https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

T. Hung

# TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

7 2014
Số 445

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 51
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

Giải trí toán học

## Giải đáp: Giải nhất được thưởng $\sqrt[n]{n} \times 10^3$ \$

Mới đầu ai cũng tưởng $n$ càng lớn thì $\sqrt[n]{n}$ càng lớn, không ngờ với $n = 3$ thì sẽ được số tiền lớn nhất, tức là trong các số có dạng $\sqrt[n]{n}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) thì số $\sqrt[3]{3}$ là lớn nhất. Ta dùng phương pháp quy nạp để chứng minh mệnh đề này, tức là chứng minh: $\sqrt[3]{3} > \sqrt[n]{n} \Leftrightarrow 3^n > n^3$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $n \neq 3$. Thật vậy:

Với $n = 2$ ta có: $\sqrt[3]{3} > \sqrt[n]{n} \Leftrightarrow 3^n > n^3$ (đúng); với $n = 4$ ta có: $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} \Leftrightarrow 3^4 > 4^3 \Leftrightarrow 81 > 64$ (đúng).

Giả sử mệnh đề đúng với mỗi $n = k$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 3$ nghĩa là $3^k > k^3$.

Ta cần chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$, tức là chứng minh $3^{k+1} > (k+1)^3$. Thật vậy, ta có:

$$3^{k+1} = 3.3^k > 3.k^3 = k^3 + k^3 + \frac{1}{3}k^3 + \frac{2}{3}k^3 > k^3 + 3k^2 + \frac{1}{3}.3.3.k + \frac{2}{3}.3.3.3 > k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = (k+1)^3.$$

Vậy mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$. Do đó nếu được giải nhất, ta sẽ chọn $n = 3$, khi đó sẽ được số tiền lớn nhất là $\sqrt[3]{3}.10^3$ \$.

***Nhận xét.*** Khen ngợi em *Trần Duy Quân*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long** có lời giải đúng cho bài này.

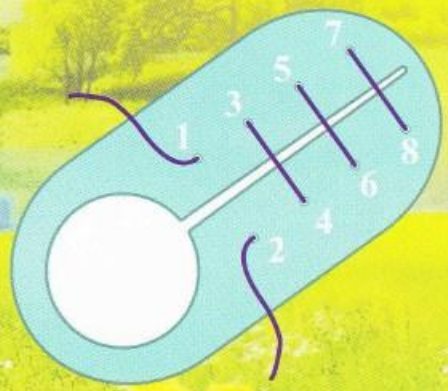
HOÀNG CHI

# Bài toán xâu dây giày

***Nhân ngày hội bóng đá thế giới WORLD CUP BRASIL 2014, mời các bạn giải bài toán xâu dây giày.***

Một chiếc giày vải thể thao có 8 lỗ để xâu dây, dây xâu vào lỗ số (1), đi xuống dưới, xâu qua mỗi lỗ chỉ một lần, và đi ra lỗ số (2). Nhìn từ bên trên ở hình vẽ, dây giày đã nối lỗ số (4) với lỗ số (3); lỗ số (6) với lỗ số (5); lỗ số (8) với lỗ số (7) và dây đã kéo căng khép gần kín hai mép vải ở giữa. Ở bên dưới, dây giày phải xâu từ lỗ ở hàng lẻ sang lỗ ở hàng chẵn. Hãy chỉ ra *kiểu xâu dây*, tức là *thứ tự* xâu dây đi khuất bên dưới hình vẽ (với ba lần nối bên trên đã biết), sao cho đoạn dây từ lỗ (1) đến lỗ (2) là ngắn nhất. Bạn hãy giải thích cách xâu dây như thế.

PHI PHI



# BÀN THÊM VỀ CÁCH GIẢI MỘT DẠNG PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

**LÝ VĂN CÔNG**
*GV THPT Thanh Bình, Thanh Hà, Hải Dương*

Trong tạp chí 442 tháng 4 năm 2014 của tác giả *Lưu Văn Biền - Trần Văn Tới* có giới thiệu cách giải cho phương trình

$$ax^2+bx+c=k.\sqrt{dx+e} \qquad (1)$$

trong đó $b, c, k, d, e \in \mathbb{R}$, $a$ là số hữu tỉ khác không, có thể đưa được về dạng

$$(mx+n)^2+k.(mx+n)=(dx+e)+k.\sqrt{dx+e} \quad (2)$$

thông qua việc giải hệ phương trình tham số (HTS) để thu được (2).

Bài viết này xin đưa ra một cách giải khác như sau:

- ***Bước 1.*** Đặt $y=\sqrt{dx+e}$

- ***Bước 2.*** Thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} ax^2+bx+c=ky \\ dx+e=y^2 \end{cases}$$

- ***Bước 3.*** Từ hệ phương trình trên ta cộng hai vế để thu được phương trình dạng

$$u^2+ku=v^2+kv.$$

Để minh họa cho cách làm, xin lấy lại *Thí dụ* trong bài viết số 442.

**✶Thí dụ 1.** *Giải phương trình*

$$x^2-3x-1=2\sqrt{x+1} \qquad (3)$$

***Lời giải.*** ĐK: $x \ge -1$.

Đặt $\sqrt{x+1}=y, y\ge 0$ thì ta thu được hệ phương trình: $\begin{cases} x^2-3x-1=2y \\ x+1=y^2 \end{cases}$.

Cộng hai phương trình trong hệ theo vế ta được $x^2-2x=y^2+2y \Leftrightarrow (x+y)(x-y-2)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-x \\ y=x-2 \end{array}\right..$$

- Với $y=-x$ ta có $\sqrt{x+1}=-x$. Giải phương trình này ta thu được $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

- Với $y=x-2$ ta có $\sqrt{x+1}=x-2$. Giải phương trình này ta thu được $x=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm

$$x=\frac{5+\sqrt{13}}{2};\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}. \ \square$$

**✶Thí dụ 2.** *Giải phương trình*

$$x^2-x-1=\sqrt{8x+1} \qquad (4)$$

***Lời giải.*** ĐK: $x\ge -\dfrac{1}{8}$.

Đặt $\sqrt{8x+1}=y, y\ge 0$ thì ta thu được hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2-x-1=y \\ 8x+1=y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-4x-4=4y \\ 8x+1=y^2 \end{cases}.$$

Cộng hai phương trình trong hệ theo vế ta được $4x^2+4x-3=y^2+4y \Leftrightarrow (2x+1)^2=(y+2)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2x-1 \\ y=-2x-3 \end{array}\right..$$

- Với $y=2x-1$ ta có $\sqrt{8x+1}=2x-1$. Giải phương trình này ta thu được $x=3$.

- Với $y=-2x-3$ ta có $\sqrt{8x+1}=-2x-3$. Giải phương trình này ta thấy vô nghiệm.

Phương trình đã cho có nghiệm $x=3$. □

**✶Thí dụ 3.** *Giải phương trình*

$$27x^2+18x=\sqrt{x+\frac{4}{3}} \quad (5)$$

***Lời giải.*** ĐK: $x\geq -\frac{4}{3}$.

Đặt $\sqrt{x+\frac{4}{3}}=y, y\geq 0$, suy ra:

$$\begin{cases}27x^2+18x=y\\ x+\frac{4}{3}=y^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}81x^2+54x=3y\\ 9x+12=9y^2\end{cases}.$$

Cộng các phương trình trong hệ theo vế ta được: $81x^2+63x+12=9y^2+3y$

$$\Leftrightarrow (9x+3)^2+(9x+3)=(3y)^2+3y$$

$$\Leftrightarrow (9x+4+3y)(3x+1-y)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}9x+4+3y=0\\ 3x+1-y=0\end{array}\right..$$

- Với $9x+4+3y=0$ ta có

$$9x+4+3\sqrt{x+\frac{4}{3}}=0.$$

Giải phương trình này ta thu được

$$x=-\frac{7+\sqrt{33}}{18}.$$

- Với $3x+1-y=0$ ta có

$$3x+1-\sqrt{x+\frac{4}{3}}=0.$$

Giải phương trình này ta được

$$x=\frac{-5+\sqrt{37}}{18}.$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm

$$x=\frac{-5+\sqrt{37}}{18};\frac{-7-\sqrt{33}}{18}.$$ □

• Tiếp theo chúng ta xét cách giải phương trình dạng: $ax^3+bx^2+cx+d=k\sqrt[3]{mx+n}$. (6)

- ***Bước 1.*** Đặt $y=\sqrt[3]{mx+n}$.

- ***Bước 2.*** Thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}ax^3+bx^2+cx+d=ky\\ mx+n=y^3\end{cases}.$$

- ***Bước 3.*** Từ hệ phương trình trên ta cộng hai vế để thu được phương trình dạng

$$u^3+ku=v^3+kv.$$

**✶Thí dụ 4.** *Giải phương trình*

$$8x^3-36x^2+53x-25=\sqrt[3]{3x-5} \quad (7)$$

***Lời giải.*** Đặt $\sqrt[3]{3x-5}=y$, ta thu được hệ phương trình: $\begin{cases}8x^3-36x^2+53x-25=y\\ 3x-5=y^3\end{cases}$.

Cộng hai phương trình trong hệ theo vế, ta được: $8x^3-36x^2+56x-30=y^3+y$

$\Leftrightarrow (2x-3)^3+(2x-3)=y^3+y \Leftrightarrow$

$(2x-3-y)(4x^2+y^2+2xy-12x-3y+10)=0$

$\Leftrightarrow 2x-3-y=0$

(vì $4x^2+y^2+2xy-12x-3y+10=$

$4x^2+(2y-12)x+y^2-3y+10>0\ \forall x,y\in\mathbb{R}$, do $\Delta_x=-16-12y^2<0\ \forall y$). Do đó ta có:

$$2x-3=\sqrt[3]{3x-5}\Leftrightarrow (2x-3)^3=3x-5$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(8x^2-20x+11)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-2=0\\ 8x^2-20x+11=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=\frac{5\pm\sqrt{3}}{4}\end{array}\right..$$

**✶Thí dụ 5.** *Giải phương trình*

$$8x^3-4x-1=\sqrt[3]{6x+1} \quad (8)$$

***Lời giải.*** Đặt $\sqrt[3]{6x+1}=y$, ta thu được hệ phương trình: $\begin{cases}8x^3-4x-1=y\\ 6x+1=y^3\end{cases}$.

(*Xem tiếp trang* 6)

# ĐƯA MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC về dạng đơn giản nhờ tính chất đơn điệu của hàm số

**CHU TUẤN** (*GV THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, Hà Nội*)

Bài viết này xin trình bày một số phương trình, hệ phương trình chứa căn thức được đưa về dạng đơn giản nhờ tính chất đơn điệu của hàm số được giới thiệu ở lớp 9.

Với $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) < f(x_2)$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến (tăng) trên $\mathbb{R}$.

Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) > f(x_2)$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến (giảm) trên $\mathbb{R}$.

Hàm số tăng hoặc giảm được gọi là hàm số đơn điệu.

Từ định nghĩa trên, ta có thể chứng minh được các kết quả sau:

***Kết quả 1.*** Nếu $f(x), g(x)$ là những hàm số tăng thì $f(x)+g(x), f(g(x))$ cũng là những hàm số tăng còn $-f(x)$ là hàm số giảm.

• $y = \sqrt[2n+1]{x}$ là hàm số đơn điệu tăng ($n \in \mathbb{N}^*$), từ đó ta thu được

***Kết quả 2.*** PT $\sqrt[2n+1]{x} + x = \sqrt[2n+1]{y} + y \Leftrightarrow x = y$.

Thật vậy, với $x < y$ thì VT < VP; với $x > y$ thì VT > VP nên các giá trị $x < y$ và $x > y$ không thỏa mãn PT, còn với $x = y$ thỏa mãn PT.

