^2(z+x)^2 = (4y^2+y+1)z^2x^2 & (2) \\ z^2(x+y)^2 = (5z^2+z+1)x^2y^2 & (3) \end{cases}$$

**Lời giải.** (*) Xét trường hợp : $xyz = 0$ $\Leftrightarrow x = 0$, hoặc $y = 0$, hoặc $z = 0$.

– Nếu $x = 0$ thì từ (1) suy ra $y = 0$ hoặc $z = 0$. Khi đó hệ có nghiệm : $(x, y, z)$ là $(0, 0, z)$ và $(0, y, 0)$.

– Tương tự nếu $y = 0$ hoặc $z = 0$, ta tìm thêm được nghiệm $(x, y, z)$ của hệ là $(x, 0, 0)$.

(*) Xét trường hợp $xyz \neq 0$. Khi đó đặt $\frac{1}{x} = a$, $\frac{1}{y} = b$, $\frac{1}{z} = c$ ta có

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} (b+c)^2 = 3+a+c^2 & (1') \\ (c+a)^2 = 4+b+b^2 & (2') \\ (a+b)^2 = 5+c+c^2 & (3') \end{cases}$$

Cộng theo từng vế các phương trình (1'), (2'), (3') rồi rút gọn ta được :

$(a+b+c)^2 - (a+b+c) - 12 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c=4 \\ a+b+c=-3 \end{array}\right.$$

- Với $a + b + c = 4$ thay lần lượt vào (1'), (2'), (3') ta tính được : $x = \frac{9}{13}$, $y = \frac{3}{4}$, $z = \frac{9}{11}$.

– Với $a + b + c = -3$, làm tương tự như trên ta được : $x = -\frac{5}{6}$, $y = -1$, $z = -\frac{5}{4}$.

Tóm lại, hệ đã cho có các nghiệm sau với $x$, $y$, $z$ tùy ý: $(0, 0, z)$, $(0, y, 0)$, $(0, 0, z)$, $\left(\frac{9}{13}, \frac{3}{4}, \frac{9}{11}\right)$, $\left(-\frac{5}{6}, -1, -\frac{5}{4}\right)$.

**Nhận xét.** 1) Một nửa số bạn tham gia giải đúng bài này với cách giải tương tự như trên. Còn lại là giải sai hoặc thiếu nghiệm. Đặc biệt nhiều bạn sau khi nhận xét $x = y = z = 0$ là một nghiệm của hệ đã chỉ xét trường hợp $xyz \neq 0$ mà không xét các trường hợp : $x = y = 0, z \neq 0$ ; ... nên đã dẫn tới thiếu nghiệm.

2) Có 3 bạn đã đưa ra nhận xét : Các số 3, 4, 5 trong hệ có thể thay bởi các số $m, n, p \in R$ và đưa ra điều kiện của các số này để trong trường hợp $xyz \neq 0$, hệ (I) có nghiệm. Tuy nhiên điều kiện mà các bạn đưa ra chưa chính xác mà điều kiện chính xác là $m + n + p \geq -\frac{1}{4}$.

3) Các bạn có lời giải tốt là : **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Văn Ngọc*, 9B, THCS Lập Thạch ; *Phạm Huy*, 9C, THCS Tam

Dương ; **Phú Thọ :** *Nguyễn Văn Hảo*, 9A, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh ; **Bắc Ninh :** *Hoàng Văn Tuyến*, 9A, THCS Lê VănThịnh, Gia Bình ; **Hải Dương :** *Vũ Đình Quyền*, 9B, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Đức Thương*, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc ; **Nghệ An :** *Nguyễn Đăng Cường*, 9A, THCS Quán Hành, Nghi Lộc ; **Quảng Ngãi :** *Nguyễn Tấn Hưng*, 7A, THCS Tịnh Châu, SơnTịnh ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Lê Khắc Phương Thư*, $7^1$, trường Bình Tây ; **Đồng Nai :** *Nguyễn Đào Xuân Uyên*, 9A1, THCS Lê Thánh Tông, Định Quán.

TRẦN HỮU NAM

**Bài T5/318.** *Chứng minh bất đẳng thức*

$$(1+a^{n+1})(1+b^{n+1})(1+c^{n+1}) \geq$$

$$\geq (1+ab^n)(1+bc^n)(1+ca^n)$$

*trong đó a, b, c là các số dương và n là số nguyên dương ($n \leq 4$).*

**Lời giải.** Khai triển hai vế ta được BĐT tương đương :

$$a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}+(ab)^{n+1}+(bc)^{n+1}+(ca)^{n+1} \geq$$

$$ab^n+bc^n+ca^n+a^{n+1}b^nc+ab^{n+1}c^n+a^nbc^{n+1} \quad (1)$$

Trước hết, chứng minh rằng với mọi $x$, $y$, $z$ dương ta có

$$x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1} \geq xy^n+yz^n+zx^n \quad (2)$$

Thật vậy, có thể giả thiết $x \geq y$ và $x \geq z$. Khi đó (2) tương đương với

$$(x-z)(x^n-y^n)+(y-z)(y^n-z^n) \geq 0 \quad (3)$$

và (3) là đúng do giả thiết $x \geq y$, $x \geq z$. Vậy (2) được chứng minh.

Áp dụng (2) cho $x = a$, $y = b$, $z = c$ và cho $x = ab$, $y = bc$, $z = ca$, ta được :

$$a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1} \geq ab^n+bc^n+ca^n \quad (4)$$

$$(ab)^{n+1}+(bc)^{n+1}+(ca)^{n+1} \geq$$

$$\geq a^{n+1}b^nc+ab^{n+1}c^n+a^nbc^{n+1} \quad (5)$$

Cộng theo từng vế của (4) và (5) ta thu được (1)

**Nhận xét.** Lời giải trên đúng với $n$ là số nguyên dương tùy ý. Hầu hết các bạn đã chứng minh (2) bằng cách dùng BĐT Cô-si cho $n$+1 số. Số lời giải tốt khá lớn, do đó xin nêu tên một số bạn. **Thanh Hóa :** *Nguyễn Lưu Bách*, THCS Lê Hữu Tập ; **Nghệ An :** *Võ Quang Vinh*, THCS Thái Hòa II ; **Hà Tây :** *Hoàng Thị Diệu*, THCS Phương Tú ; **Vĩnh Phúc :** *Trần Tấn Phong*, THCS Lập Thạch ; **Nam Định :** *Hoàng Trọng Hiển*, THCS Trần Huy Liệu, Vụ Bản, *Nguyễn Hoàng Anh*, THCS Giao Thanh, Giao Thủy ; **Quảng Ngãi :** *Trần Tấn Hưng*, 7A, THCS Tịnh Châu ; **Tp. HCM :** *Lê Khắc Phương Thư*, $7^1$, THCS Bình Tây.

PHAN DOÃN THOẠI

**Bài T6/318.** *Cho hình thang ABCD với AB//CD và AB⊥BD. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại G. Trên đường thẳng CE vuông góc với AC lấy điểm E sao cho CE = AG và đoạn thẳng GE không cắt đường thẳng CD. Trên tia DC lấy điểm F sao cho DF = GB. Chứng minh rằng GF vuông góc với EF.*

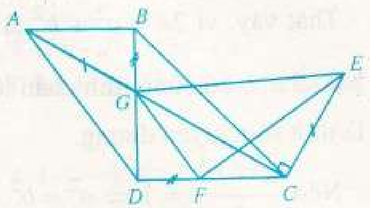
**Lời giải.** ***Trường hợp 1.*** $F$ thuộc đoạn $DC$. Nếu $F \equiv C$ thì hiển nhiên $GF \perp EF$. Xét $F$ nằm trong $DC$ (h. 1). Do $AB//CD$ nên theo định lí Ta-let ta có

$$\frac{AG}{CG}=\frac{BG}{DG}.$$

Mà $AG = CE$, $BG = DF$ nên

$$\frac{CE}{CG}=\frac{DF}{DG}.$$

Cùng với $\widehat{FDG}=\widehat{ECG}$



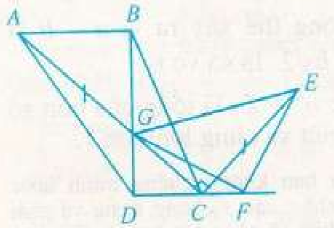
*Hình 1*

suy ra $\Delta FDG \backsim \Delta ECG$. Từ đó $\widehat{DFG}=\widehat{CEG}$.

Suy ra

$\widehat{CEG}+\widehat{CFG} = 180^\circ$ nghĩa là tứ giác $GFCE$ nội tiếp. Vậy $\widehat{EFG}=\widehat{ECG} = 90^\circ$ hay $GF \perp EF$.

***Trường hợp 2.*** $F$ không thuộc đoạn $DC$ (hình 2). Tương tự như trên ta cũng có $\Delta FDG \backsim \Delta ECG$. Suy ra $\widehat{DFG}=\widehat{CEG}$ nên tứ giác $CFEG$ nội tiếp. Do đó $\widehat{GCE}=\widehat{GFE} = 90^\circ$ hay $GF \perp EF$.



*Hình 2*

**Nhận xét.** 1) Hầu hết các bạn chỉ xét một trường hợp. Có một bạn xét thêm trường hợp $F$ ở ngoài đoạn $DC$ về phía $D$ là không cần thiết vì bài cho tia $DC$.

2) Các bạn có lời gải tốt :

**Phú Thọ :** *Trần Mạnh Trung*, 9A, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh ; **Hưng Yên :** *Bùi Văn Thanh*, 9A3, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang ; **Hà Nam :** *Đinh Doãn Cường*, 9A3, THCS Nguyễn Khuyến, Bình Mỹ, Bình Lục ; **Nam Định :** *Phạm Tiến Duật*, 8B, THCS Trần Huy Liệu, Vụ Bản ; **Thanh Hóa :** *Đỗ Xuân Hợp*, 9H, THCS Trần Mai Ninh, Lê Trung Thành, 9B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, *Trịnh Huy Giang*, 9A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn.

