No. 18

Epsilon

Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán

stay home stay safe

THUẬT TOÁN GIÚP TĂNG TỐC ĐỘ XÉT NGHIỆM CORONA
Smriti Mallapaty

ĐUỔI BẮT VÀ CHẠY THOÁT
Trịnh Đào Chiến

VÀ CÁC CHUYÊN MỤC KHÁC...

"Bài toán "chốt hình chữ nhật" thoạt nhìn giống như loại câu hỏi mà một học sinh trung học có thể giải quyết được với compa và thước kẻ, nhưng nó đã cản đường những nỗ lực cao nhất của các nhà toán học trong nhiều thập kỷ."
"Các quan điểm hình học mới trong việc giải các bài toán cũ về hình chữ nhật" - KEVIN HARTNETT

"Mỗi ô của bảng hình chữ nhật 4×4 được điền các số 1 và −1. Biết rằng tổng các số mỗi hàng và mỗi cột đều bằng 0. Hỏi có bao nhiêu cách điền khác nhau?"
"Các bài toán tổ hợp liên quan số học" - LÊ PHÚC LỮ

TRẦN NAM DŨNG

Tống Hữu Nhân	Lê Viết Ân	Lê Phúc Lữ
Võ Quốc Bá Cẩn	Trần Quang Hùng	Nguyễn Tất Thu
Ngô Quang Dương	Nguyễn Văn Huyện	Đặng Nguyễn Đức Tiến

LỜI NGỎ

"Nắng tháng 8 vàng rực trên những con đường, mùa hè đã đến độ chín mùi. Những cuộc vui, những chuyến đi xa đang đúng dịp tưng bừng nhất. Nhưng đâu đó, vào độ tháng tám lưng chừng, vài cơn mưa chợt đi chợt đến, vài ngọn gió sớm mát lành đưa đến mùi vị một mùa thu tựu trường chẳng còn bao xa."

Đó là lời tựa mà chúng tôi đã viết cho Epsilon số 10. Bốn năm sau, chúng ta đang sống trong một trong những năm kỳ lạ bậc nhất trong lịch sử nhân loại, năm 2020 hay còn gọi là năm đại dịch Covid-19. Mùa hè của chúng ta đã không còn như cũ, những niềm vui quây quần bên bạn bè và gia đình, của những chuyến du lịch khám phá đã khác rất xa ...

Nhưng, chúng ta sẽ không chùn bước, chúng ta sẽ cùng nhau chiến đấu, và sẽ lại một lần nữa vượt qua đại dịch này như nhân loại đã từng vượt qua vô vàn khó khăn trong lịch sử. Bởi lẽ, đi nhiều người, ta sẽ đi rất xa.

"Đi nhiều người, ta sẽ đi rất xa ..." Đó chính là tinh thần của Epsilon, là chỉ dẫn mà chúng tôi luôn theo đuổi từ những ngày đầu tiên.

Bởi lẽ, *Epsilon, tức là rất nhỏ, nhưng không bằng 0. Và nhiều epsilon cộng lại có thể trở thành những cái đáng kể. Có thể là 1, là 2, có thể là vô cùng.*

Bởi lẽ, *Epsilon là tờ báo của cộng đồng, dành cho cộng đồng.*

Và cộng đồng chúng ta sẽ lại cùng nhau tiếp bước với một epsilon nữa, Epsilon 18.

"Đi nhiều người, ta sẽ đi rất xa ..."

MỤC LỤC

TÍNH CĂN BẬC HAI CỦA MỘT SỐ NHƯ THẾ NÀO?

Lý Ngọc Tuệ

TÓM TẮT

Ai trong chúng ta cũng đã từng học và luyện tập một cách thành thục cách chia 2 số theo từng chữ số ở trong trường học phổ thông. Tuy nhiên với những phép tính khác, chẳng hạn như căn bậc 2 $\sqrt{X}$, chúng ta ít khi phải tính toán bằng tay một giá trị cụ thể nào đó, chẳng hạn như $\sqrt{2,357}$. Và mỗi khi cần phải tính toán những giá trị cụ thể như vậy, máy tính cầm tay, hay phần mềm tính toán trong máy vi tính hoặc điện thoại có thể cho chúng ta đáp số một cách nhanh chóng. Làm sao những chiếc hộp đen này có thể tính toán được những phép tính này có lẽ là một điều bí ẩn với nhiều người, và đôi khi kết quả nhận được từ chúng lại không chính xác lắm. Một trong những ví dụ khá nổi tiếng là phần mềm Calculator của Microsoft Windows tính ra $\sqrt{4} = 1,9999999\ldots$ trong một thời gian dài. Lỗi này mãi mới được Microsoft sửa trong khoảng hơn 1 năm trở lại đây.

Trong bài này, chúng ta sẽ tìm hiểu làm sao có thể mở rộng phương pháp tính chia theo từng chữ số để tính chính xác những phép toán khác như tìm căn bậc hai $\sqrt{X}$, hay là nghịch đảo của căn bậc hai $\dfrac{1}{\sqrt{X}}$.

1. Thuật toán tính chia theo từng chữ số.

Cho hai số dương $X, Y > 0$ và $b \geq 2$ là một cơ số cố định. Gọi $Z = \dfrac{X}{Y}$ là thương số của phép chia X cho Y, được biểu diễn dưới dạng chuẩn hóa với cơ số $b \geq 2$:

$$Z = b^e \cdot \overline{z_0, z_1 z_2 \ldots}, z_i \in \{0, 1, \ldots, b-1\}, z_0 \neq 0. \tag{1.1}$$

Đặt Z_n là $(n+1)$ chữ số đầu tiên của Z:

$$Z_n = \overline{z_0, z_1 z_2 \ldots z_n},$$

chúng ta có được mối liên hệ hiển nhiên giữa Z_n và Z_{n-1} như sau:

$$Z_n = Z_{n-1} + z_n b^{-n}. \tag{1.2}$$

Bên cạnh đó, Z và Z_n bị chặn hiển nhiên bởi bất đẳng thức:

$$Z_n \leq b^{-e} Z < Z_n + b^{-n}. \tag{1.3}$$

Phần dư thứ n của phép chia $\dfrac{X}{Y}$ được định nghĩa như sau:

$$R_n := b^n(X' - YZ_n) \quad \text{với} \quad X' = b^{-e}X. \tag{1.4}$$

Khi đấy, bất đẳng thức (1.3) tương đương với:

$$0 \le R_n < Y. \tag{1.5}$$

Từ mối quan hệ giữa Z_n và Z_{n-1} trong (1.2), chúng ta có được công thức truy hồi cho R_n như sau:

$$\begin{aligned} R_n &= b^n(X' - YZ_n) \\ &= b^n\big(X' - Y\big(Z_{n-1} + z_n b^{-n}\big)\big) \\ &= b^n\big(X' - YZ_{n-1} - z_n Y b^{-n}\big) \\ &= b \cdot b^{n-1}(X' - YZ_{n-1}) - z_n Y \\ &= bR_{n-1} - z_n Y. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Thay thế (1.6) vào điều kiện (1.5):

$$0 \le bR_{n-1} - z_n Y < Y \iff 0 \le \frac{bR_{n-1}}{Y} - z_n < 1.$$

Hay nói một cách khác, z_n chính là phần nguyên của $\dfrac{bR_{n-1}}{Y}$, chính là công thức quen thuộc để tìm chữ số thứ n của thương số $Z = \dfrac{X}{Y}$:

$$z_n = \left\lfloor \frac{bR_{n-1}}{Y} \right\rfloor. \tag{1.7}$$

Lưu ý rằng khi cơ số $b = 2$, công thức (1.7) được đơn giản hóa thành:

$$z_n = \begin{cases} 1 & , 2R_{n-1} \ge Y \\ 0 & , 2R_{n-1} < Y \end{cases}. \tag{1.8}$$

Chúng ta có thể tổng kết lại thuật toán tìm thương của 2 số dương như sau:

Thuật toán 1. $\dfrac{X}{Y} = b^e \cdot \overline{z_0, z_1 z_2 \ldots}$ là thương số của phép chia X cho Y được biểu diễn với cơ số $b \ge 2$ có thể được tìm thấy như sau:

1. e là số nguyên lớn nhất sao cho $b^e Y \le X$,
2. $\begin{cases} z_n &= \left\lfloor \dfrac{bR_{n-1}}{Y} \right\rfloor \\ R_n &= bR_{n-1} - z_n Y \end{cases}$, với điều kiện ban đầu $R_{-1} = b^{-e}X$.

2. Thuật toán tính căn bậc hai theo từng chữ số.

Áp dụng phân tích như ở phần trước, với một số dương cho trước $X > 0$, đặt $Z = \sqrt{X}$ là căn bậc hai của X, được biểu diễn dưới dạng chuẩn hóa với cơ số $b \geq 2$ như (1.1).

Chúng ta định nghĩa phần dư thứ n của phép tính căn bậc 2 $\sqrt{X}$ bởi:

$$R_n := b^n \left(X' - Z_n^2\right) \quad \text{với} \quad X' = b^{-2e} X. \tag{2.1}$$

Từ (1.3), ta suy ra được các chặn trên và dưới của phần dư R_n như sau:

$$\begin{aligned} 0 \leq R_n &= b^n \left(X' - Z_n^2\right) \\ &= b^n \left(\sqrt{X'} - Z_n\right)\left(\sqrt{X'} + Z_n\right) \\ &= b^n \left(b^{-e} Z - Z_n\right)\left(b^{-e} Z + Z_n\right) \\ &< b^n b^{-n} \left(2Z_n + b^{-n}\right) \\ &= 2Z_n + b^{-n}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Tương tự như ở phần trước, công thức truy hồi cho R_n cũng được tính dựa vào (1.2) như sau:

$$\begin{aligned} R_n &= b^n \left(X' - Z_n^2\right) \\ &= b^n \left(X' - \left(Z_{n-1} + z_n b^{-n}\right)^2\right) \\ &= b^n \left(X' - \left(Z_{n-1}^2 + 2z_n Z_{n-1} b^{-n} + z_n^2 b^{-2n}\right)\right) \\ &= b^n \left(X' - Z_{n-1}^2\right) - \left(2z_n Z_{n-1} + z_n^2 b^{-n}\right) \\ &= bR_{n-1} - \left(2z_n Z_{n-1} + z_n^2 b^{-n}\right). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Dựa vào công thức truy hồi này, chúng ta có được công thức tìm chữ số thứ n như sau:

$$z_n = \max\left\{d \in \{0, 1, ..., b-1\} : 2dZ_{n-1} + d^2 b^{-n} \leq bR_{n-1}\right\}. \tag{2.4}$$

Để thấy được tính đúng đắn của công thức (2.4), giả sử như chúng ta chọn chữ số z_n sao cho:

$$2(z_n + 1)Z_{n-1} + (z_n + 1)^2 b^{-n} \leq bR_{n-1}. \tag{2.5}$$

Lưu ý rằng điều kiện (2.5) là đủ tổng quát vì $2dZ_{n-1} + d^2 b^{-n}$ là hàm đơn điệu tăng với $d \in [0, b]$.

Áp dụng (2.5) vào (2.3), ta có được:

$$\begin{aligned} R_n &= bR_{n-1} - \left(2z_n Z_{n-1} + z_n^2 b^{-n}\right) \\ &\geq \left(2(z_n + 1)Z_{n-1} + (z_n + 1)^2 b^{-n}\right) - \left(2z_n Z_{n-1} + z_n^2 b^{-n}\right) \\ &= 2Z_{n-1} + 2z_n b^{-n} + b^{-n} \\ &= 2(Z_{n-1} + z_n b^{-n}) + b^{-n} \\ &= 2Z_n + b^{-n} \end{aligned},$$

trái với (2.2). $\square$

Khi cơ số $b = 2$, công thức (2.4) có thể được đơn giản hóa thành:

$$z_n = \begin{cases} 1 & , 2R_{n-1} \geq 2Z_{n-1} + b^{-n} \\ 0 & , 2R_{n-1} < 2Z_{n-1} + b^{-n} \end{cases}. \tag{2.6}$$

Để ý rằng với công thức (1.7) cho phép chia không phụ thuộc vào các chữ số trước của thương số, mà chỉ phụ thuộc vào phần dư R_{n-1} và số bị chia Y. Tuy nhiên, công thức (2.4) tìm chữ số thứ n, cho $\sqrt{X}$ phụ thuộc vào cả phần dư R_{n-1} và kết quả Z_{n-1} của các bước trước đấy.

Chúng ta có thể tổng kết lại thuật toán tìm căn bậc 2 của số dương X:

Thuật toán 2. $\sqrt{X} = b^e \cdot \overline{z_0, z_1 z_2 \ldots}$ là căn bậc hai của X được biểu diễn với cơ số $b \geq 2$ có thể được tìm thấy như sau:

1. e là số nguyên lớn nhất sao cho $b^{2e} \leq X$,
2. $\begin{cases} z_n & = \max\left\{d \in \{0, 1, ..., b-1\} : 2dZ_{n-1} + d^2 b^{-n} \leq bR_{n-1}\right\} \\ R_n & = bR_{n-1} - \left(2z_n Z_{n-1} + z_n^2 b^{-n}\right) \end{cases}$

   với điều kiện ban đầu $\begin{cases} Z_{-1} & = 0 \\ R_{-1} & = b^{-2e} X \end{cases}.$

3. Thuật toán tính nghịch đảo của căn bậc hai theo từng chữ số.

Với một số dương cho trước $X > 0$, đặt $Z = \dfrac{1}{\sqrt{X}}$ là nghịch đảo của căn bậc hai của X, được biểu diễn dưới dạng chuẩn hóa với cơ số $b \geq 2$ như (1.1).

Chúng ta định nghĩa phần dư thứ n của phép tính nghịch đảo của căn bậc 2 $\dfrac{1}{\sqrt{X}}$ bởi:

$$R_n := b^n \left(1 - X' Z_n^2\right) \quad \text{với} \quad X' = b^{-2e} X. \tag{3.1}$$

Từ (1.3), ta suy ra được các chặn trên và dưới của phần dư R_n như sau:

$$\begin{aligned} 0 \leq R_n &= b^n \left(1 - X' Z_n^2\right) \\ &= b^n \left(1 - \sqrt{X'} Z_n\right)\left(1 + \sqrt{X'} Z_n\right) \\ &\leq b^n \sqrt{X'} \left(b^{-e} Z - Z_n\right) \cdot 2 \\ &< 2 b^n b^{-n} \sqrt{X'} \\ &= 2\sqrt{X'}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Công thức truy hồi cho R_n được tính dựa vào (1.2) như sau:

$$\begin{aligned}
R_n &= b^n\big(1 - X'Z_n^2\big) \\
&= b^n\Big(1 - X'\big(Z_{n-1} + z_n b^{-n}\big)^2\Big) \\
&= b^n\big(1 - X'\big(Z_{n-1}^2 + 2z_n Z_{n-1} b^{-n} + z_n^2 b^{-2n}\big)\big) \\
&= b^n\big(1 - X'Z_{n-1}^2\big) - X'\big(2z_n Z_{n-1} + z_n^2 b^{-n}\big) \\
&= bR_{n-1} - X'\big(2z_n Z_{n-1} + z_n^2 b^{-n}\big).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Bài tập 3. Chứng minh tính đúng đắn của công thức tìm chữ số thứ n cho nghịch đảo của căn bậc 2 của X:

$$z_n = \max\big\{d \in \{0, 1, ..., b-1\} : X'\big(2dZ_{n-1} + d^2 b^{-n}\big) \leq bR_{n-1}\big\}. \tag{3.4}$$

Thuật toán 4. $\dfrac{1}{\sqrt{X}} = b^e \cdot \overline{z_0, z_1 z_2 \ldots}$ là nghịch đảo của căn bậc hai của X được biểu diễn với cơ số $b \geq 2$ có thể được tìm thấy như sau:

1. e là số nguyên lớn nhất sao cho $b^{2e}X \leq 1$,
2. $\begin{cases} z_n & = \max\big\{d \in \{0, 1, ..., b-1\} : b^{-2e}X \cdot \big(2dZ_{n-1} + d^2 b^{-n}\big) \leq bR_{n-1}\big\} \\ R_n & = bR_{n-1} - b^{-2e}X \cdot \big(2z_n Z_{n-1} + z_n^2 b^{-n}\big) \end{cases}$

   với điều kiện ban đầu $\begin{cases} Z_{-1} & = 0 \\ R_{-1} & = 1 - b^{-2e}X \end{cases}$.

Bài tập 5. Tìm thuật toán để tính căn bậc 3 $\sqrt[3]{X}$ theo từng chữ số.

Bài tập 6. Tìm thuật toán tổng quát để tính căn bậc n $\sqrt[n]{X}$ theo từng chữ số.

Tài liệu

[1] M. D. Ercegovac, T. Lang, *Digital Arithmetic*, Morgan Kaufmann (2004).

[2] J. M. Muller, *Elementary Functions - Algorithms and Implementation*, ed. 3, Birkhäuser (2016).

[3] J. M. Muller et. al., *Handbook of Floating-Point Arithmetic*, Birkhäuser Basel (2018)

CUỘC HÔN NHÂN CỦA HAI BÀI TOÁN HÌNH HỌC TRONG MỘT NGUYÊN TỬ

Phan Thành Nam
Đại học Munich, Đức

GIỚI THIỆU

Năm 1928, nhà vật lý George Gramov người Nga đưa ra một mô hình dự đoán sự tồn tại và phân rã của hạt nhân nguyên tử. Lý thuyết của Gramov là sự kết hợp của hai bài toán hình học cổ điển: *Bài toán đẳng chu* đặt ra từ trước công nguyên và *bài toán năng lượng hấp dẫn* đặt ra bởi Isaac Newton trong thế kỷ XVII. Tuy phát biểu đơn giản, nhưng nó ẩn giấu nhiều mối quan hệ sâu sắc giữa hình học, giải tích và vật lý, trong đó nhiều kết quả thú vị chỉ mới được khám phá gần đây. Trong bài viết này, tác giả sẽ giới thiệu bài toán Gramov cùng với một số vấn đề liên quan.

1. Bất đẳng thức hoán vị

Chúng ta bắt đầu câu chuyện với một bài toán quen thuộc ở phổ thông.

> Định lý 1 (Bất đẳng thức hoán vị). *Cho hai dãy số thực giảm $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$ và $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$. Khi đó với mọi hoán vị $(b_{\sigma(1)}, \ldots, b_{\sigma(n)})$ của $(b_1, \ldots, b_n)$ ta có*
>
> $$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \geqslant a_1 b_{\sigma(1)} + \cdots + a_n b_{\sigma(n)} \geqslant a_1 b_n + \cdots + a_n b_1. \tag{1}$$

Bất đẳng thức (1) có thể chứng minh bằng quy nạp theo n. Từ bất hoán vị ta có thể suy ra được nhiều kết quả quan trọng, ví dụ bất đẳng thức Chebyshev cho hai dãy số thực cùng tăng hoặc cùng giảm

$$\frac{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n}{n} \geqslant \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n},$$

bất đẳng thức trung bình cộng - trung bình nhân (AM-GM) và bất đẳng thức Cauchy-Schwarz (trong sách giáo khoa Việt Nam gọi là bất đẳng thức Cauchy và bất đẳng thức Bunyakovsky).

Nói nôm na, giả sử rằng a_i là tài sản của chàng trai thứ i, b_i là tài sản của cô gái thứ i, và $a_i b_i$ là tài sản của cặp đôi này nếu họ kết hôn. Khi đó bất đẳng thức hoán vị nói rằng tổng tài sản của toàn xã hội sẽ cao nhất nếu chàng trai giàu nhất kết hôn với cô gái giàu nhất và ngược lại, tức là nên kết hôn kiểu "*môn đăng hộ đối*". Tất nhiên, thực tế khác xa với mô hình này, bởi "*tiền bạc không phải là tất cả*".

Tổng quát hoá lên nhiều chiều: Bất đẳng thức hoán vị có thể tổng quát hoá cho các hàm số thực $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, với tổng được thay bằng tích phân. Để phát biểu các kết quả này, chúng ta cần định nghĩa chính xác thế nào là một hoán vị giảm trong nhiều chiều.

Trước hết, xét hàm đặc trưng χ_Ω của một tập hợp Ω trong $\mathbb{R}^d$, tức là

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in \Omega \\ 0 & \text{nếu } x \notin \Omega \end{cases}$$

Ta định nghĩa hoán vị đối xứng giảm (symmetric-decreasing rearrangement) của χ_Ω là

$$(\chi_\Omega)^* = \chi_{\Omega^*},$$

trong đó Ω^* là quả cầu trong $\mathbb{R}^d$ có tâm tại 0 và có độ đo $|\Omega^*| = |\Omega|$ (độ đo là độ dài trong 1 chiều, diện tích trong 2 chiều, thể tích trong 3 chiều, ...)

Để mở rộng định nghĩa này cho mỗi hàm số $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$, ta sử dụng công thức

$$f(x) = \int_0^t \chi_{\{f>t\}}(x)dt,$$

trong đó $\{f > t\} = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > t\}$ gọi là "*level set*". Với cách nhìn này, ta định nghĩa hoán vị đối xứng giảm $f^* : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ bởi

$$f^*(x) = \int_0^\infty \chi^*_{\{f>t\}}(x)dt.$$

Nói cách khác, "*level set*" của f^* là $\{x : f^*(x) > t\} = \{x : f(x) > t\}^*$. Rõ ràng f^* đối xứng giảm, tức là $f^*(x) \leqslant f^*(y)$ khi $|x| \leqslant |y|$. Hơn nữa, ta có

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^*(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx,$$

nhờ "*layer cake representation*"

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \int_0^\infty |\{x : f(x) > t\}|dt.$$

Trong công thức trên, chúng ta đã định nghĩa tích phân Lebesgue trong $\mathbb{R}^d$ thông qua tích phân Riemann trong $\mathbb{R}$. Nói nôm na, nếu chúng ta muốn tính tổng thu nhập trong một tháng, thì với cách làm của Riemann chúng ta sẽ tính thu nhập từng ngày sau đó cộng dồn, trong khi với cách làm của Lebesgue thì chúng ta đếm có bao nhiêu tờ mệnh giá 500 ngàn, 200 ngàn, 100 ngàn, ... rồi cộng lại. Ở chương trình phổ thông, chúng ta được học cách tính tích phân theo kiểu Riemann. Tuy nhiên, cách tính kiểu Lebesgue có thể áp dụng cho một lớp hàm số rộng hơn (trong bài viết này, mọi hàm số đều đo được theo nghĩa Lebesgue).

Bây giờ, chúng ta có thể phát biểu

Định lý 2 (Bất đẳng thức Hardy-Littlewood). *Với hai hàm số $f, g : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$, ta có*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} f^*(x)g^*(x)dx.$$

Đặc biệt, khi f và g là hàm đặc trưng của hai tập hợp Ω_1, Ω_2 trong $\mathbb{R}^d$, ta có

$$|\Omega_1 \cap \Omega_2| \leqslant |\Omega_1^* \cap \Omega_2^*| = \min(|\Omega_1^*|, |\Omega_2^*|) = \min(|\Omega_1|, |\Omega_2|).$$

Điều này là hiển nhiên, về mặt trực giác khi hai tập hợp càng có tính đối xứng thì chúng càng "*giống nhau*" và do đó càng có nhiều "*điểm chung*". Bất đẳng thức Hardy-Littlewood có thể chứng minh dựa trên trường hợp đặc biệt nói trên, cùng với "*layer cake representation*" và định lý Fubini (bạn đọc có thể xem trong [1], chương 3)

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\{f>t\}}(x)\chi_{\{g>s\}}(x)dx\,ds\,dt \leqslant \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \chi^*_{\{f>t\}}(x)\chi^*_{\{g>s\}}(x)\,dx\,ds\,dt.$$

Một dạng tổng quát hơn của bất đẳng thức Hardy-Littlewood là

Định lý 3 (Bất đẳng thức Riesz). *Cho ba hàm số $f, g, h : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ tuỳ ý. Ta có*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x-y)h(y)dxdy \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f^*(x)g^*(x-y)h^*(x)dxdy.$$

Cấu trúc tích chập $(g * h)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)h(y)dy$ cho phép ta hiểu $g(x-y)$ như là nhân (kernel) của một toán tử. Do đó, nhờ tính đối ngẫu, bất đẳng thức Riesz dẫn tới nhiều ứng dụng sâu sắc. Chẳng hạn khi chọn g là "*heat kernel*", ta có

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f(x)|^2\,dx \geqslant \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f^*(x)|^2\,dx.$$

Ở đây ∇f là gradient (vector các đạo hàm riêng phần) của f. Tổng quát hơn, ta có

Định lý 4 (Bất đẳng thức Pólya–Szegö). *Với $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ và $p \geqslant 1$, ta có*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f(x)|^p\,dx \geqslant \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f^*(x)|^p\,dx.$$

Các bất đẳng thức hoán vị là một công cụ quan trọng của toán học hiện đại. Bạn đọc có thể tham khảo thêm bài giảng của A. Burchard [2]. Dưới đây, chúng ta sẽ thảo luận một số hệ quả cụ thể của các bất đẳng thức này.

2. Bài toán đẳng chu

Trong trường hợp đặc biệt $p = 1$, $f = \chi_\Omega$, đại lượng $\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \chi_\Omega|$ trở thành $\mathrm{Per}(\Omega) =$ chu vi (perimeter) của Ω (trong 3 chiều là diện tích bề mặt của Ω). Khi đó bất đẳng thức Pólya–Szegö trở thành bất đẳng thức đẳng chu (isoperimetric inequality)

$$\mathrm{Per}(\Omega) \geqslant \mathrm{Per}(\Omega^*).$$

Điều này nói rằng trong số các tập hợp trong $\mathbb{R}^d$ có cùng độ đo, quả cầu có chu vi nhỏ nhất. Một cách tương đương, ta có

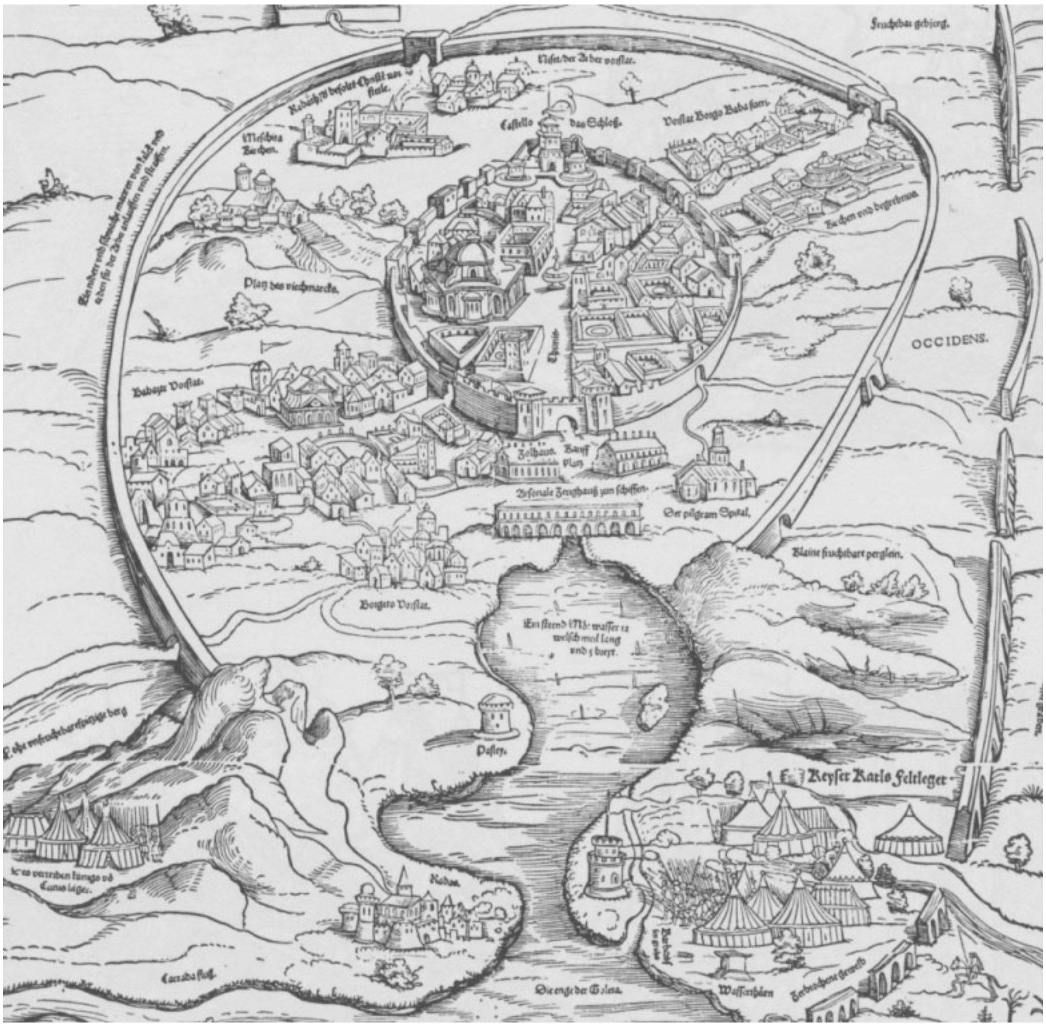
> Định lý 5 (Bài toán đẳng chu). *Trong số các tập hợp trong $\mathbb{R}^d$ có cùng chu vi, quả cầu có độ đo lớn nhất.*

Trong 2 chiều, kết quả trên nói rằng trong số các hình có cùng diện tích thì hình tròn có chu vi nhỏ nhất. Những người Hi Lạp cổ đại đã biết điều này hàng trăm năm trước công nguyên. Một so sánh nhỏ về trình độ toán học đáng kinh ngạc của họ: Trong sách "*Đại Thành Toán Pháp*" của cụ Lương Thế Vinh $(1441 - 1496)$ ta biết $\pi \approx 3$, còn trước đó khoảng 1700 năm trong sách "*On the Measurement of the Circle*" cụ Archimedes $(285 - 212$ trước công nguyên) đã tính được $3.1408 < \pi < 3.14285$.

Dido Purchases Land for the Foundation of Carthage. Engraving by Matthäus Merian the Elder, in *Historische Chronica*, Frankfurt a.M., 1630. Dido's people cut the hide of an ox into thin strips and try to enclose a maximal domain.

Hình 1: Dido cho người cắt miếng da bò để bao quanh vùng đất Carthage [3]

Bài toán đẳng chu còn gọi là bài toán Dido, bởi nó gắn liền với truyền thuyết về Nữ hoàng Dido (còn gọi là Elissa) của xứ Carthage (Tunisia). Trong sử thi anh hùng ca Aeneid của nhà thơ La Mã Virgil, năm 814 trước công nguyên, nàng Dido tới Tunisia và xin mua một mảnh đất cạnh bờ biển. Yêu cầu được chấp thuận, nhưng với điều kiện "*vùng đất đó phải bao phủ được bởi một miếng da bò*". Với tài năng toán học thiên bẩm, Dido đã cắt miếng da bò thành một mảnh dài và dùng nó để bọc quanh một vùng đất hình tròn rộng lớn, sau này là xứ Carthage.



Hình 2: Vùng Carthage trong một bản đồ năm 1535, có thể thấy phần tường thành bên trong (vùng đất gốc của nữ hoàng Dido) gần như tròn hoàn hảo.

Tuy vậy, các chứng minh chặt chẽ cho bài toán đẳng chu chỉ có từ thế kỷ XIX, khi phép tính vi tích phân đã được phát triển đầy đủ. Trong thời gian này, Steiner đã đưa ra một kỹ thuật tuyệt vời về đối xứng hoá, ngày nay gọi là Steiner symmetrization. Ý tưởng của ông là nếu cho trước một hình chưa phải là hình tròn, ông luôn tìm được một hình "*đối xứng hơn*" với cùng diện tích nhưng có chu vi nhỏ hơn. Tuy nhiên, Weierstrass đã nhận ra một vấn đề tính tế, đó là để hoàn tất chứng minh thì cần phải chỉ ra sự tồn tại một hình với chu vi nhỏ nhất. Điều này đã thúc đẩy sự phát triển mạnh mẽ của phương pháp biến phân (calculus of variations). Cho tới năm 1884, H. A. Schwarz mới đưa ra được chứng minh hoàn chỉnh đầu tiên, bằng cách bổ sung một kỹ thuật đối xứng hoá mới, ngày nay gọi là Schwarz symmetrization.

Sau đó, nhiều chứng minh khác tiếp tục được tìm ra. Khoảng những năm 1950, Pólya và Szegö viết cuốn sách "*Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*", trong đó họ tiếp cận bài toán đẳng chu bằng cách phát triển các kỹ thuật đối xứng hoá của Steiner để chứng minh các bất đẳng thức hoán vị liên quan tới các đại lượng vật lý. Đây là công trình mở đường cho nhiều kết quả thú vị trong vật lý toán sau này.

Gần đây, mọi người vẫn tiếp tục nghiên cứu các dạng mở rộng cho bài toán đẳng chu. Năm 2014, Fusco và Julin chứng minh kết quả sau đây [4].

Định lý 6 (Bất đẳng thức đẳng chu dạng mạnh). *Tồn tại một hằng số $C_d > 0$ sao cho với mọi tập $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, ta có*

$$\mathrm{Per}(\Omega) - \mathrm{Per}(\Omega^*) \geqslant C_d \inf_{y \in \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\chi_{\Omega^*}(x) - \chi_\Omega(x+y)}{|x|} dx.$$

Vì hàm $|x|^{-1}$ đối xứng giảm, từ bất đẳng thức Hardy-Littlewood ta biết rằng

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\chi_{\Omega^*}(x) - \chi_\Omega(x+y)}{|x|} dx \geqslant 0.$$

Hơn nữa, dấu "=" chỉ xảy ra khi Ω là một quả cầu.

Các nghiên cứu về bài toán đẳng chu cũng dẫn tới nhiều bước tiến quan trọng trong toán học hiện đại. Bạn đọc có thể xem thêm các bài báo tổng quan của D. Bandle [5] và của M. Ashbaugh và R. Benguria [6].

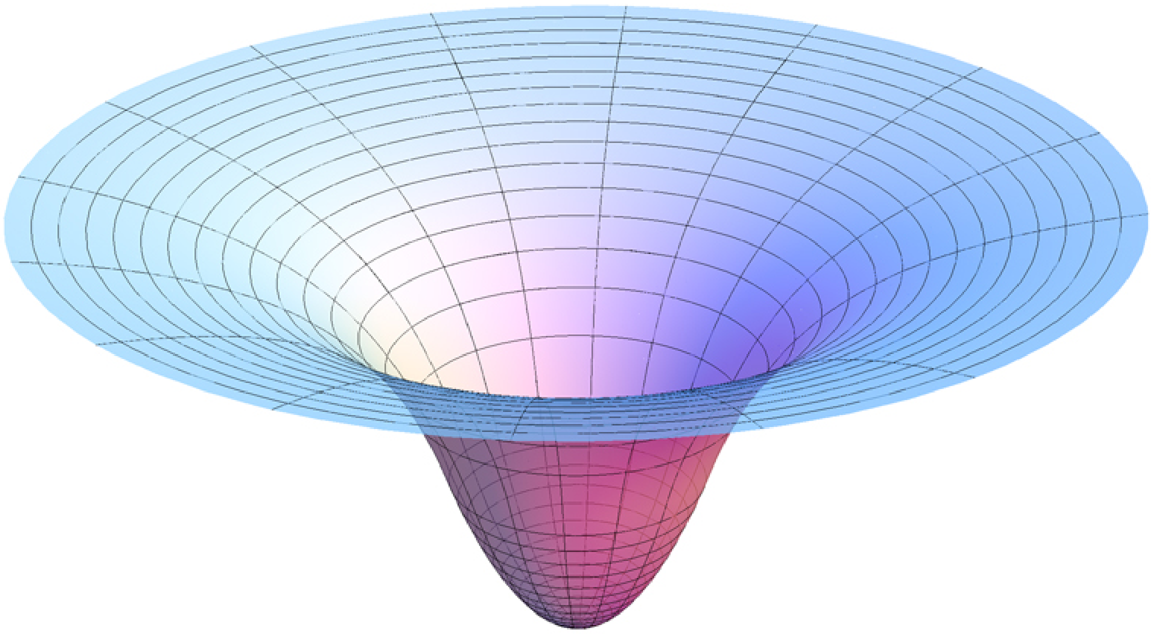
Thực ra bất đẳng thức đẳng chu có mặt ở rất nhiều nơi trong cuộc sống hàng ngày. Các chú mèo có thể không quan tâm lắm tới toán học, nhưng chúng biết chính xác làm thế nào để giảm thiểu diện tích tiếp xúc với môi trường trong những ngày lạnh giá.

Hình 3: Sleeping cat [7].

3. Bài toán năng lượng hấp dẫn nội tại

Theo định luật hấp dẫn nổi tiếng của Newton, một chất điểm tại $0 \in \mathbb{R}^3$ với trọng lượng 1 tạo ra một thế năng $-|x|^{-1}$ tại vị trí $x \in \mathbb{R}^3$ (đạo hàm của nó cho ta lực hấp dẫn $-|x|^{-2}$, ở đây ta cho hằng số hấp dẫn bằng 1). Tổng quát hơn, nếu ta có một vật thể trong $\mathbb{R}^3$ với mật độ $f : \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$, thì thế năng của nó tạo ra tại vị trí $x \in \mathbb{R}^3$ là

$$V_f(x) = -f * |x|^{-1} = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|} dy.$$



Hình 4: Một lát cắt 2 chiều của Newton potential V_{χ_Ω} với Ω là một quả cầu trong $\mathbb{R}^3$ [8].

Trong trường hợp vật thể có mật độ đồng nhất, tức $f = \chi_\Omega$ là hàm đặc trưng của một tập hợp $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, thì tích phân của V_{χ_Ω} trên Ω là năng lượng hấp dẫn nội tại của Ω

$$E_{\mathrm{N}}(\Omega) = -\int_\Omega \int_\Omega \frac{1}{|x-y|} dx dy.$$

Khoảng năm 1687, Newton đặt ra câu hỏi tìm giá trị cực tiểu của $E_{\mathrm{N}}(\Omega)$ trên mọi tập Ω có thể tích cho trước. Từ bất đẳng thức Riesz, ta thu được

> Định lý 7 (Bài toán năng lượng hấp dẫn nội tại). *Trong số các tập hợp $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ có cùng thể tích, quả cầu có năng lượng hấp dẫn $E_{\mathrm{N}}(\Omega)$ nhỏ nhất.*

Ngoài ra, ta cũng biết rằng với thể tích $|\Omega|$ cho trước, năng lượng hấp dẫn $E_{\mathrm{N}}(\Omega)$ luôn âm nhưng có thể gần 0 tuỳ ý (tức là không có giá trị cực đại). Điều này không hiển nhiên, nhưng có thể suy ra từ một định lý cơ bản của Newton.

Định lý 8 (Newton). *Nếu* $f : \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$ *là hàm đối xứng tâm, tức là* $f(x) = f(y)$ *khi* $|x| = |y|$, *thì*

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|} dy = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{\max(|x|, |y|)} dy, \quad \forall x.$$

Định lý này là nền tảng toán học cho lý thuyết lực hấp dẫn của Newton. Giả sử ta xem trái đất là một quả cầu tâm 0, bán kính R, với mật độ đồng nhất $\rho > 0$. Khi đó, nếu đứng tại một vị trí $x \in \mathbb{R}^3$ bên ngoài trái đất, chúng ta bị hút bởi lực hấp dẫn từ trái đất với thế năng bằng

$$-\int_{B(0,R)} \frac{\rho}{|x-y|} dy = -\int_{B(0,R)} \frac{\rho}{\max(|x|, |y|)} dy = -\frac{M}{|x|},$$

trong đó $M = \rho |B(0, R)|$ là trọng lượng của trái đất. Như vậy, lực hấp dẫn từ trái đất chỉ phụ thuộc vào trọng lượng trái đất và khoảng cách từ người đó tới tâm trái đất.

Tương tự, ta giả sử mặt trăng cũng là một quả cầu tâm $B(x_0, r)$ ở xa trái đất (tức là $|x_0| > R + r$), với mật độ $\rho' > 0$. Vì lực hấp dẫn từ trái đất tại mỗi điểm $x \in \mathbb{R}^3$ trên mặt trăng có thế năng là $M|x|^{-1}$, tổng năng lượng hấp dẫn tương tác giữa mặt trăng và trái đất là

$$\begin{aligned} -\int_{B(0,R)} \int_{B(x_0,r)} \frac{\rho\rho'}{|x-y|} dx dy &= -\int_{B(x_0,r)} \frac{M\rho'}{|x|} dx = -\int_{B(0,r)} \frac{M\rho'}{|x-x_0|} dx \\ &= -\int_{B(0,r)} \frac{M\rho'}{\max(|x|, |x_0|)} dx = -\int_{B(0,r)} \frac{M\rho'}{|x_0|} dx = -\frac{Mm}{|x_0|}. \end{aligned}$$

trong đó $m = \rho' |B(0, r)| = m = \rho' |B(x_0, r)|$ là trọng lượng của mặt trăng. Như vậy tổng năng lượng hấp dẫn chỉ phụ thuộc vào trọng lượng trái đất, trọng lượng mặt trăng, và khoảng cách từ tâm trái đất (0) tới tâm mặt trăng (x_0).

Quay lại với năng lượng hấp dẫn nội tại, với hình vành khăn $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : r < |x| < R\}$, theo định lý Newton ta có

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{N}}(\Omega) &= -\int_\Omega \int_\Omega \frac{1}{|x-y|} dx dy = -\int_\Omega \int_\Omega \frac{1}{\max(|x|, |y|)} dx dy \\ &\geqslant -\int_\Omega \int_\Omega \frac{1}{r} dx dy = -\frac{|\Omega|^2}{r}. \end{aligned}$$

Do đó, với thể tích $|\Omega|$ cho trước, năng lượng $E_{\mathrm{N}}(\Omega)$ có thể gần 0 tuỳ ý.

Định lý Newton là một trong những đỉnh cao của Toán học thế kỷ XVII, cũng là điểm khởi đầu của lý thuyết thế năng (Potential theory). Ngày nay, chúng ta có thể chứng minh định lý Newton từ định lý giá trị trung bình (mean-value theorem) của hàm điều hoà (harmonic function).

Định lý 9 (Định lý giá trị trung bình). *Giả sử hàm* g *là dưới điều hoà (sub-harmonic), tức là* $\Delta g(x) \geqslant 0$ *với mọi* $x \in B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^d$. *Khi đó*

$$\frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0,r)} g(y) dy \geqslant g(x_0).$$

> *Hệ quả là khi g là hàm điều hoà, tức là $\Delta g(x) = 0$ với mọi $x \in B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^d$, ta có*
> $$\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} g(y)dy = g(x_0).$$

Hàm số $|x|^{-1}$ là một hàm điều hoà trong $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$. Với $f = \chi_{B(0,R)}$ và $|x| > R$, vì $B(x,R) \subset \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ nên theo định lý giá trị trung bình ta có

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|}dy = \int_{B(x,R)} \frac{1}{|y|}dy = \frac{|B(x,R)|}{|x|} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{\max(|x|,|y|)}dy.$$

Đây là một trường hợp riêng của định lý Newton. Các bạn có thể tham khảo chứng minh đầy đủ của định lý Newton trong [1], chương 9.

Hàm số $|x|^{-1}$ không phải là một hàm điều hoà trên toàn $\mathbb{R}^3$ vì điểm kỳ dị tại 0. Thực ra ta có

$$-\Delta|x|^{-1} = 4\pi\delta_0,$$

với δ_0 là hàm Dirac-delta (đây không phải là một hàm số thông thường mà nên hiểu theo lý thuyết phân bố). Một cách tương đương, Newton potential V_f thoả mãn phương trình Poison

$$\Delta V_f = 4\pi f.$$

Chú ý rằng lực hút điện tích Coulomb có công thức rất giống lực hấp dẫn Newton. Do đó, về mặt toán học, các kết quả về potential $|x|^{-1}$ ở phía trên cũng có thể sử dụng để nghiên cứu tương tác điện tích.

4. Bài toán Gramov

Trong lĩnh vực vật lý hạt nhân, mô hình Gramov là một lý thuyết xấp xỉ trong đó một hạt nhân nguyên tử được mô tả như một giọt chất lỏng với mật độ đồng nhất. Lý thuyết này được Gramov đưa ra năm 1928, khi ông mới 24 tuổi và đang nghiên cứu sau tiến sĩ tại Copenhagen với Niels Bohr. Về mặt toán học, lý thuyết Gramov nói rằng nếu chúng ta xem hạt nhân như một tập hợp Ω trong $\mathbb{R}^3$, thì Ω là lời giải cho bài toán cực tiểu

$$E_G(m) = \inf_{|\Omega|=m}\left\{\mathrm{Per}(\Omega) + \frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega \frac{1}{|x-y|}dxdy\right\}.$$

Ở đây m là tổng số nucleon (gồm có proton và neutron). Đại lượng $\mathrm{Per}(\Omega)$ mô tả sức căng bề mặt của giọt chất lỏng, trong khi năng lượng Coulomb mô tả năng lượng điện tích nội tại giữa các proton.

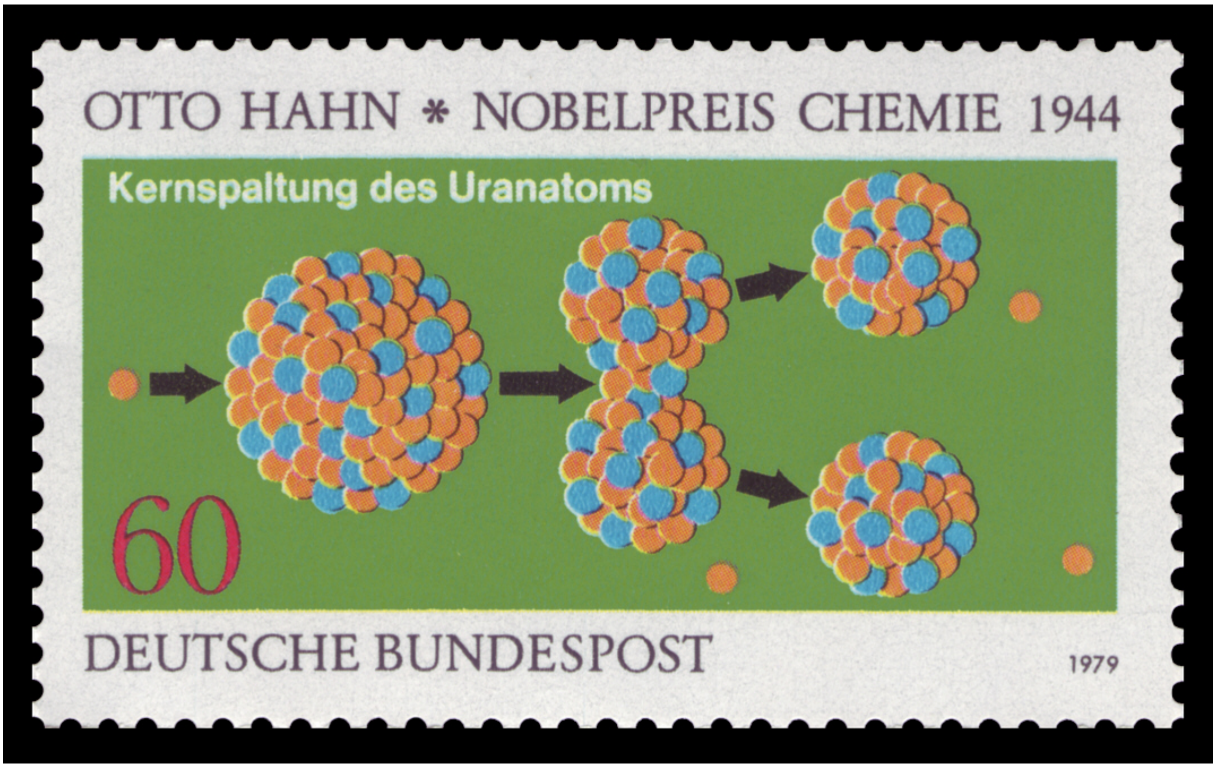
Điều thú vị là trong số các tập hợp Ω với thể tích cho trước $|\Omega| = m$, thì các quả cầu cực tiểu hoá $\mathrm{Per}(\Omega)$ (theo bài toán đẳng chu), nhưng cực đại hoá năng lượng Coulomb (theo bài toán năng lượng điện tích nội tại). Nói nôm na, bài toán của Gramov là "*cuộc hôn nhân của hai bài toán hình học cổ điển*". Tuy nhiên, cuộc hôn nhân này rất mong manh, vì trong cuộc chiến giữa hai đại lượng, các sách vật lý đều khẳng định sẽ chỉ có một bên chiến thắng hoặc cả hai cùng thua, chứ không có một sự thoả hiệp win-win nào cả.

Giả thuyết 1. *Bài toán $E_G(m)$ có lời giải cực tiểu là một quả cầu khi*

$$m \leqslant m_* = 5 \cdot \frac{2 - 2^{2/3}}{2^{2/3} - 1} \approx 3.518.$$

Hơn nữa, khi $m > m_*$ thì $E_G(m)$ không có cực tiểu.

Cụ thể hơn, giả thuyết ở đây là khi khối lượng hạt nhân đủ lớn, thì hạt nhân sẽ bị tách ra làm hai hạt nhân nhỏ hơn với khối lượng như nhau (đây cũng là cách để tính khối lượng tới hạn m_*). Giả thuyết này tương thích với lý thuyết phân rã hạt nhân (phân hạch) được tìm ra năm 1938 bởi hai nhà hoá học Otto Hahn và Fritz Strassmann cùng hai nhà vật lý học Lise Meitner và Otto Robert Frisch (Hahn được giải Nobel hoá học năm 1944 cho phát minh này). Trong thí nghiệm của mình, Hahn và Strassmann bắn các hạt neutron vào hạt nhân uranium và thu được một loại hạt nhân mới (barium). Họ viết thư tới Meitner kể về phát hiện của mình. Sau đó Meitner và Frisch chứng minh rằng hạt nhân uranium đã bị phân rã, hơn nữa còn tạo ra một năng lượng rất lớn. Hiện tượng phân hạch là cơ sở khoa học cho dự án Manhattan về bom nguyên tử trong chiến tranh thế giới thứ hai.



Hình 5: Hiện tượng phân hạch trên một con tem ở Đức năm 1979 [9].

Mặc dù lý thuyết Gramov có trong rất nhiều sách giáo khoa về vật lý hạt nhân, giả thuyết căn bản về sự tồn tại (và không tồn tại) cực tiểu gần như không có bất kỳ kết quả toán học nào trong một thời gian dài. Năm 2014, Knüpfer và Muratov [10] đưa ra chứng minh đầu tiên cho kết quả sau đây

Định lý 10. *Tồn tại hai hằng số $0 < m_1 < m_2$ sao cho*

- *Nếu $m \leqslant m_1$, thì $E_G(m)$ có cực tiểu duy nhất là một quả cầu.*
- *Nếu $m > m_2$, thì $E_G(m)$ không có cực tiểu.*

Cùng thời gian đó, Julin [11] đưa ra một chứng minh khác cho sự tồn tại cực tiểu với m nhỏ, dựa trên bất đẳng thức đẳng chu dạng mạnh Fusco-Julin, đồng thời Lu và Otto đưa ra một chứng minh khác cho sự không tồn tại cực tiểu khi m lớn, dựa trên các đánh giá trong lý thuyết độ đo hình học (geometric measure theory). Năm 2016, cùng với Frank và Killip [12], chúng tôi đưa ra một chứng minh mới rất ngắn gọn cho sự không tồn tại, đồng thời chỉ ra đánh giá định lượng $m_2 \leqslant 8$. Chứng minh này, cùng với chứng minh của Julin cho sự tồn tại, sẽ được trình bày lại dưới đây. Bạn đọc hứng thú có thể tham khảo bài báo tổng quan của Choksi, Muratov và Topaloglu trên Notices of the AMS 2017 [13].

Lời giải. **Tồn tại cực tiểu nếu m nhỏ:** Xét

$$D(\Omega) := \mathrm{Per}() + \frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega \frac{1}{|x-y|}dxdy - \mathrm{Per}(^*) - \frac{1}{2}\int_{\Omega^*}\int_{\Omega^*}\frac{1}{|x-y|}dxdy.$$

Bằng cách tịnh tiến Ω nếu cần thiết, từ bất đẳng thức đẳng chu dạng mạnh của Fusco và Julin, ta có

$$\mathrm{Per}(\Omega) - \mathrm{Per}(\Omega^*) \geqslant C_d \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x)}{|x|}dx,$$

với $f = \chi_{\Omega^*} - \chi_\Omega$. Mặt khác, ta có thể viết

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\chi_\Omega(x)\chi_\Omega(y)}{|x-y|}dxdy - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\chi_{\Omega^*}(x)\chi_{\Omega^*}(y)}{|x-y|}dxdy\\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{f(x)f(y)}{|x-y|}dxdy - \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\chi_{\Omega^*}(x)f(y)}{|x-y|}dxdy.
\end{aligned}$$

Ta biết rằng Newton potential

$$V_f(x) = -\int_{\mathbb{R}^3}\frac{f(y)}{|x-y|}dy,$$

thoả mãn phương trình Poison $\Delta V_f(x) = 4\pi f(x)$ với $x \in \mathbb{R}^3$. Do đó

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{f(x)f(y)}{|x-y|}dxdy = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}(-\Delta V_f(x))V_f(x)dx = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla V_f(x)|^2dx \geqslant 0.$$

Hơn nữa, V_f là hàm dưới điều hoà trên Ω^* vì

$$\Delta V_f(x) = 4\pi f(x) = 4\pi(\chi_{\Omega^*}(x) - \chi_\Omega(x)) \geqslant 0 \quad \forall x \in \Omega^*.$$

Do đó, theo định lý giá trị trung bình, ta thu được

$$-\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\chi_{\Omega^*}(x)f(y)}{|x-y|}dxdy = \int_{\Omega^*}V_f(x)dx \geqslant |\Omega^*|V_f(0) = -|\Omega|\int_{\mathbb{R}^3}\frac{f(x)}{|x|}dx.$$

Vậy tóm lại

$$D(\Omega) \geqslant \Big(C_d - |\Omega|\Big) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x)}{|x|} dx.$$

Theo bất đẳng thức Hardy-Littlewood, ta biết rằng $\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x)}{|x|} dx \geqslant 0$, và dấu "=" chỉ xảy ra khi Ω là một quả cầu. Do đó, nếu $|\Omega| = m < C_d$, thì $D(\Omega) \geqslant 0$ và dấu "=" chỉ xảy ra khi Ω là một quả cầu. Vậy nếu $m < C_d$ thì $E_{\mathrm{G}}(m)$ có cực tiểu duy nhất là một quả cầu.

Không tồn tại cực tiểu nếu $m > 8$: Giả sử $E_{\mathrm{G}}(m)$ có một cực tiểu là Ω. Ta cắt Ω thành hai phần bằng một mặt phẳng H trong $\mathbb{R}^3$, tức là

$$\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \quad \text{với} \quad \Omega^\pm = \Omega \cap H^\pm,$$

trong đó H^+, H^- là phần không gian nằm bên phải và bên trái của mặt phẳng H. Sau đó, ta di chuyển Ω^- ra xa Ω^+ bằng một phép tịnh tiến R. Vì Ω là một tập cực tiểu, năng lượng của nó không vượt quá năng lượng của $\Omega^+ \cup R\Omega^-$. Khi lấy $R \to \infty$, năng lượng của $\Omega^+ \cup R\Omega^-$ trở thành tổng năng lượng của Ω^+ và Ω^-. Do đó, ta có

$$\begin{aligned} \mathrm{Per}(\Omega) + \int_\Omega \int_\Omega \frac{1}{|x-y|} dxdy \leqslant \mathrm{Per}(\Omega^+) &+ \int_{\Omega^+} \int_{\Omega^+} \frac{1}{|x-y|} dxdy \\ &+ \mathrm{Per}(\Omega^-) + \int_{\Omega^-} \int_{\Omega^-} \frac{1}{|x-y|} dxdy. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$2\mathcal{H}^2(\Omega \cap H) \geqslant \int_{\Omega^+} \int_{\Omega^-} \frac{1}{|x-y|} dxdy,$$

trong đó $\mathcal{H}^2(\Omega \cap H)$ là độ đo 2 chiều (Hausdorff measure) của phần giao $\Omega \cap H$.

Tiếp theo, ta tham số hoá mặt phẳng H: Lấy ν là một vector đơn vị trong $\mathbb{R}^3$, lấy $\ell \in \mathbb{R}$ và chọn

$$H_{\nu,\ell} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \nu \cdot x = \ell\},$$

khi đó

$$H^+_{\nu,\ell} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \nu \cdot x > \ell\}, \quad H^-_{\nu,\ell} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \nu \cdot x < \ell\}.$$

Từ bất đẳng thức

$$2\mathcal{H}^2(\Omega \cap H_{\nu,\ell}) \geqslant \int_{\Omega^+} \int_{\Omega^-} \frac{1}{|x-y|} dxdy = \int_\Omega \int_\Omega \frac{\chi(\nu \cdot x > \ell > \nu \cdot y)}{|x-y|} dxdy,$$

ta lấy tích phân theo $\ell \in \mathbb{R}$ (tức là ta tịnh tiến mặt phẳng H để quét toàn bộ $\mathbb{R}^3$). Theo định lý Fubini, ta có

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^2(\Omega \cap H_{\nu,\ell}) d\ell = |\Omega|.$$

Hơn nữa, với hàm đặc trưng $\chi(\nu \cdot x > \ell > \nu \cdot y)$ ta có

$$\int_{\mathbb{R}} \chi(\nu \cdot x > \ell > \nu \cdot y) d\ell = [\nu \cdot x - \nu \cdot y]_+ = [\nu \cdot (x-y)]_+,$$

trong đó $[t]_+ = \max(t, 0)$. Tóm lại, chúng ta thu được

$$2|\Omega| \geqslant \int_\Omega \int_\Omega \frac{[\nu \cdot (x-y)]_+}{|x-y|} dxdy.$$

Cuối cùng, lấy trung bình với mọi vector đơn vị $\nu \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ và sử dụng

$$\int [\nu \cdot z]_+ \frac{d\nu}{4\pi} = \frac{|z|}{2} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta = \frac{|z|}{4},$$

với $z = (x-y)$, chúng ta có thể kết luận

$$2|\Omega| \geqslant \int_\Omega \int_\Omega \frac{|x-y|}{4|x-y|} dxdy = \frac{1}{4}|\Omega|^2,$$

tức là $|\Omega| \leqslant 8$. Nói cách khác, nếu $m > 8$, thì bài toán $E_G(m)$ không có cực tiểu. □

5. Bài toán ion hoá

Tương tự với bài toán Gramov, ta có câu hỏi: "*Một hạt nhân mang được bao nhiêu electron?*" Trong chương trình hoá học lớp 10, chúng ta biết là mỗi nguyên tử trung hoà có số electron đúng bằng điện tích hạt nhân. Nếu số electron khác với điện tích hạt nhân, chúng ta thu được ion dương hoặc ion âm. Về mặt nguyên tắc, tất cả các ion dương đều tồn tại. Tuy nhiên, thực nghiệm chỉ ra rằng chỉ có ion âm với điện tích -1 hoặc tối đa là -2 mà thôi. Việc chứng minh vấn đề này bằng toán là một thách thức lớn trong vật lý toán hiện đại, gọi là bài toán ion hoá.

Để phát biểu chính xác bài toán, chúng ta cần sử dụng các tiên đề cơ bản của vật lý lượng tử. Xét một nguyên tử bao gồm một hạt nhân điện tích $Z > 0$ cố định tại gốc toạ độ $0 \in R^3$ và N electron với điện tích -1 chuyển động xung quanh. Vì electron là các hạt lượng tử, chúng được mô tả bằng một hàm sóng $\Psi(x_1, \dots, x_N)$ trong đó $x_n \in \mathbb{R}^3$ là vị trí của electron thứ n. Đại lượng $|\Psi|^2$ cho ta mật độ xác suất của các electron, do đó

$$\int_{\mathbb{R}^{3N}} |\Psi(x_1, \dots, x_N)|^2 dx_1\, dx_2 \cdots dx_N = 1,$$

Hơn nữa, hàm sóng này phải thoả mãn tính phản đối xứng

$$\Psi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_N) = -\Psi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_N), \quad i \neq j.$$

Điều này đảm bảo nguyên lý loại trừ Pauli là hai electron không thể có chung một vị trí (nếu $x_i = x_j$ với $i \neq j$ thì $\Psi = 0$) [1]. Ở trạng thái ổn định nhất, hàm sóng Ψ cực tiểu hoá hàm năng lượng

$$E(N) = \inf_\Psi \int_{\mathbb{R}^{3N}} \Big(\sum_{i=1}^N |\nabla_{x_i}\Psi|^2 - \sum_{i=1}^N \frac{Z}{|x_i|}|\Psi|^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} \frac{1}{|x_i - x_j|}|\Psi|^2 \Big) dx_1\, dx_2 \cdots dx_N.$$

[1] Chính xác hơn, "*vị trí lượng tử*" của mỗi electron bao gồm tọa độ trong không gian và cả sự quay nội tại gọi là spin. Trong thực tế, mỗi electron có 2 trạng thái spin, nên trong chương trình hóa học lớp 10 ta biết là mỗi "orbital" chỉ có tối đa 2 electron. Ở đây để đơn giản chúng ta bỏ qua spin

Trong hàm năng lượng ta có động năng của electron, tương tác Coulomb giữa electron và hạt nhân (lực hút), và tương tác Coulomb giữa các electron với nhau (lực đẩy).

Trong những năm 1960, G. M. Zhislin chứng minh rằng nếu $N \leqslant Z$, thì bài toán $E(N)$ luôn có một hàm sóng cực tiểu. Hàm sóng này gọi là trạng thái nền (ground state) và thoả mãn phương trình Schrödinger

$$\left(-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{x_i}-\sum_{i=1}^{N}\frac{Z}{|x_i|}+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\frac{1}{|x_i-x_j|}\right)\Psi = E(N)\Psi.$$

Nói cách khác, một hạt nhân điện tích Z có thể mang $1, 2, \dots, Z$ electron (tức là nguyên tử trung hoà và mọi ion dương đều tồn tại). Mặt khác, ta có

> Giả thuyết 2. *Nếu $E(N)$ có cực tiểu, thì $N \leqslant Z + C$ với một hằng số C độc lập với Z. (thực nghiệm cho thấy ta có thể chọn hằng số $C = 1$ hoặc 2).*

Đây là bài toán thứ 9 trong danh sách 15 bài toán mở về toán tử Schrödinger của Barry Simon [14]. Trong danh sách này, bài toán số 4 (Ten Martini problem) và bài toán số 5 (độ đo phổ của Almost-Mathieu operator) đã được giải bởi Avila-Jitomirskaya và Avila-Krikorian (Avila nhận giải Field năm 2014 cho các đóng góp này).

Giả thuyết ion hoá khá hiển nhiên về mặt trực giác, vì nếu một nguyên tử có số electron vượt quá nhiều điện tích hạt nhân, thì electron ngoài cùng (có điện tích âm) sẽ bị đẩy bởi phần còn lại (có tổng điện tích cũng âm). Tuy nhiên, chứng minh điều này bằng toán học hoàn toàn không tầm thường.

Năm 1982, Sigal và Ruskai chứng minh một cách độc lập rằng nếu $E(N)$ có cực tiểu, thì $N \leqslant N_c$ với một số hữu hạn $N_c = N_c(Z) < \infty$. Năm 1984, Lieb đưa ra một chứng minh mới, ngắn gọn hơn và đưa ra đánh giá định lượng $N_c \leqslant 2Z$. Ý tưởng của Lieb là nhân hai vế phương trình Schrödinger với $|x_N|\Psi_N$ và nghiên cứu tương tác giữa electron thứ N với phần còn lại của nguyên tử (ý tưởng này được đề xuất trước đó bởi Benguria trong một mô hình đơn giản hơn). Năm 2012, tác giả chứng minh rằng $N_c \leqslant 1.22Z + 3Z^{1/3}$, cải thiện kết quả của Lieb cho $Z \geqslant 6$. Về các kết quả liên quan, bạn đọc có thể tham khảo thêm trong [15].