• $y = \sqrt[2n]{x}$ là hàm số đơn điệu tăng ($n \in \mathbb{N}^*$) với mọi $x \geq 0$, từ đó ta thu được

***Kết quả 3.*** PT $\sqrt[2n]{x} + x = \sqrt[2n]{y} + y \Leftrightarrow x = y$ với mọi $x, y \geq 0$.

Thật vậy, với $0 \leq x < y$ thì VT < VP; với $x > y \geq 0$ thì VT > VP nên các giá trị $0 \leq x < y$ và $x > y \geq 0$ không thỏa mãn PT, còn với $x = y \geq 0$ thỏa mãn PT.

Nhờ các kết quả trên, ta có thể biến đổi đưa được một số phương trình, hệ phương trình chứa căn thức về dạng đơn giản. Chúng ta cùng theo dõi các thí dụ sau đây.

**Thí dụ 1.** *Áp dụng Kết quả 1, giải các phương trình sau:*

a) $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{2x-1} = 4 - x^3$;

b) $\sqrt[5]{x} + \sqrt{3x+1} = 4 - \sqrt{2x-1}$;

c) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0$.

***Lời giải.***

a) ĐKXĐ: $x \geq \frac{1}{2}$. Viết lại PT đã cho thành:

$$x^3 + \sqrt{x+3} + \sqrt[4]{2x-1} = 4. \quad (1)$$

Ta thấy $x = 1$ thỏa mãn (1);

Với $x > 1$ thì VT(1) > $1 + \sqrt{4} + \sqrt[4]{1} = 4$;

Với $x < 1$ thì VT(1) < $1 + \sqrt{4} + \sqrt[4]{1} = 4$.

Điều này chứng tỏ các giá trị $x > 1$; $x < 1$ không là nghiệm của (1).

Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của PT đã cho.

b) ĐKXĐ: $x \geq \frac{1}{2}$. Viết lại PT đã cho thành:

$$\sqrt{2x-1} + \sqrt[5]{x} + \sqrt{3x+1} = 4 \quad (2)$$

Ta thấy $x = 1$ thỏa mãn (2);

Với $x > 1$ thì VT(2) > $\sqrt{1} + \sqrt[5]{1} + \sqrt{4} = 4$;

Với $x < 1$ thì VT(2) < $\sqrt{1} + \sqrt[5]{1} + \sqrt{4} = 4$.

Điều này chứng tỏ các giá trị $x > 1$; $x < 1$ không là nghiệm của (2).

Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của PT đã cho.

c) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0$. (3)

Ta thấy $x = -2$ thỏa mãn (3);

Với $x > -2$ thì VT(3) > $\sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{0} + \sqrt[3]{1} = 0$;

Với $x < -2$ thì VT(3) < $\sqrt[3]{-1}+\sqrt[3]{0}+\sqrt[3]{1}=0$.

Điều này chứng tỏ các giá trị $x > -2$; $x < -2$ không là nghiệm của (2).

Vậy $x = -2$ là nghiệm duy nhất của PT đã cho.

**Thí dụ 2.** *Giải phương trình:*

$$\sqrt[5]{2x-1}-\sqrt[5]{5x-2}=\sqrt{5x-2}-\sqrt{2x-1}$$

***Lời giải.***

ĐKXĐ: $x \ge \frac{1}{2}$. Viết lại PT đã cho thành:

$$\sqrt{5x-2}+\sqrt[5]{5x-2}=\sqrt{2x-1}+\sqrt[5]{2x-1}. \quad (4)$$

Với $5x-2<2x-1$ thì VT(4) < VP(4);

Với $5x-2>2x-1$ thì VT(4) > VP(4).

Điều này chứng tỏ các giá trị $x$ thỏa mãn ĐKXĐ và thỏa mãn $5x-2<2x-1$; $5x-2>2x-1$ không là nghiệm của (4).

Xét $5x-2=2x-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$, không thỏa mãn ĐKXĐ. Vậy PT (4) vô nghiệm.

**Thí dụ 3.** *Giải phương trình:*

$$2x+\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+3}+\sqrt{1+\sqrt{x+3}}.$$

***Lời giải.***

ĐKXĐ: $x \ge -\frac{1}{2}$.

Thêm 1 vào hai vế, PT đã cho trở thành:

$$(2x+1)+\sqrt{2x+1}=(1+\sqrt{x+3})+\sqrt{1+\sqrt{x+3}}. \quad (5)$$

Áp dụng *Kết quả 3*, ta có

$$(5) \Leftrightarrow 2x+1=1+\sqrt{x+3} \Leftrightarrow 2x=\sqrt{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 4x^2-x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\frac{3}{4}. \end{array}\right.$$

Ta thấy $x = 1$ thỏa mãn ĐKXĐ.

Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của PT đã cho.

**Thí dụ 4.** (TH&TT, Bài T5/425) *Giải phương trình:*

$$x^2-2x+7+\sqrt{x+3}=2\sqrt{1+8x}+\sqrt{1+\sqrt{1+8x}}.$$

***Lời giải.***

ĐKXĐ: $x \ge -\frac{1}{8}$. Viết lại PT đã cho thành:

$$(x+3)^2+\sqrt{x+3}=\left(1+\sqrt{1+8x}\right)^2+\sqrt{1+\sqrt{1+8x}}. \quad (6)$$

Áp dụng *Kết quả 3*, ta có

$$(6) \Leftrightarrow x+3=1+\sqrt{1+8x} \Leftrightarrow x+2=\sqrt{1+8x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ x^2-4x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

(thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy {1; 3} là tập nghiệm của PT đã cho.

**Thí dụ 5.** *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x-\sqrt[3]{y^3+y}=y-\sqrt[3]{x^3+x} \\ x^5+y^5=2. \end{cases}$$

***Lời giải.***

Viết lại HPT đã cho thành:

$$\begin{cases} x+\sqrt[3]{x^3+x}=y+\sqrt[3]{y^3+y} & (7) \\ x^5+y^5=2. & (8) \end{cases}$$

Áp dụng *Kết quả 2*, ta có $(7) \Leftrightarrow x=y$.

Thế $x=y$ vào PT (8), ta có $2y^5=2 \Leftrightarrow y=1$.

Vậy HPT đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$.

**Thí dụ 6.** *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^5-\sqrt[3]{y}=y^5-\sqrt[3]{x} \\ \sqrt{x-1}+\sqrt{3y-2}=3. \end{cases}$$

***Lời giải.***

ĐKXĐ: $x \ge 1$; $y \ge \frac{2}{3}$. Viết lại HPT đã cho thành:

$$\begin{cases} x^5+\sqrt[3]{x}=y^5+\sqrt[3]{y} & (9) \\ \sqrt{x-1}+\sqrt{3y-2}=3. & (10) \end{cases}$$

Áp dụng *Kết quả 2*, ta có $(9) \Leftrightarrow x=y$.

Thế $x=y$ vào PT (10), ta có

$$\sqrt{y-1}+\sqrt{3y-2}=3. \quad (11)$$

Ta thấy $y = 2$ thỏa mãn (11);

Với $y > 2$ thì VT(11) > 3;

Với $1 \le y < 2$ thì VT(11) < 3.

Điều này chứng tỏ các giá trị $1 \le y < 2$; $y > -2$ không là nghiệm của (11).

Suy ra $y = 2$ là nghiệm duy nhất của (11).

Vậy HPT đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 2)$.

**Thí dụ 7.** *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = (y-x)(xy+2) & (12) \\ x^2 + y^2 = 2. & (13) \end{cases}$$

***Lời giải.***

ĐKXĐ: $x \ge 0$; $y \ge 0$.

Thay $2 = x^2 + y^2$ vào VP của (12) ta có

$$\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = (y-x)(x^2 + xy + y^2)$$

$$\Leftrightarrow x^3 + \sqrt[4]{x} = y^3 + \sqrt[4]{y}. \quad (14)$$

Áp dụng *Kết quả 3*, ta có (14) $\Leftrightarrow x = y$.

Thế $x = y$ vào PT (13), ta có $2y^2 = 2 \Leftrightarrow y = 1$ (do $y \ge 0$). Vậy HPT đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$.

**Thí dụ 8.** *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^3 + x = 2(y+1)\sqrt{2y+1} & (15) \\ x - 2\sqrt{2y+1} + 1 = 0. & (16) \end{cases}$$

***Lời giải.***

ĐKXĐ: $y \ge -\dfrac{1}{2}$. Đặt $\sqrt{2y+1} = t \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 0 \\ 2y+1 = t^2. \end{cases}$

Suy ra $2(y+1)\sqrt{2y+1} = (t^2+1)t = t^3 + t$.

PT (15) trở thành $x^3 + x = t^3 + t$. (17)

Áp dụng *Kết quả 2*, ta có (17) $\Leftrightarrow x = t$, suy ra $x = \sqrt{2y+1}$. Thế $x = \sqrt{2y+1}$ vào PT (16), ta có $\sqrt{2y+1} - 2\sqrt{2y+1} + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2y+1} = 1 \Leftrightarrow y = 0$, suy ta $x = 1$.

Ta thấy $x = 1$ và $y = 0$ thỏa mãn ĐKXĐ. Vậy HPT đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 0)$.

**Thí dụ 9.** *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - \sqrt{y^4+2} = y \\ x^2 + 2x(y-1) + y^2 - 6y + 1 = 0. \end{cases}$$

(Câu 3, Đề thi Đại học Khối A & $A_1$, năm 2013)

***Lời giải.***

ĐKXĐ: $x \ge -1$. Đặt $\sqrt[4]{x-1} = t \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 0 \\ x - 1 = t^4. \end{cases}$

Suy ra $\sqrt{x+1} = \sqrt{t^4+2}$, HPT đã cho trở thành

$$\begin{cases} t + \sqrt{t^4+2} = y + \sqrt{y^4+2} & (18) \\ (x+y-1)^2 = 4y. & (19) \end{cases}$$

ĐKXĐ của HPT này là $t \ge 0$; $y \ge 0$.

Áp dụng *Kết quả 3*, ta có (18) $\Leftrightarrow t = y$.

Suy ra $x = y^4 + 1$, thay vào PT (19) ta có

$$(y^4 + y)^2 = 4y \Leftrightarrow y(y^7 + 2y^4 + y - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow y(y-1)(y^6 + y^5 + y^4 + 3y^3 + 3y^2 + 3y + 4) = 0$$

$\Leftrightarrow y = 0$ hoặc $y = 1$

(vì $y^6 + y^5 + y^4 + 3y^3 + 3y^2 + 3y + 4 \ge 4 > 0, \forall y \ge 0$).

Do đó HPT (18), (19) tương đương với hệ

$$\begin{cases} x = y^4 + 1 \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy HPT đã cho có hai nghiệm $(x; y)$ là $(1; 0)$ và $(2; 1)$.

**Thí dụ 10.** *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} 2y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} & (20) \\ y + \sqrt{2y^2+1} = 4 + \sqrt{x+4}. & (21) \end{cases}$$

***Lời giải.***

ĐKXĐ: $-4 \le x \le 1$.

Đặt $\sqrt{1-x} = t \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 0 \\ 1 - x = t^2. \end{cases}$

Suy ra $2x\sqrt{1-x} = 2t(1-t^2) = 2t - 2t^3$.

Do đó PT (20) trở thành $2y^3+y=2t^3+t$. (22)

Áp dụng *Kết quả 2* ta có (22) $\Leftrightarrow y=t$, suy ra

$$y=\sqrt{1-x}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 0\\ y^2=1-x.\end{cases}$$

Thế $y^2=1-x$ và $y=\sqrt{1-x}$ vào PT (21), ta có

$$\sqrt{1-x}+\sqrt{3-2x}=4+\sqrt{x+4}$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{3-2x}-3)+(\sqrt{1-x}-2)=\sqrt{x+4}-1$$

$$\Leftrightarrow(x+3)\left(\frac{1}{\sqrt{x+4}+1}+\frac{1}{\sqrt{1-x}+2}+\frac{2}{\sqrt{3-2x}+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=-3.$$

Từ đó suy ra $y=2$. Vậy HPT đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(-3;2)$.