VŨ KIM THỦY

**Bài T7/318.** *Hai đường tròn tâm O bán kính R và tâm O' bán kính R' (R > R') tiếp xúc với nhau tại điểm A. Tia Ax của góc vuông xAy cắt đường* *tròn tâm O lần nữa tại B và tia Ay cắt đường tròn tâm O' lần nữa tại C. Gọi H là hình chiếu của A trên BC. Chứng minh rằng khi góc vuông xAy quay quanh điểm A thì điểm H chạy trên một đường tròn.*

**Lời giải.** Gọi $K$ là giao điểm của $BC$ với $OO'$. Xét hai trường hợp :

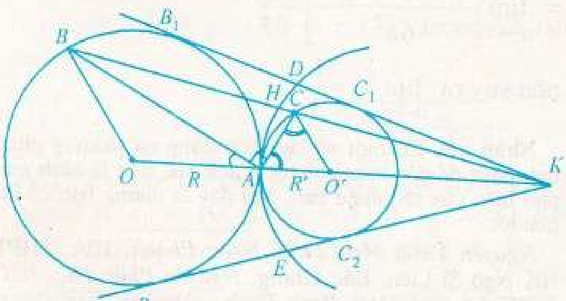
1) *Hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại A.* Do $R > R'$ nên $K$ thuộc tia đối của tia $O'O$. Từ giả thiết bài ra ta có $\widehat{CBA}+\widehat{BCA} = 90^o$ và $\widehat{BAO}+\widehat{CAO'} = 90^o$, suy ra $\widehat{OBC}+\widehat{BCO'} = (\widehat{OBA}+\widehat{CBA})+(\widehat{BCA}+\widehat{ACO'})$

$= (\widehat{OAB}+\widehat{CAO'}) + (\widehat{CBA}+\widehat{BCA}) = 180^o$

$$\Rightarrow OB \,//\, O'C \Rightarrow \frac{KO'}{KO} = \frac{CO'}{BO}$$

$$\Rightarrow \frac{KO'}{KO'+(R+R')} = \frac{R'}{R} \Rightarrow KO' = \frac{R'(R+R')}{R-R'}.$$

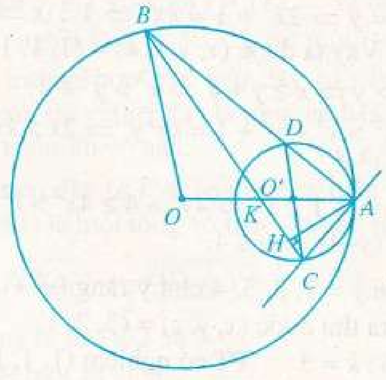
Do đó : $AK = KO' + R' = \dfrac{2RR'}{R-R'} \Rightarrow A, K$ cố định (vì $A$ cố định) mà $\widehat{AHK} = 90^o$ nên điểm $H$ chạy trên đường tròn đường kính $AK$. *Lưu ý rằng góc vuông $\widehat{BAC}$ chỉ quay đến vị trí $\widehat{B_1AC_1}$ và $\widehat{B_2AC_2}$, lúc đó $B_1C_1$ và $B_2C_2$ là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (O) và (O') (vị trí giới hạn của BC). Hai tiếp tuyến này cắt đường tròn đường kính AK tại D và E nên H chỉ thuộc cung $\widehat{DAE}$, một phần đường tròn đường kính AK* (hình 1).




*Hình 1*

2) *Hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc trong với nhau tại A.* Khi đó $K$ nằm trong đoạn $OO'$ (hình 2). Chứng minh tương tự cũng có $BO // CO'$, suy ra $\dfrac{KO'}{KO} = \dfrac{CO'}{BO} \Rightarrow \dfrac{KO'}{(R-R')-KO'}$

$$= \frac{R'}{R} \Rightarrow KO' = \frac{(R-R').R'}{R+R'} \Rightarrow AK = \frac{2RR'}{R+R'}$$




*Hình 2*

mà $A$ cố định, suy ra $K$ cố định. Mặt khác $\widehat{AHK} = 90^o$ nên $H$ chạy trên đường tròn đường kính $AK$ cố định.

*Tóm lại :* khi góc vuông $\widehat{xAy}$ quay quanh $A$ thì điểm $H$ luôn chạy trên đường tròn đường kính $AK$ cố định (đpcm).

**Nhận xét.** Nhiều bạn đặt vấn đề *tìm quỹ tích điểm H khi góc vuông $\widehat{xAy}$ quay quanh A.* Khi tìm quỹ tích $H$ một số bạn chỉ xét trường hợp hai đường tròn $(O)$ và $(O')$ tiếp xúc ngoài với nhau tại $A$ mà không xét TH 2 đường tròn đó tiếp xúc trong, và ... quên thực hiện bước giới hạn trong TH 1). Các bạn sau có lời giải tốt hơn cả :

**Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Hoài Nam*, 9D, THCS Liên Bảo, *Nguyễn Xuân Thọ*, 9B, THCS Vĩnh Yên, Tx. Vĩnh Yên ; **Nam Định :** *Trần Quang Huy*, 9A1, THCS Phùng Chí Kiên, Tp. Nam Định ; **Nghệ An :** *Phan Thị Khánh Vân*, 9A, THCS Cửa Nam, Tp. Vinh, *Hoàng Trọng Quang*, 9B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Lê Ngọc Thạch*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; **Hà Tĩnh :** *Tô Minh Giang*, 9E, THCS Kỳ Tân, Kỳ Anh ; **Quảng Ngãi :** *Hồ Ngọc Phước*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Mộ Đức ; **Khánh Hòa :** *Võ Thái Thông*, 8/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh, *Đỗ Phú Thịnh*, $9^{12}$, THCS Thái Nguyên, Nha Trang.

HỒ QUANG VINH

**Bài T8/318.** *Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho phương trình $x^3+y^3+z^3 = kx^2y^2z^2$ có nghiệm nguyên dương và giải các phương trình đó.*

**Lời giải.** (Dựa trên lời giải của bạn *Trịnh Thành Kiên*, 10T, THPT Lam Sơn, **Thanh Hóa**).

Không giảm tính tổng quát giả sử $x \geq y \geq z$. Khi đó

$$3x^3 \geq x^3 + y^3 + z^3 = kx^2y^2z^2 \Rightarrow 3x \geq ky^2z^2 \quad (1)$$

Mặt khác $kx^2y^2z^2 \,\vdots\, x^2 \Rightarrow (x^3 + y^3 + z^3) \,\vdots\, x^2$

$\Rightarrow (y^3 + z^3) \,\vdots\, x^2 \Rightarrow y^3 + z^3 \geq x^2$ (2)

$\Rightarrow 9y^3 + 9z^3 \geq 9x^2 \geq k^2y^4z^4$ (do (1)).

Vậy $18y^3 \geq k^2y^4z^4 \Rightarrow 18 \geq k^2yz^4 \geq z^5 \Rightarrow z = 1$.

Thay vào ta được $x^3 + y^3 + 1 = kx^2y^2$ (3)

Nếu $x = y \Rightarrow 2x^3 + 1 = kx^4 \Rightarrow 1 \vdots x \Rightarrow x = 1$ $\Rightarrow k = 3$. Vậy ta được $(x, y, z, k) = (1, 1, 1, 3)$.

Nếu $x > y \Rightarrow x \geq y + 1 \Rightarrow x^3 > y^3 + 1$.

Vậy $2x^3 > x^3 + y^3 + 1 = kx^2y^2 \Rightarrow 2x > ky^2$ $\Rightarrow 4x^2 > k^2y^4$.

Do (2) $y^3 + 1 \geq x^2 \Rightarrow 4y^3 + 4 \geq 4x^2 > k^2y^4 \geq y^4$ $\Rightarrow 4 > y^3(y-4) \Rightarrow y \leq 4$.

Thử với $y = 1, 2, 3, 4$ chú ý rằng $(y^3 + 1) \vdots x^2$ và $x > y$ ta thu được $(x, y, z) = (3, 2, 1)$.

Đáp số : $k = 3$ PT có nghiệm $(1, 1, 1)$,
$k = 1$ PT có nghiệm $(1, 2, 3)$
và các hoán vị của nó.

**Nhận xét.** 1) Bài toán trên có thể phát biểu dưới dạng Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương $(x, y, z, t)$ của phương trình $x^3 + y^3 + z^3 = tx^2y^2z^2$

2) Bài này được đông đảo các bạn tham gia giải. Các bạn có lời giải tốt : *Trần Văn Toàn*, 9B, THCS Yên Thành, **Nghệ An**, *Trần Hữu Hiếu*, 11A Toán, THPT Hùng Vương, **Phú Thọ**, *Lê Minh Thắng*, 12A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**, *Trần Quốc Tân*, *Bùi Ngọc Khôi*, 10Toán, THPT Trần Phú, **Hải Phòng**, *Nguyễn Văn Thắng*, 10A, THPT Tứ Kỳ, **Hải Dương**, *Trương Minh Tiến*, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**, *Nguyễn Đình Hiền*, 12CT, THPT Lê Hồng Phong, **Tp. Hồ Chí Minh**, *Hoàng Tiến Trung*, 12 Toán, THPT chuyên tỉnh **Quảng Trị**, *Nguyễn Phúc Thọ*, 11T, Lê Quý Đôn, **Bình Định**.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

**Bài T9/318.** *Chứng minh rằng dãy số sau có giới hạn khi n tăng lên vô hạn và tìm giới hạn đó:*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k\sin\frac{k}{n^3} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

**Lời giải.** (*Trần Anh Dũng*, 12 Toán, THPT chuyên Thăng Long, **Lâm Đồng** và nhiều bạn khác).

Nhận xét rằng $s_n > 0$ và $s_{n+1} < s_n$ với mọi $n \in N^*$.