Trong khuôn khổ bài viết này, tác giả sẽ trình bày một lời giải cho bài toán ion hoá trong một mô hình đơn giản hơn, gọi là lý thuyết Thomas-Fermi. Lý thuyết này được Llewellyn Thomas và Enrico Fermi đưa ra một cách độc lập năm 1927, trong đó thay vì xét hàm sóng của N electron, họ chỉ tập trung vào hàm mật độ $f : \mathbb{R}^3 \to [0,\infty)$ với $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = N$. Khi đó năng lượng nền của các electron được tính bằng

$$E_{\mathrm{TF}}(N) = \inf_f \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} f^{5/3}(x)dx - \int_{\mathbb{R}^3}\frac{Z}{|x|}f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{f(x)f(y)}{|x-y|}dxdy \right\}.$$

Lý thuyết Thomas-Fermi được nghiên cứu bởi Lieb và Simon năm 1977. Họ quan sát rằng hàm năng lượng là một hàm lồi theo f, do đó nếu cực tiểu tồn tại thì nó là duy nhất và thoả mãn tính đối xứng tâm ($f(x) = f(y)$ nếu $|x| = |y|$). Hơn nữa, nó thoả mãn phương trình Thomas-Fermi

$$\frac{5}{3}\cdot f^{2/3}(x) = \left[\frac{Z}{|x|} - f * |x|^{-1} - \mu\right]_+ = \left[\frac{Z}{|x|} - \int_{\mathbb{R}^3}\frac{f(y)}{\max(|x|,|y|)}dy - \mu\right]_+, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\},$$

với hằng số $\mu \in (-\infty, 0]$ (đây là nhân tử Lagrange liên quan tới ràng buộc $\int_{\mathbb{R}^3} f(x)dx = N$). Ở đây ta đã sử dụng định lý Newton để viết lại vế phải của phương trình Thomas-Fermi. Sử dụng các tính chất này, Lieb và Simon chứng minh được

> Định lý 11. *Bài toán Thomas-Fermi $E_{\text{TF}}(N)$ có một cực tiểu khi và chỉ khi $N \leqslant Z$.*

Sự tồn tại cực tiểu khi $N \leqslant Z$ là khá đơn giản, tương tự như định lý Zhislin cho phương trình Schrödinger. Chứng minh không tồn tại cực tiểu khi $N > Z$ thì phức tạp hơn. Lieb và Simon sử dụng nguyên lý cực đại một cách khéo léo vào phương trình Thomas-Fermi. Dưới đây, tác giả trình bày một chứng minh khác, sơ cấp hơn, chỉ sử dụng bất đẳng thức AM-GM !

Lời giải. Giả sử bài toán Thomas-Fermi $E_{\text{TF}}(N)$ có một cực tiểu f. Nhân hai vế phương trình Thomas-Fermi với $|x|^k f(x)$ với một số mũ $k \geqslant 1$, ta có

$$\frac{5}{3} \cdot |x|^k \cdot f^{5/3}(x) = \left[\frac{Z}{|x|} - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{\max(|x|, |y|)} dy - \mu\right] |x|^k f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Ở đây ta có thể bỏ dấu phần dương của biểu thức trong ngoặc [.], bởi nếu biểu thức này là âm tại x, thì $f(x) = 0$ do phương trình Thomas-Fermi, và khi đó đẳng thức phía trên vẫn đúng vì hai vế bằng 0. Vì $\mu \leqslant 0$, ta có

$$\left[\frac{Z}{|x|} - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{\max(|x|, |y|)} dy\right] |x|^k f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Lấy tích phân với $x \in \mathbb{R}^3$ ta thu được

$$Z \int_{\mathbb{R}^3} |x|^{k-1} f(x) dx \geqslant \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|x|^k f(x) f(y)}{\max(|x|, |y|)} dx dy.$$

Sử dụng tính đối xứng của x và y của biểu thức bên phải, ta có

$$Z \int_{\mathbb{R}^3} |x|^{k-1} f(x) dx \geqslant \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(|x|^k + |y|^k) f(x) f(y)}{2 \max(|x|, |y|)} dx dy.$$

Cách viết đối xứng này cho phép chúng ta sử dụng bất đẳng thức

$$|x|^k + |y|^k \geqslant \left(1 - \frac{1}{k}\right),$$

(có thể dùng bất đẳng thức AM-GM). Điều này dẫn tới

$$\begin{aligned} Z \int_{\mathbb{R}^3} |x|^{k-1} f(x) dx &\geqslant \left(1 - \frac{1}{k}\right) \int_{\mathbb{R}^3} (|x|^{k-1} + |y|^{k-1}) f(x) f(y) dx dy \\ &= \left(1 - \frac{1}{k}\right) \left(\int_{\mathbb{R}^3} f(y) dy\right) \left(\int_{\mathbb{R}^3} |x|^{k-1} f(x) dx\right). \end{aligned}$$

Điều này tương đương với

$$\frac{Z}{|x|} - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{\max(|x|, |y|)} dy. \tag{2}$$

Vì (2) đúng với mọi $k \geqslant 1$, ta có thể lấy $k \to \infty$ và suy ra $Z \geqslant \int_{\mathbb{R}^3} f = N$. □

Định lý trên tuy giải quyết bài toán ion hoá cho lý thuyết Thomas-Fermi, nhưng cũng chứng tỏ rằng lý thuyết Thomas-Fermi không quá chính xác, bởi nó không dự đoán được sự tồn tại của các ion âm trong thực tế. Trong hoá học lượng tử (chẳng hạn các tính toán xây dựng nên bảng tuần hoàn hoá học ngày nay), mọi người sử dụng các mô hình tương tự như lý thuyết Thomas-Fermi nhưng có những hiệu chỉnh thích hợp. Một trong những mô hình như vậy gọi là lý thuyết Thomas-Fermi-Dirac-von Weizsäcker, trong đó năng lượng nền của N electron được tính bằng

$$E_{\mathrm{TFDW}}(N) = \inf_f \Big\{ \int_{\mathbb{R}^3} f^{5/3}(x)dx + c_{\mathrm{W}} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \sqrt{f(x)}|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{Z}{|x|} f(x)dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x)f(y)}{|x-y|} dxdy - c_{\mathrm{D}} \int_{\mathbb{R}^3} f^{4/3}(x)dx \Big\}.$$

Các số hạng với hệ số $c_{\mathrm{D}} > 0$, $c_{\mathrm{W}} > 0$ được đề xuất bởi Dirac (1928) và von Weizsäcker (1935).

Năm 1987, P.-L. Lions chứng minh sự tồn tại của mọi ion dương và nguyên tử trung hoà trong mô hình TFDW, sử dụng phương pháp "*concentration-compactness*" (ông nhận giải Field năm 1994 cho các đóng góp về phương trình đạo hàm riêng phi tuyến). Năm 1993, Le Bris chứng minh rằng một số ion âm có thể tồn tại trong mô hình TFDW. Mặt khác, vấn đề không tồn tại cực tiểu khi N lớn là một bài toán mở trong nhiều năm, một trong những lý do chính là kỹ thuật nhân phương trình với $|x|$ không sử dụng được vì số hạng Dirac có thể rất âm. Năm 2017, cùng với Frank và Van den Bosch, chúng tôi chứng minh được giả thuyết ion hoá cho mô hình TFDW bằng một kỹ thuật hoàn toàn khác.

> Định lý 12. *Nếu bài toán $E_{\mathrm{TFDW}}(N)$ có một cực tiểu, thì $N \leqslant Z + C$ với một hằng số $C > 0$ độc lập với Z.*

Chứng minh kết quả trên sử dụng ý tưởng từ bài toán Gramov. Cụ thể hơn, lời giải cực tiểu được cắt bằng các mặt phẳng và biến đổi tịnh tiến một cách thích hợp. Điều này cho phép kiểm soát số electron xa hạt nhân. Mặt khác, các electron rất gần hạt nhân tuân theo lý thuyết Thomas-Fermi. Với các electron trung gian, chúng tôi sử dụng một phép lặp để cải tiến các đánh giá "*xa*" và "*gần*" một cách liên tục (ý tưởng này được Solovej sử dụng trước đây cho lý thuyết Hartree-Fock [16]). Bạn đọc quan tâm có thể xem thêm trong [17].

Để kết thúc, tôi xin giới thiệu một bài toán liên quan trong danh sách của Simon. Ngược lại với ion âm, nếu nguyên tử trung hoà bị mất một số electron, chúng ta thu được ion dương. Năng lượng cần thiết để tách một electron ra khỏi nguyên tử trung hoà gọi là năng lượng ion hóa

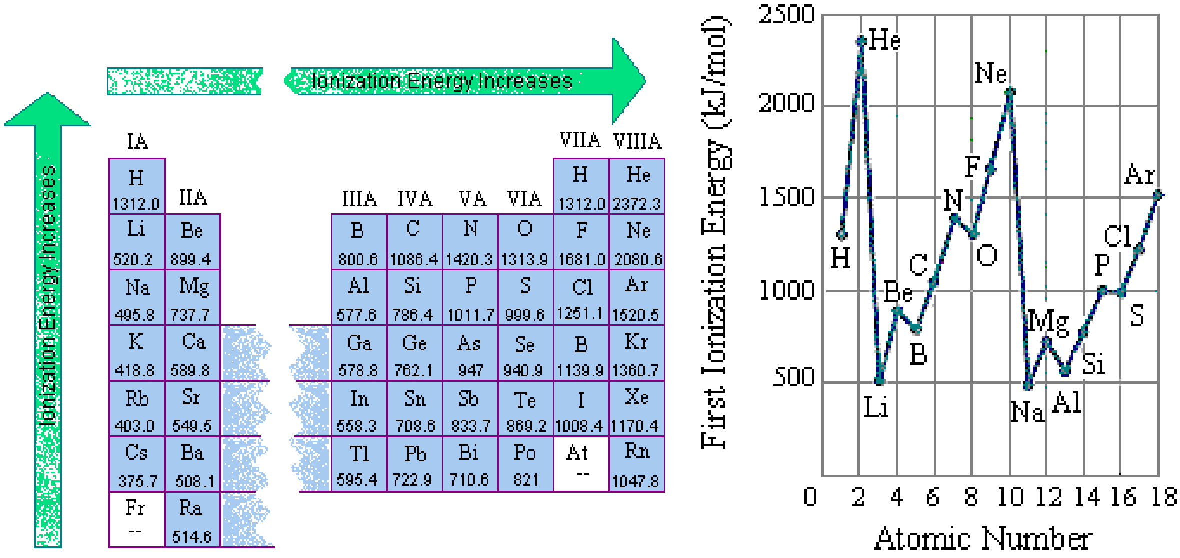
$$I(Z) = E(Z) - E(Z-1).$$

Đây là đại lượng rất quan trọng trong các phản ứng hoá học. Bài toán thứ 10 của Simon liên quan tới công thức tiệm cận của $I(Z)$ khi $Z \to \infty$. Nói riêng, ta có

> Giả thuyết 3. *Ta có $C_1 \leqslant I(Z) \leqslant C_2$ với hai hằng số $C_1, C_2 > 0$ độc lập với Z.*

Năm 1990, Seco, Sigal và Solovej [18] chứng minh rằng $I(Z) \leqslant CZ^{20/21}$.

Trong bảng tuần hoàn hoá học, khi điện tích hạt nhân tăng, năng lượng ion hoá thay đổi theo kiểu "*zích zắc*": Giảm với các nguyên tử cùng một nhóm, nhưng tăng với các nguyên tử cùng



Hình 6: Năng lượng ion hoá (ionization energy) [19].

chu kỳ. Do đó, về mặt toán học, chúng ta có thể dự đoán rằng trong một bảng tuần hoàn "*vô hạn*", năng lượng ion hoá sẽ tuần hoàn xung quanh một số giá trị cố định. Cũng tương tự như giả thuyết về ion âm, bài toán về năng lượng ion hoá đã được kiểm chứng bằng các mô hình xấp xỉ. Tuy nhiên, chứng minh điều này cho phương trình Schrödinger hoàn chỉnh vẫn còn là một bài toán mở.

Tài liệu tham khảo

[1] M. Loss, E. H. Lieb, *Analysis*, American Mathematical Society, 1997.

[2] A. Burchard, *A Short Course on Rearrangement Inequalities*, Lecture Notes 2009.
https://www.math.toronto.edu/almut/rearrange.pdf

[3] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dido_purchases_Land_for_the_Foundation_of_Carthage.jpg

[4] N. Fusco, V. Julin, *A strong form of the Quantitative Isoperimetric inequality, Calc Var. PDEs.* 50 (2014), pp. 925 – 937.

[5] C. Bandle, *Dido's Problem and Its Impact on Modern Mathematics*, Notices of the AMS, October 2017.
https://www.ams.org/publications/journals/notices/201709/rnoti-p980.pdf

[6] M. Ashbaugh, R. Benguria, *The problem of Queen Dido*.
https://faculty.math.illinois.edu/~laugesen/dido-isoperimetry-history.pdf

[7] https://www.reddit.com/r/cats/comments/71vihp/sleeping_in_circles/

[8] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:GravityPotential.jpg

[9] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:DBP_1979_1020_Otto_Hahn_Kernspaltung.jpg

[10] C. B. Muratov, H. Knüpfer, *On an isoperimetric problem with a competing nonlocal term II: The general case*, Comm. Pure Appl. Math. 67 (2014), pp. 1974 – 1994.

[11] V. Julin, *Isoperimetric problem with a Coulombic repulsive term*, Indiana Univ. Math. J. 63 (2014), 77 – 89.

[12] R. L. Frank, R, Killip, P. T. Nam, *Nonexistence of large nuclei in the liquid drop model*, Lett. Math. Phys. 106 (2016), 1033 – 1036.

[13] R. Choksi, C. B. Muratov, I. Topaloglu, *An Old Problem Resurfaces Nonlocally: Gamow's Liquid Drops Inspire Today's Research and Applications*, Notices of the AMS, December 2017.

https://www.ams.org/publications/journals/notices/201711/rnoti-p1275.pdf

[14] B. Simon, *Schrödinger Operators in the Twenty-First Century*, 2000.

https://mathworld.wolfram.com/SimonsProblems.html

[15] P. T. Nam, *On the number of electrons that a nucleus can bind*, Proceedings of the International Congress on Mathematical Physics 2012.

https://arxiv.org/pdf/1209.3642.pdf

[16] J. P. Solovej, *The Ionization Conjecture in Hartree-Fock Theory*, Ann. of Math. (2) 158 (2003), 509 – 576.

[17] R. L. Frank, P. T. Nam, H. Van den Bosch, *The ionization conjecture in Thomas-Fermi-Dirac-von Weizsäcker theory*, Comm. Pure Appl. Math. 71 (2018), 577 – 614.

[18] L. A. Seco, I. M. Sigal, J. P. Solovej, *Bound on the ionization energy of large atoms*, Comm. Math. Phys, 131 (1990), 307 – 315.

[19] http://chemed.chem.purdue.edu/genchem/topicreview/bp/ch7/ie_ea.html

Huyền Sử Đời Hùng Có Phải Của Dân Tộc Ta?

Nguyễn Lê Anh

Giới thiệu

"Để hiểu được lịch sử Việt Nam chúng ta cần phải tìm hiểu tình hình địa chất theo thời gian" - Nguyễn Lê Anh.

Vẫn luôn là những góc nhìn mới lạ cùng với chuỗi lập luận logic dựa trên những nghiên cứu rất dày công, từ khảo cứu tài liệu đến đi thực địa ở các địa phương, tác giả Nguyễn Lê Anh đã đưa ra hàng loạt kết quả nghiên cứu mới về lịch sử, trong đó không ít kết quả đã đánh đổ những nhận định vốn đã tồn tại hàng trăm năm.

Ở Epsilon số 18 này, chúng tôi trân trọng giới thiệu tới độc giả phần 3 của loạt bài "lịch sử" và "Học Toán để làm gì" với một góc nhìn rất mới lạ và có thể gây ra những cơn "địa chấn": *Liệu những huyền sử về Kinh Dương Vương, Hùng Vương và An Dương Vương có phải của dân tộc Việt Nam hay không?*

Huyền sử về Kinh Dương Vương và hồ Động Đình

Dã sử chép *Kinh Dương Vương tên húy là Lộc Tục, là người hình thành nhà nước sơ khai đầu tiên vào năm Nhâm Tuất 2879 TCN, đặt quốc hiệu là Xích Quỷ. Lãnh thổ của quốc gia dưới thời Kinh Dương Vương rộng lớn, phía bắc tới sông Dương Tử (cả vùng hồ Động Đình), phía nam tới nước Hồ Tôn (Chiêm Thành), phía đông là Đông Hải (một phần của Thái Bình Dương), phía tây là Ba Thục (Tứ Xuyên, Trung Hoa ngày nay). Kinh Dương Vương truyền ngôi cho con là Lạc Long Quân.*

Theo Đại Việt Sử ký Toàn thư thì Kinh Dương Vương làm vua và cai trị từ khoảng năm 2879 TCN trở đi. Địa bàn của quốc gia dưới thời vua Kinh Dương Vương rộng lớn, phía bắc tới sông Dương Tử (cả vùng hồ Động Đình), phía nam tới nước Hồ Tôn (Chiêm Thành), phía đông là Đông Hải (một phần của Thái Bình Dương) và phía tây là Ba Thục (Tứ Xuyên, Trung Quốc ngày nay).[a]

[a] Theo vi.wikipedia.org/wiki/Kinh_Dương_Vương, truy cập ngày 10 tháng 8 năm 2020

Khoảng cách từ Cổ Loa tới hồ Động Đình là 500km, toàn núi cao, không thể có liên kết giữa Kinh Dương Vương với cư dân đồng bằng Sông Hồng.

Cách đây khoảng 200 triệu năm, cùng lúc với thời gian hình thành dãy Himalayas với đỉnh Everest, tiểu lục địa Đông Nam Á, bị mảng lục địa Ấn và Úc ép vào phía Nam đại lục địa Âu -

Á, phía Bắc Việt Nam bị gắn vào với phía Nam Trung Quốc. Cú va đập tạo ra các dãy núi Thập Vạn Đại Sơn gồm hàng trăm dãy núi cao nhiều kilomet với bề rộng hàng trăm kilomet về mỗi phía biên giới và chạy dài suốt từ Himalayas đổ ra biển. Đó là bức tường thành chắn giữa hai vùng đất Việt Nam với Trung Quốc. Rừng rậm rạp không thể có đường đi, trăn, rắn, rết, thú dữ ăn thịt nhiều vô kể, khiến cho Thập Vạn Đại Sơn là vùng không thể đi qua. Các con sông bắt nguồn từ núi cao chảy trong khu vực này rất dốc và có nhiều ghềnh thác, thuyền mảng có thể di chuyển xuôi theo dòng sông nhưng không thể quay ngược.

Như thế trước đây 3000 năm, cư dân đồng bằng sông Hồng không thể có liên hệ nguồn gốc gì tới Kinh Dương Vương ở hồ Động Đình!

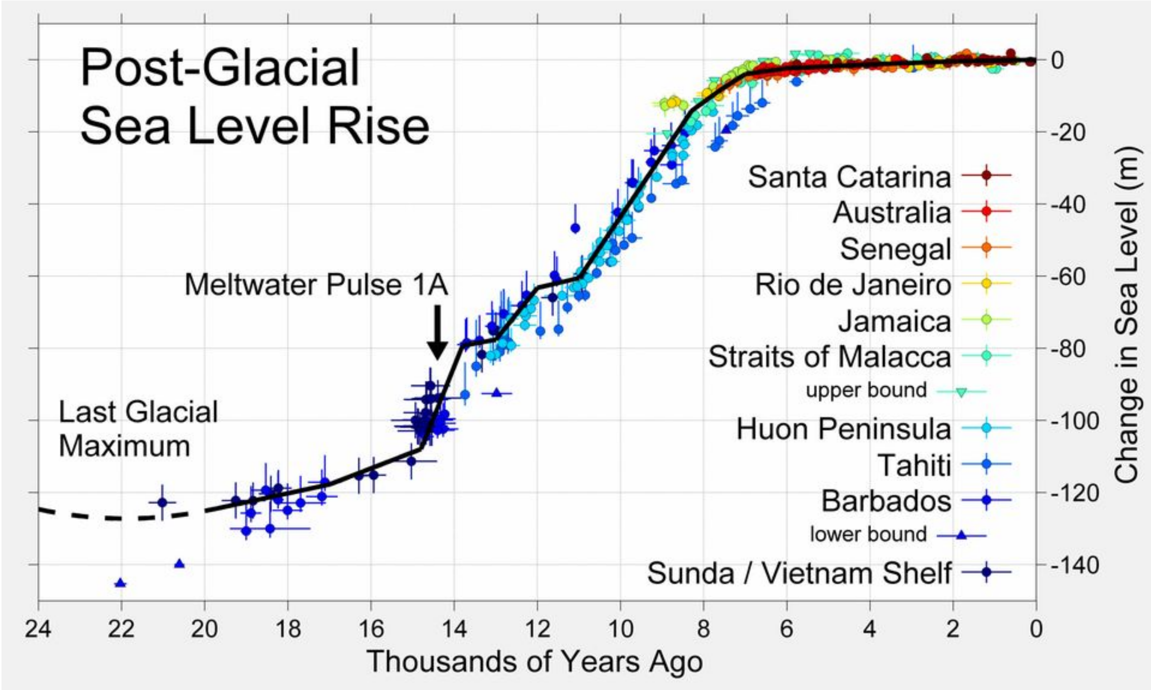
Tổ tiên người Việt Nam đến từ đâu?

Không thể xuất phát từ tiện ích đang dùng và hệ thống giao thông ngày nay mà hình dung ra sự bang giao từ 1000 năm trước Công Nguyên. Ngày ấy chưa có "*diêm*" để mồi lửa, chưa có sắt thép để làm trục xe, để đóng móng cho ngựa. Rừng rậm bao trùm khắp mọi nơi. Ngay cả ngày nay, dù đường đã có nhưng ngoằn nghèo. Sườn dãy núi này nhìn thấy sườn dãy bên kia, chỉ vài kilomet, nhưng cũng phải đi vòng hàng trăm kilomet mới sang được. Khoảng cách thẳng 500km, nếu có đường, thì đường núi là rất dài. Ngay cả khi có đường rừng, ngay cả khi vượt đường hàng nghìn kilomet tự thồ theo lương thực, thì như chúng ta phân tích ở phần sau thì vùng đồng bằng Sông Hồng là đầm lầy, chỉ thích hợp cho giao thông thủy theo kênh rạch chằng chịt, người, xe ngựa không thể vượt qua mà dàn trận đánh nhau cướp đất được.

Con sông Hồng bắt nguồn từ cao nguyên Tây Tạng, đây là nơi băng tuyết giá lạnh, luôn bị cái đói rét đe doạ. Vì vậy từ trước Công Nguyên phần thượng nguồn của sông Hồng rất lạc hậu. Tuy vậy nếu di chuyển về vùng nhiệt đới khí hậu nóng ẩm, muỗi ruồi, lạ nước, cư dân ôn đới cũng không sống nổi.

Dữ liệu khoan băng ở 2 cực trái đất cho thấy nhiệt độ trái đất tuần hoàn với chu kỳ 100 nghìn năm. Khoảng 23 nghìn năm trước đây khi trái đất lạnh giá, băng đóng ở hai cực nhiều tới mức nước biển cạn xuống 120m so với hiện nay. Loài người cổ đại đã di cư ra khỏi châu Phi, men theo ven biển. Khoảng 18 nghìn năm về trước loài người cổ đại đã sinh sống tại khu vực Đông Nam Á, và di lên phía Bắc tới vùng Quảng Đông - Quảng Tây của Trung Quốc ngày nay. Những nghiên cứu về gen và ngôn ngữ đã khẳng định lại như thế.

Trong khoảng 14 nghìn năm tiếp theo, mực nước biển tiếp tục dâng cao 120m, và giữ nguyên trong khoảng 6000 năm vừa qua. Khi ấy đồng bằng Bắc Bộ ngày nay là biển. Nước biển dâng cao đẩy người cổ đại vào sát chân núi. Trong suốt thời gian 6000 năm ấy cư dân bị kẹt ở vùng núi vòng cung Hoàng Liên Sơn từ Ninh Bình, qua Hoà Bình, tới Sơn Tây, Phú Thọ, rồi qua vòng cung Đông Triều ra tới Quảng Ninh, họ là tổ tiên của người Việt Nam hiện nay.



Người Việt ở vùng sông Hồng có phải là một tộc trong Bách Việt?

Cùng thời gian ấy người cổ đại ở vùng Quảng Đông, Quảng Tây cũng di cư vào sâu trong đất liền và đi ngược theo con sông Dương Tử tới vùng Hồ Động Đình. Đây là vùng Ôn Đới, về mùa đông băng giá. Từ 3500 năm trở về trước, cư dân vùng ôn đới thường xuyên bị đói rét đe doạ, không phát triển được. Khoảng 3500 năm trước đây, cùng với sự xuất hiện Thời đại đồ Đồng - con người sản xuất ra nhiều của cải hơn mức tiêu thụ - là sự xuất hiện xã hội Chiếm hữu Nô Lệ. Phương thức sản xuất hàng hoá, phương tiện giao thông dựa trên xe kéo dẫn đến phát triển thương mại, xuất hiện tiền, xuất hiện chữ viết, và chính quyền trung ương pháp quyền. Tuy nhiên, chính sử Trung Quốc ghi nhận, cho tới tận năm 200 trước Công Nguyên, trước khi Tần Thủy Hoàng đô hộ, vùng phía nam dãy núi Ngũ Lĩnh không có công nghệ luyện kim sắt. Công nghệ luyện kim sắt xuất hiện ở vùng Địa Trung Hải, và theo cư dân du mục truyền tới vùng đồng bằng sông Hoàng Hà. Có sắt tạo ra vũ khí, trục xe, đóng móng ngựa... Chính sắt đã tạo ra sức mạnh cho phần phía Bắc dãy núi Ngũ Lĩnh. Như thế vào thời đầu Công Nguyên, chưa có sắt làm trục xe kéo, để đóng móng cho ngựa, xe và ngựa cư dân Quảng Đông, Quảng Tây chưa thể đi xa tới được vùng đồng bằng sông Hồng - mà cũng không có đường để đi.

Do được thiên nhiên ưu đãi mà kinh tế của cư dân sông Hồng phát triển mạnh. Từ 3500 năm về trước cư dân phía bắc dãy Thập Vạn Đại Sơn lạc hậu hơn cư dân đồng bằng sông Hồng, tuy nhiên sau thời điểm đó thì ngược lại.

Con sông Hồng mỗi năm mang ra biển 100 triệu tấn phù sa, ứng với 50 triệu m^3 đất. Đồng bằng Sông Hồng là hình tứ diện, đỉnh Phú Thọ cao 30m so với mực nước biển, mặt đáy là tam giác cân. Tam giác cân này có đáy là bờ biển hiện nay từ Quảng Ninh tới Thanh Hoá - dài 150km, chiều cao tới Phú Thọ là 200km, diện tích 15000 km^2. Tính 3000 năm thì lượng phù sa bằng với thể tích tứ diện trên. Vậy 6000 năm về trước thì đồng bằng Sông Hồng là một vịnh nông có độ sâu trung bình 10m. Người cổ đại bị dạt lên ven các vùng núi cao theo vòng cung Hoàng Liên Sơn kéo lên Phú Thọ và theo vòng cung Đông Triều tới Quảng Ninh. Cư dân bị kẹt ở đây được gọi là dân tộc Sông Hồng. Theo thời gian đồng bằng sông Hồng được bồi và lớn dần, nó tiến ra biển với tốc độ khoảng 35km cho 1000 năm. Đất bồi thành các gò thấp, quanh gò là nước tự chảy, rất thuận lợi cho việc cấy lúa nước. Cấu trúc gò đồi có ruộng lúa nước tự chảy bao quanh tạo ra kiểu giao thông thủy, sông ngòi chằng chịt, cực kỳ hiệu quả. Cư dân Sông Hồng đã "*cơ giới thủy*" toàn bộ nền kinh tế từ nhiều nghìn năm trước Công Nguyên. Thậm chí cho tới tận trước khi Pháp sang, ở thủ đô Hà Nội, hệ thống giao thông thủy vẫn đóng vai trò rất quan trọng. Với cấu trúc giao thông thủy như thế việc tiến quân đánh chiếm bằng ngựa theo đường bộ là không hiệu quả.

Cư dân ở trên các gò cao, với mật độ dân số khoảng 1 ha đất gò vườn cho một hộ 5 người. Mật độ này vẫn còn duy trì cho tới những năm 1960, và vì phương thức sản xuất nông nghiệp tự cung tự cấp mà mật độ này ổn định từ đầu Công Nguyên cho tới khi Pháp sang . Thống kê trên bản đồ Google chúng ta thấy vùng điện tích ruộng lúa nước gấp 4 lần diện tích gò? Tỷ lệ này không thay đổi nhiều trong vòng 200 năm qua. Như vậy mật độ dân số chung là 1 người trên 1 ha đất đồng bằng, tính cho thời gian về trước 1800.

Vào khoảng đầu Công Nguyên, bờ biển ở vào khoảng từ Luy Lâu tới Bát Tràng, kéo qua vùng Bình Đà. Đó cũng là tam giác cân, đáy là đường trung bình, và diện tích bằng $\frac{1}{4}$ diện tích đồng bằng Sông Hồng ngày nay. Như vậy dân số ở đồng bằng Sông Hồng thời Hai Bà Trưng (40 - 43 sau Công Nguyên) là khoảng $\frac{1}{4} \times 1500000$, tức là khảng 400 nghìn. Dân ở vùng núi ước tính bằng một nửa, vậy tổng dân số thời Hai Bà Trưng là khoảng 600 nghìn. Ở vào khoảng 1800 thì dân số ở vùng đồng bằng Sông Hồng vào khoảng 2.5 triệu. Dân số miền Nam, ước lượng theo tỷ lệ $\frac{14}{17}$, thì là 2 triệu. Dân số miền Trung khoảng $\frac{1}{4}$ tổng dân số hai vùng đồng bằng (theo tỷ lệ hiện nay). Vậy dân số Việt Nam vào năm 1800 là khoảng 5.7 triệu. Sau khi Pháp sang, công nghệ xây dựng dùng xi măng được áp dụng, kiến thức y tế cũng như phương thức sản xuất thay đổi khiến cho tỷ lệ tăng dân số không còn như trước.

Như vậy vào đầu Công Nguyên dân Sông Hồng đã là một cộng đồng đông đúc, khoảng 600 nghìn người. Cho tới tận năm 1800, các dòng dân tứ xứ di cư đến chủ yếu theo đường biển, và chỉ ước tính con số chỉ vài nghìn người, mỗi khi bên Trung Quốc có biến. Những dòng người này bị cư dân Sông Hồng đồng hoá văn hoá.

Bản thân tên Việt là do các tài liệu cổ của Trung Quốc gọi theo ý họ, cư dân Sông Hồng từ nhiều nghìn năm nay đã sinh sống ở vùng đất này không liên quan gì tới cái Bách Việt của họ!

Về huyền sử An Dương Vương - Triệu Đà

Khoảng 5000 năm về trước ở Địa Trung Hải, người ta đã biết được công nghệ luyện kim đồng. Khoảng 3500 năm trước đây, công nghệ này xuất hiện cùng lúc ở hạ lưu sông Hoàng Hà và khu vực Đông Nam Á, lưu vực Sông Hồng - nơi có sẵn cả than, sắt và đồng lộ thiên.

Cư dân ở phía lưu vực sông Hoàng Hà, nhờ có kim loại, người ra chế ra xe kéo chạy đường dài, và tiến hành làm đường vượt qua dãy Ngũ Hoành Sơn. Vào năm 200 trước Công Nguyên, Tần

Thủy Hoàng phái Triệu Đà (sinh năm 257 trước Công Nguyên) đưa quân tiến đánh sang phần khu vực sông Trường Giang, là vùng họ gọi là Bách Việt. Không rõ Triệu Đà có đến được lưu vực sông Hồng hay không, bởi chính sử chỉ nói về việc dùng quà cáp lấy lòng ngoại giao với các tù trưởng vùng xa để họ không quậy phá. Việc cai trị là không có.

Trên thực tế vào thời gian trước Công Nguyên chưa thể có các cuộc chiến xuyên qua dãy Thập Vạn Đại Sơn: với một bên là Cổ Loa, một bên là Tây Quảng Tây Trung Quốc! Hai địa điểm này ở hai nơi khác hẳn nhau, chẳng những núi cao nhiều nghìn mét không thể vượt qua, mà Cổ Loa với Tây Quảng Tây cách nhau cả nghìn kilomet đường núi quanh co. Sau khi đánh chiếm Nam Việt, chắc chắc Triệu Đà mất nhiều năm để bình định. Chẳng hiểu thời cổ đại có mấy mống quân mà dàn trận đánh nhau cả chiều dài bằng với Châu Âu như vậy!

Vậy không thể có dã sử kiểu như "*Vào thời kỳ Hồng Bàng* 4000 *năm trước đây, ở phía Tây tỉnh Quảng Tây (Trung Quốc) có các bộ tộc Âu Việt sống xen kẽ với người Lạc Việt. Nhà nước Văn Lang do Hùng Vương đứng đầu cai trị Lạc Việt. Thục Phán, người Âu Việt, là vua người Âu Việt đã đánh bại Hùng Vương vua nước Văn Lang, đổi quốc hiệu thành Âu Lạc, tự xưng là An Dương Vương, đóng đô tại Phong Khê, nay là vùng Cổ Loa, huyện Đông Anh*".

Cũng có thể có Lạc Việt, Âu Việt, Phong Khê nhưng là ở cả bên Quảng Tây. Xét về phương diện giao thông, sự liên kết giữa Âu Việt ở phía bên kia dãy Thập Vạn Đại Sơn với đồng bằng sông Hồng ở phía bên này là không thể có.

Cổ Loa thuộc huyện Đông Anh thì có, và đúng là 3500 năm về trước, gò đất cao 16 m so với mực nước biển này đã có cư dân thuộc bộ lạc Sông Hồng đến sống. Các truyện xưa tích cổ về Kinh Dương Vương, Lạc Long Quân, vua Hùng, Triệu Đà đều lấy từ vùng núi Ngũ Lĩnh và bị đem ra dạy cho hậu duệ cư dân Sông Hồng.

Cư dân Sông Hồng chưa bao giờ biết đến "*Nước ta trước là Văn Lang, sau đổi thành Âu Lạc!?*". Tất cả những "*kiến thức*" này là do chính quyền trung ương Trung Quốc ... bỏ vào mồm các tầng lớp "*tinh hoa*" - tức biết đọc biết viết chữ Hán. Họ học thuộc lòng và dạy lại cho hậu duệ cư dân Sông Hồng. Con cháu Bà Trưng, Bà Triệu nay đi nhận là hậu duệ 4000 năm ở mãi tận nơi, đường núi ngoằn nghèo, cách xa Cổ Loa tới cả nghìn kilomet.

Lịch sử Việt Nam bắt đầu từ đâu?

Vào đầu Công Nguyên, do Hai Bà Trưng khởi nghĩa xưng vương mà Hán Quang Vũ Đế cử Mã Viện đưa 20 nghìn quân đi đánh phá. Hậu Hán Thư, là cuốn sách cổ nhất viết rõ về thời kỳ Hai Bà Trưng, nhưng viết vào thế kỷ thứ V. Tài liệu này nói rõ, quân của Mã Viện tiến đánh theo đường biển "*Tháng* 1 *âm lịch năm* 42*, Mã Viện đem quân men theo đường biển, san núi làm đường hơn nghìn dặm, đánh nhau với Trưng Nữ Vương ở Lãng Bạc. Mã Viện thắng, tiến lên chiếm Mê Linh rồi lại đánh bại Trưng Vương ở Cấm Khê*". Hậu Hán Thư cũng cho biết quân của Mã Viện bị chết hơn một nửa.

Như vậy trước Công Nguyên, tuyệt nhiên không thể tiến đánh Cổ Loa theo đường bộ, vượt qua hàng trăm dãy núi Thập Vạn Đại Sơn.

Hậu Hán Thư là cuốn sách viết về các sự kiện đầu Công Nguyên, nhưng lại do duy nhất một người viết, Phạm Bằng, và viết vào thế kỷ thứ V. Quyển Hậu Hán Thư bị chính quyền Trung Quốc khi đó kiểm duyệt và chỉ được công bố nhiều năm sau. Hậu Hán Thư cho rằng nguyên nhân cuộc khởi nghĩa của Hai Bà Trưng là do sưu cao thuế nặng. Tức là thời đó nhà Hán đã áp đặt ách đô hộ, và Việt Nam là thuộc địa. Có hay không cuộc khởi nghĩa, nguyên nhân thật của cuộc khởi nghĩa là gì? Việc khẳng định nguyên nhân do sưu cao thuế nặng là không hợp lý vì ở Việt Nam khi ấy vẫn là nông nghiệp tự cung tự cấp, chưa có kinh tế hàng hoá, tức dùng tiền trong lưu thông để có tiền đóng thuế. Nếu không có chuyện thu tô ép thuế thì điều này chứng tỏ ảnh hưởng của thái thú Tô Định của nhà Hán ở Sông Hồng chỉ thuộc dạng như quan sát viên, không phải chính quyền đô hộ. Điều này là hợp lý vì chưa bao giờ Triệu Đà đặt chân được tới đồng bằng Sông Hồng.

Năm 40 sau Công Nguyên Hai Bà Trưng xưng Vương. Lịch sử dân tộc Việt Nam bắt đầu từ đó.

Như vậy dã sử nói về vai trò Triệu Đà như là vị Vua đầu tiên trong việc hình thành dân tộc Việt Nam, chỉ là hoang sử, hay là dã tâm sử.

Ngoài thương gia và các nhóm nhỏ người phương Bắc lưu lạc tới vùng đất Sông Hồng sinh sống, thì đoàn quân Mã Viện là những người phương Bắc lần đầu tiên chính thức tới và áp đặt chế độ đô hộ.

Ngày nay ở vùng đồng bằng sông Hồng, nhất là vùng Mê Linh - Cổ Loa có hàng nghìn đền thờ Hai Bà Trưng.

Truyện cổ tích Cô bé lọ lem và Tấm Cám đều có cùng một cốt truyện. Lịch sử không hoàn toàn át được dã sử, bởi dã sử thường hay mượn tích. Cũng có những sự kiện liên quan đến Sơn Tinh, Thủy Tinh - chấm dứt chế độ quần hôn của công xã nguyên thủy, cũng có sự kiện liên qua đến "*bọc* 100 *trứng*" để diễn tả sự chia li. Tuy nhiên việc để cho dân tộc chìm đắm trong u mê, để cho dã sử át đi nguồn gốc tổ tiên là không thể được chấp nhận.

CHẾ NGỰ PHOTON BẰNG TOPO

Olivier Bleu, Dmitry Solnyshkov, Guillaume Malpuech
Người dịch - Cao Chi, Hà Nội

Một laser sẽ tạo nên một chùm ánh sáng mang thông tin trong các sợi quang trên quãng đường nhiều ngàn km.

Như vậy nếu người ta thay các electron trong các bán dẫn bằng những photon thì thiết bị photonic sẽ làm việc nhanh gấp bội.

Để thực hiện một siêu máy tính photonique tích hợp (photonique intégré) người ta phải vượt qua nhiều trở ngại.

Trở ngại quan trọng là khả năng chạy được hai chiều trong cáp quang (reciproque) của ánh sáng khi gặp vật cản. Song nhờ topo toán học người ta có thể vượt qua trở ngại đó [1].

Khi một hạt lan truyền trong không gian thì mọi hướng đều tương đương. Nếu một photon lan truyền trong một sợi quang (fibre optique) theo một chiều nếu gặp phải một vật thể nào đó ánh sáng có thể truyền ngược lại. Điều này xảy ra vì sự vắng mặt của chiều ưu tiên của lan truyền. Một vật thể như thế có thể là sự thay đổi chiết suất quang học làm cho ánh sáng bị phản chiếu và đi ngược lại, làm nhiễu loạn vận hành.

Muốn có một sự lan truyền không đảo ngược cần phải có một lực nào đó áp đặt chiều chuyển động. Đối với electron chỉ cần áp đặt một điện trường là đủ điều hành chiều chuyển động. Song đối với photon thì không được vì photon là hạt không mang điện tích.

Thách thức đối với các nhà vật lý là tìm một chuyển động không có chiều ngược lại của photon.

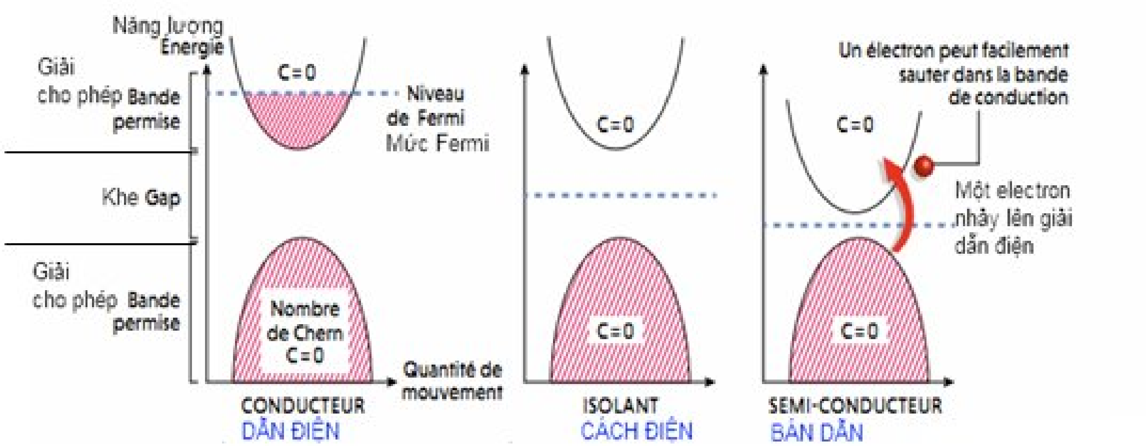
Piotr Kapitsa (năm 1937) đã tìm ra siêu chảy (mất độ nhớt ở nhiệt độ thấp): Năng lượng tương tác các hạt lớn hơn động năng của chất lỏng. Chất lỏng nghiêm cấm các quá trình phân tán do sự mất trật tự trong môi trường.

Trong một chất lỏng cổ điển nếu có những vật thể gây nên mất trật tự (désordre) thì những vật thể đó làm phát tán năng lượng chuyển động các hạt và đó là nguyên nhân của độ nhớt. Những nhiễu loạn đó vắng mặt trong siêu chảy và độ nhớt bằng không, các phân tử chất siêu chảy sẽ chuyển động theo một chiều. Đây là một ý tưởng quan trọng cho các nhà vật lý.

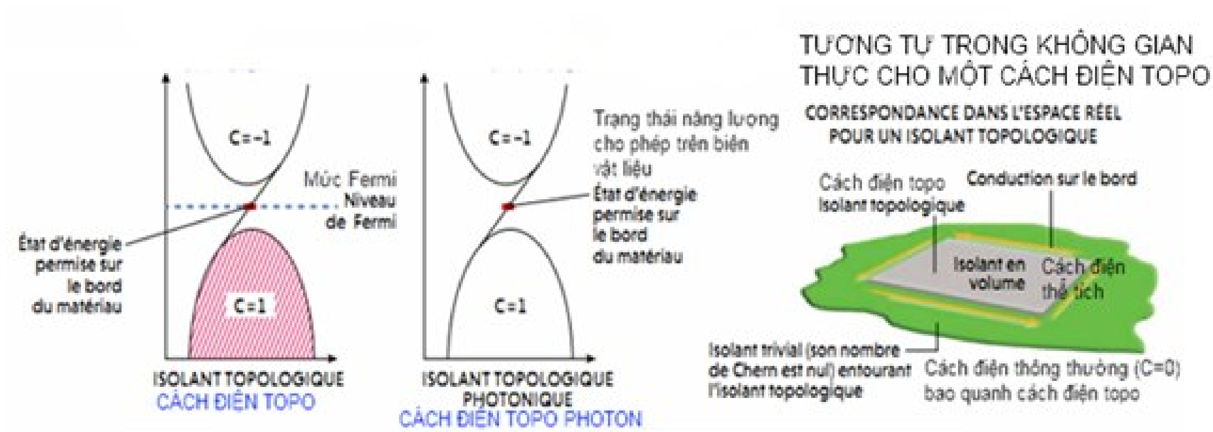
1. Thách thức của vận chuyển không đảo ngược

Về nguyên tắc có thể tạo nên một siêu chảy ánh sáng vô cảm với hiện tượng mất trật tự.

2. Lý thuyết các giải (bande) năng lượng và topo



Hình 1: Các giải năng lượng, khe, mức Fermi - dẫn điện, cách điện và bán dẫn



Hình 2: Cách điện topo và cách điện topo photonique

Trong một mạng tinh thể thì năng lượng trải rộng trên những giải liên tục đến các giải (bande), các giải cách nhau bởi những khoảng trống gọi là khe (gap), tức là những giải cấm.

Ta lại có mức Fermi bằng mức năng lượng cao nhất chiếm bởi một electron ở không tuyệt đối ($-273°C$ hay 0 Kelvin). Nếu mức Fermi thuộc về một giải cho phép (hình 1) thì ta có vật liệu là một vật liệu dẫn điện và không có chiều chuyển động ưu tiên: Các electronsex chuyển động khi bị áp đặt bởi một điện trường.

Khi mức Fermi thuộc về một giải cấm rộng thì vật liệu là một cách điện, nếu giải cấm rất nhỏ thì chỉ cần cung cấp một năng lượng nhỏ để electron vượt qua khe để lọt vào giải cho phép phía trên trong trường hợp này ta có vật liệu bán dẫn (hình 1).

Trong những năm 1980 các nhà vật lý thấy rằng lý thuyết các giải năng lượng chưa đủ mô tả các tích chất electronique của vật liệu. Họ đưa thêm một thông số là số Chern, một số bất biến topo. Nếu số đó bằng 0 ta có vật liệu thông thường theo lý thuyết các giải, nếu khác 0 (hình 2) ta có vật liệu gọi là cách điện topo.

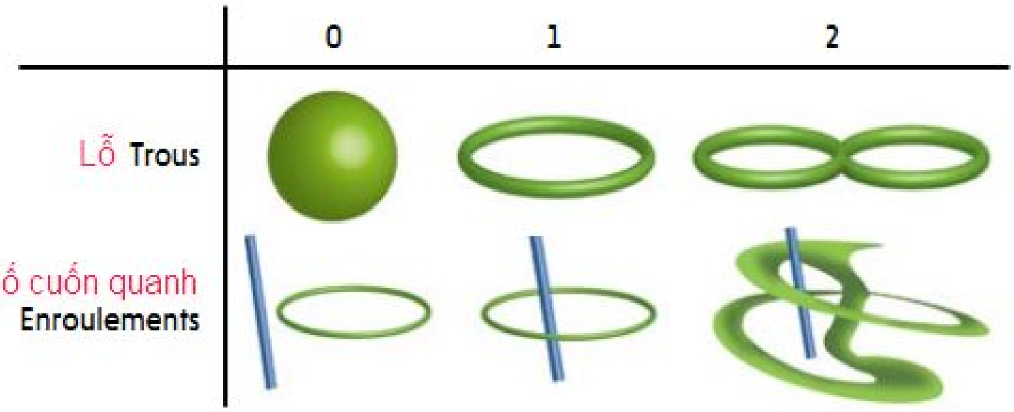
Như vậy nếu mức Fermi nằm trong một khe và nếu sô Chern khác số 0 thì vật liệu lại là một vật liệu cách điện trong thể tích.

Nhưng nếu trên biên vật liệu một trạng thái năng lượng tồn tại trong khe thì ta sẽ có một dòng điện một chiều chiều phụ thuộc vào dấu của tổng các số Chern trong các giải nằm dưới khe đó.

Trong vật liệu photonique (vật liệu dùng photon chứ không dùng electron), vì photon là một boson nên không có mức Fermi ta lại có trong một mạng photonique một khả năng là có cách điện trong thể tích. Và nếu các số Chern khác số 0 thì điều này dẫn đến sự tồn tại chuyển động một chiều trên biên với năng lượng khe.

3. Từ Topo đến số Chern

Với một chất rắn 3D bất biến topo đặc trưng bởi số lỗ trên mặt, hay đối với đường cong bởi số cuốn vòng (bao nhiêu vòng đường cong cuốn quanh một vật) chúng ta cần tính tích phân góc cực (polaire) của một điểm khi đi dọc theo đường cong (hình 3).



Hình 3: Số lỗ trên mặt và số cuốn vòng quanh một vật

Nói chung các bất biến đó là tích phân của những đại lượng định xứ (độ cong, góc cực - angle polaire). Các tích phân này đặc trung các tính chất toàn cục (global) của hệ.

Các tích phân Gauss-Bonnet là cơ bản trong topo vì nó nối liền các tính chất định xứ của một vật với một trong các tính chất toàn cục.

Ví dụ tích phân các độ cong định xứ trên mặt cầu Σ của một vật sẽ nối liền với số lỗ ν của vật. Khi ta làm biến dạng bề mặt của vật số lỗ ν không thay đổi

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma} F\,\mathrm{d}S = 2(1-\nu).$$

Trong vật lý môi trường đông đặc các công cụ topo không ứng dụng đối với bản thân vật mà đối với cấu trúc các giải (bandes) năng lượng của các hạt chuyển động trong vật liệu. Trước hết ta cần định nghĩa độ cong Berry. Để hiểu khái niệm này ta xét mối tương tự với phép vận chuyển song song của một vector trên một bề mặt cong. Sau khi thực hiện một vòng kín vector ban đầu và cuối có hướng không trùng nhau. Sự vận chuyển song song đã dẫn đến một góc giữa hai vector đầu và cuối.

Cũng theo cách như vậy người ta gán vector đó với hàm sóng mô tả một electron trong giải (bande). Người ta sẽ gắn liền độ cong Berry với độ biến đổi hướng của vector khi một electron chuyển động trong không gian nghịch đảo (espace réciproque) của các xung lượng. Lấy tích phân độ cong đó trên toàn một giải (bande) ta sử dụng định lý Gauss-Bonnet sẽ thu được một bất biến topo đến số Chern, số này đặc trưng cho topo của giải.

Topo xếp hạng các vật theo số lỗ hoặc theo số cuốn quanh (enroulement) - đó là những bất biến topo khi vật bị biến dạng liên tục.

4. Topo toán học được viện trợ cho môi trường đông đặc

Ý tưởng về siêu chảy giúp các nhà vật lý tiến đến dùng topo trong môi trường đông đặc. Trong topo độ dài và góc không còn bảo toàn, bảo toàn là số lỗ di qua một mặt, dùng các biến đổi liên tục ta không thể xóa bỏ các lỗ được.

Độ nhớt là một đại lượng toàn cục (global) chứ không phải địa phương. Người ta có thể xác định các đại lượng bất biến trong topo và topo có thể dùng để nghiên cứu vật chất.

Các vortex (những cuộn xoáy vật chất) trong lòng siêu chảy (Onsager, Nauy 1947) là những kích thích có một momen động năng lượng tử hóa nghĩa là chỉ lấy những giá trị gián đoạn, trong topo cuộn xoáy ứng với số lần mà một đường cong chạy quanh một vật.

Nếu xét hàm sóng của một siêu chảy thì hàm sóng tiến đến 0 tại tâm vortex. Một khi vortex đã được tạo nên thì không một biến đổi liên tục có thể xóa nó được. Người ta nói đó là những khuyết tật topo. Người ta có thể sử dụng topo để mô tả hiệu quả các siêu chảy và siêu dẫn.

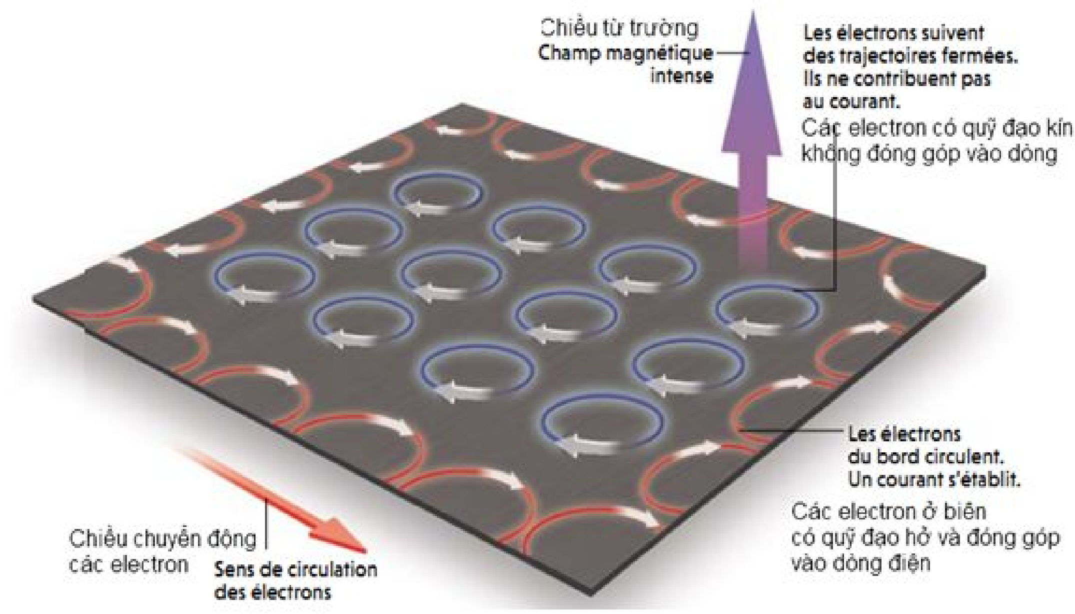
Trong những thập kỷ hiện nay topo đã trở thành quan trong để nghiên cứu các "*cách điện topo-isolant topologique*", đó là những vật liệu cách điện trong lòng thể tích song dẫn điên ở biên. Ngoài ra trong cách điện topo thì electron chỉ chuyển động theo một chiều.

Trong các chất này ta có một vortex loại đặc biệt. Trong cách điện topo đây không còn là những cuộn xoáy gắn liền với vật chất mà gắn liền với hàm sóng của hạt trong không gian nghích đảo (espace réciproque – từ chuyên môn chất rắn) của các xung lượng. Đây là một không gian trừu tượng để mô tả các sóng của không gian thông thường. Trong không gian nghịch đảo hàm sóng không còn là hàm của không thời gian mà là hàm của năng lượng và xung lượng với vector sóng mô tả chiều lan truyền của sóng và tỷ lệ nghịch với chiều dài sóng.

Những vortex của các cách điện topo được đặc trưng bởi số Chern – tương tự như số cuốn quanh (enroulement) các vortex trong siêu chảy.

Nhà vật lý người Đức Klaus von Klitzing đã tìm ra các cách điện topo khi nghiên cứu hệ quả Hall lượng tử (Nobel 1985).

Xét một vật liệu bán dẫn hai chiều có tác động của một từ trường thẳng góc gây nên những quỹ đạo vòng cho electron. Phía trong các electron có quỹ đạo vòng không đóng góp vào dòng điện vậy phía trong là cách điện. Ngược lại các electron ở biên lại cho dòng điện theo chiều phụ thuộc và chiều từ trường, như vậy ta có dẫn điện ở biên (hình 4).



Hình 4: Cách điện topo, ở biên quỹ đạo electron có thể nối tiếp nhau làm thành dòng điện

Độ dẫn ở biên bị lượng tử hóa và tỷ lệ với một bất biến topo. Các tính chất này là những đặc trưng toàn cục (glogal): Một khuyết tật không cản trở được dòng chảy.

Một vật liệu vì sao là dẫn điện, cách điện hay cách điện topo. Muốn hiểu vấn đề này chúng ta phải nói đến lý thuyết giải năng lượng (theorie des bandes) xem phần trên.

Trong một nguyên tử riêng lẻ, electron có những giá trị năng lượng gián đoạn, trong một vật liệu có mạng tinh thể sóng các hạt giao thoa với nhau làm nên các vùng năng lượng liên tục (bandes) phân cách nhau bởi những vùng trống gọi là khe (gap). Tùy theo sự phân bố các electron trong các giải mà chúng ta có dẫn điện, cách điện hay bán dẫn.

Hiện nay người ta thấy rằng lý thuyết các giải năng lượng chưa đủ để mô tả các vật liệu nhất là đối với các vật liệu cách điện topo. Người ta thấy rằng cấu trúc các hàm sóng của electron đóng vai trò quan trọng. Người ta xét đến cái gọi là độ cong Berry mô tả electron trong một giải (Michael Berry 1984) để mô tả các hiện tượng lượng tử. Khi người ta tích phân độ cong Berry theo tập thể các electron trong một giải toàn vẹn người ta thu được một đại lượng, đó là số Chern (Mỹ gốc Trung quốc 1950). Đây là một số bất biến topo có những giá trị nguyên. Số này sẽ là đặc trưng cho topo của giải (bande) đang xét, độ cong toàn cục (courbure globale) và sự tồn tại hay không của cuộn xoáy (vortex) trong không gian nghịch đảo.

Một khe (gap) được gọi là topo nếu tổng các số Chern các băng nằm dưới khe đó là khác 0. Trong trường hợp đó sẽ có một mức năng lượng cho phép trong khe. Những electron chiếm trạng thái đó có thể chuyển động trong vật liệu theo một chiều không có chiều ngược. Những trạng thái đó gọi là được bảo vệ topo (protégé topologique) vậy tính chất đó là toàn cục (global) cho nên dòng chảy không bị nhiễu loạn bởi các khuyết tật hoặc các điểm bẩn (impurité) của mạng tinh thể. Đó cũng là ý tưởng trong siêu chảy ở đấy các nhiễu loạn gây nên độ nhớt đều bị loại bỏ.

Như vậy muốn có một mô tả toàn diện độ dẫn của một vật liệu người ta phải nghiên cứu không chỉ các giải điện tử, các cách lấp đầy mà còn phải biết số Chern. Điều này dẫn đến nhiều phát triển mới về lý thuyết và thực nghiệm với mục đích tìm ra những cách điện topo mới.

Năm 2005 Charles Kane và Eugene Mele (Mỹ) tìm ra một loại cách điện topo không biểu hiện bằng từ trường mà biểu hiện nhờ tương tác spin - quỹ đạo nối liền chuyển động của electron với spin hướng thẳng lên phía trên hoặc chúc xuống phía dưới. Như vậy ở đây ta không cần đến từ trường mà phải xét đến các đặc tính nội tại của vật liệu.

5. Còn các photon thì sao ?

Có những loại cách điện topo không cần đến từ trường đề có chuyển động một chiều. Vậy có thể dùng photon thay vì electron và sử dụng các mạng tinh thể photonique. Ở đây ta cũng có các giải cho phép và các giải cấm, và photon chuyển động trong những giải cho phép mà không được phép vào các khe. Và lý thuyết ở đây tương tự lý thuyết mạng electronic.

Ở đây ta không có nguyên lý loại trừ Pauli vì photon có spin. Ta nói cách điện photonic là chỉ nói đến sự tồn tại các khe nghiêm cấm đối với photon.

Nói chung người ta đã có thể tạo nên photonique tích hợp và giải quyết bài toán chuyển động một chiều không đảo ngược.

6. Kết luận

Hiện tại người ta kết hợp khái niệm siêu chảy và topo của các giải năng lượng để tạo nên cách điện topo, một tương tự của hệ ứng Hall lượng tử spin. Vai trò của spin được bảo đảm bởi số cuốn vòng quanh (enroulement) các cuộn xoáy (vortex) của siêu chảy ánh sáng.

Nhờ topo người ta có thể có nhiều loại lời giải lý thuyết cho vấn đề vận chuyển một chiều không đảo ngược, nhiều tiếp cận đã có thể thực hiện bằng thực nghiệm (như topo cách điện). Những kết quả này rất được khích lệ vì mở con đường tạo các mạch tích hợp quang học (photonique intégré) của tương lai.

Tài liệu tham khảo

[1] *Dompter les photons grâce à la topologie*, Olivier Bleu, Dmitry Solnyshkov, Guillaume Malpuech, Pour la science số tháng 9/2019.

[2] *Những vấn đề mới trong Vật Lý hiện đại*, Cao Chi, NXB Tri thức, 2018.

GÓC NHÌN MỚI CHO MỘT BÀI TOÁN CŨ

Kevin Hartnett
Người dịch Trần Nguyễn Nam Trung
Hiệu đính Trần Nam Dũng, Trần Nguyễn Nam Hưng

GIỚI THIỆU

Trong thời gian phải tự cách ly do Covid-19, Joshua Greene và Andrew Lobb đã tìm ra cách chứng minh một phiên bản của "*bài toán chốt hình chữ nhật*".

Vào giữa tháng 3, các nhà toán học Joshua Greene và Andrew Lobb ở trong các hoàn cảnh giống nhau: Cách ly xã hội, phải đấu tranh để tự điều chỉnh bản thân khi đại dịch COVID-19 hoành hành. Họ quyết định vượt qua bằng cách đắm chìm vào các nghiên cứu của mình.

"*Tôi nghĩ rằng đại dịch thực sự là một loại liều thuốc kích thích*" Greene, giáo sư tại Đại học Boston cho biết. "*Tất cả chúng tôi quyết định rằng cách tốt nhất là dựa vào một số sự hợp tác để hỗ trợ lẫn nhau*".

Một trong những vấn đề mà hai ông quan tâm là một phiên bản của một bài toán thế kỷ chưa được giải quyết về hình học.

"*Bài toán được phát biểu rất đơn giản và dễ hiểu, nhưng nó thực sự rất khó*" Elizabeth Denne từ Đại học Lee và Washington nói.

Nó bắt đầu với một đường cong khép kín - loại đường cong kết thúc tại nơi nó bắt đầu. Về cơ bản, vấn đề Greene và Lobb đang theo đuổi dựa trên các dự đoán, về cơ bản, phát biểu rằng mọi đường cong như vậy đều chứa các bộ bốn điểm tạo thành các đỉnh của hình chữ nhật với bất kỳ tỷ lệ mong muốn nào.

Bài toán "*chốt hình chữ nhật*" thoạt nhìn giống như loại câu hỏi mà một học sinh trung học có thể giải quyết được với compa và thước kẻ, nhưng nó đã cản đường những nỗ lực cao nhất của các nhà toán học trong nhiều thập kỷ. Khi Greene và Lobb quyết định theo đuổi vấn đề này, họ cũng không có cơ sở đặc biệt gì để tin rằng họ có thể đạt được một kết quả tốt hơn.

Trong tất cả các dự án khác nhau mà ông đã thực hiện, Greene cho biết, "*Tôi nghĩ đây là dự án ít hứa hẹn nhất*".

Nhưng khi đại dịch lan rộng, Greene và Lobb, công tác tại Đại học Durham ở Anh và Viện Khoa học và Công nghệ Okinawa, đã trao đổi với nhau hàng tuần qua Zoom và có những bước tiến bộ nhanh chóng. Sau đó, vào ngày 19 tháng 5, khi một phần thế giới mới bắt đầu mở cửa trở lại, họ đã xuất hiện theo cách riêng của mình và công bố một lời giải.

Chứng minh cuối cùng của họ - chỉ ra rằng những hình chữ nhật như dự đoán thật sự có tồn tại - đưa bài toán sang một bối cảnh hình học hoàn toàn mới. Ở đó, câu hỏi đặt ra được trình bày rất dễ dàng.

"*Nó thật sự rất kì lạ*", Richard Schwartz từ Đại học Brown cho biết, "*Đó là ý tưởng đúng cho vấn đề này*".

Hướng suy nghĩ mới về hình chữ nhật

Bài toán chốt hình chữ nhật là một câu hỏi gần giống với câu hỏi do nhà toán học người Đức Otto Toeplitz đặt ra vào năm 1911. Ông dự đoán rằng bất kỳ đường cong kín nào cũng chứa bốn điểm là bốn đỉnh của một hình vuông. "*Bài toán chốt hình vuông*" của ông cho tới nay vẫn chưa có lời giải.

"*Đó là một vấn đề cũ và gai góc mà không ai có thể giải được*". Greene cho biết.

Để hiểu tại sao vấn đề lại khó đến như vậy, điều quan trọng là phải nắm được các loại đường cong mà bài toán chốt hình vuông đặt ra, nó cũng đóng vai trò rất quan trọng trong chứng minh của Greene và Lobb.