*Cuối cùng, mời bạn đọc áp dụng các kết quả trên để làm các bài tập sau.*

## BÀI TẬP

Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

1. $x^3-6=\sqrt[3]{x+6}$
2. $\sqrt{5-x}-\sqrt{3x+1}=8x^2+16x-24$
3. $\sqrt{2x-1}-\sqrt{5x-2}=(5x-2)^3-(2x-1)^3$
4. $\sqrt[3]{x^2+1}+\sqrt[5]{2x^2+2}=\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[5]{x+3}$
5. $x+\sqrt{2x}=\frac{1}{x}+\sqrt{x+\frac{1}{x}}$
6. $4x^3+x-(x+1)\sqrt{2x+1}=0$
7. $\begin{cases}x^3+2x=3(y+1)\sqrt{3y+1}\\ \sqrt{2x-3}+\sqrt{3y-2}=2\end{cases}$
8. $\begin{cases}3y^3+2y+3x\sqrt{2-x}=8\sqrt{2-x}\\ \sqrt{5-4x}+\sqrt{3y+1}=3\end{cases}$
9. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4}=\sqrt{y-1}+\sqrt{y-3}+\sqrt{y-5}\\ x+y+x^2+y^2=44\end{cases}$
10. $\begin{cases}x^3+12y+x+2=8y^3+8y\\ \sqrt{x^2+8y^3}+2y=5x\end{cases}$
11. $\begin{cases}x^3-3x^2+2=\sqrt{y^3+3y^2}\\ 3\sqrt{x-2}=\sqrt{y^2+8y}\end{cases}$

## BÀN THÊM VỀ ...

*(Tiếp theo trang 2)*

Cộng hai phương trình trong hệ theo vế, ta được: $8x^3+2x=y^3+y$

$$\Leftrightarrow(2x-y)(4x^2+2xy+1+y^2)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-y=0\\ 4x^2+2xy+1+y^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-y=0\\ 3x^2+(x+y)^2+1=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow y=2x.$$

Do đó ta có : $2x=\sqrt[3]{6x+1}$

$$\Leftrightarrow 8x^3-6x-1=0\Leftrightarrow 4x^3-3x=\cos\frac{\pi}{3}.$$

Sử dụng công thức lượng giác góc nhân 3, ta thu được các nghiệm của phương trình là :

$$x=\cos\frac{\pi}{9},x=\cos\frac{5\pi}{9},x=\cos\frac{7\pi}{9}.$$

***Nhận xét.*** Rõ ràng các phương trình (1), (6) có thể giải được bằng cách này nếu thực hiện được bước 3. Đặc biệt do độ phức tạp của phương trình (6), thì trong bước 3, sau khi phân tích $(u-v)(u^2+v^2+uv+k)=0$ cần bảo đảm $u^2+v^2+uv+k=0$ phải vô nghiệm.

## MỘT SỐ BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Giải các phương trình sau:

1. $x^2=4+2\sqrt{2x+4}$.
2. $5x^2+1=2\sqrt{\frac{2x}{5}+\frac{1}{5}}$.
3. $4x^2+4x+1=2\sqrt{4x+2}$.
4. $49x^2-65x+17=3\sqrt{2x+1}$.
5. $75x^2-79x+28=2\sqrt{3x-4}$.
6. $x^3+6x^2+10x+13=2\sqrt[3]{4x-1}$.
7. $8x^3+12x^2+7x+5=2\sqrt[3]{3x-2}$.
8. $128x^3-288x^2+218x61=\sqrt[3]{x+2}$.

# ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI

## NĂM HỌC 2014 - 2015

### VÒNG 1 (*120 phút, dùng cho mọi thí sinh*)

**Câu 1.** (2 *điểm*) Cho các số thực dương $a$, $b$ với $a \neq b$. Chứng minh đẳng thức

$$\frac{\dfrac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3}-b\sqrt{b}+2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}+\frac{3a+3\sqrt{ab}}{b-a}=0.$$

**Câu 2.** (2 *điểm*) Cho quãng đường $AB$ dài 120km. Lúc 7 giờ sáng, một xe máy đi từ $A$ đến $B$. Đi được $\frac{3}{4}$ quãng đường xe bị hỏng phải dừng lại sửa mất 10 phút rồi đi tiếp đến $B$ với vận tốc nhỏ hơn vận tốc lúc đầu 10 km/h. Biết xe máy đến $B$ lúc 11 giờ 40 phút trưa cùng ngày. Giả sử vận tốc của xe máy trên $\frac{3}{4}$ quãng đường ban đầu không thay đổi và vận tốc của xe máy trên $\frac{1}{4}$ quãng đường còn lại cũng không thay đổi. Hỏi xe máy bị hỏng lúc mấy giờ?

**Câu 3.** (2 *điểm*) Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho parabol $(P)$: $y = x^2$ và đường thẳng $d$:

$$y=-\frac{2}{3}(m+1)x+\frac{1}{3} \text{ (với } m \text{ là tham số).}$$

1) Chứng minh rằng với mỗi giá trị của $m$ thì $d$ cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt.

2) Gọi $x_1$, $x_2$ là hoành độ các giao điểm của $d$ và $(P)$, đặt $f(x) = x^3 + (m+1)x^2 - x$. Chứng minh đẳng thức $f(x_1)-f(x_2)=-\frac{1}{2}(x_1-x_2)^3$.

**Câu 4.** (3 *điểm*) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O)$ đường kính $AC = 2R$. Gọi $K$ và $M$ theo thứ tự là chân các đường vuông góc hạ từ $A$ và $C$ xuống $BD$, $E$ là giao điểm của $AC$ và $BD$, biết $K$ thuộc đoạn $BE$ ($K \neq B$, $K \neq E$). Đường thẳng qua $K$ song song với $BC$ cắt $AC$ tại $P$.

1) Chứng minh tứ giác $AKPD$ nội tiếp đường tròn.

2) Chứng minh $KP \perp PM$.

3) Biết $\widehat{ABD} = 60°$ và $AK = x$. Tính $BD$ theo $R$ và $x$.

**Câu 5.** (1 *điểm*) Giải phương trình

$$\frac{x(x^2-56)}{4-7x}-\frac{21x+22}{x^3+2}=4.$$

### VÒNG 2 (*150 phút, dùng cho thí sinh thi vào chuyên Toán và chuyên Tin*)

**Câu 1.** (1,5 *điểm*) Giả sử $a$, $b$, $c$, $x$, $y$, $z$ là các số thực khác 0 thoả mãn $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ và $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Chứng minh rằng $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

**Câu 2.** (1,5 *điểm*) Tìm tất cả các số thực $x$, $y$, $z$ thoả mãn $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2}=3$.

**Câu 3.** (1,5 *điểm*) Chứng minh rằng với số nguyên dương $n \geq 6$ thì số

$$a_n=1+\frac{2.6.10\ldots(4n-2)}{(n+5)(n+6)\ldots(2n)}$$

là một số chính phương.

**Câu 4.** (1,5 *điểm*) Cho $a$, $b$, $c$ là các số thực dương thoả mãn $abc = 1$. Chứng minh bất đẳng thức $\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}\leq\frac{3}{4}$.

**Câu 5.** (3 *điểm*) Cho hình vuông $ABCD$ với tâm $O$. Gọi $M$ là trung điểm của cạnh $AB$. Các điểm $N$, $P$ theo thứ tự thuộc các cạnh $BC$, $CD$ sao cho $MN \parallel AP$. Chứng minh rằng:

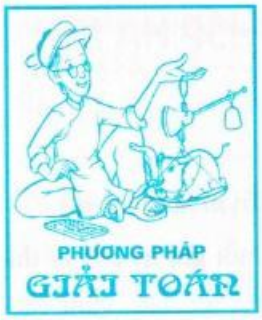
1) Tam giác $BNO$ đồng dạng với tam giác $DOP$ và $\widehat{NOP} = 45°$.

2) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $NOP$ thuộc $OC$.

3) Ba đường thẳng $BD$, $AN$, $PM$ đồng quy.

**Câu 6.** (1 *điểm*) Có bao nhiêu tập hợp con $A$ của tập hợp $\{1 ; 2 ; 3 ; \ldots ; 2014\}$ thoả mãn điều kiện: $A$ có ít nhất 2 phần tử và nếu $x \in A$, $y \in A$, $x > y$ thì $\frac{y^2}{x-y} \in A$.

**NGUYỄN THANH HỒNG**
(GV THPT Chuyên ĐHSP Hà Nội) ***giới thiệu***.




# NÉT ĐẸP TỪ BẤT ĐẲNG THỨC SCHUR

**CAO MINH QUANG**
(GV *THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long*)

Trên tạp chí TH&TT số 348, tháng 6 năm 2006, tác giả *Trần Xuân Đáng*, giáo viên trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định đã giới thiệu cho bạn đọc bất đẳng thức Schur và một số ứng dụng. Trong bài viết này, chúng tôi xin mời các bạn tiếp tục khai thác những kết quả đẹp của bất đẳng thức này.

***Trước hết xin nhắc lại bất đẳng thức Schur:***

*Cho a, b, c là các số thực không âm và r là số thực dương. Khi đó:*

$$a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-c)(b-a)+$$
$$+c^r(c-a)(c-b)\ge 0.$$

*Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c hoặc hai trong ba số bằng nhau, số còn lại bằng 0.*

Bất đẳng thức Schur là một trong những bất đẳng thức có nhiều ứng dụng cho lớp các bất đẳng thức đồng bậc ba biến. Tuy hình thức tương đối phức tạp nhưng bất đẳng thức Schur lại có một cách chứng minh vô cùng đơn giản và đẹp đẽ như sau.

***Chứng minh.*** Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c\ge 0$. Ta có

$$a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-c)(b-a)+$$
$$+c^r(c-a)(c-b)$$
$$=c^r(a-c)(b-c)+(a-b)\left[a^r(a-c)-b^r(b-c)\right]\ge 0.$$

Trong nhiều trường hợp, ta thường chỉ áp dụng bất đẳng thức Schur ứng với những giá trị tương đối nhỏ của số thực dương *r*.

Nếu $r=1$ thì ta có

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\ge 0.$$

Một dạng tương đương của trường hợp này mà ta đặc biệt quan tâm đến là bất đẳng thức sau.

$$(a+b+c)^3+9abc\ge 4(a+b+c)(ab+bc+ca)\quad (*)$$

Đặt $s=a+b+c$.

• Khi $s=1$, ta nhận được kết quả.

**Bài toán 1.** *Nếu a, b, c là ba số thực không âm có tổng bằng 1 thì*

$$9abc\ge 4(ab+bc+ca)-1\qquad (1)$$

Bất đẳng thức (1) thật sự rất có ý nghĩa. Ta để ý rằng $ab+bc+ca\le\frac{(a+b+c)^2}{3}=\frac{1}{3}$. Phối hợp với (1) ta thu được hai bất đẳng thức sau đây.

**Bài toán 2.** [United Kingdom 1999] *Cho a, b, c là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng* $7(ab+bc+ca)\le 2+9abc$.

**Bài toán 3.** [IMO 1984] *Cho a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng* $0\le ab+bc+ca-2abc\le\frac{7}{27}$.