Vậy $\{s_n\}$ là một dãy giảm và bị chặn dưới nên nó có giới hạn.

Để tính giới hạn của dãy, ta sử dụng BĐT sau:

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x, \ (\forall x > 0).$$

Thật vậy, xét hàm số

$$f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}, \ (x \geq 0).$$

Ta có : $f'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

$$f''(x) = x - \sin x \geq 0 \ (\forall x \geq 0).$$

Vậy nên $f'(x)$ là hàm số đồng biến trong $[0; \infty]$ và $f'(x) \geq f'(0) = 0$ kéo theo $f(x)$ đồng biến trong $[0; \infty]$ và $f(x) \geq f(0) = 0$ với mọi $x > 0$.

Với $x = \dfrac{k}{n^3}$ ta thu được

$$\frac{k^2}{n^3} - \frac{k^4}{n^9 3!} < k\sin\frac{k}{n^3} < \frac{k^2}{n^3}, \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Suy ra $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3} - \sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{n^9 3!} < \sum_{k=1}^{n} k\sin\frac{k}{n^3} < \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}$.

hay $\displaystyle\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 - \frac{1}{n^9 3!}\sum_{k=1}^{n}k^4 < s_n < \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$ (2)

Sử dụng các đồng nhất thức

$$\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

ta có thể viết (2) dưới dạng

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30n^8 3!} <$$

$$< s_n < \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Vì

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30n^8 3!}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right] = \frac{1}{3}$$

nên suy ra $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{3}$

**Nhận xét.** Có một số bạn còn dùng cả phương pháp tích phân để ước lượng chuỗi. Cách giải trên là cách giải phổ biến của rất nhiều bạn. Sau đây là những bạn có lời giải tốt.

*Nguyễn Tuyết Mai*, *Thân Ngọc Phành*, 10A, THPT NK Ngô Sĩ Liên, **Bắc Giang**; *Nguyễn Phúc Thọ*, 10T, THPT Lê Quý Đôn, **Bình Định** ; *Nguyễn Tiến Dũng*, 9A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà, **Hải Dương** ; *Đỗ Văn Tuấn*, 10 Toán, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương** ; *Lương Minh Thắngi*, 11T, THPT chuyên, ĐHKHTN – ĐHQG **Tp. HCM** ; *Nguyễn Trường Khoa*, 12 Toán, THPT Thăng Long, Đà Lạt, **Lâm Đồng** ; *Phạm Thị Thùy Tâm*, 11M, THPT Giao Thủy A, **Nam Định** ; *Lương Phú Minh*, *Đinh Khang*, 10 Toán, THPT NK Trần Phú, **Hải Phòng** ; *Châu Văn Linh*, 12T, THPT Bến Tre ; *Hoàng Việt*, 11A, THPT Lào Cai, **Lào Cai** ; *Nguyễn Trúc Việt*, 12A1, THPT Quảng Trị, *Trương Song Hào*, 12 Toán, THPT Lê Quý Đôn, **Quảng Trị** ; *Mạch Nguyệt Minh*, 12A1, THPT Lý Tự Trọng, **Cần Thơ** ; *Hà Đình*

*Hiệu*, 11A1, *Lê Minh Thắng*, 12A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc** ; *Đinh Đức Thành*, 11A1, THPT chuyên **Phú Thọ**; *Đỗ Quốc Khánh*, 10A1, THPT ch. Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng** ; *Nguyễn Thanh Thế*, 11T, THPT ch. Nguyễn Tất Thành, **Yên Bái**.

NGUYỄN VĂN MẬU

**Bài T10/318.** *Tìm tất cả các hàm $f : R \to R$ thỏa mãn điều kiện :*

$$f(x) = \max_{y\in R}\left\{xy^{2003} + yx^{2003} - f(y)\right\} \text{ với mọi } x \in R$$

**Lời giải.** Giả sử hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện trên. Xét $y = x$ ta có $f(x) \geq 2.x^{2004} - f(x)$.

Suy ra $f(x) \geq x^{2004}$ $(\forall x \in R)$ (1)

Do đó với mọi $x, y \in R$ có

$x.y^{2003} + y.x^{2003} - f(y) \leq$

$\leq x.y^{2003} + y.x^{2003} - y^{2004} \leq x^{2004}$ vì

$x^{2004} + y^{2004} - x.y^{2003} - y.x^{2003} =$

$= (x^{2003} - y^{2003})(x - y) \geq 0$ (2)

Bởi vậy $f(x) \leq x^{2004}$ $(\forall x \in R)$ (3)

Từ (1) và (3) ta suy ra $f(x) = x^{2004}$ $(\forall x \in R)$.

Thử lại : lại dùng bất đẳng thức (2) ta thấy hàm số trên thỏa mãn điều kiện bài toán.

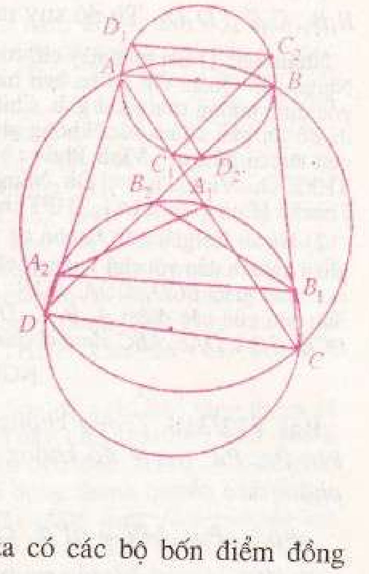
**Nhận xét.** Bài toán này gần như là một hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức (2). Tòa soạn nhận được lời giải của hơn 80 bạn, trong các bạn giải tốt có các bạn lớp 10 sau : **Bắc Ninh :** *Nguyễn Trường Giang*, 10A1, THPT Yên Phong I, *Nguyễn Văn Ngọc*, 10 Lí, THPT chuyên ; **Vĩnh Phúc :** *Vũ Văn Quang*, 10A1, THPT chuyên ; **Hà Nội :** *Huỳnh Trung Anh*, 10T1, THPT Hà Nội – Amsterdam ; *Bùi Đức Cường*, 10A2, PTCT-T, ĐHSP I ; **Hải Dương :** *Nguyễn Tiến Dũng*, 10A1, THPT Thanh Hà ; *Đỗ Văn Tuấn*, 10T, THPT Nguyễn Trãi ; **Thanh Hóa :** *Trịnh Thành Kiên*, *Bùi Tiến Quân*, 10T, THPT Lam Sơn ; **Đà Nẵng:** *Phạm Thanh Sơn*, 10/1, THPT Lê Quý Đôn ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Nguyễn Anh Cường*, *Đỗ Hoàng Long*, *Nguyễn Tuấn Tú*, *Nguyễn Hoàng Việt*, 10T, THPT Lê Hồng Phong ; **Đồng Tháp :** *Lữ Thiện Nhân*, 10T, THPT Tx. Sa Đéc.

NGUYỄN MINH ĐỨC

**Bài T11/318.** *Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong một đường tròn sao cho đường tròn đường kính CD cắt các đường thẳng AC, AD, BC, BD lần lượt tại $A_1, A_2, B_1, B_2$ và đường tròn đường kính AB cắt các đường thẳng CA, CB, DA, DB lần lượt tại $C_1, C_2, D_1, D_2$. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn tiếp xúc với bốn đường thẳng $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$ và $D_1D_2$.*

**Lời giải.** (của bạn *Nguyễn Lệnh Quân*, khối PTCT–Tin, ĐHSP **Hà Nội**)

Bài toán vẫn đúng khi đường tròn đường kính $CD$ cắt các *đường thẳng AC, AD, BC, BD* và đường tròn đường kính $AB$ cắt các *đường thẳng CA, CB, DA, DB* nên đề bài đã sửa lại như trên.




Trong bài giải này, cụm từ "bốn điểm đồng viên" nghĩa là "bốn điểm nằm trên đường tròn". Kí hiệu $d(X, \Delta)$ chỉ khoảng cách từ điểm $X$ tới đường thẳng $\Delta$.

Theo giả thiết, ta có các bộ bốn điểm đồng viên sau :

$(A_2, B_1, C, D)$ ; $(A, B, C, D)$ ; $(A_1, B, C_2, D_1)$.

Do đó có hệ thức giữa các góc định hướng :

$(D_1A_2, B_1A_2) \equiv (DA_2, B_1A_2) \pmod \pi$

$\equiv (DC, B_1C) \equiv (DC, BC) \pmod \pi$

$\equiv (DA, BA) \equiv (D_1A, BA) \pmod \pi$

$\equiv (D_1C_2, BC_2) \equiv (D_1C_2, B_1C_2) \pmod \pi$

$\Rightarrow (A_2, B_1, C_2, D_1)$ đồng viên

$\Rightarrow$ Các đường trung trực của các đoạn $A_2B_1$, $B_1C_2$, $C_2D_1$, $D_1A_2$ đồng quy. Ta gọi điểm đồng quy này là $K$ (1)

Nhờ hai bộ bốn điểm đồng viên $(A_2, B_1, C, D)$; $(A, B, C, D)$ ta có :

$(A_2A_1, A_2B_1)$

$\equiv (A_2A_1, A_2D) + (A_2D, A_2B_1) \pmod \pi$

$\equiv (CA_1, CD) + (CD, CB_1) \pmod \pi$

$\equiv (CA_1, CB_1) \pmod \pi$

$\equiv (CA, CB) \pmod \pi$

$\equiv (DA, DB) \pmod \pi$

$\equiv (DA_2, DB_2) \pmod \pi$

$\equiv (DA_2, DC) + (DC, DB_2) \pmod \pi$

$\equiv (B_1A_2, B_1C) + (B_1C, B_1B_2) \pmod \pi$

$\equiv (B_1A_2, B_1B_2) \pmod \pi$

$\Rightarrow$ các đường thẳng $A_1A_2$, $B_1B_2$ đối xứng với nhau qua đường trung trực của đoạn $A_2B_1$ (2)

Từ (1), (2) suy ra :

$d(K, A_1A_2) = d(K, B_1B_2)$

Tương tự như vậy, ta có :

$d(K, B_1B_2) = d(K, C_1C_2)$ ;

$d(K, C_1C_2) = d(K, D_1D_2)$

$d(K, D_1D_2) = d(K, A_1A_2)$.