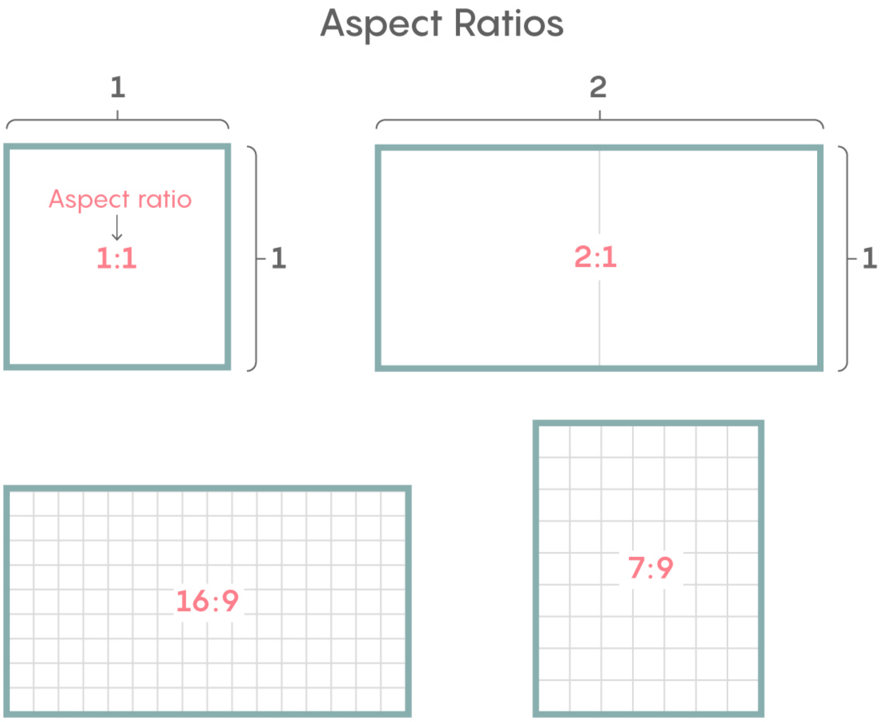
Hai nhà toán học đã giải quyết một vấn đề về các đường cong khép kín, "*liên tục*" và "*trơn*". "*Liên tục*" có nghĩa là chúng không bị đứt quãng, "*trơn*" có nghĩa là chúng liên tục và không bị gãy khúc (không tạo thành góc). Những đường cong trơn và liên tục là những thứ mà bạn rất có thể sẽ vẽ với bút chì và giấy. Chúng là những thứ "*dễ dàng để ta với tay tới*", Greene cho biết.

Các đường cong trơn, liên tục tương phản với các đường cong chỉ đơn thuần là liên tục, nhưng không trơn - loại đường cong đặc trưng trong phỏng đoán chốt vuông của Toeplitz. Loại đường cong này có thể có các góc ở những nơi mà chúng xoay chuyển đột ngột theo các hướng khác nhau. Một ví dụ điển hình của một đường cong có nhiều góc là hình fractal bông tuyết Koch, thứ mà chỉ được tạo thành từ các góc. Bông tuyết Koch và các đường cong khác tương tự, không thể được phân tích bằng các phép tính và các phương pháp liên quan, điều đó khiến chúng đặc biệt khó nghiên cứu.

"*Một số đường cong liên tục [không trơn] thực sự rất khó chịu*", Denne nói.

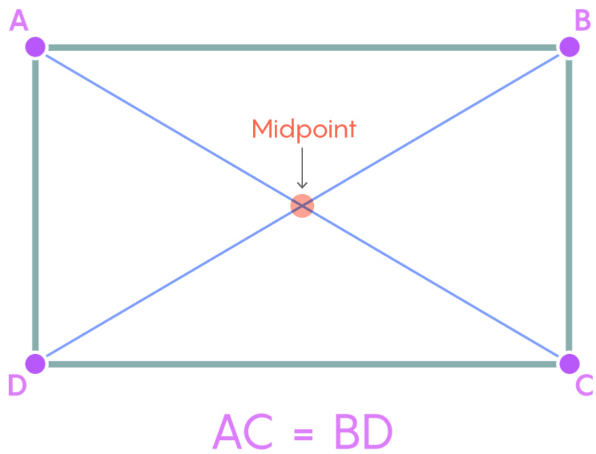
Nhưng một lần nữa, vấn đề Greene và Lobb đã giải quyết liên quan đến các đường cong trơn, và do đó liên tục. Và thay vì xác định liệu các đường cong như vậy luôn có bốn điểm tạo thành một hình vuông hay không - một câu hỏi đã được giải quyết cho các đường cong trơn, liên tục vào năm 1929 - họ đã nghiên cứu xem liệu các đường cong đó luôn có bốn điểm tạo thành các hình chữ nhật của tất cả các "*tỷ lệ khung hình*" (có nghĩa là tỉ lệ của các cạnh). Đối với hình vuông, tỷ lệ khung hình là $1 : 1$, trong khi đối với nhiều TV có độ phân giải cao, tỉ lệ đó là $16 : 9$.

Những bước tiến đáng kể đầu tiên về bài toán chốt hình chữ nhật được trình bày trong một chứng minh từ cuối những năm 1970 của Herbert Vaughan. Chứng minh này đã mở ra một cách suy nghĩ mới về hình học của một hình chữ nhật và thiết lập các phương pháp mà nhiều nhà toán học, bao gồm cả Greene và Lobb, sau đó đã sử dụng.

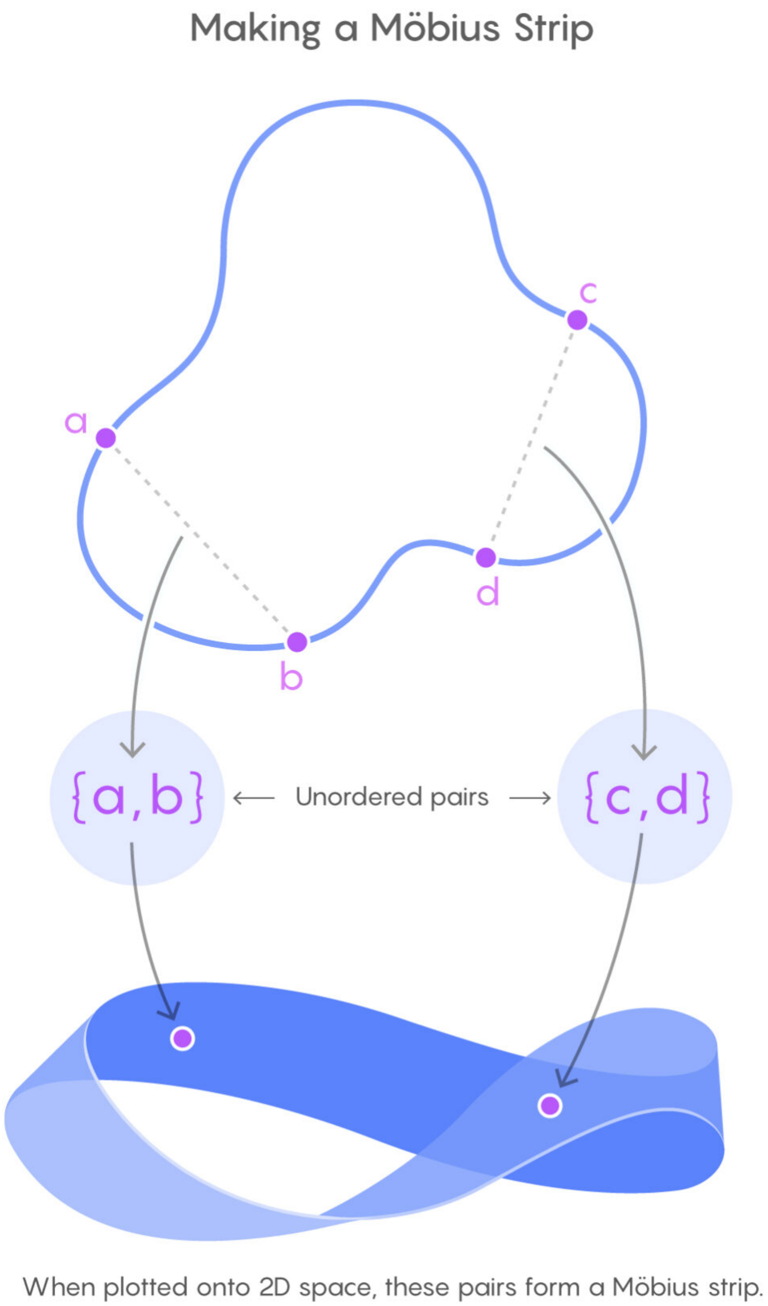


"*Tất cả mọi người đều biết chứng minh này*", Greene cho biết. "*Nó là một thứ giống như văn hóa dân gian và là một thứ mà bạn có thể tiếp nhận trong một cuộc thảo luận trong buổi ăn trưa ở phòng ăn tập thể*".

Thay vì hình dung về hình chữ nhật dưới dạng bốn điểm được kết nối, Vaughan nghĩ về nó như hai cặp điểm có mối quan hệ đặc biệt với nhau.

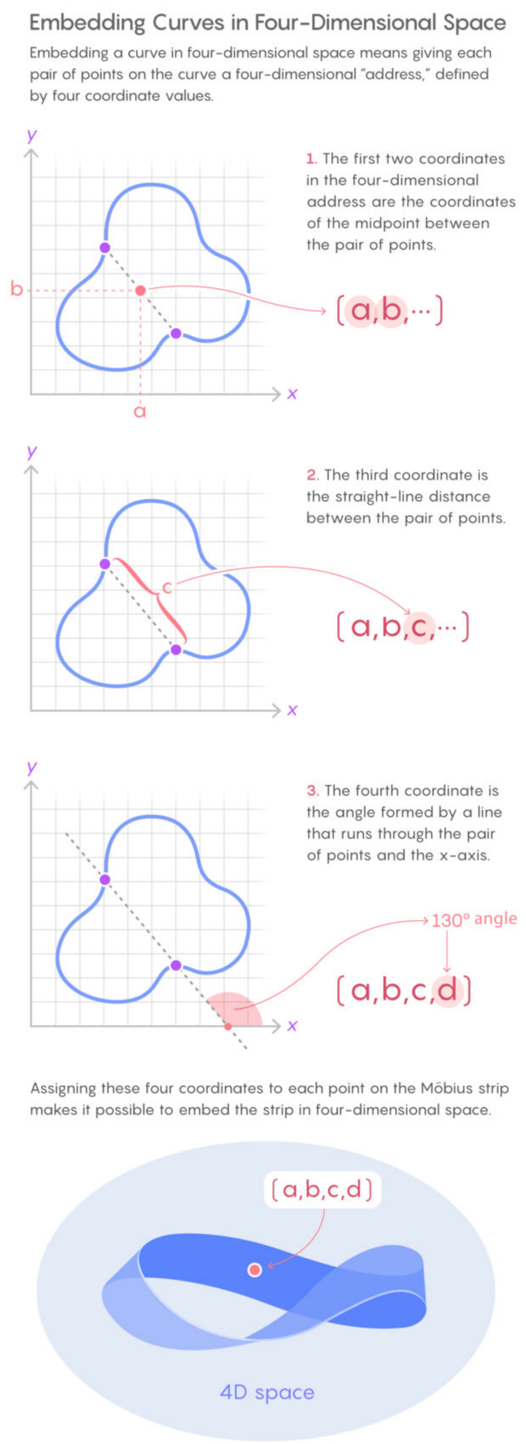


Hình ảnh một hình chữ nhật có các đỉnh được kí hiệu là $ABCD$, theo chiều kim đồng hồ từ trên cùng bên trái. Trong hình chữ nhật này, khoảng cách giữa hai điểm A và C (dọc theo đường chéo của hình chữ nhật) bằng với khoảng cách giữa hai điểm B và D (dọc theo đường chéo còn lại). Hai đường chéo này cũng cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.



Vì vậy, nếu bạn tìm kiếm hình chữ nhật trên một vòng khép kín, có một cách để tìm ra chúng là tìm các cặp điểm trên đó có chung tính chất này: Chúng tạo thành các đoạn thẳng có độ dài bằng nhau với cùng một trung điểm. Và để tìm ra chúng, điều quan trọng là phải tìm ra một cách suy nghĩ có hệ thống.

Để hiểu được điều đó có nghĩa là gì, chúng ta có thể bắt đầu từ những thứ đơn giản hơn. Chúng ta chọn hai điểm trên trục số, giả sử các số 7 và 8 - và biểu diễn chúng thành một điểm duy nhất trong mặt phẳng Oxy (7, 8). Các cặp hai điểm trùng nhau, ví dụ (7, 7) cũng được chấp nhận. Bây giờ hãy xét tất cả các cặp số có thể được tạo thành từ các số trên trục số (có rất nhiều!). Nếu bạn định vẽ tất cả các cặp điểm đó, bạn sẽ có được toàn bộ mặt phẳng xy hai chiều. Một cách khác để phát biểu điều này là nói rằng mặt phẳng Oxy "*tham số hóa*", hoặc lấy theo thứ tự tất cả các cặp điểm trên trục số.



Vaughan đã thực hiện một việc tương tự cho các cặp điểm trên một đường cong kín (giống như trục số, nó là một chiều, chỉ có điều nó cũng tự uốn cong). Ông nhận ra rằng nếu ta lấy các cặp điểm từ đường cong và biểu diễn chúng - mà không cần quan tâm về việc điểm nào là tọa độ x

và điểm nào là tọa độ y - ta sẽ không thu được mặt phẳng Oxy. Thay vào đó, ta sẽ thu được một hình dạng đáng ngạc nhiên: Một dải Möbius, một mặt hai chiều chỉ có một mặt.

Theo một cách nào đó điều này lại rất có ý nghĩa. Để hiểu tại sao, ta chọn một cặp điểm trên đường cong và đặt tên chúng là x và y. Bây giờ ta đi từ x đến y dọc theo một cung của đường cong trong khi đi từ y đến x dọc theo cung còn lại của đường cong. Bằng cách làm như vậy, ta đã di chuyển qua tất cả các cặp điểm trên đường cong, bắt đầu và kết thúc với cặp không có thứ tự (x, y). Nhưng khi làm như vậy, ta trở lại nơi bắt đầu, theo hướng lật ngược lại. Vòng lặp định hướng lật này của các điểm không có thứ tự tạo thành lõi của dải Möbius.

Dải Möbius này cung cấp cho các nhà toán học một đối tượng mới để phân tích nhằm giải quyết vấn đề chốt hình chữ nhật. Vaughan đã sử dụng nó để chứng minh rằng mọi đường cong như vậy đều chứa ít nhất bốn điểm tạo thành một hình chữ nhật.

Những câu trả lời bốn chiều

Chứng minh của Greene và Lobb được xây dựng dựa trên công trình của Vaughan. Nó cũng kết hợp một số kết quả bổ sung, một vài trong số đó chỉ mới được tìm ra gần đây. Chứng minh cuối cùng là một công cụ chính xác, có sự kết hợp đúng đắn của các ý tưởng để tạo ra kết quả mà họ mong muốn.

Một trong những phần quan trọng đầu tiên trong chứng minh của họ xuất hiện vào tháng 11 năm 2019 khi một sinh viên tốt nghiệp Princeton là Cole Hugelmeyer công bố bài báo giới thiệu một cách mới để phân tích dải Möbius của Vaughan. Công việc này liên quan đến một quy trình toán học gọi là nhúng, trong đó bạn lấy một vật thể và ghép nó vào một không gian hình học. Greene và Lobb cuối cùng sẽ sử dụng kỹ thuật Hugelmeyer và chuyển nó vào một không gian hình học khác. Nhưng để xem những gì họ (Greene và Lobb) đã làm trước tiên bạn cần biết những gì anh sinh viên (Cole Hugelmeyer) đã thực hiện.

Dưới đây là một ví dụ đơn giản về việc nhúng là gì.

Chúng ta bắt đầu với một đường thẳng một chiều. Mỗi điểm trên đường thẳng được xác định bởi một số duy nhất. Bây giờ, "*nhúng*" đường thẳng đó vào trong không gian hai chiều - có nghĩa là, bạn sẽ minh họa đường thẳng trên một mặt phẳng.

Khi nhúng đường thẳng vào một mặt phẳng Oxy, vị trí mỗi điểm trên đó sẽ được xác định chính xác bởi hai số - gồm hoành độ x và tung độ y. Với cách làm này, ta có thể bắt đầu phân tích đường thẳng bằng cách sử dụng các kỹ thuật của hình học hai chiều.

Ý tưởng của Hugelmeyer là làm một cái gì đó tương tự cho dải Möbius, nhưng bằng cách nhúng nó vào không gian bốn chiều, nơi anh ta có thể sử dụng các đặc trưng của hình học bốn chiều để chứng minh kết quả mà anh ta mong muốn về hình chữ nhật.

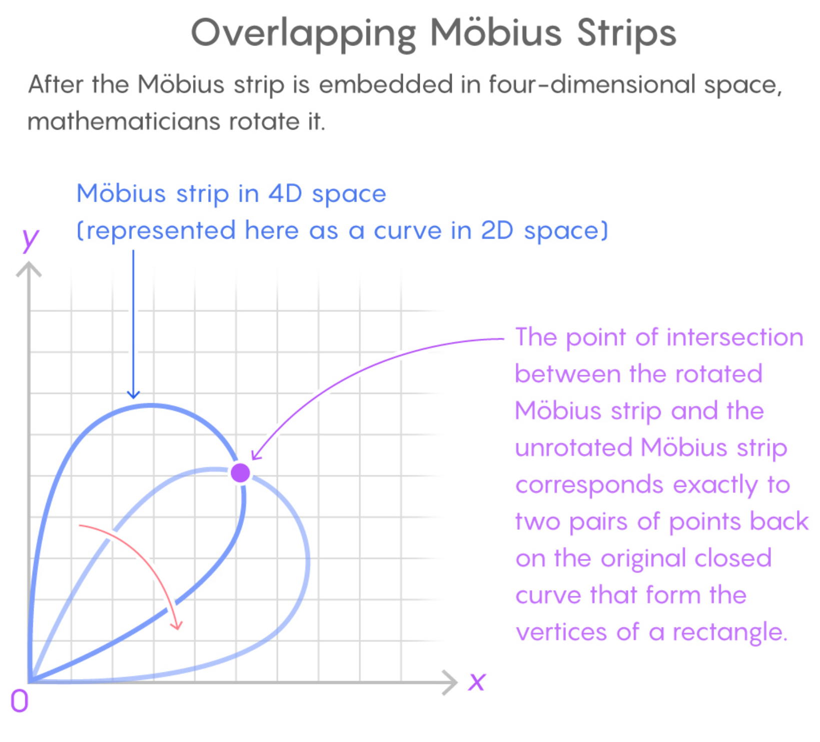
"*Về cơ bản, bạn đã có dải Möbius của mình và với mỗi điểm trên đó bạn sẽ cung cấp cho nó bốn tọa độ. Bạn cung cấp cho mỗi điểm một địa chỉ trong không gian bốn chiều*", Lobb nói.

Hugelmeyer đã tạo ra những địa chỉ này theo một cách có thể đặc biệt hữu ích cho mục tiêu chung là tìm ra các hình chữ nhật trên một đường cong. Tương tự như với một mã bưu chính, ta có thể nghĩ đến việc anh ấy gán từng điểm trên đường cong cho một tiểu bang, một thành phố, một tên đường và một số nhà.

Để làm điều này, anh ta bắt đầu với một điểm cho trước trên dải Möbius và tập trung vào hai điểm trên đường cong khép kín ban đầu mà nó biểu diễn. Sau đó, anh ta tìm trung điểm của cặp điểm đó và xác định tọa độ x và y của nó. Đó là hai giá trị đầu tiên trong "*địa chỉ bốn chiều*" (tiểu bang và thành phố).

Tiếp theo, anh ta đo khoảng cách (theo đường thẳng) giữa hai điểm ban đầu trên đường cong. Độ dài đó trở thành giá trị thứ ba trong "*địa chỉ bốn chiều*" (tên đường). Cuối cùng, anh ta tính góc tạo thành giữa đường thẳng qua hai điểm ban đầu và trục x. Góc đó trở thành giá trị thứ tư trong "*địa chỉ bốn chiều*" (số nhà). Bốn giá trị này cho ta biết tất cả mọi thứ về cặp điểm trên đường cong một cách hiệu quả.

Các bước có vẻ phức tạp, nhưng Hugelmeyer lập tức thu được các kết quả. Anh ta lấy dải Möbius đã được nhúng và xoay nó, theo cách ta có thể tưởng tượng là đang giữ một khối trước mặt và vặn nó một chút sang trái. Dải Möbius mới sau khi xoay có vị trí bù với dải Möbius gốc, do đó hai dải sẽ cắt nhau. (Vì phép quay diễn ra trong không gian bốn chiều, nên hình ảnh chính xác của hai dải Möbius rất khó hình dung, nhưng nó dễ dàng để tiếp cận về mặt toán học).



Giao điểm này có vai trò rất quan trọng. Bất cứ nơi nào hai dải Möbius chồng lên nhau, ta sẽ tìm thấy hai cặp điểm tương ứng trên đường cong khép kín ban đầu tạo thành bốn đỉnh của một hình chữ nhật.

Vì sao lại như vậy?

Đầu tiên, hãy nhớ rằng một hình chữ nhật có thể được hiểu là hai cặp điểm có chung điểm chính giữa và khoảng cách của hai điểm trong mỗi cặp là như nhau. Đây chính xác là thông tin được mã hóa trong ba giá trị đầu tiên của "*địa chỉ bốn chiều*" được gán cho từng điểm trên dải Möbius được nhúng.

Thứ hai, ta có thể xoay dải Möbius trong không gian bốn chiều để chỉ thay đổi một trong bốn tọa độ trong "*địa chỉ bốn chiều*" của mỗi điểm - như thay đổi số nhà của tất cả các ngôi nhà tại một khu vực, nhưng để lại tên đường, tên thành phố và tên tiểu bang. (Xét một ví dụ mang tính hình học hơn, hãy tưởng tượng về cách giữ một khối trước mặt bạn và dịch chuyển nó sang bên phải, tức là chỉ thay đổi hoành độ x của nó, còn tung độ y và cao độ z được giữ nguyên).

Hugelmeyer đã giải thích cách xoay dải Möbius trong không gian bốn chiều sao cho hai tọa độ trung điểm của các cặp điểm và tọa độ khoảng cách giữa chúng được giữ nguyên. Phép xoay chỉ thay đổi tọa độ cuối cùng - góc của đoạn thẳng giữa các cặp điểm.

Kết quả là, giao điểm của dải Möbius sau khi được xoay và dải ban đầu tương ứng với hai cặp điểm phân biệt trên đường cong kín có cùng trung điểm và cách nhau một khoảng bằng nhau. Ta có thể kết luận, giao điểm đó tương ứng với bốn đỉnh của một hình chữ nhật trên đường cong.

Kĩ thuật sử dụng giao điểm giữa hai không gian để tìm các điểm mà ta mong muốn, từ lâu đã được sử dụng trong việc nghiên cứu các vấn đề về chốt hình vuông và hình chữ nhật.

"*Nơi những [không gian] giao nhau là nơi bạn có thứ mà bạn đang tìm kiếm*", Denne cho biết. "*Rất nhiều những chứng minh trong lịch sử về vấn đề chốt hình vuông dựa trên ý tưởng đó*".

Hugelmeyer đã sử dụng kĩ thuật giao nhau trong không gian bốn chiều và thu được nhiều kết quả hơn bất kỳ ai trước đó. Dải Möbius có thể được xoay theo bất kỳ góc nào trong khoảng từ 0 đến 360 độ, và anh ta đã chứng minh rằng một phần ba trong số các phép quay đó tạo ra một giao điểm giữa bản gốc và bản sao được xoay. Điều này hóa ra lại tương đương với việc nói rằng trên một đường cong kín, ta có thể tìm thấy các hình chữ nhật ứng với một phần ba trong số các tỷ lệ khung hình có thể.

"*Nhờ Cole mà chúng tôi nhận ra rằng, nên suy nghĩ về việc đặt dải Möbius trong không gian bốn chiều và sử dụng các kỹ thuật bốn chiều tương ứng*", Greene nói.

Đồng thời, kết quả của Hugelmeyer cũng rất đáng chú ý: Nếu không gian bốn chiều là một cách hiệu quả để tấn công bài toán, tại sao nó chỉ hữu ích cho một phần ba các hình chữ nhật có thể?

"*Bạn có thể giải quyết được hai phần ba còn lại, vì chúa*", Greene nói. "*Nhưng bằng cách nào?*"

Giữ cho chúng đối xứng Symplectic

Ngay trước khi phải tự cách ly do đại dịch, Greene và Lobb đã quan tâm đến vấn đề chốt hình chữ nhật. Vào tháng hai, Lobb đã tổ chức một hội nghị tại Viện Khoa học và Công nghệ Okinawa mà Greene cũng có tham dự. Hai người đã dành ra hai ngày để nói về vấn đề này. Sau đó, họ tiếp tục cuộc trò chuyện của mình trong một tuần tham quan ở Tokyo.

“*Chúng tôi không ngừng nói về vấn đề này*”, Lobb nói. “*Chúng tôi đã cùng đi đến nhà hàng, quán cà phê, bảo tàng và luôn suy nghĩ về vấn đề này*”.

Họ tiếp tục cuộc trò chuyện ngay cả sau khi bị cách ly tại nhà. Họ hi vọng sẽ chứng minh được mọi vòng quay có thể của dải Möbius đều mang lại một điểm giao nhau - tương đương với việc chứng minh ta có thể tìm thấy các hình chữ nhật với tất cả các tỷ lệ khung hình.

Vào giữa tháng 4, họ đã phát triển một chiến lược. Nó liên quan đến việc nhúng dải Möbius vào trong một phiên bản đặc biệt của không gian bốn chiều. Bằng cách nhúng thông thường, bạn có thể đặt đối tượng nhúng theo bất kỳ cách nào bạn muốn. Hãy suy nghĩ về việc nhúng một vòng khép kín một chiều trong mặt phẳng hai chiều. Số cách bạn có thể làm là vô hạn, tương tự như số cách bạn có thể sắp xếp một vòng lặp của chuỗi trên bảng.

Nhưng giả sử rằng, bề mặt hai chiều mà bạn muốn nhúng vòng lặp vào có một cấu trúc nhất định. Hãy nghĩ, ví dụ, về một bản đồ được xếp lớp với các mũi tên (được gọi là các vectơ) cho biết gió thổi vào mỗi điểm trên Trái Đất theo hướng nào và với tốc độ bao nhiêu. Bây giờ bạn đã có một bề mặt hai chiều với các thông tin hoặc cấu trúc bổ sung tại mỗi điểm. Sau đó, bạn có thể đặt ra quy tắc rằng vòng khép kín một chiều cần được nhúng vào bản đồ này để nó luôn tuân theo hướng của các mũi tên mà nó được nhúng vào.

“*Khó khăn của bạn là bạn phải cố gắng đặt một đường cong theo các vectơ đó*”, ông Schwartz nói. Có rất ít cách để có thể đặt vòng lặp của chuỗi.

Các loại không gian hình học khác đã mở ra các hướng suy nghĩ về các cách khác nhau để đặt giới hạn. Một trong những điều quan trọng trong nghiên cứu của Greene và Lobb chính là không gian đối xứng.

Kiểu thiết lập hình học này lần đầu tiên xuất hiện vào thế kỷ XIX trong nghiên cứu các hệ thống vật lý, ví dụ như quỹ đạo quay của các hành tinh. Khi một hành tinh chuyển động trong không gian ba chiều, vị trí của nó được xác định bởi ba tọa độ. Nhưng nhà toán học người Ireland William Rowan Hamilton đã quan sát thấy rằng tại mỗi điểm trong chuyển động của hành tinh, người ta cũng có thể đặt một vectơ biểu diễn động lượng của hành tinh đó.

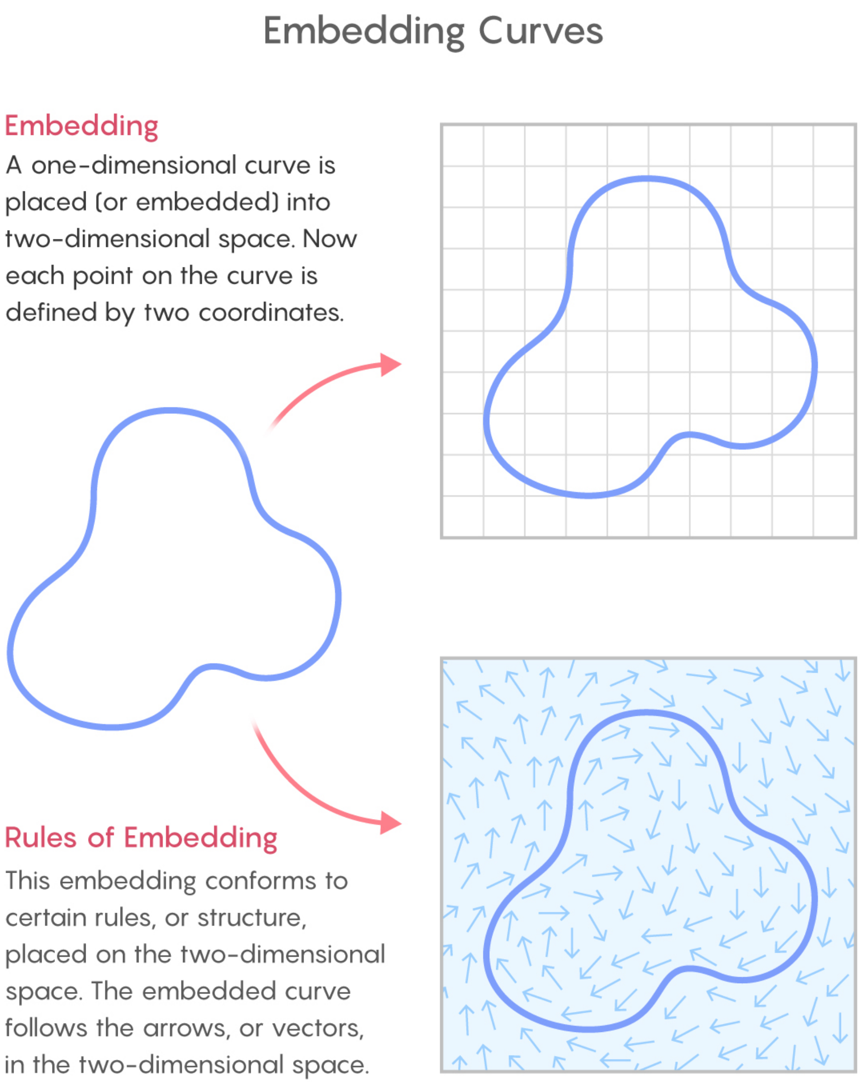
Vào những năm 1980, nhà toán học Vladimir Arnold đã xây dựng một nghiên cứu về hình học đối xứng. Ông thấy rằng các không gian hình học với cấu trúc đối xứng tự giao nhau khi xoay thường xuyên hơn so với các không gian không có cấu trúc như vậy.

Điều này là hoàn hảo cho Greene và Lobb, những người muốn giải quyết vấn đề chốt hình chữ nhật cho tất cả các tỷ lệ khung hình bằng cách chứng minh rằng một bản sao xoay của dải Möbius được tham số hóa cũng tự giao nhau rất nhiều. Vì vậy, họ cố gắng nhúng dải Möbius hai chiều vào trong không gian đối xứng bốn chiều.

“*Cái nhìn sâu sắc và quan trọng này giúp ta có thể xem xét vấn đề từ góc nhìn của hình học đối xứng*”, Greene nói, “*Đó là một thứ có thể thay đổi cuộc chơi*”.

Cuối tháng 4, Greene và Lobb đã xác định rằng có thể nhúng dải Möbius vào trong không gian đối xứng bốn chiều theo cách phù hợp với cấu trúc của không gian. Từ đó họ có thể sử dụng các công cụ của hình học đối xứng - nhiều trong số đó trực tiếp giải đáp câu hỏi về việc các không gian giao nhau như thế nào.

"*Nếu bạn có thể làm cho [dải Möbius] tuân theo các quy tắc đối xứng, bạn có thể tận dụng một số định lý về đối xứng*", Lobb nói.



Nhờ điều này, Greene và Lobb tự tin rằng họ có thể cải thiện kết quả của Hugelmeyer - có nghĩa là họ có thể chứng minh rằng có nhiều một phần ba trong số tất cả các phép quay tạo ra giao điểm. Điều này cũng có nghĩa là số hình chữ nhật được tìm thấy dưới dạng các điểm trên bất kỳ đường cong kín nhiều hơn một phần ba tổng số hình chữ nhật với các tỉ lệ khác nhau.

"*Một cái gì đó chắc chắn sẽ xảy ra khi chúng tôi có ý tưởng này*", Lobb nói.

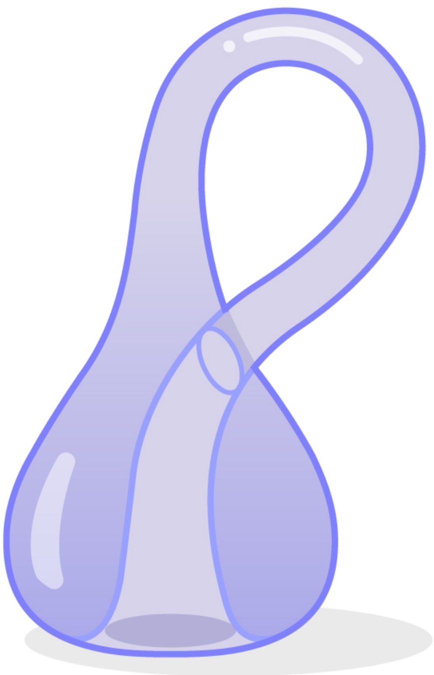
Nhưng kết quả của họ còn rộng hơn - và đến nhanh hơn nhiều - so với họ dự đoán. Và lý do cho điều này là một đối tượng toán học kỳ quặc được gọi là chai Klein, thứ có một tính chất quan trọng khi được xem xét trong bối cảnh hình học đối xứng.

Sự kết nối chai Klein

Chai Klein là một mặt cong hai chiều trông giống như một bình nước. Giống như dải Möbius, nó chỉ có một mặt và ta có thể tạo một mặt bằng cách dán hai dải Möbius lại với nhau. Bất kỳ chai Klein nào mà ta có thể tạo ra và đặt trên bàn, như nhiều nhà toán học đã làm, đều tự giao với chính nó. Không có cách nào để nhúng chai Klein vào không gian ba chiều mà nó không tự giao nhau.

"*Chai Klein được cho là một mặt cong, nhưng để đi từ bên ngoài vào bên trong, ta phải đi xuyên qua chai*", Schwartz nói.

Tuy nhiên, không phải luôn luôn như vậy. Trong không gian bốn chiều, ta có thể nhúng chai Klein sao cho nó không tự giao nhau. Chiều thứ tư cung cấp thêm công cụ để điều khiển chai Klein tự tránh chính nó. Nó tương tự như việc hai người đi về phía nhau trên đường một chiều không thể tránh khỏi va chạm, nhưng hai người đi về phía nhau trên sàn hai chiều có thể dễ dàng tránh được nhau.



Vào tháng 5, Greene và Lobb tình cờ nhớ ra một sự thật thú vị về chai Klein: Nó không thể được nhúng vào không gian đối xứng bốn chiều mà không tự giao với chính nó. Nói cách khác, không thể có một chai Klein không tự giao nhau tuân thủ các quy tắc đặc biệt của không gian đối xứng. Điều này là chìa khóa cho chứng minh. "*Đó là một viên đạn kỳ diệu*", Greene cho biết.

Đây là lý do. Greene và Lobb đã chứng minh rằng có thể nhúng dải Möbius trong không gian đối xứng bốn chiều tuân theo các quy tắc của không gian. Điều họ thực sự muốn biết là liệu mọi vòng quay của dải Möbius có giao với bản gốc hay không.

Hai dải Möbius giao nhau tương đương với một chai Klein, loại bề mặt tự giao nhau trong loại không gian này. Và nếu ta xoay một dải Möbius sao cho bản sao được xoay không giao với bản gốc, về bản chất, ta đã tạo ra một chai Klein không tự giao nhau. Nhưng một chai Klein như vậy không thể tồn tại trong không gian đối xứng bốn chiều. Do đó, mọi phép quay có thể của dải Möbius được nhúng cũng phải tự giao nhau - nghĩa là mọi đường cong khép kín, trơn phải chứa các bộ bốn điểm tạo thành các hình chữ nhật với tất cả các tỷ lệ khung hình.

Kết luận cuối cùng đã đến như một trận tuyết lở.

"*Nó giống như việc cứ liên tục thực hiện, thực hiện, thực hiện, và sau đó một điều kì diệu xuất hiện và chứng minh được hoàn thành*", ông Denne nói.

Chứng minh của Greene và Lobb là một ví dụ điển hình để thấy rằng, việc giải quyết một vấn đề thường phụ thuộc rất nhiều vào việc tìm ra hướng đi phù hợp để xem xét nó. Nhiều thế hệ các nhà toán học đã thất bại trong việc xử lý phiên bản của bài toán chốt hình chữ nhật này vì họ cố gắng giải quyết nó trong các bối cảnh hình học truyền thống. Khi Greene và Lobb chuyển nó vào thế giới đối xứng, vấn đề đã được giải quyết.

"*Những vấn đề này đã được đưa ra trong những năm* 1910 *và* 1920, *họ đã không có những công cụ thích hợp để suy nghĩ về chúng*", theo Greene. "*Những gì chúng tôi nhận ra là họ đã ẩn giấu những hiện tượng đối xứng tượng trưng*".

THƠ VÀ KHOA HỌC - VIẾT CHO TRẺ EM

Hideki Yukawa
Người dịch Doãn Hồng Trang

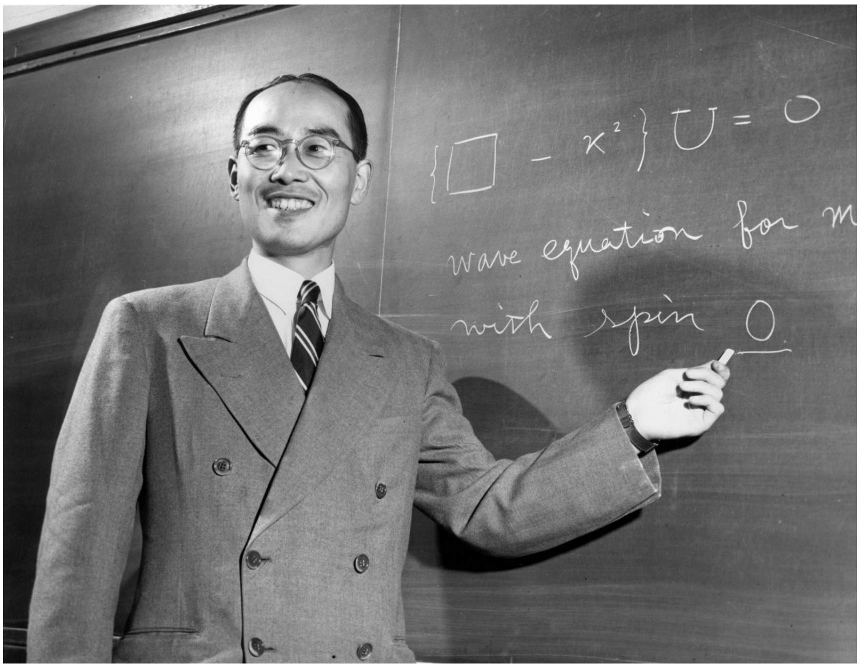
Thơ và khoa học trông xa mà gần, trông gần mà xa. Tại sao ta thấy hai thứ này xa nhau? Bởi vì khoa học giống như một người thầy giáo nghiêm khác: Ta không thể trả lời thầy qua loa, mà phải cẩn thận làm những thí nghiệm phức tạp, phải giải những bài toán khó. Còn thơ thì giống như một người mẹ hiền: Ta có nói gì đi nữa, mẹ lúc nào cũng lắng nghe. Trong thế giới của thơ, hoa nào cũng thơm, quả nào cũng ngọt.

Như dù sao ta vẫn thấy thơ và khoa học gần nhau. Vì sao? Vì xuất phát điểm của chúng là giống nhau. Cả hai đều bắt đầu từ việc nhìn và lắng nghe thiên nhiên. Không có khác nhau nhiều lắm giữa cảm giác khi ta ngửi một bông hoa hồng và ngợi ca vẻ đẹp của nó, và cảm giác lúc ta nghiên cứu hình dạng của bông hoa.

Nhưng làm một bài thơ về hoa hồng và mang kính hiển vi ra soi thì đã rất khác nhau. Khoa học ngày nay tiến bộ rất nhanh và đã chia thành nhiều chuyên ngành nhỏ. Trong phòng thí nghiệm la liệt các thiết bị, trong cuốn sách đầy rẫy những công thức khó hiểu, ta không còn thấy hình bóng của thơ nữa. Nhà khoa học là người đã quên thơ, là người đã đánh mất thơ.

Nếu vậy thì tôi không biết bài thơ một lần bị mất có bao giờ quay trở về thế giới khoa học nữa hay không. Cái ta gọi là thơ là một thứ có tính thất thường. Không nhất thiết là ta sẽ tìm được thơ ở nơi ta cứ đi cặm cụi tìm nó. Đôi khi, ở một góc của phòng thí nghiệm bừa bộn, nhà khoa học lại bất ngờ phát hiện ra một bài thơ. Trong những công thức mà người bình thường không thấy gì hay ho gì, con mắt của người làm chuyên môn lại thấy một hình hài của tự nhiên đẹp hơn cả đoá hoa hồng mà mắt ai cũng nhìn thấy được. Nhưng không phải chỉ các nhà khoa học mới cảm nhận được vẻ đẹp ẩn giấu của tự nhiên. Có thể việc tìm lại vẻ đẹp của tự nhiên trong lòng khoa học là đặc quyền của một số khá ít các học giả xuất sắc. Nhưng một bài thơ, khi đã được một người tìm ra, có thể được chia sẻ cho bao nhiêu người khác cũng được.

Chung quy thì có khi thơ và khoa học không những chỉ cùng xuất phát từ một chỗ, mà còn đến cùng một điểm. Có khi ta thấy chúng xa nhau vì ta chỉ để ý đến quãng đường ta đi giữa chừng. Tôi không rõ nếu cứ đi tiếp, hai con đường có sẽ xích lại gần nhau hay không. Không phải chỉ như vậy, có khi hai con đường còn sẽ giao thoa một cách bất ngờ.



Hình 1: Hideki Yukawa

Giới thiệu về tác giả

Hideki Yukawa [1] (tên khai sinh là Hideki Ogawa) sinh ngày 23 tháng 1 năm 1907 tại Tokyo, Nhật Bản. Bố mẹ ông đều xuất phát trong những gia đình truyền thống võ sĩ đạo (samurai) của Nhật. Ông là người thứ năm trong bảy anh chị em. Lúc Hideki sinh ra, bố ông, Takuji Okawa, đang làm việc tại Uỷ ban điều tra địa chất ở Tokyo, nhưng lúc Hideki một tuổi ông nhận chức Giáo sư Địa Lí tại Đại học Kyoto và mang cả gia đình về thành phố Kyoto, cố đô của Nhật Bản. Lúc mới 5 – 6 tuổi Hideki được ông ngoại dạy đọc chữ Hán (kanji) qua các sách Đại học, Luận ngữ và Mạnh Tử. Cách dạy của ông ngoại là ông lấy que chỉ vào từng chữ trong sách, Hideki phải theo ông đọc to thành tiếng từng chữ. Mặc dù lúc đó Hideki không hiểu tí nào ý nghĩa của những thứ ông ngoại dạy mình đọc, những bài tập đọc này giúp cho ông đọc được sách sớm hơn các bạn cùng tuổi.

Những năm đầu học phổ thông ông không có vẻ không có thiên hướng gì về vật lý mà lại say mê văn học hơn là khoa học. Nhưng ở trường trung học, ông bắt đầu làm quen với vật lý hiện đại (thuyết tương đối và cơ học lượng tử) qua những cuốn sách trong thư viện của trường và bị môn này lôi cuốn. Năm 1926 Hideki Ogawa trúng tuyển vào khoa Vật Lí trường Đại học Kyoto. Một người bạn học cùng phổ thông trung học với ông, Shin-Ichiro Tomonaga, cũng trúng tuyển vào trường này. Trong thời gian học đại học hai người bạn giúp đỡ nhau học. Sau khi tốt nghiệp, cả hai người đều ở lại trường làm trợ giảng trong vài năm. Năm 1932 Hideki Ogawa thành giảng viên ở Kyoto, còn bạn ông, Tomonaga, chuyển về Tokyo. Cũng vào năm 1932 Hideki cưới vợ. Vợ ông, Sumi Yukawa, là một nghệ sĩ múa. Gia đình vợ ông không có con trai, theo truyền thống của Nhật, bố mẹ vợ ông nhận ông làm con nuôi và từ đó ông mang họ của nhà vợ, Yukawa.

[1] Trích Tiểu sử các nhà Vật lý của Nguyễn Đình Noãn và Trần Ngọc Hải, 2020.

Những năm Hideki Yukawa bắt đầu đi làm là lúc Cơ học lượng tử đã định hình và các nhà vật lý bắt đầu quan tâm đến một vấn đề mới: Cấu trúc của hạt nhân nguyên tử. Lúc đó người ta biết một hạt nhân có thể biến thành hạt nhân khác qua phân rã alpha hoặc phân rã beta, hoặc qua phản ứng hạt nhân, nhưng người ta vẫn chưa biết hạt nhân cấu tạo từ những hạt gì. Tới năm 1931 người ta vẫn nghĩ rằng hạt nhân được cấu thành từ hạt proton (hạt nhân nguyên tử hidro) và electron. Chỉ tới năm 1932, sau khi Chadwick phát hiện ra hạt neutron, nhà vật lý Đức Heisenberg và nhà vật lí Nga Ivanenko mới đưa ra giả thuyết rằng hạt nhân được cấu tạo từ hạt proton và hạt neutron. Câu hỏi là lực nào gắn các hạt proton và neutron lại với nhau? Lúc đó người ta đã biết lực điện từ là lực giữa các hạt mang điện tích và lực này có thể được giải thích như sự trao đổi hạt photon giữa các hạt mang điện. Người ta cũng biết tương tác yếu gây ra phân rã beta của một số hạt nhân. Nhưng lực gắn các hạt proton và neutron trong hạt nhân có vẻ lớn hơn nhiều và không thể quy vào hai tương tác trên.

Cũng như các nhà vật lý ở châu Âu, Yukawa suy nghĩ nhiều năm về vấn đề này. Lời giải cho câu đố về bản chất của lực hạt nhân đến với Yukawa vào một buổi tối cuối tháng 10năm 1934 : Lực hạt nhân phải được mang bằng một hạt mới. Nếu hạt này có khối lượng, ta có thể giải thích được tại sao lực hạt nhân lại chỉ tác dụng trong một bán kính rất nhỏ. Nói đơn giản ra, ý tưởng của Yukawa như sau. Một hạt có khối lượng m mang năng lượng $E = mc^2$, trong đó c là vận tốc ánh sáng. Nếu không có đủ năng lượng E ta sẽ không thể sinh ra hạt này, nhưng theo cơ học lượng tử, hạt này có thể sinh ra rồi lại biến đi trong một khoảng thời gian ngắn, độ dài của khoảng thời gian này là $\frac{h}{E}$, trong đó h là hằng số Planck (theo hệ thức bất định Heisenberg). Do vận tốc ánh sáng c là vận tốc tối đa, trong khoảng thời gian này quãng đường tối đa hạt này có thể chuyển động được là $\frac{h}{E} \cdot c = \frac{h}{mc}$. Biết rằng lực hạt nhân có bán kính tác dụng là khoảng 1 femtomet ($10-15$ m), Yukawa tính ra là hạt này phải có khối lượng lớn hơn khối lượng electron 200 lần. Yukawa công bố phát kiến của mình trong bài báo "*Tương tác của các hạt cơ bản*", in năm 1935.

Việc Yukawa chỉ dùng kiến thức về bán kính tương tác của lực hạt nhân mà đưa ra giả thuyết về một hạt mới chưa từng được tìm ra là một bước nhảy mang tính cách mạng cho vật lý thời đó. Lúc đó các nhà vật lý hết sức dè dặt trong việc đưa ra các giả thuyết về các hạt mới. Trước Yukawa chỉ có hai người đã làm việc này: Pauli đưa ra giả thuyết về hạt neutrino năm 1930, và Dirac đưa ra giả thuyết về hạt positron (phản hạt của electron) năm 1931. Việc tìm tòi hạt mang lực hạt nhân (nay ta gọi là hạt pion, kí hiệu là π) ban đầu không đưa đến kết quả. Năm 1937 một hạt có khối lượng khoảng 200 lần khối lượng electron được tìm ra trong tia vũ trụ, nhưng người ta nhanh chóng xác định rằng nó không thể là hạt mà Yukawa đưa ra, vì nó tương tác rất yếu với proton và neutron. Hạt này nay ta gọi là hạt muon (ký hiệu là μ). Chỉ đến năm 1947 hạt pion mới được tìm ra trong tia vũ trụ. Năm 1949 ông trở thành người Nhật Bản đầu tiên được giải thưởng Nobel. Bạn học của ông, Shin-Ichiro Tomonaga, được giải Nobel về Vật lý năm 1965, và là người Nhật Bản thứ hai được giải thưởng này.

Từ năm 1948 đến năm 1949, Hideki Yukawa là Giáo sư mời tại Viện nghiên cứu cao cấp tại Đại học Princeton và năm 1949 ông trở thành Giáo sư Vật lý tại Đại học Colombia. Năm 1953, để lôi kéo ông về lại Nhật Bản, chính phủ Nhật Bản thành lập Viện Nghiên cứu Vật lí cơ bản tại Đại học Kyoto và mời ông về làm giám đốc đầu tiên của Viện này. Viện này nay mang tên Viện Vật lý lí thuyết Yukawa và là một trong những viện nghiên cứu hàng đầu của Nhật Bản về vật lý. Ông cũng là người sáng lập ra tạp chí "*Progress of Theoretical Physics*" (Những thành tựu của Vật lí lí thuyết). Ông cũng là một trong những người ký tên vào tuyên ngôn Russell-Einstein kêu gọi giải trừ vũ khí hạt nhân.

Hideki Yukawa là một người đọc rộng và chịu ảnh hưởng của văn hoá cả phương Đông lẫn phương Tây. Năm 1966 khi ông đưa ra ý tưởng về một không-thời gian gián đoạn, ông liên hệ ý tưởng này với một câu văn của Lý Bạch: "*Trời đất là quán trọ của muôn vật, thời gian là khách ghé của trăm đời*". Ngoài những bài báo khoa học, ông còn để lại nhiều tác phẩm khác, trong đó có cuốn sách *"Tabibito"* (Người lữ hành), viết về cuộc đời của bản thân mình từ nhỏ đến năm 1935, lúc ông hoàn thành xong bài báo sau này đã mang lại giải Nobel cho ông. Kết thúc cuốn sách, ông viết về cảm xúc của mình sau khi khám phá ra bản chất của lực hạt nhân:

Tôi cảm thấy mình như một người lữ hành ngồi nghỉ trong một quán nước nhỏ trên đỉnh núi. Lúc đó tôi không suy nghĩ là đằng trước tôi còn có ngọn núi nào nữa không.

Tài liệu tham khảo

[1] https://damtson.wordpress.com/2020/07/23/hideki-yukawa-shi-to-kagaku/

THUẬT TOÁN GIÚP TĂNG TỐC ĐỘ XÉT NGHIỆM CORONA

Smriti Mallapaty
Lược dịch - Trịnh Diễm Anh

Các nhà khoa học nói rằng việc xét nghiệm rộng rãi là điều cần thiết để kiểm soát việc lây lan virus. Tuy nhiên nhiều khu vực đang thiếu hụt những hóa chất cần thiết khi thực hiện xét nghiệm chẩn đoán. Ở một số quốc gia, các quan chức y tế đã bắt đầu sử dụng thuật toán mà lần đầu tiên được đưa ra trong chiến tranh thế giới thứ hai, đó là phương pháp xét nghiệm theo nhóm. Xét nghiệm theo nhóm là 1 lần xét nghiệm cho 1 mẫu của nhiều người. Các nhà nghiên cứu cho biết phương pháp này tiết kiệm thời gian, hóa chất và chi phí.

Roy Kishony là một nhà sinh học dịch tễ tại Technion - Israel Institute of Technology, Haifa đã phát biểu: "*Trong đại dịch toàn cầu hiện nay, làm xét nghiệm cho số lượng người bệnh khá lớn là rất cần, và gộp nhóm là một lựa chọn đáng quan tâm*".

Các nước như Trung Quốc, Ấn Độ, Mỹ, ... cũng đang sử dụng phương pháp xét nghiệm nhóm.

Có nhiều cách để tiến hành xét nghiệm nhóm, và các nhà khoa học của một số nước đang thử nghiệm với cách tốt nhất trong đại dịch lần lần này. Phần lớn ý tưởng của họ xuất phát từ lĩnh vực toán học, và đang được áp dụng cho một số bài toán quy mô như: Phát hiện ra những đèn bị lỗi trên cây Giáng Sinh, hoặc ước lượng tỷ lệ nhiễm HIV trong dân số.

Dror Baron, một nhà khoa học thông tin tại đại học tọa lạc Raleigh tiểu bang North Carolina, Hoa Kỳ phát biểu: "*Đã có hang loạt đổi mới trong lĩnh vực này*".

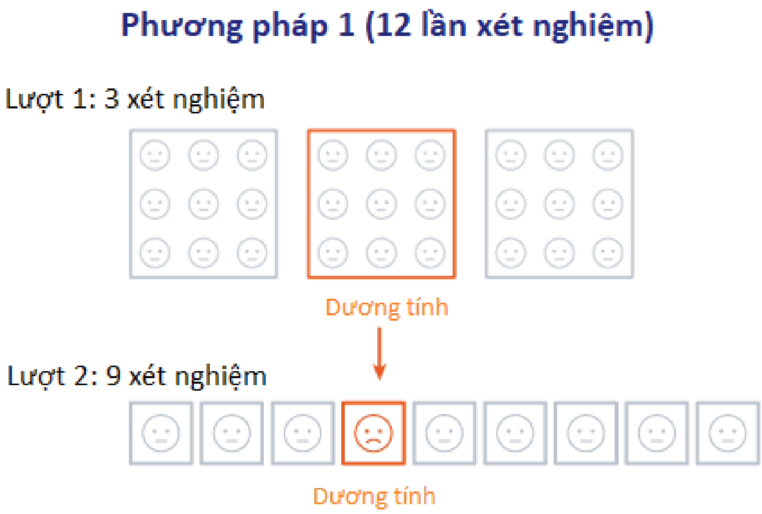
Có 4 phương pháp nổi bật đang được thử nghiệm hiện nay.

Phương pháp 1 và 2

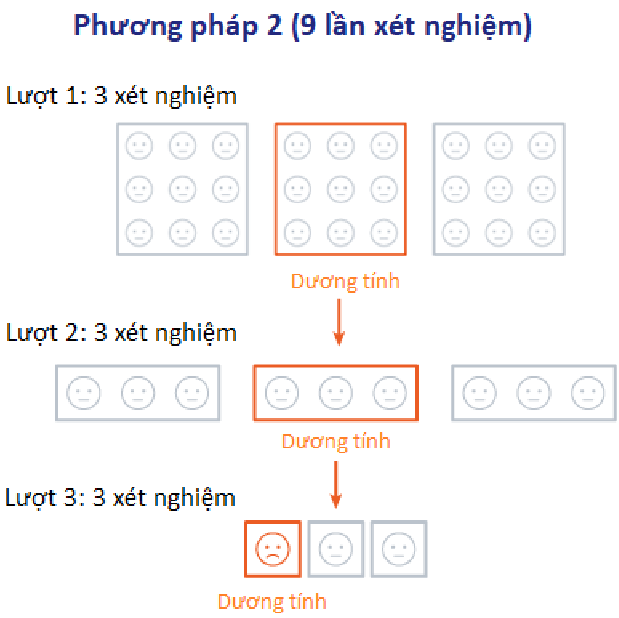
Phương pháp này được sử dụng từ giang mai đến corona. Phương pháp đơn giản nhất của xét nghiệm nhóm đã được nhà kinh tế học Robert Dorfman đề xướng vào những năm 1940 để kiểm tra những người lính mắc bệnh giang mai.

Theo phương pháp này, một số lượng mẫu như nhau được thu thập từ gạc mũi và họng của những ca nhiễm SARS-CoV-2 sẽ được trộn lẫn thành nhóm (*xem Phương pháp* 1 *trong hình bên dưới*) và xét nghiệm một lần. Nhóm các mẫu xét nghiệm cho kết quả âm tính sẽ được loại bỏ. Nhưng với nhóm xét nghiệm cho kết quả dương tính thì từng mẫu trong nhóm này lại được xét nghiệm riêng lẻ. Các nhà khoa học ước tính kích cỡ nhóm hiệu quả nhất, và số lần xét nghiệm ít nhất dựa trên tỷ lệ nhiễm virus trong cộng đồng.

Tháng 5 vừa qua, chính quyền thành phố Vũ Hán, Trung Quốc đã sử dụng phương pháp 1 như một trong những nỗ lực xét nghiệm phần lớn cư dân của thành phố, và đạt được 10 triệu người chỉ sau hơn 2 tuần triển khai. Các mẫu của khoảng 2, 3 triệu người đã được sử dụng phương pháp xét nghiệm nhóm, với 5 mẫu trong một nhóm và kết quả là 56 người bị nhiễm corona đã được tìm thấy.



Các nhà nghiên cứu cho biết cách này đạt hiệu quả nhất khi mà số lượng người bị nhiễm chiếm khoảng 1% dân số, bởi vì nhiều xét nghiệm là âm tính, điều này tiết kiệm hơn xét nghiệm nhiều người riêng lẻ.



Krishna Narayanan, một thuyết gia thông tin tại trường đại học Texas A&M cho rằng "*Đây là phương pháp đơn giản nhất*". và ông nói thêm rằng "*Nhưng ở lượt xét nghiệm lần 2, vẫn có nhiều cách hiệu quả hơn xét nghiệm từng người riêng lẻ*".

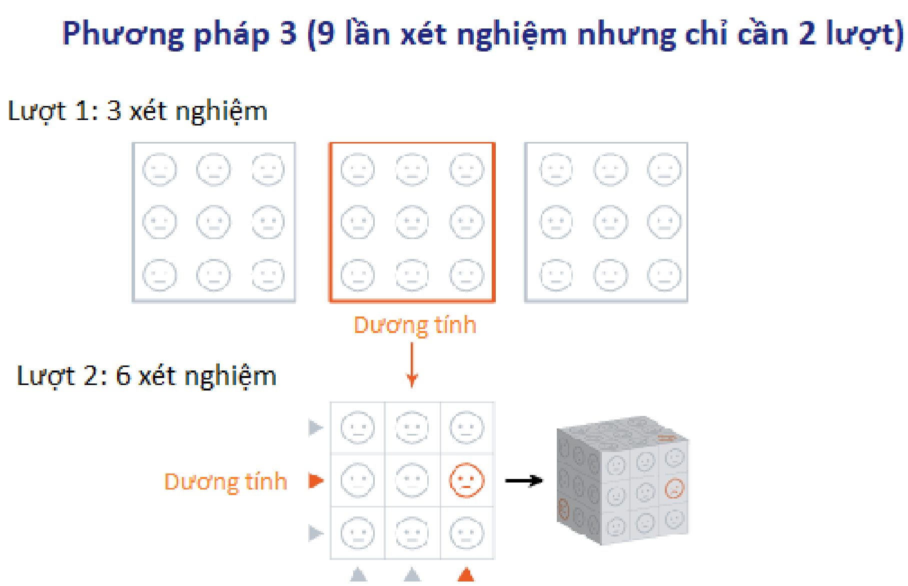
Thêm một phiên bản tốt hơn, đó là có thêm các lượt xét nghiệm nhóm trước khi xét nghiệm riêng lẻ (*xem phương pháp 2 trong hình bên dưới*). Thêm lượt xét nghiệm nhóm sẽ giảm số người cần được xét nghiệm riêng lẻ.

Tuy nhiên cách tiếp cận này chậm, vì phải mất vài giờ để có kết quả xét nghiệm nhóm. Wilfred Ndifon, nhà sinh học thuộc viện Khoa học toán Châu Phi, Kigali, Rwanda phát biểu "*Đây là một bệnh lây lan và bùng phát nhanh. Chúng ta cần câu trả lời nhanh hơn nhiều so với phương pháp này đang có*".

Phương pháp 3: Đa chiều

Ndifon và đồng nghiệp đã cải tiến phương pháp của Dorfman, họ thử nghiệm tại Rwanda, và giảm được số lượng xét nghiệm cần làm. Ở lượt xét nghiệm đầu, họ làm giống như cách của Dorfman. Tuy nhiên đối với các nhóm có kết quả dương tính, ở lượt xét nghiệm thứ 2, họ phân chia các mẫu trùng nhau vào các nhóm.

Hãy tưởng tưởng một ma trận vuông với 9 mẫu, mỗi mẫu đại diện cho dịch được lấy từ một người (*xem Phương pháp 3 trong hình bên dưới*). Các mẫu trong mỗi hàng được xét nghiệm như một nhóm, và các mẫu trong mỗi cột cũng được xét nghiệm như một nhóm, tổng cộng có 6 nhóm xét nghiệm, và mỗi mẫu sẽ được xét nghiệm ở hai nhóm. Nếu một mẫu chứa RNA của SARS-CoV-2, thì cả hai xét nghiệm sẽ dương tính, điều này dễ dàng xác định được người bị nhiễm. Các nhà nghiên cứu mô tả ý tưởng trong một bản tin vào ngày 30 tháng Tư.

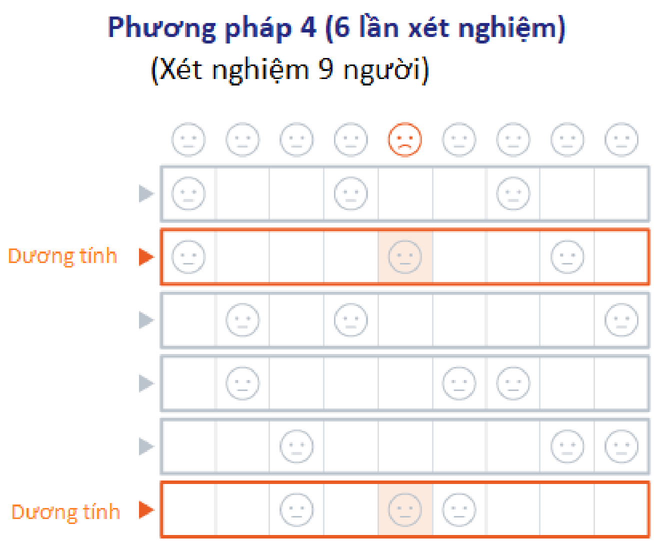


Theo lời của Neil Turok, nhà vật lý lý thuyết tại đại học Edinburgh, anh cũng là người đồng nghiên cứu thì việc tăng đa chiều, ví dụ từ hình vuông thành khối lập phương cho phép kích cỡ nhóm lớn hơn và hiệu quả cao hơn.

Ndifon, thành viên lực lượng đặc nhiệm Covid ở Rwanda nói rằng xét nghiệm nhóm là phần trong kế hoạch của chính phủ nhằm xác định và cách ly nhanh chóng người bị nhiễm. Ông và các đồng sự ước tính phương pháp của họ có thể các giảm chi phí xét nghiệm của một người từ 9 USD xuống còn 0.75 USD. Các nhà nghiên cứu đang thực hiện các thí nghiệm để biết liệu thực tế thì số mẫu trong 1 xét nghiệm là bao nhiêu mà vẫn đảm bảo được kết quả dương tính.

Leon Mutesa là nhà di truyền học tại Rwanda. là nhà đồng nghiên cứu và cũng là thành viên lực lượng đặc nhiệm Covid ở Rwand bảo rằng trong phòng thí nghiệm, ông ấy đang có thể xác được được mẫu dương tính trong một nhóm hỗn hợp gồm 100 mẫu.

