https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

14

TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

8 2016
Số 470

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 53
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

"A person who can, within a year, solve $x^2 - 92y^2 = 1$, is a mathematician."

Brahmagupta

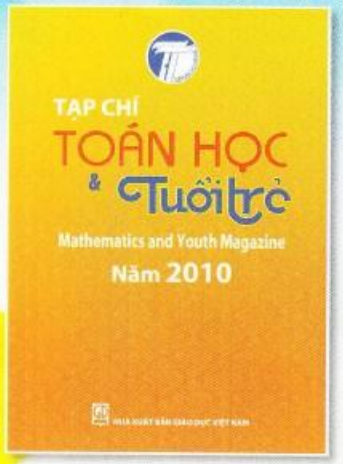
https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

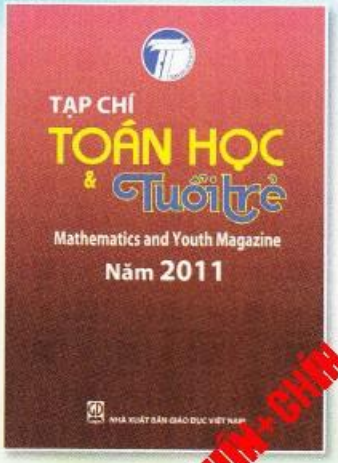
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

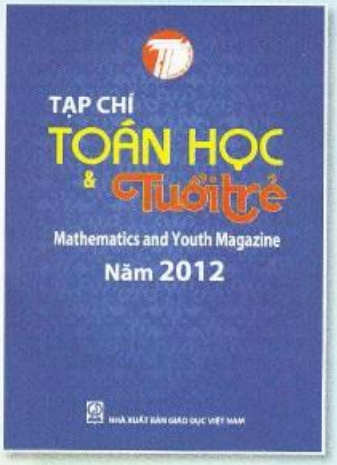
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng

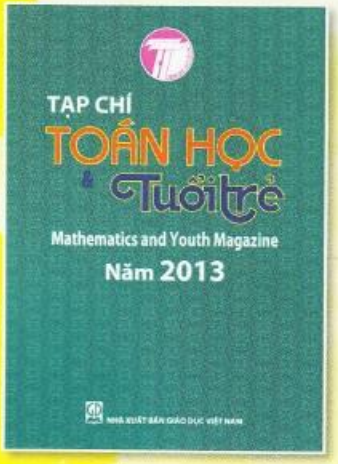


Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 1[illegible].000 đồng

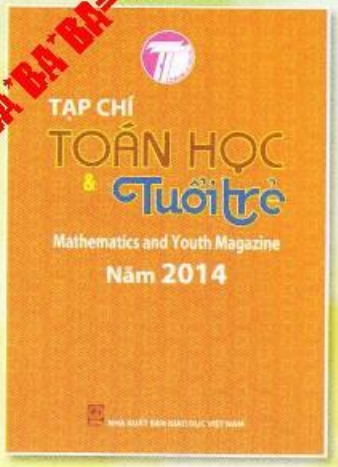


Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng

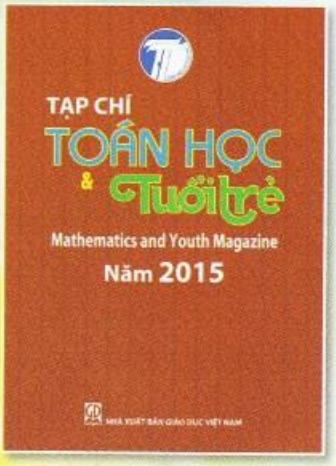
BA*BA*BA=CHÍN+CHÍN



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Bạn đọc có thể đặt mua các cuốn Đóng tập này tại các cơ sở BƯU ĐIỆN trên toàn quốc hoặc đặt mua tại Tòa soạn.

Mọi chi tiết xin liên hệ: TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
187B GIẢNG VÕ, ĐỐNG ĐA, HÀ NỘI

- Điện thoại – Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

ỨNG DỤNG VỀ TÍNH CHẤT CỦA DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

VŨ HỮU CHÍN
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Các bài toán về tính chất dãy tỉ số bằng nhau, học sinh được học ở năm học lớp 7. Các bài toán về dãy tỉ số bằng nhau được ứng dụng nhiều trong việc giải các bài toán thực tế. Việc lựa chọn cách giải tuỳ thuộc vào giả thiết của từng bài toán giúp cho học sinh biết cách làm các bài toán tương tự, đồng thời củng cố các kiến thức cơ bản mà học sinh đã được học.

Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau là:

Cho n tỉ số bằng nhau: $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=....=\frac{a_n}{b_n}$ thì

$$\frac{a_k}{b_k}=\frac{a_1+a_2+a_3+.....+a_n}{b_1+b_2+b_3+....+b_n}$$

$$=\frac{x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3+.....+x_na_n}{x_1b_1+x_2b_2+x_3b_3+....+x_nb_n},$$

$n\in\mathbb{N},\ n\ge 2,\ x_i\ne 0,\ i,\ k\in\{1,2,3,...,n\}$.

DẠNG 1. VẬN DỤNG TÍNH CHẤT DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU ĐỂ TÌM CÁC GIÁ TRỊ

Bài toán 1.1. *Cho x, y, z thỏa mãn* $\frac{2}{x}=\frac{3}{y}=\frac{1}{z}$. *Tìm x, y, z trong các trường hợp:*

a) $2x-3y+4z=5$. b) $x^2y^2z^2=36$.

Lời giải.

a) *Cách* 1. Từ $\frac{2}{x}=\frac{3}{y}=\frac{1}{z}\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$.

Đặt $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}=k\Rightarrow x=2k, y=3k, z=k$.

Thay vào $2x-3y+4z=5$, suy ra:

$$2.2k-3.3k+4k=5\Leftrightarrow k=-5$$

Do đó: $x=-10, y=-15, z=-5$.

Cách 2. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau có

$$\frac{2}{x}=\frac{3}{y}=\frac{1}{z}=\frac{4}{2x}=\frac{9}{3y}=\frac{4}{4z}=\frac{4-9+4}{2x-3y+4z}=\frac{-1}{5}.$$

Suy ra: $x=-10, y=-15, z=-5$.

b) *Cách* 1. Từ $\frac{2}{x}=\frac{3}{y}=\frac{1}{z}\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$.

Đặt $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}=k\Rightarrow x=2k, y=3k, z=k$.

Thay vào $x^2y^2z^2=36$ ta được:

$$(2k)^2(3k)^2k^2=36\Leftrightarrow k^6=1\Leftrightarrow k=\pm1.$$

• Với $k=1$, suy ra: $x=2, y=3, z=1$.

• Với $k=-1$, suy ra: $x=-2, y=-3, z=-1$.

Vậy các cặp $(x;y;z)$ là $(2;3;1),(-2;-3;-1)$.

Cách 2. Từ $\frac{2}{x}=\frac{3}{y}=\frac{1}{z}\Rightarrow\frac{4}{x^2}=\frac{9}{y^2}=\frac{1}{z^2}$

$$\Rightarrow\left(\frac{4}{x^2}\right)^3=\frac{4}{x^2}.\frac{9}{y^2}.\frac{1}{z^2}=\frac{36}{x^2.y^2.z^2}=\frac{36}{36}=1.$$

Suy ra $\left(\frac{4}{x^2}\right)^3=1\Leftrightarrow\frac{4}{x^2}=1\Leftrightarrow x=\pm2$.

• Với $x=2$, suy ra $y=3, z=1$.

• Với $x=-2$, suy ra $y=-3, z=-1$.

Nhận xét. Trong phần a), phần b) cách 1 đặt dãy tỉ số bằng nhau bằng k, rồi rút x, y, z theo k. Sau đó thay vào đề bài. Trong cách 2 sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau thì sẽ nhanh hơn.

Bài toán 1.2. *Tìm cặp số x, y thoả mãn:*

$$\frac{5x+3}{9}=\frac{3y-8}{5}=\frac{5x+9y-21}{8x}.$$

Lời giải: *Cách* 1.

• Xét $5x+9y-21=0$, thì $x=-\frac{3}{5}, y=\frac{8}{3}$ thỏa mãn đề bài.

• Xét $5x+9y-21\ne0$, thì $x\ne-\frac{3}{5}, y\ne\frac{8}{3}$. Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{5x+3}{9}=\frac{3y-8}{5}=$

$$=\frac{9y-24}{15}=\frac{5x+9y-21}{24}=\frac{5x+9y-21}{8x}$$

Suy ra: $x=3, y=6$. Vậy các cặp $(x;y)$ là:

$\left(-\frac{3}{5};\frac{8}{3}\right)$, $(3;6)$.

Cách 2. Đặt $\frac{5x+3}{9}=\frac{3y-8}{5}=\frac{5x+9y-21}{8x}=k$.

BA BA BA=CHÍN+CHÍN

Suy ra: $5x = 9k - 3$, $3y = 5k + 8$, $5x + 9y - 21 = 8kx$
$\Rightarrow 8k(x-3) = 0 \Rightarrow k = 0$ hoặc $x = 3$.

Với $k = 0$, suy ra $(x; y) = \left(-\frac{3}{5}; \frac{8}{3}\right)$.

Với $x = 3$, suy ra $(x; y) = (3; 6)$.

Vậy các cặp $(x; y)$ là: $\left(-\frac{3}{5}; \frac{8}{3}\right)$, $(3; 6)$.

Nhận xét. Trong cách giải 1, áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau dễ xảy ra sai sót là xét thiếu trường hợp. Cách giải 2 đã khắc phục được khả năng xét thiếu trường hợp.

Bài toán 1.3. *Tìm x, y, z biết:*

$$\frac{x}{y+z+1} = \frac{y}{x+z+1} = \frac{z}{x+y-2} = x+y+z.$$

Lời giải. Xét $x = 0$, từ đề bài suy ra $y = z = 0$.
Bộ $(x; y; z)$ là $(0; 0; 0)$ thỏa mãn.
Xét $x \neq 0 \Rightarrow y, z, x+y+z \neq 0$. Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{y+z+1} = \frac{y}{x+z+1} = \frac{z}{x+y-2} = x+y+z$$

$$= \frac{x+y+z}{(y+z+1)+(x+z+1)+(x+y-2)} = \frac{x+y+z}{2(x+y+z)} = \frac{1}{2}$$

(vì $x+y+z \neq 0$).

Do đó $x+y+z = 0,5$, thay kết quả này vào đề bài ta được :

$$\frac{x}{0,5-x+1} = \frac{y}{0,5-y+1} = \frac{z}{0,5-z-2} = 0,5$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{1,5-x} = \frac{y}{1,5-y} = \frac{z}{-1,5-z} = 0,5.$$

Vậy bộ (x, y, z) là : $(0; 0; 0)$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

BA*BA*BA=CHÍN+CHÍN+CHÍN

Nhận xét. Trong lời giải trên xét trường hợp $x = 0$, từ đó tìm được bộ giá trị $(x; y; z)$. Sau đó xét trường hợp $x \neq 0$. Trong quá trình giải bài toán 1.3, một số em hay xét thiếu trường hợp $x = 0$.

Bài toán 1.4. *Cho* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$ *và* $2x = -3y = 4z$.
Tìm x, y, z.

Lời giải. *Cách* 1. Từ $2x = -3y = 4z$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\frac{1}{x}} = \frac{-3}{\frac{1}{y}} = \frac{4}{\frac{1}{z}} = \frac{2-3+4}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = \frac{3}{3} = 1$$

Suy ra: $2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$; $-3y = 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$;

$4z = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{4}$. Vậy bộ (x, y, z) là $\left(\frac{1}{2}; \frac{-1}{3}; \frac{1}{4}\right)$.

Cách 2. Đặt $2x = -3y = 4z = \frac{1}{k}$

$\Rightarrow \frac{1}{x} = 2k, \frac{1}{y} = -3k, \frac{1}{z} = 4k$. Thay vào $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$, suy ra $2k - 3k + 4k = 3 \Leftrightarrow k = 1$.

Suy ra: $x = \frac{1}{2}, y = \frac{-1}{3}, z = \frac{1}{4}$.

Nhận xét. Trong cách giải 1 cần xuất hiện dãy tỉ số bằng nhau phù hợp để kết hợp với điều kiện đề bài. Từ đó vận dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau để giải bài toán. Cách giải 2 đặt dãy tỉ số bằng nhau bằng $\frac{1}{k}$, từ đó biểu diễn x, y, z theo k để giải bài toán.

Bài toán 1.5. *Tìm các số x, y, z thoả mãn:*

$$\frac{xy}{2y+4x} = \frac{yz}{4z+6y} = \frac{zx}{6x+2z} = \frac{x^2+y^2+z^2}{2^2+4^2+6^2}.$$

Lời giải.

• Xét $x = 0$, từ đề bài suy ra $y = z = 0$. Suy ra $2y + 4x = 0$ (vô lí).

• Do đó $x, y, z \neq 0$, từ đề bài suy ra

$$\frac{2y+4x}{xy} = \frac{4z+6y}{yz} = \frac{6x+2z}{zx} = \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x} + \frac{4}{y} = \frac{4}{y} + \frac{6}{z} = \frac{6}{z} + \frac{2}{x} = \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2} \quad (1)$$

Suy ra $\frac{2}{x} = \frac{4}{y} = \frac{6}{z} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{y} = \frac{3}{z}$.

Từ (1) suy ra $2.\frac{2}{x} = 2.\frac{4}{y} = 2.\frac{6}{z} = \frac{2^2(1^2+2^2+3^2)}{x^2+y^2+z^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{y} = \frac{3}{z} = \frac{1^2+2^2+3^2}{x^2+y^2+z^2} \quad (2).$$

Đặt $\frac{1}{x} = \frac{2}{y} = \frac{3}{z} = k$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{1^2}{x^2} = \frac{2^2}{y^2} = \frac{3^2}{z^2} = \frac{1^2+2^2+3^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

Thay vào (2) suy ra:

$$k = k^2 \Leftrightarrow k(k-1) = 0 \Leftrightarrow k - 1 = 0 \overset{\text{do } k \neq 0}{\Leftrightarrow} k = 1.$$

Suy ra $x = 1, y = 2, z = 3$.

Nhận xét. Trong lời giải bài toán trên cần xét trường hợp $x = 0$ và $x \neq 0$, từ đó xuất hiện dãy tỉ số bằng nhau đơn giản hơn. Vận dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau để giải bài toán.

DẠNG 2. TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

Bài toán 2.1. *Cho tỉ lệ thức:*

$$\frac{x+y}{x+z} = \frac{x-y}{x-z} \quad (x \neq \pm z;\ x \neq 0;\ z \neq 0)$$

Tính $M = \frac{2014y^2 + 2015yz + 2016z^2}{2015y^2 + 2016yz + 2017z^2}$.

Lời giải. Từ tỉ lệ thức

$$k=\frac{x+y}{x+z}=\frac{x-y}{x-z}=\frac{(x+y)+(x-y)}{(x+z)+(x-z)}=\frac{2x}{2x}=1.$$

$\Rightarrow x+y=x+z\Rightarrow y=z$. Do đó

$$M=\frac{2014y^2+2015yy+2016y^2}{2015y^2+2016yy+2017y^2}=\frac{6045y^2}{6048y^2}=\frac{2015}{2016}.$$

Nhận xét. Trong bài toán trên có thể thay đề bài bằng việc tính giá trị biểu thức M bằng việc so sánh M với 1.

Bài toán 2.2. *Cho* $x=\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}$, $(a,b,c\neq 0)$. *Tính* $A=(x^2-x+1)^{10}$.

Lời giải.

• Xét $a+b+c=0$, nên $a+b=-c$.

Suy ra $x=\frac{a+b}{c}=\frac{-c}{c}=-1$.

Do đó $A=(1^2+1+1)^{10}=3^{10}=59049$.

• Xét $a+b+c\neq 0$. Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $x=\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}$

$$=\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{c+a+b}=\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2$$

Suy ra $A=(2^2-2+1)^{10}=3^{10}=59049$.

Vậy trong mọi trường hợp đều có $A=59049$.

Nhận xét. Trong khi giải bài toán trên nếu vận dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau phải xét đủ các trường hợp.

Bài toán 2.3. *Cho dãy tỉ số bằng nhau:*

$$\frac{2x+y+z+t}{x}=\frac{x+2y+z+t}{y}=\frac{x+y+2z+t}{z}=\frac{x+y+z+2t}{t}.$$

Tính giá trị biểu thức:

$$P=\frac{x+y}{z+t}+\frac{y+z}{t+x}+\frac{z+t}{x+y}+\frac{t+x}{y+z}.$$

Lời giải. *Cách* 1. Từ giả thiết, ta có

$$\frac{x+y+z+t}{x}=\frac{x+y+z+t}{y}=\frac{x+y+z+t}{z}=\frac{x+y+z+t}{t}.$$

• Nếu $x+y+z+t\neq 0$ thì $x=y=z=t$, khi đó

$$P=1+1+1+1=4.$$

• Nếu $x+y+z+t=0$ thì $x+y=-(z+t)$; $y+z=-(t+x)$; $z+t=-(x+y)$; $t+x=-(y+z)$.

Khi đó $P=(-1)+(-1)+(-1)+(-1)=-4$.

Vậy $P=4$ hoặc $P=-4$.

Cách 2. Đặt

$$\frac{2x+y+z+t}{x}=\frac{x+2y+z+t}{y}=\frac{x+y+2z+t}{z}=\frac{x+y+z+2t}{t}=k.$$

Suy ra $2x+y+z+t=kx$; $x+2y+z+t=ky$;

$x+y+2z+t=kz$; $x+y+z+2t=kt$.

Cộng các đẳng thức có:

$$5(x+y+z+t)=k(x+y+z+t)$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z+t)(k-5)=0$$

• Nếu $x+y+z+t\neq 0$ thì $k=5$, suy ra

$x+y+z+t=4x=4y=4z=4t$,

$\Leftrightarrow x=y=z=t$, khi đó $P=1+1+1+1=4$.

• Nếu $x+y+z+t=0$ thì $x+y=-(z+t)$;

$y+z=-(t+x)$; $z+t=-(x+y)$; $t+x=-(y+z)$.

Khi đó $P=(-1)+(-1)+(-1)+(-1)=-4$.

Vậy $P=4$ hoặc $P=-4$.

Nhận xét. Bài toán trên đưa ra 2 cách giải. Trong cách giải 1 vận dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, cần chú ý xét đủ các trường hợp.

Bài toán 2.4. *Cho* $x,y,z>0$ *và dãy tỉ số bằng nhau:*

$$\frac{2y+z-x}{x}=\frac{2z-y+x}{y}=\frac{2x+y-z}{z}.$$

Tính $P=\frac{(3x-2y)(3y-2z)(3z-2x)}{(3x-z)(3y-x)(3z-y)}$.

Lời giải. Từ giả thiết

$$\frac{2y+z-x}{x}=\frac{2z-y+x}{y}=\frac{2x+y-z}{z}$$

$$=\frac{2x+2y+2z}{x+y+z}=\frac{y+3z}{x+y}=\frac{x+3y}{x+z}=\frac{z+3x}{y+z}=2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y+3z=2x+2y\\x+3y=2x+2z\\z+3x=2y+2z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3z-2x\\x=3y-2z\\z=3x-2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=3z-y\\2z=3y-x\\2y=3x-z\end{cases}$$

$$\Rightarrow P=\frac{(3x-2y)(3y-2z)(3z-2x)}{(3x-z)(3y-x)(3z-y)}=\frac{x.z.y}{2y.2z.2x}=\frac{1}{8}$$

Nhận xét. Trong quá trình giải bài toán trên cần vận dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau một cách phù hợp khi kết hợp 2 hoặc 3 tỉ số bằng nhau.

(Kỳ sau đăng tiếp)

BA*BA*BA=CHÍN+CHÍN+CHÍN

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 Trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội NĂM HỌC 2016 - 2017

(*Đề thi đăng trên TH&TT số 469, tháng 7 năm 2016*)

VÒNG 1

Câu I. 1) Hệ PT tương đương với

$$\begin{cases}(x+y)(x^2+y^2)=4\\(xy+1)(x^2+y^2)=4\end{cases}.$$

Suy ra $x+y=1+xy \Leftrightarrow (x-1)(y-1)=0.$

- Trường hợp

$$\begin{cases}x=1\\(xy+1)(x^2+y^2)=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\(y+1)(1+y^2)=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y^3+y^2+y-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\(y-1)(y^2+2y+3)=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=1,\ y=1.$

- Trường hợp $\begin{cases}y=1\\(xy+1)(x^2+y^2)=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}.$

Đáp số. $x=1,\ y=1.$

2) ĐK: $-\frac{2}{7}\le x\le 5.$ PT đã cho tương đương với

$$\frac{8x-3}{\sqrt{7x+2}+\sqrt{5-x}}=\frac{8x-3}{5}$$

$$\Leftrightarrow (8x-3)\left[\frac{1}{\sqrt{7x+2}+\sqrt{5-x}}-\frac{1}{5}\right]=0.$$

- Ta có nghiệm $x=\frac{3}{8}.$
- Giải: $\sqrt{7x+2}+\sqrt{5-x}=5$

$\Leftrightarrow 6x+7+2\sqrt{(7x+2)(5-x)}=25$

$\Leftrightarrow \sqrt{-7x^2+33x+10}=9-3x\ \ (x\le 3)$

$\Leftrightarrow -7x^2+33x+10=9x^2-54x+81$

$\Leftrightarrow 16x^2-87x+71=0 \Leftrightarrow x=1,\ x=\frac{71}{16}$ (loại).

Đáp số. $x=1,\ x=\frac{3}{8}.$

Câu II. 1) Nếu $m=0$ thì hệ vô nghiệm.

Xét $m\ne 0$, từ hệ suy ra $\begin{cases}xy^2=3-\frac{2}{m}\\x^2+y^2=6-\frac{2}{m}\end{cases}.$

Suy ra $xy^2+3=x^2+y^2 \Leftrightarrow (x-1)y^2=x^2-3.$

Vì $x=1$ không là nghiệm của PT nên PT tương đương với $y^2=\frac{x^2-3}{x-1} \Leftrightarrow y^2=x+1-\frac{2}{x-1}.$

Suy ra $\frac{2}{x-1}$ số nguyên, nên $x-1\in\{\pm1,\ \pm2\}.$

- $x-1=1\Rightarrow x=2,\ y^2=1\Rightarrow xy^2=2\Rightarrow \frac{2}{m}=1\Rightarrow m=2.$
- $x-1=-1\Rightarrow x=0,\ y^2=3$ (loại).
- $x-1=2\Rightarrow x=3,\ y^2=3$ (loại).
- $x-1=-2\Rightarrow x=-1,\ y^2=1$

$$\Rightarrow xy^2=-1\Rightarrow \frac{2}{m}=4\Rightarrow m=\frac{1}{2}.$$

Đáp số. $m=2,\ m=\frac{1}{2}.$

2) Ta có $\frac{a^2+b^2}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0$

Suy ra $\frac{a^4+b^4}{2}\ge\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^4.$

- Ta có

$$5=1^2+2^2=x^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2^2}{y^2}\right)+(y^2-x^2)\frac{2^2}{y^2}$$

$$\Rightarrow 5\ge 2x^2\left(\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}}{2}\right)^2+(y^2-x^2)\frac{2^2}{y^2}$$

$$\ge 2x^2+y^2-x^2=x^2+y^2\ \ (1)$$

- Ta có

$$17=1^4+2^4=x^4\left(\frac{1^4}{x^4}+\frac{2^4}{y^4}\right)+(y^4-x^4)\frac{2^4}{y^4}$$

$$\Rightarrow 17\ge 2x^4\left(\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}}{2}\right)^4+(y^4-x^4)\frac{2^4}{y^4}$$

$$\ge 2x^4+y^4-x^4=x^4+y^4\ \ (2)$$

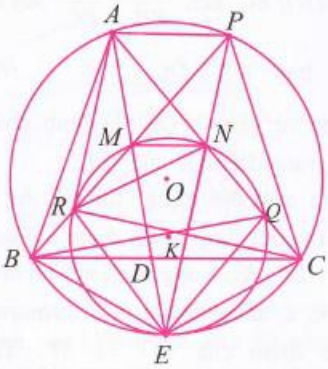
Từ (1) và (2) suy ra

$x^4+y^4+x^2+y^2=x^2(1+x^2)+y^2(1+y^2)\le 22.$

Đáp số. $\max P=22$ khi $x=1,\ y=2.$

BA*BA*BA=CHÍN+CHÍN+CHÍN

Câu III.



1) Ta có $\widehat{MPN} = \widehat{BAE} = \widehat{CAE}$ suy ra tứ giác $APNM$ nội tiếp. Từ đó $\widehat{ANM} = \widehat{APM} = \widehat{ACB}$ suy ra $MN // BC$ nên N là trung điểm của AC.

2) Từ $MN // BC$ và tứ giác $MNQE$ nội tiếp suy ra $\widehat{MEQ} = \widehat{MNA} = \widehat{ACB} = \widehat{AEB}$ nên $\Delta AEB = \Delta AEQ$ (g.c.g). Từ đó dễ thấy B, Q đối xứng nhau qua AE.

3) Tương tự như phần 2), ta có

$$\widehat{REN} = \widehat{PMN} = \widehat{PBC} = \widehat{PEC}$$

suy ra $\Delta PRE = \Delta PCE$ (g.c.g) nên R, C đối xứng nhau qua PE. Từ đó $NR = NC = NA$, suy ra $\widehat{ARC} = 90^\circ$.

Câu IV.

• Giả sử $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{100}$ là một hoán vị tùy ý của các số 1, 2, 3, ..., 100. Ta chia thành 10 nhóm, mỗi nhóm 10 số hạng liên tiếp

$S_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_{10}$, $S_2 = x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{20}, \ldots,$

$S_{10} = x_{91} + x_{92} + \cdots + x_{100}$.