Tóm lại : $K$ cách đều các đường thẳng $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$, $D_1D_2$. Từ đó suy ra đpcm.

**Nhận xét:** 1) Bài toán này chỉ có 22 bạn tham gia giải. Ngoài bạn Quân, chỉ có ba bạn biết sử dụng khái niệm góc định hướng trong khi giải. Chính vì vậy các bạn này đã có lời giải chính xác, không phụ thuộc hình vẽ. Xin nêu tên cả ba bạn : **Vĩnh Phúc :** *Vũ Văn Quang*, 10A1, THPT ch. Vĩnh Phúc ; **Đà Nẵng :** *Đỗ Quốc Khánh*, *Trương Minh Tiến*, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

2) Ngoài lời giải trên ta còn có thể giải bài toán bằng phép nghịch đảo với chú ý rằng : các đường tròn Ơ-le của các tam giác $BCD$, $CDA$, $DAB$, $ABC$ và đường thẳng Sim-sơn của các điểm $A$, $B$, $C$, $D$ đối với các tam giác $BCD$, $CDA$, $DAB$, $ABC$ cùng đi qua một điểm.

NGUYỄN MINH HÀ

**Bài T12/318.** *Trong không gian xét 4 tia Pa, Pb, Pc, Pd, trong đó không có 3 tia nào đồng phẳng sao cho*

$\widehat{aPb} = \widehat{cPd}$ , $\widehat{bPc} = \widehat{dPa}$ , $\widehat{cPa} = \widehat{bPd}$

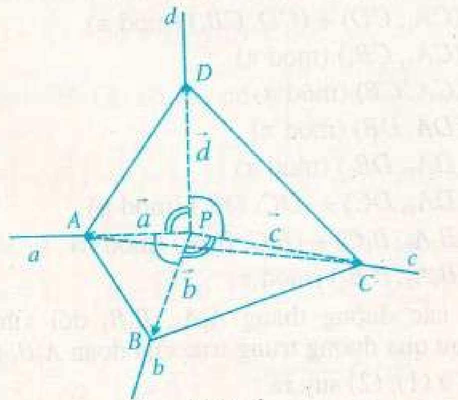
*1) Chứng minh sự tồn tại bốn tia như thế.*

*2) Gọi α, β, γ, δ theo thứ tự là các góc tạo bởi các tia Pa, Pb, Pc, Pd với một tia thứ năm Pt nào đó cho trước. Tìm tập hợp những tia Px sao cho :*

$$\cos\widehat{aPx} + \cos\widehat{bPx} + \cos\widehat{cPx} + \cos\widehat{dPx} = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta \qquad (*)$$

**Lời giải.** Nếu bốn tia đồng phẳng thì chúng được tạo thành từ hai đường thẳng cắt nhau ở điểm $P$.

1) Lấy trên bốn tia $Pa$, $Pb$, $Pc$, $Pd$ đã cho theo thứ tự bốn véctơ đơn vị : $\overrightarrow{PA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{PB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{PC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{PD} = \vec{d}$ ; $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 1$ (Hình 1)




*Hình 1*

Vì $\widehat{APB} = \widehat{CPD}$ suy ra $\Delta APB = \Delta CPD$, nên : $AB = CD$. Chứng minh tương tự : $BC = DA$ và $CA = BD$. Bởi vậy, có hai trường hợp xảy ra :

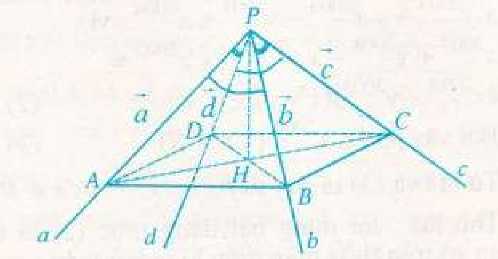
(i) Nếu bốn điểm $A$, $B$, $C$, $D$ *không đồng phẳng* thì $ABCD$ là một *tứ diện gần đều* (vì các cạnh đối diện bằng nhau). Và do đó :

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0} \qquad (1)$$

(Trọng tâm $G$ của tứ diện trùng với tâm mặt cầu ngoại tiếp nó).

(ii) Nếu bốn điểm $A$, $B$, $C$, $D$ *đồng phẳng* thì tứ điểm phẳng $\{A, B, C, D\}$ là các đỉnh của một hình chữ nhật (vì $A$, $B$, $C$, $D$ là các đỉnh của một tứ giác có các cạnh đối diện bằng nhau và hai đường chéo cũng bằng nhau).

Do đó, $PA$, $PB$, $PC$ và $PD$ là các cạnh bên bằng nhau của một hình chóp tứ giác có đáy là một hình chữ nhật và chân đường cao $PH$ trùng với tâm $H$ của đáy (hình 2).




*Hình 2*

Trong trường hợp này ta có :

$$\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d} \ (= 2\vec{h},\ \overrightarrow{PH} = \vec{h}) \qquad (2)$$

Như vậy, sự tồn tại của bốn tia có gốc $P$ chung thỏa mãn điều kiện đặt ra đã được khẳng định. Tuy nhiên, vì góc $P$ chung là cho trước, nên ta dễ dàng dựng được bốn tia thỏa mãn điều kiện đặt ra bằng *phương pháp ngược*. Trước hết, dựng một tứ diện gần đều $A_1B_1C_1D_1$ nào đó và gọi $O_1$ là trọng tâm (cũng là tâm mặt cầu ngoại tiếp nó), hoặc dựng một hình chóp $O'.A'B'C'D'$ thỏa mãn điều kiện nêu ở (ii). Sau đó, phép tịnh tiến theo véctơ $\overrightarrow{O_1P}$ hoặc $\overrightarrow{O'P}$ sẽ cho ta các tia $Pa$, $Pb$, $Pc$ và $Pd$ cần tìm.

2) Trên tia thứ năm $Ot$ cho trước (không trùng với tia nào trong bốn tia $Oa$, $Ob$, $Oc$, $Od$), lấy véctơ đơn vị $\overrightarrow{PE} = \vec{e}$ $(|\vec{e}| = 1)$. Thế thì : $\vec{a}.\vec{e} = \cos\alpha$, $\vec{b}.\vec{e} = \cos\beta$, $\vec{c}.\vec{e} = \cos\gamma$ và $\vec{d}.\vec{e} = \cos\delta$.

Bây giờ trên tia bất kì $Px$, ta cũng lấy véctơ đơn vị $\overrightarrow{PX} = \vec{x}$ $(|\vec{x}| = 1)$, ta có : $\vec{a}\vec{x} = \cos\widehat{aPx}$, $\vec{b}.\vec{x} = \cos\widehat{bPx}$, $\vec{c}.\vec{x} = \cos\widehat{cPx}$ và $\vec{d}.\vec{x} = \cos\widehat{dPx}$. Do đó, ta được :

$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}).\vec{x} =$

$= \cos\widehat{aPx} + \cos\widehat{bPx} + \cos\widehat{cPx} + \cos\widehat{dPx}$ ; (3)

$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}).\vec{e} = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta$ (4)

Đối chiếu với (3) và (4), ta viết lại điều kiện (*) dưới dạng véctơ như sau :

$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}).\vec{x} = (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}).\vec{e}$ (**)

a) Nếu $ABCD$ là một tứ diện gần đều thỏa mãn (1) : $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d} = \vec{0}$.

thì : $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}).\vec{x} = \vec{0}.\vec{x} = 0$ ; $(\forall\, \vec{x})$

Vậy trong trường hợp này, *tập hợp những tia Px thỏa mãn (*) là mọi tia gốc O.*

b) Nếu $ABCD$ là một hình chữ nhật và $PABCD$ là một hình chóp tứ giác thỏa mãn (2) : $\vec{a}+\vec{c} = \vec{b}+\vec{d} = 2\vec{h}$ (trong đó $\overrightarrow{PH} = \vec{h}$) thì $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d} = 4\vec{h} = 4\overrightarrow{PH}$. Thay vào (**), ta được: $\overrightarrow{PH}.\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PH}.\overrightarrow{PE}$ (5)

Lại vì $|\overrightarrow{PX}| = |\overrightarrow{PE}| = 1$, nên (5) $\Leftrightarrow$ $((\overrightarrow{PH}, \overrightarrow{PX}) = (\overrightarrow{PH}, \overrightarrow{PE})$ (mod $2\pi$), hay là : $\widehat{HPx} = \widehat{HPe} = \varphi$ (không đổi) (***)

Vậy, trong trường hợp này ta đi đến kết luận :

*Tập hợp những tia Px thỏa mãn (*)* cũng tức là thỏa mãn (***), *là tập hợp những tia đường sinh Pm của mặt nón tròn xoay đỉnh O, trục PH và nửa góc ở đỉnh* $\varphi = \widehat{HPt}$ (là góc tạo bởi đường cao $PH$ của hình chóp tứ giác $PABCD$ và tia thứ năm $Pt$ đã cho).

**Nhận xét.** 1) Chỉ có 32 bạn tham gia giải bài toán này. Bài toán này không thuộc loại khó. Tuy nhiên, *hầu hết các bạn đã cho lời giải không trọn vẹn, hoàn hảo* ; số lời giải này chiếm tỉ lệ 7/8.