Tuy nhiên Sigrun Smola, một chuyên gia về virus phân tử ở Trung tâm y tế Saarland tại Homburg, Đức và là người đang tiến hành xét nghiệm lên tới 20 mẫu mỗi nhóm nói rằng để bảo đảm độ chính xác, bà không không khuyến khích có nhiều hơn 30 mẫu mỗi nhóm cho một xét nghiệm. Một nhóm lớn sẽ khó khăn hơn trong việc tìm ra virus đồng thời cũng sẽ làm giảm đi cơ hội tìm ra những trường hợp dương tính. Smola cũng hoài nghi về ứng dụng của kỹ cắt khối trong xét nghiệm thông thường. Bà ấy nói thêm "*Nếu bạn nói điều này với kỹ thuật viên xét nghiệm, họ sẽ nói là nó quá lộn xộn, và họ muốn cách đơn giản hơn*".



Ndifon còn nói thêm là nhóm của ông ấy đang phát triển phần mềm ứng dụng để tự động xếp các mẫu.

Phương pháp 4: Giải pháp 1 lượt

Các nhà khoa học thậm chí nói rằng hai vòng xét nghiệm là quá nhiều đối với việc kiềm chế một loại virus đang lây lan quá nhanh như SARS-Cov-2. Các kỹ thuật viên trong thí nghiệm phải chờ kết quả từ vòng đầu tiên đến cuối cùng, điều này làm chậm quá trình, Manoj Gopalkrishnan một khoa học máy tính tại viện công nghệ Bombay, Ấn Độ đã phát biểu.

Thay vào đó, Gopalkrishnan đề xuất thực hiện xét nghiệm 1 lượt với nhiều nhóm chồng chéo nhau. Điều này sẽ tăng số lượng xét nghiệm lên nhưng lại giảm thời gian chờ kết quả xét nghiệm, tuy nhiên sẽ mất nhiều thời gian cho việc tạo lập các nhóm mẫu bởi vì có thêm nhiều nhóm nghĩa là có thêm nhiều mẫu cần được trích xuất.

Cách tiếp cận của Gopalkrishnan liên quan đến việc trộn lẫn các mẫu trong nhiều nhóm xét nghiệm khác nhau, và đang dùng kỹ thuật của Kirkman tức là dùng các quy tắc về cách phân phối mẫu. Hãy tưởng tượng rằng một ma trận phẳng trong đó mỗi hàng đại diện cho một xét nghiệm và mỗi cột cũng đại diện cho một xét nghiệm (*xem Phương pháp* 4 *trong hình bên trên*). Nói chung, mọi xét nghiệm phải có cùng số lượng mẫu và số lần xét nghiệm của mỗi mẫu là giống nhau.

Nhưng Narayanan nói rằng phương pháp này đòi hỏi nhiều xét nghiệm hơn để bảo đảm mức độ chính xác như cách xét nghiệm nhiều vòng. Cách tiếp cận của phương pháp một lượt này là xét nghiệm số lượng lớn các mẫu cùng một lúc, điều này có thể gây khó khăn. Ông nói thêm "*Một kỹ thuật viên xét nghiệm không thể làm điều này, điều này cần một hệ thống robot*".

Để đơn giản trong phòng thí nghiệm, Gopalkrishnan và các đồng nghiệp đã phát triển một ứng dụng di động, ứng dụng này sẽ chỉ ra cho người dùng cách thức để trộn mẫu. Theo kết quả chưa được công bố rộng rãi từ phòng thử nghiệm lâm sàng ở Mumbai (Ấn Độ), Gopalkrishnan nói rằng chỉ với 48 xét nghiệm, đã xác định được 5 mẫu dương tính trong 320 mẫu.

Các nhà nghiên cứu ở Israel thì đang sử dụng hệ thống tự động và một ứng dụng tương tự như hệ thống test một lượt. Moran Szwarcwort - Cohen, người đứng đầu phòng thí nghiệm virus Rambam Health Care Campus, Haifa nói rằng nhóm của bà ấy đang đánh giá lại hệ thống và kết quả khả quan.

Tài liệu tham khảo

[1] https://www.nature.com/articles/d41586-020-02053-6

ĐUỔI BẮT VÀ CHẠY THOÁT

Trịnh Đào Chiến
Gia Lai

GIỚI THIỆU

Lý thuyết trò chơi là một nhánh của Toán học ứng dụng. Ngành này nghiên cứu các tình huống chiến thuật, trong đó các đối thủ lựa chọn các hành động khác nhau để cố gắng làm tối ưu kết quả nhận được. Bắt đầu từ những năm 1970, Lý thuyết trò chơi bắt đầu được áp dụng cho nghiên cứu về hành vi động vật, trong đó có sự phát triển của các loài qua chọn lọc tự nhiên, chẳng hạn hành vi *Đuổi bắt và Chạy thoát*.

Bài viết này đề cập vài câu chuyện như vậy, từ dân gian đến hiện đại.

Từ một bài toán dân gian

Chuyện dân gian kể rằng, có một con cáo và một chú thỏ sống trong 17 cái hang động dọc theo đỉnh núi tạo thành một vòng tròn lớn. Khoảng cách giữa mỗi cái hang là khá xa. Cáo luôn muốn tìm cách để ăn thịt thỏ.

Một hôm, cáo và thỏ nhìn nhau từ xa. Thỏ nói với cáo: "Anh không cần lúc nào cũng phải tìm cách ăn thịt tôi. Chúng ta đánh số thứ tự cho 17 cái hang, lần lượt từ số 1 đến số 17. Tôi chọn ba cái hang gần nhau, mỗi cái hang ở 10 ngày. Anh xuất phát từ cái hang số 17. Lần thứ nhất đi cách một cái hang, đến hang số 1 tìm tôi. Lần thứ hai đi cách hai cái hang, đến hang số 3 tìm tôi. Lần thứ ba đi cách 3 cái hang, đến hang số 6 tìm tôi. Cứ lần lượt như vậy, trong vòng 30 ngày, không quan trọng anh vào cái hang nào bao nhiêu lần, chỉ cần anh tìm thấy tôi thì anh có thể ăn thịt tôi ngay."

Cáo nghĩ: "Trong vòng một tháng, ta nhất định tìm được mi, ta sẽ ăn thịt mi". Vì thế cáo đồng ý ngay. Nhưng con cáo giảo hoạt tìm trong suốt cả một tháng mà vẫn không tìm thấy thỏ.

Bạn hãy cho biết, chú thỏ thông minh đã ở trong 3 chiếc hang liền kề nào không?

Trước tiên, chúng ta hãy phân tích những lần cáo vào hang, là những hang số bao nhiêu.

Lần thứ nhất, cáo đi cách một cái hang, vào hang số 1.

Lần thứ hai, cáo đi cách hai cái hang, vào hang số $1 + 2 = 3$.

Lần thứ ba, cáo đi cách ba cái hang, vào hang số $1 + 2 + 3 = 6$.

Lần thứ tư, cáo đi cách bốn cái hang, vào hang số $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

...

Lần thứ n, cáo đi cách n cái hang, vào hang số $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Sau đây là bảng các số dư lần lượt của n, $n + 1$, $\frac{n(n+1)}{2}$ khi chia cho 17

n	$n+1$	$\frac{n(n+1)}{2}$
1	2	1
2	3	3
3	4	6
4	5	10
5	6	15
6	7	4
7	8	11
8	9	2
9	10	11
10	11	4
11	12	3
12	13	10
13	14	6
14	15	3
15	16	1
16	17	0
17	18	0
18	19	1
19	20	3
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Vậy con cáo chỉ có thể đi vào các hang số $1, 2, 3, 4, 6, 10, 11, 15, 17$ mà không bao giờ đi vào các hang số $5, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 16$ trong đó có ba cái hang liền kề là $7, 8, 9$ hoặc $12, 13, 14$. Nếu chú thỏ tinh ranh kia cứ nấp vào ba cái hang đó, mỗi hang 10 ngày, thì vừa đủ 30 ngày con cáo giảo hoạt kia không thể tìm thấy nó!

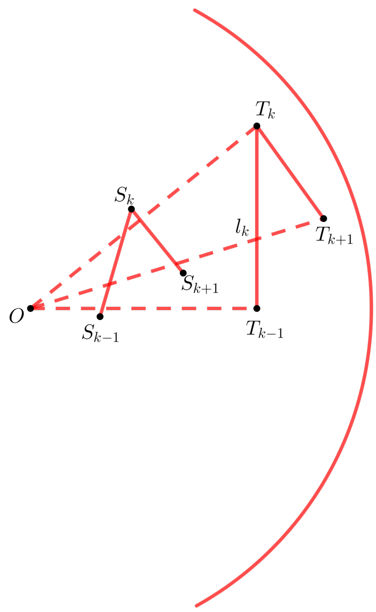
đến một phương pháp "Chạy thoát"

Tiếp tục câu chuyện về cáo và thỏ. Một con cáo đang nhẩn nha trong một khu vực hình tròn rộng lớn và khép kín, bỗng thấy một chú thỏ bắt đầu chạy trong khu vực đó. Ngay lập tức, cáo nhắm về hướng thỏ chạy và đuổi theo với vận tốc tương đương với chú thỏ tội nghiệp kia. Xem mỗi con vật như là một điểm di động trong hình tròn này. Câu hỏi đặt ra là, liệu con cáo có thể bắt được con thỏ trong một khoảng thời gian hữu hạn hay không? Và chú thỏ tinh ranh tội nghiệp kia có cách chạy thoát như thế nào để con cáo kia không vồ được.

Vấn đề đặt ra tưởng chừng đơn giản nhưng vào cuối những năm 30 của thế kỷ trước, nó trở thành đề tài trao đổi sôi nổi của một số nhà toán học quan tâm.

Thời trẻ con, khi tham gia vào trò chơi đuổi bắt, chú bé bị rượt đuổi thường tinh ranh chạy dích dắc hoặc loằng ngoằng để bé sau không bắt được. Có phải chăng từ phương pháp "*Chạy thoát*" của trò chơi dân gian đó mà nhà toán học A. S. Besicovitch đã đề xuất một hướng giải quyết khá độc đáo cho bài toán trên.

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng khi cuộc đuổi bắt bắt đầu, chú thỏ đang ở điểm T_0 nằm bên trong hình tròn bán kính bằng 1. Để theo dõi diễn biến của khoảng cách, ta đặt $1 - \varepsilon < 1$ là độ dài khoảng cách OT_0.



Hình 1

Giả sử rằng ta đã dựng được điểm T_{k-1} và khi chú thỏ đến T_{k-1} thì con cáo đến $S_{k-1} \neq T_{k-1}$. Đặt T_k sao cho $T_{k-1}T_k$ vuông góc với OT_{k-1}, có chiều dài l_k, và giả sử S_{k-1} không nằm trong nửa mặt phẳng mở được xác định bởi đường OT_{k-1} chứa S_{k-1} (xem hình 1).

Trong khi chú thỏ chạy dọc theo đoạn $T_{k-1}T_k$, từ T_{k-1} đến T_k với tốc độ tối đa, chú thỏ sẽ không thể bị bắt và khi đến T_k, con cáo đang ở tại điểm $S_k \neq T_k$ nào đó.

Tổng chiều dài của đường gấp khúc $T_0T_1T_2\cdots$ là $\sum_{k=1}^{\infty} l_k$. Nếu tổng này là vô hạn, nghĩa là nếu chú thỏ cứ như thế chạy dọc theo đường gấp khúc này mãi mãi, thì nó sẽ không bao giờ bị bắt.

Đây mới chỉ là một giả thuyết vì, tồn tại hay không một đường gấp khúc như vậy mà luôn nằm bên trong hình tròn?

Ta có

$$OT_n{}^2 = (1-\varepsilon)^2 + \sum_{k=1}^{n} l_k{}^2 < 1 - \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} l_k{}^2.$$

Do đó, đường gấp khúc $T_0T_1T_2\cdots$ sẽ luôn nằm bên trong của hình tròn nếu

$$\sum_{k=1}^{\infty} l_k{}^2 < \varepsilon.$$

Vấn đề còn lại là, hãy chỉ ra một dãy $l_1, l_2, \ldots$ thỏa mãn điều kiện này. Đặt

$$l_k = ck^{-\frac{3}{4}},$$

trong đó $c = \frac{\varepsilon}{2}$. Khi đó $\sum_{k=1}^{\infty} l_k$ là vô hạn và

$$\sum_{k=1}^{\infty} l_k{}^2 = c^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{3}{2}} < c^2 \left(1 + \int_1^{\infty} x^{-\frac{3}{2}} dx\right) = 3c^2 < \varepsilon.$$

Vậy dãy (l_k) xác định như trên là dãy thỏa mãn điều kiện. Bài toán được giải quyết. □

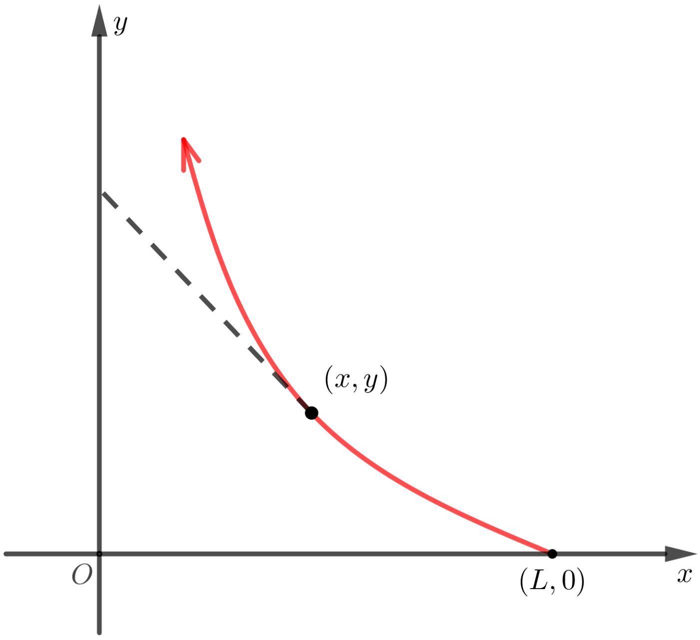
Từ một trò chơi vi phân

Lại một câu chuyện nữa về cáo và thỏ. Một con cáo đang nhẩn nha, bỗng thấy một chú thỏ bắt đầu chạy băng qua một cánh đồng, trên một đường thẳng vuông góc với đường thẳng nối giữa vị trí ban đầu của cáo và thỏ. Ngay lập tức, cáo nhắm về hướng thỏ chạy và đuổi theo với vận tốc tương đương với chú thỏ tội nghiệp kia.

Trong hệ tọa độ vuông góc (hình 2) giả sử rằng, tại thời điểm đầu tiên, chú thỏ ở gốc tọa độ và con cáo ở điểm $(L, 0)$, $L > 0$. Chú thỏ chạy lên theo trục Oy và con cáo cứ nhắm thẳng hướng chú thỏ đang chạy mà đuổi theo với tốc độ bằng nhau. Khi con cáo chạy đến điểm (x, y) thì chú thỏ chạy đến điểm $(0, y_1)$, $y_1 > 0$.

Ta nhắc lại rằng, độ dốc của đường thẳng đi qua hai điểm (x_1, y_1) và (x_2, y_2) , với $x_1 \neq x_2$, là

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



Hình 2

Lưu ý rằng, vì hai con vật chạy với tốc độ bằng nhau nên y_1 (quãng đường chạy của thỏ) bằng độ dài cung (quãng đường chạy của chó) từ điểm $(L, 0)$ đến điểm (x, y). Hơn nữa, ta đã biết rằng độ dài cung này được tính theo công thức tích phân sau

$$\int_x^L \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}dx.$$

Vì độ dốc m tại x là $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, nên ta có

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y - \int_x^L \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x}{x-0},$$

hay

$$x \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - \int_x^L \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}dx.$$

Bây giờ, để loại bỏ tích phân, ta cần lấy đạo hàm cả hai vế. Ta có

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y - \int_x^L \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x\right),$$

biến đổi tương đương thành

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x \cdot \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_x^L \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x\right),$$

$$x \cdot \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int\limits_x^L \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x\right),$$

$$x \cdot \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int\limits_L^x \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x\right).$$

Bây giờ, sử dụng công thức tích phân

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x),$$

ta có

$$x \cdot \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}.$$

Giải phương trình vi phân này bằng phương pháp tách biến bằng cách đặt $z = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Ta có phương trình

$$x \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1+z^2},$$

do đó

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Lại đặt $z = \tan\theta$, ta có

$$1+z^2 = \frac{1}{\cos^2\theta} = \sec^2\theta$$

và $\mathrm{d}z = \sec^2\theta \cdot \mathrm{d}\theta$. Vì vậy

$$\int \frac{\sec^2\theta \cdot \mathrm{d}\theta}{\sec\theta} = \ln x + C,$$

hay là

$$\int \sec\theta \cdot \mathrm{d}\theta = \ln x + C,$$

hoặc

$$\ln|\sec\theta + \tan\theta| = \ln x + C.$$

Để xác định $\sec\theta$ và $\tan\theta$ theo z, ta xét tam giác vuông như hình 3.

Ta có $z = \tan\theta$ và $\sec\theta = \sqrt{1+z^2}$. Do đó phương trình

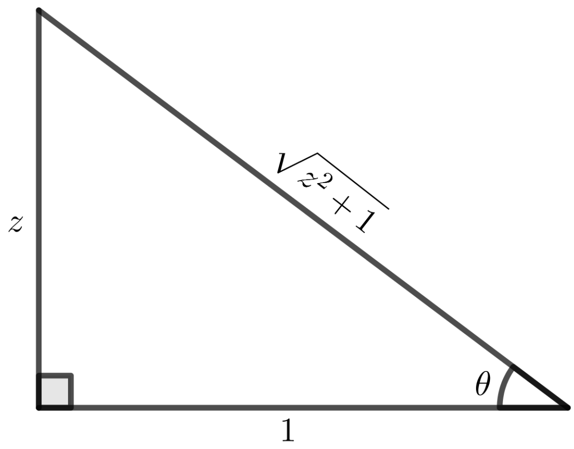
$$\ln\left|\sqrt{z^2+1}+z\right| = \ln x + C,$$

tương đương với

$$e^{\ln\left|\sqrt{z^2+1}+z\right|} = e^{\ln x + C},$$

hay

$$\left|\sqrt{z^2+1}+z\right| = e^C \cdot e^{\ln x},$$



Hình 3

hoặc

$$\sqrt{z^2+1}+z=\pm e^C x.$$

Đặt $A=\pm e^C$, phương trình trở thành

$$\sqrt{z^2+1}+z=Ax.$$

Giải phương trình ta được

$$z=\frac{Ax}{2}-\frac{1}{2Ax}.$$

Suy ra

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{Ax}{2}-\frac{1}{2Ax}\Leftrightarrow y=\int\left(\frac{Ax}{2}-\frac{1}{2Ax}\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow y\,(x)=\frac{Ax^2}{4}-\frac{1}{2A}\ln x+D.$$

Cuối cùng là sử dụng các điều kiện $y\,(L)=0,\ y'\,(L)=0$ để tìm các hằng số thích hợp. Ta có

$$y'\,(L)=\frac{AL}{2}-\frac{1}{2AL}=0.$$

Suy ra $A=\frac{1}{L}$, hơn nữa lại có

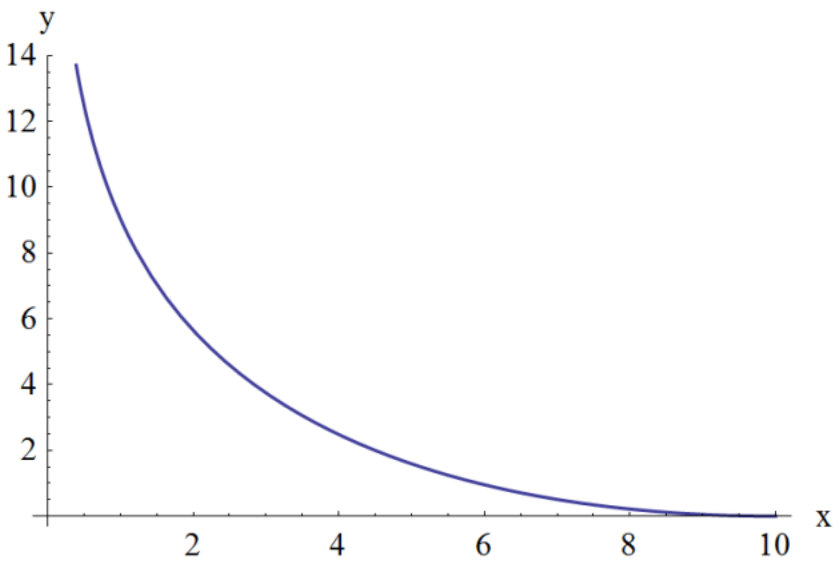
$$y\,(L)=\frac{AL^2}{4}-\frac{1}{2A}\ln L+D=\frac{L}{4}-\frac{L}{2}\ln L+D=0.$$

cho nên $D=\frac{L}{2}\ln L-\frac{L}{4}$.

Vì vậy

$$y\,(x)=\frac{x^2}{4L}+\frac{L}{2}\ln L-\frac{L}{4}.$$

Chẳng hạn, với $L=10$, ta thấy đồ thị của hàm số này như sau (hình 4). Tóm lại, con cáo sẽ không bao giờ bắt được con thỏ vì chúng di chuyển với cùng tốc độ.



Hình 4

đến một bài toán IMO

Đó là bài toán số 3 của IMO 2017, một bài toán "*sát thủ*"! Nó khó đến mức, trong 112 quốc gia tham dự với hơn 600 thí sinh, chỉ duy nhất một thí sinh Australia giải được trọn vẹn (điểm 7) và một vài em được... điểm 1!

Bài toán đó như sau (bạn đọc có thể xem lời giải và bình luận trong [1]):

> Bài toán. *Thỏ và thợ săn chơi trò đuổi bắt trốn tìm trên mặt phẳng Euclid. Tại thời điểm* 0, *cả hai ở cùng một vị trí* $(A_0 = B_0)$. *Tại thời điểm* n *thì có các sự việc sau lần lượt xảy ra*
>
> - *Thỏ nhảy từ vị trí* A_{n-1} *đến vị trí bí mật* A_n *cách* A_{n-1} *một khoảng bằng* 1.
> - *Thợ săn có máy dò tìm vị trí của thỏ với sai số* 1 *đơn vị, cho thợ săn biết một vị trí* P_n *cách* A_n *không quá* 1 *(ngoài ra không biết gì thêm) tại thời điểm* n.
> - *Thợ săn phải chọn nhảy đến vị trí* B_n *cách* B_{n-1} *một khoảng đúng bằng* 1.
>
> *Câu hỏi là liệu thợ săn có chiến lược nào đó mà bất kể thỏ có nhảy kiểu gì và máy dò có cho các vị trí* P_n *ra sao thì sau* 10^9 *bước, thợ săn vẫn ở cách thỏ một khoảng không quá* 100?

Tiến sĩ Trần Nam Dũng (Đại học KHTN, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh - Huy chương Bạc IMO 1983) bình luận: Bài này do Áo đề nghị, là một bài toán Hình học tổ hợp, thể loại "*đuổi bắt*". Riêng việc đọc đề và hiểu được yêu cầu của đề bài đã là không đơn giản.

Điểm khó của bài toán là dự đoán kết quả và định hướng đi tiếp thế nào. Chúng ta phải hiểu rằng đường đi của con thỏ, người thợ săn không biết, thiết bị định vị cũng được đặt ngẫu nhiên, chỉ biết là cách xa con thỏ không quá 1. Trong khi đó con thỏ biết người thợ săn ở đâu.

Nếu dự đoán câu trả lời khẳng định, bài toán sẽ rất khó vì có hai lần bất định. Nếu dự đoán câu trả lời là phủ định, bài toán sẽ dễ chịu hơn vì theo logic về phủ định, ta chỉ cần chỉ ra một trường hợp mà con thỏ có thể chạy xa người thợ săn, có nghĩa là ta có thể chủ động đặt thiết bị định vị ở đâu tuỳ ý, chỉ cần thoả mãn điều kiện khoảng cách.

Giáo sư Nguyễn Tiến Dũng (Đại học Toulouse, Pháp - Huy chương Vàng IMO 1985) thì hóm hỉnh bình luận: Không rõ học sinh phổ thông mà gặp phải bài này thì làm sao mà *"nhằn"* được! Đọc đề đã có cảm giác là nó liên quan đến Toán học ở mức khá cao cấp, học ở đại học, như là Điều khiển tối ưu, Giải tích tiệm cận, Min-Max, Trò chơi vi phân,...

Nhà thơ VCH (Tây nguyên) nghe "lóm" câu chuyện về bài toán này, bỗng phá lên cười: Chà, ông thợ săn và con thỏ này... quá rảnh hè!

Tài liệu tham khảo

[1] *Lời giải và bình luận IMO 2017*, Ban biên tập Epsilon.
https://www.fb.com/TapchiEpsilon/posts/1702604733368559

[2] *Bài toán sư tử và đấu sĩ*, Hoàng Đức Tân, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, số 515.

[3] *Calculus: Early Transcendentals*, James Stewart,
https://stemjock.com/stewartcalc8eii.htm

THẶNG DƯ TOÀN PHƯƠNG
BỔ ĐỀ GAUSS
VÀ LUẬT THUẬN NGHỊCH BẬC HAI

Nguyễn Thái Vũ
Hà Nội

GIỚI THIỆU

Năm 1801 đánh dấu một mốc quan trọng trong lịch sử phát triển của toán học khi Gauss trình làng cuốn *Disquisitiones Arithmeticae*, đánh dấu sự ra đời của số học hiện đại. Phần lớn trong *Disquisitiones Arithmeticae* tập trung vào thặng dư toàn phương và các vấn đề xoay quanh nó. Các nghiên cứu này đã dẫn đến những ý tưởng chủ chốt xuất hiện khắp mọi nơi trong số học ngày nay.

Định nghĩa 1. *Với số nguyên $m > 1$ và số nguyên a nguyên tố cùng nhau với m được gọi là một thặng dư toàn phương modulo m nếu phương trình đồng dư $x^2 \equiv a \pmod{m}$ có nghiệm.*

Nhận xét:

- Nếu a là một thặng dư toàn phương modulo m, $b \equiv a \pmod{m}$ thì hiển nhiên b cũng là một thặng dư toàn phương modulo m.
- Với $(a, m) = 1$, hiển nhiên nghiệm của phương trình $x^2 \equiv a \pmod{m}$ cũng nguyên tố cùng nhau với m, do đó bằng việc bình phương các thặng dư trong hệ thặng dư thu gọn modulo m ta sẽ tìm được tất cả các thặng dư toàn phương modulo m. Khi xét modulo p nguyên tố lẻ, ta có thể kiểm tra bình phương của các phần tử trong tập $\{1, 2, 3, \ldots, p-1\}$ hoặc đơn giản hơn là $\left\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm \frac{p-1}{2}\right\}$ (cũng là một hệ thặng dư thu gọn modulo p). Tập hợp các bình phương của hệ này gồm có $\frac{p-1}{2}$ phần tử đôi một không đồng dư modulo p. Từ đó ta có ngay định lý sau.

Định lý 1. *Với mỗi số nguyên tố lẻ p, số thặng dư toàn phương và số bất thặng dư toàn phương modulo p cùng là $\frac{p-1}{2}$.*

Định nghĩa 2 (Kí hiệu Legendre). *Với mỗi số nguyên tố lẻ p, số nguyên a thỏa mãn $(a, p) = 1$, kí hiệu Legendre $\left(\frac{a}{p}\right)$ có giá trị bằng 1 nếu a là một thặng dư toàn phương modulo p, có giá trị bằng -1 nếu a là một bất thặng dư toàn phương modulo p.*

Việc sử dụng kí hiệu Legendre giúp ta đưa những mối quan hệ định tính về trở thành định lượng, thuận tiện hơn cho các đánh giá, tính toán và dẫn đến nhiều tính chất đẹp. Trước tiên, ta xem lại tiêu chuẩn Euler quen thuộc

Cho p là một số nguyên tố lẻ và số nguyên a thỏa mãn $(a, p) = 1$. Khi đó $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ nếu như phương trình $x^2 \equiv a \pmod{p}$ có nghiệm, và $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$ nếu như phương trình $x^2 \equiv a \pmod{p}$ vô nghiệm.

Sử dụng kí hiệu Legendre, ta có một phát biểu tương đương

Định lý 2 (Tiêu chuẩn Euler). *Với p là một số nguyên tố lẻ và số nguyên a thỏa mãn $(a, p) = 1$, khi đó*

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Tính chất 1. *Ta có một số tính chất sau*

i) $a \equiv b \pmod{p}$ *thì* $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$.

ii) $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$.

iii) $\left(\frac{a^2}{p}\right) = 1$.

iv) $\left(\frac{a^2b}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$.

Các tính chất (i) và (iii) hiển nhiên đúng theo định nghĩa.

Chứng minh (ii): Ta có

$$\left(\frac{ab}{p}\right) \equiv (ab)^{\frac{p-1}{2}} = a^{\frac{p-1}{2}} \cdot b^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) \pmod{p}.$$

Vì $\left(\frac{ab}{p}\right)$ và $\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$ đều chỉ nhận giá trị là 1 hoặc -1, mà $p \neq 2$ nên không thể xảy ra trường hợp $1 \equiv -1 \pmod{p}$, do đó

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right).$$

Chứng minh (iv): Ta có

$$\left(\frac{a^2b}{p}\right) = \left(\frac{a^2}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right).$$

Việc xây dựng tiêu chuẩn để kiểm tra một số có phải thặng dư toàn phương modulo p hay không có ý nghĩa quan trọng, ta cùng xem xét một vài số dư thường gặp.

Định lý 3. *Với p là một số nguyên tố lẻ, khi đó $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$ khi và chỉ khi $p \equiv 1 \pmod{4}$.*

Chứng minh. Theo thiêu chuẩn Euler thì

$$\left(\frac{-1}{p}\right) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p},$$

suy ra

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p},$$

mà p lẻ nên $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$, do đó $\frac{p-1}{2}$ chẵn hay $p \equiv 1 \pmod{4}$. □

Định lý 4. *Với p là một số nguyên tố lẻ. Khi đó 2 là một thặng dư toàn phương modulo p nếu thỏa mãn* $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$ *và là một bất thặng dư toàn phương modulo p nếu* $p \equiv \pm 3 \pmod{8}$.

Chứng minh. Với $p \equiv 1 \pmod{8}$, $p \equiv 5 \pmod{8}$, khi đó $4 \mid (p-1)$. Xét khai triển sau

$$2^{\frac{p-1}{2}} \cdot \left(\frac{p-1}{2}\right)! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (p-1) \equiv 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots \left(\frac{p-1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{p-3}{2}\right) \cdots (-5)(-3)(-1)$$

$$\equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} \cdot \left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod{p}.$$

Vì $\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!, p\right) = 1$ nên chia cả hai vế cho $\left(\frac{p-1}{2}\right)!$, ta được

$$2^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} \pmod{p}.$$

Áp dụng tiêu chuẩn Euler suy ra

$$\left(\frac{2}{p}\right) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} \pmod{p},$$

mà p lẻ nên $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{4}}$. Do đó nếu 2 là một thặng dư toàn phương modulo p thì $(-1)^{\frac{p-1}{4}}$ chẵn, dẫn đến $p \equiv 1 \pmod{8}$, nếu 2 là một bất thặng dư toàn phương modulo p thì $(-1)^{\frac{p-1}{4}}$ lẻ, dẫn đến $p \equiv 5 \pmod{8}$.

Với $p \equiv 3 \pmod{8}$, $p \equiv 7 \pmod{8}$, khi đó $4 \mid (p+1)$, tương tự ta xét khai triển sau

$$2^{\frac{p-1}{2}} \cdot \left(\frac{p-1}{2}\right)! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (p-1) \equiv 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots \left(\frac{p-3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{p-1}{2}\right) \cdots (-5)(-3)(-1)$$

$$\equiv (-1)^{\frac{p+1}{4}} \cdot \left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod{p}.$$

Vì $\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!, p\right) = 1$ nên chia cả hai vế cho $\left(\frac{p-1}{2}\right)!$ ta được $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p+1}{4}} \pmod{p}$. Áp dụng tiêu chuẩn Euler suy ra

$$\left(\frac{2}{p}\right) \equiv (-1)^{\frac{p+1}{4}} \pmod{p},$$

mà p lẻ nên $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p+1}{4}}$. Do đó nếu 2 là một thặng dư toàn phương modulo p thì $(-1)^{\frac{p+1}{4}}$ chẵn, dẫn đến $p \equiv 7 \pmod{8}$, nếu 2 là một bất thặng dư toàn phương modulo p thì $(-1)^{\frac{p+1}{4}}$ lẻ, dẫn đến $p \equiv 3 \pmod{8}$. □

Tính chất 2. *Với p là một số nguyên tố lẻ, khi đó*

(i) -2 *là một thặng dư toàn phương modulo p khi và chỉ khi* $p \equiv 1, 3 \pmod{8}$.

(ii) 3 *là một thặng dư toàn phương modulo p khi và chỉ khi* $p \equiv \pm 1 \pmod{12}$.

(iii) -3 *là một thặng dư toàn phương modulo p khi và chỉ khi* $p \equiv 1 \pmod{6}$.

(iv) 5 *là một thặng dư toàn phương modulo p khi và chỉ khi* $p \equiv \pm 1 \pmod{5}$.

Sau khi xem xong chứng minh "định lý 3" đa phần sẽ cảm thấy đây là một chứng minh đẹp nhưng đầy kĩ thuật, không thật tự nhiên (tại sao lại là module 8?). Vậy thì việc chứng minh "định lý 4" và tìm thêm các tiêu chuẩn khi cần cũng sẽ khó khăn tương tự? Bổ đề Gauss sẽ được giới thiệu, với mục đích đánh giá giá trị của $\left(\frac{a}{p}\right)$ với p cho trước, hoặc để tìm những số nguyên tố lẻ p mà nhận a cho trước làm thặng dư toàn phương. Phần tiếp theo của bài viết sẽ làm người đọc thấy những chứng minh trên sáng sủa hơn rất nhiều.

Định lý 5 (Bổ đề Gauss). *Với p là một số nguyên tố lẻ và số nguyên a thỏa $(a, p) = 1$. Xét tập các thặng dư dương nhỏ nhất modulo p của $a, 2a, 3a, \ldots, \frac{(p-1)a}{2}$. Gọi N là số thặng dư lớn hơn $\frac{p}{2}$, khi đó $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^N$.*

Chứng minh. Nhận thấy $a, 2a, 3a, \ldots, \frac{(p-1)a}{2}$ đều nguyên tố cùng nhau với p, và đôi một không đồng dư modulo p. Đặt $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_N$ là các số dư lớn hơn $\frac{p}{2}$ và $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_M$ là các số dư nhỏ hơn $\frac{p}{2}$. Khi đó $M + N = \frac{p-1}{2}$.

Xét dãy số $p - u_1, p - u_2, p - u_3, \ldots, p - u_N$ là các số dương nhỏ hơn $\frac{p}{2}$, nguyên tố cùng nhau với p và đôi một không đồng dư modulo p. Hơn nữa $p - u_i \neq v_j, \forall i, j$ (nếu $u_i = ar$, $v_j = as$ thì có $u_i + v_j = a(r+s)$ hiển nhiên nguyên tố cùng nhau với p vì $r + s < p$).

Do đó $p-u_1, p-u_2, p-u_3, \ldots, p-u_N$, và $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_M$ chính là tập hợp $\left\{1, 2, 3, 4, \ldots, \frac{p-1}{2}\right\}$.

Ta có

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)! = (p-u_1)\cdot(p-u_2)\cdot(p-u_3)\cdots(p-u_N)\cdot v_1\cdot v_2\cdot v_3\cdots v_M$$
$$\equiv (-u_1)\cdot(-u_2)\cdot(-u_3)\cdots(-u_N)\cdot v_1\cdot v_2\cdot v_3\cdots v_M \pmod{p}$$
$$\equiv (-1)^N a\cdot 2a\cdot 3a\cdots\left(\frac{p-1}{2}\cdot a\right) \pmod{p} \equiv (-1)^N a^{\frac{p-1}{2}}\cdot\left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod{p}.$$

Mà

$$\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!, p\right) = 1,$$

nên $(-1)^N \cdot a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$, áp dụng tiêu chuẩn Euler, ta được

$$(-1)^N\cdot\left(\frac{a}{p}\right) \equiv 1 \pmod{p},$$

mà $\left(\frac{a}{p}\right)$ chỉ nhận giá trị là 1 hoặc -1 nên $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv (-1)^N \pmod{p}$. ∎

Ta nhận thấy ở phát biểu của bổ đề Gauss giá trị của số N không quan trọng, điều mà ta thực sự quan tâm là tính chẵn lẻ (parity) của N. Ví dụ sau sẽ làm rõ hơn ý nghĩa của bổ đề Gauss.

Ý nghĩa của bổ đề Gauss. Ta có thể sử dụng bổ đề Gauss để tìm các số nguyên tố nhận 5 là một thặng dư toàn phương. Ta xét dãy các số $5,\ 10,\ 15, \ldots, \frac{5(p-1)}{2}$ đều nhỏ hơn $\frac{5p}{2}$. Trong dãy này, dễ thấy các số có số dư lớn hơn $\frac{p}{2}$ khi chia p chính là các số $5j$ nằm trong các khoảng $\left(\frac{p}{2},\ p\right)$ $\left(\frac{3p}{2},\ 2p\right)$. Do đó, ta cần đánh giá số cách chọn j sao cho $\frac{p}{2} < 5j < p,\ \frac{3p}{2} < 5j < 2p$.

Đặt $p = 20k + r$ với $r \in \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\}$, bất đẳng thức trở thành

$$10k + \frac{r}{2} < 5j < 20k + r, \quad 30k + \frac{3r}{2} < 5j < 40k + 2r.$$

(Sau khi đọc hết phần dưới này, người đọc hãy tự giải thích xem tại sao lại chọn con số 20?)

Tương đương với

$$2k + \frac{r}{10} < j < 4k + \frac{r}{5}, \quad 6k + \frac{3r}{10} < j < 8k + \frac{2r}{5}.$$

Đến đây, lưu ý là ta chỉ quan tâm đến tính chẵn lẻ của số cách chọn j. Ta có nhận xét sau:

Kí hiệu số số nguyên trong khoảng (a, b) là $n(a, b)$, khi đó $n(a + t, b + t) = n(a, b)$ và $n(a, b + t) = n(a, b) + t$.

Do đó, với t chẵn thì tính chẵn lẻ của $n(a, b + t)$ và $n(a, b)$ là như nhau, nên để xét tính chẵn lẻ của số cách chọn j thỏa mãn $2k + \frac{r}{10} < j < 4k + \frac{r}{5}$, thực chất ta chỉ cần xét với $\frac{r}{10} < j < \frac{r}{5}$. Tương tự với $6k + \frac{3r}{10} < j < 8k + \frac{2r}{5}$ ta đưa về xét $\frac{3r}{10} < j < \frac{2r}{5}$.

Với $r = 1$, có 0 cách chọn $\frac{r}{10} < j < \frac{r}{5}$, 0 cách chọn $\frac{3r}{10} < j < \frac{2r}{5}$ nên tổng số cách chọn j là 0, dẫn đến $N = 0$, nên theo bổ đề Gauss thì 5 là thặng dư toàn phương của p.

Với $r = 3$, có 0 cách chọn $\frac{r}{10} < j < \frac{r}{5}$, 1 cách chọn $\frac{3r}{10} < j < \frac{2r}{5}$ nên tổng số cách chọn j là 1, dẫn đến $N = 1$, nên theo bổ đề Gauss thì 5 không là thặng dư toàn phương của p.

Dễ dàng kiểm tra qua tất cả các giá trị của r, ta rút ra kết luận 5 là thặng dư toàn phương của p khi $r = 1,\ 9,\ 11,\ 19$ hay khi $p \equiv \pm 1,\ \pm 9 \pmod{20}$.

Điều này tương đương với kết luận của "định lý 4" trong bài trước, 5 là một thặng dư toàn phương modulo p khi và chỉ khi $p \equiv \pm 1 \pmod 5$.

Qua ví dụ này, ta thấy giá trị của $\left(\frac{5}{p}\right)$ chỉ phụ thuộc vào số dư khi chia p cho $20 = 4 \cdot 5$, tương tự giá trị của $\left(\frac{7}{p}\right)$ chỉ phụ thuộc vào số dư khi chia p cho $28 = 4 \cdot 7$ hay giá trị của $\left(\frac{2}{p}\right)$ phụ thuộc vào số dư khi chia p cho $8 = 4 \cdot 2$ mà ta đã xử lý ở "định lý 3" từ đó dẫn đến một cách tiếp cận tự nhiên hơn rất nhiều cho định lý này.

Định lý 6. *Với p là số nguyên tố lẻ, khi đó $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$ khi và chỉ khi $p \equiv \pm 1 \pmod 8$.*

Chứng minh. Xét dãy $2, 4, 6, \ldots, p-1$ là các số nhỏ hơn p và nguyên tố cùng nhau với p. Dễ thấy các số có số dư khi chia p lớn hơn $\frac{p}{2}$ là các số có dạng $2j$ mà $\frac{p}{2} < 2j < p$. Đặt $p = 8k+r$ được $4k + \frac{r}{2} < 2j < 8k + r \Leftrightarrow 2k + \frac{r}{4} < j < 4k + \frac{r}{2}$. Ta đưa về xét tính chẵn lẻ của số cách chọn j thỏa mãn $\frac{r}{4} < j < \frac{r}{2}$. Thử với $r = 1, 3, 5, 7$ dễ dàng nhận được kết quả $r = 1, 7$ thì N chẵn và khi đó $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$. □

Hãy chứng minh các định lý sau:

Với p là một số nguyên tố lẻ, khi đó

(v) -2 *là một thặng dư toàn phương modulo p khi và chỉ khi* $p \equiv 1, 3 \pmod 8$.

(vi) 3 *là một thặng dư toàn phương modulo p khi và chỉ khi* $p \equiv \pm 1 \pmod{12}$.

(vii) -3 *là một thặng dư toàn phương modulo p khi và chỉ khi* $p \equiv 1 \pmod 6$.

Sau khi đọc kĩ mục phần ý nghĩa của bổ đề Gauss có lẽ người đọc cũng đã có câu trả lời cho câu hỏi: "*Tại sao lại viết p dưới dạng $20k + r$, hay tổng quát hơn là tại sao lại xét với modulo $4a$?*" Ý nghĩa chính là nằm ở việc đảm bảo gia số t trong công thức $n(a, b+t) = n(a,b) + t$ là chẵn để có được $n(a,b)$ và $n(a, b+t)$ cùng tính chẵn lẻ. Cụ thể hơn

$$\frac{p}{2} < 5j < p \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{20k+r}{2}\right)}{5} < j < \frac{20k+r}{5},$$

$$\Leftrightarrow 2k + \frac{r}{10} < j < 4k + \frac{r}{5},$$

có gia số $t = 2k$ là chẵn nên $n\left(2k + \frac{r}{10}; 4k + \frac{r}{5}\right)$ và $n\left(\frac{r}{10}; \frac{r}{5}\right)$ cùng tính chẵn lẻ, nên bài toán được quy về xác định số cách chọn j thỏa mãn $\frac{r}{10} < j < \frac{r}{5}$. Từ đó ta cũng nhận thấy, thay vì xét modulo $4a$ thì có thể dùng $8a, 16a, \ldots$ cũng được. Con số 4 là cách chọn "*vừa đủ tốt*".

Qua ví dụ này, ta rút ra được nhận xét: "*Giá trị của* $\left(\frac{a}{p}\right)$ *hoàn toàn phụ thuộc vào số dư khi chia p cho $4a$*". Và do đó, nếu $q \equiv p \pmod{4a}$ thì $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a}{q}\right)$. Ta có định lý sau

Định lý 7. *Với p, q là các số nguyên tố lẻ, a là số nguyên dương thỏa $(a,p) = (a,q) = 1$, khi đó nếu $p \equiv q \pmod{4a}$ hoặc $p \equiv -q \pmod{4a}$ thì* $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a}{q}\right)$.

Ý tưởng của phép chứng minh định lý đã được trình bày trong phần ý nghĩa của bổ đề Gauss, xin nhường lại cho người đọc. Đến đây thì ta đã đủ công cụ để chứng minh luật thuận nghịch bậc hai, một trong những kết quả quan trọng nhất của số học.

Định lý 8 (Luật thuận nghịch bậc hai Gauss). *Với p, q là hai số nguyên tố lẻ phân biệt, khi đó*

- $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$ *nếu một trong hai số có dạng* $4k+1$.
- $\left(\frac{p}{q}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right)$ *nếu cả hai số có dạng* $4k+3$.

Chứng minh. Ta xét hai trường hợp: $p \equiv q \pmod 4$ và $p \equiv -q \pmod 4$.

Với $p \equiv q \pmod 4$, tồn tại số nguyên m để $p = q + 4m$. Khi đó

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q+4m}{q}\right),$$

mà $q + 4m \equiv 4m \pmod q$ nên theo "tính chất 1" thì

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q+4m}{q}\right) = \left(\frac{4m}{q}\right) = \left(\frac{m}{q}\right).$$

Tương tự

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p-4m}{p}\right) = \left(\frac{-4m}{p}\right) = \left(\frac{-m}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{m}{p}\right).$$

Nhân theo từng vế ta được

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m}{q}\right),$$

theo "định lý 7" thì $\left(\frac{m}{p}\right) = \left(\frac{m}{q}\right)$, do đó $\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m}{q}\right) = 1$ hay $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)$.

Từ đó suy ra nếu $p \equiv 1 \pmod 4$ ($q \equiv 1 \pmod 4$) thì $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = 1$ (theo "định lý 3") hay $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$, nếu $p \equiv 3 \pmod 4$ thì $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ hay $\left(\frac{p}{q}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right)$.

Với $p \equiv -q \pmod 4$ thì $p = -q + 4m$. Khi đó

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{-q+4m}{q}\right) = \left(\frac{4m}{q}\right) = \left(\frac{m}{q}\right),$$

và

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{-p+4m}{p}\right) = \left(\frac{4m}{p}\right) = \left(\frac{m}{p}\right).$$

Nhân theo từng vế ta được $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{m}{q}\right)\left(\frac{m}{p}\right) = 1$ (theo "định lý 7"), do đó $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$.

Kết hợp hai trường hợp ta có chứng minh hoàn tất. □

Để ý rằng, $\frac{p-1}{2}$ và $\frac{q-1}{2}$ cùng lẻ khi và chỉ khi p, q đều có dạng $4k+3$. Do đó ta có phát biểu ngắn gọn sau của luật thuận nghịch Gauss.

Định lý 9 (Luật thuận nghịch bậc hai). *Với p, q là các số nguyên tố lẻ phân biệt, khi đó*

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

Luật thuận nghịch bậc hai cho phép ta đưa việc tính $\left(\frac{a}{p}\right)$ về việc tính tích các kí hiệu Legendre với mẫu nhỏ hơn thông qua "tính chất 1 (ii)". Tuy nhiên quá trình này bao gồm việc phân tích a thành tích các thừa số nguyên tố, không khả thi với số a rất lớn.

Năm 1846, Carl Gustav Jacobi đã đưa ra khái niệm kí hiệu Jacobi, mở rộng kí hiệu Legendre lên với mẫu là những số m không nguyên tố.

Định nghĩa 3 (Kí hiệu Jacobi). *Với số* $m = \prod {p_i}^{k_i}$ *với* p_i *là các số nguyên tố lẻ,* $(a, m) = 1$*, khi đó kí hiệu Jacobi* $\left(\frac{a}{m}\right)$ *được định nghĩa là*

$$\left(\frac{a}{m}\right) = \prod \left(\frac{a}{p^i}\right)^{k_i},$$

với $\left(\frac{a}{p_i}\right)$ *là các kí hiệu Legendre.*

Tính chất 3. *Do cách định nghĩa như trên nên* $\left(\frac{a}{m}\right) = 1$ *không có nghĩa là phương trình* $x^2 \equiv a \pmod{m}$ *có nghiệm, bù lại thì luật thuận nghịch bậc hai và các tính chất quan trọng của kí hiệu Legendre vẫn được giữ nguyên.*

Với m*,* n *là các số nguyên dương, khi đó*

(i) *Nếu* $(a, m) = 1$*,* $a \equiv b \pmod{m}$ *thì* $\left(\frac{a}{m}\right) = \left(\frac{b}{m}\right)$.

(ii) *Nếu* $(a, m) = (b, m) = 1$ *thì* $\left(\frac{ab}{m}\right) = \left(\frac{a}{m}\right)\left(\frac{b}{m}\right)$.

(iii) $\left(\frac{-1}{m}\right) = 1$ *khi và chỉ khi* $m \equiv 1 \pmod{4}$.

(iv) $\left(\frac{2}{m}\right) = 1$ *khi và chỉ khi* $m \equiv \pm 1 \pmod{8}$.

(v) *Với* $(m, n) = 1$ *thì* $\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}}$ *(luật thuận nghịch bậc hai).*

Bên cạnh đó, ta có thêm một tính chất từ định nghĩa như trên

(vi) Nếu $(a, m) = (a, n) = 1$ thì $\left(\frac{a}{mn}\right) = \left(\frac{a}{m}\right)\left(\frac{a}{n}\right)$.

Với a là số nguyên lớn hơn 1, ta có thể viết $\left(\frac{a}{p}\right)$ dưới dạng

$$\left(\frac{2^k}{p}\right) \cdot \prod \left(\frac{{q_i}^{t_i}}{p}\right),$$

với q_i là các số nguyên tố lẻ. Với trường hợp a âm, ta viết $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{-a}{p}\right)$ nên mọi kí hiệu Legendre đều có thể quy về việc tính $\left(\frac{-1}{p}\right)$, $\left(\frac{2}{p}\right)$ và $\left(\frac{q}{p}\right)$ với q là số nguyên tố lẻ. Để minh họa cho điều này, chúng ta xem xét ví dụ sau, một bài toán nổi tiếng được L.Euler đưa ra dưới dạng giả thuyết ở thế kỉ XVIII.

Bài toán 1. *(Euler) Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên dương*

$$4xyz - x - y = t^2.$$

Lời giải. Phương trình tương đương

$$4zt^2 + 1 = (4xz - 1)(4yz - 1),$$

suy ra $(4yz - 1) \mid (2zt)^2 + z$ nên kí hiệu Jacobi $\left(\frac{-z}{4yz-1}\right) = 1$.

Đặt $z = 2^k r$ với r lẻ, ta có

$$\left(\frac{-z}{4yz-1}\right) = \left(\frac{-1}{4yz-1}\right)\left(\frac{2}{4yz-1}\right)^k \left(\frac{r}{4yz-1}\right).$$

Theo "tính chất 3" thì $\left(\frac{-1}{4yz-1}\right) = -1$. Áp dụng luật thuận nghịch bậc hai

$$\begin{aligned}\left(\frac{r}{4yz-1}\right) &= \left(\frac{4yz-1}{r}\right)(-1)^{\frac{4yz-2}{2}\cdot\frac{r-1}{2}} = \left(\frac{4yz-1}{r}\right)(-1)^{\frac{r-1}{2}} \\ &= \left(\frac{4y\cdot 2^k r - 1}{r}\right)(-1)^{\frac{r-1}{2}} = \left(\frac{-1}{r}\right)\cdot(-1)^{\frac{r-1}{2}} = 1.\end{aligned}$$

Do đó $\left(\frac{-z}{4yz-1}\right) = -\left(\frac{2}{4yz-1}\right)^k$.

Nếu k chẵn thì $\left(\frac{-z}{4yz-1}\right) = -1$, mâu thuẫn.

Nếu k lẻ thì $4yz - 1 = 4\cdot 2^k ry - 1 \equiv -1 \pmod 8$, suy ra $\left(\frac{2}{4yz-1}\right) = 1$ nên

$$\left(\frac{-z}{4yz-1}\right) = -\left(\frac{2}{4yz-1}\right)^k = -1, \quad \text{(mâu thuẫn)}.$$

Vậy phương trình vô nghiệm. □

1. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1. *Cho p, q là các số nguyên tố lẻ thỏa mãn $p \equiv q \pmod{26}$. Chứng minh rằng $\left(\frac{13}{p}\right) = \left(\frac{13}{q}\right)$.*

Lời giải. Vì $13 = 4k + 1$, áp dụng luật thuận nghịch Gauss, ta được

$$\left(\frac{13}{p}\right) = \left(\frac{p}{13}\right), \left(\frac{13}{q}\right) = \left(\frac{q}{13}\right).$$

Vì $p \equiv q \pmod{26}$ nên $q = 26m + p$, do đó $\left(\frac{q}{13}\right) = \left(\frac{26m+p}{13}\right) = \left(\frac{p}{13}\right)$. □

Ví dụ 2. *Với kí hiệu Jacobi $\left(\frac{a}{m}\right) = -1$ thì phương trình $x^2 \equiv a \pmod p$ vô nghiệm.*

Bạn đọc tự giải dựa theo định nghĩa.

Ví dụ 3. *Với hai số nguyên a, b và số nguyên tố q có dạng $4k+3$ sao cho $q \mid (a^2+b^2)$. Chứng minh rằng $q \mid a$ và $q \mid b$.*

Lời giải. Nếu $(a,q)=1$ thì $(b,q)=1$. Khi đó

$$q \mid (a^2+b^2) \Leftrightarrow a^2 \equiv -b^2 \pmod{q}.$$

Suy ra $\left(\frac{-1}{q}\right)=1$ nên $q=4k+1$ (theo "định lý 3"), mâu thuẫn. □

Ví dụ 4. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố $p=3k+2$ thì*

$$p \mid (m^2+mn+n^2) \Leftrightarrow \begin{cases} p \mid m \\ p \mid n \end{cases}$$

Lời giải. Nếu $(p,m)=(p,n)=1$ thì từ $p \mid (m^2+mn+n^2)$ suy ra $p \mid 4(m^2+mn+n^2)$,

$$\Leftrightarrow p \mid \left((2m+n)^2+3n^2\right) \Leftrightarrow -3n^2 \equiv (2m+n)^2 \pmod{p},$$

nên $\left(\frac{-3}{p}\right)=1$, theo "tính chất 2" thì $p \equiv 1 \pmod{6}$, mâu thuẫn. □

Ví dụ 5. *Chứng minh rằng có vô số số nguyên tố có hàng đơn vị là 9.*

Lời giải. Xét $N=5(n!)^2-1$. Ta sẽ chứng minh tồn tại một ước nguyên tố của N lớn hơn n và có dạng $10k-1$.

Gọi p là một ước nguyên tố bất kì của N, suy ra $5(n!)^2 \equiv 1 \pmod{p}$ nên

$$\left(\frac{5(n!)^2}{p}\right)=1.$$

Suy ra $1=\left(\frac{5(n!)^2}{p}\right)=\left(\frac{5}{p}\right)$ theo "tính chất 1", do đó $p \equiv \pm 1 \pmod{5}$ theo "tính chất 2".

Do N có dạng $5k-1$ nên tồn tại ước nguyên tố p có dạng $5k-1$, mà p không thể có dạng $10k+4$ nên $p=10k-1$. Rõ ràng $p>n$ vì nếu $p<n$ thì $5(n!)^2 \vdots p$.

Do đó, với một số tự nhiên n bất kì luôn có một ước nguyên tố dạng $10k-1$ của $5(n!)^2-1$ lớn hơn n, hay số số nguyên tố có tận cùng là 9 là vô hạn. □

Ví dụ 6. *(Korean 2000) Cho số nguyên tố $p=4k+1$. Tính*

$$\sum_{x=1}^{p-1}\left(\left[\frac{2x^2}{p}\right]-2\left[\frac{x^2}{p}\right]\right).$$

Gợi ý: Sử dụng "định lý 1".

Ví dụ 7. *(Vietnamese TST 2003) Cho số nguyên dương n. Chứng minh rằng 2^n+1 không có ước nguyên tố dạng $8k-1$.*

Lời giải. Giả sử tồn tại p là ước nguyên tố dạng $8k - 1$ của $2^n + 1$, khi đó

- Nếu n chẵn thì $2^n + 1$ có dạng $a^2 + 1$, suy ra $-1 \equiv a^2 \pmod{p}$ hay $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$, theo "định lý 3" thì $p \equiv 1 \pmod{4}$, mâu thuẫn.
- Nếu n lẻ thì $2^n + 1$ có dạng $2a^2 + 1$, suy ra $1 \equiv -2a^2 \pmod{p}$ hay $\left(\frac{-2}{p}\right) = 1$, theo "định lý 2" thì $p \equiv 1, 3 \pmod{8}$, mâu thuẫn.

Ta có điều phải chứng minh. □

Ví dụ 8. *(Serbian 2008) Tìm các nghiệm nguyên không âm của phương trình*

$$12^x + y^4 = 2008^z.$$

Lời giải. Nếu $y = 0$, suy ra được $x = z = 0$. Xét trường hợp $y > 0$

- Nếu x chẵn, vế trái có dạng $a^2 + b^2$, vì 251 là ước nguyên tố dạng $4k + 3$ của 2008 nên $251 \mid a$, $251 \mid b$, vô lý vì $(12, 251) = 1$.
- Nếu x lẻ, vế trái có dạng $3a^2 + b^2$, do đó $\left(\frac{-3}{251}\right) = 1$. Tuy nhiên $\left(\frac{-3}{251}\right) = \left(\frac{-3}{11}\right)$ mà $\left(\frac{-3}{11}\right) = -1$, mâu thuẫn. Do đó phương trình vô nghiệm khi $y > 0$.

Vậy $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ là nghiệm duy nhất. □

Ta cũng có thể tính $\left(\frac{-3}{251}\right)$ bằng cách dùng luật thuận nghịch bậc hai:

$$\left(\frac{-3}{251}\right) = \left(\frac{-1}{251}\right)\left(\frac{3}{251}\right) = -1 \cdot \left(\frac{3}{251}\right), \quad \text{vì} \quad 251 = 4k + 3.$$

Áp dụng luật thuận nghịch bậc hai

$$\left(\frac{3}{251}\right)\left(\frac{251}{3}\right) = (-1)^{\frac{3-1}{2} \cdot \frac{251-1}{2}} = -1.$$

Do đó

$$\left(\frac{3}{251}\right) = -\left(\frac{251}{3}\right) \Rightarrow \left(\frac{-3}{251}\right) = -\left(\frac{3}{251}\right) = \left(\frac{251}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = -1.$$

Ví dụ 9. *Tìm các số nguyên tố p sao cho $p! + p$ là số chính phương.*

Lời giải. Dễ thấy $p = 2$, hoặc $p = 3$ thỏa mãn đề bài.

Xét $p > 3$, ta có $p! + p = p\left((p-1)! + 1\right)$ suy ra $(p-1)! + 1 = px^2$ với $x \in \mathbb{Z}$. Vì $p > 3$ nên $3 \mid (p-1)!$, suy ra

$$px^2 = (p-1)! + 1 \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow p \equiv 1 \pmod{4}.$$

Lấy a là một bất thặng dư toàn phương lẻ modulo p, $1 < a < p$ suy ra $a \mid (p-1)!$, từ

$$(p-1)! + 1 = px^2 \Rightarrow px^2 \equiv 1 \pmod{a} \Rightarrow \left(\frac{p}{a}\right) = 1.$$

Áp dụng luật thuận nghịch bậc hai cho kí hiệu Jacobi

$$\left(\frac{p}{a}\right)\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{a-1}{2}} \Rightarrow \left(\frac{p}{a}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{a-1}{2}},$$

mà $p = 4k+1$, $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$ nên $\left(\frac{p}{a}\right) = 1$, mâu thuẫn. Do đó không tồn tại số $p > 3$ thỏa mãn đề bài. □

2. Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho p là số nguyên tố lẻ, q là bất thặng dư toàn phương nhỏ nhất của p. Chứng minh rằng q là số nguyên tố.

Bài 2. Cho a là một thặng dư toàn phương modulo p. Chứng minh rằng $-a$ cũng là thặng dư toàn phương modulo p khi và chỉ khi $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Bài 3. Chứng minh rằng với p là một số nguyên tố lẻ thì $\sum\limits_{i=1}^{p-1} (i/p) = 0$.

Bài 4. Cho p là số nguyên tố lẻ, q là bất thặng dư toàn phương nhỏ nhất của p. Chứng minh rằng q là số nguyên tố.

Bài 5. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng ít nhất một trong ba số $2,\ 5,\ 10$ là thặng dư toàn phương modulo p.

Bài 6. Cho $P(x) = \left(x^2-2\right)\left(x^2-3\right)\left(x^2-6\right)$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p, luôn tồn tại số nguyên k sao cho $p \mid P(k)$.

Bài 7. Xét đa thức $P(x) = x^3 + 14x^2 - 2x + 1$. Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên n sao cho với mọi x nguyên thì

$$\underbrace{P(P(P(\cdots P(x))))}_{n \text{ lần}} \equiv x \pmod{101}.$$

Bài 8. Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương $a,\ b,\ c$ sao cho $\frac{a^2+b^2+c^2}{3(ab+bc+ca)}$ là một số nguyên.

Bài 9 (Iranian TST 2013). Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương $a,\ b,\ c$ sao cho $a^2+b^2+c^2$ chia hết cho $2013(ab+bc+ca)$.

Bài 10. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $(2^n-1) \mid (3^n-1)$.

Bài 11. Tìm các số nguyên dương $m,\ n$ thỏa mãn $7^n = m^2+m+1$.

Bài 12. Tìm các số nguyên $n \in [100,\ 1997]$ thỏa mãn $n \mid (2^n+2)$.

Bài 13. Tìm ước nguyên tố nhỏ nhất của $12^{2^{15}} + 1$.

Bài 14. Chứng minh rằng phương trình $x^2 = y^3 - 5$ không có nghiệm nguyên.

Bài 15 (Sierpinski). Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên dương $n > 1$ thỏa mãn $n \mid \left(2^{n-1} + 1\right)$.

Bài 16. Cho ba số nguyên a, b, c. Chứng minh rằng a, b, c, abc không là số chính phương khi và chỉ khi tồn tại vô số số nguyên tố p sao cho $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{c}{p}\right)$.

Bài 17 (Polish MO 2013). Cho các số nguyên a, b sao cho $3 + a + b^2$ chia hết cho $6a$. Chứng minh rằng a âm.

Bài 18 (Taiwanese MO 1997). Cho $k = 2^{2^n} + 1$ với n là số nguyên dương. Chứng minh rằng k là số nguyên tố khi và chỉ khi $k \mid \left(3^{\frac{k-1}{2}} + 1\right)$.

Bài 19 (IMO Shortlist 1998). Tìm các số nguyên dương n sao cho tồn tại số nguyên m để $(2^n - 1) \mid \left(m^2 + 9\right)$.

Bài 20. Cho a, b là hai số nguyên dương thỏa mãn ab không là số chính phương. Chứng minh rằng tồn tại vô số số tự nhiên n sao cho $(a^n - 1)(b^n - 1)$ không là số chính phương.

Bài 21. Cho cặp số nguyên dương (m, n) thỏa mãn $\phi(5^m - 1) = 5^n - 1$. Chứng minh rằng $\gcd(m, n) > 1$.

Bài 22 (Bulgarian MO 1998). Cho m, n là các số nguyên dương thỏa mãn $A = \frac{(m+3)^n + 1}{3m}$ là số nguyên. Chứng minh rằng A lẻ.

Bài 23. Chứng minh rằng $2^{3^n} + 1$ có ít nhất n ước nguyên tố có dạng $8k + 3$.

Bài 24 (Iranian TST 2004). Cho trước số nguyên tố p và số nguyên dương k, chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương n sao cho

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \left(\frac{n+k}{p}\right).$$

Bài 25 (Korean 1999). Tìm các số nguyên dương n sao cho $3 \mid (2^n - 1)$ và tồn tại số nguyên m sao cho $\frac{2^n - 1}{3} \mid 4m^2 + 1$.

Tài liệu tham khảo

[1] *The theory of number, a text and source book of problems*, Andrew Adler.

[2] *Quadratic residue and non-residue*, Steve Wright.

[3] *An introduction to the theory of numbers*, G.H Hardy.

[4] *Elementary theory of numbers*, W. Sierpinski.

[5] *Số học*, Hà Huy Khoái.

[6] *Chuyên đề thặng dư bình phương*, Nguyễn Văn Sơn.