Ta có $\sum_{i=1}^{10} S_i = \sum_{i=1}^{100} x_i = \sum_{i=1}^{100} i = \frac{100.101}{2} = 5050$

nên có ít nhất một $S_i \geq \frac{5050}{10} = 505$.

Vậy $a = 505$ là một số "đẹp".

• Ta xét một hoán vị đặc biệt 100, 1, 99, 2, 98, 3, ..., 51, 50, khi đó tổng 10 số liên tiếp hoặc bằng 505 (nếu số đầu tiên là lớn nhất) hoặc bằng 500 (nếu số đầu là số nhỏ nhất) suy ra nếu $a > 505$ thì a không là số "đẹp". Vậy đáp số $\max a = 505$.

VÒNG 2

Câu I. 1) Hệ PT đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 5 & (1) \\ (x+2y)(4xy+5) = 1 & (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2) suy ra

$$(x+2y)(x^2+4xy+4y^2) = 1$$

$$\Rightarrow (x+2y)^3 = 1 \Rightarrow x + 2y = 1.$$

Ta thu được hệ

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ xy = -1 \end{cases} \Rightarrow y(1-2y) = -1$$

$$\Rightarrow 2y^2 - y - 1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1,\ x = -1 \\ y = -\frac{1}{2},\ x = 2. \end{array}\right.$$

Đáp số. $(x, y) \in \left\{(-1, 1); \left(2, \frac{-1}{2}\right)\right\}$.

2) PT đã cho tương đương với

$$(5x^2 + 6x + 6)\sqrt{5x^2 + 6x + 5} = 64x^3 + 4x$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{5x^2+6x+5}\right)^3 + \sqrt{5x^2+6x+5} = (4x)^3 + 4x$$

Chú ý rằng $a^3 + a = b^3 + b \Leftrightarrow a = b$.

Vậy $\sqrt{5x^2+6x+5} = 4x$ $(x \geq 0)$

$\Leftrightarrow 5x^2 + 6x + 5 = 16x^2 \Leftrightarrow 11x^2 - 6x - 5 = 0$

$x = 1, x = \frac{-5}{11}$ (loại).

Đáp số. $x = 1$.

Câu II. 1) Từ giả thiết đề bài có

$3x^2 - 2y^2 = 1 \Rightarrow 3x^2 - 2y^2 \equiv 1 \pmod 8$,

$3x^2 - 2y^2 \equiv 1 \pmod 5$.

Vì $\begin{cases} x^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 8 \\ y^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 8 \end{cases}$

suy ra $\begin{cases} 3x^2 \equiv 0,\ 3,\ 4 \pmod 8 \\ 2y^2 \equiv 0,\ 2 \pmod 8 \end{cases}$

nên $3x^2 - 2y^2 \equiv 0,\ 6,\ 3,\ 4,\ 1,\ 2 \pmod 8$. Do đó

$$3x^2 - 2y^2 \equiv 1 \pmod 8$$

$\Leftrightarrow x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod 8 \Leftrightarrow x^2 - y^2 \vdots 8$

Vì $\begin{cases} x^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 5 \\ y^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 5 \end{cases}$

suy ra $\begin{cases} 3x^2 \equiv 0,\ 3,\ 2 \pmod 5 \\ 2y^2 \equiv 0,\ 2,\ 3 \pmod 5 \end{cases}$

nên $3x^2 - 2y^2 \equiv 0,\ 3,\ 2,\ 1,\ 4 \pmod 5$.

Do đó $3x^2 - 2y^2 \equiv 1 \pmod 5$

BẠ*BẠ*BẠ=CHÍN+CHÍN+CHÍN

$\Leftrightarrow x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod 5 \Leftrightarrow x^2 - y^2 \vdots 5.$

Mà $(5, 8) = 1$ nên ta có $x^2 - y^2 \vdots 40.$

2) Đẳng thức đã cho tương đương với

$(x^2+1)^2 = (y+1)(y^2-y+1)$. Vì

$y^2 - y + 1 = (y+1)^2 - 3(y+1) + 3$ suy ra nếu d là ước số chung lớn nhất của $y+1$, y^2-y+1 thì d là ước của 3. Suy ra d nhận một trong hai giá trị $1, 3$.

Mà $x^2 \equiv 0, 1 \pmod 3$ suy ra

$x^2 + 1 \equiv 1, 2 \pmod 3$ nên $d \neq 3$.

Suy ra $d = 1 \Rightarrow y+1, y^2-y+1$ nguyên tố cùng nhau.

Vì $(y+1)(y^2-y+1)$ là số chính phương, suy ra $y+1$, y^2-y+1 là các số chính phương. Ta ký hiệu $y+1 = a^2$, $y^2-y+1 = b^2$, $a, b \in \mathbb{N}$.

Do đó $4y^2 - 4y + 4 = 4b^2 \Leftrightarrow (2b)^2 - (2y-1)^2 = 3$

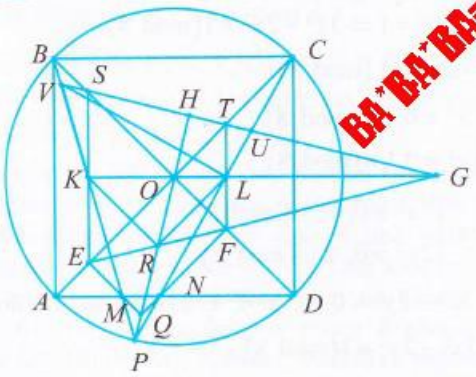
$\Leftrightarrow (2b - 2y + 1)(2b + 2y - 1) = 3.$

Vì $2b - 2y + 1 + 2b + 2y - 1 = 4b \geq 0$ (do ta chọn $b \geq 0$) suy ra

- $\begin{cases} 2b + 2y - 1 = 3 \\ 2b - 2y + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow a^2 = 2$ (loại).
- $\begin{cases} 2b + 2y - 1 = 1 \\ 2b - 2y + 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow y = 0,\ x = 0.$

Đáp số. $x = 0$, $y = 0$.

Câu III



1) Vì ΔCND vuông tại D nên L là trung điểm của NC và O là trung điểm AC suy ra $OL // AD$, tương tự $OK // AD$, vậy O, K, L thẳng hàng.

2) Gọi Q là giao điểm của EM và PO. Ta có tam giác EAM vuông cân tại E nên $\widehat{EMA} = 45^\circ$.

Do đó $\widehat{EMA} = \widehat{BDA} = 45^\circ$ suy ra $MQ // BO$.

Tương tự $NF // CO$. Ta có $\dfrac{PM}{PB} = \dfrac{PQ}{PO}$.

Mặt khác $MN // BC$ nên $\dfrac{PM}{PB} = \dfrac{PN}{PC}$ suy ra

$\dfrac{PN}{PC} = \dfrac{PQ}{PO}$ hay $QN // OC$. Vậy Q, N, F thẳng hàng. Từ đó tứ giác $OFQE$ là hình chữ nhật nên PO đi qua trung điểm R của EF.

3) Theo tính chất đối xứng thì ST, EF, KL đồng quy tại G (trường hợp P là điểm chính giữa cung AD thì ST, EF, KL song song với nhau nên dễ suy ra U, V, K, L cùng thuộc một đường tròn). Gọi H là giao điểm của PO và ST. Theo 2) thì $RO = RF$ và $LO = LF$ nên RL là phân giác của $\widehat{FRO}$ mà GL là phân giác của $\widehat{TGR}$. Từ đó L là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác GHR mà $\widehat{RLG} = 135^\circ$ suy ra $\widehat{RHG} = 90^\circ$. Vậy $UV \perp PO$.

Ta có tam giác OPC cân tại O nên

$$\widehat{OPC} = \widehat{OCP} = \widehat{ABP} = \widehat{VKS}.$$

Mà $\widehat{HPU} + \widehat{VUL} = 90^\circ$, $\widehat{SKO} = 90^\circ$ nên

$$\widehat{VUL} + \widehat{VKL} = 180^\circ.$$

Do đó U, [illegible], L cùng thuộc một đường tròn.

Câu IV. Dãy $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_s$ chiều dài $s \geq 3$ tùy ý được gọi là dãy "*tốt*" nếu $a_j \neq \dfrac{a_i + a_k}{2}$ với mọi chỉ số (i, j, k) thỏa mãn $(1 \leq i < j < k \leq s)$.

Nếu dãy $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_s$ là dãy tốt thì dãy $2a_1, 2a_2, 2a_3, \ldots, 2a_s$ và dãy $2a_1 - 1, 2a_2 - 1, 2a_3 - 1, \ldots, 2a_s - 1$ cũng là dãy tốt.

Từ nhận xét trên ta suy ra nếu dãy $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_s$ là dãy tốt của các số $1, 2, 3, \ldots, s$ $(s \geq 3)$ thì dãy $2x_1, 2x_2, 2x_3, \ldots, 2x_s, 2x_1 - 1, 2x_2 - 1, \ldots, 2x_s - 1$ là dãy tốt của các số $1, 2, 3, \ldots, 2s$ (chú ý rằng $\dfrac{2x_k + 2x_m - 1}{2}$ không là số nguyên).

- $(1, 3, 2)$ là dãy tốt của các số $1, 2, 3$.
- Với $n \geq 3$ luôn tồn tại k để $3 \cdot 2^{k-1} < n \leq 3 \cdot 2^k$. Theo nhận xét trên, ta xây dựng được dãy tốt từ các số $1, 2, 3, \ldots, 3.2^k$ sau đó ta bỏ đi các số $n+1, n+2, n+3, \ldots, 3 \cdot 2^k$ chúng ta nhận được dãy tốt từ các số $1, 2, 3, \ldots, n$ (trên dãy tốt ta bỏ đi các số hạng bất kỳ thì dãy còn lại vẫn là dãy tốt).

NGUYỄN VŨ LƯƠNG - PHẠM VĂN HÙNG
(GV Trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

BA*BA*BA=CHÍN+CHÍN+CHÍN

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI
NĂM HỌC 2016 - 2017

VÒNG 1

(*Thời gian làm bài*: 120 *phút, dành cho mọi thí sinh thi vào Trường chuyên*)

Câu 1 (2 *điểm*). Cho biểu thức

$$P=\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}-\frac{1}{a}\right)$$

với $0 < a < 1$. Chứng minh rằng $P = -1$.

Câu 2 (2,5 *điểm*). Cho parabol (P): $y = -x^2$ và đường thẳng d: $y = 2mx - 1$ với m là tham số.

a) Tìm toạ độ giao điểm của d và (P) khi $m = 1$.

b) Chứng minh rằng với mỗi giá trị của m, d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Gọi y_1, y_2 là tung độ của A và B. Tìm m sao cho

$$\left|y_1^2-y_2^2\right|=3\sqrt{5}.$$

Câu 3 (1,5 *điểm*). Một người đi xe máy từ địa điểm A đến địa điểm B cách nhau 120km. Vận tốc trên $\frac{3}{4}$ quãng đường AB đầu không đổi, vận tốc trên $\frac{1}{4}$ quãng đường AB sau bằng $\frac{1}{2}$ vận tốc trên $\frac{3}{4}$ quãng đường AB đầu. Khi đến B, người đó nghỉ 30 phút và trở lại A với vận tốc lớn hơn vận tốc trên $\frac{3}{4}$ quãng đường AB đầu tiên lúc đi là 10km/h. Thời gian kể từ lúc xuất phát tại A đến khi xe trở về A là 8,5 giờ. Tính vận tốc của xe máy trên quãng đường người đó đi từ B về A?

Câu 4 (3 *điểm*). Cho ba điểm A, M, B phân biệt, thẳng hàng và M nằm giữa A, B. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB, dựng hai tam giác đều AMC và BMD. Gọi P là giao điểm của AD và BC.

a) Chứng minh $AMPC$ và $BMPD$ là các tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $\sqrt{CP.CB}+\sqrt{DP.DA}=AB$.

c) Đường thẳng nối tâm của hai đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác $AMPC$ và $BMPD$ cắt PA, PB tương ứng tại E, F. Chứng minh $CDFE$ là hình thang.

Câu 5 (1 *điểm*). Cho a, b, c là ba số thực không âm và thoả mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{5a+4}+\sqrt{5b+4}+\sqrt{5c+4}\geq 7.$$

BA BÁ BA=CHÍN+CHÍN+CHÍN

VÒNG 2

(*Thời gian làm bài*: 150 *phút, dùng cho thí sinh thi vào chuyên Toán và chuyên Tin*)

Câu 1 (1,5 *điểm*). Chứng minh biểu thức sau nhận giá trị nguyên dương với mọi giá trị nguyên dương của n:

$$P=\left(\sqrt{n^2+(n+1)^2}+\sqrt{(n-1)^2+n^2}\right)\sqrt{4n^2+2-2\sqrt{4n^2+1}}.$$

Câu 2 (2,5 *điểm*)

a) Tìm các số nguyên dương x, y thoả mãn:

$$x^3-y^3=95(x^2+y^2).$$

b) Tìm các số thực x, y thoả mãn:

$$\frac{x^2-4}{x}+\frac{y^2-4}{y}+8=4\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right).$$

Câu 3 (2 *điểm*). Cho S là tập các số nguyên dương n có dạng $n = x^2 + 3y^2$, trong đó x, y là các số nguyên. Chứng minh rằng

a) Nếu $a, b \in S$ thì $ab \in S$.

b) Nếu $N \in S$ và N chẵn thì N chia hết cho 4 và $\frac{N}{4}\in S$.

Câu 4 (3 *điểm*). Cho tam giác ABC nhọn, $AB < AC$. Kẻ đường cao AH. Đường tròn (O) đường kính AH cắt các cạnh AB, AC tương ứng tại D và E. Đường thẳng DE cắt đường thẳng BC tại S.

a) Chứng minh $BDEC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $SB \,.\, SC = SH^2$.

c) Đường thẳng SO cắt AB, AC tương ứng tại M và N, đường thẳng DE cắt HM, HN tương ứng tại P và Q. Chứng minh rằng BP, CQ và AH đồng quy.

Câu 5 (1 *điểm*). Giả sử mỗi điểm của mặt phẳng được tô bởi một trong ba màu xanh, đỏ, vàng. Chứng minh rằng tồn tại ba điểm cùng màu là ba đỉnh của một tam giác cân.

NGUYỄN THANH HỒNG
(*GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội*) ***giới thiệu***

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC PHỔ THÔNG

MỘT CÁCH TRÌNH BÀY SƠ CẤP VỀ HƯỚNG TRONG MẶT PHẲNG

(Không dùng chiều quay kim đồng hồ)

ĐOÀN QUỲNH (*Hà Nội*)

Mẹo vặt: Không dùng đồng hồ vẫn biết được hai góc định hướng có cùng hướng.

Nhắc lại rằng mỗi góc định hướng gốc O trong mặt phẳng là một cặp tia (có thứ tự) gốc O. Sau đây chỉ xét góc định hướng gốc O mà hai tia của nó không cùng phương (không cùng nằm trên đường thẳng). Để xem hai góc định hướng gốc O như thế là (Ox,Oy), (Ou,Ov) có cùng hướng ta thường dùng đồng hồ, xem khi quay theo con đường ngắn nhất từ Ox đến Oy và từ Ou đến Ov thì các quay đó có cùng chiều hay cùng ngược chiều quay kim đồng hồ (để trên mặt phẳng).

Mất đồng hồ, làm sao biết (Ox,Oy), (Ou,Ov) cùng hướng hay khác hướng ?

Gọi s là phép đối xứng trục biến Ox thành Ou thì ta có: (Ox,Oy) và (Ou,Ov) cùng hướng khi và chỉ khi s biến nửa mặt phẳng chứa Oy với bờ là đường thẳng chứa Ox thành nửa mặt phẳng không chứa Ov với bờ là đường thẳng chứa Ou (h.1). Nói cách khác để dễ vẽ hình ta làm như sau:

Hình 1

Vẽ một đường tròn (C) tâm O. Trên (C), mỗi nửa đường tròn có hai mút, bỏ đi một mút, giữ lại mút A thì tập điểm còn lại được gọi là nửa đường tròn gốc A. Mỗi điểm A của (C) xác định hai nửa đường tròn gốc A, chúng có chung một điểm duy nhất A. Giả sử các tia Ox, Oy, Ou, Ov cắt (C) theo thứ tự tại X, Y, U, V. Khi đó:

Cách 1: Nếu s là phép đối xứng trục với trục là đường thẳng qua O, s biến X thành U thì hai góc (Ox, Oy), (Ou, Ov) cùng hướng khi và chỉ khi s biến nửa đường tròn gốc X chứa Y thành nửa đường tròn gốc U không chứa V (h.2).

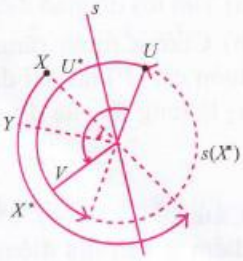
Cách 2: (phát biểu một cách "hình học" hơn và chi tiết hơn cách 1) Kí hiệu X^* là nửa đường tròn gốc X chứa Y, U^* là nửa đường tròn gốc U chứa V thì hai góc (Ox,Oy), (Ou,Ov) cùng hướng khi và chỉ khi có 1 trong 4 điều kiện:

1) $X^* = U^*$;

2) $X^* \cap U^* = \varnothing$;

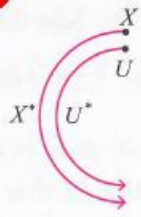
3) $X \in U^*$, $U \notin X^*$;

4) $X \notin U^*$, $U \in X^*$.

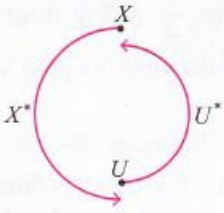


Hình 2

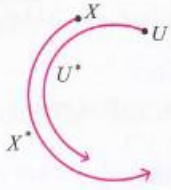
(2 điều kiện đầu rất dễ thử! 2 điều kiện sau nên dùng hình để kiểm tra!) (h 3,4,5,6).



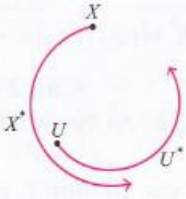
Hình 3



Hình 4



Hình 5



Hình 6

Chú ý: Nếu cho phép dùng trực giác (nhưng vẫn không dùng trực giác chiều quay của kim đồng hồ), để xét xem góc định hướng giữa hai tia không cùng phương (Ox, Oy) có hướng dương ("ngược chiều quay kim đồng hồ"), ta hãy:

- Đứng hướng mặt về phía tia Ox (coi mặt phẳng chứa Ox, Oy nằm ngang) thì tia Oy nằm trong nửa

BA*BA BA=CHÍN+CHÍN+CHÍN

mặt phẳng bờ Ox về phía tay trái của ta.

- Hoặc đặt gáy cuốn sách đang mở dọc Ox theo hướng Ox (dòng dưới lên dòng trên theo hướng Ox) thì Oy nằm ở trang trái cuốn sách.

Chắc độc giả còn nhiều cách khác ?

Bây giờ chúng ta tiếp tục nội dung này với với lập luận chặt chẽ hơn (xem thêm [1], [2]).

1. Với mỗi tia Ox, kí hiệu Ox^* là nửa mặt phẳng với bờ là đường thẳng Ox, bỏ đi tia đối của tia Ox (tức là hợp của tia mở $Ox\setminus\{O\}$ với một nửa mặt phẳng mở với bờ là đường thẳng Ox). Ox^* gọi là **nửa phẳng với tia khởi đầu *Ox*.**

Mỗi tia Ox xác định hai nửa phẳng với tia khởi đầu Ox, giao của chúng là tia mở $Ox\setminus\{O\}$.

2. Ox^* gọi là **cùng hướng** với Ox'^*, viết $Ox^* \sim Ox'^*$, nếu có một trong bốn điều kiện:

1) $Ox^* = Ox'^*$;

2) $Ox^* \cap Ox'^* = \varnothing$;

3) $Ox\setminus\{O\} \subset Ox'^*$, $Ox'\setminus\{O\} \not\subset Ox^*$;

4) $Ox\setminus\{O\} \not\subset Ox'^*$, $Ox'^*\setminus\{O\} \subset Ox^*$.

Chứng minh rằng đó là một quan hệ tương đương trong tập hợp các nửa phẳng với tia khởi đầu gốc O:

Cách 1: Tính phản xạ, đối xứng suy ra trực tiếp từ định nghĩa, dễ chứng minh tính truyền ứng nhờ hình vẽ (chủ yếu chỉ cần xét 2 trường hợp).

Cách 2: Cắt bởi đường tròn (C) tâm O thì nửa phẳng với tia khởi đầu Ox trở thành hợp nửa đường tròn mở của (C) với một điểm mút của nó và hình vẽ trở nên đơn giản hơn (và cũng có thể xây dựng hướng của mặt phẳng tại O nhờ các nửa đường tròn này; cách xây dựng này gần với xây dựng nhờ" đồng hồ"! (xem lại cách 2 nói trong "Mẹo vặt");

3. Quan hệ tương đương nói trên có đúng hai lớp tương đương. Mỗi lớp tương đương đó gọi là một **hướng của mặt phẳng tại *O*** (chọn một hướng tại O có nghĩa là với mỗi tia Ox, chọn một nửa phẳng Ox^* sao cho với mọi Ox, Ox', Ox^* cùng hướng với Ox'^*).

Hướng của mặt phẳng là họ hướng tại mọi điểm O của mặt phẳng bất biến qua phép tịnh tiến tùy ý của mặt phẳng (tức là phép tịnh tiến biến tia Ox thành tia $O'x'$ thì biến nửa phẳng thuộc hướng tại O thành nửa phẳng thuộc hướng tại O'). Cho một nửa phẳng với tia khởi đầu Ox thì nó thuộc một và chỉ một hướng của mặt phẳng.

Có thể chứng minh rằng phép đối xứng qua đường thẳng Δ đi qua điểm O đảo hướng tại O (tức biến lớp tương đương các nửa phẳng xác định hướng tại O thành lớp tương đương kia) bằng cách xét từng trường hợp tia Op ($Op\setminus\{O\}$ là giao của Δ với Ox^*) tạo với Ox góc hình học $\widehat{xOp}$ có số đo 0, số đo gồm giữa 0 và $\pi/2$, số đo $\pi/2$, số đo gồm giữa $\pi/2$ và π; từ đó phép dời hình thuận (hợp thành của một số chẵn đối xứng trục (tịnh tiến, quay) bảo tồn hướng của mặt phẳng còn phép dời hình nghịch (hợp thành của một số lẻ đối xứng trục) thì đảo hướng của mặt phẳng). Cũng từ cách chứng minh trên dễ suy ra sự tương đương của hai cách 1, 2 trong "mẹo vặt".

(Về trực giác, ta thường dùng **hướng xác định bởi nửa phẳng trái** (mà dùng trực giác "đồng hồ" ta thường gọi định hướng ngược chiều quay kim đồng hồ) như trình bày trong phần mở đầu "Mẹo vặt": đặt gáy sách đang mở dọc theo Ox, dòng cuối lên dòng trên theo hướng của Ox, thì Ox^* là nửa phẳng của trang bên trái; do hướng của mặt phẳng bất biến qua dời hình thuận nên định nghĩa đó là thỏa đáng tức chẳng hạn hướng đó không phụ thuộc phép dời hình thuận đưa cuốn sách để định hướng đi đâu tùy ý).

4. Nhắc lại **góc định hướng gốc *O*** trong mặt phẳng là cặp có thứ tự tia (Ox, Oy).

Khi Ox, Oy không cùng nằm trên đường thẳng (tức là Ox, Oy không cùng phương, nói cách khác là $Oy \neq \pm Ox$, $+Ox$ là Ox, $-Ox$ là tia đối của tia Ox), có đúng một nửa phẳng với tia khởi đầu Ox mà chứa $Oy\setminus\{O\}$. Hai góc định hướng (Ox,Oy), (Ox',Oy') ($Oy \neq \pm Ox$, $Oy' \neq \pm Ox'$) gọi là **cùng hướng** nếu nửa phẳng Ox^* mà chứa $Oy\setminus\{O\}$ cùng hướng với nửa phẳng Ox'^* mà chứa $Oy'\setminus\{O\}$. Hai góc định hướng khác đỉnh (Ox, Oy), ($O'x'$, $O'y'$) ($Oy \neq \pm Ox$, $O'y' \neq \pm O'x'$) gọi là **cùng hướng** nếu phép tịnh tiến với vectơ $\overrightarrow{O'O}$ đưa ($O'x'$,$O'y'$) thành góc cùng hướng với (Ox, Oy).

Khi đã có hướng tại O thì góc định hướng (Ox, Oy) ($Oy \neq \pm Ox$) gọi là **có hướng dương** nếu nửa phẳng Ox^* mà chứa $Oy\setminus\{O\}$ thuộc hướng tại O (và gọi là

BA BA BA=CHÍN+CHÍN+CHÍN

có **hướng âm** nếu nửa phẳng Ox^* mà chứa $Oy\setminus\{O\}$ không thuộc hướng tại O).

Phép dời hình thuận biến góc định hướng có hướng dương (âm) thành góc định hướng có hướng dương (âm) , phép dời hình nghịch biến góc định hướng có hướng dương (âm) thành góc định hướng có hướng âm (dương).

5. Khi đã có hướng tại O thì mỗi góc định hướng (Ox, Oy) có một số đo gọi là **số đo chính** kí hiệu $\text{sđ}_0(Ox, Oy)$ xác định như sau:

$\text{sđ}_0(Ox, Ox) = 0$; $\text{sđ}_0(Ox, -Ox) = \pi$; khi $Oy \neq \pm Ox$,

$\text{sđ}_0(Ox, Oy) = \pm\,\text{sđ}\,\widehat{xOy}$, lấy dấu cộng hay trừ tuỳ (Ox, Oy) có hướng dương hay âm.

(Góc định hướng (Ox, Ox) còn gọi là góc định hướng 0, $(Ox,-Ox)$ còn gọi là góc định hướng bẹt. Ta không đề cập đến hướng của chúng).