2) Thiếu sót trong lời giải của các bạn thể hiện ở những điểm sau đây :

– Một là, các bạn *vội vàng* khi đã tạo nên một tứ điểm {A, B, C, D} (trường hợp 1) mà *không xét hai trường hợp có thể xảy ra.*

– Hai là, *thực chất đây là một bài toán dựng hình* nhưng không có bạn nào chỉ ra *cách dựng* những bộ bốn tia như thế và khẳng định rằng đã xét tất cả các khả năng có thể được để tạo nên các bộ bốn tia đó.

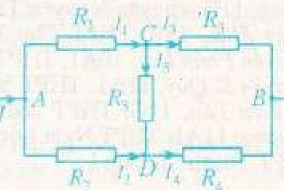
Tóm lại, đa số các bạn mới chỉ tiến hành có một trong bốn bước giải, đó là bước phân tích.

3) Bài toán này *đòi hỏi phải sử dụng véctơ* (các phép toán tuyến tính cũng như phép nhân vô hướng). Thiếu sót ở phần 1) sẽ ảnh hưởng trực tiếp đến phần 2)

4) Các bạn sau đây có lời giải tốt hơn cả (tuy nhiên đều thiếu phần trình bày cách dựng) : *Nguyễn Tuyết Mai*, 12A, THPT NK Ngô Sĩ Liên, **Bắc Giang** ; *Lê Bá Long*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**, *Phan Anh Tuấn*, 12A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**, *Châu Văn Linh*, 12T, THPT Bến Tre, **Bến Tre**.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

**Bài L1/318.** *Cho một mạch cầu điện trở như sơ đồ bên. Cho biết : $R_1 = 8\Omega$, $R_2 = 14\Omega$, $R_3 = 15,2\Omega$, $R_4 = 3\Omega$ và $R_5 = 10\Omega$. Hãy tìm $I_1$, $I_2$, $I_3$, $I_4$ và $I_5$ khi :*




*a) $I = 3,4A$ ;*

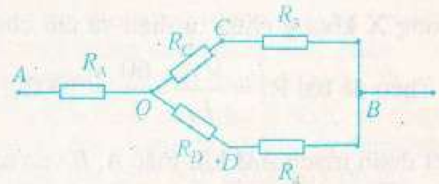
*b) $U_{AB} = 74V$.*

**Lời giải.** Có nhiều cách giải khác nhau (áp dụng định luật Ôm, áp dụng định luật Kiêc-xôp, áp dụng phương pháp điện thế nút, áp dụng công thức chuyển mạch tam giác – sao...). Thuận tiện hơn là dùng công thức chuyển mạch tam giác sao như hình vẽ. Ta có :

$$R_A = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2+R_5} = 3,5\ (\Omega)\ ;$$

$$R_C = \frac{R_1R_5}{R_1+R_2+R_5} = 2,5\ (\Omega)$$

$$R_D = \frac{R_2R_5}{R_1+R_2+R_5} = 4,375\ (\Omega)$$




Từ đó tìm được $R_{OB} = \dfrac{177}{34}$ $(\Omega)$ và $R_{AB} = \dfrac{148}{17}$ $(\Omega)$

a) Với $I = 3,4$A, dễ dàng tìm được : $I_1 = 1,8$ (A); $I_2 = 1,6$ (A) ; $I_3 = 1$(A) ; $I_4 = 2,4$ (A) ; $I_5 = 0,8$ (A).

b) Với $U_{AB} = 74$V, dễ dàng tìm được: $I_1 = 4,5$ (A); $I_2 = 4$ (A) ; $I_3 = 2,5$ (A) ; $I_4 = 6$ (A) ; $I_5 = 2$ (A).

**Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải tốt :

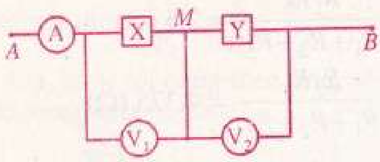
**Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Xuân Tuấn*, 12A4, *Nguyễn Thị Phương Dung*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Phú Thọ :** *Đặng Hồng Duyên*, 12H1, THPT chuyên Hùng Vương ; **Bắc Giang :** *Dương Trung Hiếu*, 11B, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; **Đà Nẵng:** *Trương Mih Tiến*, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Hưng Yên:** *Ngô Xuân Đong*, 10 Lí, THPT chuyên Hưng Yên ; **Quảng Ngãi:** *Đỗ Nhất Linh*, 10 Lí, THPT chuyên Lê Khiết ; **Đồng Nai:** *Nguyễn Huy Linh*, 11 Lí, THPT chuyên Lương Thế Vinh ; **Hà Tĩnh:** *Trương Tuấn Anh*, 10 Lí, THPT NK Hà Tĩnh ; **Vĩnh Phúc :** *Dương Công Định*, 9/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Thị Hằng*, 11T, THPT Lam Sơn ; **Hà Nội :** *Bùi Phi Anh*, 11 Lí, THPT Hà Nội – Amsterdam, *Lê Trần Quyết*, 11A3, THPT Nguyễn Tất Thành ; **Đak Lắk :** *Võ Thành Lâm*, 10C1, THPT Ngô Gia Tự, Iakar ; **Yên Bái :** *Hoàng Vũ*

*Trung*, 11H, chuyên Nguyễn Tất Thành ; **Lạng Sơn :** *Lí Công Thái*, 12B, THPT Chu Văn An ; **Hải Dương :** *Nguyễn Phấn Hai*, 10A1, THPT Kinh Môn ; **Bắc Ninh :** *Nguyễn Sĩ Quý*, 11A1, THPT Yên Phong 1 ; **Nghệ An :** *Lê Tiến Tấn*, 11G, THPT Nghĩa Đàn ; *Nguyễn Quang Phượng*, 11A1, THPT Nghi Lộc 1 ; *Võ Đức Quang*, 11A, THPT Thanh Chương I ;

MAI ANH

**Bài L2/318.** *Cho hai hộp đen X, Y mắc nối tiếp mỗi hộp chỉ chứa một trong ba phần tử : R, L, (điện trở không đáng kể), C. Khi mắc hai điểm A, M vào hai cực của một nguồn điện một chiều thì $I_A = 2(A)$, $U_{v1} = 60(V)$. Khi mắc hai điểm A, B vào hai cực của một nguồn điện xoay chiều tần số 50 (Hz) thì $I_A = 1(A)$, $U_{v1} = 60(V)$, $U_{v2} = 80(V)$ và $u_{AM}$ lệch pha $u_{MB}$ là $120^o$. Hỏi X, Y chứa phần tử nào ? Tìm các giá trị của chúng.*

**Lời giải.** • Vì X cho dòng một chiều đi qua




nên trong X không chứa tụ điện và chỉ chứa $R_l$ và $L_l$. Theo đề bài $R_1 = \dfrac{U_{V_1}}{I_A} = \dfrac{60}{2} = 30(\Omega)$.

• Xét đoạn mạch *AM* khi mắc *A, B* vào nguồn xoay chiều : Ta có : $Z_{AM} = \dfrac{60}{1} = 60\ (\Omega) = \sqrt{R_1^2 + Z_{L_1}^2} \Rightarrow Z_{L_1} = 30\sqrt{3}(\Omega) \Rightarrow L_1 = \dfrac{30\sqrt{3}}{100\pi} \approx 0{,}17(H)$. Ngoài ra $u_{AM}$ sớm pha so với *i* một góc $\varphi_1$ mà $\text{tg}\varphi_1 = \dfrac{Z_{L_1}}{R_1} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi_1 = 60^o$.

• Xét đoạn mạch *MB* khi mắc *A, B* vào nguồn xoay chiều : Vì $u_{AM}$ lệch pha so với $u_{MB}$ góc $120^o$, nên có thể kết luận là $u_{MB}$ trễ pha so với *i* một góc $\varphi_2 = 120^o - 60^o = 60^o$. Như vậy *Y* chỉ có thể chứa điện trở $R_2$ và tụ điện $C_2$. Ta có : $Z_{MB} = \dfrac{80}{1} = 80(\Omega) = \sqrt{R_2^2 + Z_{C_2}^2}$. Mặt khác $\text{tg}\varphi_2 = \text{tg}60^o = \sqrt{3} = \dfrac{Z_{C2}}{R_2}$. Từ đó tìm được : $R_2 = 40\ (\Omega)$ và $Z_{C_2} = 40\sqrt{3}(\Omega) \Rightarrow C_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{12\pi}.10^{-3}\ (F) \approx 46\ (\mu F)$

Nhận xét. Các em có lời giải gọn và đúng

**Hà Nội :** *Phạm Việt Đức*, 11A, THPT chuyên Lí, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội ; **Bắc Ninh :** *Vũ Văn Thọ*, Lí 12, THPT chuyên Bắc Ninh, *Nguyễn Bá Chuyên*, 12A1, THPT Quế Võ 1 ; **Bắc Giang :** *Dương Trung Hiếu*, 11B, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; **Nghệ An :** *Đậu Minh Quang*, 11A3, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh ; **Quảng Trị :** *Hoàng Tiến Trung*, 12 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Thọ :** *Đặng Hồng Duyên*, 12H1, THPT chuyên Hùng Vương , *Nguyễn Thị Thành Mai*, 12A5, THPT Thanh Ba ; **Thái Bình :** *Phạm Hà Thành*, 11B, THPT Bắc Duyên Hà, Hưng Hà ; **Thanh Hóa :** *Lê Thị Loan*, 12A3, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa ; **Hải Dương:** *Phạm Xuân Thành*, 42 Chu Văn An, tp. Hải Dương ; **Hà Tây :** *Lê Văn Vụ*, 12A1, THPT Phùng Khắc Khoan, Thạch Thất ; **Đồng Nai :** *Phạm Bá Tòng*, 12A2, THPT Nguyễn Trãi, Biên Hòa ; **Ninh Bình:** *Vũ Thị Ngọc Ánh*, 12A3, THPT Yên Khánh A.