Chú ý rằng với các số thực bất kì *a*, *b*, *c* ta có đẳng thức

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)\left[(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\right]\quad (**)$$

Do đó từ (1), ta nhận được

**Bài toán 4.** *Cho a, b, c là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng*

$$4(a^3+b^3+c^3)+15abc\ge 1.$$

***Lời giải.*** Sử dụng (1) và (**), ta có

$$4(a^3+b^3+c^3)+15abc$$
$$=27abc+4-12(ab+bc+ca)$$
$$\ge 3\left[4(ab+bc+ca)-1\right]+4-12(ab+bc+ca)=1.$$

Và một kết quả *yếu* hơn là

**Bài toán 5.** [USA 1979] *Cho a, b, c là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng*

$$a^3+b^3+c^3+6abc\ge\frac{1}{4}.$$

Ngoài ra còn có một kết quả khá đẹp, đó là

**Bài toán 6.** *Cho a, b, c là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng*

$$6(a^3+b^3+c^3)+1 \ge 5(a^2+b^2+c^2).$$

***Lời giải.*** Sử dụng (1) và (**), ta có

$$6(a^3+b^3+c^3)+1$$
$$=1+18abc+6(a^2+b^2+c^2)-6(ab+bc+ca)$$
$$=1+5(a^2+b^2+c^2)+18abc+(a+b+c)^2 -8(ab+bc+ca)$$
$$=5(a^2+b^2+c^2)+2\left[(9abc+1-4(ab+bc+ca))\right]$$
$$\ge 5(a^2+b^2+c^2).$$

Tuy nhiên, chưa dừng lại ở đó, BĐT (1) còn rất hữu ích cho lời giải của bài toán sau.

**Bài toán 7.** [Cao Minh Quang, Problem 3533, Crux Mathematicorum] *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$ và m, n là các số thực dương thỏa mãn $6m \ge 5n$. Chứng minh rằng*

$$\frac{ma+nbc}{b+c}+\frac{mb+nca}{c+a}+\frac{mc+nab}{a+b} \ge \frac{3m+n}{2}.$$

***Lời giải.***

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta được

$$\frac{ma+nbc}{b+c}+\frac{9(ma+nbc)(b+c)}{4} \ge 3(ma+nbc)$$

Từ đó suy ra

$$\frac{ma+nbc}{b+c}+\frac{mb+nca}{c+a}+\frac{mc+nab}{a+b}$$
$$\ge 3m+3n(ab+bc+ca)-\frac{9}{4}[(ma+nbc)(1-a) +(mb+nca)(1-b)+(mc+nab)(1-c)]$$
$$=\frac{3}{4}m+\frac{3}{4}[n(ab+bc+ca)+3m(a^2+b^2+c^2)+ +9nabc]$$
$$\ge \frac{3}{4}m+\frac{3}{4}\left[n(ab+bc+ca)+3m\left(1-2(ab+bc+ca)\right) +4n(ab+bc+ca)-n\right]$$
$$\ge 3m-\frac{3}{4}n+\frac{1}{4}(5n-6m)3(ab+bc+ca)$$
$$\ge 3m-\frac{3}{4}n+\frac{1}{4}(5n-6m)(a+b+c)^2=\frac{3m+n}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

• Bây giờ, nếu cho $s=3$, khai triển (*) và thu gọn ta nhận được

$$3abc+9 \ge 4(ab+bc+ca). \quad (2)$$

Với kết quả (2) ta sẽ giải quyết được bài toán khó sau.

**Bài toán 8.** [Vasile Cirtoaje, Gabriel Dospinescu] *Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a^4+b^4+c^4=3$. Chứng minh rằng*

$$(ab)^5+(bc)^5+(ca)^5 \le 3.$$

***Lời giải.***

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$a^4+b^4+2=a^4+b^4+1+1 \ge 4\sqrt[4]{a^4b^4} \ge 4ab.$$

Suy ra $4a^5b^5 \le a^4b^4(a^4+b^4+2)$.

Do đó, nếu đặt $x=a^4$, $y=b^4$, $z=c^4$ thì ta chỉ cần chứng minh

$$xy(x+y+2)+yz(y+z+2)+zx(z+x+2) \le 12$$

trong đó x, y, z là các số không âm có tổng bằng 3.

Ta có

$$xy(x+y+2)+yz(y+z+2)+zx(z+x+2) \le 12$$
$$\Leftrightarrow (x+y+z)(xy+yz+zx)+2(xy+yz+zx) \le 12+3xyz$$
$$\Leftrightarrow 5(xy+yz+zx) \le 12+3xyz.$$

Từ (2) và chú ý rằng $xy+yz+zx \le 3$, ta suy ra $5(xy+yz+zx) \le 12+3xyz$.

• Trong trường hợp tổng quát $s \ge 0$, (*) có dạng $9abc \ge 4s(ab+bc+ca)-s^3$. (3)

Kết quả này cho ta một lời giải đẹp đối với bất đẳng thức hay sau đây.

**Bài toán 9.** [Darij Grinberg] *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1 \ge 2(ab+bc+ca).$$

***Lời giải.***

BĐT cần chứng minh tương đương với

$$(a+b+c)^2+2abc+1\ge 4(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow 2abc+1\ge 4(ab+bc+ca)-s^2$$

với $s=a+b+c$.

Tuy nhiên, từ (3) ta có

$$\frac{9}{s}abc\ge 4(ab+bc+ca)-s^2.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$2abc+1\ge\frac{9}{s}abc \text{ hay } \left(\frac{9}{s}-2\right)abc\le 1.$$

Nếu $s\ge\frac{9}{2}$ thì hiển nhiên bất đẳng thức đúng.

Ngược lại, áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta được

$$\left(\frac{9}{s}-2\right)abc\le\frac{9-2s}{s}.\frac{s^3}{27}$$

$$\le\frac{1}{27}\left(\frac{s+s+(9-2s)}{3}\right)^3=1.$$

Nếu khéo léo vận dụng đẳng thức (**), ta sẽ có bài toán sau.

**Bài toán 10.** [Cao Minh Quang] *Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng*

$$a^3+b^3+c^3+6abc\ge a+b+c.$$

***Lời giải.*** Với $s=a+b+c$, ta có

$$a^3+b^3+c^3+6abc$$
$$=9abc+s(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$\ge 4s-s^3+(a^2+b^2+c^2)s-s$$
$$=s(3-s^2+a^2+b^2+c^2)=s.$$

Bài toán (*) sẽ còn rất nhiều ứng dụng. Chúc các bạn sẽ tiếp tục khám phá thêm những thú vị của kết quả đẹp này thông qua các bài tập sau.

## BÀI TẬP

**1.** [Cao Minh Quang] Cho $a$, $b$, $c$ là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$3(a^3+b^3+c^3)+5(ab+bc+ca)\ge 2.$$

**2.** [Vasile Cirtoaje] Cho $a$, $b$, $c$ là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a^3+b^3+c^3=3$. Chứng minh rằng

$$(ab)^4+(bc)^4+(ca)^4\le 3.$$

**3.** [Eward T.H.Wang] Cho $a,b,c$ là các số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$ab+bc+ca\le a^3+b^3+c^3+6abc\le a^2+b^2+c^2$$
$$\le 2(a^3+b^3+c^3)+3abc.$$

**4.** [Poland 2005] Cho $a$, $b$, $c$ là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3+6abc\ge 9.$$

**5.** Cho $a$, $b$, $c$ là các số thực không âm có tổng bằng 2. Chứng minh rằng

$$27(a^2+b^2+c^2)+54abc\ge 52.$$

**6.** Cho $a$, $b$, $c$ là các số thực không âm có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+abc\ge 4.$$

**7.** Cho $a$, $b$, $c$ là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$2(a^2+b^2+c^2)+12$$
$$\ge 3(a+b+c)+3(ab+bc+ca)$$

**8.** [Olympic 30/4] Cho $a$, $b$, $c$ là các số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$2(a^3+b^3+c^3)+3(a^2+b^2+c^2)+12abc\ge\frac{5}{3}.$$

**9.** [APMO 2004] Cho $a$, $b$, $c$ là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 9(ab+bc+ca).$$

# ỨNG DỤNG TỪ HAI ĐỊNH LÍ CƠ BẢN

**HUỲNH VĂN MINH** (*GV Trường PTDTNT huyện Sa Thầy, Kon Tum*)

## I. LÍ THUYẾT

### 1. Định lí cơ bản 1

$I$ là trung điểm đoạn thẳng $AB$ khi và chỉ khi với mọi điểm $M$ ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

**• *Hệ quả* 1**

$I$ là trung điểm đoạn thẳng $AB$ thì với mọi điểm $M$ ta có $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=2\left|\overrightarrow{MI}\right|$.

***Ứng dụng thứ nhất của Hệ quả* 1**

Cho hai điểm phân biệt $A$, $B$ và đường thẳng $d$. Gọi $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$ và điểm $M \in d$. Khi đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $M$ là hình chiếu vuông góc của $I$ trên $d$.

***Ứng dụng thứ hai của Hệ quả* 1**

Cho hai điểm phân biệt $A$, $B$ và mặt phẳng $(P)$. Gọi $I$ là trung điểm đoạn thẳng $AB$ và điểm $M \in (P)$. Khi đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $M$ là hình chiếu vuông góc của $I$ trên $(P)$.

**• *Hệ quả* 2**

Nếu $I$ là trung điểm đoạn thẳng $AB$ thì với mọi điểm $M$ ta có $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$.

***Ứng dụng thứ nhất của Hệ quả* 2**

Cho hai điểm phân biệt $A$, $B$ và đường thẳng $d$. Gọi $I$ là trung điểm đoạn thẳng $AB$ và điểm $M \in d$. Khi đó $MA^2+MB^2$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $M$ là hình chiếu vuông góc của $I$ trên $d$.

***Ứng dụng thứ hai của Hệ quả* 2**

Cho hai điểm phân biệt $A$, $B$ và mặt phẳng $(P)$. Gọi $I$ là trung điểm đoạn thẳng $AB$ và điểm $M \in (P)$. Khi đó $MA^2+MB^2$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $M$ là hình chiếu vuông góc của $I$ trên $(P)$.

### 2. Định lí cơ bản 2

Với $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$ và $M$ là điểm bất kì, ta luôn có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

**• *Hệ quả* 3**

Với $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$, với mọi điểm $M$ ta luôn có: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=3\left|\overrightarrow{MG}\right|$.

***Ứng dụng thứ nhất của Hệ quả* 3**

Cho tam giác $ABC$ và đường thẳng $d$. Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$ và điểm $M \in d$. Khi đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $M$ là hình chiếu vuông góc của $G$ trên $d$.

***Ứng dụng thứ hai của Hệ quả* 3**

Cho tam giác $ABC$ và mặt phẳng $(P)$. Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$ và điểm $M \in (P)$. Khi đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $M$ là hình chiếu vuông góc của $G$ trên $(P)$.

**• *Hệ quả* 4**

Với $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$, khi đó với mọi điểm $M$ ta luôn có $MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+\frac{1}{3}(AB^2+BC^2+CA^2)$.

***Chứng minh***

Ta có: $\overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$, suy ra

$$MG^2=\overrightarrow{MG}^2=\frac{1}{9}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)^2$$
$$=\frac{1}{9}\left(MA^2+MB^2+MC^2+2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\right.$$
$$\left.+2.\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+2.\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}\right).$$

Vì $AB^2 = \left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right)^2 = MB^2 + MA^2 - 2.\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MA}$

nên $2.\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MA} = MB^2 + MA^2 - AB^2$.

Tương tự $2.\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = MB^2 + MC^2 - BC^2$ và $2.\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = MA^2 + MC^2 - AC^2$.

Do đó $MG^2 = \frac{1}{3}\left(MA^2 + MB^2 + MC^2\right) - \frac{1}{9}\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right)$

Suy ra $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{1}{3}\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right)$.

***Ứng dụng thứ nhất của Hệ quả 4***

Cho tam giác $ABC$ và đường thẳng $d$. Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$ và điểm $M \in d$. Khi đó $MA^2 + MB^2 + MC^2$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $M$ là hình chiếu vuông góc của $G$ trên $d$.

***Ứng dụng thứ hai của Hệ quả 4***

Cho tam giác $ABC$ và mặt phẳng $(P)$. Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$ và điểm $M \in (P)$. Khi đó $MA^2 + MB^2 + MC^2$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $M$ là hình chiếu vuông góc của $G$ trên $(P)$.