[7] *Chuyên đề thặng dư bình phương*, Nguyễn Huy Hoàng, Trần Hy Đông.

[8] *Bài giảng Số học*, Nguyễn Vũ Lương.

[9] https://artofproblemsolving.com

[10] https://math.stackexchange.com

CÂU CHUYỆN VỀ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC

Trần Nam Dũng
Đại học KHTN, ĐHQG thành phố Hồ Chí Minh

Mới đây, tôi nhận được một tin nhắn qua Facebook với nội dung như sau:

Em thưa thầy thầy cho em hỏi là những kiến thức mình được học trong quá trình ôn thi đội tuyển quốc gia liệu có ích gì sau này không ạ, nghĩa là liệu sau này lên đại học mình có dùng những cái đó không hay là mình học chỉ vì đam mê hoặc chỉ để thi quốc gia thôi ạ? Tại em có hỏi một số anh chị đi trước ở Đại học Bách khoa thì các anh chị có nói mấy kiến thức toán cổ điển sau này lên đại học không còn dùng lại nữa. Nhưng mà em cảm thấy khó mà chấp nhận như thế được ạ, chả lẽ mình mất công học bục mặt học cao siêu như thế chỉ để kiếm giải quốc gia mà sau này chả để làm gì ạ?

Nhận thấy đây là một vấn đề quan trọng, không chỉ với bạn học sinh ấy mà còn với rất nhiều bạn đang vất vả ôn luyện để thi học sinh giỏi quốc gia, tôi ghi lại đây câu chuyện của chúng tôi

Có chứ. Toán là một sự tiếp nối mà. Anh chị nói thế là thiếu hiểu biết.

Liệu thầy có thể nói cụ thể hơn một chút được không ạ?

Toán học ở trên đại học cũng lại là đại số, giải tích, số học, tổ hợp, hình học mà. Tùy chuyên ngành sẽ học khác nhau. Tại em thú thật là em cảm thấy rất khó mà có động lực học nếu nghĩ những thứ mình học sẽ không giúp ích được gì sau này ý ạ . Vậy có phải những thứ như pt hàm, các định lý cơ bản của số học sau này mình sẽ tiếp tục đào sâu thêm đúng không ạ? Hiển nhiên. Định lý Trung hoa về số dư, định lý Euler, đồng dư ... ứng dụng ầm ầm.

Rồi các định lý cơ bản của giải tích, rồi hình học giải tích ...

Dạ em cảm ơn thầy ạ. Em nghĩ là em có thêm động lực để học hành chăm chỉ rồi ạ. Okie. Theo dõi facebook thầy sẽ có bài kỹ hơn về vấn đề này.

Thật tình cờ, sau đó tôi lên facebook thì thấy có bài của Lê Quang Nẫm, học trò cũ thời PTNK, nay là giáo sư toán ở Indiana, mở đầu bằng câu đố rất thú vị và một bất đẳng thức khá sơ cấp.

Và trong phần giải đố thì thật bất ngờ là những kết quả nền tảng của Garding và Chern. Nẫm dẫn dắt quá tốt nên việc của tôi chỉ là chép lại và đăng ở đây.

Tên Bất Đẳng Thức là gì?

Cuối tuần, cuối tháng, cuối hè, bạn nào rảnh suy nghĩ các câu hỏi liên quan bài toán Bất Đẳng Thức sau nhé.

Bài toán. *Gọi G là tập hợp các bộ bốn số (x, y, z, w) sao cho:*

$$x+y+z+w > 0, \quad xy+xz+xw+yz+yw+zw > 0, \quad xyz+xyw+xzw+yzw > 0.$$

Xét hai bộ (x, y, z, w) và (a, b, c, d) thuộc G. Chứng minh rằng:

$$(ayw + azw + ayz + bxz + bxw + cyw + cxy + cxw + dxy + dxz + dyz)^3$$
$$\geqslant 27(xyz + xyw + xzw + yzw)^2(abc + abd + acd + bcd).$$

Các câu hỏi là:

(1) Bất đẳng thức trên do ai chứng minh lần đầu tiên?

(2) Nó được xuất bản ở đâu?

(3) Ảnh hưởng của nó như thế nào trong toán học?

1. Bất đẳng thức Garding, Tạp chí Toán Đại học Indiana, và Chern

Lars Garding (1919 – 2014) hoàn thành luận án về lý thuyết biểu diễn nhóm năm 1944 dưới sự hướng dẫn của Marcel Riesz.

Sau khi viết vài công trình liên quan đến luận án, Garding chuyển sang nghiên cứu phương trình đạo hàm riêng hyperbolic mà phương trình truyền sóng là một ví dụ. Một học trò xuất chúng của Garding là Lars Hormander (1931 – 2012), chủ nhân của giải Fields năm 1962. Garding được mời báo cáo toàn thể tại Đại hội Toán học thế giới năm 1958.

Năm 1959, Garding có gửi đến tạp chí toán học của Đại học Indiana, Indiana University Mathematics Journal (IUMJ) [1] (lúc đó còn mang tên Journal of Mathematics and Mechanics, trang web hiện tại: https://www.iumj.indiana.edu) một bài báo ngắn về một bất đẳng thức cho các đa thức hyperbolic.

Thành viên ban biên tập xử lí bài của Garding lúc đó là nhà hình học lừng danh Shiing-Shen Chern (1911 – 2004). Lúc đó Chern đang làm việc cho Đại học Chicago. Chắc thấy bài của Garding hay quá nên Chern dùng ngay kết quả của Garding để chứng minh tính duy nhất của các siêu mặt lồi trong nhiều chiều mà trước đây năm 1938 Aleksandrov-Fenchel-Jessen chỉ chứng minh được trong hai chiều. Cuối cùng bài của Garding được nhận vào IUMJ. Kết quả là:

(1) Hai bài của Garding và Chern cùng xuất hiện trong cùng một số của IUMJ

(2) Bài của Chern (trang 947-955) ở trước bài của Garding (trang 957-965)

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Indiana_University_Mathematics_Journal

(3) Chern trích dẫn bài của Garding; Garding có nói về việc Chern dùng kết quả của mình nhưng không trích dẫn.

Chúng ta có thể đối chiếu toàn văn hai bài báo liên quan tại [1], [2].

Bất đẳng thức của Garding và đa thức hyperbolic là những công cụ cơ bản trong nhiều ngành toán học, từ Giải tích, Phương trình Đạo hàm riêng, Lý thuyết tối ưu, Hình học lồi, Tổ hợp,... Chúng ta có thể xem vài trích dẫn tiêu biểu trong Google Scholar:

https://scholar.google.com/scholar?hl=en&as_sdt=0%2C15&q=hyperbolic+polynomials&oq=hyperbolic+pol

https://scholar.google.com/scholar?cites=16253416580996898076&as_sdt=800005&sciodt=0,15

Bài mới nhất của Filipe Rincon, Cynthia Vinzat và Josephine Yu (đều là các cựu IMO/Putnam) dùng đa thức hyperbolic [3]. Bài cũ hơn dùng bất đẳng thức Garding [4].

Một trường hợp cụ thể của đa thức hyperbolic là đa thức đối xứng P_m bậc m của n biến số $x = (x_1, \ldots, x_n)$:

$$
\begin{aligned}
P_1(x) &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n,\\
P_2(x) &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_2x_n + \cdots + x_{n-1}x_n,\\
&\ldots\\
P_n(x) &= x_1x_2\cdots x_n.
\end{aligned}
$$

Chúng ta cố định n (trong phần mở đầu, $n = 4, m = 3$) :

Gọi G_m là tập các bộ n số $x = (x_1, \ldots, x_n)$ sao cho giá trị của $P_1, \ldots, P_m$ tại x đều dương. Có thể thấy rằng khi $m > 1$, có rất nhiều bộ số $x = (x_1, \ldots, x_n)$ trong G_m với nhiều số x_i âm.

Ta có thể "*trộn*" $y = (y_1, \ldots, y_n)$ vào $P_m(x_1, \ldots, x_n)$ như sau: Với mỗi $i = 1, 2, \ldots, n$, ta thay y_i vào vị trí của x_i trong $P_m(x_1, \ldots, x_n)$ (các biến khác giữ nguyên nhưng xoá các số hạng không chứa x_i). Sau cùng cộng hết lại, ta được một biểu thức $Q_m(y, x)$.

Dễ thấy $Q_m(x, x) = mP_m(x)$. Nếu bạn nào biết đạo hàm riêng phần thì có thể thấy $Q_m(y, x) =$ lấy tổng theo i từ 1 tới n của các tích (y_i nhân với đạo hàm riêng phần của P_m theo biến x_i).

Bất đẳng thức của Garding phát biểu:

Nếu x, y là hai bộ số trong G_m thì ta luôn có

$$(Q_m(y, x))^m \geqslant m^m P_m(y)(P_m(x))^{m-1}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi có một số dương c sao cho $y = cx$, tức là $y_i = cx_i$, $\forall i$.

Cách chứng minh là dùng tính lõm của hàm số $(P_m)^{1/m}$ trên G_m. Chi tiết có trong bài báo trên Acta của Caffarelli-Nirenberg_Spruck, trang 269, [5].

Tài liệu tham khảo

[1] http://www.iumj.indiana.edu/IUMJ/FULLTEXT/1959/8/58060

[2] http://www.iumj.indiana.edu/IUMJ/FULLTEXT/1959/8/58061

[3] https://arxiv.org/pdf/1907.08545.pdf

[4] https://arxiv.org/pdf/1212.6696.pdf

[5] https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.acta/1485890403

CÁC BÀI TOÁN TỔ HỢP LIÊN QUAN SỐ HỌC

Lê Phúc Lữ
(Cao học Khoa học tự nhiên TPHCM)

TÓM TẮT

Trong bài viết này, tác giả giới thiệu một số bài toán tổ hợp nhưng có dùng các định lý, công thức liên quan đến số học như: số mũ đúng, tính tổng các ước, ...

1. Kiến thức cần nhớ

Các tính chất sau được xét với các số nguyên dương a, b, n và p là số nguyên tố.

1. $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$, $v_p(a^n) = n \cdot v_p(a)$.
2. $v_p(\frac{a}{b}) = v_p(a) - v_p(b)$ nếu $b \mid a$.
3. $v_p(a) \geq v_p(b)$ với mọi số nguyên tố p khi và chỉ khi $b|a$. Tính chất này cho ta một hướng tiếp cận định lượng cho bài toán chia hết thông thường.
4. $v_p(a)$ chẵn với mọi số nguyên tố p khi và chỉ khi n là số chính phương.
5. Công thức Legendre để tính số mũ của p trong $n!$ là
$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

Tiếp theo là một số công thức về hàm số học.

Cho $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ với $p_1, p_2, \dots, p_k$ là các số nguyên tố và các số mũ $a_1, a_2, \dots, a_k$ nguyên dương. Khi đó

1. Tổng số ước của n là $\sigma(n) = \prod (1 + p_i + \cdots + p_i^{a_i})$ với tích lấy trên các ước của n.
2. Số các ước của n là $\tau(n) = (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_k)$.

2. Các bài toán chọn lọc

Bài 1. Gọi A là tập hợp các ước dương của 30^{10}. Hai số $x, y \in A$ gọi là liên kết với nhau nếu tồn tại $k \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $xy|(x^k + y^k)$.Hỏi có bao nhiêu cặp có tính thứ tự, không nhất thiết phân biệt (x, y) liên kết với nhau trong A?

Lời giải. Ta sẽ chứng minh điều kiện cần và đủ để có hai số x, y liên kết là x, y có cùng tập ước nguyên tố. Thật vậy, chiều thuận hiển nhiên vì $a|b^k$ và $b|a^k$ chứng tỏ a, b không thể có các ước nguyên tố riêng; chiều đảo thì chỉ cần chọn k đủ lớn để với p là ước nguyên tố của ab thì

$$v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b) \leq k \min\{v_p(a), v_p(b)\} \leq v_p(a^k + b^k).$$

Xét sự có mặt của ước nguyên tố 2 trong hai số a, b:

1. Nếu chúng cùng có số mũ 0 thì có 1 cách chọn.
2. Nếu chúng cùng có số mũ lớn hơn 0 thì mỗi số có 10 cách chọn nên tổng cộng có $10^2+1 = 101$ cách.

Do các ước nguyên tố $2, 3, 5$ độc lập nhau nên ta đếm được có tất cả

$$(10^2 + 1)^3 = 101^3$$

cặp liên kết nhau. Ngoài cách xử lý trên, ta có thể đếm thủ công bằng cách chia nhỏ các trường hợp. □

Bài 2. (USA MTS 2015) Cho số nguyên dương $n \geq 3$. Người ta xếp n số nguyên dương nào đó trên một đường tròn sao cho: i. Tích của hai số không nằm cạnh nhau thì chia hết cho $2015 \cdot 2016$. ii. Tích của hai số nằm cạnh nhau thì không chia hết cho $2015 \cdot 2016$. Tìm giá trị lớn nhất của n.

Lời giải. Ta có

$$2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31, 2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

Đặt $M = 2015 \cdot 2016$ và $N = \{2, 3, 5, 7, 13, 31\}$.

Giả sử tồn tại n số nguyên dương $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ xếp trên vòng tròn thỏa mãn tính chất đã nêu, quy ước $x_{n+1} \equiv x_1$ và $x_{n+2} \equiv x_2$. Do $x_i x_{i+1}$ không chia hết cho M với $i = \overline{1, n}$ nên tồn tại số nguyên tố $p_i \in N$ tương ứng mà

$$v_{p_i}(x_i x_{i+1}) < v_{p_i}(M) \Leftrightarrow v_{p_i}(x_i) + v_{p_i}(x_{i+1}) < v_{p_i}(M) \qquad (*)$$

Chú ý rằng các số p_i này có thể trùng nhau. Ta sẽ chứng minh rằng $p_i \neq p_j$ với i, j là hai chỉ số không kề nhau. Thật vậy, giả sử tồn tại i, j không kề nhau sao cho $p_i = p_j = p$ (do $n \geq 4$ nên tồn tại các chỉ số i, j như thế). Đặt $a = v_p(M)$ thì theo (*), ta có

$$v_p(x_i) + v_p(x_{i+1}) < a \text{ và } v_p(x_j) + v_p(x_{j+1}) < a.$$

Suy ra

$$v_p(x_i) + v_p(x_{i+1}) + v_p(x_j) + v_p(x_{j+1}) < 2a \tag{1}$$

Mặt khác, do $(i, j), (i+1, j+1)$ là các cặp số không kề nhau nên $v_p(x_i)+v_p(x_j) \geq a, v_p(x_{i+1})+v_p(x_{j+1}) \geq a$. Suy ra

$$v_p(x_i) + v_p(x_{i+1}) + v_p(x_j) + v_p(x_{j+1}) \geq 2a \tag{2}$$

Ta thấy (1), (2) mâu thuẫn nhau nên nhận xét trên được chứng minh.

Tiếp theo, giả sử tồn tại i mà $p_i = p_{i+1} = p$ (với các số p_i, p_j định nghĩa như trên). Nếu $v_p(M) = 1$ thì do các cặp $x_i x_{i+1}, x_{i+1}x_{i+2}$ đều không chia hết cho M nên dẫn đến x_i, x_{i+1}, x_{i+2} đều không chia hết cho p. Suy ra $x_i x_{i+2} \not\vdots M$, mâu thuẫn vì x_i, x_{i+2} không kề nhau. Do đó, ta phải có $v_p(M) \geq 2$. Từ đây suy ra, trong dãy các số $p_1, p_2, ..., p_n$ với $p_i \in N$, mỗi số nguyên tố xuất hiện không quá 2 lần và nếu nó xuất hiện 2 lần thì bình phương của nó phải là ước của M. Nói cách khác, M chia hết cho tích $p_1p_2...p_n$.

Do $M = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 31$ nên để cho số lượng n lớn nhất có thể, ta cho số 2 xuất hiện 2 lần, số 3 xuất hiện 2 lần, các ước nguyên tố còn lại xuất hiện 1 lần, tức là có tổng cộng 8 số. Ta lại có thể chọn các số như sau:

$$\frac{M}{2^5}, \frac{M}{2 \cdot 3}, \frac{M}{3^2}, \frac{M}{3 \cdot 5}, \frac{M}{5 \cdot 7}, \frac{M}{7 \cdot 13}, \frac{M}{13 \cdot 31}, \frac{M}{31 \cdot 2}$$

tương ứng với dãy số nguyên tố

$$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 3, p_4 = 5, p_5 = 7, p_6 = 13, p_7 = 31, p_8 = 2.$$

Rõ ràng dãy số này thỏa mãn các điều kiện đã cho. Vậy giá trị lớn nhất của n là 8. □

Bài 3. (Chuyên Sư phạm HN, 2014) Xâu nhị phân là một dãy liên tiếp các ký tự $0, 1$ được xếp thành một hàng, còn bậc của nó là số xâu nhị phân không trùng với nó nhưng có cùng số lượng ký tự $0, 1$ với nó.

Ví dụ: xâu nhị phân 001 *có bậc* 2 *vì có hai xâu nhị phân* $100, 010$ *có cùng số lượng* $0, 1$ *với nó.*

Hỏi có bao nhiêu cách xếp 66 số 0 và 33 số 1 thành một dãy sao cho với mọi $k = \overline{1, 99}$ thì xâu nhị phân tính từ vị trí thứ 1 đến vị trí thứ k trong dãy đều có bậc chẵn?

Lời giải. Sử dụng định lý Legendre, ta chứng minh được công thức mạnh hơn là định giá p-adic. Cụ thể là $v_p(n!) = \frac{n - s_p(n)}{p-1}$ với $s_p(n)$ là tổng các chữ số của n trong hệ p phân. Khi đó,

$$\begin{aligned} v_p(C_n^k) &= v_p(n!) - v_p(k!) - v_p((n-k)!) \\ &= \frac{n - s_p(n)}{p-1} - \frac{k - s_p(k)}{p-1} - \frac{n - k - s_p(n-k)}{p-1} \\ &= \frac{s_p(k) + s_p(n-k) - s_p(n)}{p-1}. \end{aligned}$$

Trong trường hợp $p = 2$, ta có $v_2(C_n^k) = s_2(k) + s_2(n-k) - s_2(n)$.

Trở lại bài toán, ta thấy rằng một xâu nhị phân có a số 0 và b số 1 thì có bậc là $C_{a+b}^{a} - 1$ (chính là số cách sắp xếp các số $0, 1$ lên đường thẳng). Do đó, ta cần sắp xếp các số $0, 1$ phù hợp sao cho tính từ đầu dãy đến vị trí thứ k, nếu có l số 0 thì C_k^l là lẻ.

Nhận xét 1: 64 số đầu tiên là 0. Thật vậy, nếu trong 64 số đầu tiên có cả 0 lẫn 1 thì C_{64}^{i} là số chẵn, không thỏa. Do đó, 64 đầu tiên phải giống nhau, và đều là 0.

N**Nhận xét 2:** 32 số tiếp theo là 1. Tương tự trên, chú ý rằng $2^5|96$ nên nếu có một số 0 rơi vào giữa 32 số từ vị trí $65 \to 96$ thì ta có hai số C_{96}^{65} hoặc C_{96}^{66} đều chẵn.

Nhận xét 3: ba số cuối là 001. Ta chỉ còn ba vị trí với ba số $0, 0, 1$ và dễ dàng kiểm tra được rằng nếu xếp theo hai cách kia là $1, 0, 0$ thì dẫn đến C_{98}^{65} là số chẵn, không thỏa.

Vậy chỉ có đúng một cách xếp thỏa mãn đề bài. □

Bài 4. (TPHCM 2017) Cho số nguyên dương n chẵn và một bảng hình chữ nhật n cột, nhiều hàng được điền số thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) Tổng tất cả các số của mỗi hàng là n.

ii) Mỗi hàng được gán một bậc bằng a và trên mỗi hàng, ta chỉ được điền các số là 0 với a (không có ràng buộc về vị trí của các số trên mỗi hàng). Không có hai hàng có bậc bằng nhau.

iii) Không thể thêm một hàng mới nào vào bảng mà i), ii) vẫn được thỏa mãn.

Chứng minh rằng nếu trên bảng có lẻ số 0 thì số lẻ lớn nhất trên bảng phải là số chính phương.

Lời giải. Giả sử trên một hàng có bậc là a, có tất cả b số a được điền thì tổng các số trên hàng là $n = ab$ hay a là ước của n. Theo điều kiện ii, iii) thì số hàng của bảng chính là số ước dương của n.

Gọi $\sigma(n), f(n)$ lần lượt là tổng ước dương của n và số các ước dương của n. Số các số khác 0 trên một hàng có bậc bằng a là $\frac{n}{a}$ nên số các số bằng 0 trên hàng đó là $n - \frac{n}{a}$.

Tổng các số 0 trên bảng là

$$\sum_{a|n} \left(n - \frac{n}{a}\right) = \sum_{a|n} (n-a) = n \cdot f(n) - \sum_{a|n} a = n \cdot f(n) - \sigma(n).$$

Do n chẵn nên $\sigma(n)$ phải lẻ. Đặt $n = 2^k \cdot q$ với q là số lẻ thì q chính là ước lẻ lớn nhất của n, cũng chính là số lớn nhất có trên bảng. Tổng các ước $\sigma(n)$ của n có dạng $\prod\limits_{p^\alpha \| n} \sigma(p^\alpha)$.

1. Nếu $p = 2$ thì rõ ràng $\sigma(2^k)$ luôn là số lẻ.

2. Nếu $p > 2$ thì $\sigma(p^\alpha) = 1 + p + \cdots + p^\alpha$ là số lẻ nên α phải chẵn.

Từ đó suy ra tất cả các ước nguyên tố lẻ của n đều có số mũ chẵn. Từ đó suy ra q là số chính phương, ta có đpcm. $\square$

Bài 5. (IMO Shortlist 2016) Cho số nguyên dương $n > 1$. Xét bảng ô vuông kích thước $r \times s$ thỏa mãn các điều kiện sau:

i) Tất cả các ước nguyên dương của n đều được điền đúng 1 lần trên bảng và không có ô trống.

ii) Tổng các số trên mỗi hàng bằng nhau.

iii) Tổng các số trên mỗi cột bằng nhau.

Lời giải. Trước hết, ta có nhận xét rằng $r, s > 1$ vì các ước đều phân biệt.

Tiếp theo, vì trên bảng có số n nên tất cả các tổng của mỗi hàng, mỗi cột đều lớn hơn n.

Giả sử $c \leq r$ và gọi $a_1, a_2, \ldots, a_r$ là các ước lớn nhất của hàng $1, 2, \ldots, r$. Ta giả sử tiếp a_r là số nhỏ nhất trong đó thì a_r sẽ không vượt quá ước lớn thứ r của n và tất nhiên sẽ không vượt quá $\frac{n}{r}$.

Suy ra tất cả các số của cột tương ứng sẽ không vượt quá $\frac{n}{r}$, có c số như thế nên tổng các số trên cột đó sẽ không vượt quá $c \cdot \frac{n}{r} \leq r \cdot \frac{n}{r} = n$, mâu thuẫn. $\square$

Bài 6. (Hàn Quốc, 1997) Cho các số nguyên tố $p_1, p_2, \ldots, p_k$ phân biệt và các số tự nhiên bất kì $n_1, n_2, \ldots, n_k$ đều lớn hơn 1. Chứng minh rằng số cặp số (x, y) không có thứ tự, nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn đẳng thức sau

$$x^3 + y^3 = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$$

sẽ không vượt quá 2^{k+1}.

Lời giải. Ta có $x^3 + y^3 = (x + y)\left(\frac{x^3+y^3}{x+y}\right)$ và $\gcd\left(x + y, \frac{x^3+y^3}{x+y}\right) = d$ thì $d \in \{1, 3\}$. Ta sẽ chứng minh rằng số cặp (x, y) không có thứ tự thỏa mãn sẽ không vượt quá số cách chọn $x + y$ và $\frac{x^3+y^3}{x+y}$. Thật vậy:

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^3 + y^3 = b \end{cases} (a, b \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} y = a - x \\ x^3 + (a - x)^3 = b \end{cases}.$$

Ta có

$$x^3 + (a - x)^3 = b \Leftrightarrow x^2 - ax + \frac{a^3 - b}{3a} = 0$$

nên phương trình này có không quá hai nghiệm là $x_0, a - x_0$ tương ứng với hai nghiệm của hệ ban đầu là $(x_0, a - x_0), (a - x_0, x_0)$. Do không có tính thứ tự nên hai nghiệm này được coi như một nghiệm và nhận xét được chứng minh. Tiếp theo, ta sẽ xét hai trường hợp sau:

- Nếu $3 \notin \{p_1, p_2, p_3, ..., p_k\}$ thì với mỗi $p_i^{n_i}$ thì sẽ chỉ thuộc về số $\frac{x^3+y^3}{x+y}$ hoặc $x+y$, tức là có 2 cách chọn và khi đó, số cặp (x, y) sẽ không vượt quá 2^k.
- Nếu $3 \in \{p_1, p_2, ..., p_k\}$ thì giả sử không mất tính tổng quát, có thể giả sử $p_1 = 3$. Khi đó, với $1 < i \leq k$ thì có 2 cách chọn tương tự như trên cho số $p_i^{n_i}$ và với $i = 1$, ta có 4 cách chọn là 3^{n_1} thuộc hoàn toàn về một trong hai số trên hoặc 3 thuộc về một số và 3^{n_1-1} thuộc về số còn lại. Do đó, trong trường hợp này, số cặp (x, y) sẽ không quá 2^{k+1}.

Do đó, trong mọi trường hợp, ta đều có đpcm. □

Bài 7. (VMO Mock test 2020) Với k là số nguyên lớn hơn 1, trên bảng có viết sẵn các số

$$1, 2, 3, \ldots, 10^k, 10^k + 1.$$

Ở mỗi bước, cho phép xóa đi hai số a, b bất kỳ có sẵn trên bảng rồi thay bởi $f(a, b)$, trong đó f là một hàm hai biến. Gọi x là số nguyên dương thu được sau 10^k bước. Chứng minh rằng với mọi cách chọn cặp số ở mỗi bước

1. Nếu $f(a, b) = \gcd(2020ab, a^2 + 506ab + b^2)$ thì $x = 1$.
2. Nếu $f(a, b) = \gcd(a^2b^2 + 2019, a^2 + b^2 + 2021)$ thì x không phải số chính phương.

Lời giải.
1) Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu a, b cùng lẻ thì $f(a, b)$ chẵn.
- Nếu a, b cùng chẵn thì $f(a, b)$ chẵn.
- Nếu a, b khác tính chẵn lẻ thì $f(a, b)$ lẻ.

Suy ra số lượng số lẻ hoặc giữ nguyên, hoặc giảm đi 2 đơn vị; mà ban đầu có lẻ số lẻ nên số x cuối cùng phải lẻ. Giả sử $x > 1$, gọi p là một ước nguyên tố của x.

Nếu $p = 5$ thì vì $5 | \gcd(2020ab, a^2 + 506ab + b^2)$ nên $5 | a^2 + ab + b^2$.

Ta có bổ đề quen thuộc sau. *Nếu $p = 3k + 2$ là số nguyên tố và $p | a^2 + ab + b^2$ thì $p | a, b$.* (chứng minh dễ dàng bằng định lý Fermat nhỏ, chú ý $a^3 \equiv b^3 \pmod{p}$.)

Từ đó suy ra các số trước đó đã sinh ra a, b cũng chia hết cho 5, kéo theo tất cả các số ban đầu chia hết cho 5; vô lý. Tương tự với 101.

Còn nếu $p \neq 5, 101$ thì $p | ab, p | a^2 + 506ab + b^2$ sẽ kéo theo $p \mid a, b$. Tương tự trên cũng suy ra vô lý.

Vậy nên x là số lẻ và không có ước nguyên tố lẻ nào, chứng tỏ rằng $x = 1$.

2) Vì $a^2 \equiv 1 \pmod 3$ nếu $3 \nmid a$ và $a^2 \equiv 0 \pmod 3$ nếu $3 \mid a$ nên ta có

- Nếu $3 \mid a,\ 3 \mid b$ thì $3 \nmid f(a,b)$.
- Nếu có đúng một trong hai số a, b chia hết cho 3 thì $3 \mid f(a,b)$.
- Nếu $3 \nmid a,\ 3 \nmid b$ thì $3 \nmid f(a,b)$.

Gọi T là số lượng số chia hết cho 3. Sau mỗi bước tính chẵn lẻ của T không đổi, mà ban đầu $T = \dfrac{10^k - 1}{3}$ lẻ nên x chia hết cho 3. Ngoài ra, x không chia hết cho 9 vì nếu ngược lại, do tồn tại a, b sao cho $x = f(a,b) \mid a^2b^2 + 2019$ nên 2019 chia hết cho 9, điều này vô lí.

Vậy nên x không phải là số chính phương. $\square$

Bài 8. (Đề nghị HSG TPHCM 2019) Xét một tam giác Pascal có 2019 dòng được bố trí theo dạng tam giác đều và với mỗi số$1 \leq k \leq 2019$ thì dòng thứ k có đúng k số. Biết rằng ngoại trừ các số ở dòng dưới cùng thì mỗi số ở trên sẽ bằng tổng của hai số kề với nó ở hàng liền dưới. Gọi S là số ở đỉnh trên cùng của tam giác và $a_0, a_1, \ldots, a_{2018}$ là các số ở dòng dưới cùng.

(a) Chứng minh rằng $S = C_{2018}^0 a_0 + C_{2018}^1 a_1 + \cdots + C_{2018}^{2018} a_{2018}$.

(b) Hỏi có bao nhiêu cách cho mỗi số $a_0, a_1, \ldots, a_{2018}$ nhận giá trị 0 hoặc 1 để S chia hết cho 1009?

Lời giải.

(a) Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng nếu tam giác Pascal có $n+1$ dòng và các số ở dòng cuối là $a_0, a_1, \ldots, a_n$ thì số ở dòng trên cùng sẽ là

$$S = C_n^0 a_0 + C_n^1 a_1 + \cdots + C_n^n a_n.$$

Với $n = 1$, ta thấy tam giác có hai dòng và hiển nhiên

$$S = a_0 + a_1 = C_1^0 a_0 + C_1^1 a_1.$$

Giả sử khẳng định đúng với n. Ta thêm vào bên dưới tam giác Pascal có $n+1$ dòng một dòng mới gồm $n+2$ số là $b_0, b_1, \ldots, b_{n+1}$. Khi đó, theo giả thiết quy nạp thì

$$S = C_n^0 a_0 + C_n^1 a_1 + \cdots + C_n^n a_n = C_n^0(b_0 + b_1) + C_n^1(b_1 + b_2) + \cdots + C_n^n(b_n + b_{n+1}).$$

Với $1 \leq i \leq n$ thì hệ số của b_i trong S sẽ là $C_n^{i-1} + C_n^i = C_{n+1}^i$ nên từ đó suy ra

$$S = C_{n+1}^0 b_0 + C_{n+1}^1 b_1 + \cdots + C_{n+1}^{n+1} b_n.$$

Theo nguyên lý quy nạp thì khẳng định đúng. Thay $n = 2018$, ta có điều phải chứng minh.

(b) Với p là số nguyên tố lẻ, ta có các tính chất sau:

i) $C_{2p}^p \equiv 2 \pmod{p}$.

ii) $C_{2p}^k \equiv 0 \pmod p$ với $1 \le k \le 2p-1$ và $k \ne p$.

i) Ta có:

$$C_{2p}^p - 2 = \frac{(2p)!}{p!p!} - 2 = \frac{(p+1)(p+2)\dots(2p-1)(2p)}{p!} - 2$$
$$= 2\frac{(p+1)(p+2)\dots(2p-1)-(p-1)!}{(p-1)!}$$

Tử số đồng dư với $1\cdot 2\cdot 3\cdot (p-1)-(p-1)! = 0$ theo modulo p nên $C_{2p}^2 \equiv 2 \pmod p$.

ii) Do $C_{2p}^k = C_{2p}^{2p-k}$ nên ta có thể giả sử $1 \le k < p$. Biến đổi tương tự trên thì

$$C_{2p}^k = \frac{(2p-k+1)(2p-k+2)\dots(2p-1)(2p)}{k!}.$$

Ta thấy tử số chia hết cho p trong khi $(p,k!) = 1$ vì $1 \le k < p$ nên mẫu số không chia hết cho p, tức là biểu thức trên chia hết cho p.

Từ đó ta thấy rằng, để $1009|S$ thì $a_0 + a_{2018} + 2a_{1009}$ phải chia hết cho 1009. Điều này chỉ xảy ra khi tất cả các số này bằng 0. Các giá trị còn lại ta có thể chọn tùy ý là 0 hoặc 1 nên có tất cả 2^{2016} cách. □

Bài 9. (Nữ sinh Trung Quốc 2012) Mỗi ô của bảng hình chữ nhật $n\times 4$ được điền các số 1 và -1. Biết rằng tổng các số mỗi hàng và mỗi cột đều bằng 0. Gọi $f(n)$ là số cách điền thỏa mãn.

(a) Tính $f(4)$.

(b) Chứng minh rằng với mọi p là số nguyên tố lẻ thì $f(2p) \equiv 6 \pmod{2p}$.

Lời giải. Ta nhận xét rằng các cách điền các số $1, -1$ ở mỗi cột của bảng sẽ có một trong các dạng là:

$$XXOO, OOXX, XOXO, OXOX, XOOX, OXXO.$$

Gọi số cột có các dạng trên lần lượt là a, b, c, d, e, f với tổng là $2p$. So sánh số lượng số 0 ở các hàng, ta có hệ:

$$\begin{cases} a+c+e = b+d+f \\ a+d+f = b+c+e \\ a+d+e = b+c+f \\ a+c+f = b+d+e \end{cases}$$

Từ hệ này dễ dàng suy ra $a=b, c=d, e=f$. Số cách điền có dạng

$$M = \sum_{a=b,c=d,e=f,a+b+c+d+e+f=2p} \frac{(2p)!}{a!b!c!d!e!f!} = \sum_{a+c+e=p} \frac{(2p)!}{(a!c!e!)^2}.$$

(a) Ta có $f(4) = \sum_{a+c+e=2} \frac{24}{(a!c!e!)^2}$. Xét trực tiếp các trường hợp (một số bằng 2 và hai số bằng 1), ta đếm được $f(4) = 270$.

(b) Do p nguyên tố nên chỉ khi có một số (trong ba số a, c, e) bằng p và hai số bằng 0 thì phân số mới không chia hết chia p, còn lại đều chia hết cho p.

Do đó, theo mod p, số M đồng dư với $3C_{2p}^p$. Bằng cách khai triển trực tiếp, dễ thấy $C_{2p}^p - 2$ chia hết cho p nên ta có $M \equiv 6 \pmod{p}$, ngoài ra dễ thấy M chẵn nên M đồng dư $6 \pmod{2p}$. $\square$

Bài 10. (Dựa theo IMO Shortlist 2001) Một bộ 5 số nguyên dương có thứ tự (m, n, p, q, r) được gọi là "tốt" nếu chúng là các số hạng liên tiếp của một cấp số cộng có công sai không chia hết cho 5.

1. Hỏi từ 100 số nguyên dương đầu tiên, ta cần chọn ra ít nhất bao nhiêu số để chắc chắn rằng trong đó, luôn tồn tại một bộ tốt?

2. Hỏi trong một dãy $(a_1, a_2, \ldots, a_{100})$ gồm 100 số nguyên dương bất kỳ (không nhất thiết phân biệt), có thể chọn ra được nhiều nhất bao nhiêu bộ tốt? Hai bộ được xem là khác nhau nếu có một phần tử trong bộ này có số thứ tự khác tất cả số thứ tự các phần tử trong bộ kia.

Lời giải. Gọi k là công sai của cấp số cộng trong đề bài thì rõ ràng $(k, 5) = 1$. Ta có

$$x_b = x_a + k, x_c = x_a + 2k, x_d = x_a + 3k, x_e = x_a + 4k.$$

Suy ra các số này lập thành một hệ thặng dư đầy đủ modulo 5, tức là có đúng một số chia 5 và có số dư là $0, 1, 2, 3, 4$.

(a) Trong các số nguyên dương $1 \to 100$, ta chọn tất cả các số chia 5 dư $0, 1, 2, 3$ thì thu được 80 số và rõ ràng không có hệ thặng dư đầy đủ modulo 5 nào tạo thành nên chắc chắn sẽ không có bộ tốt. Do đó, cần lấy ít nhất 81 số.

Ta cần chứng minh rằng khi lấy 81 số thì luôn thỏa mãn. Thật vậy, trong các số $1 \to 100$, ta chia thành 20 bộ, mỗi bộ gồm 5 số liên tiếp thì khi lấy 81 số, ta đã bỏ đi 19 số; tức là có một bộ vẫn còn giữ nguyên các phần tử của nó, và đó rõ ràng là bộ tốt. Vì thế nên GTNN cần tìm là 81.

(b) Gọi A, B, C, D, E lần lượt là số lượng số của dãy chia 5 dư $0, 1, 2, 3, 4$ thì

$$A + B + C + D + E = 100.$$

Khi đó, số bộ 5 số thỏa mãn đề bài sẽ là

$$m \le ABCDE \le \left(\frac{A + B + C + D + E}{5}\right)^5 = 20^5.$$

Để xây dựng dãy số thỏa mãn, ta chỉ cần xét $a_1 \to a_{20}$ bằng 1, $a_{21} \to a_{40}$ bằng 2, $a_{41} \to a_{60}$ bằng 3, $a_{61} \to a_{80}$ bằng 4 và $a_{81} \to a_{100}$ bằng 5. Dễ thấy trong dãy này, giá trị của $m = 20^5$. Vậy giá trị lớn nhất cần tìm là 20^5. $\square$

GIỚI THIỆU MỘT SỐ ĐỀ THI OLYMPIC ONLINE

Lê Phúc Lữ
(Cao học Khoa học tự nhiên TPHCM)
Trần Bá Đạt
(GV THPT Gia Định TPHCM)

TÓM TẮT

Trong thời gian hơn nửa năm qua, với tình hình dịch bệnh trên khắp thế giới, nhiều kỳ thi Olympic truyền thống đã chuyển sang hình thức online để đảm bảo an toàn cho các thí sinh. Đó vừa là thách thức, khi đòi hỏi phải tổ chức được một kỳ thi công bằng, khách quan, vừa là cơ hội, khi việc tổ chức sẽ linh động hơn, thuận tiện hơn. Trong bài viết này, tác giả xin điểm qua tổng cộng 10 kỳ thi online như thế.

1. Cyberspace MC - cuộc thi toán học trực tuyến

American Mathematics Competitions kết hợp với AoPS đã tổ chức CMC - Cyberspace Mathematical Competition. Đây là cuộc thi online miễn phí, uy tín, vừa mang tính giải trí nhưng cũng vừa thử thách rất cao, tối đa 8 học sinh mỗi nước được đăng ký. Thí sinh sẽ giải 4 bài toán trong vòng 5 giờ mỗi ngày.

Ngày thi thứ nhất (13/07/2020)

BÀI 1. Xét bảng ô vuông kích thước $n \times n$ và đường chéo chính của nó là n ô vuông dọc theo đường chéo từ góc trên bên trái xuống góc dưới bên phải. Xét hình chữ L là bảng ô vuông 2×2 bỏ đi một ô vuông ở góc nào đó. Tìm tất cả giá trị $n \geq 2$ sao cho có thể phủ bảng bởi các hình chữ L sao cho các ô trên đường chéo chính không được phủ, và các ô còn lại của bảng thuộc đúng một hình chữ L.

BÀI 2. Cho hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì tích $f(1)f(2)\cdots f(n)$ có tối đa n ước nguyên tố phân biệt.

BÀI 3. Cho tam giác ABC có $AB > BC$ và điểm D di chuyển trên đoạn BC. Xét điểm E thuộc cung BC không chứa A của đường tròn (ABC) sao cho $\angle BAE = \angle DAC$. Gọi I, J lần lượt là tâm nội tiếp tam giác ABD và ACE. Chứng minh rằng đường thẳng IJ luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi.

BÀI 4. Cho n là một số nguyên dương lẻ. Một số ô vuông của bảng $n \times n$ được tô màu xanh sao cho một quân vua có thể di chuyển qua tất cả các ô được tô xanh sao cho mỗi bước nó đi qua ô vuông xanh kề đỉnh với ô hiện tại mà nó đang đứng. Chứng minh rằng quân vua luôn có thể thực việc di chuyển trên với không quá $\dfrac{n^2-1}{2}$ bước.

Ngày thi thứ hai (14/07/2020)

BÀI 5. Có 2020 số nguyên dương nào đó được viết lên bảng. Mỗi phút, Zuliet xóa đi hai số a, b nào đó trên bảng và thay bởi một trong các số: $a+b, a-b, b-a, ab, \dfrac{a}{b}, \dfrac{b}{a}$. Sau 2019 phút, Zoom viết được số -2020. Chứng minh rằng cũng với 2020 số nguyên dương đó, Zoom có thể viết được số 2020 bằng cách thực hiện các thao tác trên một cách thích hợp.

BÀI 6. Tìm tất cả các số nguyên dương $n \geq 3$ sao cho: nếu đa giác $\mathcal{P}$ là n giác lồi mà $n-1$ cạnh của nó có độ dài bằng nhau, và $n-1$ góc của nó có số đo bằng nhau thì $\mathcal{P}$ sẽ là đa giác đều.

BÀI 7. Mỗi ô vuông của bảng $n \times n$ được tô đen hoặc trắng. Gọi a_i là số ô vuông đen hàng thứ i và b_i là số ô vuông trắng ở cột thứ i. Tìm giá trị lớn nhất của tổng $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$.

BÀI 8. Cho $a_1, a_2, \ldots$ là dãy vô hạn các số thực dương sao cho với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$ thì

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n+1}^2}{n+1}}.$$

Chứng minh rằng dãy đã cho là hằng.

2. Senior MO of USA 2020

USA MO, dành cho các bạn senior lớp 11-12, có 2 câu giống với đề USAJMO (dành cho lớp <= 10) và tất nhiên các câu đều khó. Hai kỳ thi này tổ chức cùng ngày và giống kiểu bảng A-B của VN trước kia. Đa số học sinh đậu USAMO và một ít top trên USAJMO được vào vòng trong.

Ngày thi thứ nhất (19/06/2020)

BÀI 1. *(Zuming Feng)* Cho ABC nhọn, cố định với tâm ngoại tiếp O. Điểm X thay đổi trên cung nhỏ AB của (O) và CX cắt AB tại D. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác ADX, BDX. Tìm tất cả các vị trí của X để tam giác OO_1O_2 có diện tích nhỏ nhất.

BÀI 2. *(Alex Zhai)* Một khối gỗ hình lập phương kích thước $2020 \times 2020 \times 2020$ được chia thành các khối lập phương đơn vị. Các thanh xà hình hộp chữ nhật kích thước $1 \times 1 \times 2020$ được đặt bên trong khối gỗ thỏa mãn

1. Thanh xà là khối liên tiếp các khối lập phương đơn vị và hai đầu của thanh xà thuộc về hai mặt đối diện nhau của khối gỗ (sẽ có tối đa $3 \cdot 2020^2$ thanh).

2. Hai thành xà bất kỳ thì không có chung khối lập phương nào.

3. Mỗi mặt 1×2020 của thanh xà thì nằm ở biên của khối gỗ hoặc kề với một mặt nào đó của thanh xà khác.

Tìm số ít nhất các thanh xà có thể đặt vào bên trong khối gỗ.

BÀI 3. *(Richard Stong and Toni Bluher)* Cho số nguyên tố lẻ p và x là một bất thặng dư chính phương mod p, nghĩa là không tồn tại t nguyên sao cho $x - t^2$ chia hết cho p. Ký hiệu A là tập hợp tất cả các số a sao cho $1 \leq a < p$ và $a, 4 - a$ đều là bất thặng dư chính phương. Tính số dư của tích tất cả các số trong A khi chia cho p.

Ngày thi thứ hai (20/06/2020)

BÀI 4. *(Ankan Bhattacharya)* Giả sử rằng (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\ldots$, (a_{100}, b_{100}) là các cặp có thứ tự các số tự nhiên phân biệt. Gọi N là số cặp chỉ số (i, j) sao cho $1 \leq i < j \leq 100$ và $|a_i b_j - a_j b_i| = 1$. Xác định giá trị lớn nhất của N.

BÀI 5. *(Carl Schildkraut)* Một tập hữu hạn S các điểm trong mặt phẳng được gọi là "xác định" nếu như $|S| \geq 2$ và tồn tại đa thức hệ số thực $P(t)$ có bậc không vượt quá $|S| - 2$, thỏa mãn $P(x) = y$ với mọi $(x, y) \in S$.

Với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, tìm số nguyên k lớn nhất sao cho tồn tại một tập hợp có n điểm phân biệt không "tốt" và có k tập con tốt.

BÀI 6. *(David Speyer and Kiran Kedlaya)* Cho số nguyên dương $n \geq 2$. Gọi $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$ và $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n$ là $2n$ số thực $0 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$ và

$$1 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2.$$

Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i - x_i y_{n+i-1}) \geq \frac{2}{\sqrt{n-1}}$.

3. Junior MO of USA 2020

USAJMO là kỳ thi HSG toàn quốc của Mỹ dành cho học sinh lớp 10 hoặc nhỏ hơn, nhằm tuyển chọn ra học sinh "Red level" cho các trường hè. Kỳ thi này tổ chức lần đầu tiên vào năm 2010, và năm nay được tổ chức online.

Ngày thi thứ nhất (19/06/2020)

BÀI 1. *(Milan Haiman)* Cho số nguyên dương $n \geq 2$. Carl có n quyển sách hình chữ nhật xếp trên kệ, mỗi quyển có kích thước dài - rộng đôi một phân biệt nhau. Ban đầu, các quyển sách được xếp tăng dần theo chiều dài và mỗi bước, Carl có thể chọn hai quyển bất kỳ cạnh nhau mà quyển bên trái có chiều rộng nhỏ hơn, nhưng chiều dài lớn hơn so với quyển bên phải, rồi đổi chỗ chúng. Carl lặp lại thao tác trên nhiều lần đến khi nào không thực hiện được nữa. Chứng minh rằng quá trình này sẽ dừng lại, và khi đó, các quyển sách xếp tăng dần theo chiều rộng từ trái sang phải.

BÀI 2. *(Titu Andreescu and Waldemar Pompe)* Cho ω là đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC có ℓ là đường thẳng thay đổi luôn tiếp xúc với ω và cắt các đoạn thẳng BC, CA lần lượt ở P, Q. Tìm quỹ tích các điểm R thỏa mãn $PR = PA$ và $QR = QB$.

BÀI 3. *(Alex Zhai)* Một khối gỗ hình lập phương kích thước $2020 \times 2020 \times 2020$ được chia thành các khối lập phương đơn vị. Các thanh xà hình hộp chữ nhật kích thước $1 \times 1 \times 2020$ được đặt bên trong khối gỗ thỏa mãn

1. Thanh xà là khối liên tiếp các khối lập phương đơn vị và hai đầu của thanh xà thuộc về hai mặt đối diện nhau của khối gỗ (sẽ có tối đa $3 \cdot 2020^2$ thanh).

2. Hai thành xà bất kỳ thì không có chung khối lập phương nào.

3. Mỗi mặt 1×2020 của thanh xà thì nằm ở biên của khối gỗ hoặc kề với một mặt nào đó của thanh xà khác.

Tìm số ít nhất các thanh xà có thể đặt vào bên trong khối gỗ.

Ngày thi thứ hai (20/06/2020)

BÀI 4. *(Milan Haiman)* Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn và thỏa mãn $DA < AB = BC < CD$. Điểm E, F được chọn lần lượt trên CD, AB sao cho $BE \perp AC$ và $EF \parallel BC$. Chứng minh rằng $FB = FD$.

BÀI 5. *(Ankan Bhattacharya)* Giả sử rằng $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_{100}, b_{100})$ là các cặp có thứ tự các số tự nhiên phân biệt. Gọi N là số cặp chỉ số (i, j) sao cho $1 \leq i < j \leq 100$ và $|a_i b_j - a_j b_i| = 1$. Xác định giá trị lớn nhất của N.

BÀI 6. *(Ankan Bhattacharya)* Cho $n \geq 2$ là số nguyên và xét $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là đa thức n biến hệ số thực. Giả sử rằng với mọi bộ n số thực $r_1, r_2, \ldots, r_n$ mà có ít nhất hai trong chúng bằng nhau thì ta đều có $P(r_1, r_2, \ldots, r_n) = 0$. Chứng minh rằng $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ không thể viết thành tổng của ít hơn $n!$ đơn thức có dạng $cx_1^{d_1}x_2^{d_2}\ldots x_n^{d_n}$, với $c \neq 0$ và d_1, d_2, ..., d_n là các số tự nhiên.

4. Nữ sinh châu Âu

Olympic Nữ sinh châu Âu EGMO tại Hà Lan đã tiến hành thi online. EGMO có cấu trúc 2 ngày, mỗi ngày 3 bài làm trong 4 tiếng rưỡi. So với APMO thì đề này có hình thức giống các đề của VN hơn, gần gũi hơn, nhưng vẫn rất đẹp và thú vị.

Ngày thi thứ nhất (17/04/2020)

BÀI 1. Cho các số nguyên dương $a_0, a_1, \ldots, a_{3030}$ thỏa mãn điều kiện

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \text{ với mọi } n = 0, 1, 2, \ldots, 3028.$$

Chứng minh rằng có ít nhất một trong các số $a_0, a_1, \ldots, a_{3030}$ là chia hết cho 2^{2020}.

BÀI 2. Tìm tất cả các bộ số thực không âm $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ thỏa mãn đồng thời ba điều kiện

i) $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{2020}$;

ii) $x_{2020} \leq x_1 + 1$;

iii) có một hoán vị $(y_1, y_2, \ldots, y_{2020})$ của $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ sao cho

$$\sum_{i=1}^{2020} ((x_i + 1)(y_i + 1))^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

BÀI 3. Cho lục giác lồi $ABCDEF$ thỏa mãn điều kiện $\angle A = \angle C = \angle E$ và $\angle B = \angle D = \angle F$,đồng thời phân giác trong của các góc $\angle A, \angle C$ và $\angle E$ thì đồng quy. Chứng minh rằng khi đó, các phân giác trong của các góc $\angle B, \angle D$ và $\angle F$ cũng đồng quy.

Ngày thi thứ hai (18/04/2020)

BÀI 4. Một hoán vị của các số $1, 2, \ldots, m$ được gọi là "tốt" nếu như không có số nguyên dương $k < m$ nào sao cho k số đầu tiên của hoán vị cũng chính là $1, 2, \ldots, k$ theo thứ tự nào đó. Gọi f_m là số hoán vị tốt của $1, 2, \ldots, m$. Chứng minh rằng $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$ với mọi $n \geq 3$.

BÀI 5. Xét tam giác ABC có góc C tù. Đường tròn Γ ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính là R. Giả sử có điểm P nằm trong đoạn thẳng AB sao cho $PB = PC$ và $PA = R$. Đường trung trực của PB cắt Γ tại các điểm D và E. Chứng minh rằng P là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác CDE.

BÀI 6. Cho số nguyên $m > 1$.Một dãy số $a_1, a_2, a_3, \ldots$ được định nghĩa bởi $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 4$ và với mọi $n \geq 4$ thì

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Tìm tất cả các số m sao cho mọi số hạng của dãy này đều là số chính phương.

5. APMO

Olympic châu Á Thái Bình Dương là kỳ thi thường niên diễn ra theo hình thức thi "bán tập trung" tại mỗi nước, bởi thế năm nay việc thi online cũng không ảnh hưởng mấy. BTC phát đề và tiến hành chấm trong tháng 3 và công bố kết quả và đầu tháng 6 vừa qua.

Bài 1. Gọi Γ là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi D là điểm nằm trên cạnh BC. Tiếp tuyến của Γ tại A cắt đường thẳng qua D, song song với BA tại E. Cạnh CE cắt Γ lần nữa tại F. Giả sử rằng B, D, F, E cùng nằm trên một đường tròn, chứng minh rằng AC, BF, DE đồng quy

Bài 2. Chứng minh rằng $r = 2$ là số thực r lớn nhất thỏa mãn điều kiện sau:

Nếu một dãy các số nguyên $a_1, a_2, \ldots$ thỏa mãn bất đẳng thức

$$a_n \leq a_{n+2} \leq \sqrt{a_n^2 + r a_{n+1}}$$

với mọi số nguyên dương n thì tồn tại số nguyên dương M sao cho $a_{n+2} = a_n$ với mọi $n \geq N$.

Bài 3. Xác định tất cả các số nguyên dương k thỏa mãn tồn tại một số nguyên dương m là tập hợp S gồm các số nguyên dương sao cho mỗi số nguyên $n > m$ bất kì đều có thể viết được dưới dạng tổng các phần tử phân biệt trong S theo đúng k cách.

Bài 4. Gọi $\mathbb{Z}$ là tập hợp tất cả các số nguyên. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số nguyên thỏa mãn tính chất sau:

Với mỗi dãy các số nguyên $a_1, a_2, \ldots$ mà với mỗi số nguyên xuất hiện đúng một lần trong dãy, tồn tại chỉ số $i < j$ và số nguyên k thỏa

$$a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j = P(k).$$

Bài 5. Cho số nguyên dương $n \geq 3$. Số 1 được viết n lần trên bảng. Phía dưới bảng là hai cái xô trống. Ở mỗi bước, thực hiện xóa hai số a và b trên bảng, thay bởi 1 và $a + b$ đồng thời thêm 1 viên sỏi vào xô thứ nhất, $\gcd(a, b)$ viên sỏi vào xô thứ hai. Sau một số hữu hạn bước, có s cục đá trong xô thứ nhất và t cục đá trong xô thứ hai. Tìm tất cả các giá trị có thể có của $\frac{t}{s}$.

6. Cá tháng tư MO

April Fool MO là một kỳ thi "ăn theo" APMO, vì nó viết tắt là AFMO; các bài toán cũng hơi lạ nhưng cũng đảm bảo tính chuyên môn và thử thách.

Bài 1. Một số nguyên dương n được gọi là "đẹp" nếu tổng các chữ số của 2^n nhỏ hơn tổng các chữ số của 3^n đúng một đơn vị. Có thể thấy rằng 1 và 3 là hai số "đẹp". Liệu còn có số "đẹp" nào khác nữa không?

Bài 2. Hàm tâm tam giác phức là hàm số cho bởi

$$f(a,b,c)=\frac{P(a,b,c)}{Q(a,b,c)}$$

trong đó P, Q là đa thức đối xứng có tất cả các hệ số là một và $\deg(P)=\deg(Q)+1$. Nếu $|a|=|b|=|c|=1$ thì f sẽ biểu diễn điểm $X=f(a,b,c)$ trong mặt phẳng phức. Chẳng hạn, nếu $f(a,b,c)=a+b+c$ thì X là trực tâm tam giác có tọa độ ba đỉnh trong mặt phẳng phức là a, b, c.

Hàm f như vậy được gọi là "đẹp" nếu với bất kì cách chọn các số phân biệt a, b, c với $|a|=|b|=|c|$, điểm $X=f(a,b,c)$ nằm trong tam giác ABC. Liệu có phải có hữu hạn hàm tâm tam giác phức f?

Bài 3. Cho tam giác nhọn không cân ABC với tâm đường tròn ngoại tiếp là O và trực tâm là H. Tia OH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lần nữa tại X, và ảnh của X qua phép đối xứng các trục OA, OB, OC lần lượt là R, S, T. Gọi G là trọng tâm tam giác RST và P là điểm tiếp xúc giữa đường tròn nội tiếp và đường tròn chín điểm của RST. Liệu X, G, P có thẳng hàng hay không?

Bài 4. Có 2020 thành phố trong một số nước. A và B tạo ra các đường đi một chiều giữa các thành phố theo lượt, trong đó Andrew đi trước (có thể mở đường đi từ một thành phố tới chính thành phố đó nếu người chơi muốn). Trong mỗi lượt, mỗi người chơi tạo ra đúng một đường đi nhưng mỗi thành phố không được phép có nhiều đường đến hay nhiều đường đi.

Khi không thể tạo thêm đường nữa, các thành phố sẽ bắt đầu giao dịch với nhau sao cho các giao dịch chỉ diễn ra trên các tuyến đường (hai thành phố chỉ được giao dịch với nhau nếu tồn tại một dãy đường nối hai thành phố với nhau).

Cuối cùng, các thành phố được chia thành các quốc gia sao cho các thành phố giao thương được với nhau thì phải ở cùng một quốc gia, những thành phố không thể giao thương với thành phố nào khác thì trở thành một quốc gia riêng biệt. A thắng trò chơi nếu có số chẵn các quốc gia, còn B thắng nếu có số lẻ các quốc gia. Giả sử các người chơi đều biết cách chơi tối ưu, liệu B có thể thắng hay không?

Bài 5. Có hữu hạn hình tròn trên mặt phẳng. Một cặp đường tròn (Γ, γ) được gọi là "đẹp" nếu tồn tại một tam giác nhận Γ làm đường tròn ngoại tiếp, γ làm đường tròn nội tiếp hoặc ngược lại. Xây dựng một đồ thị có các đỉnh là các đường tròn, hai đỉnh được nối với nhau bởi một cạnh nếu cặp đỉnh đó "đẹp". Liệu đồ thị đã cho có phải đồ thị phẳng hay không?

Bài 6. Một hàm số $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ được gọi là "đẹp" nếu tồn tại một hàm khác hằng $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn với mọi số tự nhiên n, ta luôn có

$$f(n)+g(n)=f^{g(n)}(n)+g^{f(n)}(n).$$

Chú ý rằng, $f^a(x)=\underbrace{f(f(\cdots f(x)\cdots))}_{a \text{ a lần } f}$. Liệu có tồn tại hàm $f_0:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn các tính chất sau

- Nếu $f(n)\le f_0(n)$ với mọi n thì f là "đẹp".
- Nếu $f(n)>ef_0(n)$ với mọi n thì f là không "đẹp".

7. USE MO

Đây là một kỳ thi cũng mang tính "ăn theo" USAMO xịn, có thể nói đây chính là một phiên bản thử nghiệm cho các thí sinh đang hướng tới kỳ thi USAMO chính thức. Năm 2020 cũng là năm đầu tiên có kỳ thi USEMO này diễn ra.

Ngày thi thứ nhất.

Bài 1. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$. Một đường tròn có tâm là O, đi qua B,D và cắt BA,BC lần nữa tại E,F khác A,B,C. Gọi H là trực tâm tam giác DEF. Chứng minh rằng nếu AC,DO,EF đồng quy thì hai tam giác ABC và EHF đồng dạng với nhau.

Bài 2. Gọi $\mathbb{Z}[x]$ là tập hợp các đa thức theo x với hệ số nguyên. Tìm tất cả các hàm $\theta:\mathbb{Z}[x]\to\mathbb{Z}[x]$ thỏa mãn

- Với $p,q\in\mathbb{Z}[x]$, ta luôn có $\theta(p+q)=\theta(p)+\theta(q)$.
- Với mỗi $p\in\mathbb{Z}[x]$, p có nghiệm nguyên khi và chỉ khi $\theta(p)$ có nghiệm nguyên.

Bài 3. Gọi $\mathcal{G}$ là lưới vô hạn chứa các ô vuông đơn vị. Một *đa giác bàn cờ* là một đa giác có các cạnh nằm trên lưới. Nikolai chọn một *đa giác bàn cờ* F và yêu cầu bạn tô một số ô của $\mathcal{G}$ màu xanh sao cho mỗi **đa giác bàn cờ** đồng dạng với F đều có ít nhất 1 và nhiều nhất 2020 ô xanh. Liệu Nikolai có thể chọn F để khiến bạn không thể thực hiện được điều trên hay không?

Ngày thi thứ hai.

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p, tồn tại số nguyên dương n thỏa mãn

$$1^n+2^{n-1}+3^{n-2}+\ldots+n^1\equiv 2020\ (\bmod p).$$

Bài 5. Cho đác đều $\mathcal{P}$ và $\mathcal{V}$ là tập hợp các định của $\mathcal{P}$. Mỗi điểm trong $\mathcal{V}$ được tô bởi một trong ba màu đỏ, trắng, xanh. Một tập con của $\mathcal{V}$ được gọi là *đẹp* nếu nó số đỉnh được tô bởi mỗi màu là như nhau. Một cạnh của $\mathcal{P}$ được gọi là *sáng* nếu điểm đầu và điểm cuối của nó khác màu.

Giả sử rằng $\mathcal{V}$ là *đẹp* và số cạnh *sáng* trong $\mathcal{P}$ là chẵn. Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng không đi qua tất cả các đỉnh của $\mathcal{V}$ và chia $\mathcal{V}$ thành hai tập con *đẹp*.

Bài 6. Cho ABC là tam giác nhọn không cân với tâm đường tròn ngoại tiếp O và ba đường cao AD, BE, CF. Gọi X, Y, Z lần lượt là trung điểm của AD, BE, CF. AD và YZ cắt nhau tại P, BE và ZX cắt nhau tại Q, CF và XY cắt nhau tại R.

Giả sử rằng YZ và BC cắt nhau tại A', QR và EF cắt nhau tại D'. Chứng minh rằng bốn đường vuông góc lần lượt kẻ từ A, B, C, O tới $QR, RP, PQ, A'D'$ tương ứng đồng quy.

8. OMO Spring

Kỳ thi OMO này mỗi năm tổ chức 2 lần, 1 vào mùa thu (cuối T10-đầu T11) và 1 vào mùa xuân (cuối T3-đầu T4). Đề gồm 30 câu (từ dễ đến khó, rất khó và khủng, cả về hình thức lẫn nội dung), thí sinh tham gia theo hình thức đăng ký team và điền đáp số. Đề thi rất đa dạng nhiều mảng kiến thức, nhiều kỹ thuật hay, mới, đáng được chú ý. Bên dưới Ban biên tập chọn giới thiệu 15 câu trong số đó.

Bài 1. Cho đường thẳng l và A, B, C nằm trên l thỏa mãn $AB = 7, BC = 5$. Gọi m là đường thẳng qua A, vuông góc với l. Lấy P nằm trên m. Tìm giá trị nhỏ nhất của $PB + PC$.

Bài 2. P viết vào giấy năm số tự nhiên liên tiếp rồi xóa một trong số chúng đi. Khi đó tổng của bốn số còn lại là 153. Tính con số là P đã xóa.

Bài 3. Cho hình vuông $ABCD$ với độ dài cạnh là 16 và tâm là O. Gọi $\mathcal{S}$ là nửa đường tròn đường kính AB nằm ngoài $ABCD$ và P là điểm nằm trên $\mathcal{S}$ sao cho $OP = 12$. Tính diện tích tam giác CDP.

Bài 4. Tìm tố nguyên dương n nhỏ nhất sao cho không tồn tại các số nguyên x, y sao cho

$$n = x^3 + 3y^3.$$

Bài 5. A có 2020 bức vẽ, trong đó bức vẽ thứ i là hình chữ nhật có độ dài $1 \times i$, với $i = 1, 2, \ldots, 2020$. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho ta có thể đặt tất cả các bức tranh trên một chiếc bàn kích thước $n \times n$ và không bị chồng lên nhau.

Bài 6. Cho hai số nguyên dương $a > b$. Tính giá trị nguyên nhỏ nhất của biểu thức $\frac{a!+1}{b!+1}$.

Bài 7. Một nhà ảo thuật có một chiếc mũ chứa a con thỏ trắng và b con thỏ đen. Nhà ảo thuật liên tục rút ra những cặp thỏ được chọn trong chiếc mũ. Gọi một cặp thỏ được rút ra là *hoàn hảo* nếu cặp gồm một thỏ đen và một thỏ trắng. Biết rằng nhà ảo thuậ gia đã rút ra tất cả các con thỏ theo từng đôi (không có con thỏ nào được rút ra một mình) và số cặp *hoàn hảo* là 2020. Tính các giá trị có thể của cặp số (a, b).

Bài 8. Tính số hàm $f\colon \{1,\dots,15\} \to \{1,\dots,15\}$ thỏa mãn với mọi $x \in \{1,\dots,15\}$, ta luôn có
$$\frac{f(f(x)) - 2f(x) + x}{15}$$
là số nguyên.