MAI ANH

## TOÁN HỌC MUÔN MÀU (Tiếp bìa 3)

***Nhận xét.*** 1) Viên bi phải đi từ *A* đến *C* qua đường chéo của tất cả 9 ô vuông.

2) Đường đi dài nhất (không gặp vật chắn nào) của một viên bi là các hình chữ nhật $M_iN_iP_iQ_i$ ($i$ = 1, 2, 3, 4) (các hình chữ nhật mà viên bi đi qua phải giao với *AC* chỉ tại các đỉnh ô vuông thuộc *AC*).

Mỗi hình chữ nhật đó đi qua các đường chéo của 18 ô vuông. Nếu kể cả *AC* thì chỉ cần đặt 4 tấm chắn thuộc *AC* và cạnh của 4 hình chữ nhật trên thì nó sẽ đi qua đường chéo của 18.4 + 9 = 81 ô vuông.

***Cách đặt vật chắn :*** Có nhiều cách đặt 4 vật chắn (nằm ngang hoặc nằm dọc) sao cho :

1) Có ít nhất 1 vật chắn nằm ở đỉnh ô vuông bên trong *AC*.

2) Mỗi cặp hình chữ nhật $M_iN_iP_iQ_i$ ($i$ = 1, 2, 3, 4) phải giao nhau ở 1 vật chắn để viên bi phải di chuyển từ hình chữ nhật này qua hình chữ nhật kia.

Các bạn sau có lời giải tốt hơn cả được nhận tặng phẩm :

1) *Nguyễn Anh Việt*, 12A3, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**

2) *Nguyễn Duy Cừ*, 11A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch, **Vĩnh Phúc**

3) *Nguyễn Kim Dũng*, 12C, THPT Tam Nông, **Phú Thọ**

4) *Bùi Phi Anh*, 11 Lý, THPT Hà Nội - Amsterdam, **Hà Nội**

5) *Phạm Tiến Vương*, 11B11, THPT Bình Sơn, **Quảng Ngãi**

6) *Hoàng Văn Tuyển*, 9A, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình, **Bắc Ninh**

PHI PHI

# X hỏi ? Y, Z trả lời.

## HỎI – SỐ NÀY

**1.(4.04).**

$$-1 = (-1)^{2\times\frac{1}{2}} = \left[(-1)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

Sao lại thế nhỉ ? Đẳng thức nào đúng ? Đẳng thức nào sai ?

*(Võ Thái T., lớp 8/4, trường Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)*

**2.(4.04).**

Gặp bài toán :

"Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $(\alpha)$ là mặt phẳng thay đổi luôn đi qua các trung điểm $I$ và $K$ của các cạnh $DA$ và $DB$. Giả sử $(\alpha)$ cắt các cạnh $CA$, $CB$ lần lượt tại $M$ và $N$".

Như vậy có phải xét $M$ và $N$ trùng với $A$ và $B$ không ?

Nếu cho một điểm nằm trên cạnh của một tam giác thì có phải xét nó trùng với hai đầu mút không ?

*(Một học sinh lớp 10 trường Mạc Đĩnh Chi, Nam Sách, Hải Dương)*

## TRẢ LỜI - NHỮNG SỐ TRƯỚC

**1.(3.04).**

* Đề bài thiếu dữ kiện, bởi biểu thức $A$ vẫn có thể nhận giá trị bằng 33.

Ví dụ khi $y = 0$, $x = \sqrt[5]{33} \Rightarrow A = 33$.

Dữ kiện còn thiếu là $x$, $y$ nguyên.

* Khi thêm điều kiện $x$, $y$ nguyên thì lời giải đó vẫn chưa rõ ràng... chưa giải được ngoài giá trị khác 33 thì $A$ nhận mọi giá trị khác".

*(Trần Thị Phương Thanh, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên).*

* Nếu phân tích số 33 như trên thì $A$ cũng không thể nhận các giá trị 22, 55, 77... Như vậy yêu cầu chứng minh của đề là sai.

Mặt khác $x$, $y$ không có giới hạn thuộc tập hợp nào, tại sao phân tích 33 thành tích các số nguyên ? Nếu $33 = \frac{1}{22} \times 11 \times 2 \times 33 \times 1$ thì sao ?

*(Một bạn không ghi tên).*

**2.(3.04):**

* Gọi là bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân của hai số không âm mang tên nhà toán học người Pháp Cô-si (Cauchy). Thực ra thì Ơclit là người chứng minh trước BĐT này bằng Hình học. Sau đó Cô-si đã chứng minh BĐT tổng quát cho $n$ số không âm.

*(Nguyễn Văn Đính, 12I, THPT Giao Thủy, Nam Định).*

* Là bất đẳng thức Bu-nhia-côp-ski – Cô-si hay còn gọi là *bất đẳng thức về trung bình cộng và trung bình nhân.*

*(Trần Thị Phương Thanh, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên)*

**3.(3.04) :**

* Nên chọn cách (1). Điều này cũng giống như bạn nói "Tôi có hai chiếc bút : bút màu xanh và bút màu đỏ". Không nên nói "Tôi có hai chiếc bút : bút màu xanh hoặc bút màu đỏ". Hay khi bạn biểu diễn nghiệm dưới dạng tập hợp nghiệm thì ta có $A = \{1 ; 2\}$, bạn sẽ đọc là phần tử của tập hợp $A$ là 1 và 2.

*(Hoàng Phúc Hưng, $9_3$, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Biên Hòa, Đồng Nai)*

* Chọn cách (1) là đúng. Khi giải thì có thể nói PT có 2 nghiệm $x = 1$ hoặc $x = 2$. Nhưng khi kết luận thì chỉ chọn cách (1) mà thôi.

*(Đỗ Xuân Đức, 8E, THCS Tân Dân, Khoái Châu, Hưng Yên).*

LTS : Nếu bạn nào thấy các câu trả lời trên chưa hay, chưa chặt chẽ thì hãy gửi tiếp câu trả lời về tòa soạn.

VKT

---

## *Giải đáp* DI CHUYỂN THEO TỌA ĐỘ *(Tiếp bìa 4)*

• Đường đi theo hướng mũi tên ở hình vẽ là (Thẳng, Lên).

• Đường đi giữa các quả cầu bằng nhau thì chỉ đổi hướng mà không lên, không xuống.

• Đường đi trong các mặt ABFE, CDHG trên thực tế là hình thang gần như thẳng đứng nên chỉ có hướng Đông hoặc Tây, tương tự đường đi trong các mặt BCGF, ADHE chỉ có hướng Bắc hoặc Nam, mà không có các hướng Đông Bắc, Đông Nam, Tây Bắc, Tây Nam. Tuy nhiên nếu lệnh là Đông mà các bạn ghi Đông Bắc hoặc Đông Nam thì chỉ là lệnh "thừa" vì người di chuyển cũng chỉ đi theo một hướng Đông mà thôi.

Rất tiếc rằng không có bạn nào giải đúng bài này.

VÂN KHANH


## *Giải đáp :* AI BIẾT NHIỀU HƠN

Năm 2004 này có rất nhiều sự kiện kỉ niệm chẵn chục năm. Tiêu biểu là các sự kiện :

**Trong nước:**

1460 năm Quốc hiệu Vạn Xuân (544)

1030 năm sinh vua Lý Thái Tổ (974)

950 năm Quốc hiệu Đại Việt (1054)

740 năm mất Trần Thủ Độ, người sáng lập Triều Trần hiển hách hào khí Đông A (1264)

720 năm Trần Hưng Đạo viết Hịch Tướng sĩ (1284).

220 năm ngày mất Lê Quý Đôn (1784)

200 năm Quốc hiệu Việt Nam (1804)

190 năm cột cờ Hà Nội (1814)

100 năm thành lập Hội Duy Tân (1904)

60 năm thành lập Quân đội nhân dân Việt Nam (22.12.1944)

50 *năm chiến thắng Điện Biên Phủ* (7.5.1954)

50 năm Nam Định thành phố đầu tiên của Việt Nam được giải phóng (1.7.1954)

50 năm giải phóng thủ đô (10.10.1954)

40 *năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ ra số đầu* (15.10.1964)

30 năm Việt Nam dự thi Toán Quốc tế (7.1974)

**Ngoài nước**

520 năm Nicolai Chuquet sử dụng số mũ âm (1484)

440 năm ngày sinh Galiléo Galilée (1564)

390 năm John. Napier phát minh ra loga (1614)

380 năm W.Schickard sáng chế máy tính thực hiện được 4 phép tính (1624)

330 năm kính hiển vi được chế tạo (1674)

290 năm phát minh ra thang nhiệt độ (Daniel Gabriel Fahrenheit 1714)

270 năm phát minh ra lực kế (1734)

230 năm Joseph Priestley tìm ra nguyên tố Oxi (1774)

220 năm James Watt phát minh ra máy hơi nước (1784)

220 năm W. Callen phát minh ra máy lạnh (1784)

190 năm George Stephenson phát minh xe lửa chạy bằng máy hơi nước (1814).