Khi mặt phẳng đã có hướng, hai góc định hướng (Ox,Oy), $(O'x', O'y')$ gọi là **bằng nhau** nếu chúng có các số đo chính bằng nhau; khi đó số đo chính cho ta một song ánh từ tập các góc định hướng trong mặt phẳng sai khác bằng nhau đến nửa khoảng $(-\pi, \pi]$.

6. Ta đã biết rằng nếu tia Oy nằm trong góc hình học xOz thì $\text{sđ}\,\widehat{xOy} + \text{sđ}\,\widehat{yOz} = \text{sđ}\,\widehat{xOz}$ (*). Để mở rộng phép cộng đó cho các tia tùy ý, khi đã có hướng tại O, ta qui ước mỗi góc định hướng (Ox, Oy) có **vô số số đo là**

$$\text{sđ}(Ox, Oy) = \text{sđ}_0(Ox, Oy) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ tùy ý};$$

Hiệu hai số đo tùy ý của một góc định hướng là một bội của 2π: ta nói số đo của góc định hướng xác định sai khác $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ hay modulo 2π. Khi đó với ba tia tùy ý Ox, Oy, Oz ta có **hệ thức Chasles** về số đo của các góc định hướng gốc O là

$$\text{sđ}(Ox,Oz) + \text{sđ}(Oz,Oy) = \text{sđ}(Ox,Oy) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

hoặc viết dạng hoán vị vòng quanh:

$$\text{sđ}(Ox,Oy) + \text{sđ}(Oy,Oz) + \text{sđ}(Oz,Ox) = 0 \bmod 2\pi.$$

Chứng minh: Dễ thử trong trường hợp $Ox = Oy$;

Để xét trường hợp $Oy = -Ox$, chú ý rằng với mọi tia Ou, Ov, ta có $\text{sđ}(Ou,-Ov) = \pi + \text{sđ}(Ou,Ov) \bmod 2\pi$.

Còn trường hợp Ox, Oy không cùng nằm trên đường thẳng, nếu Oz nằm trong nửa mặt phẳng bờ Ox chứa Oy, chỉ cần xét khi Oz thuộc miền góc hình học xOy và khi Oz thuộc miền góc hình học tạo bởi Oy và $-Ox$, để ý rằng khi hai tia Ou, Ov không cùng nằm trên đường thẳng, nếu tia Ow nằm trong miền góc hình học uOv (kể cả khi Ow trùng với Ou hay Ov), ta luôn có

$$\text{sđ}(Ou,Ow) + \text{sđ}(Ow,Ov) = \text{sđ}(Ou,Ov) \bmod 2\pi,$$

suy ra từ (*); còn nếu Oz nằm trong nửa mặt phẳng bờ Ox không chứa Oy thì đổi Oz thành $-Oz$).

Như thế là nếu mặt phẳng đã có hướng thì hai góc định hướng (Ox,Oy), $(O'x',O'y')$ bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cùng số đo modulo 2π.

7. Khi đã có hướng tại O thì **phép quay tâm O với góc quay** là góc định hướng cho trước gốc O là biến đổi của mặt phẳng biến O thành O, biến M khác O thành M' sao cho $OM' = OM$ và góc định hướng (OM, OM') bằng góc định hướng đã cho. Mỗi lớp góc định hướng gốc O bằng nhau hoàn toàn được xác định bởi số đo modulo 2π của chúng; tập các số này làm thành một nhóm (cộng) là nhóm $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Vậy coi cộng hai lớp góc định hướng bằng nhau là cộng các số đo modulo 2π của chúng thì các lớp góc định hướng bằng nhau này làm thành một nhóm kí hiệu nhóm $\boldsymbol{A}$ đẳng cấu nhóm $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Mặt khác kí hiệu $\boldsymbol{Q}$ là nhóm nhân (phép nhân ở đây là hợp thành) các phép quay tâm O. Cho hai tia Ox, Oy thì có một và chỉ một phép quay tâm O biến Ox thành Oy nên hệ thức Chasles chứng tỏ nhóm (cộng) $\boldsymbol{A}$ đẳng cấu nhóm $\boldsymbol{Q}$.

Dễ thấy mỗi phép quay tâm O bảo tồn sự bằng nhau của góc định hướng và từ đó suy ra khi mặt phẳng đã có hướng, hai góc định hướng bằng nhau nếu và chỉ nếu có phép dời hình thuận biến góc này thành góc kia. Khi mặt phẳng đã có hướng, đôi khi hai góc định hướng (Ox, Oy), $(O'x', O'y')$ gọi là hai **góc đối** (nhau) nếu một góc có một số đo bằng số đối của một số đo của góc kia. Khi đó phép dời hình nghịch biến mỗi góc định hướng thành một góc đối của nó.

8. Khi đã có hướng tại O thì mỗi góc định hướng (Ox,Oy) cùng với một số đo của góc đó gọi là một **góc lượng giác gốc O**; số này gọi là **số đo** và góc

BA BỘ BA=CHÍN+CHÍN+CHÍN

định hướng (Ox,Oy) gọi là **hình biểu diễn của góc lượng giác đó**.

Mỗi số thực là số đo của một góc lượng giác mà hình biểu diễn xác định sai khác bằng nhau. Vậy có thể xem góc lượng giác là một cặp $(\alpha, p(\alpha))$, α là một số thực, $p: \mathbb{R} \to \boldsymbol{A}$, $p(\alpha)$ bằng lớp tất cả góc định hướng nhận α làm một số đo. Rõ ràng p là một toàn cấu nhóm. Khi đã có hướng tại O, vạch đường tròn đơn vị S^1 tâm O và lấy một điểm A cố định trên đường tròn đó (còn gọi là đường tròn lượng giác) thì điểm M thuộc S^1 cùng với một số đo của góc định hướng (OA, OM) xác định một góc lượng giác gốc O; M gọi là **điểm biểu diễn góc lượng giác đó**. Mỗi số thực là số đo của một góc lượng giác mà điểm biểu diễn M hoàn toàn xác định. Cũng có thể xem góc lượng giác là một cặp phần tử $(\alpha, q(\alpha))$, α là một số thực, $q: \mathbb{R} \to S^1$, $q(\alpha) = M$, sao cho một số đo của góc định hướng (OA, OM) bằng α.

Cho trước số α, đôi khi cũng nói phép quay tâm O góc α là phép quay tâm O với góc quay là góc định hướng $p(\alpha)$; khi đó chẳng hạn phép quay tâm O góc $-\pi$ cũng là phép quay tâm O góc π, và đó là phép đối xứng qua tâm O.

9. Về góc định hướng giữa hai đường thẳng:

Cặp có thứ tự hai đường thẳng d, d' đi qua điểm O gọi là một **góc định hướng gốc O giữa hai đường thẳng**, kí hiệu (d, d'). Giả sử đã có hướng tại O. Khi hai đường thẳng đó phân biệt và không vuông góc với nhau, lấy một tia $Ox \subset d$ thì có duy nhất một tia $Oy \subset d'$ sao cho sđ $\widehat{xOy} < \frac{\pi}{2}$; nếu nửa phẳng Ox^* chứa $Oy \setminus \{O\}$ thuộc hướng tại O thì nói (d, d') có **hướng dương**, có **số đo chính** là $m_0(d,d') =$ sđ$\widehat{xOy}$; nếu nửa phẳng Ox^* chứa $Oy \setminus \{O\}$ không thuộc hướng tại O thì nói (d, d') có **hướng âm**, có **số đo chính** là $m_0(d, d') = -$sđ $\widehat{xOy}$ (không đề cập hướng của góc (d, d') mà d, d' vuông góc (góc vuông) cũng như của góc (d, d) (góc 0)).. Số đo chính của (d, d) (góc 0) là 0, số đo chính của góc vuông là $\frac{\pi}{2}$ (các điều trên không phụ thuộc Ox đã chọn). Mỗi góc định hướng (d, d') có **vô số số đo** là $m(d, d') = m_0(d, d') + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ tùy ý. Khi đó,với hai tia Ox, Ox' tùy ý theo thứ tự nằm trên d, d' thì $m(d, d') =$ sđ$(Ox, Ox') \bmod \pi$.

Cho ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 qua O ta có hệ thức Chasles: $m(d_1, d_2) + m(d_2, d_3) = m(d_1, d_3) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Giả sử mặt phẳng đã có hướng. Hai góc định hướng giữa các cặp đường thẳng (cắt nhau) (d_1, d'_1), (d_2, d'_2) gọi là **bằng nhau** nếu chúng có số đo chính bằng nhau, tức có các số đo bằng nhau modulo π; khi đó chúng bằng nhau nếu và chỉ nếu có phép dời hình thuận biến d_1 thành d_2, d'_1 thành d'_2. Số đo chính xác định một song ánh từ tập các lớp bằng nhau của các góc định hướng giữa các cặp đường thẳng qua O đến nửa khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Phép dời hình thuận bảo tồn hướng của các góc định hướng giữa các cặp đường thẳng (khác 0, không vuông), bảo tồn sự bằng nhau của các góc định hướng giữa các cặp đường thẳng. Phép dời hình nghịch làm đảo hướng của các góc định hướng giữa các cặp đường thẳng (khác 0, không vuông).

Cho tam giác ABC trong mặt phẳng đã có hướng thì các góc định hướng giữa các tia (AB, AC), (CA, CB), (BC, BA) có cùng hướng nhưng các góc định hướng giữa các cặp đường thẳng đó (nếu không có cặp nào vuông góc) không chắc có cùng hướng.

Cho ba điểm phân biệt A, B, C trên đường tròn tâm O thì $2m(CA, CB) =$ sđ$(OA, OB) \bmod 2\pi$, nên: Cho hai điểm phân biệt A, B trong mặt phẳng đã có hướng thì quĩ tích các điểm M (khác A, B) sao cho góc định hướng giữa các tia (MA, MB) bằng một góc định hướng (giữa các tia) khác 0, khác bẹt cho trước là một cung tròn (không kể hai mút A, B), còn quĩ tích các điểm M (khác A, B) sao cho góc định hướng giữa các đường thẳng (MA, MB) bằng một góc định hướng (giữa các đường thẳng) khác 0 cho trước là một đường tròn đi qua A, B (nhưng không kể A, B) ....

Tài liệu tham khảo

[1]. Đoàn Quỳnh (CB). *Đại số 10 nâng cao, Tài liệu chuyên Đại số 10*. NXB Giáo dục Việt Nam, 2010.

[2]. Đoàn Quỳnh (CB). *Tài liệu chuyên Hình học 11*. NXB Giáo dục Việt Nam, 2010.

BA*BA BA=CHÍN+CHÍN+CHÍN

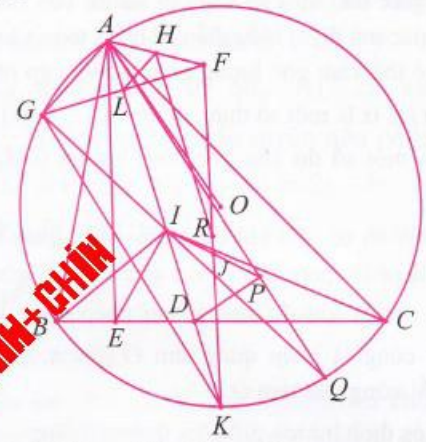
PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC TRONG THỰC HÀNH GIẢI TOÁN

TRẦN QUANG HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Đối xứng trục là một phép biến hình quan trọng trong nhóm các phép dời hình. Khi đối xứng trục kết hợp với những mô hình hình học khác nhau sẽ tạo ra những bài toán khá thách thức trong việc giải. Khi ta định nghĩa về đường trung trực đoạn thẳng là ta có thể hiểu được về đối xứng trục. Phép đối xứng trục được giới thiệu lần đầu tiên trong chương trình hình học lớp 8 ở Việt Nam và sau đó một lần nữa được giới thiệu hệ thống hơn cùng với các tính chất trong trương trình hình học lớp 11. Mặc dù đối xứng trục được định nghĩa rất đơn giản, xong chính vì tính đơn giản của nó mà khi áp dụng trong những mô hình và tình huống khác nhau ta có thể thu được những bài toán thú vị. Những bài toán trong bài viết này hướng tới một đối tượng khá rộng, những bạn học sinh THCS học tới tứ giác nội tiếp là hoàn toàn có thể hiểu lời giải, xong để tìm tòi ra hướng giải và cách giải thì các bạn cần có nền kiến thức cao hơn. Chúng tôi viết bài này dựa trên quan điểm là sử dụng một phép biến hình trong giải toán, điều đó có nghĩa là chúng tôi cố gắng nhấn mạnh tính chất của phép biến hình thông qua các bất biến của nó khi ta sử dụng nó. Mặc dù với một phép dời hình như đối xứng trục mà thể hiện rõ được các tính chất bất biến trong giải toán là khá khó khăn vì bất biến của các phép dời hình sinh ra từ việc giữ nguyên khoảng cách nên đôi khi ta dễ bị lẫn các bất biến đó trong các tính chất hình thông thường. Chúng ta hãy đi sâu và phân tích một số ví dụ cụ thể sau.

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có tâm đường tròn nội tiếp là I. AI cắt BC tại D và cắt (O) tại K khác A. Lấy P sao cho $DP \perp AO$. AP cắt (O) tại Q khác A. QI cắt (O) tại G khác Q. J là trung điểm của IP. L là hình chiếu vuông góc của G lên AD. Trung trực của KL cắt KJ tại R. Lấy điểm H sao cho $LH \parallel AG$ và $RH \parallel AD$. Chứng minh rằng H luôn thuộc một đường tròn cố định khi P thay đổi.*

Lời giải



Gọi E là điểm đối xứng với P qua AD thì E thuộc BC và $\widehat{EAB} = \widehat{PAC}$. Dễ thấy GK chia đôi EI. Vậy qua phép đối xứng trục AD thì KJ và KG đối xứng nhau qua KA. Từ đó gọi GL cắt KJ tại F thì L là trung điểm GF. Suy ra H là trung điểm AF. Do F và G đối xứng qua AD nên F di chuyển trên ảnh đối xứng của (O) qua AD. H là trung điểm AF và A cố định nên H thuộc một đường tròn cố định.

Nhận xét. *Việc sử dụng đối xứng trục AD đóng vai trò quan trọng trong việc tìm ra điểm F là điểm đối xứng của G qua AD. Bài toán GK chia đôi đoạn EI là bài toán 2 thi IMO năm 2010 nổi tiếng. Từ đó ta thu được đường tròn cố định.*

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC với trực tâm là H. Tam giác DEF đối xứng với tam giác ABC qua một đường thẳng d bất kỳ đi qua H. Các điểm X,Y,Z chia các đoạn HA,HB,HC theo cùng một tỷ số. Chứng minh rằng DX,EY,FZ đồng quy.*

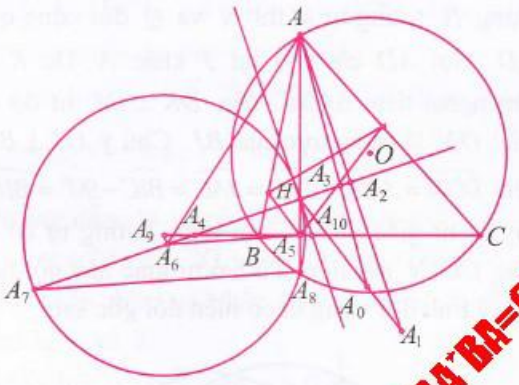
BA BA BA+CHÍN+CHÍN+CHÍN

Lời giải. Sử dụng đối xứng trục d ta chuyển về bài toán sau

Bài toán. *Cho tam giác ABC với trực tâm H và một đường thẳng d đi qua H. A_0, B_0, C_0 là các điểm sao cho HA_0, HB_0, HC_0 đối xứng HA, HB, HC qua d và $\frac{HA_0}{HA} = \frac{HB_0}{HB} = \frac{HC_0}{HC}$. Chứng minh rằng AA_0, BB_0, CC_0 đồng quy.*

Bổ đề (Mở rộng đường thẳng Droz-Farny). *Hai đường thẳng vuông góc với nhau tại trực tâm một tam giác thì chắn trên ba cạnh tam giác ba đoạn thẳng mà các điểm lần lượt chia các đoạn thẳng đó cùng một tỷ số thì thẳng hàng.*

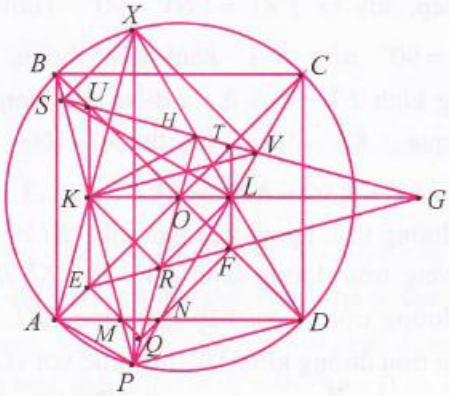
Bổ đề có trong nhiều tài liệu xin không nhắc lại chứng minh.



Trở lại bài toán. Gọi A_1, B_1, C_1 là các điểm đối xứng của A, B, C qua d. A_2, B_2, C_2 là trung điểm AA_1, BB_1, CC_1. AA_0, BB_0, CC_0 cắt d tại A_3, B_3, C_3. Từ định lý Menelaus dễ thấy A_3, B_3, C_3 chia HA_2, HB_2, HC_2 theo cùng tỷ số. Ta phải chứng minh AA_3, BB_3, CC_3 đồng quy. Giả sử d cắt BC, CA, AB tại A_4, B_4, C_4. AA_5, BB_5, CC_5 là các đường cao ΔABC thì $HA_4.HA_2 = HA.HA_5 = k$. Phép nghịch đảo cực H phương tích k biến A_4 thành A_2, A thành A_5. Tương tự với các đỉnh B, C, khi đó A_3, B_3, C_3 chia HA_2, HB_2, HC_2 theo cùng tỷ số sẽ biến thành A_6, B_6, C_6 chia HA_4, HB_4, HC_4 cùng tỷ số. Ta cần chứng minh các đường tròn $(HA_5A_6), (HB_5B_6), (HC_5C_6)$ đồng trục. Gọi A_7, B_7, C_7 là các điểm đối xứng của H qua A_5, B_5, C_5 và A_8, B_8, C_8 là các điểm đối xứng của H qua A_6, B_6, C_6. Như vậy qua phép vị tự tâm H tỷ số 2 ta cần chứng minh các đường tròn $(HA_7A_8), (HB_7B_8), (HC_7C_8)$ đồng trục. Chú ý rằng tâm A_9 của (HA_7A_8) chính là giao của đường thẳng qua A_6 vuông góc với d và BC. Tương tự với B_9, C_9. Ta cần chứng minh A_9, B_9, C_9 thẳng hàng. Đường thẳng qua H vuông góc d cắt BC, CA, AB tại A_{10}, B_{10}, C_{10}. Dễ thấy A_9, B_9, C_9 chia $A_4A_{10}, B_4B_{10}, C_4C_{10}$ cùng tỷ số. Theo bổ đề thì A_9, B_9, C_9 thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3 (Mở rộng đề tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội 2016). *Cho hình vuông ABCD nội tiếp trong đường tròn (O). P là một điểm thuộc cung nhỏ AD của (O). PB, PC lần lượt cắt đoạn AD tại M, N. Trung trực của AM, DN lần lượt cắt BD, AC tại S, T. ST cắt PC, PB lần lượt tại U, V. Chứng minh rằng đường tròn đường kính UV tiếp xúc với (O).*

BA*BA*BA=CHÍN+CHÍN+CHÍN



Lời giải. Giả sử trung trực của AM cắt PB, AC tại K, E. Trung trực của DN cắt PC, BD tại L, F. Do tam giác NCD vuông nên L là trung điểm CN, suy ra $LO // AD$. Tương tự $KO // AD$ nên K, O, L thẳng hàng. Dễ thấy tam

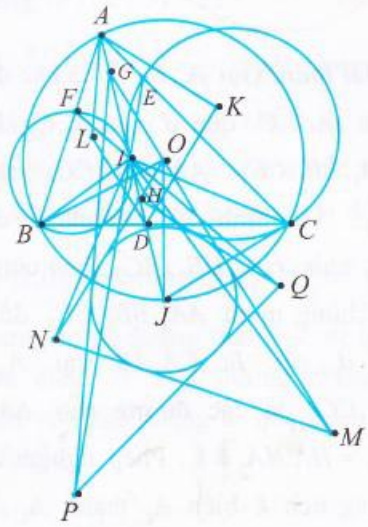
giác AEM vuông cân nên $EM \perp AC \Rightarrow EM \parallel DB$. Tương tự $FN \parallel AC$. Chú ý $MN \parallel BC$ nên $\frac{PM}{PB} = \frac{PN}{PC}$. Lấy điểm Q thuộc PO sao cho $\frac{PQ}{PO} = \frac{PM}{PB} = \frac{PN}{PC}$. Từ đó $QM \parallel BD \parallel EM$ nên E, M, Q thẳng hàng. Chứng minh tương tự F, N, Q thẳng hàng. Từ đó $OEQF$ là hình chữ nhật, nên PO đi qua trung điểm R của EF. Dễ thấy S, E đối xứng nhau qua K. T, F đối xứng nhau qua L. Vậy ST, KL, EF đồng quy tại G. Ta thấy R cũng là trung điểm OQ. Nên trong hình thang $BOQM$ có KR là đường trung bình, suy ra $KR \parallel QM$. Tương tự $LR \parallel QN$. Ta cũng có $MN \parallel KL$. Mặt khác ΔQMN vuông cân nên ΔRKL vuông cân. Từ đó $\widehat{RLG} = 135^\circ$. Dễ có $RO = RF$ và $LO = LF$ nên RL là phân giác của $\widehat{ORF}$. Từ đó gọi PO cắt ST tại H thì L là tâm đường tròn nội tiếp ΔRHG và $\widehat{RLG} = 135^\circ$. Từ đó $\widehat{RHG} = 2\widehat{RLG} - 180^\circ = 90^\circ$, nên $PO \perp ST$ tại H suy ra tứ giác $SHOK$ nội tiếp. Từ đó $\widehat{SHK} = \widehat{SOK} = 45^\circ = \widehat{KPL}$ nên tứ giác $KHVP$ nội tiếp, suy ra $\widehat{PKV} = \widehat{PHV} = 90^\circ$. Tương tự $\widehat{PLU} = 90^\circ$ nên K, L nằm trên đường tròn đường kính UV. Gọi X là điểm đối xứng với P qua KL thì X thuộc (O) nên $\widehat{KXL} = 45^\circ = \widehat{KSO} = \widehat{KHP} = \widehat{KVP}$ nên X nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác KLV cũng là đường tròn đường kính UV. Do $KL \parallel AD$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác XKL, hay đường tròn đường kính UV tiếp xúc với (O).

Bài toán 4. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) cố định với B,C cố định và A di chuyển. AD là phân giác và I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác. Gọi K,L lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC,ADB. Lấy G,H trên AD sao cho OG // DL,OH // DK. Đường tròn qua I,C tiếp xúc IA cắt AC tại E khác C. Đường tròn qua I,B tiếp xúc IA cắt AB tại F khác B. Trên IE,IF lấy P,Q sao cho GP // AL,HQ // AK. Chứng minh rằng PQ luôn tiếp xúc một đường tròn cố định khi A thay đổi.*

Lời giải. Không mất tổng quát giả sử $AB < AC$. Do $OG \parallel DL, GP \parallel AL$ nên $\widehat{OGD} = \widehat{LDA} = \widehat{LAD} = \widehat{PGD}$, nên hai đường thẳng GP và GO đối xứng nhau qua AD. Lấy M thuộc GO sao cho $\widehat{BIM} = 90^\circ$. Ta thấy

$$\widehat{DIM} = 90^\circ - \widehat{BID} = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{\widehat{BCA}}{2}\right) = \widehat{ICA} = \widehat{AIE} = \widehat{PID}$$

nên hai đường thẳng IM và IP đối xứng nhau qua AD. Từ đó M và P đối xứng qua AD. Dựng N tương tự M thì N và Q đối xứng qua AD. Gọi AD cắt (O) tại J khác A. Do K là tâm ngoại tiếp ΔADC nên $DK \perp BJ$ từ đó dễ thấy ON là trung trực của BJ. Chú ý $OJ \perp BC$ nên $\widehat{BON} = \widehat{JON} = \widehat{JBC} = \widehat{JAC} = \widehat{BIC} - 90^\circ = \widehat{BIN}$, suy ra tứ giác $BION$ nội tiếp. Tương tự có tứ giác $COIN$ nội tiếp. Từ hai tứ giác này nội tiếp chú ý tính đối xứng ta có biến đổi góc sau



$$\widehat{NJM} = 360^\circ - \widehat{OJN} - \widehat{OJM}$$
$$= 180^\circ - \widehat{OBN} + 180^\circ - \widehat{OCM}$$
$$= 180^\circ - \widehat{OIN} + \widehat{OIM} = 180^\circ - \widehat{MIN} = \widehat{BIC}$$

BA + BA = BA = CHÍN + CHÍN

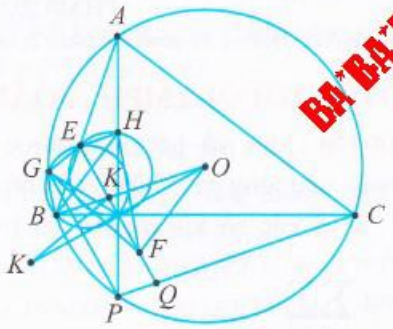
$= 90^o + \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 90^o + \frac{1}{2}\widehat{MON}$

chú ý đẳng thức cuối có do $\widehat{MON} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \widehat{BAC}$.