## II. MỘT SỐ ỨNG DỤNG

**Bài toán 1.** *Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(3; 3; -1)$, $B(5; 3; -11)$ và đường thẳng d: $\frac{x-10}{10} = \frac{y+8}{-7} = \frac{z-2}{2}$. Tìm trên d điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất $d_{min}$ đó.*

***Lời giải.***

Theo *Ứng dụng thứ nhất của Hệ quả* 1 thì điểm $M$ thỏa mãn bài toán là hình chiếu vuông góc của điểm $I$ (là trung điểm đoạn $AB$) trên $d$. Điểm $I(4; 3; -6)$ và $d$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (10; -7; 2)$.

Vì $M \in d$ nên $M(10 + 10t; -8 - 7t; 2 + 2t)$, $\overrightarrow{IM} = (6+10t; -11-7t; 8+2t)$.

Điểm $M$ là hình chiếu vuông góc của $I$ trên $d$ khi và chỉ khi $\vec{u}.\overrightarrow{IM} = 0$, tức là

$10(6 + 10t) + 7(11 + 7t) + 2(8 + 2t) = 0$

$\Leftrightarrow 153t + 153 = 0 \Leftrightarrow t = -1$.

Vậy $M(0; -1; 0)$. Giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ bằng $2MI$ và $d_{\min} = 4\sqrt{17}$.

**Bài toán 2.** *Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm $A(3; 0; 1)$, $B(7; -6; 5)$ và mặt phẳng $(P)$: $3x - 2y + z + 4 = 0$. Tìm trên $(P)$ điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất $d_{min}$ đó.*

***Lời giải.***

Theo *Ứng dụng thứ hai của Hệ quả* 1 thì điểm $M$ thỏa mãn bài toán là hình chiếu vuông góc của điểm $I$ (là trung điểm đoạn $AB$) trên $(P)$.

Điểm $I(5; -3; 3)$. PT đường thẳng $d$ qua $I$ và vuông góc với $(P)$ là $\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -3 - 2t \\ z = 3 + t. \end{cases}$

Giải HPT $\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -3 - 2t \\ z = 3 + t \\ 3x - 2y + z + 4 = 0 \end{cases}$ ta được $t = -2$.

Khi đó hình chiếu vuông góc của $I$ trên $(P)$ là $M(-1; 1; 1)$. Giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ bằng $2MI$ và $d_{\min} = 4\sqrt{14}$.

**Bài toán 3.** *Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm $A(2; 3; 3)$, $B(2; -1; 7)$ và đường thẳng d: $\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-2}$. Tìm trên d điểm M thỏa mãn $MA^2 + MB^2$ có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất $d_{min}$ đó.*

***Lời giải.***

Theo *Ứng dụng thứ nhất của Hệ quả* 2 thì điểm $M$ thỏa mãn bài toán là hình chiếu vuông góc của điểm $I$ (là trung điểm đoạn $AB$) trên $d$.

Điểm $I(2;\ 1;\ 5)$ và $d$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3; -1; -2)$.

Điểm $M \in d$ nên $M(3 + 3t;\ 2 - t;\ -1 - 2t)$, $\overrightarrow{IM} = (1+3t;\ 1-t;\ -6-2t)$.

Điểm $M$ là hình chiếu vuông góc của $I$ trên $d$ khi và chỉ khi $\vec{u}.\overrightarrow{IM} = 0$, tức là

$3(1 + 3t) - (1 - t) - 2(-6 - 2t) = 0$

$\Leftrightarrow 14t + 14 = 0 \Leftrightarrow t = -1$.

Vậy $M(0;\ 3;\ 1)$ và giá trị nhỏ nhất $d_{\min} = 64$.

**Bài toán 4.** *Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm $A(3;\ -2;\ 2)$, $B(1;\ -8;\ 8)$ và mặt phẳng $(P)$: $x - 2y + 3z + 1 = 0$. Tìm trên $(P)$ điểm $M$ thỏa mãn $MA^2 + MB^2$ có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất $d_{min}$ đó.*

***Lời giải.***

Theo *Ứng dụng thứ hai của Hệ quả* 2 thì điểm $M$ thỏa mãn bài toán là hình chiếu vuông góc của điểm $I$ (là trung điểm đoạn $AB$) trên $(P)$.

Điểm $I(2;\ -5;\ 5)$ và PT đường thẳng $d$ chứa $I$, vuông góc với $(P)$ là $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -5 - 2t \\ z = 5 + 3t. \end{cases}$

Giải HPT $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -5 - 2t \\ z = 5 + 3t \\ x - 2y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$ ta được $t = -2$.

Khi đó tọa độ hình chiếu vuông góc của $I$ trên $(P)$ là $M(0;\ -1;\ -1)$ và $d_{\min} = 150$.

**Bài toán 5.** *Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC với $A(10;\ -2;\ 7)$, $B(-6;\ -6;\ -13)$, $C(2;\ 14;\ 6)$ và đường thẳng $d$: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z+2}{-4}$. Tìm trên $d$ điểm $M$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất $d_{min}$ đó.*

***Lời giải.***

Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$, theo *Ứng dụng thứ nhất của Hệ quả* 3 thì $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $M$ là hình chiếu vuông góc của $G$ trên $d$.

Ta có $G(2;\ 2;\ 0)$ và mặt phẳng $(P)$ qua $G$, vuông góc với $d$ có PT: $x - 5y - 4z + 8 = 0$.

Đường thẳng $d$ có PT tham số là $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -5 - 5t \\ z = -2 - 4t. \end{cases}$

Giải HPT $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -5 - 5t \\ z = -2 - 4t \\ x - 5y - 4z + 8 = 0 \end{cases}$ ta được $t = -1$.

Khi đó giao điểm của $d$ và $(P)$ là $M(0;\ 0;\ 2)$.

$M$ là hình chiếu vuông góc của $G$ trên $d$. Như lập luận trên thì $M(0;\ 0;\ 2)$ là điểm cần tìm. Ta có $G(2;\ 2;\ 0)$ nên $d_{\min} = 3GM = 6\sqrt{3}$.

**Bài toán 6.** *Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC, với $A(-8;\ -5;\ 2)$, $B(4;\ 1;\ 2)$, $C(-8;\ 7;\ -4)$ và mặt phẳng $(P)$: $x - 2y + 3z - 8 = 0$. Tìm trên $(P)$ điểm $M$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất $d_{min}$ đó.*

***Lời giải.***

Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$, theo *Ứng dụng thứ hai của hệ quả* 3 thì $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $M$ là hình chiếu vuông góc của $G$ trên $(P)$.

Ta có $G(-4;\ 1;\ 0)$, PT đường thẳng $d$ đi qua $G$ và vuông góc với $(P)$ là $\begin{cases} x = -4 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3t. \end{cases}$

Giải HPT $\begin{cases} x = -4 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3t \\ x - 2y + 3z - 8 = 0 \end{cases}$ ta được $t = 1$.

Khi đó $M(-3;\ -1;\ 3)$ và $d_{\min} = 3MG = 3\sqrt{14}$.

**Bài toán 7.** *Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC, với A(5; –6; 2), B(1; 2; 0), C(3; –2; 10) và đường thẳng d:* $\frac{x-1}{1}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-3}{-1}$. *Tìm trên d điểm M sao cho* $MA^2+MB^2+MC^2$ *có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất* $d_{min}$ *đó.*

***Lời giải.***

Gọi $G$ là trọng tâm $\Delta ABC$, theo *Ứng dụng thứ nhất của hệ quả* 4 thì $MA^2+MB^2+MC^2$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $M$ là hình chiếu vuông góc của $G$ trên $d$.

Ta có $G(3; -2; 4)$. Gọi $M$ là một điểm thuộc $d$, khi đó $M(1+m; -4+m; 3-m)$ và $\overrightarrow{GM}=(-2+m; -2+m; -1-m)$, vectơ chỉ phương của $d$ là $\overrightarrow{u}=(1; 1; -1)$.

Vì $M$ là hình chiếu vuông góc của $G$ trên $d$ nên $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{u}=0$, tức là

$$-2+m-2+m+1+m=0 \Leftrightarrow m=1.$$

Khi đó $M(2; -3; 2)$.

Ta có $A(5; -6; 2)$, $B(1; 2; 0)$, $C(3; -2; 10)$, $M(2; -3; 2)$ nên $d_{min}=MA^2+MB^2+MC^2=114$.

**Bài toán 8.** *Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC, với A(5; 7; 2), B(1; –9; –2), C(9 ; –7 ; 9) và mặt phẳng (P):* $3x-y+z+1=0$. *Tìm trên (P) điểm M sao cho* $MA^2+MB^2+MC^2$ *có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất* $d_{min}$ *đó.*

***Lời giải.***

Gọi $G$ là trọng tâm $\Delta ABC$, theo *Ứng dụng thứ hai của hệ quả* 4 thì $MA^2+MB^2+MC^2$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $M$ là hình chiếu vuông góc của $G$ trên $(P)$.

Ta có $G(5; -3; 3)$, PT tham số của $d$ qua $G$ và vuông góc với $(P)$ là $\begin{cases} x=5+3t \\ y=-3-t \\ z=3+t. \end{cases}$

Giải HPT $\begin{cases} x=5+3t \\ y=-3-t \\ z=3+t \\ 3x-y+z+1=0 \end{cases}$ ta được $t=-2$.

Khi đó giao điểm của $d$ và $(P)$ là $M(-1; -1; 1)$.

Theo lập luận trên thì điểm $M$ thỏa mãn đề bài là $M(-1; -1; 1)$, $d_{min}=MA^2+MB^2+MC^2=378$.

## ĐÍNH CHÍNH

Trên TH&TT số 444, trong lời giải bài T8/440, khi áp dụng BĐT Chebyshev, BĐT nhận được đã bị ngược dấu. Xin được giải lại như sau:

Rõ ràng nếu $\Delta ABC$ đều thì ta có:

$$HA^2+HB^2+HC^2=4(HA_1^2+HB_1^2+HC_1^2) \quad (1).$$

Giả sử có (1), ta sẽ chứng minh $\Delta ABC$ đều. Thật vậy, ta đã có $HA.HA_1=HB.HB_1=HC.HC_1$ *(định lí về phương tích)*. Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow 4\left(\frac{HA_1^2}{HA.HA_1}+\frac{HB_1^2}{HB.HB_1}+\frac{HC_1^2}{HC.HC_1}\right)=\frac{HA^2}{HA.HA_1}+\frac{HB^2}{HB.HB_1}+\frac{HC^2}{HC.HC_1}$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{HA_1}{HA}+\frac{HB_1}{HB}+\frac{HC_1}{HC}\right)=\frac{HA}{HA_1}+\frac{HB}{HB_1}+\frac{HC}{HC_1}. \quad (2)$$

Ta có: $\frac{1}{S_2+S_3}\le\frac{S_2+S_3}{4S_2S_3}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}\right)$

$$\Rightarrow 4\frac{HA_1}{HA}\le\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_1}{S_3}.$$

Cùng với hai BĐT tương tự, ta thấy:

$$VT(2)\le\frac{S_2+S_3}{S_1}+\frac{S_1+S_3}{S_2}+\frac{S_1+S_2}{S_3}=\frac{HA}{HA_1}+\frac{HB}{HB_1}+\frac{HC}{HC_1}. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $S_1=S_2=S_3$, hay $H$ là trọng tâm $\Delta ABC$, suy ra $\Delta ABC$ đều.