180 năm Niels Henrik Abel chứng minh không thể giải được phương trình tổng quát bậc 5 bằng căn thức (1824)p

180 năm G. Stiphenson chỉ huy xây dựng đường sắt đầu tiên, ở Anh (1824)

180 pnăm khám phá mô sống cấu thành từ tế bào (1824)

150 năm P. Merien dùng nhựa, chế phẩm dầu mỏ phủ mặt đường (1854)

130 năm sáng chế ra máy ảnh (1874)

130 năm lí thuyết tập hợp (1874)

120 năm P. Nipkox phát minh ra đĩa hình (1884)

120 năm Thomas Alva Edison phát minh máy phá điện (1884)

120 năm phép tính tenxơ (1884)

110 năm máy chiếu phim của Edison trình diễn trước công chúng (1894)

100 năm cuộc đua xe đạp vòng quanh nước Pháp (1904)

100 năm S. W. Rumsey tìm ra các chất khí trong không khí (1904)

100 năm David Hillbert nghiên cứu những vấn đề cơ sở của hình học (1904)

90 năm đèn tín hiệu giao thông bằng điện ở Mỹ (1914)

90 năm vành bánh xe bằng thép được phát minh (1914)

80 năm đường ô tô 2 làn đầu tiên trên thế giới (Italia 1924)

80 năm hãng Bell tìm ra cách huyền ảnh đi xa (1924)

80 năm Frost phát minh ra máy thu thanh lắp trên ô tô (1924)

70 năm sinh Gagarin (1934)

70 năm công trình về sự phân chia hạt nhân (1934)

50 năm G. Amdahi viết hệ điều hành đầu tiên cho máy tính IBM 704 (1954)

50 năm các nhà Khoa học Mỹ sáng chế pin Mặt trời (1954)

50 năm điện nguyên tử (1954)

40 năm Internet ra đời từ mạng thông tin Quân đội Mỹ (1964)

40 năm điện ảnh sử dụng hình ảnh do máy tính tổng hợp lồng vào phim (1964)

40 năm truyền hình qua vệ tinh (1964)

30 năm tổng hợp được các hạt của phản vật chất (1974)

20 năm máy thu hình xách tay màn hình phẳng (1984)

20 năm đĩa video (1984)


*Kết quả :*

## BAO NHIÊU CÁCH CHỌN

***(THTT số 319, tháng 1 năm 2004)***

Rõ ràng số cách chọn của thí sinh đó không đúng, bởi vì trong số 6930 cách chọn 5 học sinh (HS) (có cả nam và nữ) có những cách chọn trùng nhau. Gọi 7 HS nam là $N_1, N_2, ..., N_7$ còn 6 HS nữ là $n_1, n_2, ..., n_6$. Chẳng hạn, giữa hai lần chọn của thí sinh ấy ta nối bằng nét gạch ngang thì những cách chọn sau được xem là trùng nhau :

1) $(N_2, n_1 - N_1, N_3, n_2)$ ; $(N_3, n_1 - N_1, N_2, n_2)$ ;
2) $(N_2, n_2 - N_1, N_3, n_1)$ ; $(N_3, n_2 - N_1, N_2, n_1)$

Tương tự cho các trường hợp khác (lưu ý rằng số cách chọn trùng nhau như thế cũng không bằng nhau). Có thể giải lại bài toán đã cho theo một trong hai cách sau :

• *Cách 1.* Xét 4 trường hợp nhóm 5 HS có số nam, nữ lần lượt là (4, 1), (1, 4), (3, 2), (2, 3). Số cách chọn là

$$C_7^4.C_6^1 + C_7^1.C_6^4 + C_7^3.C_6^2 + C_7^2.C_6^3 = 1260 \text{ (cách)}$$

• *Cách 2.* Số cách chọn 5 HS bất kì từ nhóm 13 HS là $C_{13}^5$.

Số cách chọn 5 HS toàn nam là $C_7^5$, số cách chọn 5HS toàn nữ là $C_6^5$.

Vậy số cách chọn 5HS theo yêu cầu đề bài là :

$$C_{13}^5 - (C_7^5 + C_6^5) = 1260 \text{ (cách)}$$

Các bạn có lời phân tích sai lầm tốt, giải lại đúng bài toán, gửi bài sớm về TS là : *Nguyễn Trọng Đại*, 11A, THPT Chu Văn An, **Lạng Sơn** ; *Vũ Thành Long*, 11 Toán, THPT Công nghiệp, Tx. Hòa Bình, **Hòa Bình** ; *Đinh Thị Minh Nguyệt*, 9C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nguyễn Quyết, 10A2, PTCT-T ĐH Vinh, **Nghệ An**.

NGỌC HIỀN

## CÁCH GIẢI HAY ?

***Bài toán :*** *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số*

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1}, \; x \in R$$

với một lời giải được đề xuất như sau :

Đưa hàm số trên về dạng

$$f(x) = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

Trong hệ trục tọa độ *Oxy*, xét các điểm $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ và $C(x, 0)$. Khi đó

$f(x) = CA + CB$. Vì $CA + CB \geq AB$, trong đó

$$AB = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{2}$$

Suy ra $\min f(x) = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{2}$.

Bài toán này giải bằng đại số rất khó khăn, nhưng giải bằng phương pháp hình học rất hay, có phải không các bạn ?

NGUYỄN THẾ SƠN
*(GV, THPT Hàn Thuyên, Bắc Ninh)*

---

10 năm khánh thành đường hầm xuyên biển Măngsơ (1994)

10 năm lập được bản đồ gen người (1994)

**Nhận xét.** Rất vui vì câu đố Ai biết nhiều hơn được nhiều bạn hưởng ứng. Do khuôn khổ báo, chỉ đăng những sự kiện chính của Việt Nam và các sự kiện chính của Khoa học Kĩ thuật thế giới.

Các bạn sau được nhận quà của Câu lạc bộ :

*Vũ Quốc Đạt*, 11 Lý, THPT chuyên **Hưng Yên**; *Nguyễn Thị Bình*, 12A, 12A, THPT Yên Dũng I, **Bắc Giang** ; *Đào Quang Diệu*, 12C6, THPT Hải Hậu C, **Nam Định** ; *Lê Thị Quế*, 12B, THPT Hoằng Hóa 2, **Thanh Hóa** ; *Nguyễn Viết Dũng*, 11B, THPT Hoàng Mai, Quỳnh Lưu, **Nghệ An**; *Nguyễn Minh Huy*, KC1 (?).

VŨ ĐỖ QUAN

## BAO NHIÊU ? Ở ĐÂU ?

Kì thi tuyển sinh đại học sắp đến rồi. Bạn nào biết nhiều về hệ thống các trường đại học nước ta ? Bạn hãy trả lời các câu hỏi sau nhé :

- Nước ta có bao nhiêu trường đại học, học viện ? (các đại học Quốc gia, đại học khu vực chỉ tính là một đơn vị ; không tính các trường sĩ quan trong câu hỏi này)

- Những tỉnh, thành nào có đặt các trường đại học, học viện ?

- Bạn hãy kể tên những tỉnh, thành có từ 2 trường đại học, học viện trở lên.

Thời hạn nhận câu trả lời là 2 tháng. Chờ câu trả lời của các bạn.

BÍNH NAM HÀ

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

NĂM THỨ 41
Số 322 (4-2004)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

# TRONG SỐ NÀY



*Tổng biên tập :*
NGUYỄN CẢNH TOÀN

*Chịu trách nhiệm xuất bản :*
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NXB Giáo dục
NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NXB Giáo dục
VŨ DƯƠNG THỤY

*Trưởng ban biên tập :* NGUYỄN VIỆT HẢI.
*Trị sự :* VŨ ANH THƯ.
*Biên tập :* VŨ KIM THỦY, HỒ QUANG VINH.
*Trình bày :* NGUYỄN THỊ OANH.
*Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Q. 5, Tp. Hồ Chí Minh.* ĐT : 08.8309049

## ĐÓN ĐỌC THTT SỐ 323 (5/2004)

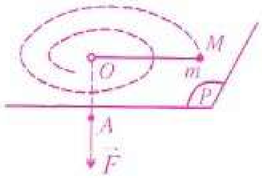
- Đánh giá cận để giải một lớp phương trình lượng giác
- Chuỗi và ứng dụng để nghiên cứu dãy số
- Bài toán xếp tiền kim loại
- Hướng dẫn giải Đề tự ôn thi ĐH, CĐ số 3. Đề tự ôn thi số 5.
- Hướng dẫn giải đề Toán thi tuyển sinh vào lớp 10, THPT Chu Văn An và Hà Nội - Amsterdam.
- Giới thiệu phần Hình học không gian ở SGK lớp 8 (tiếp)

**THTT**

Nhà giáo NGUYỄN QUANG HẬU sinh ngày 2 tháng 3 năm 1937 tại Đào Du, xã Phùng Chí Kiên, Mỹ Hào, Hưng Yên, hiện ở Z8, Bách Khoa Hà Nội, từng dạy ĐH Bách Khoa, Hà Nội, ĐH Công nghiệp nhẹ Việt Trì, Trưởng ban biên tập sách Vật lí, NXB Giáo dục. Ông là tác giả và dịch giả của nhiều sách Vật lí cho học sinh phổ thông.

Xuất hiện trên tạp chí Toán học và Tuổi trẻ những năm gần đây, ông thường đăng các đề Vật lí trong chuyên mục Đề ra kì này.

## CÁC ĐỀ VẬT LÍ *(Tiếp trang 14)*

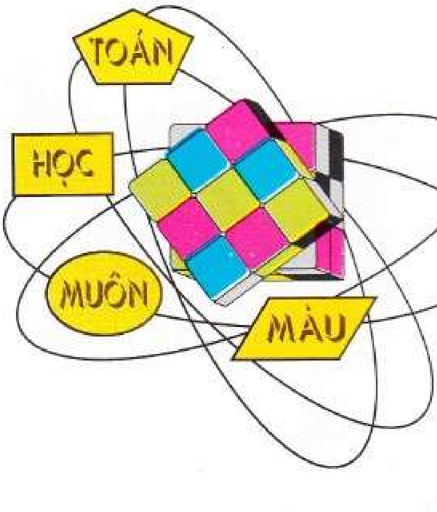



**Bài L1/322.** Trên mặt bàn nằm ngang nhẵn $P$ có một quả cầu nhỏ khối lượng $m$ được buộc vào một sợi dây không dãn $MOA$. Sợi dây xuyên qua lỗ $O$ (hình vẽ). Đầu $A$ của dây chịu tác dụng lực $\vec{F}$ sao cho $A$ chuyển động thẳng đứng đi xuống với vận tốc không đổi. Hãy tìm biểu thức của lực căng của sợi dây phụ thuộc vào khoảng cách $OM = r$, biết rằng lúc đầu quả cầu cách $O$ một đoạn $OM = r_0$ và đoạn dây $OM$ có vận tốc góc là $\omega_0$.