Từ đó chú ý OJ là phân giác của $\widehat{MON}$ nên J là tâm đường tròn nội tiếp ΔOMN, vậy MN luôn tiếp xúc với $\left(J, \frac{JI}{2}\right)$ cố định. Vì hai đường thẳng MN và PQ đối xứng nhau qua trục AD và (J) tự đối xứng qua AD nên PQ luôn tiếp xúc (J) cố định. Ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. *Việc tìm ra phép đối xứng trục AD là bước quan trọng trong lời giải bài toán này. Nhờ có phép đối xứng trục ta đã chuyển việc chứng minh PQ tiếp xúc với đường tròn cố định thành việc chứng minh MN tiếp xúc với đường tròn cố định có phần đơn giản hơn.*

Bài toán 5. *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H và đường cao AD. Đường thẳng qua D vuông góc với OD cắt AB tại E. Trung trực của AC cắt DE tại F. Gọi OB cắt DE tại K. L là đối xứng của O qua EF. Đường tròn ngoại tiếp ΔBDF cắt (O) tại G khác B. Chứng minh rằng GF và KL cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp ΔDEH.*



BA*BA*BA=CHÍN+CHÍN+CHÍN

Lời giải

Bổ đề. *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) và P, Q là hai điểm đẳng giác trong tam giác. AP cắt (O) tại M khác A. QM cắt BC tại E thì $PE \,//\, AQ$.*

Chứng minh. Gọi AQ cắt (O) tại N khác A và cắt BC tại H. Vì P, Q đẳng giác nên $\Delta CHN \backsim \Delta ACM$ và $\Delta CPM \backsim \Delta QCN$ (g.g).

Ta suy ra $HN.AM = CM.CN = QN.PM$ vì thế $\frac{MP}{MA} = \frac{NH}{NQ} = \frac{ME}{MQ}$ hay $PE \,//\, AQ$.

Hệ quả. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) và P, Q là hai điểm đẳng giác trong tam giác. E thuộc BC sao cho $PE \,//\, AQ$ thì QE và AP cắt nhau trên đường tròn (O).

Trở lại bài toán. Gọi AD cắt (O) tại P khác A, dễ thấy D là trung điểm HP. Gọi DE cắt PC tại Q thì theo bài toán con bướm D là trung điểm EQ nên OD là trung trực của EQ. Vì G là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác BED và BAC nên $\Delta GED \backsim \Delta GAC$. Từ đó $\widehat{GED} = \widehat{GAC} = 180^o - \widehat{GPC}$. Từ đó tứ giác $GEQP$ nội tiếp, như vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác nằm trên OD.

Lại có $\widehat{GDE} = \widehat{GCA} = \widehat{GPA}$ nên đường tròn (GDP) tiếp xúc với DE nói cách khác tâm đường tròn ngoại tiếp tam ΔGDP nằm trên OD. Như vậy OD đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $GEQP$ và tam giác GDP nên $OD \perp GP$. Từ đó $GEQP$ là hình thang cân. Ta dễ chứng minh $\Delta DGE = \Delta DHE$. Vậy QE là trung trực của GH. Ta xét phép đối xứng trục EQ thì GF và KL cắt nhau trên (DEH) khi và chỉ khi các đường đối xứng của GF, KL qua QE cắt nhau trên đường tròn đối xứng của (DEH) qua EQ. Nói cách khác chỉ cần chứng minh FH, OK cắt nhau trên đường tròn (BDE). Ta để ý $\widehat{HBE} = \widehat{OBD}$ và $\widehat{EDH} = \widehat{ODC}$ nên O và H là hai điểm đẳng giác trong ΔBDE. Áp dụng hệ quả trên ta thấy FH, OK cắt nhau trên đường tròn (BDE).

Nhận xét. *Bổ đề có nguồn gốc từ diễn đàn AoPS và phép chứng minh trên của* **Phan Anh Quân** *học sinh lớp A1 Toán K48 trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội. Trong việc áp dụng bổ đề ta đã chỉ ra một chi tiết khá thú vị là H và O đẳng giác trong tam giác BDE. Mặt khác việc xử lý bằng phép đối xứng trục để rồi sau đó áp dụng bổ đề là một bước quan trọng của bài toán.*

(Kỳ sau đăng tiếp)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/470 (Lớp 6). Tìm các số nguyên x, y, z, t sao cho

$$38(xyzt + xy + xt + zt + 1) = 49(yzt + y + t).$$

ĐẬU CÔNG NHO

(GV THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nghệ An)

Bài T2/470 (Lớp 7). Cho tam giác ABC cân tại A. Điểm M nằm trong tam giác sao cho $\widehat{AMB} > \widehat{AMC}$, điểm N nằm giữa A và M. Chứng minh rằng $\widehat{ANB} > \widehat{ANC}$.

PHẠM VĂN BINH

(GV THCS Vũ Hữu, Bình Giang, Hải Dương)

Bài T3/470. Tìm số k lớn nhất sao cho tồn tại k số nguyên dương không vượt quá 100 có tính chất là không có hai số nào trong chúng mà số này là lũy thừa của số kia.

VŨ ĐÌNH HÒA

(GV Khoa Toán Tin, ĐHSP Hà Nội)

Bài T4/470. Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp nửa đường tròn tâm O đường kính BC. Hai tiếp tuyến vẽ từ A và B với nửa đường tròn cắt nhau tại D. Chứng minh rằng DC đi qua trung điểm I của đường cao AH của tam giác ABC.

PHẠM TUẤN KHẢI

(29/67 Giáp Bát, Hoàng Mai, Hà Nội)

Bài T5/470. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $xyz = x + 2y + 3z - 5$.

LẠI QUANG THỌ

(Phòng GD&ĐT Tam Dương, Vĩnh Phúc)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/470. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn: $|a+b| + |b+c| + |c+a| = 8$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^2 + b^2 + c^2.$$

VŨ HỒNG PHONG

(GV THPT Tiên Du 1, Bắc Ninh)

Bài T7/470. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 2^{1-y} \\ y = 2^{1-x} \end{cases}$$

TRẦN NAM DŨNG

(GV Khoa Toán, ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

Bài T8/470. Cho tam giác ABC không có góc tù. Chứng minh bất đẳng thức

$$\cos A.\cos B + \cos B.\cos C + \cos C.\cos A > 2\sqrt{\cos A \cos B \cos C}.$$

LEONARD GIUGIUC & DANIEL SITARU

(Drobeta Turnu Severin, Romania)

Bài T9/470. Cho n số thực không âm $x_i, i = 1, 2, \ldots, n\ (n \geq 2)$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{1+x_1} + \frac{x_2}{1+x_2} + \ldots + \frac{x_n}{1+x_n}\right) < \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + \frac{x_2^2}{1+x_2^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{1+x_n^2}.$$

PHẠM XUÂN THI

(GV Khoa Cơ bản, Trường Sỹ quan lục quân 2, Đồng Nai)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/470. Một số tự nhiên được gọi là *k - success* nếu tổng các chữ số của nó bằng k. Gọi a_{ik} là số các số *k - success* có i chữ số. Tính tổng $\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}$.

(k, i, m, n là các số nguyên dương).

PHẠM QUANG HÙNG

(GV THPT chuyên Thái Bình)

Bài T11/470. Tìm tất cả các bộ ba $(x; y; p)$ gồm hai số nguyên không âm x, y và số nguyên tố p thỏa mãn: $p^x - y^p = 1$.

NGUYỄN TUẤN NGỌC

(GV THPT chuyên Tiền Giang)

Bài T12/470. Cho tam giác ABC, H là một điểm trong tam giác sao cho $\widehat{ABH} = \widehat{ACH}$. Một đường tròn đi qua B và C cắt đường tròn đường kính AH tại hai điểm phân biệt X, Y. AH cắt BC tại D. Gọi K là chân đường vuông góc vẽ từ D xuống XY. Chứng minh rằng $\widehat{BKD} = \widehat{CKD}$.

LÊ VIẾT ÂN

(Nhà 15, xóm 2, thôn Ngọc Anh, Phú Thượng, Phú Vang, Thừa Thiên Huế)

Bài L1/470. Đặt điện áp $u = 400\cos 100\pi t$ (V) vào hai đầu đoạn mạch mắc nối tiếp gồm cuộn cảm thuần có độ tự cảm L, điện trở R và tụ điện có điện dung C thay đổi được.

Khi $C = C_1 = \dfrac{10^{-3}}{8\pi}F$ hoặc $C = \dfrac{2}{3}C_1$ thì công suất của đoạn mạch có cùng giá trị.

Khi $C = C_2 = \dfrac{10^{-3}}{15\pi}F$ hoặc $C = 0{,}5C_2$ thì điện áp hiệu dụng giữa hai đầu tụ điện có cùng giá trị. Khi nối một ampe kế xoay chiều (lí tưởng) với hai đầu tụ điện thì số chỉ của ampe kế là bao nhiêu?

NGUYỄN QUANG HẬU *(Hà Nội)*

Bài L2/470. Trên một khu đất rộng và bằng phẳng, một em bé ném đi một viên sỏi. Xác định góc ném để đoạn đường viên sỏi bay đi trong không khí là lớn nhất. Bỏ qua mọi ma sát, coi chiều cao em bé không đáng kể.

NGÔ AN HÒA KỲ *(TP. Hồ Chí Minh)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

BA BA BA=CHÍN+CHÍN+CHÍN

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/470 (For 6th grade). Find all integers x, y, z, and t such that

$$38(xyzt + xy + xt + zt + 1) = 49(yzt + y + t).$$

Problem T2/470 (For 7th grade). Given an isosceles triangle ABC with the vertex angle A. Let M be a point inside the triangle such that $\widehat{AMB} > \widehat{AMC}$, and N is a point between A and M. Prove that $\widehat{ANB} > \widehat{ANC}$.

Problem T3/470. Find the maximal k such that there exist k positive integers which do not exceed 100 and have the property that any number among them cannot be a power of any remain one.

Problem T4/470. Assume that ABC be a triangle inscribed in the semicircle with the center O and the diameter BC. Two tangent lines to the semicircle (O) at A and B intersect at D. Prove that DC goes through the midpoint I of the altitude AH of ABC.

Problem T5/470. Find positive integral solutions of the equation

$$xyz = x + 2y + 3z - 5.$$

FOR HIGH SCHOOL

T6/470. Let a, b, and c are real numbers such that $|a+b| + |b+c| + |c+a| = 8$. Find the maximum and minimum values of the expression $P = a^2 + b^2 + c^2$.

Problem T7/470. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x = 2^{1-y} \\ y = 2^{1-x} \end{cases}.$$

Problem T8/470. Let ABC be a triangle without any obtuse angle. Prove that

$$\cos A.\cos B + \cos B.\cos C + \cos C.\cos A > 2\sqrt{\cos A.\cos B.\cos C}.$$

(Xem tiếp trang 37)

Bài T1/466. *Cho x, y, z là các số nguyên với $x \neq y$ và thỏa mãn $\frac{x}{y} = \frac{x^2+z^2}{y^2+z^2}$. Chứng minh rằng $x^2+y^2+z^2$ không thể là một số nguyên tố.*

Lời giải. Ta có $y \neq 0$ và $x(y^2+z^2) = y(x^2+z^2)$, suy ra $(x-y)(z^2-xy) = 0$.

Do $x \neq y$ nên $z^2 - xy = 0$, hay là $z^2 = xy$ (*)

• Nếu $z = 0$ thì từ (*) có $x = 0$, lúc đó $x^2+y^2+z^2 = y^2$ không là số nguyên tố.

• Nếu $z \neq 0$ thì từ (*) thấy x, y có cùng dấu, do đó chỉ cần xét các số nguyên dương x, y, z.

Từ (*) có $x^2+y^2+z^2 = x^2+y^2+2xy-z^2$

$= (x+y)^2 - z^2 = (x+y+z)(x+y-z)$.

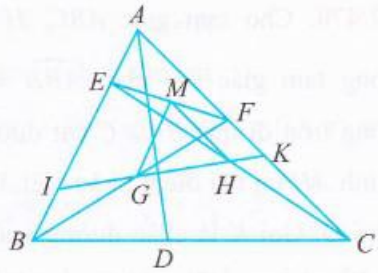
Vì x, y, z đều là số nguyên dương thì $x+y+z > 0$ và $x^2+y^2+z^2 > 0$ nên $x+y-z > 0$. Do $x \neq y$ thì $z^2 = xy > 1$ nên $z > 1$ và $z^2 > z$. Dễ thấy $x^2 \geq x$ và $y^2 \geq y$ nên $x^2+y^2+z^2 > x+y+z > x+y-z > 0$, do đó $x+y-z > 1$, suy ra $x+y+z$ và $x+y-z$ đều là ước số dương khác 1 của $x^2+y^2+z^2$, tức là $x^2+y^2+z^2$ không là số nguyên tố. ❐

➢***Nhận xét.*** Rất tiếc là nhiều bạn tìm được hệ thức (*), nhưng tiếp đó không lập luận chặt chẽ.

VIỆT HẢI

Bài T2/466. *Cho tam giác ABC có AB < AC, AD là đường phân giác. E, F là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC sao cho BE = CF. G, H lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BF, CE. Chứng minh rằng GH ⊥ AD.*

Lời giải. Trước hết ta nhắc lại một bổ đề quen thuộc: Trong tam giác, đoạn thẳng nối trung điểm của hai cạnh, song song với cạnh còn lại và có độ dài bằng nửa cạnh ấy (bạn đọc tự chứng minh).



Gọi M là trung điểm của EF, áp dụng bổ đề trong tam giác FEB ta có $MG \parallel EB$ và $MG = \frac{1}{2}EB$ (1). Tương tự, trong tam giác ECF ta có $MH \parallel FC$ và $MH = \frac{1}{2}FC$ (2). Từ (1) và (2), kết hợp với $BE = CF$ suy ra $MG = MH$, nên tam giác MGH cân tại M và $\widehat{MGH} = \widehat{MHG}$ (3). Gọi I và K thứ tự là giao điểm của đường thẳng GH với các cạnh AB, AC. Vì $MG \parallel AI$ nên $\widehat{MGH} = \widehat{AIK}$, $MH \parallel AK$ nên $\widehat{MHG} = \widehat{AKI}$ (đồng vị), kết hợp với (3) ta có $\widehat{AIK} = \widehat{AKI}$, suy ra tam giác AIK cân tại A. Mà AD là tia phân giác của góc A nên nó cũng là đường cao, suy ra $AD \perp IK$ hay $GH \perp AD$ (đpcm). ❐

➢***Nhận xét.*** 1) Bài toán tương đối dễ, tất cả các bạn đều bài đều có lời giải đúng. Một số bạn lấy trung điểm N của BC cũng cho lời giải tương tự.

2) Các bạn sau có lời giải tốt: **Vĩnh Phú:** *Lê Hồng Nhung*, 7A, THCS Vĩnh Yên, TP Vĩnh Yên; **Hà Nội:** *Nguyễn Hà Khánh Nam*, 7A2, Trường Hanoi Academy, Quận Tây Hồ; *Nguyễn Hà Anh*, 7A1, THCS Archimedes, Yên Hòa; **Hà Tĩnh:** *Trịnh Hoàng Anh, Phan Nguyên Vũ*, 7D, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Kon Tum:** *Lê Viết Lưu Duy*, 7B4, THCS – THSP Lý Tự Trọng, TP. Kon Tum; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Hoàng Kim Ánh*, 7A, THCS Hành Trung; *Nguyễn Thị Kiều Mẫn*, 7B, THCS Nguyễn Kim Vang; *Văn Quang Tuệ, Đỗ Thị Mỹ Lan*, 7A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; *Mai Thị Thu Thảo*, 7C, THCS TT Sông Vệ, Tư Nghĩa.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/466. *Cho các số nguyên dương a, b, c phân biệt thỏa mãn $ab+bc+ca \geq 674$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \frac{a^3+b^3+c^3}{3} - abc.$$

BA BÁ BA=CHÍN+CHÍN

Lời giải. Không mất tổng quát có thể giả sử $a > b > c$. Ta có $P = \dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{3}$

$= \dfrac{1}{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ (*)

Vì a, b, c là các số nguyên dương phân biệt, cho nên $a-b \ge 1$, $b-c \ge 1$, $a-c \ge 2$.

Từ đó, ta có $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca =$

$= \dfrac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \ge \dfrac{1}{2}(1+1+4) = 3.$

Mặt khác, từ giả thiết ban đầu ta có

$(a+b+c)^2 = (a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+$

$+3(ab+bc+ca) \ge 3+3.674 = 45^2.$

Từ (*) suy ra

$P = \dfrac{1}{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \ge \dfrac{1}{3}.45.3 = 45.$

Đẳng thức đạt được chỉ khi ta có đồng thời

$ab+bc+ca = 674$, $a = c+2$, $b = c+1$.

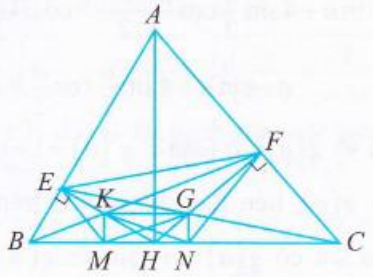
Giải ra, dễ dàng ta có $a = 16, b = 15, c = 14$. Kiểm tra lại, nhận được $P = 45$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 45. ❐

➢***Nhận xét.*** Bài toán này ít bạn gửi lời giải. Chỉ có hai bạn sau đây có lời giải đúng: *Nguyễn Thị Hoàng Cúc* và *Nguyễn Trọng Thuận*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T4/466. *Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AH. Kẻ HE vuông góc với AB, HF vuông góc với AC (E ∈ AB, F ∈ AC). Gọi K là giao điểm của HE và BF, G là giao điểm của HF và CE. Lấy các điểm M, N lần lượt thuộc đoạn thẳng HB, HC sao cho tứ giác EMHG và FNHK nội tiếp. Chứng minh rằng KN = GM.*

Lời giải



Dễ thấy tứ giác $AEHF$ nội tiếp, nên ta thấy

$\widehat{AFE} = \widehat{AHE}$, mà $\widehat{AHE} = \widehat{ABC}$

$\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ABC} \Rightarrow$ tứ giác $BEFC$ nội tiếp.

Vậy $\widehat{EBF} = \widehat{ECF}$

$\Rightarrow \widehat{EKF} = \widehat{EBK} + \widehat{BEK} = \widehat{FCG} + \widehat{CFG} = \widehat{EGF}$.

Do đó $EKGF$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{GKF} = \widehat{GEF} = \widehat{CBF}$.

Suy ra $KG \parallel BC$. Lại có các tứ giác $EMHG$, $FNHK$ nội tiếp, ta có $\widehat{GMH} = \widehat{GEH} = \widehat{KFH} = \widehat{KNH}$. Kết hợp với $KG \parallel MN$ ta có

$$\widehat{NKG} = \widehat{KNM} = \widehat{GMN} = \widehat{MGK}.$$

Từ đó suy ra $KN = MG$. ❐

➢***Nhận xét.*** 1) Sử dụng tính chất $\widehat{GMN} = \widehat{GFB}$ suy ra $BFGM$ nội tiếp, kết hợp với $EFGK$ nội tiếp ta có $HG.HF = HK.HE = HM.HB \Rightarrow BEKM$ nội tiếp $\Rightarrow KM \perp BC$. Tương tự, $GN \perp BC$, ta suy ra $KGNM$ là hình chữ nhật.

2) Chỉ có ba bạn sau cho lời giải tốt:

Phú Thọ: *Trần Thị Thu Huyền, Trần Quốc Lập*, 9A3, THCS Lâm Thao, Phú Thọ; **Quảng Ngãi:** *Đỗ Thị Mỹ Lan*, 9A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/466. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^5+y^3 = 2z \\ y^5+z^3 = 2x \\ z^5+x^3 = 2y \end{cases}.$$

Lời giải. Hệ phương trình xác định với mọi x, y, $z \in \mathbb{R}$.

Cách 1. Nhận thấy hệ phương trình có tính hoán vị vòng quanh đối với x, y, z, nên không giảm tổng quát giả sử $x = \max(x, y, z)$. Tức là $x \ge y$ và $x \ge z$.

Do đó $y^5+z^3 = 2x \ge 2y = z^5+x^3$, suy ra

$y^5-z^5 \ge x^3-z^3 \ge 0$ (vì $x^3 \ge z^3$)

$\Rightarrow y^5 \ge z^5 \Leftrightarrow y \ge z$ (1)

Lại có $x^5+y^3 = 2z \le 2x = y^5+z^3$, suy ra

$$x^5-y^5 \le z^3-y^3 \le 0$$

(vì do (1) nên $z^3 \le y^3$) $\Rightarrow x^5 \le y^5 \Leftrightarrow x \le y$.

Theo giả sử $x \ge y$, do đó $x = y$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $z^5+y^3 = z^5+x^3 = 2y \ge 2z = x^5+y^3$

$\Rightarrow z^5 \ge x^5 \Leftrightarrow z \ge x$.

BẠ BẠ BẠ CHÍN+CHÍN+CHÍN

Theo giả sử $x \ge z$, do đó $x = z$ (3)

Từ (2) và (3) ta có $x = y = z$.

Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} x = y = z \\ x^5 + x^3 = 2x \quad (4) \end{cases}$$

Ta có (4) $\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)(x^2+2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right. \quad (\text{do } x^2 + 2 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}).$$

Vậy hệ đã cho có ba nghiệm $(x; y; z)$ là $(0; 0; 0)$, $(1; 1; 1)$ và $(-1; -1; -1)$.

Cách 2. • Nếu trong ba số x, y, z không có hai số nào bằng nhau. Không giảm tổng quát, giả sử $x = \max(x, y, z)$

Trường hợp 1. $x > y > z$. Khi đó, trừ theo vế hai phương trình đầu của hệ, ta có

$$0 < x^5 - y^5 + y^3 - z^3 = 2(z - x) < 0 \text{ (vô lí).}$$

Trường hợp 2. $x > z > y$. Khi đó, trừ theo vế hai phương trình sau của hệ, ta có

$$0 < z^5 - y^5 + x^3 - z^3 = 2(y - x) < 0 \text{ (vô lí).}$$

Vậy không thể xảy ra trường hợp $x \ne y$, $y \ne z$, $z \ne x$.

• Nếu hai trong ba số x, y, z bằng nhau. Giả sử $x = y$, khi đó trừ theo vế của hai phương trình đầu của hệ dẫn đến

$$x^3 - z^3 = 2(z - x) \Leftrightarrow (x - z)(x^2 + xz + z^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x = z.$$

Từ đó suy ra $x = y = z$.

Xét tương tự với trường hợp $x = z$ hoặc $y = z$ ta đều suy ra $x = y = z$.

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với hệ

$\begin{cases} x = y = z \\ x^5 + x^3 = 2x \end{cases}$. Và giải tiếp như cách 1. ❐

➢***Nhận xét.*** Mấu chốt để giải hệ phương trình này là suy luận $x = y = z$. Một số bạn đã nhầm quan niệm rằng vai trò x, y, z trong hệ là như nhau nên chỉ giả sử $x \ge y \ge z$, nên bài giải còn xét thiếu trường hợp và suy luận còn dài dòng. Tòa soạn nhận được bài giải của các bạn THPT nhưng bài này chỉ dành cho các bạn THCS.

Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hải Dương:** *Nguyễn Văn Cường*, 8A, THCS Hợp Tiến, Nam Sách; **Nghệ An:** *Nguyễn Đình Tuấn*, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Dương Văn Minh*, 9A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Phú Yên:** *Đàm Ngọc Hiếu*, 8H, THCS Trần Hưng Đạo, Đông Hà.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/466. *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c \le \pi$. Chứng minh rằng*

$$0 \le a - \sin a - \sin b - \sin c + \sin(a+b) + \sin(a+c) \le \pi.$$

Lời giải. Đặt

$$P = a - \sin a - \sin b - \sin c + \sin(a+b) + \sin(a+c).$$

Ta có $\sin(a+b) - \sin b + \sin(a+c) - \sin c$

$$= 2\cos\left(\frac{a}{2} + b\right)\sin\frac{a}{2} + 2\cos\left(\frac{a}{2} + c\right)\sin\frac{a}{2}$$

$$= 4\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a+b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2}.$$

Vì $a, b, c \ge 0$; $a + b + c \le \pi$ nên

$0 \le \dfrac{a+b+c}{2} \le \dfrac{\pi}{2}$; $0 \le \left|\dfrac{b-c}{2}\right| \le \dfrac{\pi}{2}$ suy ra

$$\sin\frac{a}{2} \ge 0; \cos\frac{a+b+c}{2} \ge 0; \cos\frac{b-c}{2} \ge 0.$$

Xét hàm số $f(a) = a - \sin a$; $f'(a) = 1 - \cos a \ge 0$.

Hàm số $f(a)$ liên tục, đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên với $0 \le a \le \pi$ có $f(a) = a - \sin a \ge f(0) = 0$.

Do đó

$$P = (a - \sin a) + 4\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a+b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2} \ge 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a = 0 \\ b, c \ge 0 \\ b + c \le \pi \end{cases}$. Lại có

$0 \le \dfrac{a}{2} \le \dfrac{a+b+c}{2} \le \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\dfrac{a}{2} \ge \cos\dfrac{a+b+c}{2}$ và

$\sin\dfrac{a}{2} \ge 0$; $\cos\dfrac{b-c}{2} \le 1$ nên

$$P = a - \sin a + 4\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a+b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2} \le$$

$$a - \sin a + 4\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} = a + \sin a.$$

Xét hàm số $g(a) = a + \sin a$; $g'(a) = 1 + \cos a \ge 0$.

Hàm số $g(a)$ liên tục, đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên với $0 \le a \le \pi$ có $g(a) = a + \sin a \le g(\pi) = \pi$.

Đẳng thức xảy ra khi $(a; b; c) = (\pi; 0; 0)$.

Vậy $0 \le P \le \pi$. Bài toán được chứng minh. ❐

BA*BA*BA=CHÍN+CHÍN=CHÍN

➢***Nhận xét.*** Có thể chứng minh bất đẳng thức $P \le a + \sin a$ như sau:

Từ giả thiết có: $\sin a \ge 0; \sin b \ge 0; \sin c \ge 0$ và

$$\cos a \le 1; \cos b \le 1; \cos c \le 1$$

nên $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \le \sin a + \sin b$;

tương tự có $\sin(a+c) \le \sin a + \sin c$.