Bài 9. Một giá sách gỗ bốn quyển sách giống hệt nhau với số trang lần lượt là 200, 400, 600, and 800. Velma chọn ngẫu nhiên một quyển sách trên giá sách, lật ngẫu nhiêu một trang để đọc và đặt quyển sách lại trên kệ. Sau đó, Daphne cũng chọn ngẫu nhiên một quyển sách trên kệ và lật tới một trang bất kì để đọc. Biết rằng Velma đọc trang 122 và Daphne đọc trang 304, xác suất để họ chọn chung một sách là $\frac{m}{n}$ với m, n là hai số nguyên tố cùng nhau. Tính $100m + n$.

Bài 10. Với các số nguyên không âm p, q, r, đặt
$$f(p,q,r) = (p!)^p (q!)^q (r!)^r.$$
Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho với mọi bộ ba (a,b,c) và (x,y,z) các số không âm thỏa mãn $a + b + c = 2020$ và $x + y + z = n,\ f(x,y,z)$ chia hết cho $f(a,b,c)$.

Bài 11. Tính số cặp số nguyên dương có thứ tự (m,n) thỏa mãn $(2^m - 1)(2^n - 1) | 2^{10!} - 1$.

Bài 12. Tính số các số nguyên n thỏa $1 \le n \le 1024$ thỏa mãn dãy $[n], [n/2], [n/4], [n/8], \dots$ không chứa bội nào của 5.

Bài 13. Vincent có một con xúc sắc cân bằng 6 mặt. Ban đầu, Vincent tung con xúc sắc và ghi lại số chấm lên một tờ giấy. Sau đó, cứ mỗi giây, anh ấy lại tung lại một lần. Nếu kết quả lần tung sau khác lần tung trước thì anh sẽ ghi lại kết quả mới vào tờ giấy. Nếu kết quả lần tung sau giống với lần tung trước thì anh sẽ dừng lại và không ghi kết quả lần cuối cùng. Biết rằng lượt tung đầu tiên của Vincent là 1, gọi E là kì vọng của kết quả sau các lần tung. Biết rằng tồn tại các số hữu tỉ $r, s, t > 0$ thỏa mãn $E = r - s \ln t$ và t không phải là lũy thừa của một số tự nhiên. Nếu $r + s + t = \frac{m}{n}$ với m, n là hai số nguyên tố cùng nhau, tính $100m + n$.

Bài 14. Cho ABC là một tam giác không cân. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC cắt các cạnh BC, AC, và AB tại các điểm D, E, and F, tương ứng, và đường tròn A-bàng tiếp tiếp xúc với BC, AC, và AB lần lượt tại D_1, E_1, và F_1, tương ứng. Giả sử rằng AD, BE, và CF đồng quy tại G, và các đường thẳng AD_1, BE_1, CF_1 đồng quy tại G_1. Đường thẳng GG_1 cắt phân giác trong của góc BAC tại X. Giả sử $AX = 1$, $\cos\angle BAC = \sqrt{3} - 1$, và $BC = 8\sqrt[4]{3}$. Khi đó $AB \cdot AC = \frac{j + k\sqrt{m}}{n}$ với các số nguyên j, k, m, và n thỏa mãn $\gcd(j,k,n) = 1$ và m không chia hết cho bất kì số chính phương nào lớn hơn 1. Tính $1000j + 100k + 10m + n$.

Bài 15. Với các số nguyên dương $i = 2, 3, \dots, 2020$, đặt
$$a_i = \frac{\sqrt{3i^2 + 2i - 1}}{i^3 - i}.$$
Đặt x_2, ..., x_{2020} là các số thực dương thỏa $x_2^4 + x_3^4 + \cdots + x_{2020}^4 = 1 - \frac{1}{1010 \cdot 2020 \cdot 2021}$. Gọi S là giá trị lớn nhất của
$$\sum_{i=2}^{2020} a_i x_i (\sqrt{a_i} - 2^{-2.25} x_i)$$
và đặt m là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho S^m hữu tỉ. Khi S^m được viết dưới dạng phân số tối giản, giả sử phân tích tiêu chuẩn của mẫu số là $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ với $p_1 < \cdots < p_k$ là các số nguyên tố và α_i là các số nguyên dương. Tính $p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \cdots + p_k\alpha_k$.

9. Global Quarantine MO

Đây là cuộc thi online do Thụy Sĩ tổ chức, diễn ra trong đợt cách ly vì dịch bệnh vừa qua, giúp hs một số nước vẫn có cơ hội trải nghiệm do nhiều kỳ thi khác đã bị hủy.

9.1. Mức độ khó

Ngày 1.

Bài 1. Cho tam giác ABC với tâm nội tiếp I. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AC và AB lần lượt tại E, F. Gọi l_B, l_C là các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC tại B, C tương ứng. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn tiếp xúc với EF, l_B, l_C với tâm nằm trên BC.

Bài 2. Geoff có vô hạn túi kẹo, có n vị. Anh ấy phân phối một số kẹo cho n đứa bé (một đứa bé có thể lấy bất kì kẹo có hương vị nào). Gọi một cách phân phối các viên kẹo là $k-$tốt nếu mọi nhóm k đứa trẻ đều có ít nhất k hương vị kẹo khác nhau. Tìm tất cả các tập con S của $\{1, 2, \ldots, n\}$ thỏa mãn nếu một cách phân phối kẹo là $s-$tốt với mọi $s \in S$ thì nó cũng là $s-$tốt với mọi $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Bài 3. Ta gọi một bộ số nguyên là *đặc biệt* nếu nó chứa ít nhất 4 phần tử và có thể phân hoạch thành hai tập hợp rời nhau $\{a, b\}$ và $\{c, d\}$ sao cho $ab - cd = 1$. Với mọi số nguyên dương n, chứng minh rằng tập hợp $\{1, 2, \ldots, 4n\}$ không thể phân hoạch thành n tập *đặc biệt*.

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi số nguyên đủ lớn n, tồn tại n số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thỏa mãn ba điều kiện sau:

- Mỗi số a_i bằng $-1, 0$ hoặc 1.
- Có ít nhất $2n/5$ số trong $a_1, a_2, \ldots, a_n$ khác 0.
- $a_1/1 + a_2/2 + \ldots + a_n/n = 0$.

Ngày 2.

Bài 5. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ thỏa mãn

$$f(x)f(y+1) = f(xf(y)) + f(x), \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{Q}.$$

Bài 6. Liệu có tồn tại vô hạn bộ ba số nguyên dương (a, b, c) thỏa mãn tất cả các ước nguyên tố của $a! + b! + c!$ nhỏ hơn 2020 hay không?

Bài 7. Mỗi số nguyên trong $\{1, 2, \ldots, 2020\}$ được tô màu theo sao cho với mọi số nguyên dương a, b thỏa mãn $a + b \leq 2020$, các số a, b, và $a + b$ không được tô bởi ba màu khác nhau. Xác định số màu tối đa có thể được dùng.

Bài 8. Gọi ABC là một tam giác nhọn không cân với chân đường cao hạ từ A, B, C hạ xuống BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. Gọi W là một điểm nằm trong tam giác ABC và W_a, W_b, W_c lần lượt là ảnh đối xứng của W qua BC, CA, AB tương ứng. Cuối cùng, gọi N và I là tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp của tam giác $W_aW_bW_c$. Chứng minh rằng nếu N trùng với tâm đường tròn chín điểm của DEF thì WI song song với đường thẳng Euler của ABC.

9.2. Mức độ dễ

Bài 1. Tìm tất cả các bộ bốn (a, b, c, d) sao cho các đẳng thức

$$X^2 + aX + b = (X - a)(X - c) \quad \text{và } X^2 + cX + d = (X - b)(X - d)$$

đúng với mọi X.

Bài 2. Ngân hàng Zulrich phát hành một đồng xu có một mặt in chữ H và một mặt in chữ T. Alice có n đồng tiền như vậy được sắp xếp từ trái sang phải. Cô ấy liên tiếp thực hiện thao tác sau: nếu một đồng tiền đang ở mặt H, Alice chọn một số đồng xu liên tiếp (ít nhất một xu) và lật chúng lại; trong trường hợp tất cả các đồng xu đều ở mặt T thì Alice dừng lại. Chẳng hạn, nếu $n = 3$, Alice có thể thực hiện như sau: $THT \to HTH \to HHH \to TTH \to TTT$. Alice cũng có thể chọn cách thao tác $THT \to TTT$.

Với mỗi cấu hình C ban đầu, gọi $m(C)$ là số nhỏ nhất các thao tác mà Alice có thể thực hiện. Chẳng hạn, $m(THT) = 1$ và $m(TTT) = 0$. Với mỗi số nguyên $n \geq 1$, hãy xác định giá trị lớn nhất của $m(C)$.

Bài 3. Gọi A và B là hai điểm phân biệt trong mặt phẳng. Gọi M là trung điểm của AB và ω là đường tròn đi qua A và M. Gọi T là một điểm nằm trên ω thỏa mãn BT tiếp xúc với ω. Gọi X là điểm khác B trên cạnh AB thỏa mãn $TB = TX$, và gọi Y là chân đường cao hạ từ A xuống BT. Chứng minh rằng AT và XY song song.

Bài 4. Với mỗi số thực x, ta gọi $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Tìm tất cả các hàm đi từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + y) = (-1)^{[y]} f(x) + (-1)^{[x]} f(y), \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 5. Gọi n, k là các số tự nhiên thỏa mãn $k \leq 2^n$. B và C cùng chơi một trò chơi như sau. Đầu tiên, B bí mật chọn một số tự nhiên x trong khoảng từ 1 đến n. C sẽ cố gắng đoán x bằng cách hỏi các câu hỏi được mô tả như sau. Trong mỗi lượt, C chọn k tập con khác nhau của $\{1, 2, \ldots, n\}$ và với mỗi tập con S, C sẽ hỏi "Liệu x có nằm trong S hay không?". B chọn một trong k câu hỏi, đọc câu hỏi đó lên và trả lời chính xác nó. Tìm tất cả các cặp (n, k) sao cho với mọi hành động của B, C có thể xác định được x sau hữu hạn bước.

Bài 6. Với mọi số tự nhiên khác 1 và -1, gọi $S(n)$ là số tự nhiên nhỏ nhất lớn hơn 1 và ước của n. Đặc biệt, $S(0) = 2$. Ta cũng định nghĩa $S(0) = S(-1) = 1$.

Gọi f là đa thức khác hằng với hệ số nguyên thỏa mãn $S(f(n)) \leq S(n)$ với mọi số nguyên dương n. Chứng minh rằng $f(0) = 0$.

10. Fake USAMO

Đây là một kỳ thi mang tính chuẩn bị cho USAMO "xịn". Tuy là hàng "fake" nhưng các bài cũng rất mới mẻ và mang tính thử thách rất cao. Bởi thế mới thấy được rằng đội ngũ Chuyên Toán của Mỹ vừa có chuyên môn cao mà lại làm việc cực kỳ nghiêm túc và hiệu quả.

Bài 1. Cho C là một số nguyên dương và $a_1, a_2, a_3, \ldots$ là một dãy vô hạn các số nguyên dương thỏa mãn
$$a_{n+1} = \sqrt{a_n^3 - Ca_n}$$
với mọi n nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương N thỏa mãn $a_N = a_{N+1} = a_{N+2} = \ldots$

Bài 2. Cho n là một số nguyên. Ankan có $1 + 2 + \ldots + 2n$ điểm được sắp xếp thành một mảng tam giác đều hướng lên gồm $2n$ hàng. Ta gọi một đoạn thẳng nối một điểm với hai điểm ngay phía dưới nó là một liên kết.

Cho dãy $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ có tổng là n và $a_i \leq i$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, 2n$, Ankan thách đố Bankan lấy đi n điểm sao cho hàng thứ i có đúng a_i điểm bị lấy đi, với mọi $i = 1, 2, \ldots, 2n$. Khi đó Ankansẽ cố gắng lấy n^2 liên kết sao cho mỗi điểm được kết nối với đúng một liên kết. Nếu anh ta luôn thành công bất kể Bankan loại bỏ điểm như thế nào, trình tự $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ được gọi là *đẹp*. Tìm số các dãy *đẹp*.

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ không cân với tâm đường tròn ngoại tiếp O, tâm đường tròn nội tiếp I, và đường tròn nội tiếp ω. Biết ω tiếp xúc với $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, và $\overline{AB}$ tại D, E, and F. Gọi T là hình chiếu của D lên $\overline{EF}$. Đường thẳng AT cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle ABC$ lần nữa tại $X \neq A$. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $\triangle AEX$ và $\triangle AFX$ cắt ω lần nữa tại $P \neq E$ và $Q \neq F$. Chứng minh rằng các đường thẳng EQ, FP, và OI đồng quy.

Bài 4. Có n học sinh trong một lớp học. Ban đầu, mỗi học sinh có 0 đồng xu. Thầy giáo Evan đến và thực hiện thao tác sau mỗi phút: thầy chọn hai học sinh đang có số xu bằng nhau, giả sử là k. Nếu $k = 0$, thầy cho một học sinh 1 xu và học sinh còn lại không được nhận xu. Ngược lại, thầy sẽ lấy một đồng xu từ bạn này chuyển qua bạn khác.

Đến một thời điểm, Evan không thể thực hiện thao tác nào nữa. Chứng minh rằng tại thời điểm đó, các học sinh giữ số xu là $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$ theo một trật tự nào đó.

Bài 5. Xác định tất cả các hàm không bị chặn $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn với mọi số nguyên a, b, c lập thành cấp số cộng, một hoán vị nào đó của $f(a), f(b), f(c)$ cũng là một cấp số cộng.

Bài 6. Gọi $\mathbb{Z}^+$ là tập hợp tất cả các số nguyên dương. Giả sử $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn hai điều kiện sau:

- Với mỗi dãy hữu hạn các số nguyên dương $a_1, a_2, \ldots, a_k$, ta luôn có
$$f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_k) \text{ chia hết } f(a_1 + a_2 + \ldots + a_k).$$
- Tồn tại một số nguyên dương m thỏa $f(m) \neq mf(1)$.

Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương n thỏa mãn
$$\gcd(f(n), f(n+1), f(n+2), \ldots) > 2020^n.$$

Một Số Bài Toán Phương Trình Hàm Trong Đề Thi Olympic Toán

Võ Quốc Bá Cẩn

Giới Thiệu

Trong bài viết này, tác giả xin được giới thiệu các bài toán được tác giả sử dụng trong bài giảng về Phương trình hàm ở Gặp gỡ Toán học 2020.

Bài toán 1. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f\big(x+yf(x)\big)+f\big(y-f(x)\big)=2xf(y),\quad \forall x,\ y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Lời giải. Đặt $a=f(0)$. Nếu $a=0$ thì bằng cách thay $x=0$ vào (1), ta được $f(y)=0$ với mọi $y\in\mathbb{R}$ và hàm số $f(x)=0$ thỏa mãn các yêu cầu của bài toán.

Xét trường hợp $a\neq 0$. Thay $x=0$ vào (1), ta được

$$f(ay)+f(y-a)=0,\quad \forall y\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Thay $y=0$ vào (1), ta cũng có

$$f(x)+f\big(-f(x)\big)=2ax,\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Từ (3), ta dễ thấy f đơn ánh và $f(-a)=-a$. Thay $x=-a$ vào (1), ta được

$$f\big(-a(y+1)\big)+f(y+a)=-2af(y),\quad \forall y\in\mathbb{R}.$$

Mặt khác, từ (1), ta cũng có $f\big(-a(y+1)\big)=-f(-y-a-1)$. Do đó

$$f(y+a)-f(-y-a-1)=-2af(y),\quad \forall y\in\mathbb{R}.$$

Thay $y=-a-\frac{1}{2}$ vào phương trình trên, ta được $f\left(-a-\frac{1}{2}\right)=0$. Tiếp tục, thay $x=-a-\frac{1}{2}$ vào phương trình (3), ta được $a=-2a\left(a+\frac{1}{2}\right)$, suy ra $a=-1$ (do $a\neq 0$) và $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$. Thay $a=-1$ và thay y bởi $-\frac{1}{2}-y$ vào phương trình (2), ta được

$$f\left(\frac{1}{2}+y\right)+f\left(\frac{1}{2}-y\right)=0,\quad \forall y\in\mathbb{R}.$$

Bây giờ, thay $y=\frac{1}{2}$ vào phương trình (1) và sử dụng kết quả trên, ta được

$$f\left(x+\frac{1}{2}f(x)\right)=-f\left(\frac{1}{2}-f(x)\right)=f\left(\frac{1}{2}+f(x)\right).$$

Do f đơn ánh nên từ đây, ta có $x + \frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2} + f(x)$ hay $f(x) = 2x - 1$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn.

Vậy có hai hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x) = 0$ và $f(x) = 2x - 1$. □

Bài toán 2. *Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+y) + f(xy) = f(xy+x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Lời giải. Thay x bởi $\frac{x}{y+1}$ với $x, y \geqslant 0$ vào phương trình (1), ta được

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{xy}{y+1}\right) + f\left(\frac{x}{y+1} + y\right), \quad \forall x, y \geqslant 0. \tag{2}$$

Cố định $x, y \geqslant 0$. Xét hai dãy (x_n), (y_n) được xác định bởi $x_0 = x$, $y_0 = y$ và

$$x_{n+1} = \frac{x_n y_n}{y_n + 1}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n}{y_n + 1} + y_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Khi đó, dễ thấy $x_n + y_n = x + y$ với mọi n. Phương trình xác định dãy (y_n) có thể được viết lại thành

$$y_{n+1} = \frac{x + y - y_n}{y_n + 1} + y_n.$$

Từ đây, bằng quy nạp, ta dễ dàng chứng minh được $0 \leqslant y_n \leqslant x + y$ với mọi số tự nhiên n. Từ đó suy ra dãy (y_n) không giảm và bị chặn trên bởi $x + y$, do đó tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim y_n = L$. Chuyển phương trình xác định dãy sang giới hạn, ta được $L = x + y$. Vậy $\lim y_n = x + y$, suy ra $\lim x_n = 0$.

Mặt khác, từ phương trình (2), dễ thấy $f(x) + f(y) = f(x_n) + f(y_n)$ với mọi số tự nhiên n. Cho $n \to +\infty$ với chú ý ở tính liên tục của hàm số f, ta được

$$f(x) + f(y) = f(x+y) + f(0), \quad \forall x, y \geqslant 0.$$

Do f liên tục nên từ đây, ta dễ dàng suy ra $f(x) = ax + b$ với mọi $x \geqslant 0$, trong đó a, b là các hằng số thực. Bây giờ, thay $y = -1$ vào phương trình đã cho, ta được

$$f(-x) + f(x-1) = b + f(-1), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Trong phương trình này, cho $x \geqslant 1$, ta được $f(-x) = -ax + a + f(-1)$. Suy ra $f(x) = ax + c$ với mọi $x \leqslant -1$, trong đó $c = a + f(-1)$. Tiếp tục, thay $y = 1$ vào phương trình (1), ta được

$$f(x) = f(2x) - f(x+1) + a + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Dựa vào phương trình (3), ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo n rằng

$$f(x) = ax + c, \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2^n}, -\frac{1}{2^{n+1}}\right]. \tag{4}$$

Xét $x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$, ta có $2x \leqslant -1$ và $x + 1 \geqslant 0$ nên $f(2x) = 2ax + c$ và $f(x+1) = a(x+1) + b$. Từ đó suy ra $f(x) = f(2x) - f(x+1) + a + bax + c$. Vậy khẳng định đúng với $n = 0$.

Bây giờ, giả sử khẳng định đúng đến n ($n \geqslant 0$). Xét $x \in \left[-\frac{1}{2^{n+1}}, -\frac{1}{2^{n+2}}\right]$, ta có $2x \in \left[-\frac{1}{2^n}, -\frac{1}{2^{n+1}}\right]$ và $x+1 \geqslant 0$ nên $f(2x) = 2ax + c$ và $f(x+1) = a(x+1) + b$.

Do đó
$$f(x) = f(2x) - f(x+1) + a + bax + c.$$
Nên khẳng định cũng đúng với $n+1$. Theo nguyên lý quy nạp, khẳng định đúng với mọi n.

Từ (4), ta suy ra $f(x) = ax + c$ với mọi $x \leqslant -\frac{1}{2^{n+1}}$. Cho $n \to +\infty$, ta được $f(x) = ax + c$ với mọi $x < 0$. Vậy $f(x) = ax + b$ với mọi $x \geqslant 0$ và $f(x) = ax + b$ với mọi $x < 0$.

Vì hàm số f liên tục tại mọi điểm nên $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$, tức $b = c$. Vậy $f(x) = ax + b$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn các yêu cầu bài toán. □

Bài toán 3 (Iran, 2018). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*
$$f(x+y)f(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Lời giải. Thay $y = 0$ vào phương trình (1), ta được
$$f(x)f(x^2) = x^3, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$
Từ đó $f(1) = 1$ hoặc $f(1) = -1$. Mặt khác, dễ thấy nếu f là một nghiệm hàm thì $-f$ cũng là một nghiệm hàm. Do đó, không mất tổng quát, ta chỉ cần xét trường hợp $f(1) = 1$ là đủ.

Bây giờ, thay $y = 1 - x$ vào (1), ta được
$$f(3x^2 - 3x + 1) = 3x^2 - 3x + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Vì $3x^2 - 3x + 1$ có thể nhận mọi giá trị trên miền $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$ nên từ kết quả trên, ta suy ra
$$f(x) = x, \quad \forall x \geqslant \frac{1}{4}.$$
Kết hợp với (2), bằng quy nạp, ta dễ dàng chứng minh được $f(x) = x$ với mọi $x \geqslant \frac{1}{4^{2^n}}$ (n tự nhiên). Từ đó, cho $n \to +\infty$, ta được $f(x) = x$ với mọi $x > 0$. Từ đó, kết hợp với (2), ta suy ra $f(x) = x$ với mọi $x \neq 0$. Mặt khác, cũng từ (2), dễ thấy $f(0) = 0$. Do đó $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn các yêu cầu của bài toán.

Tóm lại, có hai hàm số thỏa mãn yêu cầu là $f(x) = x$ và $f(x) = -x$. □

Bài toán 4 (APMO, 2016). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn*
$$(z+1)f(x+y) = f\big(xf(z) + y\big) + f\big(yf(z) + x\big) \tag{1}$$
với mọi số thực dương x, y, z. (Ở đây $\mathbb{R}^+$ được ký hiệu là tập các số thực dương.)

Lời giải. Rõ ràng hàm số đã cho đơn ánh trên $\mathbb{R}^+$. Thay $x = y = z = 1$ vào (1), ta được $f(1) = 1$. Thay $x = y$ vào (1), ta được

$$(z+1)f(2x) = 2f\left(x\big[f(z)+1\big]\right), \quad \forall x, z > 0. \tag{2}$$

Thay $x = \frac{1}{2}$ vào phương trình trên, ta được

$$f\left(\frac{f(z)+1}{2}\right) = \frac{z+1}{2}, \quad \forall z > 0. \tag{3}$$

Suy ra hàm số $f(x)$ toàn ánh trên miền $\left(\frac{1}{2}, +\infty)\right)$. Kết hợp hai phương trình (2) và (3), ta được

$$f\left(x\big[f(z)+1\big]\right) = f(2x)f\left(\frac{f(z)+1}{2}\right), \quad \forall x, z > 0.$$

Vì $\frac{f(z)+1}{2}$ có thể nhận mọi giá trị trên miền $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$ nên từ kết quả trên, ta suy ra

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad \forall x > 0,\ y > \frac{3}{4}.$$

Với mọi số thực dương x, y, tồn tại số thực $z > \frac{3}{4}$ sao cho $yz > \frac{3}{4}$. Sử dụng kết quả trên, ta có

$$\frac{f(xyz)}{f(z)} = \frac{f(xy)f(z)}{f(z)} = f(xy),$$

và

$$\frac{f(xyz)}{f(z)} = \frac{f(x)f(yz)}{f(z)} = \frac{f(x)f(y)f(z)}{f(z)} = f(x)f(y).$$

Do đó $f(xy) = f(x)f(y)$ với mọi $x, y > 0$, hay nói cách khác, hàm f nhân tính. Nói riêng, ta có

$$f(x^2) = \big(f(x)\big)^2, \quad \forall x > 0.$$

Từ đây, bằng quy nạp, ta dễ dàng chứng minh được $f(x)$ có thể nhận mọi giá trị trên miền $\left(\frac{1}{2^{2^n}}, +\infty\right)$ với mọi n tự nhiên. Cho $n \to +\infty$, ta suy ra hàm f toàn ánh trên $\mathbb{R}^+$. Vậy f là một song ánh.

Như vậy, với mọi số thực dương a và b, tồn tại số thực dương z sao cho $f(z) < \min\left\{1, \frac{b}{a}, \frac{a}{b}\right\}$ và do đó tồn tại hai số thực dương x, y sao cho $xf(z) + y = a$, $yf(z) + x = b$ (cụ thể $x = \frac{b - af(z)}{1-\left(f(z)\right)^2}$, $y = \frac{a - bf(z)}{1-\left(f(z)\right)^2}$). Suy ra

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) &= f\big(xf(z)+y\big) + f\big(yf(z)+x\big) = (z+1)f(x+y) \\ &= 2f\left(\frac{f(z)+1}{2}\right) f(x+y) = 2f\left(\frac{\big[f(z)+1\big](x+y)}{2}\right) \\ &= 2f\left(\frac{a+b}{2}\right). \end{aligned}$$

Nói riêng, ta có $2f(2) = f(3) + f(1) = f(3) + 1$ và $2f(3) = f(4) + f(2) = \big(f(2)\big)^2 + f(2)$. Từ đây, với chú ý f song ánh, ta được $f(2) = 2$ và $f(3) = 3$. Và do đó

$$f(a) + f(b) = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{2f(a+b)}{f(2)} = f(a+b), \quad \forall a, b > 0.$$

Suy ra hàm f cộng tính trên $\mathbb{R}^+$. Kết hợp với $f(1) = 1$, ta suy ra $f(x) = x$ với mọi $x > 0$. Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn các yêu cầu của bài toán. $\square$

Bài toán 5 (Korea, 2015). *Cho số nguyên lẻ $n > 1$. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa*

$$f\left(x^n + (f(y))^n\right) = y^n + (f(x))^n, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Lời giải. Đặt $a = f(0)$. Từ giả thiết, ta có

$$f\left(f\left(x^n + (f(y))^n\right)\right) = f\left(y^n + (f(x))^n\right) = x^n + (f(y))^n, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Vì $x^n + (f(y))^n$ có thể nhận mọi giá trị trên $\mathbb{R}$ nên từ đây, ta suy ra

$$f(f(x)) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đây, thay y bởi $f(y)$ vào (1), ta được

$$f(x^n + y^n) = (f(x))^n + (f(y))^n, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Thay $y = 0$ vào (2), ta được $f(x^n) = (f(x))^n + a^n$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Nói riêng, ta có $a = 2a^n$. Phương trình (2) có thể được viết lại thành

$$f(x^n + y^n) = f(x^n) + f(y^n) - 2a^n,$$

hay

$$f(x + y) = f(x) + f(y) - a, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Thay $x = y = a$ vào (3), ta được $f(2a) = 2f(a) - a = 2f(f(0)) - a = -a$. Tiếp tục, thay $x = a$ và $y = -2a$ vào (1), ta được

$$a = f(0) = f\left(a^n + (f(2a))^n\right) = (2a)^n + (f(a))^n = (2a)^n.$$

Kết hợp với $a = 2a^n$, ta dễ dàng suy ra $a = 0$. Từ đó suy ra hàm f cộng tính trên $\mathbb{R}$ và

$$f(x^n) = (f(x))^n, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Từ đây, dễ dàng chứng minh được chỉ có 2 hàm số thỏa mãn là $f(x) = x$ và $f(x) = -x$. $\square$

Bài toán 6. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn*

$$f\left(x + y + \frac{xy}{x+y}\right) = f(x+y) + f(x)\left(\frac{y}{x+y}\right), \tag{1}$$

với mọi số thực dương x, y. (Ở đây $\mathbb{R}^+$ được ký hiệu là tập các số thực dương.)

Lời giải. Đảo vị trí của x và y trong (1) rồi đối chiếu với chính phương trình (1), ta được

$$\frac{f(x)}{f(y)} = \frac{f\left(\frac{x}{x+y}\right)}{f\left(\frac{y}{x+y}\right)}, \quad \forall x, y > 0.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{f(x)}{f(1)} = \frac{f\left(\frac{x}{x+1}\right)}{f\left(\frac{1}{x+1}\right)}, \quad \forall x > 0$$

và

$$\frac{f\left(\frac{xy}{x+y}\right)}{f\left(\frac{y}{x+y}\right)} = \frac{f\left(\frac{\frac{xy}{x+y}}{\frac{xy}{x+y}+\frac{y}{x+y}}\right)}{f\left(\frac{\frac{y}{x+y}}{\frac{xy}{x+y}+\frac{y}{x+y}}\right)} = \frac{f\left(\frac{x}{x+1}\right)}{f\left(\frac{1}{x+1}\right)}, \quad \forall x,\, y > 0.$$

Kết hợp lại, ta được

$$f(x)f\left(\frac{y}{x+y}\right) = f(1)f\left(\frac{xy}{x+y}\right), \quad \forall x,\, y > 0.$$

Từ đó, phương trình (1) có thể được viết lại thành

$$f\left(x+y+\frac{xy}{x+y}\right) = f(x+y) + f\left(\frac{xy}{x+y}\right)f(1), \quad \forall x,\, y > 0.$$

Để ý rằng với mọi số thực dương a, b mà $a \geqslant 4b$, luôn tồn tại hai số thực dương x, y sao cho $x+y=a$ và $\frac{xy}{x+y}=b$. Từ đây, kết hợp với kết quả trên, ta được

$$f(a+b) = f(a) + f(b)f(1), \quad \forall a,\, b > 0 : a \geqslant 4b.$$

Bây giờ, cố định x, $y > 0$. Ta thấy tồn tại số thực dương z sao cho $z > 4(x+y)$. Khi đó, theo kết quả vừa chứng minh, ta có

$$f(z+x+y) = f(z) + f(x+y)f(1)$$

và

$$f(z+x+y) = f(z+x) + f(y)f(1) = f(z) + f(x)f(1) + f(y)f(1).$$

So sánh hai kết quả, ta được

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x,\, y > 0.$$

Suy ra hàm f cộng tính trên $\mathbb{R}^+$. Từ đó $f(x) = kx$ với mọi $x > 0$, trong đó k là hằng số dương nào đó. Thay trở lại phương trình (1), ta được $k = 1$. Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn các yêu cầu của đề bài là $f(x) = x$. □

Bài toán 7 (IMO Shortlist, 2018). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)f(y) = f(xy) + f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

với mọi số thực dương x, y. (Ở đây $\mathbb{R}^+$ được ký hiệu là tập các số thực dương.)

Lời giải. Đặt $f(1) = a$. Thay $x = y$ vào phương trình (1), ta được

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)f(x) = f(x^2) + a, \quad \forall x > 0. \tag{2}$$

Thay y bởi xy^2 vào phương trình (1), ta được

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)f(y^2x)=f(x^2y^2)+f(y^2),\quad \forall x,\,y>0. \tag{3}$$

Thay x bởi y và thay y bởi xy vào phương trình (1), ta được

$$\left(y+\frac{1}{y}\right)f(xy)=f(y^2x)+f(x),\quad \forall x,\,y>0. \tag{4}$$

Kết hợp các kết quả (2), (3) và (4), ta được

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left[\left(y+\frac{1}{y}\right)f(xy)-f(x)\right]=\left(xy+\frac{1}{xy}\right)f(xy)+\left(y+\frac{1}{y}\right)f(y)-2a,$$

hay

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)f(xy)=\left(x+\frac{1}{x}\right)f(x)+\left(y+\frac{1}{y}\right)f(y)-2a,\quad \forall x,\,y>0. \tag{5}$$

Bây giờ, đảo vị trí của x và y trong phương trình (1) rồi cộng kết quả vừa thu được với (1), ta được

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)f(y)+\left(y+\frac{1}{y}\right)f(x)=2f(xy)+f\left(\frac{x}{y}\right)+f\left(\frac{y}{x}\right),\quad \forall x,\,y>0.$$

Mặt khác, bằng cách thay x bởi $\frac{x}{y}$ và thay $y=1$ vào (1), ta cũng có $f\left(\frac{x}{y}\right)+f\left(\frac{y}{x}\right)=a\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$. Do đó, kết hợp với kết quả trên, ta được

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)f(y)+\left(y+\frac{1}{y}\right)f(x)=2f(xy)+a\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right),\quad \forall x,\,y>0.$$

Nhân hai vế của phương trình trên với $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ rồi sử dụng kết quả (5), ta được

$$\begin{aligned}&\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)f(y)+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)f(x)\\&\qquad=2\left(x+\frac{1}{x}\right)f(x)+2\left(y+\frac{1}{y}\right)f(y)-4a+a\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2,\end{aligned}$$

hay

$$\frac{(y^2-1)(y^2-x^2)}{xy^2}f(x)+\frac{(x^2-1)(x^2-y^2)}{x^2y}f(y)=\frac{a(x^2-y^2)^2}{x^2y^2},\quad \forall x,\,y>0.$$

Thay $y=2$ vào phương trình trên, ta được $f(x)=mx+\frac{n}{x}$ với mọi $x>0$, $x\neq 2$, trong đó m, n là các hằng số nào đó. Mặt khác, bằng cách thay $x=2$ vào (2), ta cũng có $f(2)=2m+\frac{n}{2}$. Do đó, ta luôn có $f(x)=mx+\frac{n}{x}$ với mọi $x>0$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn. Vậy các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài có dạng $f(x)=mx+\frac{n}{x}$ với m, n là các hằng số thực. $\square$

Bài toán 8 (Korea, 2020). *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x)+f(y)+f(z)=1$$

với mọi số hữu tỉ dương x, y, z mà $x+y+z+1=4xyz$.

Lời giải. Dễ thấy $x+y+z+1=4xyz$ tương đương với $\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{2y+1}+\frac{1}{2z+1}=1$. Đặt $a=\frac{1}{2x+1}$, $b=\frac{1}{2y+1}$ và $c=\frac{1}{2z+1}$ thì ta có $0<a,\,b,\,c<1$, $a+b+c=1$ và $x=\frac{1-a}{2a}$, $y=\frac{1-b}{2b}$, $z=\frac{1-c}{2c}$. Do đó, giả thiết của bài toán có thể được viết lại thành

$$f\left(\frac{1-a}{2a}\right)+f\left(\frac{1-b}{2b}\right)+f\left(\frac{1-c}{2c}\right)=1$$

với mọi số hữu tỉ dương $a,\,b,\,c$ thỏa mãn $a+b+c=1$.

Đặt $g\left(x-\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1-x}{2x}\right)-\frac{1}{3}$ thì ta có

$$g\left(a-\frac{1}{3}\right)+g\left(b-\frac{1}{3}\right)+g\left(c-\frac{1}{3}\right)=0$$

với mọi số hữu tỉ dương $a,\,b,\,c$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Một cách tương đương, ta có

$$g(x)+g(y)+g(z)=0 \tag{1}$$

với mọi số hữu tỉ $x,\ y,\ z\in\left(-\frac{1}{3},\,\frac{2}{3}\right)$ thỏa mãn $x+y+z=0$.

Bây giờ, thay $x=y=z=0$ vào (1), ta được $g(0)=0$. Lần lượt thay $x,\,y$ bởi $\frac{x+y}{2},\,\frac{x+y}{2}$ vào (1) rồi đối chiếu với chính phương trình (1), ta được

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{g(x)+g(y)}{2} \tag{2}$$

với mọi số hữu tỉ $x,\,y\in\left(-\frac{1}{3},\,\frac{2}{3}\right)$ thỏa mãn $x+y\in\left(-\frac{2}{3},\,\frac{1}{3}\right)$. Nói riêng, phương trình (2) được thỏa mãn với mọi số hữu tỉ $x,\,y\in\left(-\frac{1}{3},\,\frac{1}{6}\right)$.

Đặt $h(x)=g\left(x-\frac{1}{12}\right)-g\left(-\frac{1}{12}\right)$. Khi đó, với mọi số hữu tỉ $x,\ y\in\left(-\frac{1}{4},\,\frac{1}{4}\right)$, ta có $x-\frac{1}{12},\ y-\frac{1}{12}$ cùng thuộc khoảng $\left(-\frac{1}{3},\,\frac{1}{6}\right)$. Do đó, sử dụng kết quả (2), ta được

$$\begin{aligned}h\left(\frac{x+y}{2}\right)&=g\left(\frac{x+y}{2}-\frac{1}{12}\right)-g\left(-\frac{1}{12}\right)=g\left(\frac{x-\frac{1}{12}+y-\frac{1}{12}}{2}\right)-g\left(-\frac{1}{12}\right)\\&=\frac{g\left(x-\frac{1}{12}\right)+g\left(y-\frac{1}{12}\right)}{2}-g\left(-\frac{1}{12}\right)=\frac{h(x)+h(y)}{2}.\end{aligned}$$

Rõ ràng $h(0)=0$ nên từ phương trình trên, ta dễ dàng chứng minh bằng quy nạp để suy ra

$$h(x)=2^n h\left(\frac{x}{2^n}\right) \tag{3}$$

với mọi số hữu tỉ $x\in\left(-\frac{1}{4},\,\frac{1}{4}\right)$ và với mọi số tự nhiên n.

Bây giờ, với mỗi số hữu tỉ x, ta thấy tồn tại các số nguyên dương n sao cho $\frac{x}{2^n}\in\left(-\frac{1}{4},\,\frac{1}{4}\right)$. Ngoài ra, với các số n này thì $2^n h\left(\frac{x}{2^n}\right)$ nhận giá trị duy nhất (theo x). Thật vậy, giả sử tồn tại hai số nguyên dương $m,\,n$ với $m>n$ sao cho $\frac{x}{2^m},\,\frac{x}{2^n}\in\left(-\frac{1}{4},\,\frac{1}{4}\right)$. Khi đó, theo (3), ta có

$$2^n h\left(\frac{x}{2^n}\right)=2^n\cdot 2^{m-n}h\left(\frac{\frac{x}{2^n}}{2^{m-n}}\right)=2^m h\left(\frac{x}{2^m}\right).$$

Từ kết quả này suy ra ta có thể định nghĩa hàm $\lambda : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ được xác định bởi $\lambda(x) = 2^n h\left(\frac{x}{2^n}\right)$, trong đó n là số nguyên dương thỏa mãn $\frac{x}{2^n} \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Hàm $\lambda(x)$ được xác định theo cách này là hàm cộng tính trên $\mathbb{Q}$. Thật vậy, với hai số hữu tỉ x, y cho trước, rõ ràng tồn tại số nguyên dương n sao cho $\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n}, \frac{x+y}{2^n} \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Từ đó, ta có

$$\lambda(x+y) = 2^{n+1}h\left(\frac{x+y}{2^{n+1}}\right) = 2^n\left[h\left(\frac{x}{2^n}\right) + h\left(\frac{y}{2^n}\right)\right] = 2^n h\left(\frac{x}{2^n}\right) + 2^n h\left(\frac{y}{2^n}\right) = \lambda(x) + \lambda(y).$$

Vì $\lambda(x)$ là hàm cộng tính trên $\mathbb{Q}$ nên $\lambda(x) = kx$ với k là hằng số thực nào đó. Từ đó suy ra với mọi số hữu tỉ $x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ thì $h(x) = \lambda(x) = kx$, do đó với mọi số hữu tỉ $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$ thì

$$g(x) = h\left(x + \frac{1}{12}\right) + g\left(-\frac{1}{12}\right) = k\left(x + \frac{1}{12}\right) + g\left(-\frac{1}{12}\right) = kx + \ell,$$

trong đó $\ell = \frac{k}{12} + g\left(-\frac{1}{12}\right)$. Mà $g(0) = 0$ nên $\ell = 0$, suy ra

$$g(x) = kx, \quad \forall x \in \mathbb{Q} : x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right). \tag{4}$$

Bây giờ, trong phương trình (1), xét $x \in \left[\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$ và thay $y = \frac{1}{3} - \varepsilon - x$, $z = -\frac{1}{3} + \varepsilon$ với ε là số hữu tỉ thuộc $\left(0, \frac{2}{3} - x\right)$, ta được

$$g(x) + g\left(\frac{1}{3} - \varepsilon - x\right) + g\left(-\frac{1}{3} + \varepsilon\right) = 0.$$

Với cách chọn ε như trên, ta có $\frac{1}{3} - \varepsilon - x,\ -\frac{1}{3} + \varepsilon \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$. Do đó, theo kết quả (4) thì

$$g\left(\frac{1}{3} - \varepsilon - x\right) + g\left(-\frac{1}{3} + \varepsilon\right) = k\left(\frac{1}{3} - \varepsilon - x\right) + k\left(-\frac{1}{3} + \varepsilon\right) = -kx.$$

Từ đó suy ra $g(x) = kx$ với mọi số hữu tỉ $x \in \left[\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$. Tóm lại, ta có $g(x) = kx$ với mọi số hữu tỉ $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Từ đây suy ra, với mọi số hữu tỉ $x \in (0, 1)$ thì

$$f\left(\frac{1-x}{2x}\right) - \frac{1}{3} = g\left(x - \frac{1}{3}\right) = k\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

Thay x bởi $\frac{1}{2x+1}$, ta được $f(x) = \frac{k}{2x+1} + \frac{1-k}{3}$ với mọi số hữu tỉ dương x. Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn các yêu cầu của bài toán. □

Bài toán 9 (Chinese IMO TST, 2019). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ thỏa mãn*

$$f\left(2xy + \frac{1}{2}\right) + f(x-y) = 4f(x)f(y) + \frac{1}{2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}. \tag{1}$$

Lời giải. Thay $y = 0$ vào (1), ta được $\left[4f(0) - 1\right]f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$ với mọi $x \in \mathbb{Q}$. Nếu $f(0) \neq \frac{1}{4}$ thì ta có $f(x)$ là hàm hằng, tuy nhiên khi thử lại thì không có hàm hằng nào thỏa mãn yêu cầu bài toán. Do đó $f(0) = \frac{1}{4}$. Suy ra $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Bây giờ, trong (1), lần lượt thay x, y bởi $\frac{x}{2}$, $\frac{y}{2}$, ta được

$$f\left(\frac{xy+1}{2}\right)+f\left(\frac{x-y}{2}\right)=4f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{y}{2}\right)+\frac{1}{2},\quad \forall x,\ y\in\mathbb{Q}.$$

Đặt $g(x)=4f\left(\frac{x}{2}\right)$ thì từ phương trình, ta có

$$g(xy+1)+g(x-y)=g(x)g(y)+2,\quad \forall x,\ y\in\mathbb{Q}. \tag{2}$$

Từ cách đặt, dễ thấy $g(0)=1$ và $g(1)=2$. Thay $y=1$ vào (2), ta được

$$g(x+1)+g(x-1)=2g(x)+2,\quad \forall x\in\mathbb{Q}. \tag{3}$$

Từ (3), bằng quy nạp, ta dễ dàng chứng minh được $g(n)=n^2+1$ với mọi số nguyên n. Tiếp theo, ta sẽ chứng minh kết quả sau

$$g(x+n)+g(x-n)=2g(x)+2n^2,\quad \forall n\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{Q}.$$

Ta sử dụng phép quy nạp theo n. Với $n=0$ và $n=1$, khẳng định hiển nhiên đúng. Giả sử khẳng định đúng đến n $(n\geqslant 1)$, lần lượt thay x bởi $x+n$ và $x-n$ vào (3), ta được

$$g(x+n+1)+g(x+n-1)=2g(x+n)+2$$

và

$$g(x-n-1)+g(x-n+1)=2g(x-n)+2.$$

Từ đó suy ra

$$g(x+n+1)+g(x-n-1)+g(x+n-1)+g(x-n+1)=2\big[g(x+n)+g(x-n)\big]+4.$$

Mặt khác, theo giả thiết quy nạp, ta có $g(x+n-1)+g(x-n+1)=2g(x)+(n-1)^2$ và $g(x+n)+g(x-n)=2g(x)+2n^2$. Do đó

$$g(x+n+1)+g(x-n-1)=2g(x)+4n^2-2(n-1)^2+4=2g(x)+2(n+1)^2.$$

Từ đây suy ra khẳng định cũng đúng với $n+1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có khẳng định đúng với mọi n. Bây giờ, lần lượt thay y bởi n và $-n$ (n nguyên dương) vào (2), ta được

$$g(xn+1)+g(x-n)=(n^2+1)g(x)+2$$

và

$$g(-xn+1)+g(x+n)=(n^2+1)g(x)+2.$$

Cộng hai phương trình trên lại và thay $x=\frac{m}{n}$ với m nguyên, ta được

$$\begin{aligned}2(n^2+1)g\left(\frac{m}{n}\right)+4&=g\left(\frac{m}{n}+n\right)+g\left(\frac{m}{n}-n\right)+g(m+1)+g(-m+1)\\&=2g\left(\frac{m}{n}\right)+2n^2+(m+1)^2+1+(m-1)^2+1\\&=2g\left(\frac{m}{n}\right)+2m^2+2n^2+4.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $g\left(\frac{m}{n}\right)=\left(\frac{m}{n}\right)^2+1$. Nói cách khác, ta có $g(x)=x^2+1$ với mọi $x\in\mathbb{Q}$. Suy ra $f(x)=x^2+\frac{1}{4}$ với mọi $x\in\mathbb{Q}$. Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn các yêu cầu của bài toán. $\square$

Bài toán 10 (Iran, 2010). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ thỏa mãn*

$$f\left(y + \frac{x + f(x)}{2}\right) = 2x - f(x) + f\big(f(y)\big) \tag{1}$$

với mọi số thực không âm x, y. (Ở đây $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ được ký hiệu là tập các số thực không âm.)

Lời giải. Trước hết, ta sẽ chứng minh hàm f đơn ánh. Thật vậy, giả sử tồn tại hai số không âm a, b với $a > b$ sao cho $f(a) = f(b)$. Khi đó, từ (1), ta có

$$f\left(y + \frac{a + f(a)}{2}\right) = 2a - f(a) + f\big(f(y)\big)$$

và

$$f\left(y + \frac{b + f(b)}{2}\right) = 2b - f(b) + f\big(f(y)\big).$$

Suy ra

$$f\left(y + \frac{a + f(a)}{2}\right) = f\left(y + \frac{b + f(a)}{2}\right) + 2(a - b), \quad \forall y \geqslant 0.$$

Từ đây, ta có

$$f(y + c) = f(y) + 4c$$

với mọi $y \geqslant \frac{b+f(a)}{2}$, trong đó $c = \frac{a-b}{2} > 0$. Và như thế, bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$f(y + nc) = f(y) + 4nc$$

với mọi $y \geqslant \frac{b+f(a)}{2}$ và mọi $n \in \mathbb{N}$. Bây giờ, thay x bởi $x + 2c$ vào (1) và xét $x, y \geqslant \frac{b+f(a)}{2}$, ta được

$$f\left(y + \frac{x + f(x)}{2} + 5c\right) = 2x - f(x) - 4c + f\big(f(y)\big),$$

hay

$$f\left(y + \frac{x + f(x)}{2}\right) + 20c = 2x - f(x) - 4c + f\big(f(y)\big).$$

Đối chiếu với phương trình (1), ta được $20c = -4c$, mâu thuẫn. Vậy hàm f đơn ánh.

Đặt $d = f(0)$. Thay $x = d$ và $y = 0$ vào phương trình (1), ta được

$$f\left(\frac{d + f(d)}{2}\right) = 2d. \tag{1}$$

Thay $x = 0$ vào phương trình (1), ta được

$$f\left(y + \frac{d}{2}\right) = f\big(f(y)\big) - d, \quad \forall y \geqslant 0. \tag{2}$$

Do đó, phương trình (1) có thể được viết lại thành

$$f\left(y + \frac{x + f(x)}{2}\right) = 2x - f(x) + d + f\left(y + \frac{d}{2}\right), \quad \forall x, y \geqslant 0.$$

Thay $x = \frac{d}{2}$ và $y = 0$ vào phương trình này, ta được

$$f\left(\frac{\frac{d}{2} + f\left(\frac{d}{2}\right)}{2}\right) = 2d. \tag{3}$$

Từ (1) và (3), với chú ý f là hàm đơn ánh, ta suy ra $\frac{d}{2} + f(d) = \frac{d}{2} + f\left(\frac{d}{2}\right)$. Mặt khác, từ (2), ta cũng có $f\left(\frac{d}{2}\right) = f(d) - d$. Do đó $\frac{d}{2} + f(d) = f(d) - d$, hay $d = 0$.

Vì $d = 0$ nên phương trình (2) có thể được viết lại thành $f(y) = f\big(f(y)\big)$ với mọi $y \geqslant 0$. Do f đơn ánh nên từ đây, ta suy ra $f(y) = y$ với mọi $y \geqslant 0$. Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) = x$ thỏa mãn các yêu cầu của bài toán. □

Bài toán 11 (RMM Shortlist, 2019). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f\big(x + yf(x)\big) + f(xy) = f(x) + f(2019y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Lời giải. Xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1: $\boldsymbol{f(0) = 0}$. Thay $x = 0$ vào phương trình (1), ta được $f(2019y) = 0$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Từ đó $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn các yêu cầu của bài toán.

Trường hợp 2: $\boldsymbol{f(2019) \neq 0}$. Thay $x = 2019$ vào phương trình (1), ta được

$$f\big(yf(2019) + 2019\big) = f(2019)$$

với mọi $y \in \mathbb{R}$. Vì $yf(2019) + 2019$ có thể nhận mọi giá trị trên $\mathbb{R}$ nên từ đây ta suy ra $f(x) \equiv C$ với C là hằng số khác 0. Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn các yêu cầu của bài toán.

Trường hợp 3: $\boldsymbol{f(0) \neq 0,\ f(2019) = 0}$.

- Nếu $f(x) = 0$ với mọi $x \neq 0$ thì ta có

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \neq 0 \\ c & \text{nếu } x = 0, \end{cases}$$

  trong đó c là hằng số khác 0. Hàm này thỏa mãn các yêu cầu bài toán.

- Nếu $f(x) \neq 0$ với mọi $x \neq 0$ thì bằng cách thay $y = 1$ vào phương trình (1), ta được

$$f\big(x + f(x)\big) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

  Từ đó $x + f(x) = 2019$, tức $f(x) = 2019 - x$ với mọi số thực x. Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn các yêu cầu bài toán.

- Xét trường hợp tồn tại $a \neq 0$, $b \neq 2019$ sao cho $f(a) \neq 0$ và $f(b) = 0$. Thay $x = b$ vào phương trình (1), ta được $f(by) = f(2019y)$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Từ đó suy ra
$$f(x) = f(kx)$$
với mọi số thực x, trong đó $k = \frac{b}{2019} \neq 1$. Bây giờ, thay x bởi ka và thay y bởi $\frac{y}{f(a)}$ vào phương trình (1), ta được
$$f(y + ka) + f\left(\frac{ay}{f(a)}\right) = f\left(\frac{2019y}{f(a)}\right) + f(a) = f(y + a) + f\left(\frac{ay}{f(a)}\right).$$
Suy ra $f(y + ka) = f(y + a)$ với mọi số thực y. Từ đó, ta có
$$f(x) = f(x + m)$$
với mọi số thực x, trong đó $m = (k - 1)a \neq 0$. Thay x bởi $x + m$ vào phương trình (1), ta được
$$f\big(x + yf(x)\big) + f(xy + my) = f(x) + f(2019y) = f\big(x + yf(x)\big) + f(xy),$$
hay
$$f(xy + my) = f(xy), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$
Bây giờ, thay $x = \frac{mb}{a-b}$ và $y = \frac{a-b}{m}$ vào phương trình trên, ta được $f(a) = f(b)$, mâu thuẫn. Do đó, trường hợp này không xảy ra.

Tóm lại, các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là
$$f(x) = C, \quad f(x) = 2019 - x, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \neq 0 \\ c & \text{nếu } x = 0, \end{cases}$$
trong đó C, c là các hằng số thực và $c \neq 0$. □

Bài toán 12 (IMO, 2011). *Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*
$$f(x + y) \leqslant yf(x) + f\big(f(x)\big) \tag{1}$$
với mọi số thực x, y. Chứng minh rằng $f(x) = 0$ với mọi $x \leqslant 0$.

Lời giải. Đặt $a = f(0)$ và $b = f\big(f(0)\big)$. Từ giả thiết, bằng cách thay $x = 0$ vào (1), ta có
$$f(y) \leqslant ay + b, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$
Từ đó suy ra
$$f(x+y) \leqslant yf(x) + f\big(f(x)\big) \leqslant yf(x) + af(x) + b = (y+a)f(x) + b, \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$
Ta sẽ chứng minh $f(x) \leqslant 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thật vậy, giả sử tồn tại số thực c sao cho $f(c) > 0$. Thay $x = c$ và thay y bởi $y - c$ vào (2), ta được
$$f(y) \leqslant (y - c + a)f(c) + b, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Vì $\lim_{y\to-\infty}\left[(y-c+a)f(c)+b\right]=-\infty$ nên

$$\lim_{y\to-\infty} f(y)=-\infty.$$

Bây giờ, thay $y=c-x$ vào (2), ta được

$$f(c)\leqslant (c-x+a)f(x)+b,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Từ đó $0<f(c)\leqslant \lim_{x\to-\infty}\left[(c-x+a)f(x)+b\right]=-\infty$, mâu thuẫn. Tóm lại, ta có

$$f(x)\leqslant 0,\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Bây giờ, trong bất phương trình (2), thay $y=a-x$, ta được

$$(2a-x)f(x)\geqslant 0,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Từ đó, với mọi $x<2a$ thì $f(x)\geqslant 0$. Kết hợp với (3), ta được $f(x)=0$ với mọi $x<2a$.

Cuối cùng, ta sẽ chứng minh $a=0$. Thật vậy, giả sử $a<0$. Trong (1) cho $x<2a$ và thay y bởi $y-x$, ta được $f(y)\leqslant a$ với mọi $y\in\mathbb{R}$. Nhưng bất đẳng thức này không đúng khi $y<2a$. Do đó $a=0$. Từ đây kết hợp với các kết quả đã thu được, ta có $f(x)=0$ với mọi $x\leqslant 0$. $\square$

Bài toán 13. *Tồn tại không hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f\big(x-f(y)\big)\leqslant yf(x)+x,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}? \tag{1}$$

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn yêu cầu. Đặt $a=f(0)$, khi đó từ (1), dễ thấy

$$f(x)\leqslant x+a,\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Thay x bởi $f(y)$ vào (1) và sử dụng bất đẳng thức trên, ta được

$$a\leqslant yf\big(f(y)\big)+f(y)\leqslant yf\big(f(y)\big)+y+a.$$

Từ đó suy ra

$$y\big[f\big(f(y)\big)+1\big]\geqslant 0,\quad \forall y\in\mathbb{R}.$$

Trong bất phương trình trên, xét $y>0$ và sử dụng kết quả (2), ta được

$$f(y)\geqslant -a-1,\quad \forall y>0. \tag{3}$$

Bây giờ, cố định $x\in\mathbb{R}$ và xét $y<x-a$. Theo kết quả (2), ta có $x-f(y)\geqslant x-(y+a)>0$. Từ đó, theo kết quả (3) thì $f\big(x-f(y)\big)\geqslant -a-1$. Sử dụng đánh giá này, ta được

$$-a-1\leqslant f\big(x-f(y)\big)\leqslant yf(x)+x,\quad \forall y<x-a.$$

Cho $y\to-\infty$, ta suy ra $f(x)\geqslant 0$. Tóm lại, ta luôn có

$$f(x)\leqslant 0,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Nói riêng, ta có $a = f(0) \leqslant 0$. Bây giờ, thay x bởi $x + f(y)$ vào (1) với $x < 0 \leqslant -a$ cố định và $y > 0$, ta được

$$f(x) \leqslant yf\left(x + f(y)\right) + x + f(y) \leqslant y\left(x + f(y) + a\right) + x + f(y) \leqslant y(x + a) + x.$$

Từ đó suy ra

$$y \leqslant \frac{x - f(x)}{-(x + a)}, \quad \forall y > 0.$$

Bất đẳng thức này không thể thỏa mãn khi y nhận giá trị đủ lớn. Vậy không tồn tại hàm số f nào thỏa mãn yêu cầu. □

Bài toán 14 (Japan, 2020). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn*

$$x^2 + \left(f(y)\right)^2 + \left[x - f(y)\right]^2 \geqslant \left(f(x)\right)^2 + y^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Lời giải. Để tiện cho việc trình bày, ta ký hiệu $f_n(x) = f\left(f\left(\ldots f(x)\ldots\right)\right)$ (n lần f). Thay $x = f(y)$ vào (1), ta được

$$2\left(f(y)\right)^2 \geqslant \left(f\left(f(y)\right)\right)^2 + y^2, \quad \forall y \in \mathbb{N}^*. \tag{2}$$

Nếu tồn tại số nguyên dương a sao cho $a > f(a)$ thì từ bất phương trình (2), ta dễ dàng suy ra $f(a) > f\left(f(a)\right)$. Từ đó, bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$a > f(a) > f\left(f(a)\right) > f_3(a) > \cdots$$

Suy ra ở giữa hai số 0 và a có vô số số nguyên dương, mâu thuẫn. Do đó

$$f(x) \geqslant x, \quad \forall x \in \mathbb{N}^*.$$

Cố định x nguyên dương. Ta sẽ chứng minh tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $f_{n_0+1}(x) = f_{n_0}(x)$. Thật vậy, giả sử ngược lại, với mọi số tự nhiên n thì $f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

Thay y bởi $f_n(x)$ vào (2), ta được $2\left(f_{n+1}(x)\right)^2 \geqslant \left(f_{n+2}(x)\right)^2 + \left(f_n(x)\right)^2$, hay

$$\left[f_{n+1}(x) - f_n(x)\right]\left[f_{n+1}(x) + f_n(x)\right] \geqslant \left[f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)\right]\left[f_{n+2}(x) + f_{n+1}(x)\right].$$

Do $\left[f_{n+1}(x) - f_n(x)\right]\left[f_{n+1}(x) + f_n(x)\right] < \left[f_{n+1}(x) - f_n(x)\right]\left[f_{n+2}(x) + f_{n+1}(x)\right]$ nên từ bất phương trình trên, ta suy ra

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) > f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Từ kết quả này, ta có

$$f(x) - x > f_2(x) - f(x) > f_3(x) - f_2(x) > \cdots \geqslant 0.$$

Suy ra ở giữa 0 và $f(x) - x$ có vô số số nguyên dương, mâu thuẫn. Vậy phải tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $f_{n_0+1}(x) = f_{n_0}(x)$. Bây giờ, trong (1), thay x bởi $f_{n_0-1}(x)$ và thay y bởi $f_{n_0}(x)$, ta được

$$\left(f_{n_0-1}(x)\right)^2 + \left(f_{n_0}(x)\right)^2 + \left[f_{n_0-1}(x) - f_{n_0}(x)\right]^2 \geqslant 2\left(f_{n_0}(x)\right)^2,$$

hay

$$2f_{n_0-1}(x)\left[f_{n_0-1}(x) - f_{n_0}(x)\right] \geqslant 0.$$

Từ đó suy ra $f_{n_0-1}(x) \geqslant f_{n_0}(x)$. Mà $f_{n_0}(x) \geqslant f_{n_0-1}(x)$ nên ta cũng có $f_{n_0-1}(x) = f_{n_0}(x)$. Cứ như vậy, ta chứng minh được $f(x) = x$ với mỗi số nguyên dương x cố định. Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) = x$ thỏa mãn các yêu cầu bài toán. □

Bài toán 15 (Iranian IMO TST, 2017). *Đặt $\mathbb{R}^+$ là tập các số thực dương. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau với mọi số thực dương x, y, z :*

- $f\big(f(x, y), z\big) = x^2 y^2 f(x, z).$ (1)
- $f\big(x, 1 + f(x, y)\big) \geqslant x^2 + xyf(x, x).$ (2)

Lời giải. Thay $y = z = 1$ vào (1), ta được

$$f\left(f(x, 1), 1\right) = x^2 f(x, 1), \quad \forall x > 0. \tag{3}$$

Từ đây, dễ dàng suy ra hàm số $f(x, 1)$ đơn ánh trên $\mathbb{R}^+$. Từ đó, với chú ý $f\big(f(1, 1), 1\big) = f(1, 1)$, ta suy ra $f(1, 1) = 1$. Thay $x = z = 1$ vào (1), ta được

$$f\left(f(1, y), 1\right) = y^2, \quad \forall y > 0. \tag{4}$$

Suy ra hàm số $f(x, 1)$ có thể nhận mọi giá trị trên $\mathbb{R}^+$. Tóm lại, hàm số $f(x, 1)$ là song ánh trên $\mathbb{R}^+$.

Từ (4), ta cũng suy ra hàm số $f(1, x)$ đơn ánh trên $\mathbb{R}^+$. Mặt khác, vì hàm số $f(x, 1)$ là song ánh trên $\mathbb{R}^+$ nên ứng với mỗi số dương x đều tồn tại số dương y sao cho $y^2 = f(x, 1)$. Kết hợp với (4), ta được $f\left(f(1, y), 1\right) = f(x, 1)$, tức $f(1, y) = x$. Suy ra hàm số $f(1, x)$ cũng là toàn ánh trên $\mathbb{R}^+$. Tóm lại, hàm số $f(1, x)$ là một song ánh trên $\mathbb{R}^+$.

Bây giờ, thay $x = 1$ vào (1), ta được

$$f\big(f(1, y), z\big) = y^2 f(1, z) = f\big(f(1, y), 1\big) f(1, z).$$

Vì hàm số $f(1, y)$ là song ánh trên $\mathbb{R}^+$ nên từ đây, ta có

$$f(x, y) = f(x, 1) f(1, y), \quad \forall x, y > 0. \tag{5}$$

Đặt $g(x) = f(x, 1)$ và $h(y) = f(1, y)$ thì từ (5), ta có $f(x, y) = g(x)h(y)$. Các giả thiết (1) và (2) có thể được viết lại thành

$$g\big(g(x)h(y)\big) = x^2 y^2 g(x), \quad \forall x, y > 0 \tag{1'}$$

và

$$g(x)h\big(1 + g(x)h(y)\big) \geqslant x^2 + xyg(x)h(x), \quad \forall x, y > 0. \tag{2'}$$

Rõ ràng $g(1) = h(1) = 1$ nên từ (1′), ta có $g\big(g(x)\big) = x^2 g(x)$ và $g\big(h(y)\big) = y^2$. Do đó, phương trình (1′) có thể được viết lại thành $g\big(g(x)h(y)\big) = g\big(g(x)\big) g\big(h(y)\big)$. Vì $g(x), h(y)$ là các hàm song ánh trên $\mathbb{R}^+$ nên từ đây, ta suy ra g là hàm nhân tính trên $\mathbb{R}^+$.

Với chú ý $x^2 y^2 = g\big(h(xy)\big)$, từ (1′), ta có

$$g\big(g(x)h(y)\big) = g\big(h(xy)\big) g(x) = g\big(xh(xy)\big).$$

Cho $y = 1$, ta được $g(x) = xh(x)$ với mọi $x > 0$. Từ đây, dễ thấy $h(x)$ cũng là hàm nhân tính trên $\mathbb{R}^+$. Ngoài ra, giả thiết $(2')$ có thể được viết lại thành

$$h(x)h\big(1 + xh(xy)\big) \geqslant x + xy\big(h(x)\big)^2, \quad \forall x,\ y > 0,$$

hay

$$h(x)h\big(1 + xh(y)\big) \geqslant x + y\big(h(x)\big)^2, \quad \forall x,\ y > 0. \tag{2''}$$

Bây giờ, thay $x = \frac{1}{h(y)}$ vào phương trình $(2'')$ với chú ý $h\left(\frac{1}{h(y)}\right) = \frac{1}{h\big(h(y)\big)} = \frac{h(y)}{y^2}$ (do $g\big(h(y)\big) = y^2$ nên $h(y)h\big(h(y)\big) = y^2$), ta được

$$\frac{h(y)h(2)}{y^2} \geqslant \frac{1}{h(y)} + \frac{\big(h(y)\big)^2}{y^3},$$

hay

$$h(2) \geqslant \frac{y^2}{\big(h(y)\big)^2} + \frac{h(y)}{y}.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $\frac{y^2}{\big(h(y)\big)^2} + \frac{h(y)}{y} \geqslant 2\sqrt{\frac{y}{h(y)}}$. Do đó, từ bất đẳng thức trên, ta suy ra tồn tại hằng số $k > 0$ sao cho $h(y) \geqslant ky$ với mọi $y > 0$.