***Thành thật xin lỗi bạn đọc.***

**TH&TT**

## Giải đáp:
## Lời giải đã hoàn chỉnh chưa ?

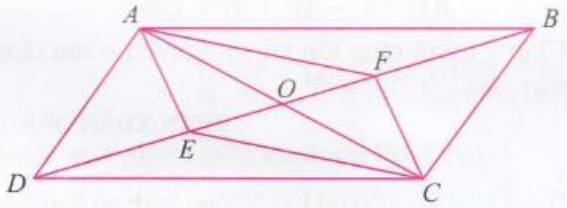
***(Đề đăng trên TH&TT số 442, tháng 4 năm 2014)***

Lời giải của bạn học sinh đó chưa hoàn chỉnh, bởi vì lời giải đó chỉ đúng trong trường hợp *E nằm giữa O và B*; *F nằm giữa O và D*. Lời giải này còn thiếu trường hợp *E nằm giữa O và D*; *F nằm giữa O và B*.

***Lời giải hoàn chỉnh:*** Xét hai trường hợp.

*Trường hợp 1.* $E$ nằm giữa $O$ và $B$; $F$ nằm giữa $O$ và $D$ (đã chứng minh).

*Trường hợp 2.* $E$ nằm giữa $O$ và $D$; $F$ nằm giữa $O$ và $B$ (hình vẽ dưới).




Từ giả thiết $BE = DF \Rightarrow BF + FE = DE + EF$ $\Rightarrow BF = DE$. Do $OB = OD$ nên

$$OF = OB - BF = OD - DE = OE.$$

Tứ giác $AECF$ là hình bình hành do có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm $O$ của mỗi đường. Vậy $AF \parallel CE$ (đpcm).

***Nhận xét.*** Các bạn sau có lời bình tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm hơn cả: *Nguyễn Duy Khương*, 8A9, THCS Giảng Võ, Ba Đình, **Hà Nội**; *Nguyễn Ngọc Thanh Tâm*, 10 Toán, THPT chuyên Thái Nguyên, **Thái Nguyên**; *Đinh Trung Thành*, 9A, THCS Đoan Hùng, **Phú Thọ**; *Trần Văn Hải*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**; *Nguyễn Văn Cường*, 11A4, THPT Ba Chúc, Tri Tôn, **An Giang**.

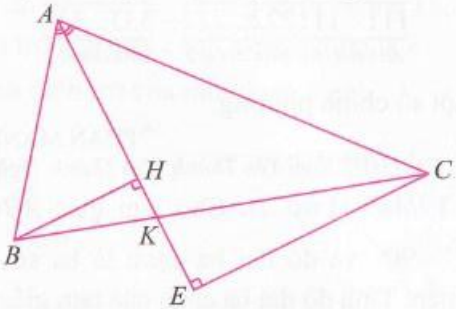
NGỌC HIỀN

## BÀI TOÁN CÓ HAI NGHIỆM HÌNH ?

***Trong giờ học toán thầy giáo cho bài tập sau:***

*Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đỉnh B(1; 2) và đường phân giác trong AK có PT: $2x + y - 1 = 0$. Biết khoảng cách từ C đến AK bằng hai lần khoảng cách từ B đến AK và điểm C nằm trên trục tung. Xác định tọa độ đỉnh A, đỉnh C.*

***Sau đây là lời giải của bạn Hùng:***




Khoảng cách từ $B$ đến $AK$ là: $d(B; AK) = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Giả sử $C$ có tọa độ $(0; c)$, theo đề bài ta có:

$$d(C; AK) = 2d(B; AK) \Leftrightarrow 2.\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{|c-1|}{\sqrt{5}}$$

$\Leftrightarrow |c-1| = 6 \Leftrightarrow c = 7$ hoặc $c = -5$.

Với $c = 7$, điểm $C$ có tọa độ $(0; 7)$ thì $B$ và $C$ nằm cùng phía đối với phân giác $AK$ (loại).

Với $c = -5$, điểm $C$ có tọa độ $(0; -5)$. Khi đó:

Giả sử $A(a; 1 - 2a)$. Do $AK$ là phân giác trong của tam giác $ABC$ nên $\frac{AB}{AC} = \frac{BK}{CK} = \frac{BH}{CE} = \frac{1}{2}$.

Suy ra $4AB^2 = AC^2$ hay

$$4\left((1-a)^2 + (1+2a)^2\right) = a^2 + (6-2a)^2$$

$$\Leftrightarrow 15a^2 + 32a - 28 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \frac{2}{3} \\ a = -\frac{14}{5} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right) \\ A\left(-\frac{14}{5}; \frac{33}{5}\right) \end{array}\right.$$

Vậy: $C(0; -5)$ và $A\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ hoặc $A\left(-\frac{14}{5}; \frac{33}{5}\right)$.

Bài toán có hai nghiệm hình.

***Theo các bạn thì bạn Hùng giải đúng hay sai?***

ĐÀO CHÍ THANH
*(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)*

## CÁC LỚP THCS

**Bài T1/445 (Lớp 6).** Chứng minh rằng:

$$\underbrace{\overline{111...111}}_{\text{2014 chữ số 1}}\underbrace{\overline{222...222}}_{\text{2014 chữ số 2}}-\underbrace{\overline{333...333}}_{\text{2014 chữ số 3}}$$

là một số chính phương.

PHAN MẠNH HÀ
*(GV THPT Nam Yên Thành, Yên Thành, Nghệ An)*

**Bài T2/445 (Lớp 7).** Cho tam giác $ABC$ có $\widehat{BAC} > 90^\circ$ và độ dài ba cạnh là ba số chẵn liên tiếp. Tính độ dài ba cạnh của tam giác đó.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
*(TP. Hồ Chí Minh)*

**Bài T3/445.** Cho hai số thực dương $a$, $b$ thỏa mãn $a + b$ và $ab$ là các số nguyên dương và $[a^2+ab]+[b^2+ab]$ là số chính phương, ở đó kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá $x$. Chứng minh rằng $a$, $b$ là các số nguyên dương.

NGUYỄN TẤT THU
*(GV THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa, Đồng Nai)*

**Bài T4/445.** Cho tam giác nhọn $ABC$ với các đường cao $AD$, $BE$, $CF$. Trên tia đối của các tia $DA$, $EB$, $FC$ lần lượt lấy các điểm $M$, $N$, $P$ sao cho $\widehat{BMC} = \widehat{CNA} = \widehat{APB} = 90^\circ$.

Chứng minh rằng các đường thẳng chứa các cạnh của lục giác $APBMCN$ cùng tiếp xúc với một đường tròn.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
*(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)*

**Bài T5/445.** Tìm số nguyên $m$ để phương trình $x^3 + (m + 1)x^2 - (2m - 1)x - (2m^2 + m + 4) = 0$ có nghiệm nguyên.

BÙI HẢI QUANG
*(GV THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, Phú Thọ)*

## CÁC LỚP THPT

**Bài T6/445.** Chứng minh rằng với mọi số thực $a$, $b$, $c$ lớn hơn 1 ta luôn có:

$$(\log_b a+\log_c a-1)\times(\log_c b+\log_a b-1)\times$$
$$\times(\log_a c+\log_b c-1)\le 1.$$

NGUYỄN VIỆT HÙNG
*(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)*

**Bài T7/445.** Cho tam giác nhọn $ABC$ ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn $(O)$. Các đường cao $AD$, $BE$, $CF$ cắt nhau tại $H$. Gọi $K$ là trung điểm của $BC$. Các tiếp tuyến với đường tròn $(O)$ tại $B$ và $C$ cắt nhau tại $J$. Chứng minh rằng $HK$, $JD$, $EF$ đồng quy.

HỒ QUANG VINH
*(Hà Nội)*

**Bài T8/445.** Tìm hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bị chặn trên một khoảng chứa điểm 0 và thỏa mãn

$$2f(2x) = x + f(x), \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

NGUYỄN VĂN XÁ
*(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)*

## TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

**Bài T9/445.** Cho đa thức:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x + 1964.$$

Chứng minh rằng tồn tại số nguyên $a$ sao cho $f(a)$ chia hết cho $3^{2014}$.

TRẦN XUÂN ĐÁNG
*(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định)*

**Bài T10/445.** Tồn tại hay không hàm số liên tục $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho với mọi $x \in \mathbb{R}$, trong các số $f(x)$, $f(x + 1)$, $f(x + 2)$ luôn có hai số hữu tỉ và một số vô tỉ.

NGUYỄN KIM DOĂNG
*(SV khoa Cơ Khí, ĐHBK TP. Hồ Chí Minh)*

**Bài T11/445.** Cho dãy số $\{a_n\}_1^\infty$ được xác định bởi công thức: $a_1 = 1$, $a_2 = 2014$, $a_{n+1}=\dfrac{2013a_n}{n}+\left(1+\dfrac{2013}{n-1}\right)a_{n-1}$ với mọi $n = 2$, 3, ... Tìm $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+...+\dfrac{1}{a_n}\right)$.

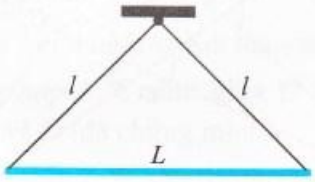
PHẠM HOÀNG HÀ
*(SV CLC K49, Toán Tin, ĐHSP Hà Nội)*

**Bài T12/445.** Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn $(I)$. Các cạnh $AB$, $BC$ tiếp xúc với $(I)$ lần lượt tại $M$, $N$. Gọi $E$ là giao điểm của $AC$ và $MN$; $F$ là giao điểm của $BC$ và $DE$. $DM$ cắt $(I)$ tại điểm $T$ khác $M$. Chứng minh rằng $FT$ là tiếp tuyến của $(I)$.

TRẦN QUỐC LUẬT
*(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)*

## CÁC ĐỀ VẬT LÍ

**Bài L1/445.** Một thanh cứng đồng chất, tiết diện đều, chiều dài $L$ được treo nằm ngang bởi hai sợi dây mảnh, không giãn cùng chiều dài $l$ như hình vẽ. Kích thích cho thanh cứng dao động nhỏ trong mặt phẳng hai dây. Xác định chiều dài $l$ theo $L$ để chu kì dao động của thanh là nhỏ nhất và tính chu kì đó.



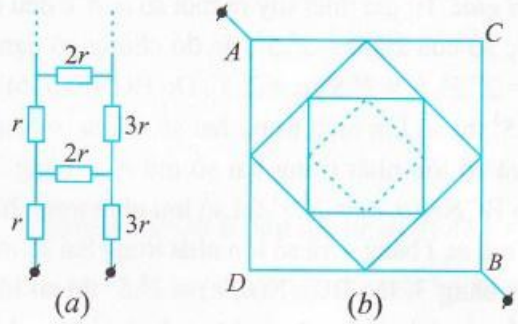

NGUYỄN NHẬT HUY
*(Hà Nội)*

**Bài L2/445.** *Mạch điện vô hạn là mạch điện tạo thành từ vô số mắt mạch giống nhau, nối liên tiếp theo một quy luật nhất định, sao cho khi thêm vào (hay bớt đi) một mắt mạch thì điện trở của cả đoạn mạch vẫn không thay đổi.*

Cho mạch điện vô hạn biểu diễn trên các sơ đồ $(a)$ và $(b)$.

Mạch $(a)$ tạo thành từ vô số các mắt như nhau gồm có ba điện trở $r$, $2r$, $3r$; Mạch $(b)$ tạo thành từ vô số các hình vuông, cấu tạo từ các dây dẫn đồng chất, nối nội tiếp trong hình vuông khác, mà điện trở của mỗi cạnh hình vuông là $r$.

Xác định điện trở của mỗi đoạn mạch.




TRẦN KHÁNH HẢI
*(GV THPT Quốc học Huế)*

# PROBLEMS IN THIS ISSUE

## FOR LOWER SECONDARY SCHOOL

**Problem T1/445 (For 6th grade).** Prove that

$$\underbrace{\overline{111...111}}_{2014 \text{ chữ số } 1}\underbrace{\overline{222...222}}_{2014 \text{ chữ số } 2}-\underbrace{\overline{333...333}}_{2014 \text{ chữ số } 3}$$

is a perfect square.