Do đó $P = a - \sin a - \sin b - \sin c +$

$$+\sin(a+b) + \sin(a+c) \le a + \sin a.$$

Đây là bài toán không khó nên hầu hết các bạn gửi bài giải làm đúng và theo cách giải trên. Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Hà Nam:** *Lê Phương Nam*, 11 Toán, THPT chuyên Biên Hòa; **Vĩnh Long:** *Phan Gia Anh*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Hà Nội:** *Lê Anh Thành*, 11 Toán1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Thái Bình:** *Trần Quang Minh*, 11A1, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy; **Đăk Lăk:** *Nguyễn Thanh Kim Ngân*, 10T, THPT Cư M'Ga, huyện Cư M'Gar.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T7/466. *Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$\frac{3}{2} \overset{(1)}{<} \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \overset{(2)}{<} \frac{4\pi}{5}.$$

Lời giải. Ta có:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}} \overset{\text{BĐT Cauchy}}{\ge} \frac{a}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{2a}{a+b+c}$$

Tương tự: $\sqrt{\frac{b}{a+c}} \ge \frac{2b}{a+b+c}, \sqrt{\frac{c}{a+b}} \ge \frac{2c}{a+b+c}$.

Suy ra $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}$

$$\ge \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = 2 > \frac{3}{2}.$$

Theo BĐT Bunyakovsky ta có :

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \le \sqrt{3\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right)}.$$

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $a<b+c, b<c+a, c<a+b$. Do đó

$$a^2 < ab + ac \Leftrightarrow a^2 + ab + ac < 2(ab + ac)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b+c} < \frac{2a}{a+b+c} \quad (3)$$

Tương tự : $\frac{b}{a+c} < \frac{2b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b} < \frac{2c}{a+b+c}$.

Suy ra $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2$. Do vậy

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \le \sqrt{6} < \frac{4\pi}{5}. \ \square$$

➢***Nhận xét.*** 1) Có thể chứng minh BĐT (1) như sau: Do a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}.$$

Nhưng $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$ chính là BĐT Nesbitt quen thuộc. BĐT (2) có thể được chứng minh bằng cách dùng BĐT Schwarz. Có thể có BĐT (3) nhờ tính chất:

Nếu $\frac{m}{n} < 1 \ (m>0, n>0)$ thì: $\frac{m}{n} < \frac{m+p}{n+p}, \forall p > 0$.

3) Các bạn tham gia đều giải đúng bài này. Các bạn sau có lời giải ngắn gọn:

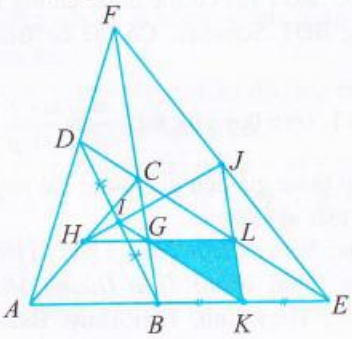
Vĩnh Phúc: *Nguyễn Hữu Huy*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thái Bình:** *Trần Quang Minh*, 11A1, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy. **Bắc Ninh:** *Vũ Ngọc Thanh*, 11A1, THPT Tiên Du số 1; *Lê Quang Huy*, 10A9, THPT Yên Phong số 1; *Nghiêm Chi*, 11A1-K10, THPT Yên Phong số 2. **Hà Nội:** *Nguyễn Thành Long*, *Đặng Thanh Tùng*, 10A1, THPT Ứng Hòa A, Ứng Hòa; *Hoàng Lê Nhật Tùng*, 12T2, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; *Lê Anh Thành*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ ; *Trần Bá Khôi*, 11T2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội. **Hà Nam:** *Phạm Đức Long*, 10 Toán, THPT chuyên Biên Hòa. **Nam Định:** *Trần Minh Hiếu*, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong. **Hưng Yên:** *Triệu Ninh Ngân*, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm. **Thanh Hóa:** *Nguyễn Bá Tuân*, 10A5, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa ; *Trần Quốc Phương*, 8A, THCS Thị Trấn, Thường Xuân. **Nghệ An:** *Đặng Duy Bảo Khánh*, 10A1, THPT chuyên Đại học Vinh. **Quảng Nam:** *Nguyễn Huy Hải*, 10/1, *Trương Nhật Nguyên Bảo*, 11/1 ; *Nguyễn Xuân Anh Quân*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm. **Long An:** *Phạm Quốc Thắng*, 11T1, THPT chuyên Long An. **Tây Ninh:** *Lê Hiền Khải*, 10T, THPT chuyên Hoàng Lê Kha, TP. Tây Ninh. **Đăk Lăk:** *Nguyễn Thanh Kim Ngân*, 10T, THPT Cư M'Gar, Cư M'Gar.

TRẦN HỮU NAM

BA*BA*BA=CHÍN+CHÍN+CHÍN

Bài T8/466. *Cho tam giác ABC, kẻ đường cao AH ($H \in BC$). Dựng đường tròn tâm I đường kính AH. Đường tròn (I) cắt AB, AC theo thứ tự tại T, S. Các tiếp tuyến với đường tròn (I) tại T, S cắt nhau tại M. Gọi N là giao điểm của BC và MA, K là giao điểm của BS và CT, J là giao điểm của TS và IM. Chứng minh rằng NJ đi qua trung điểm của AK.*

Lời giải. *Bổ đề (Đường thẳng Gauss).* Cho tứ giác toàn phần $ABCD$ với $AB \cap CD = E$; $AD \cap BC = F$. Gọi H, I, J lần lượt là trung điểm của AC, BD, EF. Khi đó ba điểm H, I, J thẳng hàng và đường thẳng qua H, I, J được gọi là đường thẳng Gauss.



Hình 1

Chứng minh. (h.1) Gọi K, L, G theo thứ tự là trung điểm của BE, CE, CB. Ta có H, G, L thẳng hàng; G, K thẳng hàng; J, L, K thẳng hàng. Suy ra:

$$\frac{HG}{HL}.\frac{JL}{JK}.\frac{IK}{IG} = \frac{AB}{AE}.\frac{FC}{FB}.\frac{DE}{DC}$$

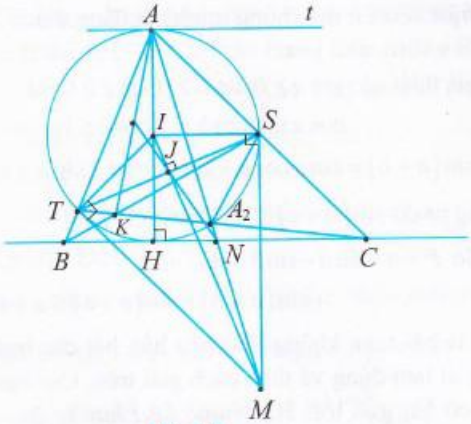
Áp dụng định lý Menelaus cho ΔBCE và cát tuyến ADF ta thấy $\frac{AB}{AE}.\frac{FC}{FB}.\frac{DE}{DC} = 1$

$\Rightarrow \frac{HG}{HL}.\frac{JL}{JK}.\frac{IK}{IG} = 1 \Rightarrow H, I, J$ thẳng hàng.

Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán (h.2). Gọi A_2 là giao điểm của MA với đường tròn (I) ($A_2 \neq A$). Khi đó ta thấy tứ giác ATA_2S là tứ giác điều hòa. Kẻ tiếp tuyến At của đường tròn (I) thì (At, AA_2, AS, AT) là chùm điều hòa $\left((At, AA_2, AS, AT) = -1\right)$.

Để ý rằng $At // BC$ và đường thẳng BC cắt AT, AA_2, AS theo thứ tự tại B, N, C nên theo tính chất của chùm điều hòa thì N là trung điểm của BC.



Hình 2

Áp dụng Bổ đề về đường thẳng Gauss cho tứ giác toàn phần $ATKS$ với $AT \cap KS = B$; $AS \cap TK = C$ và chú ý rằng J là trung điểm của TS ta thấy NJ đi qua trung điểm của đoạn AK (đpcm). ❐

➢***Nhận xét.*** 1) Hầu hết các lời giải gửi về Tòa soạn đều sử dụng Bổ đề về đường thẳng Gauss, kết hợp với tính chất của tứ giác điều hòa, hàng điểm - chùm điều hòa để giải quyết bài toán này. Hoan nghênh bạn *Nguyễn Xuân Anh Quân*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Quảng Nam** đã đề xuất bổ sung bài toán sau: *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn (K) bất kỳ qua B, C cắt các cạnh AC, AB lần lượt tại E, F. Các tiếp tuyến tại E, F của đường tròn ngoại tiếp ΔAEF cắt nhau tại T, đường thẳng AT cắt BC tại N. Gọi $H = BE \cap CF$, AH cắt (O) tại P khác A, PE cắt (O) tại R khác P, BR cắt EF tại J. Chứng minh rằng NJ chia đôi đoạn AH.*

2) Các bạn sau có lời giải gọn hơn cả: **Hà Nội:** *Nguyễn Minh Hiếu*, 10T, *Trần Bá Khôi*, 11T2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, *Nguyễn Duy Khương*, 10T2, THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam, *Nguyễn Văn Cao*, *Đặng Thanh Tùng*, 10A1, THPT Ứng Hòa A, Ứng Hòa; **Vĩnh Phúc:** *Phùng Văn Nam*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Phú Thọ:** *Nguyễn Tiến Long*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thanh Hiếu*, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Nam Định:** *Trần Minh Hiếu*, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** *Trần Quang Minh*, 11A1, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy; **Nghệ An:** *Nguyễn Đức Bảo*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu. TP. Vinh; **Quảng Bình:** *Hoàng Nhật Tuấn*, 10 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Phan Trần Hướng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Quảng Nam:** *Trương Nhật Nguyên Bảo*, 11/1, THPT

BA*BA*BA=CHÍN+CHÍN+CHÍN

chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Đăk Nông:** *Đặng Quang Hoàng*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Chí Thanh, TX. Gia Nghĩa; **Cần Thơ:** *Nguyễn Hồ Nhật Thanh*, 10A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Vĩnh Long:** *Phan Gia Anh*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Minh Châu*, 10 Toán, PTNK ĐHQG TP. Hồ Chí Minh.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/466. *Cho* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.

Tìm $\max\left(\min\left\{\frac{a_1+a_2}{1+a_3^2}; \frac{a_2+a_3}{1+a_4^2}; \ldots; \frac{a_{n-2}+a_{n-1}}{1+a_n^2}; \frac{a_{n-1}+a_n}{1+a_1^2}; \frac{a_n+a_1}{1+a_2^2}\right\}\right)$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn). Đặt

$$M = \min\left\{\frac{a_1+a_2}{1+a_3^2}; \frac{a_2+a_3}{1+a_4^2}; \ldots; \frac{a_{n-1}+a_n}{1+a_1^2}; \frac{a_n+a_1}{1+a_2^2}\right\}.$$

Giả sử $M > 1$, khi đó $\frac{a_1+a_2}{1+a_3^2} > 1 \Leftrightarrow a_1 + a_2 > 1 + a_3^2$ và $1 + a_3^2 \geq 2a_3$ nên $a_1 + a_2 > 2a_3$ (1). Tương tự, ta cũng có

$$a_2 + a_3 > 2a_4 \ (2)$$
$$\vdots$$
$$a_n + a_1 > 2a_2 \ (n)$$

Từ các bất đẳng thức (1) – (n), suy ra $2\sum_{k=1}^{n} a_k > 2\sum_{k=1}^{n} a_k$, mâu thuẫn. Vậy $M \leq 1$.

Nhận xét rằng khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ thì $M = 1$.

Vậy nên $\max M = 1$. ❐

Nhận xét. Đây là dạng toán cơ bản về bất đẳng thức nên có nhiều bạn gửi lời giải đến Tòa soạn. Đa số các bạn đều giải theo cách trên, tức là dựa vào bất đẳng thức cơ bản quen biết, một số khác sử dụng khảo sát hàm số cũng cho kết quả đúng. **Đăk Lăk:** *Nguyễn Thanh Kim Ngân*, 10T, THPT, Cư M'Gar; **Hà Nội:** *Hoàng Lê Nhật Tùng*, *Trần Nhật Quang*, 12T, THPT chuyên KHTN, *Trần Bá Khôi*, 11T2, THPT chuyên ĐHSP, *Lê Anh Thành*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, *Nguyễn Thành Long*, 10A1, *Đặng Thanh Tùng*, 10A1, THPT Ứng Hòa A; **Long An:** *Phạm Hoàng Nguyên*, THPT Hậu Nghĩa, Đức Hòa; **Thái Bình:** *Trần Quang Minh*, 11A1, THPT Đông Thụy Anh; **Vĩnh Long:** *Phan Gia Anh*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/466. *Chứng minh rằng*

$$\frac{(3n)!}{n!(n+1)!(n+2)!}$$

là một số nguyên với mọi số nguyên $n \geq 3$.

Lời giải. (Dựa trên lời giải của bạn *Phùng Văn Nam*, 10A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**).

Ký hiệu $\gamma_p(n)$ là số mũ của số nguyên tố p trong phân tích chính tắc n thành các thừa số nguyên tố. Ta cần chứng minh với mọi số nguyên tố p thì

$$\gamma_p[(3n)!] \geq \gamma_p(n!) + \gamma_p[(n+1)!] + \gamma_p[(n+2)!] \ (1).$$

Áp dụng công thức $\gamma_p(m!) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{m}{p^k}\right)$ thì bất đẳng thức (1) quy về việc chứng minh với mỗi số nguyên tố p thì:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{3n}{p^k}\right] \geq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left[\frac{n}{p^k}\right] + \left[\frac{n+1}{p^k}\right] + \left[\frac{n+2}{p^k}\right]\right) \ (2).$$

Ta cần hai bổ đề sau:

Bổ đề 1. $[3x] = [x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right]$.

Bổ đề này dễ chứng minh.

Bổ đề 2. Với mọi số nguyên dương $a \geq 3$ thì

$$\left[\frac{3n}{a}\right] \geq \left[\frac{n}{a}\right] + \left[\frac{n+1}{a}\right] + \left[\frac{n+2}{a}\right].$$

Chứng minh: Theo bổ đề 1 ta có

$$\left[\frac{3n}{a}\right] = \left[\frac{n}{a}\right] + \left[\frac{n}{a} + \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{n}{a} + \frac{2}{3}\right].$$

Vì $a \geq 3$ nên

$$\begin{cases} \frac{n}{a} + \frac{1}{3} \geq \frac{n}{a} + \frac{1}{a} \Rightarrow \left[\frac{n}{a} + \frac{1}{3}\right] \geq \left[\frac{n+1}{a}\right] \\ \frac{n}{a} + \frac{2}{3} \geq \frac{n}{a} + \frac{2}{a} \Rightarrow \left[\frac{n}{a} + \frac{2}{3}\right] \geq \left[\frac{n+2}{a}\right] \end{cases}.$$

Bổ đề 2 được chứng minh. Trở lại bài toán

• Nếu $p \geq 3$ thì $p^k \geq 3$ với mọi $k \geq 1$ thành thử (2) được chứng minh (do bổ đề 2).

• Xét trường hợp $p = 2$. Ta cần chứng minh với mọi $n \geq 3$ thì

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{3n}{2^k}\right] \geq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left[\frac{n}{2^k}\right] + \left[\frac{n+1}{2^k}\right] + \left[\frac{n+2}{2^k}\right]\right) \ (3).$$

Nhận xét. Tồn tại số nguyên dương q sao cho

BA*BA BA=CHÍN+CHÍN

$n+2<2^q<3n$. Thật vậy, nếu $n=3$ ta lấy $q=3$.

Với $n\ge 4$ thì $\log_2(3n)-\log_2(n+2)=\log_2\dfrac{3n}{n+2}\ge 1$.

Do đó tồn tại q sao cho

$$\log_2(n+2)<q\le\log_2(3n)\Rightarrow n+2<2^q<3n.$$

Nhận xét được chứng minh.

Với $k\ge 2, k\ne q$ thì do bổ đề 2

$$\left[\frac{3n}{2^k}\right]\ge\left[\frac{n}{2^k}\right]+\left[\frac{n+1}{2^k}\right]+\left[\frac{n+2}{2^k}\right]\qquad(4)$$

Ta sẽ chứng minh

$$\left[\frac{3n}{2}\right]+\left[\frac{3n}{2^q}\right]\ge\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{2}\right]+$$

$$+\left[\frac{n}{2^q}\right]+\left[\frac{n+1}{2^q}\right]+\left[\frac{n+2}{2^q}\right]\qquad(5)$$

Thật vậy theo nhận xét trên

$$\left[\frac{n}{2^q}\right]=\left[\frac{n+1}{2^q}\right]=\left[\frac{n+2}{2^q}\right]=0,\ \left[\frac{3n}{2^q}\right]\ge 1\qquad(6)$$

Dễ chứng minh bằng quy nạp theo k, $n=2k$ và $n=2k+1$.

$$\left[\frac{3n}{2}\right]=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{2}\right]-1\qquad(7)$$

Thành thử từ (6), (7) ta suy ra (5). Từ (4) và (5) ta suy ra (3) do đó suy ra (2). Bài toán được giải xong. ❐

➢***Nhận xét.*** Đây là một bài toán tương đối khó nên có ít bạn tham gia giải và một số lời giải gửi đến chưa đúng hoặc giải chưa hoàn chỉnh. Lời giải đúng đối tốt thuộc về các bạn: **Vĩnh Long:** *Phan Gia Anh*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Hà Nội:** *Trần Nhật Quang*, 12 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, *Trần Bá Khôi*, 12T2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/466. *Cho hai dãy số (x_n) và (y_n) thỏa mãn điều kiện:*

$$\begin{cases}\sqrt{y_n-x_{n+1}^2+1}=x_n\\ \sqrt{3+x_{n+1}^2-y_n}+\sqrt{10+y_{n-1}-x_{n-1}^2}+\dfrac{1-5n}{n}=0\end{cases}\quad\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng hai dãy số (x_n) và (y_n) có giới hạn hữu hạn khi n dần đến vô cùng, tìm giới hạn của hai dãy số đó.

Lời giải. (Theo các bạn *Trần Bá Khôi*, 11T2, THPT chuyên ĐHSP **Hà Nội** và *Trần Nhật Quang*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG **Hà Nội**). Từ giả thiết thứ nhất ta có

$$y_n=x_{n+1}^2+x_n^2-1,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Thay vào giả thiết thứ hai

$$\sqrt{4-x_n^2}+\sqrt{9+x_n^2}+\frac{1-5n}{n}=0,\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$$

$$\Leftrightarrow(2-\sqrt{4-x_n^2})-(\sqrt{9+x_n^2}-3)=\frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow x_n^2\left(\frac{1}{2+\sqrt{4-x_n^2}}-\frac{1}{\sqrt{9+x_n^2}+3}\right)=\frac{1}{n}.$$

Chú ý $2+\sqrt{4-x_n^2}\le 2+2=4$,

$$\sqrt{9+x_n^2}-3\ge 3+3=6.$$

Suy ra $\dfrac{1}{n}\ge x_n^2.\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{x_n^2}{12}$

$$\Rightarrow 2\sqrt{\frac{3}{n}}\ge|x_n|\ge 0.$$

Mặt khác $\lim\limits_{n\to+\infty}2\sqrt{\dfrac{3}{n}}=0$. Bởi vậy theo Định lí kẹp ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$.

Do đó $y_n=x_{n+1}^2+x_n^2-1\to-1$ khi $n\to+\infty$.

Kết luận: $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=-1$. ❐

➢***Nhận xét.*** 1) Ta phải hiểu giả thiết thứ nhất đúng với mọi $n=0, 1, 2, \ldots$ và giả thiết thứ hai đúng với mọi $n=1, 2, 3, \ldots$

2) Ngoài bạn *Khôi* và bạn *Quang*, các bạn học sinh sau cũng có lời giải đúng: **Bắc Ninh:** *Nghiêm Chi*, 11A1-K10, THPT Yên Phong Số 2; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Văn Tiệp*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** *Đặng Thanh Tùng*, 10A1, THPT Ứng Hòa A; *Lê Anh Thành*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Thái Bình:** *Trần Quang Minh*, 11A1, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy; **Thanh Hóa:** *Đỗ Thùy Anh*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Quảng Nam:** *Nguyễn Xuân Anh Quân*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Đăk Lăk:** *Nguyễn Thanh Kim Ngân*, 10T, THPT Cư M'Gar; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Minh Châu*, 10 Toán, PTNK ĐHQG TP. Hồ Chí Minh; **Long An:** *Phạm Hoàng Nguyên*, 11A1, THPT Hậu Nghĩa, Đức Hòa; **Phú Yên:** *Lê Thành Lâm*, 10T1, THPT chuyên Lê Văn Chánh.

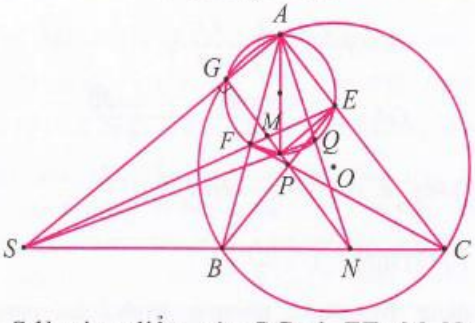
NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T12/466. *Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O). P là một điểm nằm trong tam giác sao cho AP ⊥ BC. E, F lần*

BỘ ĐỀ ÔN CHÍNH CHÍNH

lượt là hình chiếu vuông góc của P trên CA, AB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) tại điểm G khác A. Chứng minh rằng GP, BE, CF đồng quy.

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Tiến Long*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, TP Việt Trì, **Phú Thọ**). Vì tam giác ABC không cân tại A nên BC và EF không song song.



Gọi S là giao điểm của BC và EF; M, N theo thứ tự là giao điểm của PG và EF, BC; Q là giao điểm của SP và NA.

Vì $BF \perp PF; BC \perp PA$ và A, P, E, F cùng thuộc một đường tròn nên

$(BF, BC) \equiv (PF, PA) \equiv (EF, EA) \equiv (EF, EC) (\text{mod}\, \pi)$.

Do đó B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.

Vậy BC, EF, AG theo thứ tự là trục đẳng phương của các cặp đường tròn (O), $(BCEF)$; $(BCEF)$, $(AEFG)$; $(AEFG)$, (O). Do đó BC, EF, AG đồng quy. Nói cách khác A, G, S thẳng hàng (1)

Vậy $PN \equiv PG \perp AG \equiv AS$.

Kết hợp với $PA \perp BC \equiv SN$, suy ra

$$PQ \equiv PS \perp NA \equiv AQ.$$

Vậy A, P, E, F, G, Q cùng thuộc một đường tròn (2). Từ (1) và (2) suy ra

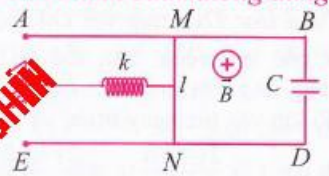
$$(SNBC) = A(SNBC) = A(GQFE) = P(GQFE)$$
$$= P(MSFE) = (MSFE) = (SMEF).$$

Điều đó có nghĩa là $GP \equiv MN, BE, CF$ đồng quy.

➢***Nhận xét.*** Khá nhiều bạn tham gia giải bài toán này. Đa số các bạn đều sử dụng định lí Brocard. Các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt: **Thái Bình:** *Trần Quang Minh*, 11A1, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy; **Vĩnh Phúc:** *Phùng Văn Nam*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, TP Vĩnh Yên; **Quảng Bình:** *Hoàng Nhật Tuấn*, 10T,THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP Đồng Hới; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Vũ Minh Quang*, 10T1, THPT Lê Quý Đôn, TP Vũng Tàu; **Long An:** *Phạm Hoàng Nguyên*, THPT Hậu Nghĩa, Đức Hòa; **Cần Thơ:** *Nguyễn Hồ Nhật Thanh*, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP Cần Thơ; TP **Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Minh Châu*, 10T, PTNK, ĐHQG TP.Hồ Chí Minh; **Hà Nội:** *Nguyễn Minh Hiếu*, 10T2, *Trần Bá Khôi*, 11T2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/465. *Một bình hình trụ cách nhiệt, kín hai đầu, đặt thẳng đứng, được ngăn làm hai phần bởi một pittông mỏng, nặng dẫn nhiệt lý tưởng. Ban đầu hai phần có thể tích bằng nhau, chứa cùng một lượng khí lý tưởng đơn nguyên tử ở áp suất p, nhiệt độ T. Buông pittông, nó dịch chuyển xuống dưới một khoảng nào đó và dừng lại ở vị trí cân bằng khi mà hiệu áp suất của khí ở trên và ở dưới bằng Δp. Tính độ biến thiên nhiệt độ của khí khi đó. Nhiệt dung của pittông và của thành bình không đáng kể.*



Lời giải. Khi MN chuyển động cắt vuông góc với các đường cảm ứng, trong MN xuất hiện suất điện động cảm ứng: $\mathscr{E}_c = Bvl$ (1)

Do đó : $\mathscr{E}_c = u$ (hiệu điện thế ở hai đầu tụ) nên tụ mang điện tích: $q = C\mathscr{E}_c = CBvl$ (2)

Trong mạch có dòng điện do tụ tích và phóng điện. Như vậy, MN chịu một lực từ tác dụng $\vec{F}_1$ trong mặt khung:

$$F_1 = Bil = B\,l\frac{dq}{dt} = Blq' = C(Bl)^2v' = C(Bl)^2x''$$

Mặt khác MN còn chịu thêm lực đàn hồi $\vec{F}_2$ trong mặt khung : $F_2 = -kx$.