Vì $h(x)$ là hàm nhân tính nên ta có $h(x^n) = \big(h(x)\big)^n$ với mọi n nguyên dương. Do $h(x^n) \geqslant kx^n$ nên $h(x) \geqslant \sqrt[n]{k}x$ với mọi n nguyên dương. Cho $n \to +\infty$, ta được $h(x) \geqslant x$ với mọi $x > 0$. Từ đây, kết hợp với $h(x)h\big(h(x)\big) = x^2$, ta dễ dàng suy ra $h(x) = x$ với mọi $x > 0$. Từ đó $g(x) = xh(x) = x^2$ với mọi $x > 0$. Vậy $f(x,\ y) = g(x)h(y) = x^2y$ với mọi $x,\ y > 0$. Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn các yêu cầu của bài toán. □

1. Bài tập tự luyện

Bài tập 1 (GQMO, 2020). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ thỏa mãn*

$$f(x)f(y+1) = f\big(xf(y)\big) + f(x), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{Q}.$$

Bài tập 2. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$\big(f(x+y)\big)^2 = \big(f(x)\big)^2 + \big(f(y)\big)^2 + xf(y) + yf(x), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 3 (Taiwan IMO TST, 2019). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f\big(xf(y) - f(x) - y\big) = yf(x) - f(y) - x, \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 4. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x-2y) + f\big(x + f(y)\big) = x + f\big(f(x) - y\big), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 5 (Tuymaada, 2003). *Tìm tất cả các hàm số liên tục* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)+f\left(y+\frac{1}{y}\right)=f\left(x+\frac{1}{y}\right)+f\left(y+\frac{1}{x}\right), \quad \forall x,\ y>0.$$

Bài tập 6 (RMM Shortlist, 2016). *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *thỏa mãn*

$$f(a+b)=f(a)+f(b)+f(c)+f(d)$$

với mọi số tự nhiên a, b, c, d *sao cho* $2ab = c^2 + d^2$.

Bài tập 7 (IMO Shortlist, 2013). *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ *thỏa mãn*

$$f\left(\frac{f(x)+a}{b}\right)=f\left(\frac{x+a}{b}\right), \quad \forall x \in \mathbb{Q},\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^+.$$

Bài tập 8 (USAMO, 2018). *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *thỏa mãn*

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)+f\left(y+\frac{1}{y}\right)+f\left(z+\frac{1}{z}\right)=1$$

với mọi số thực dương x, y, z *mà* $xyz = 1$. *(Ở đây* $\mathbb{R}^+$ *được ký hiệu là tập các số thực dương.)*

Bài tập 9. *Tìm tất cả các hàm liên tục* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f(x+y)+f(xy)=f(x)+f(y)+f(xy+1), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 10 (IMO Shortlist, 2000). *Tìm tất cả các cặp hàm số* $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f\big(x+g(y)\big)=xf(y)-yf(x)+g(x), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 11. *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn* $f(0) \geqslant 0$ *và*

$$f(x+y) \geqslant f(x)+yf\big(f(x)\big), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 12 (IMAR, 2008). *Ký hiệu* $\mathbb{R}^+$ *là tập các số thực dương. Chứng minh rằng với mọi hàm số* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, *luôn tại cặp số dương* $(x,\ y)$ *sao cho*

$$f(x+y) < yf\big(f(x)\big).$$

Bài tập 13 (Iran, 2019). *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sao cho với mọi số thực* a, b, c, *nếu*

$$a+f(b)+f\big(f(c)\big)=0,$$

thì

$$\big(f(a)\big)^3+b\big(f(b)\big)^2+c^2f(c)=3abc.$$

Bài tập 14 (Turkish IMO TST, 2011). *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ *thỏa mãn*

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right)=\frac{f(x)}{x+1}, \quad f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{f(x)}{x^3}, \quad \forall x \in \mathbb{Q}^+.$$

KHÁM PHÁ TỪ MỘT BÀI TOÁN HAY

Nguyễn Duy Phước
(Trường Trung học phổ thông Chuyên Quốc Học – Huế)

TÓM TẮT

Bài viết này là kết quả của những khám phá, mở rộng mà tác giả đã khai thác được từ một bài toán có cấu hình đơn giản. Qua đó, xin chia sẻ với bạn đọc một cách học toán, đặc biệt là với phân môn hình học của bản thân tác giả theo hướng khai thác bài toán ban đầu để hiểu thêm về bài toán đó. Cụ thể ta đi đến nội dung bài toán sau.

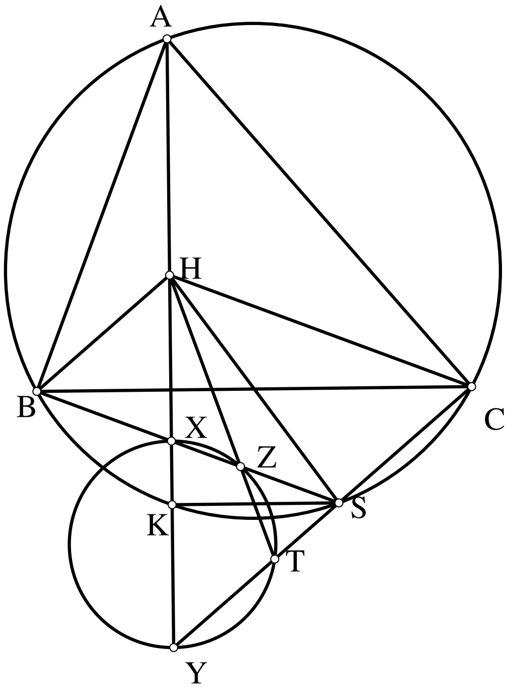
1. Bài toán mở đầu

BÀI TOÁN 1. Cho tam giác ABC. Đường thẳng qua B, C lần lượt vuông góc với AB, AC theo thứ tự cắt đường thẳng qua A vuông góc với BC tại X, Y. Đường tròn đường kính XY lần lượt cắt BX, CY lần thứ hai tại Z, T. Chứng minh rằng ZT đi qua trực tâm của tam giác ABC.

LỜI GIẢI.

CÁCH 1. Gọi S là giao điểm của BX và CY, K là hình chiếu của S lên XY, H là trực tâm của tam giác ABC.

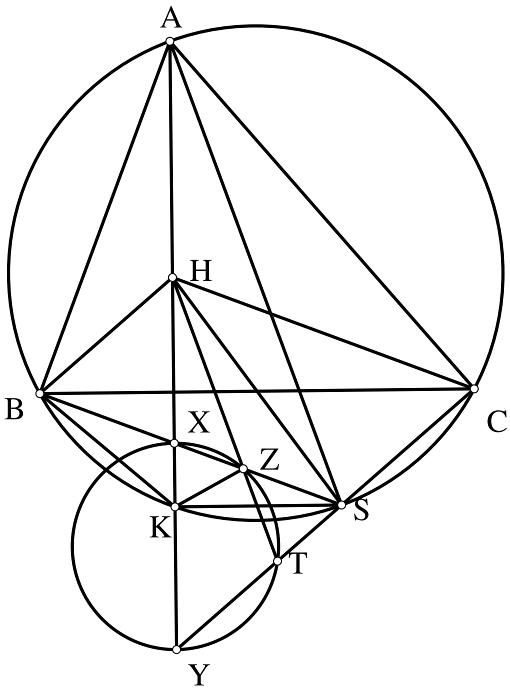
Ta có $\angle AKS = \angle ABS = \angle C = 90^\circ$ nên năm điểm A, B, C, K, S cùng nằm trên đường tròn đường kính AS. Từ đó, dễ thấy tứ giác $BHCS$ là hình bình hành. Nên SH chia đôi BC. Mặt khác $SK \perp XY, XY \perp BC$, suy ra $SK \parallel BC$.
Do đó $S(KH, BC) = -1$, suy ra $S(KH, XY) = -1$ nên $(KH, XY) = -1$.
Dễ thấy SK, YZ, XT là các đường cao của tam giác SXY nên SK, YZ, XT đồng quy. Lại có $(KH, XY) = -1$. Vậy ba điểm Z, T, H thẳng hàng.



CÁCH 2. Ta kí hiệu các điểm tương tự như ở cách 1.
Ta có $\angle SKY = \angle SZY = 90^\circ$ nên tứ giác $SZKY$ nội tiếp suy ra $\angle BZK = \angle KYS$. Vì $BH \perp CA, CY \perp CA$ nên $BH \parallel CY$ do đó $\angle KYS = \angle HYC = \angle BHY = \angle BHK$.
Dẫn đến $\angle BZK = \angle BHK$. Suy ra tứ giác $BHZK$ là tứ giác nội tiếp. Nên ta có biến đổi góc

$$\angle KHZ = \angle KBZ = \angle KBS = \angle KAS$$

Vì vậy $HZ \parallel AS$. Chứng minh tương tự, ta được $HT \parallel AS$. Vậy ba điểm Z, T, H thẳng hàng.



Nhận xét 1. Từ hai cách chứng minh trên, ta rút ra được hai hệ quả sau: $(KH, XY) = -1$ và ba điểm Z, T, H cùng nằm trên đường thẳng song song với AS. Tuy hai hệ này khá đơn giản nhưng nó đóng vai trò khá quan trọng cho những bài toán tiếp theo.

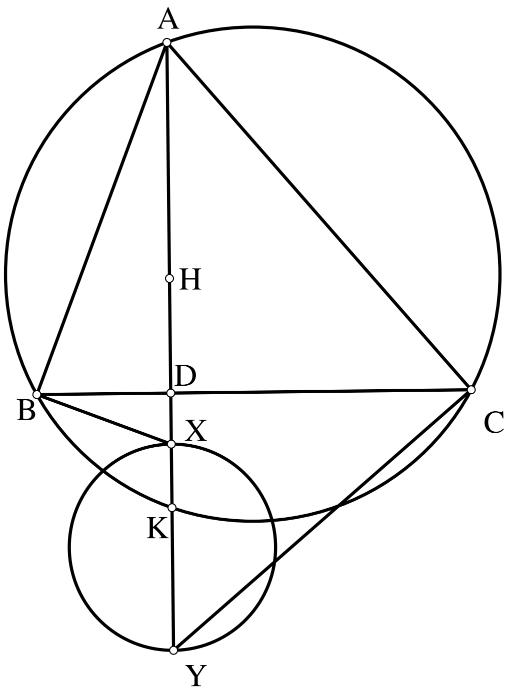
Tiếp theo sẽ là những vấn đề được khai thác đến bài toán 1 này.

2. Một số bài toán

Bài toán 2. Cho tam giác ABC, H là trực tâm. Đường thẳng qua B, C lần lượt vuông góc với AB, AC theo thứ tự cắt AH tại X, Y. Chứng minh rằng BC là trục đẳng phương của đường tròn đường kính XY và đường tròn $(H; 0)$.

Lời giải. Gọi D là giao điểm của AH và BC, K là giao điểm thứ hai của AH và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó, ta có kết quả quen thuộc H và K đối xứng nhau qua BC hay D là trung điểm của HK.
Theo cách 1 ở bài toán 1, ta đã chứng minh được $(HK, XY) = -1$. Lại có D là trung điểm của HK nên $DH^2 = \overline{DX}.\overline{DY}$ (hệ thức Newton), suy ra phương tích từ D đến đường tròn đường kính XY bằng phương tích từ D đến đường tròn $(H; 0)$. Do đó trục đẳng phương của đường

tròn đường kính XY và đường tròn $(H;0)$ đi qua điểm D.
Ta nhận thấy tâm của đường tròn đường kính XY chính là trung điểm của XY, BC đi qua D và $BC \perp XY$.
Vậy BC là trục đẳng phương của đường tròn đường kínhXY và đường tròn $(H;0)$.



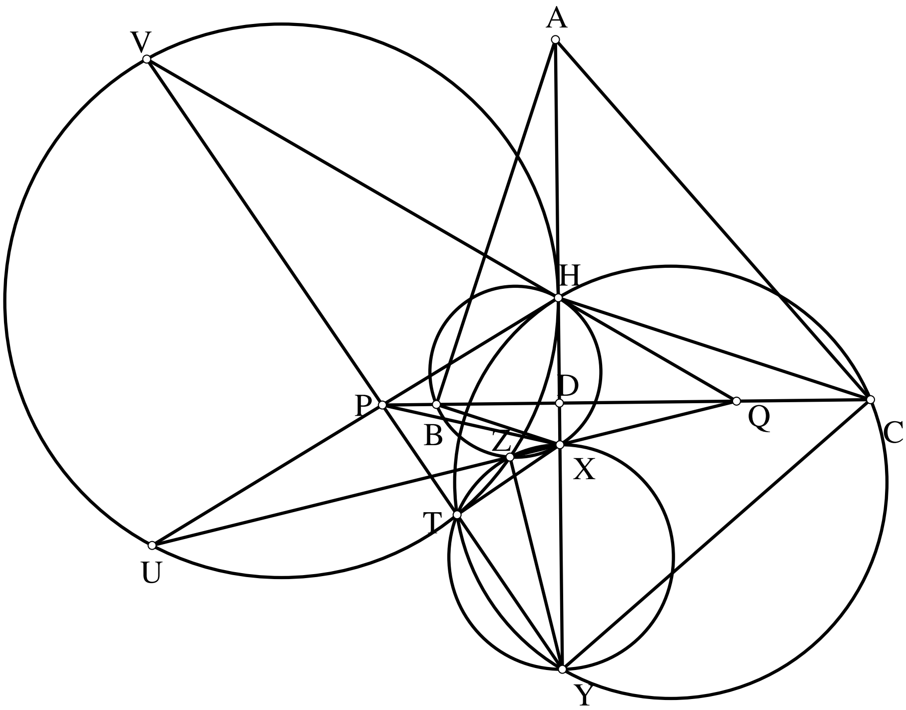
BÀI TOÁN 3. Cho tam giác ABC, trực tâm H. Đường thẳng qua B, C lần lượt vuông góc với AB, AC theo thứ tự cắt AH tại X, Y. Đường tròn đường kính XY lần lượt cắt đường tròn (BHX), (CHY) lần thứ hai tại Z, T. ZX, TY lần lượt cắt BC tại Q, P. Gọi U là giao điểm của HP và ZX, V là giao điểm của TY và HQ.

a) Chứng minh rằng bốn điểm Z, T, U, V cùng nằm trên một đường tròn. Gọi đường tròn đó là (ω).

b) Chứng minh rằng đường tròn (ω) tiếp xúc với AH.

LỜI GIẢI. a) Theo bài toán 2 thì BC là trục đẳng phương của đường tròn đường kính XY và đường tròn $(H;0)$. Suy ra $PH^2 = \overline{PT}.\overline{PY}$. Do đó PH là tiếp tuyến của đường tròn (CHY). Nên $\angle UHT = \angle PHT = \angle HYT = \angle XYT = \angle UZT$ suy ra bốn điểm H, U, Z, T cùng nằm trên một đường tròn. Chứng minh tương tự, ta được bốn điểm H, V, Z, T cùng nằm trên một

đường tròn.
Vậy năm điểm H, Z, T, U, V cùng nằm trên một đường tròn (ω).



b) Gọi D là giao điểm của AH và BC. Khi đó theo cách chứng minh ở bài toán 2 thì $DH^2 = \overline{DX}.\overline{DY}$. Ta sẽ chứng minh ba điểm Z, T, D thẳng hàng.
Ta đã có PH, QH lần lượt là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CHY, BHX. Suy ra $\angle QHD = \angle QHX = \angle HBX, \angle PHD = \angle PHY = \angle HCY$. Mặt khác do $BH \parallel CY$ (do cùng vuông góc với AC), $CH \parallel BX$ (do cùng vuông góc với AB) và ba điểm H, X, Y thẳng hàng nên $\angle HBX = \angle HCY$. Do đó $\angle QHD = \angle PHD$ nên HD là tia phân giác của góc PHQ. Lại có $HD \perp PQ \equiv BC$.
Vì vậy HD là đường trung trực của PQ hay P là điểm đối xứng với Q qua HD dẫn đến $\angle DQX = \angle DPX$.
Ta có $\angle PTX = 180^\circ - \angle XTY = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ = \angle PDX$ nên tứ giác $PDTX$ nội tiếp, $\angle YZQ = \angle YZX = 90^\circ = \angle YDQ$ nên tứ giác $YZDQ$ nội tiếp. Suy ra ta có biến đổi góc

$$\angle ZTX = \angle ZYX = \angle ZYD = \angle ZQD = \angle XQD = \angle XPD = \angle DTX$$

Vì thế, ba điểm Z, T, D thẳng hàng. Do đó $DZ.DT = DX.DY = DH^2$.Vậy đường tròn $(\omega) \equiv (HZT)$ tiếp xúc với DH hay (ω) tiếp xúc với AH.

Nhận xét 2. Chúng ta có thể chứng minh $UV \parallel DH$ bằng cách sử dụng bổ đề Reim vào đường tròn (ω) và đường tròn đường kính XY (khi đó $UV \parallel XY \equiv DH$). Sau đó, sử dụng yếu tố P và Q là hai điểm đối xứng với nhau qua DH thì bằng biến đổi góc đơn giản thì ta cũng chỉ ra được $(\omega) \equiv (HUV)$ tiếp xúc với $DH \equiv AH$.

BÀI TOÁN 4. Cho tam giác ABC. Gọi D là hình chiếu của A lên BC. Đường thẳng qua B, C lần lượt vuông góc với AB, AC theo thứ tự cắt AD tại X, Y. BX, CY lần lượt cắt lại đường tròn đường kính XY tại E, F. $(BEC), (BFC)$ lần lượt cắt đường tròn đường kính XY tại các điểm thứ hai là U, V.

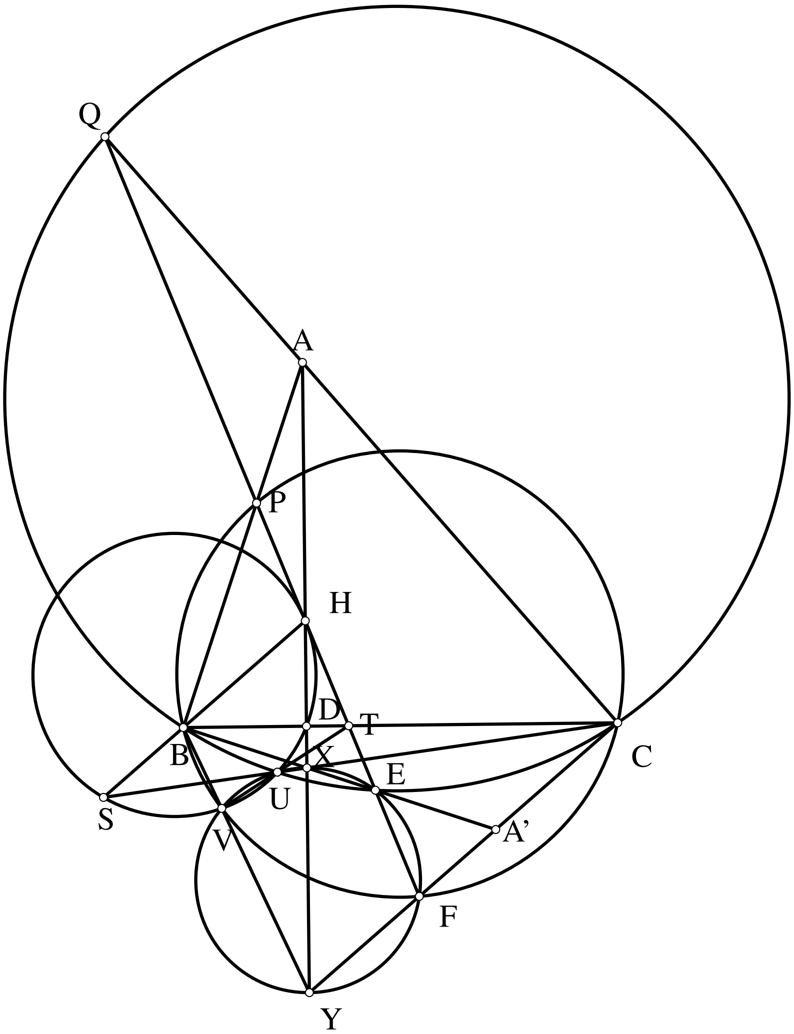
a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác UVD đi qua trực tâm của tam giác ABC.

b) (BEC) cắt AC tại Q khác C, (BFC) cắt AB tại P khác B. Chứng minh rằng PQ tiếp xúc với đường tròn (UVD).

LỜI GIẢI. a) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, S là giao điểm của BH và CX. Trước tiên, ta sẽ chứng minh ba điểm U, X, C thẳng hàng; ba điểm B, V, Y thẳng hàng. Gọi U' là giao điểm thứ hai của CX và đường tròn đường kính XY. Ta có

$$\angle YU'C = \angle YU'X = 90^\circ = \angle YDC, \angle YEB = \angle YEX = 90^\circ = \angle YDB$$

Suy ra các tứ giác $YU'DC$, $YEDB$ nội tiếp. Do đó $XU'.XC = XD.XY = XE.XB$. Vì thế tứ giác $BU'EC$ nội tiếp suy ra $U \equiv U'$ hay ba điểm C, X, U thẳng hàng. Chứng minh tương tự, ta được ba điểm B, V, Y thẳng hàng.
Ta đã có tứ giác $YUDC$ nội tiếp nên $\angle UDY = \angle UCY$. Mặt khác $BH \parallel CY$ (do cùng vuông góc với AC) nên $\angle HSU = \angle UCY$. Do đó $\angle UDY = \angle HSU$. Khi đó tứ giác $SHDU$ nội tiếp. Theo bài toán 2 thì BC là trục đẳng phương của đường tròn đường kính (XY) và đường tròn $(H; 0)$. Suy ra $BH^2 = BV.BY$ vì thế ta dễ dàng chứng minh được hai tam giác BHV và BYH đồng dạng theo trường hợp c - g - c. Do đó $\angle SHV = \angle BHV = \angle BYH = \angle VYX = \angle SUV$ nên tứ giác $HSUV$ nội tiếp.
Vậy năm điểm S, H, V, U, D đồng viên hay (UVD) đi qua H.



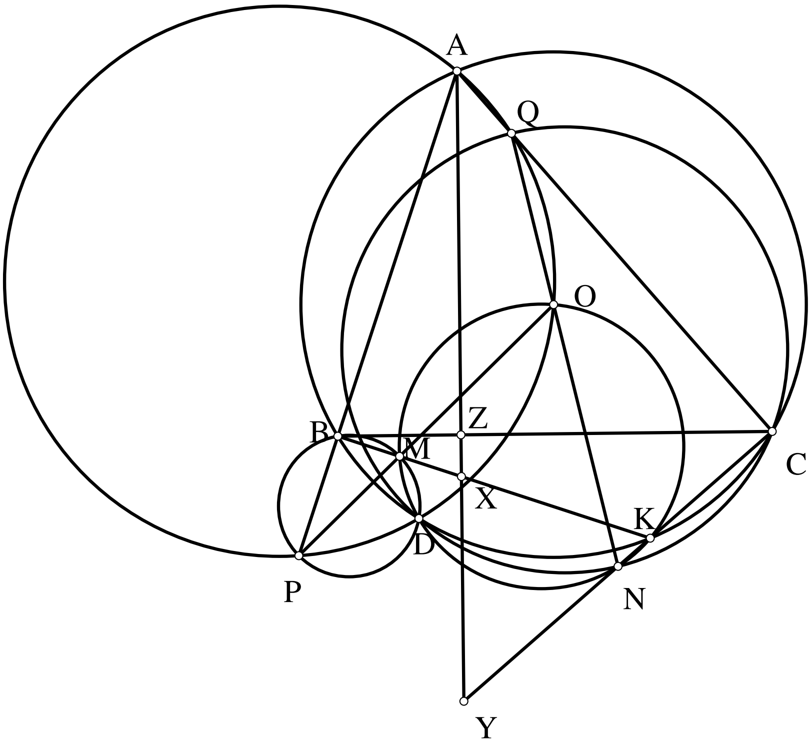
b) Gọi A' là giao điểm của BX và CY. Theo bài toán 1 thì ba điểm H, E, F thẳng hàng và ba điểm H, E, F cùng nằm trên đường thẳng song song với AA'. Dễ thấy AA' là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Ta có biến đổi góc: $\angle BPF = \angle BCF = \angle BCA' = \angle BAA'$ suy ra $PF \parallel AA'$. Lại có cát tuyến $\overline{HEF} \parallel AA'$. Suy ra bốn điểm P, H, E, F thẳng hàng. Chứng minh tương tự, ta được bốn điểm Q, H, E, F thẳng hàng.
Gọi T là giao điểm của UV và EF. Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm U, E, Y, F, V, X với chú ý $UV \cap EF = T, EX \cap VY = B, UX \cap FY = C$ ta có ba điểm B, T, C thẳng hàng.
Theo bài toán 2 thì BC là trục đẳng phương của đường tròn (XY) và đường tròn $(H; 0)$. Khi đó, ta được $TH^2 = TU.TV$. Vậy TH là tiếp tuyến của đường tròn $(HUV) \equiv (UVD)$ hay PQ tiếp xúc với (UVD) tại H.

BÀI TOÁN 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường thẳng qua B, C lần lượt vuông góc với AB, AC theo thứ tự cắt đường thẳng qua A vuông góc với BC tại X, Y. M, N lần lượt là trung điểm của BX, CY. OM, ON lần lượt cắt AB, AC tại P, Q.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, P, Q, O cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh rằng các đường tròn $(O), (APQ), (PM), (QN)$ và (OMN) cùng đi qua một điểm.

LỜI GIẢI. a) Gọi Z là hình chiếu vuông góc của A lên BC, K là giao điểm của BX và CY. Dễ thấy AK là đường kính của đường tròn (O), Z thuộc đường tròn đường kính BX và đường tròn đường kính CY. Gọi D là giao điểm thứ hai của đường tròn đường kính BX và đường tròn đường kính CY.
Ta có $\angle BDC = \angle BDZ + \angle ZDC = \angle BXZ + \angle ZYC = \angle KXY + \angle XYK = 180° - \angle XKY = \angle BKC$. Suy ra D nằm trên đường tròn $(KBC) \equiv (O)$.
Dễ thấy $MB = MD, OB = OD$ suy ra OM là đường trung trực của BD hay B và D đối xứng nhau qua OM. Suy ra $\angle MOD = \frac{\angle BOD}{2} = \angle BKD = \angle MKD$ nên tứ giác $OMDK$ nội tiếp hay M thuộc đường tròn (OKD). Chứng minh tương tự, ta được N nằm trên đường tròn (OKD).
Từ đó suy ra $\angle POQ = 180° - \angle MON = 180° - \angle MKN = \angle BKC = 180° - \angle BAC = 180° - \angle PAQ$. Vậy bốn điểm A, P, Q, O cùng nằm trên một đường tròn.



b) Ta đã chứng minh được B và D đối xứng nhau qua OM. Mặt khác $\angle MBP = 90^\circ$ suy ra $\angle MDP = 90^\circ$ nên D thuộc đường tròn đường kính PM. Chứng minh tương tự, ta được D thuộc đường tròn đường kính QN. Ta có biến đổi góc

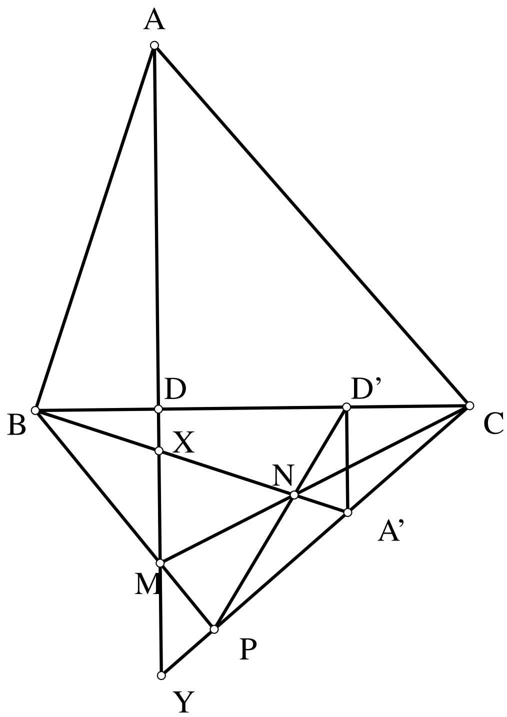
$$\angle APD = \angle BPD = 2\angle MPD = 2\angle MBD = 2\angle KBD = 2\angle KAD = 2(90^\circ - \angle AKD) = 180^\circ - 2\angle AKD = 180^\circ - \angle AOD$$

Do đó tứ giác $APDO$ nội tiếp hay D nằm trên đường tròn $(APO) \equiv (APQ)$. Vậy các đường tròn $(O), (APQ), (PM), (QN)$ và (OMN) cùng đi qua điểm D.

Nhận xét 3. Từ bài toán này, chúng ta có thể chứng minh được trực tâm của tam giác OMN nằm trên BC. Lúc này, đường thẳng đi qua B và C chính là đường thẳng Steiner của tam giác OMN ứng với điểm D.

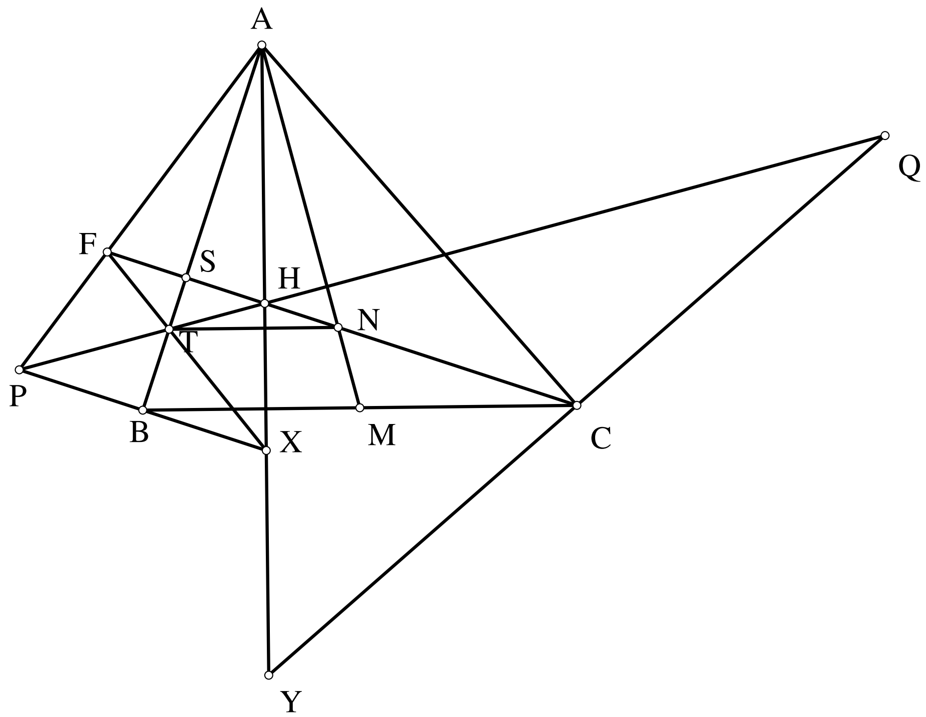
Bài toán 6. Cho tam giác ABC, D là chân đường cao hạ từ A xuống BC, D' là điểm đối xứng với D qua trung điểm của BC. Đường thẳng qua B, C lần lượt vuông góc với AB, AC theo thứ tự cắt AD tại X, Y. Gọi M là trung điểm của XY. Gọi N là giao điểm của BX và CM, P là giao điểm của BM và CY. Chứng minh rằng ba điểm N, P, D' thẳng hàng.

LỜI GIẢI. Gọi A' là giao điểm của BX và CY. Dễ thấy AA' là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Vì D' là điểm đối xứng với D qua trung điểm của BC, AA' là đường kính của (ABC) nên $A'D' \perp BC$. Mặt khác $XY \perp BC$. Suy ra $XY \parallel A'D'$. Lại có M là trung điểm của XY. Do đó $A'(D'M, XY) = -1$ suy ra $A'(D'M, BC) = -1$. Từ đó, dễ dàng chỉ ra được BA', CM và PD' đồng quy. Mà N là giao điểm của BA', CM. Vậy ba điểm N, P, D' thẳng hàng.



BÀI TOÁN 7. Cho tam giác ABC. Đường thẳng qua B, C lần lượt vuông góc với AB, AC theo thứ tự cắt đường thẳng qua A vuông góc với BC tại X, Y. Gọi P là điểm đối xứng với X qua AB, Q là điểm đối xứng với Y qua AC. Chứng minh rằng PQ đi qua trực tâm của tam giác ABC.

LỜI GIẢI. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, F là điểm đối xứng với H qua AB, M là trung điểm của BC, AM cắt CH tại N, S là giao điểm của CH và AB.
Vì F là điểm đối xứng với H qua AB nên ba điểm F, H, C thẳng hàng. Lại có P đối xứng với X qua AB nên theo tính chất đối xứng trục thì ba điểm A, F, P thẳng hàng và AB, PH, XF đồng quy tại T. Ta cũng có B là trung điểm của PX.



Áp dụng định lý Menelaus vào tam giác ABM với ba điểm S, N, C thẳng hàng

$$\frac{SA}{SB} \cdot \frac{NM}{NA} \cdot \frac{CB}{CM} = 1$$

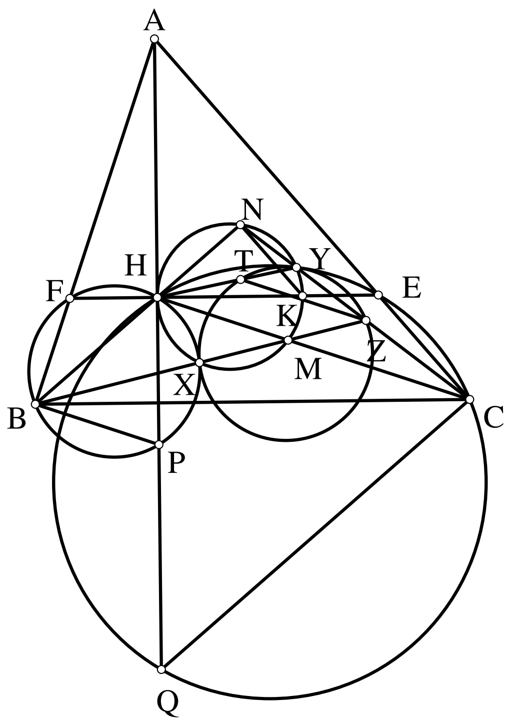
Tương đương $\frac{NM}{NA} = \frac{CM}{CB} \cdot \frac{SB}{SA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{HX}{HA}$.
Áp dụng định lý Menelaus vào tam giác ABX với ba điểm P, T, H thẳng hàng

$$\frac{TB}{TA} \cdot \frac{HA}{HX} \cdot \frac{PX}{PB} = 1$$

Tương đương $\frac{TB}{TA} = \frac{HX}{HA} \cdot \frac{PB}{PX} = \frac{1}{2} \cdot \frac{HX}{HA}$.
Suy ra $\frac{NM}{NA} = \frac{TB}{TA} (= \frac{1}{2} \cdot \frac{HX}{HA})$. Do đó $TN \parallel BM$. Mặt khác $AH \perp BM$. Nên $AH \perp TN$, ta cũng có $NH \perp AT$. Vì thế H là trực tâm của tam giác ATN. Như vậy $TH \perp AN$ hay $PH \perp AM$. Chứng minh tương tự, ta được $QH \perp AM$.
Vậy ba điểm P, H, Q cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc AM.

BÀI TOÁN 8. Cho tam giác ABC, H là trực tâm. Đường thẳng qua B, C lần lượt vuông góc với AB, AC theo thứ tự cắt AH tại P, Q. Gọi (ω) là một đường tròn qua H và tiếp xúc với AH. (ω) lần lượt cắt đường tròn $(BPH), (CQH)$ tại các điểm thứ hai là X, Y. Gọi Z là giao điểm của BX và CY. Chứng minh rằng đường tròn (XYZ) tiếp xúc với $(BPH), (CQH)$.

LỜI GIẢI. *(Lê Viết Ân, GV trường PTNK, thành phố Hồ Chí Minh)* Gọi E là giao điểm thứ hai của đường tròn (CHQ) và AC, F là giao điểm thứ hai của đường tròn (BHP) và AB.



Do $\angle FBP = 90°$ nên $\angle FHP = 90°$ suy ra $HF \perp HP \equiv AH$. Chứng minh tương tự, ta được $HE \perp AH$. Do đó ba điểm H, E, F thẳng hàng và ta cũng chỉ ra được cát tuyến $\overline{EHF} \parallel BC$.

Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn (ω) và EF. Vì (ω) tiếp xúc với AH nên tâm của (ω) nằm trên EF nên HK là đường kính của (ω). Đến đây, kẻ $KM \perp CH$ tại M, $KN \perp BH$ tại N do đó M, N thuộc đường tròn (ω).
Ta có $KM \parallel BF$ (do cùng vuông góc với HC) nên theo bổ đề Reim thì ba điểm B, X, M thẳng hàng. Chứng minh tương tự, ta được ba điểm C, Y, N thẳng hàng.
Gọi T là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ và HY. Khi đó, ta có biến đổi góc

$$\angle YTZ = \angle YXZ = \angle YXM = \angle YHM = \angle YHC$$

Nên $ZT \parallel CH$. Do đó đường tròn $(XYZ) \equiv (YTZ)$ tiếp xúc với $(YHC) \equiv (CHQ)$. Chứng minh tương tự, ta được đường tròn (XYZ) tiếp xúc với (BHP). Vậy đường tròn (XYZ) tiếp xúc với $(BHP), (CHQ)$.

Nhận xét 4. Tác giả Lê Viết Ân đã phát hiện được hai kết quả sau từ bài toán:

1) Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ thuộc một elip cố định khi đường tròn (ω) thay đổi.

2) Nếu cho đường tròn (ω) tiếp xúc với BC thì đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Sau một hồi biến đổi cấu hình, ta có bài toán tổng quát hơn sau:
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O); E, F lần lượt nằm trên CA, AB. P là điểm bất kì trên EF. Một đường tròn đi qua P và tiếp xúc với BC lần lượt cắt $(BPF), (CPE)$ tại các điểm thứ hai là X, Y. Gọi Z là giao điểm của BX và CY. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ tiếp xúc với đường tròn (O).

Lời giải cho bài toán này xin dành cho bạn đọc.

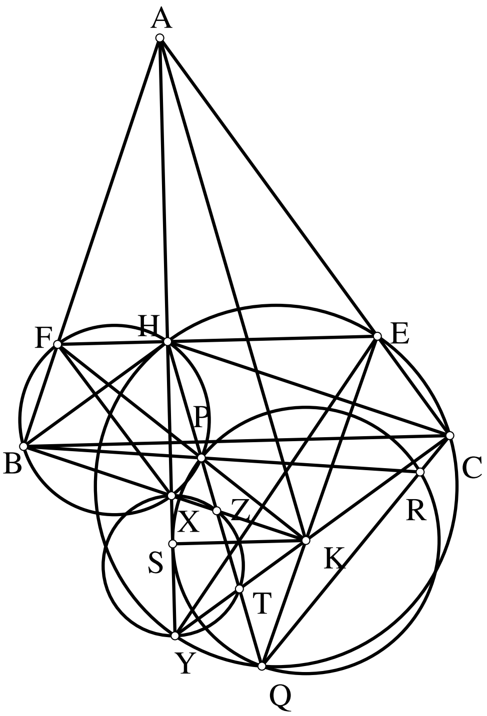
Chúng ta tiếp tục với bài toán tiếp theo.

BÀI TOÁN 9. Cho tam giác ABC. Đường thẳng qua B, C lần lượt vuông góc với AB, AC theo thứ tự cắt đường thẳng qua A vuông góc với BC tại X, Y. Đường tròn đường kính XY lần lượt cắt BX, CY lần thứ hai tại Z, T. ZT lần lượt cắt $AX, (BHX), (CHY)$ tại H, P, Q (P, Q khác H). BP cắt CQ tại R. Chứng minh rằng đường tròn (PQR) tiếp xúc với XY.

LỜI GIẢI. Gọi E là giao điểm thứ hai của (CHY) và AC, F là giao điểm thứ hai của (BHX) và AB, K là giao điểm của BX và CY. Khi đó theo bài toán 1 thì H là trực tâm của tam giác ABC và cát tuyến $\overline{HZT} \parallel AK$.
Dễ thấy ba điểm H, E, F thẳng hàng và cát tuyến $\overline{EHF} \parallel BC$. Ta có

$$\angle BFX = \angle BHX = \angle ACB = \angle AKB = \angle AKX$$

Suy ra tứ giác $AFXK$ nội tiếp. Chứng minh tương tự, ta được tứ giác $AEKY$ nội tiếp.
Gọi P' là giao điểm thứ hai của FK và đường tròn (BHX). Thì ta có $\angle XHP' = \angle XFP' = \angle XFK = \angle XAK$ nên $HP' \parallel AK$. Lại có cát tuyến $\overline{HZT} \parallel AK$. Suy ra bốn điểm H, Z, T, P' thẳng hàng. Do đó $P \equiv P'$ hay nói cách khác ba điểm K, P, F thẳng hàng. Chứng minh tương tự, ta được ba điểm Q, K, E thẳng hàng.



Gọi S là hình chiếu vuông góc của K lên XY. Theo bài toán 2, BC là trục đẳng phương của đường tròn đường kính XY và đường tròn $(H;0)$ nên $CH^2 = CT.CY$ dẫn đến $\triangle CHT \backsim \triangle CYH$ (c - g - c) suy ra $\angle CHT = \angle CYH$.
Vì $\angle KQY = \angle EQY = \angle ECY = 90^\circ = \angle KSY$ nên tứ giác $KSYQ$ nội tiếp. Lại có $\angle KYQ = \angle CYQ = \angle CHQ = \angle CHT = \angle CYH = \angle KYS$ suy ra $KS = KQ$. Chứng minh tương tự, ta được $KS = KP$.Vì vậy $KS = KP = KQ$ suy ra K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SPQ.
Tiếp tục biến đổi góc

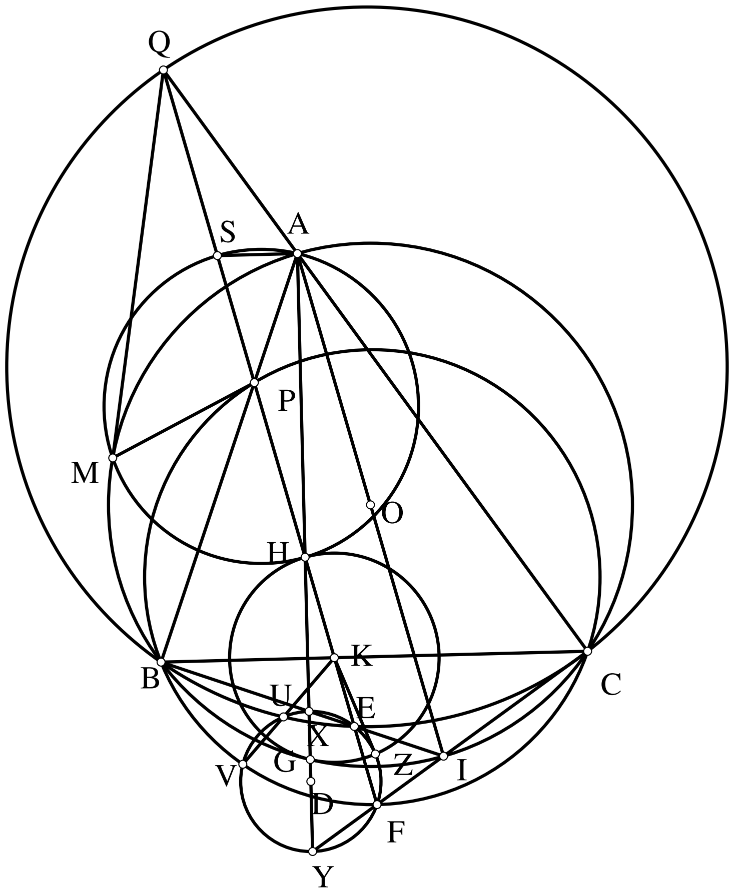
$$\angle PRQ = 180^\circ - \angle RPQ - \angle RQP = 180^\circ - \angle HPB - \angle HQC =$$
$$180^\circ - \angle AFH - \angle AEH = \angle EAF = \angle BAC$$

Do tam giác KPQ cân tại K nên $\angle PKQ = 180^\circ - 2\angle KPQ = 180^\circ - 2\angle FPH = 180^\circ - \angle FBH = 2\angle BAC = 2\angle PRQ$.
Suy ra K là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR. Khi đó K là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $PRQS$. Mặt khác $KS \perp XY$. Vậy XY tiếp xúc với đường tròn (PQR) tại S.

BÀI TOÁN 10. Cho tam giác ABC. Đường thẳng qua B, C lần lượt vuông góc với AB, AC theo thứ tự cắt đường thẳng qua A vuông góc với BC tại X, Y. Đường tròn đường kính XY

lần lượt cắt BX, CY tại E, F (E khác X, F khác Y). Đường tròn đường kính XY lần lượt cắt $(BEC), (BFC)$ tại U, V (U khác E, V khác F). K là giao điểm của BC và UV, KZ tiếp xúc với đường tròn (XY) tại Z. (BEC) cắt AC tại Q khác C, (BFC) cắt AB tại P khác B, đường thẳng qua A song song với BC cắt PQ tại S. M là điểm Miquel của tứ giác toàn phần (AB, BC, CA, PQ). Chứng minh đường tròn (K, KZ) tiếp xúc với đường tròn (ABC) và (ASM).

LỜI GIẢI. *(Phan Như Hải, học sinh trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)*
Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Rõ ràng BX, CY và AO đồng quy tại I nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Gọi D là trung điểm của XY, H là trực tâm của tam giác ABC, G là giao điểm thứ hai của AH và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Ta có $(HG, XY) = -1$ nên theo hệ thức Newton thì $DZ^2 = DX^2 = \overline{DG}.\overline{DH}$ dẫn đến DZ tiếp xúc với đường tròn (HGZ) hay nếu gọi K' là tâm của đường tròn (HGZ) thì K' nằm trên BC chính là trung trực của GH và $K'Z$ vuông góc với DZ. Mà KZ tiếp xúc với đường tròn (XY) tại Z nên KZ cũng vuông góc với DZ chứng tỏ $K \equiv K'$.



Theo như cách chứng minh ở bài toán 4, ta có ba điểm U, X, C thẳng hàng; ba điểm B, V, Y

thẳng hàng. Khi đó, áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm U, E, Y, F, V, X với chú ý $EX \cap VY = B, UX \cap FY = C$ ta có giao điểm của UV và EF nằm trên BC. Do K là giao điểm của BC và UV nên K cũng thuộc EF.
Theo bài toán 1 thì ba điểm H, E, F thẳng hàng và cát tuyến $\overline{HEF} \parallel AI$.
Ngoài ra, $\angle QEB = \angle QCB = \angle AIB$ nên $QE \parallel AI$, tương tự thì $PF \parallel AI$. Như vậy, ta có năm điểm H, E, F, P, Q thẳng hàng và cùng nằm trên đường thẳng song song với AI. Thành thử $HK \parallel AO$ hay ba điểm O, K, G thẳng hàng. Vậy đường tròn (K, KG) tiếp xúc với (O) tại G.
Bằng biến đổi góc đơn giản, ta chỉ ra được

$$\triangle ASP \backsim \triangle HKB \backsim \triangle GKB$$
$$\triangle AQP \backsim \triangle HCB \backsim \triangle GCB$$

Suy ra $\frac{SQ}{SP} = \frac{KC}{KB}$. Xét phép vị tự quay tâm M biến tam giác MQP thành tam giác MBC nên cũng biến S thành K dẫn đến $\triangle MSQ \backsim \triangle MKC$ có được $\angle SMQ = \angle KMC = \angle KQC$ do đó $\angle MSH = \angle SMQ + \angle SQM = \angle KQC + \angle SQM = \angle MQA = \angle MAH$ nên tứ giác $ASMH$ nội tiếp. Lại có $\angle SAH = 90^\circ$ do đó tứ giác $ASMH$ nội tiếp đường tròn đường kính SH. Vì vậy đường tròn (K, KZ) tiếp xúc với đường tròn (ASM) tại H. Vậy đường tròn (K, KZ) tiếp xúc với đường tròn $(O), (ASM)$.

Chúng ta đã đi một hành trình khám phá bài toán ban đầu để đạt được nhiều bài toán mới. Thông qua bài viết này, tác giả muốn nhắn nhủ tới bạn đọc muốn học hình đạt được kết quả tốt thì một trong những cách là khai thác một bài toán nào đó theo nhiều khía cạnh khác nhau, khi đó ta sẽ thấy được vẻ đẹp trong mỗi bài toán cũng như tăng thêm kinh nghiệm cho bản thân trong mỗi chúng ta.

Sau đây, xin đề nghị đến bạn đọc những bài tập sau.

3. Bài tập đề nghị

BÀI TẬP 1. Cho tam giác ABC, trực tâm H. Đường thẳng qua B, C lần lượt vuông góc với AB, AC theo thứ tự cắt AH tại X, Y. Lấy E, F trên đường tròn đường kính XY sao cho $BX = BE, CY = CF$. XF, YE lần lượt cắt BC tại M, N.

a) Chứng minh rằng $HM \parallel YE, HN \parallel XF$.

b) Gọi P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của HM, HN, CA, AB. Chứng minh rằng PS, QR và AH đồng quy.

BÀI TẬP 2. Cho tam giác ABC, D là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC. Đường thẳng qua B, C lần lượt vuông góc với AB, AC theo thứ tự cắt AD tại X, Y. Gọi M là trung điểm của XY. N là giao điểm của BX và CM, P là giao điểm của BM và CY.

a) Chứng minh rằng đường thẳng nối trọng tâm của tam giác ABC và tam giác MNP vuông góc với BC.

b) Gọi U, V lần lượt là trực tâm của tam giác XMN, tam giác YMP. Chứng minh rằng ba điểm D, U, V thẳng hàng.

BÀI TẬP 3. Cho tam giác ABC, H là trực tâm. Đường thẳng qua B, C lần lượt vuông góc với AB, AC theo thứ tự cắt AH tại X, Y. Đường tròn đường kính XY lần lượt cắt CX, BY tại E, F (E khác X, F khác Y). Đường tròn (BEC) cắt AC tại Q khác C, đường tròn (BFC) cắt AB tại P khác B. Đường tròn (HEF) lần lượt cắt $(BEC), (BFC)$ tại U, V (U khác E, V khác F). Gọi K là giao điểm của PU và QV. Chứng minh rằng HK chia đôi BC.

BÀI TẬP 4. Cho tam giác ABC. Đường thẳng qua B, C lần lượt vuông góc với AB, AC theo thứ tự cắt đường thẳng qua A vuông góc với BC tại X, Y. Một đường tròn (K) thay đổi đi qua B, C cắt CA, AB tại E, F (E khác C, F khác B). Gọi S là giao điểm của FX và EY. Chứng minh rằng S di động trên một đường thẳng cố định khi (K) thay đổi.

BÀI TẬP 5. Cho tam giác ABC. Đường thẳng qua B, C lần lượt vuông góc với AB, AC theo thứ tự cắt đường thẳng qua A vuông góc với BC tại X, Y. Đường tròn đường kính XY lần lượt cắt BX, CY tại Z, T (Z khác X, T khác Y). ZT lần lượt cắt AX, CA, AB tại H, M, N. Gọi K là điểm sao cho $KB = KC$ và $KH \perp ZT$. Đường tròn (K, KH) lần lượt cắt $(BHN), (CHM)$ tại P, Q khác H. Chứng minh rằng BP, CQ và HK đồng quy.

BÀI TẬP 6. Cho tam giác ABC có trực tâm H. Đường thẳng qua B, C lần lượt vuông góc với AB, AC theo thứ tự cắt AH tại X, Y. Gọi P là điểm đối xứng với X qua BH, Q là điểm đối xứng với Y qua CH. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC và đường tròn ngoại tiếp tam giác HPQ cắt nhau tại điểm thứ hai nằm trên đường trung tuyến kẻ từ A của tam giác ABC.

BÀI TẬP 7. Cho tam giác ABC. Đường thẳng qua B, C lần lượt vuông góc với AB, AC theo thứ tự cắt đường thẳng qua A vuông góc với BC tại X, Y. Đường tròn đường kính XY lần lượt cắt BX, CY tại Z, T (Z khác X, T khác Y). ZT cắt AX tại H. Gọi ω_1 là đường tròn qua B, H và tiếp xúc với BC; ω_2 là đường tròn qua C, H và tiếp xúc với BC. Đường tròn đi qua H, có tâm nằm trên ZT lần lượt cắt ω_1 và ω_2 tại P, Q khác H. BP cắt CQ tại R. Chứng minh rằng đường tròn (PQR) tiếp xúc với ω_1 và ω_2.

BÀI TẬP 8. Cho hình bình hành $ABCD$. Đường thẳng qua A vuông góc với BD lần lượt cắt CD, CB tại E, F. Gọi P là điểm đối xứng với E qua D, Q là điểm đối xứng với F qua B. Các đường thẳng qua A, P, Q lần lượt vuông góc với AE, CD, CB cắt nhau tạo thành tam giác XYZ. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác CDB.

CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TRỰC TÂM CỦA TAM GIÁC

Lê Viết Ân (TPHCM)

GIỚI THIỆU

Trong bài viết này, chúng tôi xin đề cập đến một số dạng toán liên quan đến trực tâm của tam giác thường gặp như chứng minh một điểm là trực tâm của một tam giác, trực tâm của một tam giác nằm trên một đường thẳng hay đường tròn,... các dạng toán khác liên quan đến trực tâm tam giác cũng như ứng dụng của nó trong các bài toán chứng minh quan hệ vuông góc, song song, sự đồng viên các điểm,...

1. Phương pháp 1: Chứng minh trực tiếp từ định nghĩa

1.1. Nội dung phương pháp và các ví dụ

Để chứng minh một điểm là trực tâm của một tam giác, chúng ta có thể sử dụng định nghĩa trực tâm của một tam giác. Trước hết chúng ta có một số nhận xét như sau:

(1) Nếu H là trực tâm của tam giác không vuông ABC thì $AH \perp BC$, $BH \perp CA$ và $CH \perp AB$.

(2) Nếu tam giác ABC vuông tại A thì có thể xem A là trực tâm của tam giác ABC.

(3) Nếu H là trực tâm của tam giác không vuông ABC thì A là trực tâm của tam giác HBC, B là trực tâm tam giác HCA, và C là trực tâm của tam giác HAB.

Chứng minh trực tiếp điểm H là trực tâm của tam giác ABC, chúng ta chỉ cần chứng minh được một trong ba ý đơn giản như sau:

(a) $AH \perp BC$ và $BH \perp CA$.

(b) $BH \perp CA$ và $CH \perp AB$.

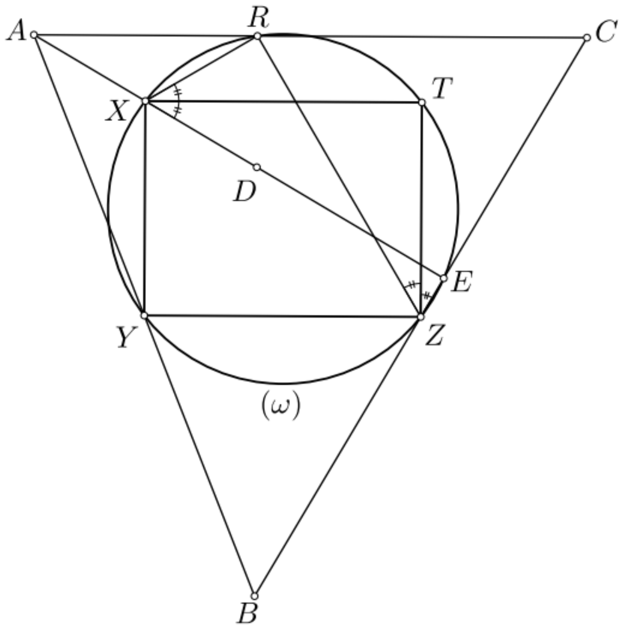
(c) $CH \perp AB$ và $AH \perp BC$.

Vì theo định lí về sự đồng quy của ba đường cao trong một tam giác, ta suy ra nếu có (a) hoặc (b) hoặc (c) thì H là trực tâm của tam giác ABC.

Để nắm rõ phương pháp này, chúng ta hãy xét một số ví dụ sau:

Ví dụ 1. *Cho hình chữ nhật $XYZT$ và điểm R bất kì khác X, Y, Z, T nằm trên đường tròn ngoại tiếp của hình chữ nhật. Gọi A, B, C, D theo thứ tự là đối xứng của R qua XY, YZ, ZT, TX. Chứng minh rằng D là trực tâm của tam giác ABC.*

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử R thuộc đường tròn ω ngoại tiếp hình chữ nhật sao cho R, X, Y, Z, T nằm trên ω theo đúng thứ tự đó.



Chú ý rằng $\widehat{YXT} = 90°$ nên qua phép đối xứng trục, ba điểm A, X, D thẳng hàng hay $X \in AD$. Tương tự, $Y \in AB$, $Z \in BC$ và $T \in CD$.

Hơn nữa, $RA \perp XY // TZ \perp RC$ nên $R \in AC$. Gọi $E = AD \cap CB$. Dễ thấy

$$\widehat{EXT} = \widehat{DXT} = \widehat{TXR} = \widehat{TZR} = \widehat{TZC} = \widehat{EZT}.$$

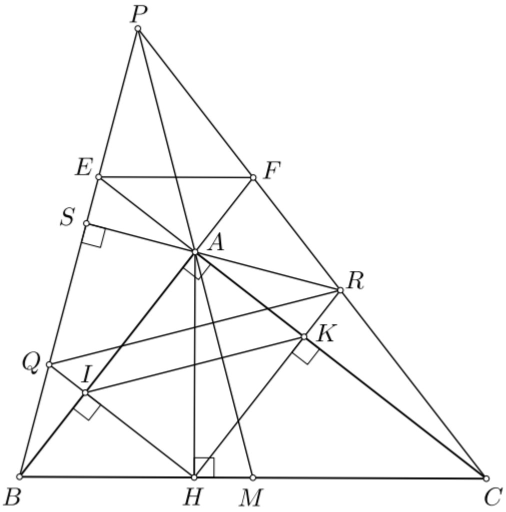
Suy ra $E \in \omega$. Do đó $AD \equiv XE \perp ZE \equiv BC$. Tương tự, $CD \perp AB$. Do đó D là trực tâm của tam giác ABC. □

Ví dụ 2 (TTT2). *Cho tam giác vuông ABC (vuông tại A). Gọi M là trung điểm cạng BC và H là chân đường vuông góc hạ từ đỉnh A xuống BC. Trên tia đối của tia AM lấy một điểm P (không trùng với A). Các đường thẳng qua H vuông góc với AB và AC lần lượt cắt các đường thẳng PB và PC tại Q và R tương ứng. Chứng minh rằng A là trực tâm của tam giác PQR.*

Lời giải. Gọi $E = BP \cap AC$ và $F = CP \cap AB$. Dễ thấy $EF // BC$ để có $\frac{EA}{AC} = \frac{FA}{AB}$.

Gọi $I = HQ \cap AC$ và $K = HR \cap AB$. Từ $HQ // CE (\perp AB)$ và $HR // AB$ $(\perp AC)$, theo định lí Thales, ta có

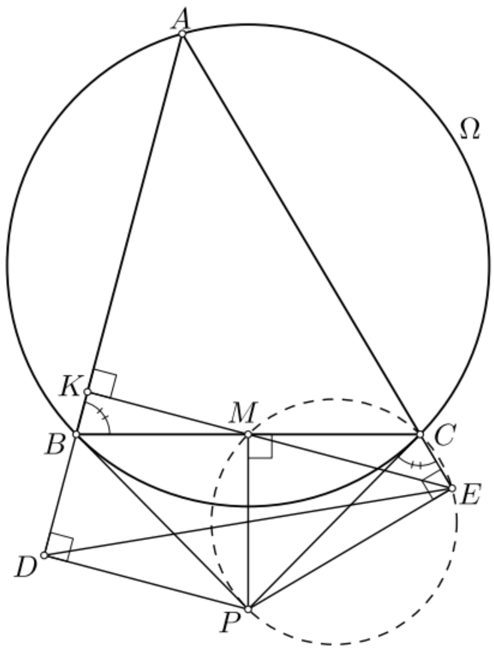
$$\frac{QI}{IH} = \frac{EA}{AC} = \frac{FA}{AB} = \frac{RK}{KH} \Rightarrow IK // QR.$$



Mặt khác, $\triangle IHK \sim \triangle BHA$ (g.g) nên $\frac{HQ}{HR} = \frac{HI}{HK} = \frac{HB}{HA}$, từ đó suy ra $\frac{HB}{HQ} = \frac{HA}{HR}$. Kết hợp với $\widehat{BHQ} = \widehat{AHR}$ (cùng bằng $90^\circ - \widehat{AHI}$). Ta nhận được $\triangle BHQ \sim \triangle AHR$ (c.g.c). Do đó nếu gọi $S = RA \cap BP$ thì $\widehat{BQH} = \widehat{ARH} = \widehat{SRH}$. Suy ra tứ giác $HQSR$ nội tiếp. Mà $\widehat{QHR} = 90^\circ$ nên $\widehat{QSR} = 90^\circ$ hay $RA \perp PQ$. Tương tự, $QA \perp PR$. □

Ví dụ 3 (Grade level 9, All-Russian Olympiad, 2013). *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn Ω. Các tiếp tuyến của Ω tại B và C cắt nhau tại P. Gọi D và E theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của P lên AB và AC. Chứng minh rằng trực tâm của tam giác ADE là trung điểm cạnh BC.*

Lời giải. Gọi M là trung điểm của BC. Theo tính chất tiếp tuyến, ta có $PB = PC$. Suy ra $MC \perp BC$. Từ đó $\widehat{PMC} = \widehat{PEC} = 90^\circ$ nên tứ giác $PECM$ nội tiếp.



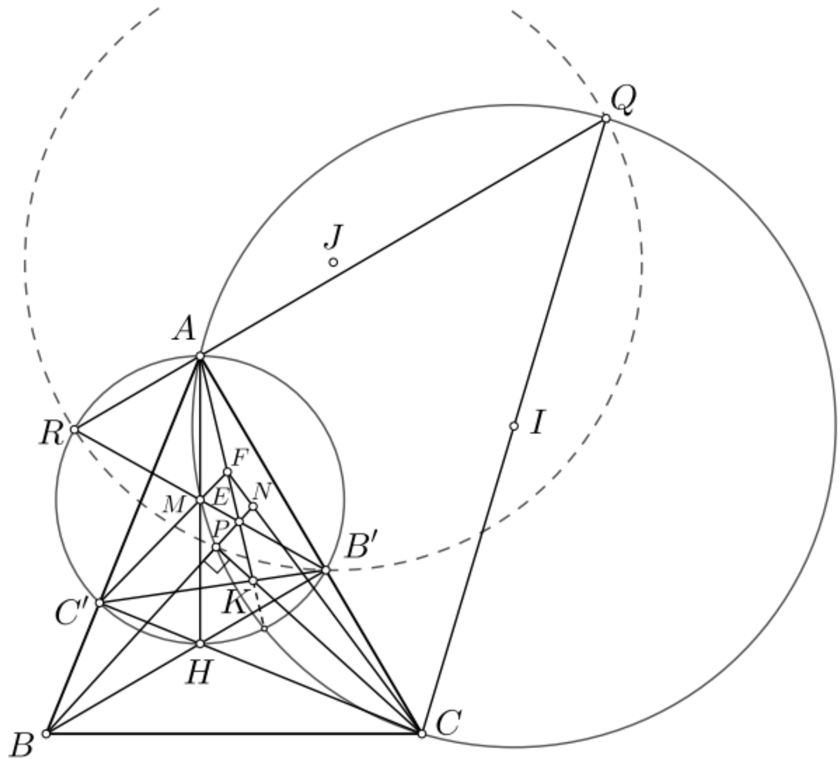
Gọi $K = EM \cap AD$. Ta có

$$\widehat{KMB} = \widehat{EMC} = \widehat{EPC} = 90^\circ - \widehat{PCE} = 90^\circ - \widehat{KBC}.$$

Suy ra $\widehat{BKM} = 90^\circ$ hay $EM \perp AD$. Tương tự, $DM \perp AE$ và do đó M là trực tâm của tam giác ADE. □

Ví dụ 4 (Lê Viết Ân). *Cho tam giác không vuông ABC. Các đường cao BB' và CC' cắt nhau tại H. Gọi K là một điểm bất kì trên $B'C'$ (K khác B', C'). Đường thẳng AK cắt MB', MC' theo thứ tự tại E, F. Gọi N là giao điểm của BE và CF. Chứng minh rằng K là trực tâm của tam giác NBC.*

Lời giải. Gọi (M) là đường tròn đường kính AH. Kẻ $BP \perp CK$ tại P. Đường thẳng qua A vuông góc với AC cắt BP tại Q và cắt (M) tại R khác A.