**Problem T2/445 (For 7th grade).** Given a triangle $ABC$ with $\widehat{BAC} > 90^\circ$ and the lengths of its sides are three consecutive even numbers. Find these lengths.

**Problem T3/445.** Let $a$, $b$ be two positive real numbers such that $a + b$, $ab$ are positive integers and $[a^2+ab]+[b^2+ab]$ is a perfect square, where $[x]$ is the greatest integer not exceeding $x$. Prove that $a$, $b$ are positive integers.

**Problem T4/445.** Let $ABC$ be an acute triangle with altitudes $AD$, $BE$, $CF$. On the opposite rays of the rays $DA$, $EB$, $FC$, choose three points $M$, $N$, $P$ respectively such that $\widehat{BMC} = \widehat{CNA} = \widehat{APB} = 90^\circ$.

Prove that the lines containing the sides of the hexagon $APBMCN$ are both tangent to a circle.

**Problem T5/445.** Find all integers $m$ such that the equation

$$x^3 + (m+1)x^2 - (2m-1)x - (2m^2+m+4) = 0$$

has an integer solution.

*(Xem tiếp trang 26)*

**Bài T1/441 (lớp 6).** *Có bao nhiêu bộ ba số nguyên dương (a; b; c) thoả mãn BCNN(a, b) = 1000, BCNN(b, c) = 2000, BCNN(a, c) = 2000?*

***Lời giải.*** Từ giả thiết suy ra mỗi số $a, b, c$ đều là ước số của $2000 = 2^4.5^3$, do đó chúng có dạng $a = 2^m.5^r$, $b = 2^n.5^s$, $c = 2^t.5^v$. Do BCNN$(a, b) = 2^3.5^3$ thì số lớn nhất trong hai số mũ $m, n$ bằng 3 và số lớn nhất trong hai số mũ $r, s$ bằng 3. Do BCNN$(a, c) = 2^4.5^3$ thì số lớn nhất trong hai số mũ $m, t$ bằng 4 và số lớn nhất trong hai số mũ $r, v$ bằng 3. Do BCNN$(b, c) = 2^4.5^3$ thì số lớn nhất trong hai số mũ $n, t$ bằng 4 và số lớn nhất trong hai số mũ $s, v$ bằng 3. Từ các điều trên phải xảy ra $t = 4$. Ta có bảng các giá trị các số mũ của bộ số $(a; b; c)$ thỏa mãn giả thiết như sau:

| $m$ | $n$ | $t$ |
|---|---|---|
| 3 | 3 | 4 |
| 3 | 2 | 4 |
| 3 | 1 | 4 |
| 3 | 0 | 4 |
| 2 | 3 | 4 |
| 1 | 3 | 4 |
| 0 | 3 | 4 |

| $r$ | $s$ | $v$ |
|---|---|---|
| 3 | 3 | 3 |
| 3 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 0 |
| 3 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 3 |
| 3 | 0 | 3 |
| 2 | 3 | 3 |
| 1 | 3 | 3 |
| 0 | 3 | 3 |

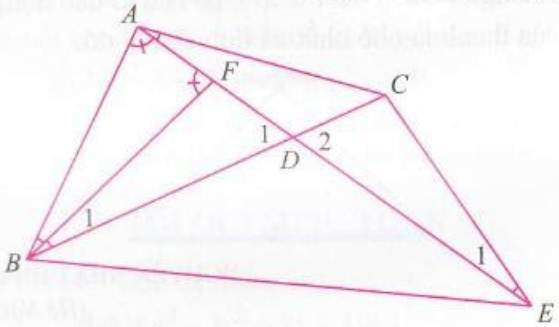
Kết hợp 7 bộ số mũ $(m; n; t)$ và 10 bộ số mũ $(r; s; v)$ thỏa mãn giả thiết sẽ có 70 bộ số $(a; b; c)$ thỏa mãn đề bài. ❐

➢ **Nhận xét.** Các bạn gửi bài giải đều không nêu đủ số nghiệm.

VIỆT HẢI

**Bài T2/441 (lớp 7).** *Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 100^\circ$, điểm D thuộc đoạn BC sao cho $\widehat{CAD} = 20^\circ$, trên tia AD lấy điểm E sao cho tam giác ACE cân tại C. Tính số đo các góc trong của tam giác BDE.*

***Lời giải.*** Kẻ tia phân giác $BF$ của $\widehat{ABD}$ ($F \in AD$), ta có $\widehat{ABF} = \widehat{DBF} = 20^\circ$ (do $\Delta ABC$ có $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 40^\circ$).




Theo giả thiết,

$\widehat{CAD} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{BAF} = 100^\circ - 20^\circ = 80^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BFA} = 180^\circ - 80^\circ - 20^\circ = 80^\circ = \widehat{BAF}$

$\Rightarrow \Delta BAF$ cân tại $B \Rightarrow BF = BA$.

Ta lại có $AB = AC = CE \Rightarrow BF = CE$.

Xét $\Delta FBD$ và $\Delta CED$ có $\widehat{B_1} = \widehat{E_1} = 20^\circ$, $BF = EC$ (chứng minh trên), $\widehat{BFD} = \widehat{ECD}$ (do $\widehat{B_1} = \widehat{E_1}$ và $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$), do đó $\Delta FBD = \Delta CED$ (g.c.g), suy ra $BD = DE$. $\Delta DBE$ cân tại $D$, có $\widehat{BDE} = \widehat{BAD} + \widehat{ABD} = 80^\circ + 40^\circ = 120^\circ$, suy ra $\widehat{DBE} = \widehat{DEB} = \dfrac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$.

CÔNG TY CỔ PHẦN GMO RUNSYSTEM, BCĐ PHONG TRÀO THI ĐUA "XÂY DỰNG TRƯỜNG HỌC THÂN THIỆN, HỌC SINH TÍCH CỰC" VÀ TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ
Phối hợp tổ chức trao thưởng thường xuyên cho học sinh được nêu tên trên Tạp chí

Vậy các góc trong của $\Delta BDE$ là $\widehat{BDE} = 120^\circ$; $\widehat{DBE} = \widehat{DEB} = 30^\circ$. ❐

➢ **Nhận xét.**

1. Bài toán này thuộc loại dễ và có dạng quen thuộc. Ngoài cách giải trên, các bạn còn đưa ra nhiều cách giải khác. Chẳng hạn, vẽ thêm tam giác đều $BDK$ ($K$ và $A$ cùng thuộc nửa mặt phẳng có bờ là $BC$) hoặc lấy điểm $H$ trên tia $DC$ sao cho $DH = DE$.

2. Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn hoặc có nhiều cách giải: **Phú Thọ:** *Nguyễn Thảo Chi, Bùi Đình Hương, Nguyễn Quốc Trung, Trần Mạnh Cường, Đỗ Trọng Tấn, Trần Quốc Lập*, 7A3, *Nguyễn Đức Mạnh*, 7A2, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Đại Thị Hiền, Đỗ Lê Huyền Ngọc*, 7A4, THCS Yên Lạc; **Nam Định:** *Nguyễn Hùng Sơn*, 7A, THCS Đào Sư Tích, Trực Ninh; **Hưng Yên:** *Lê Thị Hương Giang*, 7A, THCS Tiên Lữ; **Hải Phòng:** *Nguyễn Nữ Minh Ngọc*, 7A1, THCS Hồng Bàng; **Thanh Hóa:** *Kiều Xuân Bách, Trịnh Thái Quảng*, 7A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Nghệ An:** *Trần Lê Hiệp, Nguyễn Trần Phương Anh, Nguyễn Thu Giang, Nguyễn Văn Toàn*, 7A; *Đinh Viết Ty*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Võ Phương Tâm, Trần Ngọc Khánh*, 7B, *Hoàng Minh Khánh*, 7C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; *Cao Khắc Tân*, 7A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Hà Tĩnh:** *Bùi Bá Vũ*, 7A, THCS Phan Huy Chú, Thạch Hà; *Nguyễn Đình Nhật*, 7A, THCS T.T Cẩm Xuyên, Cẩm Xuyên; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Đại Dương*, 7B, THCS Kim Vang; *Nguyễn Lê Hoàng Duyên*, 7A, *Bùi Thị Lệ Giang*, 7D, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; **Phú Yên:** *Phạm Minh Chiến*, 7G, THCS Hùng Vương, TP. Tuy Hòa.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

**Bài T3/441.** *Tổng của m số nguyên dương chẵn khác nhau và của n số nguyên dương lẻ khác nhau bằng 2014. Tìm giá trị lớn nhất của 3m + 4n.*

***Lời giải.*** Ta có:

Tổng của $m$ số nguyên dương chẵn đôi một khác nhau luôn lớn hơn hay bằng

$$2 + 4 + \ldots + 2m = \frac{(2+2m)m}{2} = m^2 + m. \quad (1)$$

Tổng của $n$ số nguyên dương lẻ đôi một khác nhau luôn lớn hơn hay bằng

$$1 + 3 + \ldots + (2n-1) = \frac{(1+2n-1)n}{2} = n^2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $m^2 + m + n^2 \le 2014$

$$\Rightarrow \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + n^2 \le 2014\frac{1}{4}.$$

Từ đó, áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có:

$$3m + 4n = 3\left(m + \frac{1}{2}\right) + 4n - \frac{3}{2}$$

$$\le \sqrt{(3^2+4^2)\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 + n^2\right)} - \frac{3}{2} = 5.\sqrt{2014\frac{1}{4}} - \frac{3}{2}$$

$$\approx 222{,}902$$

Do $m$, $n$ nguyên dương, giả sử $3m + 4n = 222$ thì $n$ chia hết cho 3, với $t$ nguyên dương ta có hệ:

$$\begin{cases} m = 74 - 4t \\ n = 3t \\ m^2 + m + n^2 \le 2014. \ (3) \end{cases}$$

Thay $m$, $n$ vào (3) và biến đổi ta được:

$$25t^2 - 596t + 3536 \le 0. \quad (4)$$

Giải BPT (4) và chú ý $t$ nguyên dương ta được $t = 12$, khi đó $m = 26$; $n = 36$.

Ta có tổng của 26 số nguyên dương chẵn đầu tiên và 36 số nguyên dương lẻ đầu tiên là:

$2 + 4 + \ldots + 50 + 52 + 1 + 3 + \ldots + 71 = 1998$.

Do $2014 - 1998 = 16$ có thể thay đổi một số số hạng của tổng trên để có được tổng thỏa mãn điều kiện bài toán. Thí dụ, thay 52 bởi 68.

Vậy giá trị lớn nhất của $3m + 4n$ bằng 222 khi $m = 26$; $n = 36$. Có thể chỉ ra nhiều tổng thỏa mãn, như: $2 + 4 + \ldots + 50 + 68 + 1 + 3 + \ldots + 71 = 2014$. ❐

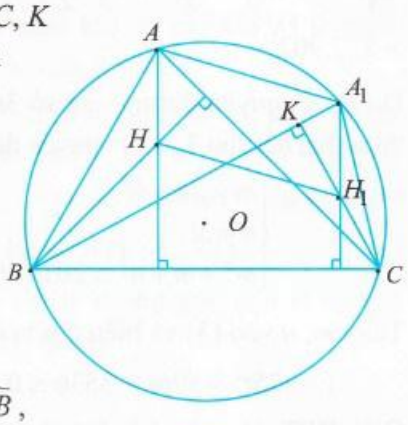
➢ **Nhận xét.**

Phần chứng minh $3m + 4n \le 5.\sqrt{2014\frac{1}{4}} - \frac{3}{2}$ ($\approx 222{,}9$) là phần quan trọng của bài toán nhưng chỉ ra tồn tại $m$, $n$ và tổng thỏa mãn điều kiện là việc cần thiết để đi đến được kết luận cuối cùng. Chỉ có hai bạn đưa ra lời giải đúng và đầy đủ là *Đặng Quỳnh Anh*, 7A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; *Lê Quang Dũng*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**.