Suy ra phương trình chuyển động của MN là:

$$-C(Bl)^2x'' - kx = ma = mx'' \quad (3)$$

Vì thanh MN không có khối lượng nên phương trình (3) trở thành:

$$-C(Bl)^2x'' - kx = 0 \Rightarrow x'' + \frac{k}{C(Bl)^2 t}x \quad (4)$$

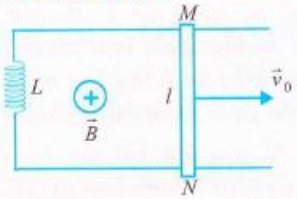
Vậy từ (4), suy ra MN dao động điều hoà với tần số góc $\omega = \frac{1}{Bl}\sqrt{\frac{k}{C}}$. □

BẠ BẠ BẠ+CHÍN+CHÍN+CHÍN

➢***Nhận xét.*** Chúc mừng các bạn có lời giải đúng: **Bạc Liêu:** *Trần Văn Bảy*, 12CA, THPT Huyện Phước Long; **Hà Nội:** *Trần Hữu Hoàng*, 11A1 Lý, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Thừa Thiên Huế:** *Lê Cẩm Huyền*, 10 Lý, THPT chuyên Quốc Học Huế.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/465. *Cho hệ thống như hình dưới. Thanh dẫn MN = l nằm ngang, có khối lượng m và có thể trượt không ma sát dọc theo hai thanh ray song song. Đầu dưới của hai ray nối với một cuộn dây có độ tự cảm L. Bỏ qua điện trở của mạch. Hệ thống được đặt trong một từ trường đều có vectơ cảm ứng từ $\vec{B}$ thẳng đứng hướng xuống, ở thời điểm ban đầu thanh MN có vận tốc $\vec{v}_0$ như hình vẽ. Viết phương trình chuyển động của thanh MN.*



Lời giải. Chọn trục Ox trùng với OA, gọi α và β lần lượt là góc mà vecto vận tốc tại O lập với phương ngang ứng với quỹ đạo OmA và OnA. Kí hiệu v là độ lớn vận tốc ngay trước và ngay sau mỗi va chạm. Ta có: $t_1 = \dfrac{2v\sin\alpha}{g}; t_2 = \dfrac{2v\sin\beta}{g}$ (1)

$$OA = L = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{v^2\sin 2\beta}{g} \quad (2)$$

Từ (2) suy ra: $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ nên $t_1.t_2 = \dfrac{2L}{g}$ (3)

a) Từ (3) rút ra: $L = \dfrac{t_1t_2}{2}g$

b) Dễ dàng lập được phương trình của parabol: $y = \dfrac{x^2}{L} - x$ nên cao độ h tìm được bằng:

$$h = y_{x=L/2} = \frac{L}{4} = \frac{t_1t_2}{8}g \quad (1)$$

$$OA = L = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{v^2\sin 2\beta}{g} \quad (2)$$

Từ (2) suy ra: $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ nên $t_1.t_2 = \dfrac{2L}{g}$ (3)

c) Từ (3) rút ra: $L = \dfrac{t_1t_2}{2}g$.

Dễ dàng lập được phương trình của parabol: $y = \dfrac{x^2}{L} - x$ nên cao độ h tìm được bằng:

$h = y_{x=\frac{L}{2}} = \dfrac{L}{4} = \dfrac{t_1t_2}{8}g$. ❐

➢***Nhận xét.*** Rất tiếc không có bạn nào tham gia giải bài này.

NGUYỄN XUÂN QUANG

CẶP ĐÔI HOÀN HẢO ... *(Tiếp theo trang 34)*

- Khi đó $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$. Ta có đẳng thức quan hệ giữa hai biến x và y.
- Biến đổi đẳng thức, kết hợp với phương trình (2) ta có phương trình vô tỉ một ẩn.
- Đến đây, ta khai thác kiến thức về phương trình đường thẳng trong mặt phẳng tọa độ Oxy để giải quyết bài toán.

Lời giải. *Bước 1.* Điều kiện: $2x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \dfrac{1}{2}$.

Nhân hai vế phương trình (1) với $\left(y^2+3\right)\left(x^2+2\right)$ ta có phương trình

$$(y+1)(y^2+3) = (x^2+2)(x^4+2x^2+4)$$

$$\Leftrightarrow (y+1)(y^2+3) = \left((x^2+1)+1\right)\left((x^2+1)^2+3\right) \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = (t+1)\left(t^2+3\right) = t^3+t^2+3t+3$ xác định trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm

$$f'(t) = 3t^2+2t+3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy $(3) \Leftrightarrow f(y) = f\left(x^2+1\right) \Leftrightarrow y = x^2+1$, thay vào phương trình (2) ta được phương trình

$$x^2 - 3x + \sqrt{2x-1} + 1 = 0 \quad (4)$$

Bước 2. Đặt $X = \sqrt{2x-1}$, $Y = x^2 - 3x$, $(X \ge 0)$ khi đó phương trình (4) được viết lại $X + Y + 1 = 0$ (5) (*là phương trình đường thẳng*). Ta có:

$$(5) \Leftrightarrow \begin{cases} X = t,\ t \ge 0 \\ Y = -1-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-1} = t,\ t \ge 0 \\ x^2 - 3x = -1-t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = t^2 \\ x^2 - 3x = -1-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 4x + 1 = t^4 \\ 4x^2 - 12x = -4-4t \end{cases}$$

$$\Rightarrow t^4 - 4t^2 + 4t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1+\sqrt{2}. \\ t = -1-\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Do $t \ge 0$ nên không nhận $t = -1-\sqrt{2}$.

- Với $t = 1 \Rightarrow \sqrt{2x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = x^2+1 = 2$.
- Với $t = \sqrt{2}-1 \Rightarrow \sqrt{2x-1} = \sqrt{2}-1 \Leftrightarrow x = 2-\sqrt{2}$ $\Rightarrow y = x^2+1 = 7-4\sqrt{2}$.

Kết luận: Tập nghiệm của hệ là

$$S = \left\{(1;2); \left(2-\sqrt{2}; 7-4\sqrt{2}\right)\right\}.$$

BA*BA*BA=CHÍN+CHÍN+CHÍN

BÌNH LUẬN

ĐỀ THI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA

MÔN TOÁN NĂM 2016

TRẦN QUỐC LUẬT
(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)

Đề thi Trung học phổ thông Quốc gia môn Toán năm nay được biên soạn theo cấu trúc mới và cũng đã được thay đổi về mức độ khó - dễ so với đề thi năm trước. Qua bài viết này chúng tôi phân tích cụ thể chi tiết từng bài để thầy cô và học sinh trong cả nước kịp thời bắt nhịp với định hướng đổi mới để từ đó điều chỉnh phương pháp dạy và phương pháp học phù hợp.

CÂU I. 1) *Cho số phức $z=1+2i$. Tìm phần thực và phần ảo của $w=2z+\overline{z}$.*

2) *Cho $\log_2 x=\sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức*

$$A=\log_2 x^2+\log_{\frac{1}{2}} x^3+\log_4 x.$$

Hướng dẫn. 1) Ta có $\overline{z}=1-2i$. Do đó

$$w=2z+\overline{z}=2(1+2i)+(1-2i)=3+2i.$$

Vậy phần thực và phần ảo của số phức w lần lượt là 3 và 2.

2) Do $\log_2 x=\sqrt{2}$ nên $x>0$ và

$$A=\log_2 x^2+\log_{2^{-1}} x^3+\log_{2^2} x$$

$$=2\log_2 x-3\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x$$

$$=\frac{-\log_2 x}{2}=\frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

➢***Nhận xét.*** Đây là bài tập cơ bản thuộc kiến thức môn Giải tích lớp 12 ở mức độ nhận biết, thông hiểu. Ý 1 kiểm tra được kiến thức số phức liên hợp, phần thực và phần ảo; kỹ năng cộng, nhân các số (phức). Ý 2 kiểm tra được kiến thức, kỹ năng chuyển đổi cơ số, thu gọn lôgarit của lũy thừa, đưa các đối tượng liên quan về đối tượng chính (bản chất). Có thể phát biểu ý 2) như sau: Cho số thực dương x thỏa mãn $\log_2 x=\sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức

$$A=\log_2 x^2+\log_{\frac{1}{2}} x^3+\log_4 x.$$

★ **Bài luyện tập**

1) Cho số phức $z=2-i$. Tìm phần thực và phần ảo của $w=|z|-2\overline{z}+\frac{1}{z^2}$.

2) Gọi z là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2-2z+2=0$. Tìm tọa độ điểm M biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ.

3) Cho $\log_{\sqrt{3}} 2=x$. Tính giá trị của biểu thức 9^x.

4) Cho $3\ln x=\ln[x(y^2+2)]$. Tính giá trị của biểu thức $\log_x(y^2+2)$.

CÂU II. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=-x^4+2x^2$.*

Nhận xét. Đây là một bài tập cơ bản thuộc kiến thức môn Giải tích lớp 12 ở mức độ nhận biết, thông hiểu.

★ **Bài luyện tập**

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số $y=-2x^3+3x^2$, $y=\frac{x}{x-1}$, $y=x^4-4x^2+3$.

CÂU III. *Tìm m để hàm số*

$$f(x)=x^3-3x^2+mx-1$$

có 2 điểm cực trị. Gọi x_1,x_2 là hai điểm cực trị đó, tìm m để $x_1^2+x_2^2=3$.

Hướng dẫn. Ta có $f'(x)=3x^2-6x+m$. Điều kiện để hàm số đã cho có 2 điểm cực trị là phương trình $3x^2-6x+m=0$ có 2 nghiệm phân biệt, điều kiện là $\Delta'=9-3m>0\Leftrightarrow m<3$.

Với $m<3$, ta có $x_1+x_2=2, x_1x_2=\frac{m}{3}$.

Chú ý $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$ nên yêu cầu bài toán tương đương với

$$2^2-2.\frac{m}{3}=3\Leftrightarrow m=\frac{3}{2}\ \text{(thỏa mãn } m<3\text{)}.$$

BẠ*BẠ*BA=CHÍN+CHÍN+CHÍN

➢*Nhận xét.* Đây là một bài tập cơ bản thuộc kiến thức môn Giải tích lớp 12 ở mức độ nhận biết, thông hiểu. Bài này kiểm tra được kiến thức về đạo hàm, biệt thức Δ, Định lý Viet và kỹ năng biến đổi chính xác.

★ Bài luyện tập

1) Cho $y = x^3 - 3x$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm M cách trục tung 2 đơn vị.

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx^2 + 2x - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

3) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ cắt đường thẳng $3x + y - m = 0$ tại 2 điểm phân biệt. Gọi x_1, x_2 là hoành độ 2 giao điểm đó, tìm m để $|x_1 - x_2| = 3$.

CÂU IV. *Tính tích phân*

$$I = \int_0^3 3x\left(x + \sqrt{x^2+16}\right)\mathrm{d}x.$$

Hướng dẫn. Ta có

$$I = \int_0^3 \left(3x^2\mathrm{d}x + 3x\sqrt{x^2+16}\mathrm{d}x\right)$$

$$= \int_0^3 \left[\mathrm{d}(x^3) + 3\left(\sqrt{x^2+16}\right)^2 \mathrm{d}\left(\sqrt{x^2+16}\right)\right]$$

$$= \left(x^3 + \left(\sqrt{x^2+16}\right)^3\right)\Big|_0^3 = 88.$$

➢*Nhận xét.* Đây là tích phân cơ bản thuộc chương trình Giải tích 12, mức độ nhận biết, thông hiểu. Học sinh chỉ cần nhớ đúng lý thuyết là làm được. Bài này kiểm tra được kỹ năng tách tích phân và kỹ năng đặt ẩn phụ. Học sinh có thể sử dụng máy tính để kiểm tra kết quả bài này.

★ Bài luyện tập. Tính các tích phân

$$I = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x;\ I = \int_1^2 \frac{x^3+x}{\sqrt{2x^2+1}}\mathrm{d}x;\ I = \int_2^3 \sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x.$$

CÂU V. *Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(3;2;-2), B(1;0;1)$ và $C(2;-1;3)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng BC.*

Hướng dẫn. Mặt phẳng đi qua điểm $A(3;2;-2)$ và vuông góc với đường thẳng BC nhận $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là

$1(x-3) - 1(y-2) + 2(z+2) = 0 \Leftrightarrow x - y + 2z + 3 = 0.$

Đường thẳng BC đi qua $B(1;0;1)$ và nhận $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình là $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = 1+2t \end{cases}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng BC. Do $H \in BC$ nên $H(1+h;-h;1+2h)$. Điều kiện để H là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng BC là H thuộc mặt phẳng qua A vuông góc với BC, điều kiện là

$$(1+h) - (-h) + 2(1+2h) + 3 = 0 \Leftrightarrow h = -1.$$

Do đó $H(0;1;-1)$.

➢*Nhận xét.* Đây là bài tập cơ bản thuộc kiến thức môn Hình học lớp 12 ở mức độ nhận biết, thông hiểu. Ý đầu kiểm tra được kiến thức về phương trình mặt phẳng, ý sau đòi hỏi học sinh tư duy một chút, sau đó sử dụng biến đổi đại số để giải quyết.

★ Bài luyện tập

1) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 3y - 2z + 1 = 0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{3}$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P) biết Δ đi qua giao điểm của d và (P) và vuông góc với d.

2) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;-2;0)$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua hình chiếu của điểm A trên đường thẳng Δ và vuông góc với mặt phẳng đi qua điểm A chứa đường thẳng Δ.

CÂU VI.

1) *Giải phương trình* $2\sin^2 x + 7\sin x - 4 = 0$.

2) *Một học sinh A thiết kế bảng điều khiển điện tử mở cửa phòng lớp mình. Bảng gồm 10 nút, mỗi nút được ghi một số từ 0 đến 9 và không có hai*

BA*BA*BA=CHÍN+CHÍN

nút nào được ghi cùng một số. Để mở cửa cần nhấn liên tiếp 3 nút khác nhau sao cho 3 số trên 3 nút đó theo thứ tự đã nhấn tạo thành một dãy số tăng và có tổng bằng 10. Học sinh B không biết quy tắc mở cửa trên, đã nhấn ngẫu nhiên liên tiếp 3 nút khác nhau trên bảng điều khiển. Tính xác suất để B mở được cửa phòng đó.

Hướng dẫn. 1) Ta có

$$2\sin^2 x + 7\sin x - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow (\sin x + 4)(2\sin x - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \text{ (do } \sin x + 4 \geq 3 > 0; \forall x)$$
$$\Leftrightarrow x = (-1)^k.\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

2) Số phần tử của không gian mẫu $A_{10}^3 = 720$. Các bộ ba số đôi một phân biệt có tổng bằng 10 là: (0;1;9), (0;2;8), (0;3;7), (0;4;6), (1;2;7), (1;3;6) và (2;3;5). Do vậy số phần tử thuận lợi cho biến cố "học sinh B mở được của phòng" là 8. Vậy xác suất cần tính là $p = \frac{8}{720} = \frac{1}{90}$.

➢***Nhận xét.*** Câu VI thuộc chương trình Đại số 11, ý đầu ở mức độ nhận biết, thông hiểu; ý sau ở mức độ vận dụng. Câu xác suất nhiều học sinh bị nhầm lẫn. Có thể phát biểu lại một số chỗ chẳng hạn như thay "được ghi một số từ 0 đến 9" thành "được ghi một chữ số từ 0 đến 9" hay bỏ hai chữ "liên tiếp" thì vấn đề cần chuyển tải sẽ trở nên rõ ràng hơn.

★Bài luyện tập

1) Tìm nghiệm thuộc khoảng $\left(-3\pi; \frac{-3\pi}{2}\right)$ của phương trình $\cos 2x - 5\sqrt{2}\cos x - 5 = 0$.

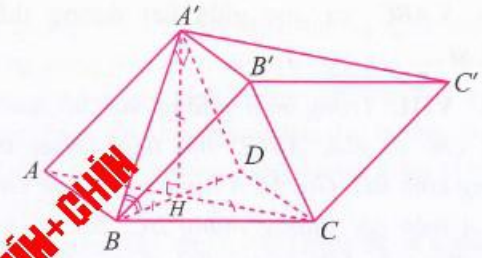
2) Tìm số nghiệm thuộc khoảng $\left[\frac{-3\pi}{2}; -\pi\right)$ của phương trình $\sqrt{3}\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right)$.

3) Gọi S là tập các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau được chọn từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S, tính xác suất để số được chọn là số chẵn có chữ số hàng đơn vị bằng nửa tổng các chữ số.

4) Từ một hộp chứa 10 thẻ được đánh số từ 1 đến 10 (mỗi thẻ chỉ đánh 1 số và không có 2 thẻ nào được đánh cùng số), ta chọn ngẫu nhiên 3 thẻ. Tính xác suất để 3 thẻ được chọn có tổng các số là một số chia hết cho 5.

CÂU VII. *Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $B, AC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh AC, đường thẳng $A'B$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 45°. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và chứng minh $A'B$. vuông góc với $B'C$.*

Hướng dẫn.



Gọi H là trung điểm của cạnh AC, ta có $A'H \perp (ABC)$. Do đó $\widehat{A'BH} = 45^\circ$ (chú ý $\widehat{A'BH} < 90^\circ$ và $A'B$ tạo với (ABC) góc 45°).

Suy ra $A'H = HB.\tan\widehat{A'BH} = \frac{AC}{2}.\tan 45^\circ = a$.

Do vậy $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{ABC} = a^3$.

Gọi D là điểm đối xứng với B qua H. Ta có các đoạn thẳng $B'A', BA, CD$ song song và bằng nhau suy ra $B'C // A'D$. Lại có $HB = HD = HA' (= a)$ nên $\widehat{BA'D} = 90^\circ$. Do vậy $A'B \perp B'C$ (đpcm).

➢***Nhận xét.*** Đây là bài toán cơ bản, ý sau có đổi mới so với đề thi các năm trước. Câu này thuộc chương trình Hình học 11, ý đầu kiểm tra mức độ nhận biết thông hiểu, ý sau kiểm tra mức độ vận dụng. Tuy xét trên phương diện hình học không gian thuần túy thì ý sau bài toán này tương đối khó, song nếu ta gắn cho mô hình một hệ trục tọa độ thì yêu cầu của bài toán được xử lý rất gọn.

BA+BA=CHÍN+CHÍN

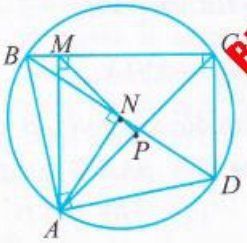
★Bài luyện tập

1) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = a$; hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn AC thỏa mãn $4AH = AC$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Tính theo a thể tích khối tứ diện $SMBC$ và tính tỉ số $\frac{MA}{MS}$.

2) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = 2a$, $AC = a$. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$. Gọi M, K lần lượt là trung điểm của AB và SC, I là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AC}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và góc giữa hai đường thẳng MK, SI.

CÂU VIII. *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đường kính BD. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A trên các đường thẳng BC, BD và P là giao điểm của MN và AC. Biết đường thẳng AC có phương trình là $x - y - 1 = 0$, $M(0;4)$, $N(2;2)$ và hoành độ điểm A nhỏ hơn 2. Tìm tọa độ các điểm P, A, B.*

Hướng dẫn.



Đường thẳng MN đi qua $M(0;4)$ và nhận $\overrightarrow{MN}(2;-2)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình là

$$2(x-0)+2(y-4)=0 \Leftrightarrow x+y-4=0.$$

Do $P = AC \cap MN$ nên tọa độ của điểm P là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-y-1=0 \\ x+y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y) = \left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Do đó $P\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Ta sẽ chứng minh $PA = PM$. Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử vị trí các điểm như hình vẽ, các trường hợp khác chứng minh tương tự. Ta có $\widehat{PMA} = \widehat{DBA} = \widehat{DCA} = \widehat{PAM}$ (do tứ giác $NMBA, ABCD$ nội tiếp và $CD // MA$). Do đó PAM là tam giác cân. Suy ra $PA = PM$.

Do $A \in AC: x-y-1=0$ nên $A(a;a-1)$ với $a < 2$. Theo kết quả trên ta có

$$\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\left(a-1-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{2} \Leftrightarrow a=0 \text{ (do } a<2\text{)}.$$

Do đó $A(0;-1)$. Đường thẳng BC đi qua $M(0;4)$ và nhận $\overrightarrow{MA}(0;-5)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $y-4=0$.

Đường thẳng BD đi qua $N(2;2)$ và nhận $\overrightarrow{AN}(2;3)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $2(x-2)+3(y-2)=0 \Leftrightarrow 2x+3y-10=0$.

Do $B = BC \cap BD$ nên tọa độ của điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} y-4=0 \\ 2x+3y-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=4. \end{cases}$

Do đó $B(-1;4)$.

Nhận xét. Đây là bài toán không quá khó, thuộc chương trình Hình học 10 ở mức độ vận dụng. Bài toán này nằm trong môtuýt quen thuộc ở thời điểm hiện tại của dạng toán này là sử dụng một tính chất của hình học tổng hợp để giải quyết vấn đề tìm điểm của hình học giải tích. Vì có nhiều vị trí tương đối giữa các điểm có thể xảy ra nên việc "giả sử các điểm như hình vẽ, các trường hợp khác chứng minh tương tự" là cần thiết.

★Bài luyện tập

1) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường thẳng chứa cạnh BC là: $x-2y-4=0$. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của B lên AC, AI với I là tâm đường tròn ngoại tiết tam giác ABC. Tìm tọa độ các điểm A, B, C biết $D(2;2), E(-1;-4)$ và điểm B có hoành độ âm.

2) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình thang $ABCD$ $(AB // CD)$ nội tiếp đường tròn tâm $I(2;-1)$, bán kính $R = \sqrt{10}$. Tiếp

BA*BA*BA=CHÍN+CHÍN+CHÍN

tuyến của (I) tại B cắt CD tại E. Gọi F là tiếp điểm của tuyến thứ hai của (I) qua E. Các đường thẳng AF và CD cắt nhau tại $T(2;-2)$. Tìm tọa độ A,B biết E thuộc đường thẳng $d: x+7y-1=0$ và điểm B có tung độ dương.

CÂU IX. *Giải phương trình*

$$3\log_3^2\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)+2\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)\times\log_3(9x^2)+\left(1-\log_{\frac{1}{3}}x\right)^2=0.$$

Hướng dẫn. ĐK: $0<x\le 2$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$3\log_3^2\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)-4\log_3\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)\times\log_3(3x)+\log_3^2(3x)=0.$$

Đặt $a=\log_3\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right), b=\log_3(3x)$ thì phương trình trên trở thành

$$3a^2-4ab+b^2=0\Leftrightarrow(a-b)(3a-b)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\3a=b\end{array}\right..$$

Nếu $a=b$ thì $\log_3\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)=\log_3(3x)$

$\Leftrightarrow\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}=3x\Leftrightarrow 4+2\sqrt{4-x^2}=9x^2$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{4-x^2}+2\right)\left(9\sqrt{4-x^2}-16\right)=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{2\sqrt{17}}{9}$ (do $x>0$).

Nếu $3a=b$ thì

$$3\log_3\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)=\log_3(3x)$$

$\Leftrightarrow\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}=\sqrt[3]{3x}$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}-\sqrt[3]{3x}$ trên $(0;2]$, ta có

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2+x}}-\frac{1}{2\sqrt{2-x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{9x^2}}<0;\ \forall x\in(0;2)$$

(do $2\sqrt{2-x}<2\sqrt{2}<2\sqrt{2+x};\forall x\in(0;2]$).

Do đó $f(x)\ge f(2)=2-\sqrt[3]{6}>0;\ \forall x\in(0;2]$.

Suy ra trường hợp này vô nghiệm.

➢***Nhận xét.*** Đây là bài toán phù hợp với mức độ phân loại bài toán khó thứ nhì của đề thi. Công thức chuyển đổi cơ số logarit hay công thức thu gọn lôgarit của lũy thừa đã được kiểm tra một lần trong đề ở câu I.2). Để xử lý phương trình

$$\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}=\sqrt[3]{3x}$$

chúng ta làm như sau:

Đặt $a=\sqrt{2+x}, b=\sqrt{2-x}$ thì $2\ge a>b\ge 0$ và $a^2+b^2=4, x=\dfrac{a^2-b^2}{2}$. Khi đó phương trình trên trở thành $(a+b)^3=\dfrac{3}{2}(a^2-b^2)$. Phương trình này được viết lại $(a+b)[2(4+2ab)-3(a-b)]=0$ hay $(a+b)[-2(a-b)^2-3(a-b)+16]=0$, vô nghiệm do $0<a-b\le a\le 2; a+b>0$.

★Bài luyện tập

Giải các phương trình và hệ phương trình sau

1) $\log_3^2(1-9x^2)+\log_{\frac{1}{3}}(1-9x^2)\times\log_3(27x^3)+2(1+\log_3 x)^2=0.$

2) $8\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}=x^2-18x-31.$

3) $\log(x+\sqrt{x^2+1})=2^{x^2+2-\sqrt{x^2+1}}\log(x+1).$

4) $\begin{cases}3^{\log(x^2-x+1)}-(2016y+1).3^y=\log_{0,1}(x^2-x+1)^{224.3^{y+2}}\\3^{\log(x^2-x+1)}+3.2^{y-1}=9y-3.\end{cases}$

CÂU X. *Xét các số thực x, y thỏa mãn*

$$x+y+1=2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}\right)\ (*)$$

1) Tìm giá trị lớn nhất của x + y.

2) Tìm m để

$$3^{x+y-4}+(x+y+1).2^{7-x-y}-3(x^2+y^2)\le m$$

đúng với mọi x, y thỏa mãn (*).

Hướng dẫn. 1) Điều kiện $x\ge 2, y\ge -3$.

Đặt $\sqrt{x-2}=a, \sqrt{y+3}=b$ thì $a\ge 0, b\ge 0$ và $x=a^2+2, y=b^2-3$. Khi đó $x+y=a^2+b^2-1$ và (*) trở thành $a^2+b^2=2(a+b)$.

Đặt $S=a+b, P=ab$ thì $S\ge 0, 0\le P\le\dfrac{S^2}{4}$.