NGUYỄN QUANG HẬU
*(Hà Nội)*

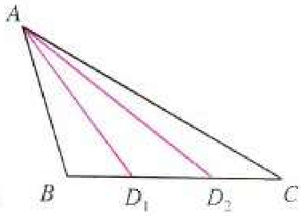
**Bài L2/322.** Một lực không đổi $\vec{F}$ bắt đầu tác dụng lên một vật đang chuyển động với vận tốc $\vec{v}$. Sau khoảng thời gian $\Delta t$ độ lớn vận tốc của vật giảm 2 lần. Cũng sau khoảng thời gian $\Delta t$ tiếp theo, độ lớn vận tốc lại giảm 2 lần. Hãy xác định độ lớn vận tốc của vật sau khoảng thời gian $3\Delta t$ kể từ khi lực $\vec{F}$ bắt đầu tác dụng lên vật.

NGUYỄN NHẬT MINH
*(Hà Nội)*




## PHÂN CHIA TAM GIÁC THÀNH CÁC TAM GIÁC

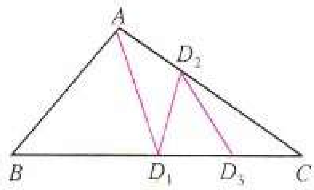
Cho tam giác $ABC$. Kẻ đoạn thẳng $AD_1$ ($D_1$ nằm trong đoạn $BC$) không vuông góc với $BC$ thì trong hai góc $\widehat{AD_1B}$, $\widehat{AD_1C}$ có một góc nhọn một góc tù.




Hình 1

Nếu $\Delta ABC$ có góc $B$ tù thì khi kẻ $n-1$ đoạn $AD_1$, $AD_2$, ..., $AD_{n-1}$ với $D_1$, $D_2$, ..., $D_{n-1}$ nằm trong $BC$ ta phân chia tam giác $ABC$ thành $n$ tam giác tù (rời nhau) (hình 1 ứng với $n = 3$).

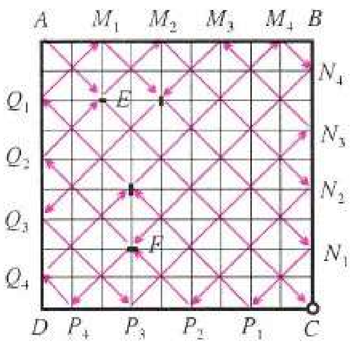
Nếu $\Delta ABC$ có ba góc nhọn hoặc góc $A$ không nhọn, thì ta luôn luôn kẻ được $2n$-1 đoạn thẳng (đoạn thẳng thứ nhất xuất phát từ $A$) để phân chia được $\Delta ABC$ thành $2n$ tam giác, trong đó có $n$ tam giác nhọn và $n$ tam giác tù (hình 2 ứng với $n = 2$).




Hình 2

### *Dành cho bạn đọc*

Bạn có thể phân chia một tam giác $ABC$ với góc $A$ tù thành ít nhất bao nhiêu tam giác nhọn ? Hãy giải thích vì sao không thể ít hơn thế.




Hình 3

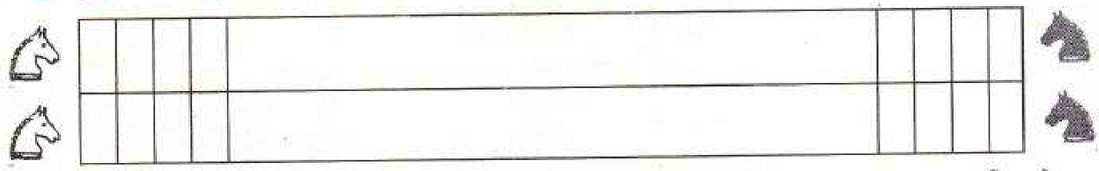
### *Giải đáp :* BẮN BI TRÊN BÀN HÌNH VUÔNG

*(THTT số 319 tháng 1/2004)*

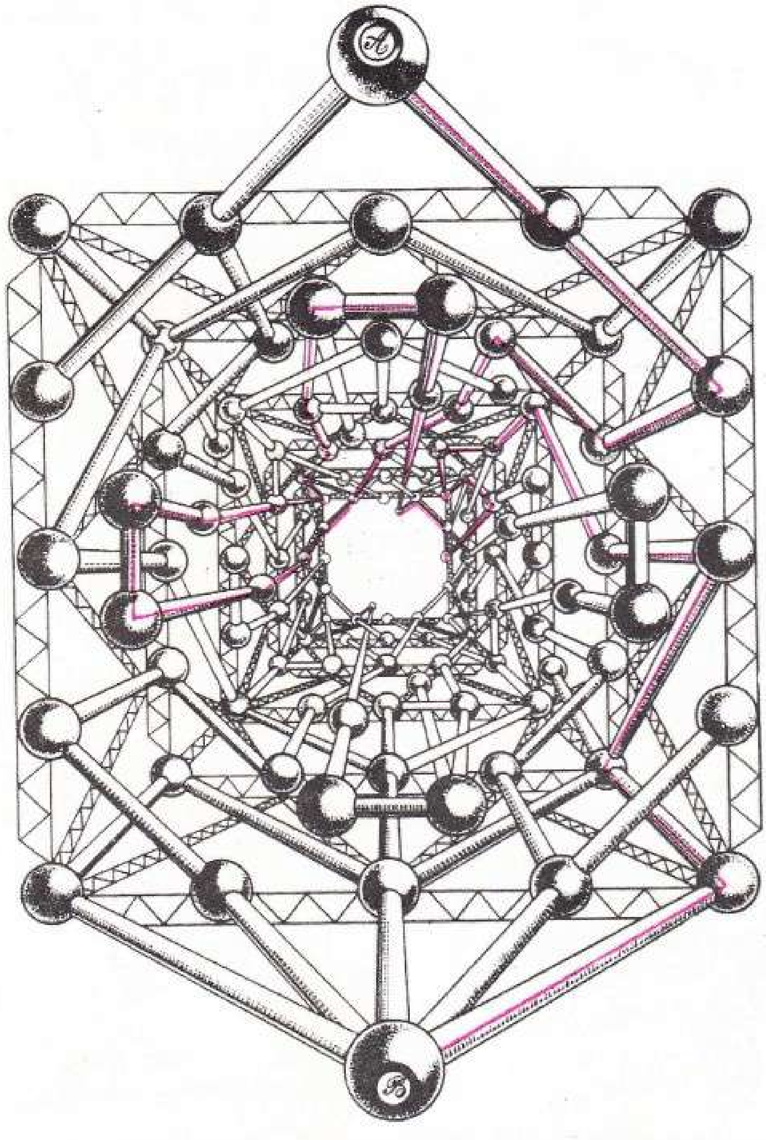
*(Xem tiếp trang 24)*


# ĐƯỜNG ĐUA 2004

Hai con đường song song với nhau, mỗi đường có 2004 phiến đá lát dùng để đua ngựa. Từ phía Tây hai tráng sĩ cưỡi ngựa trắng nhằm phi về phía Đông. Từ phía Đông hai tráng sĩ cưỡi ngựa đen phi về phía Tây. Ngựa trắng và ngựa đen lần lượt thay nhau chạy, mỗi lần chỉ một con ngựa sẽ đi từ 1 đến 10 phiến đá ngay trước mặt trên con đường của mình. Nếu bên ngựa trắng đi trước, bạn có cách nào cho ngựa đen thắng nếu quy ước đến lượt không còn đường đi (gặp ngựa đối phương ngay trước mặt) là thua.



VŨ ĐÔ QUAN



*Giải đáp :*

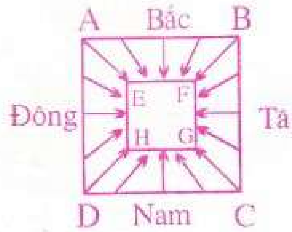
## DI CHUYỂN THEO TỌA ĐỘ

Để viết lệnh cho gọn ta kí hiệu Đông là Đ, Tây là T, Nam là N, Bắc là B, Thẳng là Th, Lên là L, Xuống là X, nếu không lên không xuống thì bỏ trống.

Lệnh đúng hướng dẫn đi từ *A* đến *B* như sau :

(T, L) → (TN, ) → (Th, L) → (ĐB, ) → (Th, L) → (Đ, L) → (Đ, L) → (ĐN, ) → (N, X) → (N, X) → (Th, X) → (B, ) → (Th, L) → (B, L) → (B, L) → (Th, X) → (T, X) → (Th, X) → (T, X) → (T, ) → (Th, L) → (Th, L) → (T, X) → (TN, ) → (N, ) → (B, X) → (B, L) → (Th, L) → (Đ, X) → (T, ) → (Th, X) → (N, X) → (Th, X) → (N, L) → (Th, X) → (Đ, X)
↘ (Đ, X) → (Th, X)

Để viết lệnh chuẩn xác các bạn cần chú ý các điều sau :




• Hình tháp được nhìn từ dưới lên trên nên các hướng được xác định phải như hình vẽ trên.

(Xem tiếp trang 25)

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT24M4
Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 187B phố Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2004
Giá : 3400 đồng
Ba nghìn bốn trăm đồng