Dễ thấy $B'R$ là đường kính của (M) và bốn điểm A, C, P, Q cùng thuộc đường tròn (I) đường kính CQ. Dễ thấy năm điểm B, C, B', C' và P cùng thuộc đường tròn đường kính BC.

Do đó $\overline{KC}.\overline{KP} = \overline{KB'} \cdot \overline{KC'}$. Suy ra

$$\mathcal{P}_{K/(I)} = \overline{KC}.\overline{KP} = \overline{KB'} \cdot \overline{KC'} = \mathcal{P}_{K/(M)}.$$

Điều này chứng tỏ AK là trục đẳng phương của (M) và (I). Ta có

$$(PB', PQ) \equiv (PB', PB) \equiv (C'B', C'B) \equiv (C'B', C'A) \equiv (RB', RA) \equiv (RB', RQ) \bmod \pi.$$

Suy ra bốn điểm B', P, Q, R cùng thuộc một đường tròn và ta kí hiệu đường tròn này là (J).

Từ đó suy ra PQ là trục đẳng phương của (I) và (J), và $B'R \equiv B'M$ là trục đẳng phương của (J) và (M). Chú ý $E = AK \cap B'M$ và AK là trục đẳng phương của (M) và (I), thì theo định lý về tâm đẳng phương, suy ra $E \in PQ$. Do đó $CK \perp PQ \equiv BE \equiv BN$. Chứng minh tương tự, ta cũng có $BK \perp CN$. Do đó K là trực tâm của tam giác NBC. □

1.2. Các bài tập đề nghị

Bạn đọc hãy giải một số bài tập sau để rèn luyện phương pháp 1:

Bài tập 1 (TTT2). Cho tam giác ABC. Điểm M nằm trong tam giác. AM, BM, CM theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A', B', C'. Biết rằng M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng M là trực tâm tam giác ABC.

Bài tập 2 (Grade level 9, All-Russian Olympiad, 2011). Cho tam giác nhọn ABC. Một đường tròn đi qua B và tâm đường tròn ngoại tiếp O của tam giác, thứ tự cắt BC và BA lần nữa tại các điểm P và Q. Chứng minh rằng trực tâm của tam giác OPQ nằm trên đường thẳng AC.

Bài tập 3 (P2, Geometry Mathley, Round 1-2011). Cho tam giác ABC nhọn, BE, CF là các đường cao. M là trung điểm của BC. N là giao điểm của AB và EF. X là hình chiếu của N trên BC. Y, Z theo thứ tự là hình chiếu của X trên AB, AC. Chứng minh rằng N là trực tâm của tam giác AYZ.

Bài tập 4 (TTT2). Cho tam giác ABC, (J) là đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh A. (J) tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại E, F. Giả sử JB, JC cắt EF lần lượt tại K, L. BL và CK cắt nhau tại H. Chứng minh rằng H là trực tâm của tam giác JBC.

Bài tập 5 (TTT2). Cho tam giác ABC cân tại A. M, D tương ứng là trung điểm của BC, AM. H là hình chiếu của M trên CD. AH cắt BC tại N, BH cắt AM tại E. Chứng minh rằng E là trực tâm của tam giác ABN.

Bài tập 6 (THTT). Cho tam giác ABC vuông tại A ngoại tiếp đường tròn (I, r). Đường tròn (I, r) tiếp xúc với AB, BC, CA lần lượt tại P, Q, R. Gọi K là trung điểm AC, đường thẳng IK cắt AB tại M. Đoạn thẳng PQ cắt đường cao AH của tam giác ABC tại N. Chứng minh rằng N là trực tâm của tam giác MQR.

2. Phương pháp 2: Chứng minh gián tiếp từ điều kiện đủ

2.1. Nội dung phương pháp và các ví dụ

Phương pháp gián tiếp là chúng ta chứng minh thông qua một số kết quả khác mà phương pháp trực tiếp không khả thi hoặc khó mà thực hiện được. Cụ thể chúng ta sử dụng một số điều kiện đủ để một điểm là trực tam của tam giác như sau:

Điều kiện đủ 1. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và đường cao hạ từ đỉnh A cắt BC tại D và cắt lại (O) tại K. Nếu H là đối xứng của K qua BC thì H là trực tâm của $\triangle ABC$.*

Điều kiện đủ 2. *Cho tam giác ABC và AA' là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Nếu H là điểm đối xứng với A' qua trung điểm của BC thì H là trực tâm của $\triangle ABC$.*

Điều kiện đủ 3. *Cho tam giác ABC và D là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống BC. Nếu H là một điểm nằm trên AD thỏa mãn $\overline{DA} \cdot \overline{DH} = -\overline{DB} \cdot \overline{DC}$ thì H là trực tâm của $\triangle ABC$.*

Điều kiện đủ 4. *Cho tam giác ABC và đường cao AD (D thuộc đoạn BC). Nếu điểm H thuộc đoạn AD thỏa mãn $\widehat{HBA} = \widehat{HCA}$ thì H là trực tâm của $\triangle ABC$.*

Điều kiện đủ 5. *Cho tam giác nhọn ABC và đường cao AD. Nếu điểm H thuộc đoạn AD sao cho $\widehat{BHC} = 180° - \widehat{BAC}$ thì H là trực tâm của $\triangle ABC$.*

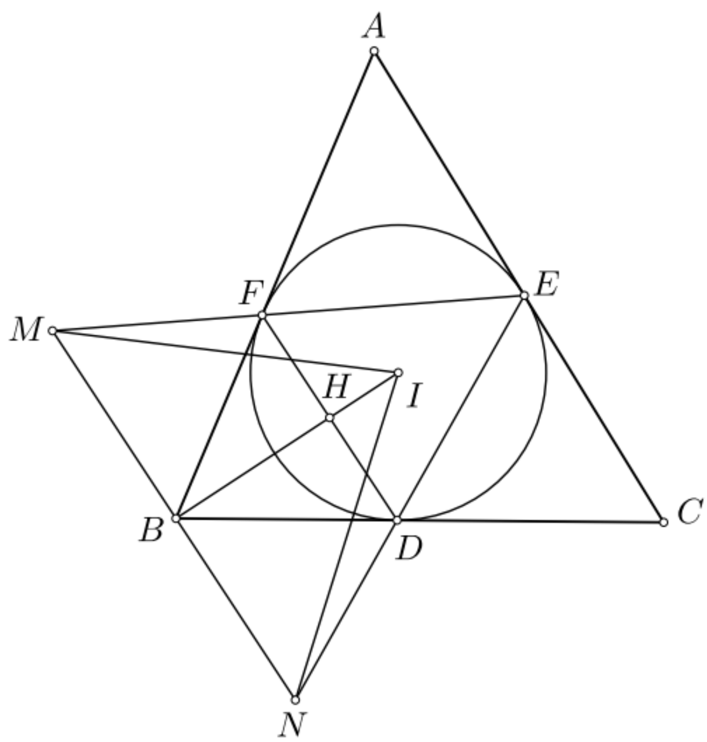
Điều kiện đủ 6. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O và M là trung điểm cạnh BC. Nếu điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$ thì H là trực tâm của $\triangle ABC$.*

Việc chứng minh các điều kiện đủ 1, 2, 3, 4, 5 và 6 đơn giản, xin phép bỏ qua và dành lại cho bạn đọc như một phần bài tập nhỏ. Chúng ta đi đến một số ví dụ minh họa như sau:

Ví dụ 5 (TTT2). *Cho tam giác ABC. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với BC, CA, AB thứ tự tại D, E, F. Đường thẳng đi qua B song song với DF cắt các đường thẳng EF, DE thứ tự tại M, N. Gọi H là giao điểm của IB và DF. Chứng minh rằng H là trực tâm của tam giác IMN.*

Lời giải. Vì $MN//FD$ và DC tiếp xúc với (I) nên

$$\widehat{IMN} < \widehat{FMB} = \widehat{EFD} = \widehat{EDC} = \widehat{NDB} = 180° - \widehat{EDB} \text{ (vì } \widehat{EDB} > 90°).$$



Tương tự, $\widehat{INM} < \widehat{DNB} = \widehat{MFB} < 90°$. Do đó $\triangle BFM \sim \triangle BND$, suy ra $\frac{BF}{BM} = \frac{BN}{BD}$.

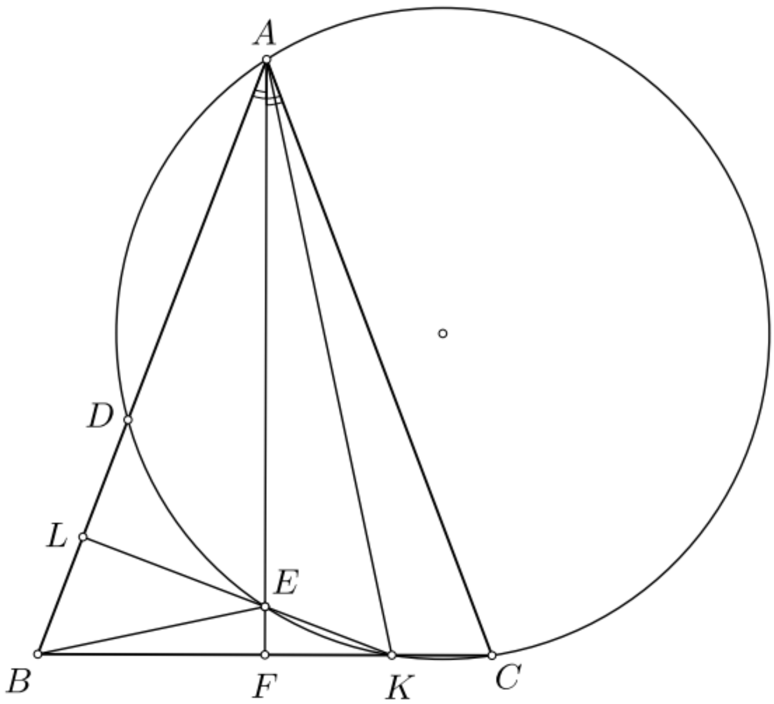
Vì $\widehat{BDI} = 90°$, $DH \perp BI$, BC và BF tiếp xúc với (I) nên

$$BH.BI = BD^2 = BD.BF = \frac{BD}{BN} \cdot \frac{BF}{BM} \cdot BN \cdot BM \quad = \frac{BD}{BN} \cdot \frac{BN}{BD} \cdot BN \cdot BM = BM.BN.$$

Kết hợp với các góc $\widehat{IMN}$ và $\widehat{INM}$ nhọn nên điểm H nằm trên đoạn BI. Theo điều kiện 3, ta có H là trực tâm của tam giác IMN. □

Ví dụ 6 (Turkey EGMO TST 2013). *Cho tam giác ABC với $AB = AC$. Một đường tròn đi qua A và C cắt cạnh AB tại D. Phân giác kẻ từ A của tam giác cắt đường tròn tại E (khác A). Chứng minh rằng trực tâm của tam giác AEB nằm trên đường tròn.*

Lời giải. Gọi K là giao điểm của đường tròn với BC. Ta sẽ chứng minh K là trực tâm của tam giác ABE. Thật vậy, gọi $F = AE \cap BC$ và $L = KE \cap AB$. Ta có



$$\widehat{LAF} = \widehat{BAF} = \widehat{CAF} = \widehat{FKE} = \widehat{LKF}.$$

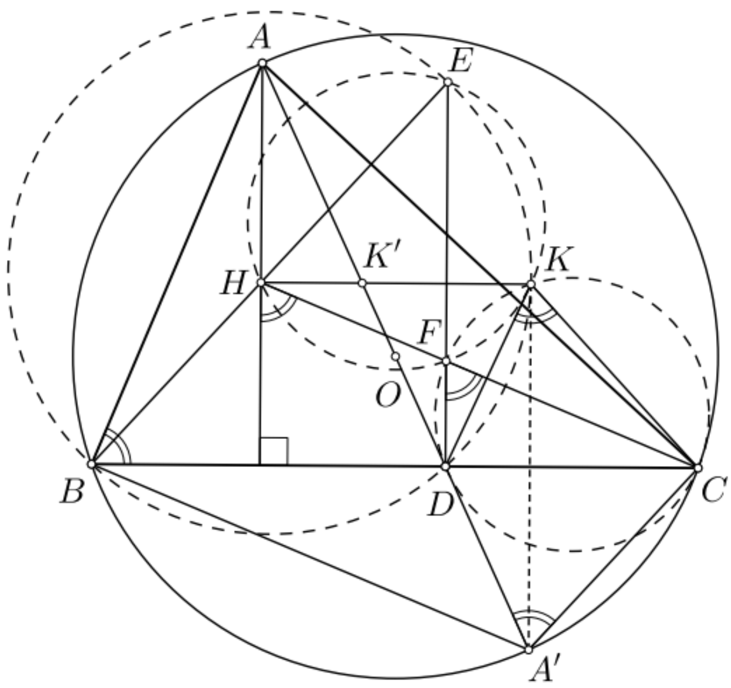
Suy ra tứ giác $ALFK$ nội tiếp. Chú ý rằng $AB = AC$ nên $AF \perp BC$. Suy ra $\widehat{KLA} = \widehat{KFA} = 90°$ nên $KE \perp AB$. Lại kết hợp với $AE \perp BK$ tại F. Vậy K là trực tâm của tam giác ABE. □

Ví dụ 7 (Lê Viết Ân). *Cho tam giác nhọn ABC với O, H thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác. AO cắt BC tại D. Đường thẳng đi qua D vuông góc với BC cắt HB, HC thứ tự tại E, F. Chứng minh rằng trực tâm của tam giác HEF nằm trên AO.*

Lời giải. Gọi AA' là đường kính của (O). Ta có một kết quả quen thuộc là $BHCA'$ là hình bình hành. Do đó nếu gọi K là đối xứng của A' qua BC thì $HK // BC \perp EF$ và

$$\widehat{CKD} = \widehat{CA'D} = \widehat{CA'A} = \widehat{CBA} = \widehat{CFD}.$$

Suy ra $K \in \odot(CDF)$. Tương tự, $K \in \odot(BDE)$. Do đó theo định lí Miquel cho tam giác HBC với $D \in BC, F \in CH$ và $E \in HB$ thì ta có $K \equiv \odot(HEF) \cap \odot(CDF) \cap \odot(EBD)$. Tức là ta có $K \in \odot(HEF)$. Do đó nếu gọi K' đối xứng của K qua EF thì chú ý rằng $HK \perp EF$ nên theo điều kiện đủ 1, ta có K' là trực tâm của tam giác HEF.



Mặt khác, chú ý rằng $BC \perp EF$ nên theo phép đối xứng trục, dễ thấy $K' \in A'D \equiv AD$. Bài toán đã được chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán được tác giả khai thác từ bài G3 IMOSL 2017. Ta còn có một tính chất thú vị nữa là: *Nếu J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF thì $JB = JC$*. Bạn đọc hãy chứng minh như bài tập.

2.2. Các bài tập đề nghị

Bạn đọc hãy giải một số bài tập sau để rèn luyện phương pháp 2:

Bài tập 7 (Sharygin 2012 final). Cho ω là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Một điểm B_1 trên tia đối tia BA sao cho $AB_1 = AC$. Phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt ω lần nữa tại W. Chứng minh rằng trực tâm của tam giác AWB_1 nằm trên ω.

Bài tập 8 (ELMO 2017). Cho tam giác ABC với trực tâm H, và M là trung điểm cạnh BC. Giả sử P và Q là hai điểm phân biệt nằm trên đường tròn đường kính AH, khác A, sao cho M nằm trên đường thẳng PQ. Chứng minh rằng trực tâm của tam giác APQ nằm trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.

Bài tập 9 (TTT2). Cho M là một điểm nằm trong hình bình hành $ABCD$ thỏa mãn $\widehat{MAB} = 40°$, $\widehat{MBC} = 25°$, $\widehat{MCD} = 65°$, $\widehat{MDA} = 50°$. Tính các góc của hình bình hành.

3. Phương pháp 3: Sử dụng định lí về đường thẳng Steiner

3.1. Nội dung phương pháp và các ví dụ

Định lý 1 (Đường thẳng Steiner). *Cho tam giác ABC có trực tâm H. Với mỗi điểm P nằm trong mặt phẳng của tam giác, gọi A_0, B_0, C_0 theo thứ tự là đối xứng của P qua các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó A_0, B_0, C_0 thẳng hằng khi và chỉ khi P nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Hơn nữa, trong trường hợp A_0, B_0, C_0 thẳng hàng thì đường thẳng $\overline{A_0B_0C_0}$ đi qua H. Đường thẳng $\overline{A_0B_0C_0}$ được gọi là đường thẳng Steiner của P ứng với tam giác ABC.*

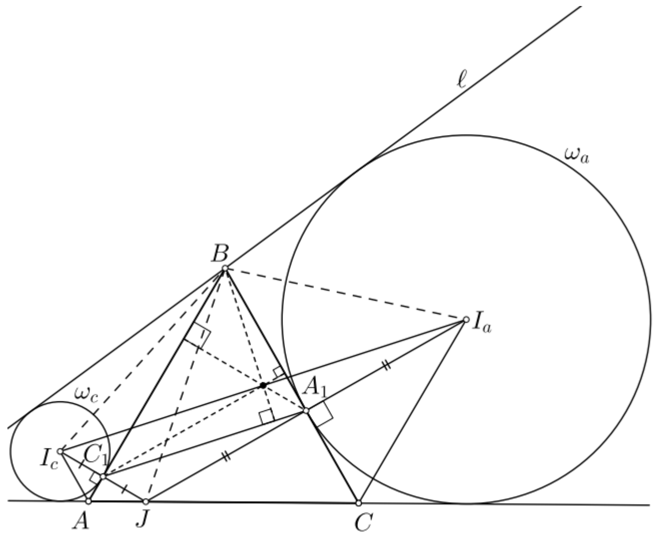
Việc chứng minh định lí về đường thẳng Steiner có rất nhiều trong các tài liệu, chẳng hạn xem tại [1]. Tuy nhiên, chúng ta sẽ xem xét một biến thể sau rất có lợi trong việc chứng minh các bài toán yêu cầu chứng minh trực tâm của một tam giác nằm trên một đường thẳng:

Phát biểu tương đương của đường thẳng Steiner: *Cho tam giác ABC và trực tâm H. P là điểm bất kì thuộc mặt phẳng tam giác. Gọi A_0, B_0 thứ tự là hình đối xứng của P qua BC, CA. Khi đó P nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC khi và chỉ khi A_0B_0 đi qua H.*

Ta đi đến các ví dụ minh họa sau:

Ví dụ 8 (Sharygin 2013 final). *Cho ℓ là đường thẳng đi qua đỉnh B của một tam giác đều ABC. Một đường tròn ω_a với tâm I_a tiếp xúc xúc với BC tại A_1, đồng thời tiếp xúc với ℓ và AC. Một đường tròn ω_c với tâm I_c tiếp xúc với BA tại C_1, đồng thời tiếp xúc với ℓ và AC. Chứng minh rằng trực tâm của tam giác A_1BC_1 nằm trên I_aI_c.*

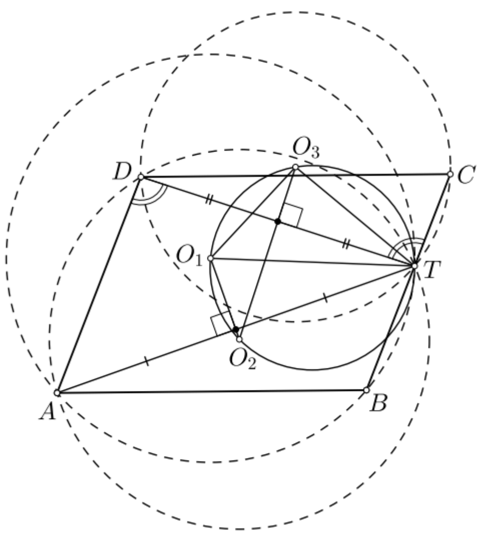
Lời giải. Từ giả thiết, dễ thấy $\widehat{BAI_c} = \widehat{BAC} = 60°$ và $\widehat{BCI_a} = \widehat{BCA} = 60°$ nên các đối xứng của I_c qua AB, của I_a qua BC cùng nằm trên AC.



Nhưng lại vì $\widehat{ABI_c} + \widehat{CBI_a} = 60° = \widehat{ABC}$, suy ra các ảnh đối xứng ở trên phải trùng nhau. Gọi ảnh đối xứng đó là J. Suy ra $J = I_cC \cap I_aA$. Chú ý rằng tứ giác BA_1JC_1 nội tiếp và I_a, I_c là các đối xứng của J của CB, BA nên theo định lí về đường thẳng Steiner, ta có I_aI_c là đường thẳng Steiner của J ứng với tam giác A_1BC_1 nên trực tâm của tam giác A_1BC_1 nằm trên I_aI_c. □

Ví dụ 9 (All-Russian 2011). *Trên cạnh BC của hình bình hành $ABCD$ (A là góc nhọn), lấy điểm T sao cho tam giác ATD nhọn. Gọi O_1, O_2, và O_3 theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABT, DAT và CDT. Chứng minh rằng trực tâm của tam giác $O_1O_2O_3$ nằm trên đường thẳng AD.*

Lời giải. Dễ thấy O_1O_2, O_2O_3 thứ tự là trung trực của AT, TD và chú ý rằng $\widehat{ADT} = \widehat{CTD}$, ta có



$$\widehat{O_1O_2O_3} = \widehat{ATD} = \widehat{O_1TO_3}.$$

Suy ra $T \in \odot(O_1O_2O_3)$.

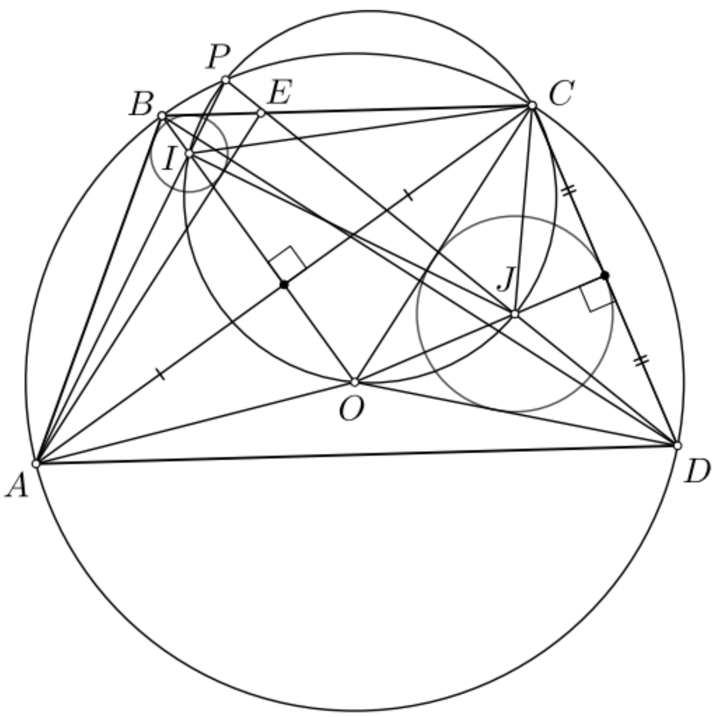
Chú ý, theo tính chất trung trực, ta cũng có A, D là các đối xứng của T qua O_1O_2, O_2O_3 nên theo định lí về đường thẳng Steiner, trực tâm của tam giác $O_1O_2O_3$ nằm trên AD. □

Ví dụ 10 (Lê Viết Ân). *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) với $AB = BC = CD$. Giả sử đường thẳng qua A song song với CO cắt đoạn BC tại E. Gọi I và J theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác ABE và CDO. Chứng minh rằng trực tâm của tam giác OIJ nằm trên AD.*

Lời giải. Vì $BC = CD$ nên

$$\widehat{IAB} = \frac{\widehat{BAE}}{2} = \frac{1}{2}\left(\widehat{BAC} - \widehat{CAE}\right) = \frac{1}{2}\left(\widehat{CAD} - \widehat{ACO}\right) = \frac{1}{2}\left(\widehat{BDC} - \widehat{CAO}\right) = \frac{\widehat{OAD}}{2}.$$

Chú ý $BC//AD$ và $BC = CD$ nên $\widehat{BDC} = \frac{\widehat{ADC}}{2}$



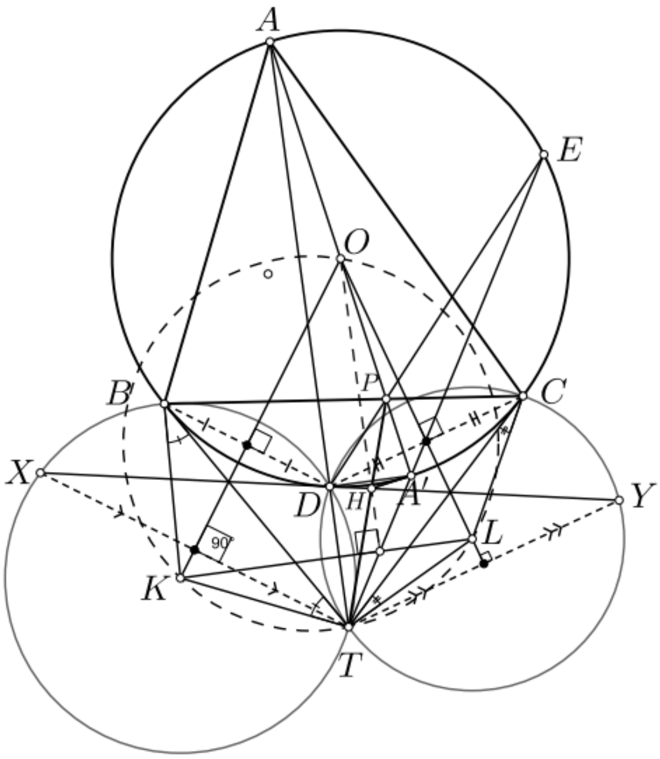
$$\widehat{JDB} = \widehat{BDC} - \widehat{CDJ} = \frac{1}{2}\left(\widehat{ADC} - \widehat{ODC}\right) = \frac{\widehat{ODA}}{2}.$$

Từ $OA = OD$ suy ra $\widehat{OAD} = \widehat{ODA}$ nên từ hai đẳng thức vừa thu được, ta có $\widehat{IBA} = \widehat{JDA}$, tức là $P = AI \cap JD$ nằm trên (O). Từ đó, dễ thấy $\triangle IAC \sim \triangle JDC$ suy ra $C \in \odot(PIJ)$. lại vì $OI \perp CD$ và $OB \perp CA$ nên $\widehat{IOJ} = 180^\circ - \widehat{ACD} = 180^\circ - \widehat{IPJ}$ nên $O \in (PIJ)$. Do đó $C \in \odot(OIJ)$. Đến đây, ta sẽ có được AD là đường thẳng Steiner của C ứng với tam giác OIJ nên trực tâm của tam giác OIJ nằm trên AD. □

Nhận xét. Dễ dàng biến đổi góc để có $AI \perp IJ$.

Ví dụ 11 (Lê Viết Ân). *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Các tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại T. AT cắt (O) tại D khác A, và AO cắt BC tại P. Gọi K và L theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác BDT và CDT. Chứng minh rằng trực tâm của tam giác OKL nằm trên PT.*

Lời giải. Gọi H là trực tâm của tam giác OKL. Dễ thấy $OK \perp DB$ và $OL \perp DC$. Suy ra $\widehat{KOL} = 180° - \widehat{BDC} = \widehat{BAC}$.



Dễ thấy $\widehat{BTC} = 180° - 2\widehat{BAC}$, $\widehat{KTB} = \widehat{BDT} - 90°$ và $\widehat{LTC} = \widehat{TDC} - 90°$. Suy ra

$$\begin{aligned}
\widehat{KTL} &= \widehat{KTB} + \widehat{BTC} + \widehat{LTC} \\
&= \widehat{BDT} - 90° + 180° - 2\widehat{BAC} + \widehat{TDC} - 90° \\
&= (\widehat{BDT} + \widehat{TDC}) - 2\widehat{BAC} \\
&= 360^{-}\widehat{BDC} - 2\widehat{BAC} \\
&= 180° + \widehat{BAC} - 2\widehat{BAC} \\
&= 180° - \widehat{BAC} = 180° + \widehat{KOL}.
\end{aligned}$$

Suy ra tứ giác $OKTL$ nội tiếp.

Gọi X, Y theo thứ tự đối xứng của T qua TB, TC. Xét phép đối xứng trục OK thì $D, T, (O)$ biến thành $B, X, (O)$. Qua phép đối xứng này với chú ý BT tiếp xúc với (O) suy ra DX tiếp xúc với (O). Tương tự, DY cũng tiếp xúc với (O). Do đó ba điểm X, D, Y thẳng hàng trên tiếp tuyến của (O) tại D. Áp dụng định lí về đường thẳng Steiner, ta có H nằm trên XY. Mặt khác, gọi A' là đối xứng của A qua O, ta có $OH \perp KL \perp DT$ nên $OH // AD \perp A'D$ nên OH là trung trực của $A'H$ nên từ HD tiếp xúc với (O), suy ra HA' tiếp xúc với (O). Gọi E là giao điểm thứ hai của TA và (O). Theo một kết quả quen thuộc (có thể chứng minh bằng cực và đối cực), DE đi qua P. Áp dụng định lí Pascal cho sáu điểm $\begin{pmatrix} A' & E & D \\ D & A & A' \end{pmatrix}$, suy ra ba điểm $P = A'A \cap DE$, $H = A'A' \cap DD$ và $T = EA' \cap DA$ thẳng hàng hay $H \in PT$. □

3.2. Các bài tập đề nghị

Bạn đọc hãy giải một số bài tập sau để rèn luyện phương pháp 3:

Bài tập 10 (Lê Viết Ân). Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$. Giả sử có điểm E nằm trên cạnh AD sao cho các tứ giác $AECD$ và $BEDC$ ngoại tiếp. Gọi I, J và K theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp của các tứ giác $AECD$, $BEDC$ và của tam giác CDE. Chứng minh rằng trực tâm của tam giác IJK nằm trên đoạn thẳng CD.

Bài tập 11 (Lê Viết Ân). Cho hình chữ nhật $ABCD$. Lấy điểm P thuộc cạnh AD. Đường tròn ngoại tiếp của tam giác PBC cắt DA, AB, CD theo thứ tự tại E, F, G. Gọi K, L theo thứ tự là giao điểm của các cặp đường thẳng (EF, BP) và (EG, CP). Gọi H là hình chiếu vuông góc của P lên BC. Chứng minh rằng đường thẳng KL đi qua trực tâm của tam giác DAH.

Bài tập 12 (Lê Viết Ân). Cho tam giác nhọn ABC và điểm D thuộc cạnh BC. Các đường cao của tam giác hạ từ các đỉnh B và C cắt AD theo thứ tự tại E và F. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác BDE và CDF theo thứ tự cắt các cạnh AB, AC tại G và H khác A. Gọi DK và DL theo thứ tự là các đường phân giác trong của các tam giác BDG và CDH. Chứng minh rằng trực tâm của tam giác AKL nằm trên GH.

Bài tập 13 (THTT). Cho tam giác không vuông ABC, O, H thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác ABC. M là điểm bất kì trên (O) (M khác A, B, C). Gọi N là điểm đối xứng của M qua BC. P là giao điểm thứ hai của AM và đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN. Chứng minh rằng HN đi qua trực tâm của tam giác AOP.

Bài tập 14 (G8, IMOSL 2009). Cho $ABCD$ là tứ giác ngoại tiếp. Gọi g là một đường thẳng đi qua A cắt đoạn thẳng BC tại M và đường thẳng CD tại N. Gọi I_1, I_2, và I_3 theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác ABM, MNC, và NDA. Chứng minh rằng trực tâm của tam giác $I_1I_2I_3$ nằm trên g.

Bài tập 15 (Lê Viết Ân). Cho tam giác ABC không vuông tại A và nội tiếp đường tròn (O). AP là dây cung của (O) sao cho AP không là đường kính và khác AB, AC. Giả sử AP cắt trung trực CA và AB theo thứ tự tại E và F. OP cắt BC tại D. Chứng minh rằng trực tâm của tam giác OEF thuộc AD.

4. Phương pháp 4: Sử dụng định lí Brocard

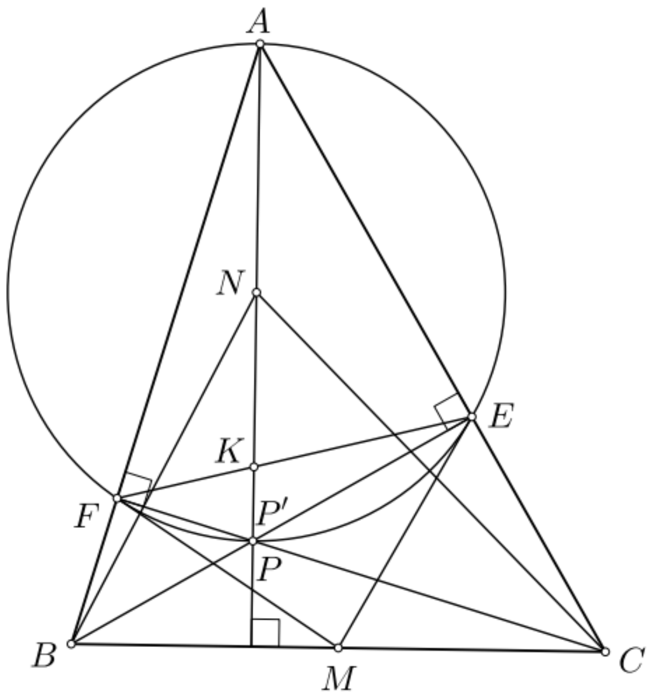
4.1. Nội dung phương pháp và các ví dụ

Nội dung định lí Brocard như sau:

Định lý 2 (Định lí Brocard). *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O. Nếu $E = AC \cap BD$, $F = AB \cap CD$ và $G = AD \cap BC$ thì O là trực tâm của tam giác EFG.*

Ví dụ 12 (Mathley 10/2015). *Cho tam giác ABC và điểm P nằm trong tam giác ABC sao cho $AP \perp BC$. E, F thứ tự là hình chiếu của P lên AC, AB. Giả sử tiếp tuyến tại E, F của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt nhau trên BC. Chứng minh rằng P là trực tâm của tam giác ABC.*

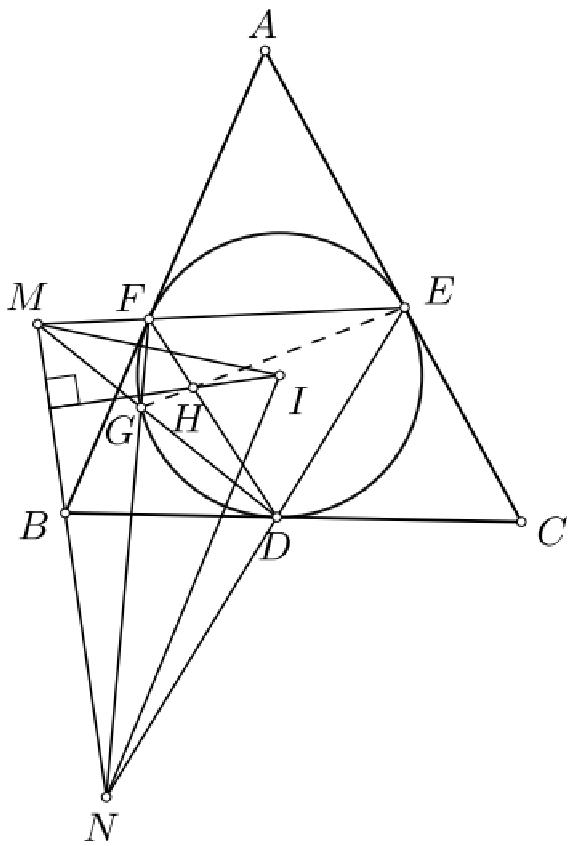
Lời giải. Gọi $P' = CF \cap BE$. Áp dụng định lí Pascal cho sau điểm $\begin{pmatrix} A & F & E \\ P' & E & F \end{pmatrix}$ với chú ý rằng ba điểm $C = AE \cap P'F$, $B = AF \cap P'E$ và $M = FF \cap EE$ thẳng hàng, suy ra $P' \in (N) = \odot(AEF)$.



Gọi $K = EF \cap AP'$ thì áp dụng định lí Brocard, ta có K là trực tâm của tam giác BCN, suy ra $NK \perp BC$. Chú ý rằng N là trung điểm AP và $AP \perp BC$. Do đó $K \in AP$. Suy ra $AP' \equiv NK \equiv AP$. Điều này chứng tỏ $P' \equiv P$. Từ đó $CP \equiv CP' \equiv CF$, tức là $CP \perp AB$. kết hợp với $AP \perp BC$ ta suy ra P là trực tâm của tam giác ABC. □

Ví dụ 13. *Cho tam giác ABC. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với BC, CA, AB thứ tự tại D, E, F. H là một điểm thuộc DF. Đường thẳng đi qua B vuông góc với IH cắt các đường thẳng EF, DE thứ tự tại M, N. Chứng minh rằng H là trực tâm của tam giác MIN.*

Lời giải. Gọi $G = MD \cap NF$. Áp dụng định lí Pascal dễ thấy $G \in (I)$.



Áp dụng định lí Brocard cho tứ giác $DEFG$ thì trực tâm của tam giác IMN phải nằm trên EF và đường thẳng qua I vuông góc với MN. Do đó $H = EF \cap IH$ chính là trực tâm của tam giác IMN. □

Nhận xét. Bài toán này được tác giả mở rộng từ ví dụ 5.

4.2. Các bài tập đề nghị

Bạn đọc hãy giải một số bài tập sau để rèn luyện phương pháp 4:

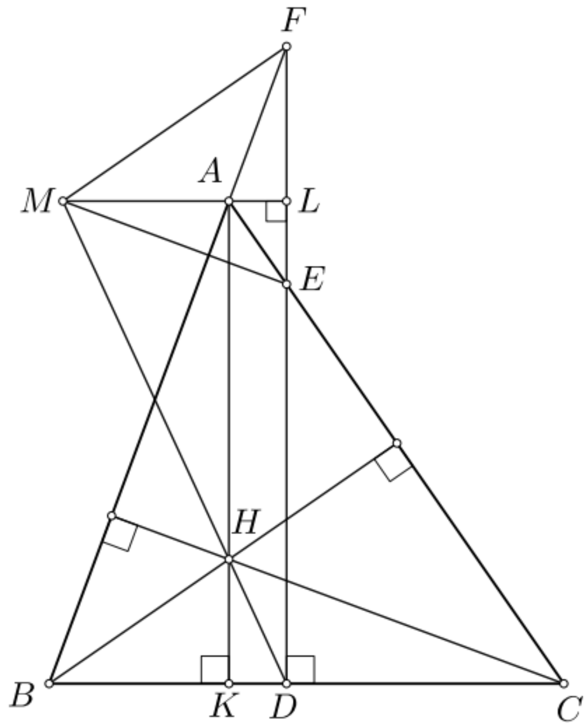
Bài tập 16 (TTT2). Cho tam giác ABC không vuông. Các đường coa BB', CC' cắt nhau tại H gọi K là trung điểm AH. Giả sử $I = AH \cap B'C'$. Chứng minh rằng I là trực tâm tam giác KBC.

Bài tập 17. Cho tam giác nhọn ABC, H là trực tâm của tam giác. BH, CH theo thứ tự cắt AC, AB tại E, F. EF cắt BC tại K và M là trung điểm BC. Chứng minh rằng H là trực tâm của tam giác AKM.

5. Phương pháp 5: Phối hợp nhiều phương pháp khác nhau

5.1. Nội dung phương pháp và các ví dụ

Ta phối hợp nhiều phương pháp khác nhau và các định lí lại với nhau để chứng minh bài toán. Chúng ta sẽ điểm qua một số ví dụ, hy vọng sẽ cung cấp cho bạn đọc một số ý tưởng mới để có thể xử lí được một bài toán liên quan đến trực tâm.



Ví dụ 14. *Cho tam giác ABC với trực tâm H. Điểm D nằm trên BC. Đường thẳng vuông góc với BC tại D cắt AB, AC thứ tự tại F và E. Chứng minh rằng trực tâm tam giác AEF nằm trên đường thẳng HD.*

Lời giải. Gọi $K = AH \cap BC$, M là trực tâm của tam giác AEF và $L = MA \cap EF$. Ta có $AKDL$ là hình chữ nhật nên $\overline{AK} = \overline{LD}$,

Dễ thấy $\triangle MEF \sim \triangle ABC$ (g.g), kết hợp với A, H theo thứ tự là trực tâm của hai tam giác này, suy ra $\frac{\overline{MA}}{\overline{ML}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AK}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{LD}}$. Theo định lí Thales, suy ra ba điểm M, H, D thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. □

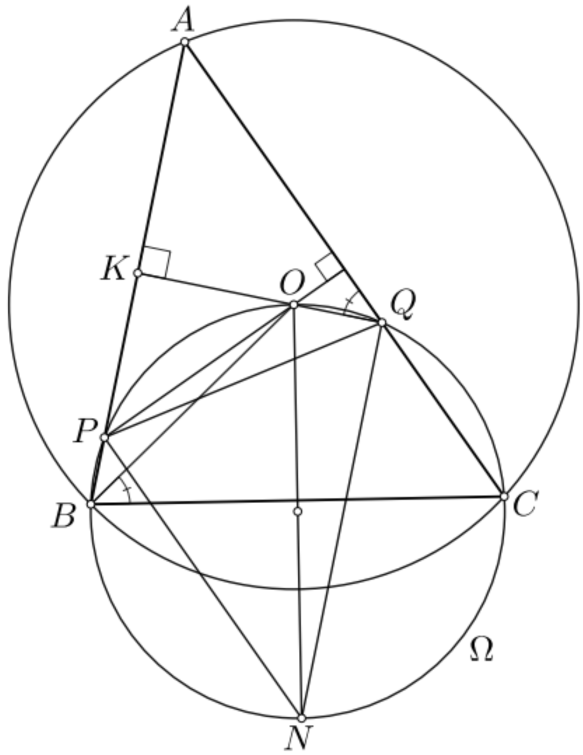
6. Ứng dụng trong chứng minh các tính chất hình học

6.1. Ứng dụng

Trong mục này, chúng ta sẽ đi tìm hiểu một vài ứng dụng của trực tâm tam giác qua một số ví dụ cụ thể sau:

Ví dụ 15 (AMPO 2010). *Cho tam giác ABC với $\widehat{BAC} \neq 90°$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác và Γ là đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC. Giả sử Γ cắt đoạn thẳng AB tại P khác B, và đoạn thẳng AC tại Q khác C. Gọi ON là đường kính của Γ. Chứng minh rằng tứ giác $APNQ$ là hình bình hành.*

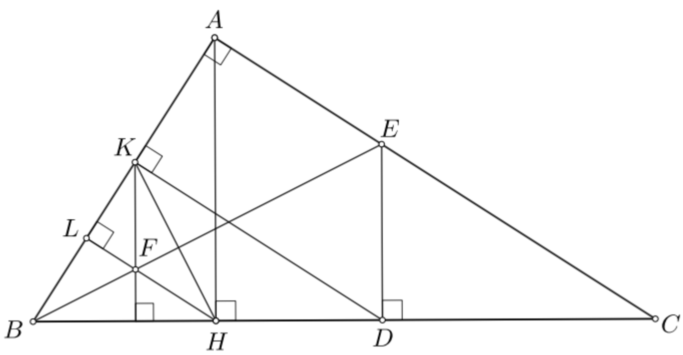
Lời giải. Gọi $K = OQ \cap AB$, Dễ thấy $\widehat{AQO} = \widehat{OBC} = 90° - \widehat{BAC} = 90° - \widehat{KAQ}$.



Suy ra tam giác AKQ vuông tại K. Do đó $\widehat{QKA} = 90° = \widehat{OQN}$ nên $AP//QN$. Tương tự $AQ//PN$. Vậy $APNQ$ là hình bình hành. □

Ví dụ 16 (TTT2). *Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, điểm D nằm giữa H và C. Kẻ DE, DK lần lượt vuông góc với BC, AB ($E \in AC, K \in AB$). Chứng minh rằng BE vuông góc với HK.*

Lời giải. Kẻ $HL \perp AB$ tại L thì $HL//AC$.



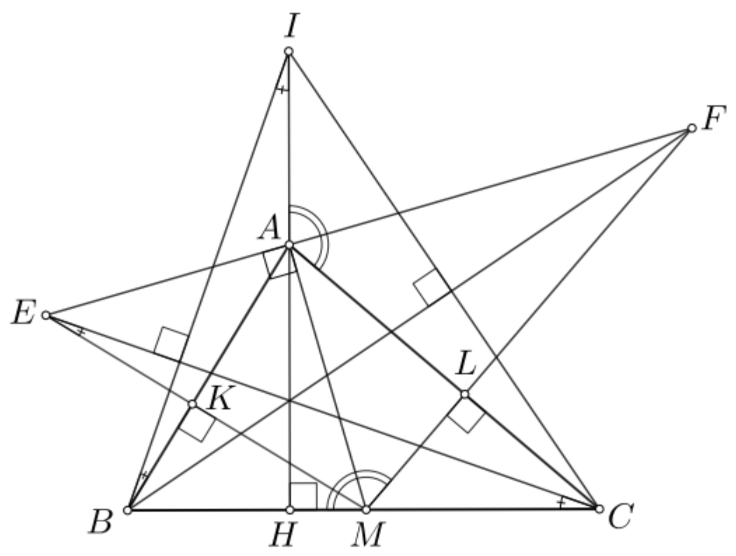
Đặt $F = HL \cap BE$. Áp dụng định lí Thales, ta có

$$\frac{FH}{FL} = \frac{EC}{AC} = \frac{DC}{DH} = \frac{KA}{KL}.$$

Từ đó suy ra $KF//AH \perp BC \equiv BH$. Điều này chứng tỏ F là trực tâm của tam giác BHK. Do đó $BF \perp HK$. □

Ví dụ 17 (TTT2). *Cho tam giác ABC nhọn, đường cao AH. Điểm M thuộc đoạn BC. Đường thẳng qua A vuông góc với AM theo thứ tự cắt các đường thẳng qua M vuông góc với AB và AC tại E và F. Chứng minh rằng: AH, BF, CE đồng quy.*

Lời giải. Gọi $K = AB \cap ME$ và $L = AC \cap MF$ đường thẳng qua B vuông góc với CE, cắt AH tại I. Ta có $\widehat{AIB} = \widehat{MCE}$ và $\widehat{ABI} = \widehat{MEC}$ nên $\triangle AIB \sim \triangle MCE$. Do đó $\frac{AI}{AB} = \frac{MC}{ME}$.



Mặt khác

$$\frac{BM}{BC} = \frac{[ABM]}{[ACM]} = \frac{MK \cdot AB}{ML \cdot AC}, \quad \frac{EM}{FM} = \frac{\frac{AM^2}{KM}}{\frac{AM^2}{LM}} = \frac{LM}{KM}.$$

Do đó

$$\frac{BM}{FM} = \frac{BM}{CM} \cdot \frac{CM}{EM} \cdot \frac{EM}{FM} = \frac{KM \cdot AB}{LM \cdot AC} \cdot \frac{AI}{AB}\frac{LM}{KM} = \frac{AI}{AC}.$$

Kết hợp với $\widehat{IAC} = \widehat{BMF}$ suy ra $\triangle AIC \sim \triangle MBF$. Từ đó dễ dàng có được $CI \perp BF$. Vậy AH, BF, CE đồng quy tại trực tâm tam giác IBC. □

6.2. Các bài tập đề nghị

Bạn đọc hãy giải một số bài tập sau để rèn luyện thêm:

Bài tập 18 (TTT2). Về phía ngoài tam giác ABC ta dựng các tam giác vuông đồng dạng ABE và ACF ($\widehat{ABE} = \widehat{ACF} = 90°$). Chứng minh rằng BF, CE và đường cao AH của tam giác đồng quy.

Bài tập 19 (Lê Viết Ân). Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O) và H là trực tâm của tam giác. AH cắt BC tại D. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AOH cắt (O) tại G khác A. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với OH, cắt BC tại E. Gọi M là trung điểm của GH, DM cắt EG tại N và K là trực tâm của tam giác GDH. Chứng minh rằng $KN//OH$.

Bài tập 20 (TTT2). Cho tam giác ABC vuông ở A, ngoại tiếp đường tròn (I, r). Kẻ đường cao AH, gọi M là trung điểm của BC, Q là giao điểm của AH và MI, E và F lần lượt là hình chiếu của A trên IB và IC. Chứng minh rằng $AQ = EF$.

Bài tập 21. Cho tam giác ABC với trung tuyến AM. Đường tròn đường kính AM cắt BC, CA, AB theo thứ tự lần thứ hai tại D, E, F. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.

Bài tập 22 (IMO 2012). Cho ABC là tam giác nhọn với trực tâm H, và W là một điểm nằm trên cạnh BC. Gọi M và N theo thứ tự là chân đường cao hạ từ các đỉnh B và C. Gọi ω_1 là đường tròn ngoại tiếp tam giác BWN, và X là điểm trên ω_1 sao cho WX là đường kính. Tương tự, gọi ω_2 là đường tròn ngoại tiếp tam giác CWM, và Y là điểm trên ω_2 sao cho WY là đường kính. Chứng minh rằng X, Y và H thẳng hàng.

Tài liệu tham khảo

[1] *Tài liệu chuyên toán hình học* 10, Đoàn Quỳnh, Văn Như Cương, Trần Nam Dũng, Nguyễn Minh Hà, Đỗ Thanh Sơn, Lê Bá Khánh Trình.

[2] https://artofproblemsolving.com/community/c6h1497688p8819767

[3] https://artofproblemsolving.com/community/c6h1391916p7767007

[4] https://artofproblemsolving.com/community/c6h1708869p11011491

[5] https://artofproblemsolving.com/community/c6h1694248p10849645

[6] https://artofproblemsolving.com/community/c6h1685247p10754378

[7] https://artofproblemsolving.com/community/c6h406967p2272760

[8] https://artofproblemsolving.com/community/c6h1468151p8509518

[9] https://artofproblemsolving.com/community/c6h1449744p8307127

[10] Các tạp chí Toán Học Tuổi Trẻ và Toán Tuổi Thơ 2.

MỘT TỔNG QUÁT CHO ĐỊNH LÝ MUSSELMAN

Trần Quang Hùng, Hà Nội

TÓM TẮT

Bài báo này đưa ra một tổng quát cho định lý Musselman, cùng với chứng minh hình học.

Trong [1, 2] đề cập tới một định lý của Musselman

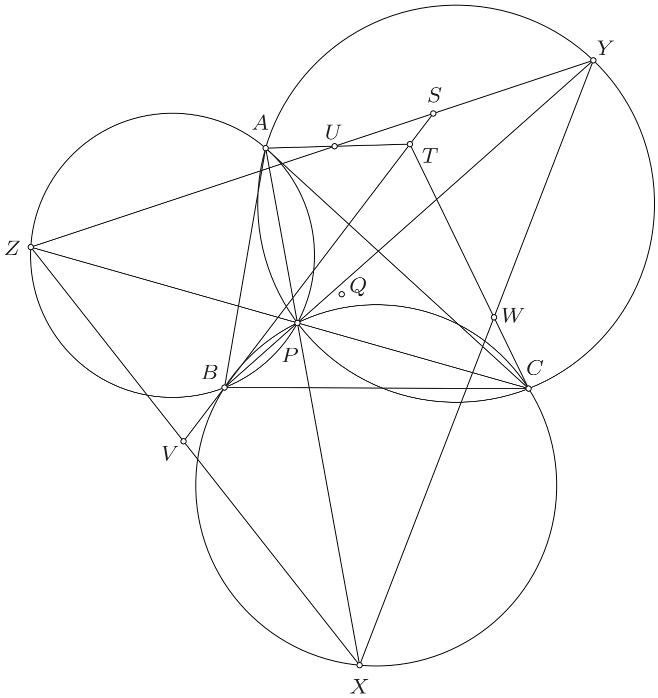
Định lý 1. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp O. Ký hiệu A^*, B^*, C^* là đối xứng của A, B, C qua các cạnh BC, CA, AB. Thì các đường tròn ngoại tiếp tam giác AOA^*, BOB^*, COC^* cắt nhau tại điểm nghịch đảo qua đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC điểm đẳng giác của tâm đường tròn chín điểm.

Trong đợt tập huấn cho đội tuyển toán Việt Nam tham dự kỳ thi Olympic toán quốc tế năm 2006, tác giả bài viết sử dụng một bài toán và lời giải trong [4]. Trong quá trình sử dụng bài toán này, tác giả có phát triển thêm bài toán đó thành hai ý 1) và 2) (ở định lý dưới đây). Điều thú vị là việc phát triển đó lại vô tình tạo ra một mở rộng thú vị cho Định lý 1. Hơn nữa, khi tác giả ra đề cho các em ở đội tuyển năm ấy, tác giả lại nhận được sự đóng góp nhiệt tình của nhiều thành viên đội tuyển với những lời giải thú vị khác nhau. Cuối cùng nhờ có sự cần mẫn và nhiệt tình biên tập của bạn **Ngô Quang Dương** học trò của tác giả ở chuyên toán K48 THPT chuyên KHTN, tác giả đã hoàn thành bài viết này. Xin giới thiệu lại với bạn đọc tạp chí Epsilon, bài toán đó dưới dạng định lý như sau

Định lý 2. Cho tam giác ABC có P, Q là hai điểm đẳng giác. PA, PB, PC cắt các đường tròn (PBC), (PCA), (PAB) lần lượt tại X, Y, Z khác P. XQ, YQ, ZQ cắt YZ, ZX, XY theo thứ tự tại U, V, W. Khi đó

i) các đường thẳng AU, BV, CW tại một điểm ký hiệu là T.

ii) sáu đường tròn (AQX), (BQY), (CQZ), (AYZ), (BXZ), (CXY) có một điểm chung S chính là đẳng giác của T trong tam giác ABC.



Hình 1.

Chứng minh. i) Ta có $\angle BAZ = \angle BPZ = \angle CPY = \angle CAY$ và $\angle AZB = \angle APY = \angle ACY$ nên $\triangle ABZ \sim \triangle AYC$ g.g. Lại có $\angle QAC = \angle XAB$ và $\angle ACQ = \angle PCB = \angle PXB = \angle AXB$ nên $\triangle AQC \sim \triangle ABX$ g.g. Từ hai cặp tam giác đồng dạng trên dẫn đến $AB \cdot AC = AY \cdot AZ = AQ \cdot AX$. Suy ra $\triangle AZQ \sim \triangle AXY$(cạnh-góc-cạnh) nên $\angle AQZ = \angle AYW$, dẫn tới (QYW) đi qua A. Tương tự, (QZV) đi qua A, theo định lý Miquel, (XZW) và (XYV) cũng đi qua A.

(Phần chứng minh trên dựa trên ý tưởng của em **Phạm Nguyễn Mạnh**)

Ta lại có

$$(AV, AW) = (AV, AQ) + (AQ, AW) = (ZV, ZQ) + (YQ, YW) = (XZ, XY) + (QY, QZ) \pmod{\pi}$$

Tương tự ta có liên hệ

$$(BW, BU) = (YX, YZ) + (QZ, QX) \pmod{\pi} \quad (CU, CV) = (ZY, ZX) + (QX, QY) \pmod{\pi}$$

Suy ra

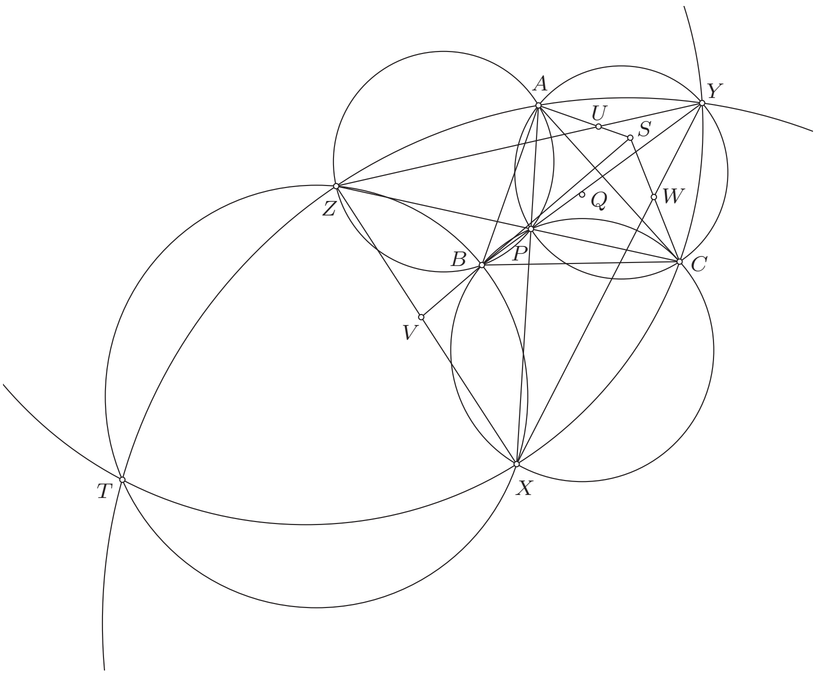
$$0 = (AV, AW) + (BW, BU) + (CU, CV) = (UC, UB) + (VA, VC) + (WB, WA) \pmod{\pi}$$

nên (UBC), (VCA), (WAB) đồng quy tại một điểm T.

Theo trên, ta đã chỉ ra (XZW), (XYV), (QYW), (QZV) đi qua A nên bằng cộng góc ta có được $\triangle ABV \sim \triangle AWC$ g.g. Tương tự, $\triangle BCW \sim \triangle BUA$ và $\triangle CAU \sim \triangle CVB$. Do các cặp tam giác trên đồng dạng cùng hướng nên ta cũng có $\triangle CAV \sim \triangle CUB$.

$$\begin{aligned}(TB, TC) &= (UB, UC) \pmod \pi \\ &= (AV, AC) \pmod \pi \\ &= (TV, TC) \pmod \pi\end{aligned}$$

Điều này cho thấy T, B, V thẳng hàng. Tương tự, AU, CW cũng đi qua T.



Hình 2.

ii) (BXZ), (CXY) cắt nhau tại S khác X thì ta có biến đổi góc

$$\begin{aligned}(SY, SZ) &= (SY, SX) + (SX, SZ) \pmod \pi \\ &= (CY, CX) + (BX, BZ) \pmod \pi \\ &= (CY, CP) + (CP, CX) + (BX, BP) + (BP, BZ) \pmod \pi \\ &= (AY, AP) + (AP, AZ) = (AY, AZ) \pmod \pi\end{aligned}$$

Vậy S nằm trên (AYZ).

(Phần chứng minh trên dựa trên ý tưởng của em **Đào Vũ Quang**)

Chú ý các tứ giác $AQVZ$, $CQUY$, $CQBX$ nội tiếp, ta có biến đổi góc

$$\begin{aligned}(SA, SX) &= (SA, SY) + (SY, SX) \pmod \pi \\ &= (ZA, ZY) + (CY, CX) \pmod \pi \\ &= (ZA, ZX) + (ZX, ZY) + (CY, CQ) + (CQ, CX) \pmod \pi \\ &= (QA, QV) + (ZX, ZY) + (UY, UQ) + (VQ, VX) \pmod \pi \\ &= (QA, QY) + (ZX, ZY) + (ZY, QX) + (QY, ZX) \pmod \pi \\ &= (QA, QX) \pmod \pi\end{aligned}$$

Từ đó S thuộc (AQX). Tương tự S thuộc các đường tròn (BQY), (CQZ).

(Phần chứng minh trên dựa trên ý tưởng của em **Vũ Đức Tài**)

Kí hiệu phép biến hình là hợp của phép nghịch đảo cực A phương tích $AB \cdot AC$ với phép đối xứng qua phân giác $\angle BAC$ là Φ thì $\Phi : B \mapsto C$, $X \mapsto Q$, $E \mapsto F$, $(AEF) \to EF$, $(AQX) \to QX$ do đó T biến thành X nên tia AS và AX đẳng giác trong $\angle BAC$ hay AU, AS đẳng giác, tương tự ở các đỉnh B, C. Vậy ta kết luận S, T đẳng giác trong tam giác ABC.

(Phần chứng minh trên dựa trên ý tưởng của tác giả bài viết). □

Chú ý. Thực ra việc lấy hợp thành của phép nghịch đảo và phép đối xứng qua đường thẳng chứa cực nghịch đảo đã được sử dụng từ rất lâu, việc làm này lần đầu tiên được đề xuất bởi nhà hình học John Wentworth Clawson trong [3]. Việc trích dẫn [3] cũng tránh cho chúng ta những sự nhầm tưởng rằng nó được gọi, đặt tên hoặc dịch sang tiếng Việt theo như một số tài liệu trôi nổi trên mạng.

Bài báo này được đăng vào những thập niên đầu của thế kỷ 20 (tức là trước thế chiến thứ 2 gần 20 năm) trên tờ báo rất nổi tiếng ngày nay là *Annals of Mathematics*. Cần lưu ý rằng thời điểm đó *Annals of Mathematics* đăng khá nhiều những bài nghiên cứu sâu về hình học sơ cấp mà các bạn có thể truy cập những bài viết này miễn phí tại cơ sở dữ liệu www.jstor.org. Ngày nay thì *Annals of Mathematics* vẫn là một trong những tờ báo được xếp vào hạng danh giá nhất của toán học mà bất kỳ người làm toán chuyên nghiệp nào cũng muốn có bài đăng trên đó.

Trong bài báo [3] có một kết quả quan trọng, dẫn ta đến phép biến hình trên. Nếu ta xét một tứ giác toàn phần tạo bởi 4 đường thẳng ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4 có điểm Miquel M, giao điểm của ℓ_i với ℓ_j là P_{ij} thì $MP_{12} \cdot MP_{34} = MP_{23} \cdot MP_{41} = MP_{31} \cdot MP_{24} = p$ và các góc $\angle P_{12}MP_{34}$, $\angle P_{23}MP_{41}$, $\angle P_{13}MP_{24}$ có chung một phân giác ℓ. Do đó nếu Φ là hợp của phép nghịch đảo cực M, phương tích p với phép đối xứng qua ℓ thì

$$\Phi : P_{12}, P_{23}, P_{31} \mapsto P_{34}, P_{14}, P_{24}$$

cũng từ đó mà Φ biến ℓ_4 thành đường tròn ngoại tiếp tam giác tạo bởi ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. Bài báo cũng chỉ ra rằng Φ biến đường tròn Miquel thành đường thẳng Steiner.

Trong Định lý 2, A chính là điểm Miquel của tứ giác toàn phần (BZ, CY, PB, PC).

Tài liệu

[1] J. R. Musselman and R. Goormaghtigh, Advanced Problem 3928, *Amer. Math. Monthly*, 46 (1939) 601; solution, 48 (1941) 281–283.

[2] K. L. Nguyen, A Synthetic Proof of Goormaghtigh's Generalization of Musselman's Theorem, *Forum Geom.*, 5 (2005) 17–20.

[3] J. W. Clawson, The Complete Quadrilateral, *Ann. Math*, Second Series, Vol. 20, No. 4 (Jul., 1919), pp. 232–261, `http://www.jstor.org/stable/1967118`.

[4] T. Q. Hung, *Mỗi tuần một bài toán hình học*, NXB ĐHQG năm 2017, pp. 47.