Ta có $x+y=2S-1$ và điều kiện trên trở thành

$$S^2-2P=2S \text{ hay } P=\frac{S^2-2S}{2}.$$

BẠ*BẠ*BẠ=CHÍN+CHÍN+CHÍN

Kết hợp với điều kiện $S \ge 0, 0 \le P \le \frac{S^2}{4}$ ta được

$$S \ge 0, 0 \le \frac{S^2 - 2S}{2} \le \frac{S^2}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S = 0 \\ 2 \le S \le 4. \end{array}\right.$$

Do vậy $x + y = 2S - 1 \in D = \{-1\} \cup [3;7]$.

Khi $x = 6, y = 1$ thỏa mãn (*) thì $x + y = 7$.

Vậy giá trị lớn nhất của $x + y$ là 7.

2) Đặt

$$A = 3^{x+y-4} + (x+y+1).2^{7-x-y} - 3(x^2 + y^2).$$

Với $x + y = -1$ thì

$$S = 0 \Rightarrow a = b = 0 \Rightarrow x = 2, y = -3.$$

Khi đó $A = \frac{-9476}{243}$. Với $x + y \in [3;7]$. Xét hàm số $f(t) = 3^{t-4} + (t+1).2^{7-t}$ trên $[3;7]$.

Ta có $f'(t) = 3^{t-4}\ln 3 + 2^{7-t} - (t+1).2^{7-t}\ln 2$ và

$f''(t) = 3^{t-4}(\ln 3)^2 - 2.2^{7-t}\ln 2 + (t+1).2^{7-t}(\ln 2)^2$
$= 3^{t-4}(\ln 3)^2 + 2^{7-t}\ln 2[(t+1).\ln 2 - 2] > 0; \forall t \in [3;7]$.

Do đó hàm số $f'(t)$ đồng biến trên $(3;7)$, kết hợp với $f'(3).f'(7) < 0$ suy ra có duy nhất một giá trị $t_0 \in (3;7)$ sao cho $f'(t_0) = 0$. Suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $(3;t_0)$ và đồng biến trên $(t_0;7)$. Kết hợp với $f(7) = 35 < f(3) = \frac{193}{3}$ ta có $f(t) \le \frac{193}{3}; \forall t \in [3;7]$.

Nếu $y \ge 1$ thì $x^2 + y^2 \ge 2^2 + 1^2 = 5$. Nếu $y < 1$ thì $x^2 + (y+1)^2 \ge \frac{1}{2}(x+y+1)^2 \ge 8$.

Do đó $x^2 + y^2 \ge 7 - 2y > 5$. Suy ra

$A \le \frac{193}{3} - 3.5 = \frac{148}{3}; \forall t \in D$ (do $\frac{-9476}{243} < 0 < \frac{148}{3}$).

Khi $x = 2, y = 1$ thỏa mãn (*) thì $A = \frac{148}{3}$.

Suy ra điều kiện để bất phương trình đã cho đúng với mọi x, y thỏa mãn (*) là $m \ge \frac{148}{3}$.

➢***Nhận xét.*** Câu cuối cùng được chia thành 2 ý là điểm mới của đề thi năm nay, đây là một xu hướng tốt để học sinh không có tư tưởng bỏ hẳn bài toán ở vị trí này. Ý 2) của bài toán này thuộc diện rất khó, mặc dù là dạng toán đưa về 1 biến như những năm gần đây song một số đánh giá trung gian đòi hỏi học sinh phải rất giỏi mới phát hiện được. Đây là một câu phân loại tốt. Chúng tôi dự đoán điểm 10 môn Toán năm nay sẽ rất ít. Ý 2) nên được phát biểu là "Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để...".

Ta có thể chứng minh $x^2 + y^2 \ge 5$ bằng cách:

Cách 1. Nếu $x \ge 3$ thì $x^2 + y^2 \ge 9$. Nếu $2 \le x < 3$ thì $x^2 + y^2 \ge x^2 + (3-x)^2 = 2(x-1)(x-2) + 5 \ge 5$.

Do vậy ta luôn có $x^2 + y^2 \ge 5$.

Cách 2. Ta sẽ chứng minh

$$x^2 \ge 4(x - 2\sqrt{x-2} - 2) + 4;\ \forall x \ge 2.$$

$$y^2 \ge 4(y - 2\sqrt{y+3} + 3) + 1;\ \forall y \ge -3.$$

Đặt $\sqrt{x-2} = k \ge 0$ thì bất đẳng thức thứ nhất tương đương với $k(k^3 + 8) \ge 0$, đúng.

Đặt $\sqrt{y+3} = l \ge 0$ thì bất đẳng thức thứ hai tương đương với $(l-2)^2(l^2 + 4l + 2) \ge 0$, đúng.

Cộng theo vế ta được $x^2 + y^2 \ge 5$.

★Bài tập luyện tập

1) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \log_{(x^2+y^2)}(x+y) \ge 1 \\ \left(\frac{1}{2} + m - x - 2y\right)\left(1 + 4^{x+2y+2}\right) \le 6 \end{cases}.$$

2) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-4} - \sqrt{x-1} - \sqrt{x-3} = m\sqrt{\frac{x-3}{x}}.$$

3) Tìm tất các giá trị của tham số m để phương trình sau có đúng 3 nghiệm

$$3^{2-|x-\sin m+1|}\log_{\pi}(x^2 + 4x + 6) + \left(\sqrt{3}\right)^{-x^2-4x}\log_{\pi}\frac{1}{2(|x - \sin m + 1| + 1)} = 0.$$

Hi vọng rằng qua các phân tích trên độc giả sẽ thu được nhiều kinh nghiệm bổ ích và hữu dụng khi đối mặt với các bài toán trong đề thi THPT QG những năm tới. Mong các đồng nghiệp phản hồi, xin trân trọng cảm ơn.

BẠ BẠ BẠ=CHÍN+CHÍN+CHÍN

CẶP ĐÔI HOÀN HẢO TRONG GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH HAI ẨN

HUỲNH VĂN MINH
(GV Trường PTDTNT Sa Thầy, Kon Tum)

I. MỞ ĐẦU

Trong những năm gần đây, đặc biệt là khi Bộ giáo dục và đào tạo triển khai tổ chức kì thi THPT Quốc gia, kì thi hai trong một. Phương trình và hệ phương trình lại xuất hiện với những "diện mạo" mới. Với diện mạo mới, để giải hệ phương trình người học cần những kĩ thuật, phương pháp mới. Kiến thức về phương pháp tọa độ trong mặt phẳng đã được học trong chương trình Hình học 10, việc vận dụng kiến thức này trong giải bài toán ôn thi THPT quốc gia là không mới. Tuy nhiên, bài viết cung cấp một cách nhìn khác về ứng dụng của phương trình đường thẳng trong việc giải hệ phương trình. Trong bài viết, kiến thức đường thẳng được kết hợp khá "hoàn hảo" với kiến thức hàm số (được học trong chương trình Giải tích 12) tạo ra cặp đôi hoàn hảo về phương pháp giải hệ phương trình vô tỉ. Sau đây là một số dụ cho việc sử dụng cặp đôi hoàn hảo "*đường thẳng và hàm số*" trong giải hệ phương trình vô tỉ. Mỗi giải mỗi bài toán được thực hiện qua hai bước.

Bước 1: Sử dụng công cụ hàm số tạo ra tiền đề cho công cụ đường thẳng giải quyết bài toán.

Bước 2: Giải phương trình bằng phương pháp "tham số hoá đường thẳng", đây là công cụ đường thẳng.

Mỗi bước trên là một trong "Cặp đôi hoàn hảo".

II. NỘI DUNG

✶ Bài toán 1. *Giải hệ phương trình sau*

$$\begin{cases} 8x^3 - y^3 = 6\left(6x^2 + y^2\right) - 56x + 13y + 40 & (1) \\ 3\sqrt[3]{2x+4} + 2\sqrt[3]{x+y} = 8 & (2) \end{cases}$$

Phân tích. - Phương trình (1) là phương trình đa thức bậc 3 hai ẩn, để sử dụng công cụ hàm số, trong trường hợp này, ta cần chuyển đổi phương trình về một đẳng thức hàm số có dạng $f(u) = f(v)$, trong đó $f(t)$ là hàm đơn điệu (*đồng biến hoặc nghịch biến*).

- Khi đó ta có $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$. Khi đó ta có đẳng thức quan hệ giữa hai biến x và y.

- Khi phân tích đưa phương trình (1) về dạng mỗi vế phương trình chứa một biến ta thấy vế đa thức biến x có chứa đại lượng $8x^3 = (2x)^3$ nên ta biến đổi về đa thức bậc 3 có dạng $(2x-a)^3 + n(2x-a) + m$, trong đó a, n, m là hệ số thực (*ta dùng phương pháp đồng nhất thức để tìm ra các hệ số này*) và sử dụng hàm số $f(t) = t^3 + nt$.

- Biến đổi đẳng thức, kết hợp với phương trình (2) ta có phương trình vô tỉ một ẩn.

Bên đây, ta khai thác kiến thức về phương trình đường thẳng trong hệ tọa độ mặt phẳng Oxy (*gồm: phương trình đường thẳng dạng tổng quát, phương trình đường thẳng dạng tham số và thao tác chuyển đổi giữa hai dạng phương trình*) để giải quyết bài toán.

Lời giải. *Bước* 1. Biến đổi (1):

$$(1) \Leftrightarrow (2x)^3 - 36x^2 + 56x = y^3 + 6y^2 + 13y + 40 \quad (1')$$

Ta có $\mathrm{VT}(1') \equiv (2x-a)^3 + n(2x-a) + m$

$$\equiv 8x^3 - 12ax^2 + \left(6a^2 + 2n\right)x - a^3 - na + m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -12a = -36 \\ 6a^2 + 2n = 56 \\ -a^3 - na + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ n = 1 \\ m = 30 \end{cases}.$$

Suy ra $\mathrm{VT}(1') \equiv (2x-3)^3 + (2x-3) + 30$. Biến đổi VP(1') theo kết quả của VT(1'), ta có:

$$\mathrm{VP}(1') \equiv (y-b)^3 + (y-b) + 30$$

$$\equiv y^3 - 3by^2 + \left(3b^2 + 1\right)y - b^3 - b + 30$$

BA BA BA + CHÍN + CHÍN + CHÍN

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3b = 6 \\ 3b^2 + 1 = 13 \\ -b^3 - b + 30 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow b = -2.$$

Từ đó suy ra $VP(1') \equiv (y+2)^3 + (y+2) + 30$.

$VT(1') = VP(1') \Leftrightarrow (2x-3)^3 + (2x-3) = (y+2)^3 + (y+2)$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$, xác định trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó $(1) \Leftrightarrow 2x - 3 = y + 2 \Rightarrow y = 2x - 5$ thay vào (2) ta có: $3\sqrt[3]{2x+4} + 2\sqrt[3]{3x-5} = 8$ (3).

Bước 2. Đặt $X = \sqrt[3]{2x+4}$, $Y = \sqrt[3]{3x-5}$.

Phương trình (3) được viết lại $3X + 2Y = 8$ (4) (*là phương trình đường thẳng trong mặt phẳng OXY*), nên $(4) \Leftrightarrow \begin{cases} X = 2t \\ Y = 4 - 3t \end{cases} (*)$.

Do đó (*) tương đương với

$$\begin{cases} \sqrt[3]{2x+4} = 2t \\ \sqrt[3]{3x-5} = 4 - 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4 = 8t^3 \\ 3x - 5 = -27t^3 + 108t^2 - 144t + 64 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 12 = 24t^3 \\ 6x - 10 = -54t^3 + 216t^2 - 288t + 128 \end{cases}$$

$\Rightarrow 78t^3 - 216t^2 + 288t - 150 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Với $t = 1$, ta có $\sqrt[3]{2x+4} = 2 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = -1$.

Kết luận: Tập nghiệm của hệ là $S = \{(2; -1)\}$.

✶ Bài toán 2. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} (x^2 - 1)(y + 2) = x(y^2 + 4y + 3) & (1) \\ 2\sqrt[3]{2x + y} + 3\sqrt{6 - 5x} = 8 & (2) \end{cases}$$

Phân tích:

- Phương trình (1) là phương trình hai ẩn x, y. Sử dụng kiến thức về hàm số ta cố gắng phân tích để đưa (1) về một đẳng thức hàm số dạng $f(u) = f(v)$, mỗi vế chứa một biến x, y, với f là hàm số đơn điệu (*đồng biến hoặc nghịch biến*).
- Từ $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$. Khi đó ta có đẳng thức quan hệ giữa hai biến x và y.
- Biến đổi đẳng thức, kết hợp với phương trình (2) ta đi đến phương trình vô tỉ một ẩn.
- Đến đây, ta khai thác kiến thức về phương trình đường thẳng trong mặt phẳng tọa độ Oxy để giải quyết bài toán.

Lời giải. *Bước 1.* Điều kiện: $6 - 5x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{6}{5}$.

- Xét $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$ không thỏa mãn phương trình (2) nên hệ không nhận nghiệm $(0; -2)$.
- Với $\begin{cases} x = 0 \\ y \neq -2 \end{cases}$ không thỏa mãn phương trình (1).
- Với $\begin{cases} x \neq 0 \\ y = -2 \end{cases}$ không thỏa mãn phương trình (1).
- Với $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x(y+2) \neq 0$. Chia hai vế phương trình (1) cho $x(y+2)$ ta có $\frac{x^2 - 1}{x} = \frac{y^2 + 4y + 3}{y + 2}$

$$\Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = y + 2 - \frac{1}{y+2} \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = t - \frac{1}{t}$ xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, có đạo hàm $f'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} > 0, \forall t \in D$ nên $f(t)$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của D.

Ta có $(3) \Leftrightarrow x = y + 2 \Leftrightarrow y = x - 2$ thay vào phương trình (2) ta được $2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} = 8$ (4)

Bước 2. Đặt $X = \sqrt[3]{3x-2}$, $Y = \sqrt{6-5x}$, $Y \geq 0$. Khi đó phương trình (4) được viết lại $2X + 3Y = 8$ (5) (*là phương trình đường thẳng*). Ta có

$$(5) \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 + 3t \\ Y = 2 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{3x-2} = 1 + 3t \\ \sqrt{6-5x} = 2 - 2t, \ t \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2 = 27t^3 + 27t^2 + 9t + 1 \\ 6 - 5x = 4t^2 - 8t + 4, \ t \leq 1 \end{cases}$$, suy ra phương trình ẩn t: $135t^3 + 147t^2 + 21t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = -1$.

Với $t = -1$ ta có $\sqrt[3]{3x-2} = -2 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow y = -4$.

Kết luận: Tập nghiệm của hệ là $S = \{(-2; -4)\}$.

✶ Bài toán 3. *Giải hệ phương trình sau*

$$\begin{cases} \frac{y+1}{x^2+2} = \frac{x^4 + 2x^2 + 4}{y^2 + 3} & (1) \\ 3x = y + \sqrt{2x - 1} & (2) \end{cases}$$

Phân tích: - Phương trình (1) là phương trình hai ẩn x, y. Sử dụng kiến thức về hàm số ta cố gắng phân tích để đưa (1) về một đẳng thức hàm số dạng $f(u) = f(v)$, mỗi vế chứa một biến x, y, với f là hàm số đơn điệu (*đồng biến hoặc nghịch biến*).

(Xem tiếp trang 26)

BA BA BA=CHÍN+CHÍN

SỰ ĐỘC ĐÁO CỦA TOÁN HỌC ẤN ĐỘ

LÊ QUỐC HÁN
(*GV Khoa Toán ĐH Vinh*)
Sưu tầm và biên soạn

Trong các giáo trình toán học bậc phổ thông hiện lưu hành, các khái niệm, định lý, công thức toán học đều mang tên các nhà toán học Châu Âu, từ các nhà toán học cổ Hy Lạp: Thales, Pythagore, Euclid, Archimedes, … đến các nhà toán học Tây Âu cận đại: Newton, Leibniz, Gauss, Cauchy, Fermat, Euler,… Điều này làm cho học sinh dễ ngộ nhận các thành quả toán học chỉ thuộc vào các nước Châu Âu. Thật ra hoàn toàn không phải như vậy. Cũng như tất cả các tinh hoa văn hóa khác hiện được truyền dạy đều là công lao của toàn nhân loại. Theo cách nói của Newton, sở dĩ toán học Châu Âu đạt được những thành tựu rực rỡ như vậy vì đã biết " đứng trên vai những gã khổng lồ". Một trong những gã khổng lồ đó là *nền toán học Ấn Độ*. Trong bài viết này, tôi không có tham vọng trình bày toàn bộ những thành quả của nền toán học đó, mà chỉ đưa ra vài nét độc đáo của nó mà thôi.

1. SỰ LÃNG MẠN CỦA CÁC NHÀ TOÁN HỌC ẤN ĐỘ TRUNG ĐẠI

Văn minh Ấn Độ với sự hợp lưu của hai nền văn minh Sông Ấn và Sông Hằng là một trong những nền văn minh lâu đời nhất của nhân loại. Khoảng 2000 năm trước công nguyên, trong các bản viết về tôn giáo thời Sulvasutras chứng tỏ rằng người Ấn Độ đã biết các định lý hình học để xây dựng đền đài, bao gồm Định lý Phythagore.

Cùng với toán học Hy Lạp cổ đại, toán học Ấn Độ trung đại là một viên ngọc sáng của nền văn minh nhân loại. Tuy nhiên khác với các nhà toán học Hy Lạp luôn cố gắng trình bày những tri thức của mình một cách sáng tỏ và hợp lôgic, các nhà toán học Ấn Độ lại viết các thành tựu toán học bằng thơ ca và khoác lên các công trình của mình bằng một ngôn ngữ ảo mờ. Phải chăng các nhà toán học Ấn Độ thường xem mình chủ yếu là nhà thiên văn học, trong khi đó các nhà toán học Hy Lạp xem toán học tồn tại độc lập và được nghiên cứu vì bản thân nó.

Xin điểm qua những thành tựu và một số giai thoại về các nhà toán học Ấn Độ lỗi lạc sống vào khoảng thế kỷ V đến thế kỷ XII sau công nguyên, thời kỳ rực rỡ nhất của toán học Ấn Độ.

• Nhà toán học **Aryabhatas** sinh tại một nơi gần Ptatna ngày nay trên vùng châu thổ Sông Hằng. Ông sống ở thế kỷ VI. Xin hãy đọc một bài toán của ông: " *Hỡi kiều nữ xinh tươi với đôi mắt sáng ngời, vì nàng có biết tới phép nghịch đảo nên không hề bị sai lầm, xin nàng cho biết số nào nhân với* 3 *rồi tăng thêm* $\frac{3}{4}$ *vào tích, rồi chia cho* 7, *lại giảm* $\frac{1}{3}$ *của thương, rồi nhân lên chính nó, rồi lại giảm đi* 52, *rồi lấy căn bậc hai, cộng thêm* 8 *và chia cho* 10 *sẽ được con số* 2".

• Nhà toán học **Mahavira** sống ở miền Nam Ấn Độ vào giữa thế kỷ IX. Các bài toán ông đặt rất nên thơ:

1. *Một đại mãnh xà màu đen chưa hề nếm mùi thất bại dài* 80 *angula đang chuồi mình vào hang, cứ* $\frac{5}{14}$ *ngày thu được* 7,5 *angula và cứ trong* $\frac{1}{4}$ *ngày đuôi nó mọc thêm* 1,25 *angula. Ôi niềm kiêu hãnh của các nhà số học, xin cho biết trong bao lâu mãng xà đó vào hẳn được trong hang?*

2. *Có một sọt xoài thơm. Nhà vua lấy* $\frac{1}{6}$, *hoàng hậu lấy* $\frac{1}{6}$ *chỗ còn lại, và ba hoàng tử lấy* $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ *và* $\frac{1}{2}$ *số còn lại kế tiếp, còn lại* 3 *quả dành cho hoàng tử nhỏ nhất. À, ngài, một người sáng suốt khi giải các bài toán phân số, xin cho biết số xoài trong sọt lúc đầu bao nhiêu?*

3. *Một phần tư lạc đà thấy trong rừng, hai lần căn bậc hai của đàn đang đi lên dốc núi, còn lại ba phần năm số lạc đà đang uống nước bên bờ sông. Vậy số lạc đà của đàn là bao nhiêu?*

• Nhà toán học **Bhaskara** sống vào cuối thế kỷ XI đầu thế kỷ XII. Công trình của ông có tên rất đẹp "*Vòng nguyệt quế của một hệ thống thiên văn*" (Siddhanta Sirimani). Các chương về toán học trong công trình đó cũng mang tên lãng mạn không kém: " *Cái đẹp*" (Lilavati) và " *Số học hạt*" (Viria ganita). Có một giai thoại thú vị kể về ông. Chuyện kể rằng các vì sao đã báo trước một điềm bất hạnh khủng khiếp sẽ xảy ra nếu người con gái duy nhất của ông là Lilavita được làm lễ vu quy không đúng một ngày giờ tốt lành đã định. Trong ngày đó khi cô dâu đầy lo lắng theo dõi mức nước đang xuống dần ở chiếc

BÀ BÀ BÀ=CHÍN+CHÍN+CHÍN

đồng hồ hình chén thì không hiểu sao một viên ngọc từ chiếc khăn đội đầu của cô rơi xuống cái lỗ cho nước chảy ở chiếc đồng hồ và dừng lại làm cho nước tắc và giây phút may mắn qua đi một cách âm thầm. Để an ủi người con gái bất hạnh của mình, Bhaskara đã lấy tên con đặt cho một chương sách của mình.

Các bài toán của Bhaskara thường liên quan đến cấp số cộng, cấp số nhân và Định lý Pythagore với nội dung rất hấp dẫn:

1. *Căn bậc hai của nửa số ong trong bầy đã bay ào tới một bụi hoa nhài, còn lại* $\frac{8}{9}$ *bầy ong ở lại phía sau, một con ong cái bay quanh chú ong đực đang vo ve trong bông sen có mùi thơm ngọt ngào đã quyến rũ nó đêm qua. Xin quý bà cho biết số ong đó là bao nhiêu?*

2. *Arjuna bừng bừng tức giận trong cuộc chiến đã bắn cả một bao tên để giết cho được Karna. Bằng nửa số mũi tên của mình Arjuna đã dùng để che chắn những mũi tên của địch thủ, với 4 lần căn bậc hai của bao đựng đầy tên đã giết được con ngựa, bằng 6 mũi tên giết được người đánh xe ngựa của Karna, với 3 mũi tên đã phá hủy màn chắn, cờ hiệu và cây cung và bằng một mũi tên bắn chết kẻ thù. Arjuna đã bắn đi bao nhiêu mũi tên?*

3. *Có bao nhiêu cách làm biến dạng khác nhau của thần Sambu khi thay đổi 10 vật tượng trưng với nhau trong nhiều bàn tay của thần: cái roi, chiếc ngà voi, con rắn, cái trống con, cái sọ người, cây đinh ba, cái khung giường, con dao găm, mũi tên, cái cung như thần Hari bằng cách thay đổi cái chi, cái đĩa, bông sen, cái tù và và vỏ ốc?*

2. BRAHMAGUPTA, CHIẾC CẦU NỐI GIỮA NỀN TOÁN HỌC CỔ ĐẠI HY LẠP VỚI TOÁN HỌC CHÂU ÂU TRUNG ĐẠI

BA BA BA=CHÍN+CHÍN+CHÍN

Tuy nhiên, có một số nhà toán học Ấn Độ làm toán theo tinh thần Hy Lạp, điển hình là nhà toán học **Brahmagupta**, người được xem là nhà toán học Hindu lỗi lạc nhất của thế kỷ VII. Ông sống và làm việc tại trung tâm thiên văn Ujjan tại Trung Ấn. Năm 628 ông viết cuốn "*Hệ thống Brahama đã duyệt lại*" (Brahama - sphuta - siddhata), một công trình thiên văn học gồm 12 chương, trong đó chương 12 và chương 18 nói về toán học.

Khác với nhà toán học Hy Lạp cổ đại Diophante thường quan tâm đến *một nghiệm hữu tỷ nào đó* cho phương trình vô định, Brahmagupta mong muốn *tìm tất cả các nghiệm có thể có*. Trong công trình này, ông trình bày cách giải các phương trình vô định Diophante: $ax+by=c$ với a,b,c là những số nguyên. Phương trình vô định hai ẩn $xy=ax+by+c$ đã được giải bằng phương pháp mà hơn 1000 năm sau Euler mới tìm ra. Đặc biệt ông đã chỉ ra cách làm: từ một nghiệm nguyên $x,y,xy\neq 0$ của phương trình Pell:

$y^2=x^2+1$ (trong đó x không phải là số chính phương) suy ra vô số nghiệm nguyên khác. Lý thuyết hoàn chỉnh về phương trình Pell phải tới hơn 1200 năm sau mới được Lagrange hoàn tất vào những năm $1766-1769$.

Về hình học, Brahmagupta không những đưa ra công thức Héron để tính diện tích một tam giác theo ba cạnh của nó mà còn đưa ra một mở rộng đáng chú ý cho diện tích một tứ giác nội tiếp đường tròn có các cạnh là a,b,c,d và nửa chu vi p:

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Sau đó ông còn mở rộng cho một tứ giác lồi tùy ý:

$$S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\frac{A+C}{2},$$

trong đó A,C là hai góc đối diện của tứ giác.

Sau đây là một số kết quả đáng chú ý của Brahmagupta liên quan đến tứ giác:

1. *Giả sử $ABCD$ là tứ giác nội tiếp với bốn cạnh liên tiếp là a,b,c,d và các đường chéo là m,n.*

Khi đó $m^2=\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}, n^2=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$.

2. *Trong tứ giác nội tiếp có $mn=ac+bd$.* (Định lý Ptolemy).

3. *Trong tứ giác nội tiếp có $m\delta\cos\varphi=ab+cd$, $n\delta\cos\varphi=ad+bc$, trong đó đường kính $MN=\delta$ vuông góc với một trong hai đường chéo và φ là góc giữa MN và đường chéo kia.*

4. *Nếu a,b,c và A,B,C là các số nguyên dương sao cho $a^2+b^2=c^2, A^2+B^2=C^2$ thì tứ giác nội tiếp có các cạnh kề nhau aC,cB,bC,cA* (gọi là hình thang Brahmagupta) *sẽ có diện tích và các đường chéo là những số hữu tỷ, hơn nữa các đường chéo vuông góc với nhau.*

5. *Diện tích của một tứ giác nội tiếp lẫn ngoại tiếp đường tròn bằng căn bậc hai của tích các cạnh của nó.*

6. *Một tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau khi và chỉ khi tổng bình phương của một cặp cạnh đối diện bằng tổng các bình phương của cặp cạnh đối diện còn lại* (Định lý bốn điểm).

3. RAMANUJAN, NHÀ TOÁN HỌC THIÊN TÀI ĐỘC ĐÁO ẤN ĐỘ THỜI CẬN ĐẠI

Ramanujan sinh ngày 22.12.1887 tại một làng quê Ấn Độ, cách thành phố Madras khoảng 400 km. Mặc dù từ nhỏ sống trong cảnh bệnh tật thiếu thốn, ông vẫn có nhiều kết quả toán học khá ấn tượng. Năm 15 tuổi, ông đã giải được các phương trình bậc ba và bậc bốn theo cách riêng của mình. Sau đó bằng con đường tự học, ông có những kết quả sâu sắc về các

chuỗi, về hằng số Euler, về các số Bernoulli và về hàm eliptic.

May mắn thay, ông đã được nhà toán học Anh nổi tiếng G. H. Hardy (1877 - 1947) biết đến và giúp đỡ. Nhờ thế, năm 1914 ông được cấp học bổng sang học đại học Trinity ở Cambridge nước Anh. Hardy kể nhiều câu chuyện thú vị về Ramanujan. Chẳng hạn một lần đến thăm Ramanujan ở bệnh viện, Hardy nói đùa rằng mình đã đi taxi mang biển số là một số "vô vị" là 1729. Ramanujan nói ngay: "Ồ không, đó là một số lý thú, là số nhỏ nhất trong các số viết được dưới dạng tổng của hai lập phương:

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3 \text{ !".}$$

Trong cuộc đời làm toán của mình, Ramanujan để lại 3000 công thức và định lý, trong đó nhiều kết quả không có chứng minh hoặc chỉ dẫn về chứng minh. Đến nay nhiều công thức và định lý của Ramanujan còn được nghiên cứu, và một số kết quả vẫn còn làm nhiều người sửng sốt, chưa biết cách nào để suy ra chúng. Chẳng hạn các công thức sau

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}} = \sqrt[3]{\cos\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}},$$

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{9}} = \sqrt[3]{\cos\frac{3\sqrt[3]{9}-6}{2}}$$

Ramanujan đã tìm ra 15 công thức tính giá trị của π làm kinh ngạc nhiều thế hệ, chẳng hạn công thức sau đây $\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4.396^{4n}}$. Sử dụng công thức này số hạng đầu tiên cho ta giá trị của chính xác đến 6 chữ số thập phân, còn số hạng thứ hai cho ta giá trị của π chính xác đến 12 chữ số thập phân!

Ramanujan có một đóng góp quan trọng trong việc tìm công thức cho $p(n)$, là số các cách viết một số nguyên dương n dưới dạng tổng của các số nguyên dương không tăng.

Ví dụ $p(4)=5$ vì $4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1$. Dễ thấy $p(1)=1, p(2)=2, p(3)=3, p(4)=5, p(5)=7$, $p(6)=11$... và $p(n)$ tăng rất nhanh khi n tăng. Chẳng hạn $p(200)=3.972.999.029.388$. Năm 1918, Ramanujan cùng với Hardy tìm ra công thức tính gần đúng $p(n) \approx \frac{e^{c\sqrt{n}}}{4n\sqrt{3}}$ trong đó $c = \pi\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$. Mãi đến năn 1937, Redenmacher mới tìm được công thức xác định $p(n)$.

Với những cống hiến xuất sắc của mình, năm 1918 Ramanujan được bầu vào Hội Khoa học Hoàng gia Anh, một tổ chức khoa học có uy tín nhất ở Anh. Tiếc thay do điều kiện sức khỏe, Ramanujan qua đời vào ngày 26.4.1920 khi mới 33 tuổi, để lại sự tiếc thương cho bao thế hệ.

Hiện nay, một giải thưởng toán học thường niên mang tên ông - *Giải thưởng Ramanujan* - dành cho các nhà toán học trẻ có những kết quả xuất sắc về toán học. Giải thưởng này được thành lập bởi trung tâm Vật lý Lý thuyết Quốc tế ICTP ở Trieste (Italy), Ủy ban Khoa học Công nghệ Ấn Độ DST và Liên đoàn Toán học Quốc tế IMS.

4. THAY CHO LỜI KẾT

Sau những bước thăng trầm do các biến cố lịch sử gây ra, ngày nay nền toán học Ấn Độ là một nền toán học khá phát triển so với khu vực và Châu Á. Năm 1907 *Hội Toán học Ấn Độ* được thành lập và hai năm sau *Tập san của Hội Toán học Ấn Độ* ra đời ở Madras, gần quê hương của nhà toán học thiên tài Ramanujan. Năm 1933, Tập san Thống kê *Samkhya* của Ấn Độ bắt đầu được ấn hành.

Một điều hết sức thú vị là Giáo sư Ngô Bảo Châu của Việt Nam đã nhận *Giải thưởng Fields ở Đại hội Toán học Quốc tế* ICM 2010 tổ chức tại New Dely, Thủ đô của đất nước huyền thoại Ấn Độ.

BẢ BẢ+BA=CHÍN+CHÍN

PROBLEMS ... (Tiếp theo trang 17)

Problem T9/470. Given n non-negative real numbers $x_i, i=1,2,\ldots,n$ $(n\geq 2)$ satisfying $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$. Show that $\frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{1+x_1}+\frac{x_2}{1+x_2}+\ldots+\frac{x_n}{1+x_n}\right) < \frac{x_1^2}{1+x_1^2}+\frac{x_2^2}{1+x_2^2}+\ldots+\frac{x_n^2}{1+x_n^2}$.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/470. A natural number is called k - *success* if the sum of its digits equals to k. Let a_{ik} be the number of all $k-$ *success* numbers which have i digits. Find the sum $\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}$. ($k, i, m, n$ are positive integers).

Problem T11/470. Find all triples $(x; y; p)$ of two non-negative integers x, y and a prime number p such that $p^x - y^p = 1$.

Problem T12/470. Given a triangle ABC and H is a point inside the triangle such that $\widehat{ABH} = \widehat{ACH}$. A circle which goes through B and C intersects the circle with the diameter AH at two different points X and Y. AH intersects BC at D. Let K be the perpendicular projection of D on XY. Prove that $\widehat{BKD} = \widehat{CKD}$.

Translated by ***NGUYEN PHU HOANG LAN***

(College of Science-Vietnam National University, Hanoi)

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 11

Problem. *Given a rectangle paper of size* 15 cm × 20 cm, *fold it along a diagonal. Determine the area of the common part of two halfs of the paper?* (*Question* 12, *HOMC* 2014 *exam*)

Remark. We already gave one solution for this problem. We would like to give another solution for this by using analytic geometry.

Solution. Choose a coordinate system as in the figure. We need to compute the area of *BFD*. Since we know the height *BA*, the problem is reduced to the problem of computing the base *FD* which is done if we know the coordinates of *F*. Our proof is as follows. First we find the coordinates of *E*, then we write the equation of the line going through *B* and *E*. The intersection of that line and the *x*-axis is *D*.

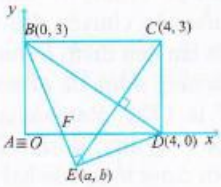
Find E: We have *BE* and *DE* are perpendicular and so are *BD* and *CE*. These geometric properties are translated into algebraic properties: $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{DE}=0$ and $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{BD}=0$. Assume that the coordinates of *E* are (a, b). We have a system of equations

$$\begin{cases} a(a-4)+b(b-3) = 0 & (1) \\ (a-4)4+(b-3)(-3)=0 & (2) \end{cases}$$

From (2), we have $b=\dfrac{4a-7}{3}$. Plug in $b=\dfrac{4a-7}{3}$ into (1), we get a quadratic equation in the variable a. Solve this equation we can get either $a=4$ or $a=\dfrac{28}{25}$. So $a=\dfrac{28}{25}$ is the *x*-coordinate of *E* (why don't we choose $a=4$?). Thus $b=\dfrac{-21}{25}$.

Equation of the line going through B and E:

$$\frac{x}{\frac{28}{25}}=\frac{y-3}{\frac{-21}{25}-3} \qquad (3)$$



Find the x-coordinate of F:

plug in $y=0$ into (3), we get $x=\dfrac{7}{8}$.

Thus $FD=4-\dfrac{7}{8}=\dfrac{25}{8}$. Hence the area of *BFD* (in the figure) is $\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot\dfrac{25}{8}=\dfrac{75}{16}$. Therefore the actual area is $25\cdot\dfrac{75}{16}=\dfrac{1875}{16}$ (why do we need to multiply with 25?).

TỪ VỰNG

analytic geometry	: hình học giải tích (tọa độ)
coordinate system	: hệ tọa độ
is reduced	: được quy về
coordinates	: các tọa độ
line	: đường thẳng
x	: trục tọa độ *Ox*
perpendicular	: vuông góc
geometric properties	: các tính chất hình học
algebraic properties	: các tính chất đại số
quadratic equation	: phương trình bậc 2

NGUYỄN PHỤ HOÀNG LÂN
(*Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội*)

BA*BA*BA=CHÍN+CHÍN+CHÍN

BÀI DỊCH SỐ 8

Problem. *Cho m và n là các số nguyên dương. Xét tập hợp* $S=\{am+bn \mid a, b\in\mathbb{N}\}$. *Chứng minh rằng ƯCLN* $(m,n)=1$ *khi và chỉ khi tập hợp* $\mathbb{N}\setminus S$ *chỉ có hữu hạn các phần tử.*

Lời giải. Nếu $|\mathbb{N}\setminus S|$ là hữu hạn, thì tồn tại các số tự nhiên *r*, *a*, *b*, *c* và *d* sao cho $r=am+bn$ và $r+1=cm+dn$. Do đó $(c-a)m+(d-b)n=1$. Từ đó ƯCLN$(m,n)=1$.

Bây giờ, giả sử rằng ƯCLN$(m,n)=1$. Để chứng minh $|\mathbb{N}\setminus S|$ hữu hạn, ta sẽ chỉ ra tập *S* chứa *m* hoặc *n* số tự nhiên liên tiếp. Giả sử rằng $am+bn=1$, với *a* và *b* là các số nguyên. Ta có thể coi $a<0$ và $b>0$. Đặt $r=n.|a|.m\in S$.

Ta có $r+1=n|a|m+am+bn=(n-1)|a|m+bn\in S$; $r+2=n|a|m+2am+2bn=(n-2)|a|m+2bn\in S$; …

$r+(n-1)=n|a|m+(n-1)am+(n-1)bn=|a|m+(n-1)bn\in S$.

Vậy ta đã chỉ ra rằng tồn tại *n* số tự nhiên liên tiếp trong *S*. Phép chứng minh được hoàn tất.

Chú ý. Phương pháp trên có thể tổng quát hóa để chứng minh mệnh đề tương tự cho một số hữu hạn các số nguyên dương bất kỳ, không chỉ với hai số nguyên dương *m* và *n*.

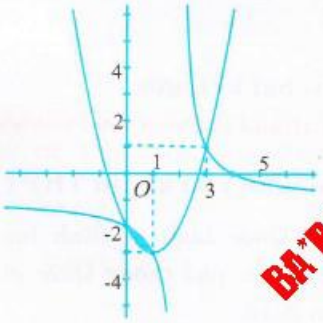
Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt: **Hà Nội:** *Nguyễn Văn Dũng*, 10A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ; **Hưng Yên:** *Triệu Ninh Ngân*, 11A9, *Nguyễn Thị Thùy Linh*, 10A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Nghệ An:** *Hà Gia Bảo*, 10A1, THPT Cửa Lò, TX. Cửa Lò; **Cà Mau:** *Hoàng Công Minh*, 11 chuyên Toán 1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển; **Vĩnh Long:** *Châu Minh Khánh*, 10 T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

GIẢI ĐÁP: SAI Ở ĐÂU ?

(Đề đăng trên TH&TT số 466, tháng 4 năm 2016)

Nhận xét. Lời giải đã sai ở chỗ Bạn Bình đã sai ở chỗ tích phân $S=\int_1^3\left(x^2-2x-2-\frac{4-x}{x-2}\right)dx$ không tồn tại, vì hàm số $y=\frac{4-x}{x-2}$ không liên tục trên đoạn [1; 3]. Về mặt hình học thì hình phẳng giới hạng bởi hai đường $y=x^2-2x-2$ và $y=\frac{4-x}{x-2}$ được thể hiện như hình vẽ sau:



BA*BA*BA=CHÍN+CHÍN+CHÍN

Lời giải đúng: Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y=x^2-2x-2$ và $y=\frac{4-x}{x-2}$ là

$$x^2-2x-2=\frac{4-x}{x-2}$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2x-2)(x-2)=4-x \quad (x\neq 2)$$

$$\Leftrightarrow x^3-4x^2+3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right..$$

Do hàm số $y=\frac{4-x}{x-2}$ không liên tục trên đoạn [1;3], nên diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\int_0^1\left|x^2-2x-2-\frac{4-x}{x-2}\right|dx=\left|\int_0^1\left(x^2-2x-2-\frac{4-x}{x-2}\right)dx\right|$$

$$=\left|\left(\frac{x^3}{3}-x^2-x-2\ln|x-2|\right)\Big|_0^1\right|$$

$$=\left|\frac{-5}{3}+2\ln 2\right|=\frac{5}{3}-\ln 4 \text{ (đvdt).}$$

2) Các bạn sau đã tìm đúng sai lầm và gửi bài sớm về Tòa soạn: **Hà Nội:** *Đinh Vân Anh*, 12A1, THPT Hồ Xuân Hương, số 1 Nguyễn Quý Đức, Q. Thanh Xuân; **Bến Tre:** *Đỗ Thành An*, 12B1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.

KIHIVI

TÌM MAX, MIN

Trong giờ bài tập toán, thầy giáo yêu cầu học sinh làm bài tập: *Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số* $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

Một học sinh đã lên bảng trình bày lời giải như sau:

Tập xác định: $\mathbb{R}$.

$$y'=\frac{4x}{(x^2+1)^2};\quad y'=0\Leftrightarrow x=0;$$

$$y(0)=-1;\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=1.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		∞
y'		$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

Vậy max y = 1, min y = –1.

Lời giải trên có đúng không, nếu không bạn sẽ giải bài toán trên thế nào ?

THÂN VĂN DỰ

(GV THPT Lạng Giang Số 1, Lạng Giang, Bắc Giang)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 470 (8.2016)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN
GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
GS. ĐOÀN QUỲNH
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên
NXB Giáo dục Việt Nam
MẠC VĂN THIỆN
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam
GS. TS. VŨ VĂN HÙNG
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập
NXB Giáo dục Việt Nam
TS. PHAN XUÂN THÀNH

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : *TS.* TRẦN HỮU NAM

Thư kí Tòa soạn : *ThS.* HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, *ThS.* NGUYỄN ANH DŨNG, *TS.* TRẦN NAM DŨNG, *TS.* NGUYỄN MINH ĐỨC, *TS.* NGUYỄN MINH HÀ, *TS.* NGUYỄN VIỆT HẢI, *PGS. TS.* LÊ QUỐC HÁN, *ThS.* PHẠM VĂN HÙNG, *PGS. TS.* VŨ THANH KHIẾT, *GS. TSKH.* NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, *TS.* PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, *PGS. TS.* NGUYỄN ĐĂNG PHẤT, *PGS. TS.* TẠ DUY PHƯỢNG, *ThS.* NGUYỄN THẾ THẠCH, *GS. TSKH.* ĐẶNG HÙNG THẮNG, *PGS. TS.* PHAN DOÃN THOẠI, *ThS.* VŨ KIM THỦY, *PGS. TS.* VŨ DƯƠNG THỤY, *GS. TSKH.* NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 Dành cho Trung học Cơ sở
For Lower Secondary School
Vũ Hữu Chín – Ứng dụng về tính chất của dãy tỉ số bằng nhau.

4 Hướng dẫn giải Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, năm học 2016 – 2017.

7 Đề thi vào lớp 10 Trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, năm học 2016 – 2017.

8 Tìm hiểu sâu thêm về Toán học Phổ thông
Đoàn Quỳnh – Một cách trình bày sơ cấp về hướng trong mặt phẳng (không dùng chiều quay kim đồng hồ).

12 Diễn đàn phương pháp giải toán
Trần Quang Hùng – Phép đối xứng trục trong thực hành giải toán.

16 Đề ra kì này
Problems in This Issue
T1/470 ..., T12/470, L1/470, L2/470.

18 Giải bài kì trước
Solutions to Previous Problems

27 Chuẩn bị cho kỳ thi THPT Quốc gia
Trần Quốc Luật – Bình luận về đề thi Trung học phổ thông Quốc gia môn Toán năm 2016.

33 Diễn đàn dạy học Toán
Huỳnh Văn Minh – Cặp đôi hoàn hảo trong giải hệ phương trình hai ẩn.

35 Lịch sử Toán học
Lê Quốc Hán – Sự độc đáo của Toán học Ấn Độ.

38 Tiếng Anh qua các bài toán - *Bài số* 11
Bài dịch số 8 - Tiếng Anh qua các bài toán

39 Sai lầm ở đâu?
Giải đáp: Sai ở đâu?
Thân Văn Dự – Tìm Max, Min.

BA BA BA=CHÍN+CHÍN+CHÍN

Ảnh bìa 1: Nhà Toán học Ấn Độ *Brahmagupta* (khoảng 598 - 670 sau CN) - *Nguồn Internet*

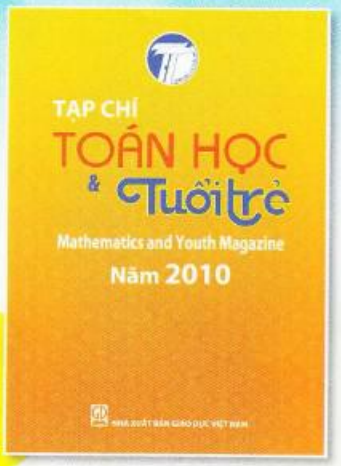
Biên tập: LÊ MAI
Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: MAI ANH

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

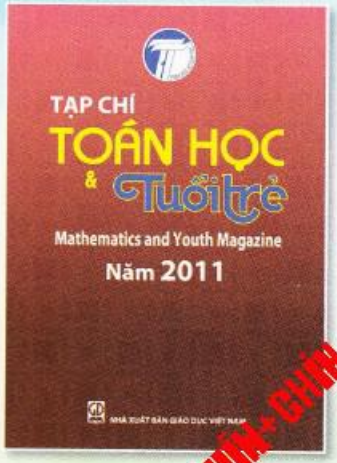
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

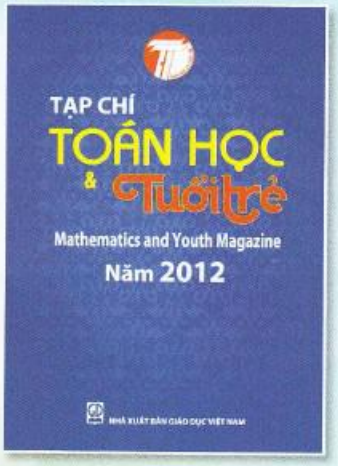
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng

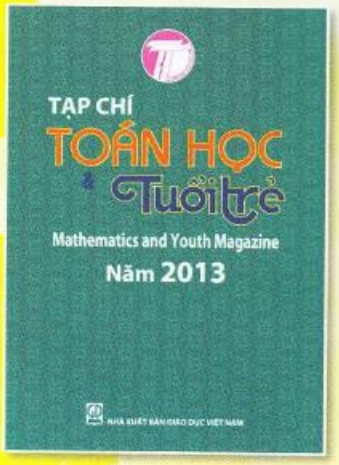


Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 1[illegible].000 đồng

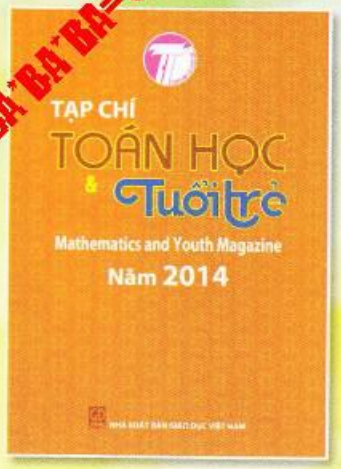


Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng

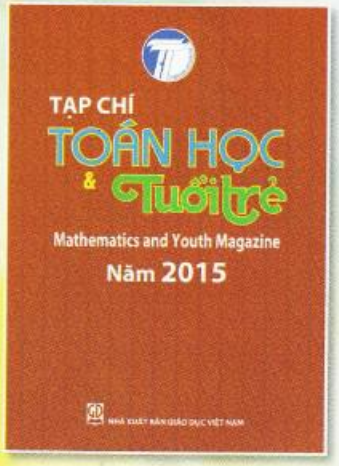
BA*BA*BA=CHÍN+CHÍN



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Bạn đọc có thể đặt mua các cuốn Đóng tập này tại các cơ sở BƯU ĐIỆN trên toàn quốc hoặc đặt mua tại Tòa soạn.

Mọi chi tiết xin liên hệ: TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
187B GIẢNG VÕ, ĐỐNG ĐA, HÀ NỘI

- Điện thoại – Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Cuốn sách

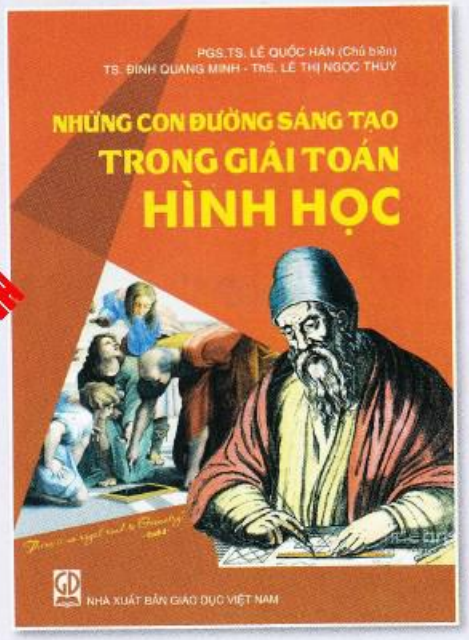
NHỮNG CON ĐƯỜNG SÁNG TẠO TRONG GIẢI TOÁN HÌNH HỌC

(của các tác giả: PGS.TS. NGƯT Lê Quốc Hán (chủ biên), TS. Đinh Quang Minh, Th.S. Lê Thị Ngọc Thúy)

Sách dày 472 trang, khổ 17 × 24cm, giá bìa 80.000 đồng. Nội dung của sách trình bày các phương pháp giải những loại toán *hình học phổ thông* điển hình với gần 1000 bài toán hình học từ lớp 7 đến lớp 12 theo chương trình Bộ Giáo dục & Đào tạo hiện ban hành. Ngoài ra sách còn trình bày nguồn gốc những bài toán ấy và cách thức sáng tác các bài toán mới từ chúng. Có lẽ đây là nét khác biệt của cuốn sách này với phần lớn các sách tham khảo toán cùng loại.

Sách gồm ba phần chính. Phần *Hình học phẳng* dành cho các học sinh khá giỏi về toán; trong đó có nhiều bài toán không dễ, được chọn trong các đề thi Olympic Toán Quốc tế và Khu vực. Một số định lý và khái niệm quen thuộc và ít quen thuộc được đề cập khá chi tiết như: *Định lý Thales, Định lý Pythagore, Định lý Ptolemy, Công thức Lebniz, Công thức Euler, Bài toán Torricelli, Bài toán Napoléon, Đường thẳng và đường tròn chín điểm Euler, Đường thẳng Simson, Điểm Lemoine,* ... Phần *Hình học không gian* chủ yếu dành cho học sinh đại trà. Vì vậy bên cạnh các bài toán khó đánh dấu * là những bài toán chọn trong các đề thi Tuyển sinh Đại học hay Tốt nghiệp THPT mấy năm gần đây. Ngoài phương pháp chính là suy luận lôgic, thỉnh thoảng các tác giả sử dụng công cụ vectơ nếu thấy thật cần thiết. Phần *Mối liên hệ giữa hình học với các phân môn khác* như Lượng giác, Đại số; các tác giả tập trung vào phần *Tam giác lượng* với nhiều bài toán hay, và trong phần *Phương pháp hình học trong đại số* đề cập đến một số dạng toán hình học giải tích phẳng thường gặp trong các kỳ thi Tuyển sinh đại học hay Tốt nghiệp THPT.

Sách cố gắng trình bày dựa trên sự kết hợp hài hòa của văn phong tươi mát, độc đáo và sắc sảo của Polya với sự giản dị dễ hiểu mà thâm trầm sâu sắc của Hứa Thuần Phỏng. Có thể xem đây là những suy nghiệm sâu sắc nhất của nhóm tác giả, đặc biệt là của NGƯT



Lê Quốc Hán, chủ biên cuốn sách với 50 năm học và giải toán.

Tin rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo yêu toán phổ thông, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường Đại học và Cao đẳng ngành Toán, cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học tốt môn Hình học vốn được xem là khó nhưng hấp dẫn này.

BA BA BA = CHÍN + CHÍN + CHÍN

Mọi chi tiết xin liên hệ: TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
187B GIẢNG VÕ, ĐỐNG ĐA, HÀ NỘI
• Điện thoại – Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
• Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT8M6

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2016

Giá: 12.500 đồng
Mười hai nghìn năm trăm đồng