NGUYỄN ANH QUÂN

**Bài T4/441.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Qua các điểm A, B, C ta vẽ ba đường thẳng song song với nhau (không song song với cạnh nào của tam giác ABC). Các đường thẳng này cắt (O) theo thứ tự tại $A_1$, $B_1$, $C_1$ khác A, B, C. Chứng minh rằng trực tâm của các tam giác $A_1BC$, $C_1AB$, $B_1CA$ thẳng hàng.*

***Lời giải.*** Gọi $H_1$, $H_2$, $H_3$ thứ tự là trực tâm các tam giác $A_1BC$, $B_1CA$, $C_1AB$; $H$ là trực tâm tam giác $ABC$, $K$ là hình chiếu của $C$ lên $A_1B$.




Xét hai tam giác vuông $A_1KH_1$ và $CKB$, có $\widehat{KA_1H_1} = \widehat{KCB}$,

suy ra $\Delta A_1KH_1 \backsim \Delta CKB$, ta có

$$\frac{A_1H_1}{BC} = \frac{A_1K}{KC} = \cot\widehat{BA_1C} = \cot\widehat{BAC}$$

$\Rightarrow A_1H_1 = BC\cot A$.

Tương tự, $AH = BC\cot A$, suy ra $AH = A_1H_1$. (1)

Mặt khác, $A_1H_1 \perp BC$, $AH \perp BC$ nên

$$A_1H_1 \,//\, AH \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $AHH_1A_1$ là hình bình hành, dẫn đến $AA_1 \,//\, HH_1$. Tương tự, ta có $BB_1 \,//\, HH_2$, $CC_1 \,//\, HH_3$, mà $AA_1 \,//\, BB_1 \,//\, CC_1$.

Do đó $H_1$, $H_2$, $H_3$, $H$ thẳng hàng. ❐

➢ **Nhận xét.**

Bài toán không khó, mấu chốt là chứng minh $AHH_1A_1$ là hình bình hành (có nhiều cách). Tuy nhiên chỉ có bốn bạn tham gia giải bài toán này, cả bốn bạn đều cho lời giải đúng: *Nguyễn Đức Thuận*, 9A3, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ;** *Lê Quang Dũng*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hoá, **Thanh Hoá;** *Lê Duy Anh*, 9A, THCS Nguyễn Huy Tưởng, Đông Anh, **Hà Nội;** *Nguyễn Hữu Huy*, 9A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc.**

NGUYỄN THANH HỒNG

**Bài T5/441.** *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}(1+x)(1+x^2)(1+x^4) = 1+y^7 & (1)\\ (1+y)(1+y^2)(1+y^4) = 1+x^7. & (2)\end{cases}$$

***Lời giải.*** (Dựa theo lời giải của bạn *Vũ Thi Thi*, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa hành, **Quảng Ngãi**)

HPT (1), (2) tương đương với

$$\begin{cases}x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7 = y^7\\ y+y^2+y^3+y^4+y^5+y^6+y^7 = x^7\end{cases}$$

$\Rightarrow x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7$

$= -(y+y^2+y^3+y^4+y^5+y^6+y^7)$

$\Leftrightarrow x(x+1)(x^4+x^2+1)$

$= -y(y+1)(y^4+y^2+1)$. (3)

• Nếu $x = 0$ thì từ (1) suy ra $y = 0$. Ta thấy (0; 0) là một nghiệm của hệ đã cho.

• Nếu $x = -1$ thì từ (1) suy ra $y = -1$. Ta thấy (–1; –1) cũng là một nghiệm của hệ đã cho.

• Nếu $x < -1$ thì VT(3) > 0

$\Rightarrow y(y+1) < 0 \Leftrightarrow -1 < y < 0$.

Khi đó VT(1) < 0, VP(1) > 0, mâu thuẫn.

• Nếu $x > 0$ thì VT(3) > 0

$\Rightarrow y(y+1) < 0 \Leftrightarrow -1 < y < 0$.

Khi đó VT(1) > 1, VP(1) < 1, mâu thuẫn.

• Nếu $-1 < x < 0$ thì VT(3) < 0

$\Rightarrow y(y+1) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y > 0\\ y < -1.\end{array}\right.$

- Với $y > 0$ thì VT(2) > 1, VP(2) < 1, mâu thuẫn.

- Với $y < -1$ thì VT(2) < 0, VP(2) > 0, mâu thuẫn.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $(x; y)$ là (0; 0) và (–1; –1). ❐

➢ **Nhận xét.**

Ngoài bạn *Thi*, các bạn sau cũng có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Lê Duy Anh*, 9A, THCS Nguyễn Huy Tưởng, Đông Anh; **Phú Thọ:** *Đinh Trung Thành, 9A*, THCS Đoan Hùng; **Quảng Nam:** *Lê Phước Định*, 9/1, THCS Kim Đồng, Hội An; **Bình Định:** *Nguyễn Bảo Trâm*, 7A, THCS Tây Vinh, Tây Sơn.

TRẦN HỮU NAM

**Bài T6/441.** *Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thoả mãn các điều kiện sau:*

$$\begin{cases} P(x)-10=\sqrt{P(x^2+3)-13} \quad (x\ge 0) & (1)\\ P(2014)=2024 & (2)\end{cases}$$

***Lời giải.*** Từ điều kiện (1) ta có

$$P(x^2+3)=\left(P(x)-10\right)^2+13. \qquad (3)$$

Thay $x = 2014$ vào (3) và áp dụng (2) ta được

$$P(2014^2+3)=\left(P(2014)-10\right)^2+13$$
$$=(2024-10)^2+13$$
$$=(2014^2+3)+10.$$

Đặt $x_1 = 2014^2 + 3$ thì ta có $P(x_1) = x_1 + 10$.

Lại đặt $x_2=x_1^2+3$, từ (3) suy ra

$$P(x_1^2+3)=\left(P(x_1)-10\right)^2+13$$
$$=\left((x_1+10)-10\right)^2+13=(x_1^2+3)+10.$$

Do đó $P(x_2) = x_2 + 10$.

Bằng quy nạp ta sẽ chứng minh được $P(x_n) = x_n + 10$, trong đó

$x_0=2014,\ x_n=x_{n-1}^2+3$ (với $n\in\mathbb{N}^*$).

Nhận thấy $x_0<x_1<x_2<\ldots$

Xét đa thức $Q(x) = P(x) - (x + 10)$, ta có $Q(x_n)=0$ với mọi $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Điều này chứng tỏ đa thức $Q(x)$ có vô số nghiệm $x_0, x_1, x_2, \ldots$ do đó đa thức $Q(x)$ đồng nhất với đa thức 0, tức là $Q(x) = 0$ với mọi $x$.

Suy ra $P(x) = x + 10$ với mọi $x$.

Thử lại ta thấy $P(2014) = 2014 + 10 = 2024$;

$P(x)-10=x+10-10=x$;

$\sqrt{P(x^2+3)-13}=\sqrt{x^2+3+10-13}=x$

(do $x\ge 0$).

Vậy $P(x) = x + 10$ thỏa mãn các điều kiện của bài toán. ❐

➢ **Nhận xét.**

1. Ta có kết quả bài toán tổng quát như sau: Nếu đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} P(x)-a=\sqrt{P(x^2+b)-a-b} \quad (x\ge 0)\\ P(x_0)=x_0+a\end{cases}$$

trong đó $a, b, x_0$ cho trước (với $x_0 > 0$) thì $P(x) = x + a$ với mọi $x > 0$.

2. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

**Hà Nội:** *Vũ Bá Sang*, 10 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, *Bùi Hữu Thành*, 12 Toán 1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Hưng Yên:** *Trần Bá Trung*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Phú Thọ:** *Ngô Trọng Anh Tuấn*, 11A1, THPT Thanh Ba; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Huyền Trang*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** *Lê Huy Cường*, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hòa Bình:** *Đinh Chung Mừng*, *Hoàng Bảo Linh*, 11 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Hà Tĩnh:** *Lê Văn Trường Nhật*, *Nguyễn Văn Thế*, 10T1, *Trần Hậu Mạnh Cường*, 11T4, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nghệ An:** *Dương Thị Thúy Quỳnh*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Thanh Hóa:** *Phạm Văn Thắng*, *Lê Thanh Thái Bình*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Vĩnh Long:** *Trần Duy Quân*, 11T1, *Huỳnh Hào*, 11T2, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Vũng Tàu:** *Triệu Gia Ân*, 10 Toán 2, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

**Bài T7/441.** *Cho tam giác ABC. Kí hiệu $h_a$, $h_b$, $h_c$ theo thứ tự là độ dài của các đường cao; $l_a$, $l_b$, $l_c$ theo thứ tự là độ dài của các đường phân giác trong kẻ từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{h_ah_b}+\frac{1}{h_bh_c}+\frac{1}{h_ch_a}\ge\frac{1}{l_a^2}+\frac{1}{l_b^2}+\frac{1}{l_c^2}.$$

***Lời giải.***

Với $\Delta ABC$, ta có: $2S=ah_a=bh_b=ch_c$

$$\Rightarrow\frac{1}{h_ah_b}+\frac{1}{h_bh_c}+\frac{1}{h_ch_a}=\frac{ab+bc+ca}{4S^2}; \qquad (1)$$

$$l_a=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}=\frac{2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{bc\sin A}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}=\frac{2S}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{l_a^2}=\frac{(b+c)^2\sin^2\frac{A}{2}}{4S^2}=\frac{(b+c)^2(1-\cos A)}{8S^2}$$

$$=\frac{(b+c)^2-(b+c)^2\cos A}{8S^2}. \qquad (2)$$

Lại có: $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ và $(b+c)^2 \geq 4bc$

nên $(b+c)^2\cos A \geq 2(b^2+c^2-a^2)$. (3)

Từ (2), (3) suy ra $\dfrac{1}{l_a^2} \leq \dfrac{(b+c)^2-2(b^2+c^2-a^2)}{8S^2}$

$= \dfrac{2a^2+2bc-b^2-c^2}{8S^2}$. Tương tự, ta có:

$\dfrac{1}{l_b^2} \leq \dfrac{2b^2+2ca-a^2-c^2}{8S^2}$; $\dfrac{1}{l_c^2} \leq \dfrac{2c^2+2ab-a^2-b^2}{8S^2}$.

Cộng theo từng vế ba bất đẳng thức trên và lưu ý hệ thức (1), ta có

$$\frac{1}{l_a^2}+\frac{1}{l_b^2}+\frac{1}{l_c^2} \leq \frac{ab+bc+ca}{4S^2} = \frac{1}{h_ah_b}+\frac{1}{h_bh_c}+\frac{1}{h_ch_a}.$$

Bất đẳng thức trong đề bài được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\Delta ABC$ đều. ❐

➢ **Nhận xét.**

1. Trong tam giác $ABC$ bất kì với bán kính đường tròn nội tiếp $r$, ta có $\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{1}{r}$.

Mà $\left(\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}\right)^2 \geq 3\left(\dfrac{1}{h_ah_b}+\dfrac{1}{h_bh_c}+\dfrac{1}{h_ch_a}\right)$

suy ra kết quả khá đẹp sau $\dfrac{1}{3r^2} \geq \dfrac{1}{l_a^2}+\dfrac{1}{l_b^2}+\dfrac{1}{l_c^2}$.

Bạn đọc có thể chứng minh công thức $l_a = \dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$ bằng cách: Gọi $M$ là giao điểm của đường phân giác trong của góc $A$ với $BC$, ta có $S_{ABC} = S_{ABM} + S_{AMC} \Rightarrow$ $bc\sin A = l_a(b+c)\sin\dfrac{A}{2}$; từ đó suy ra công thức trên.

2. Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Quảng Nam:** *Trần Nhật Huy*, 10/1 THPT chuyên Bắc Quảng Nam, TP. Hội An; **Gia Lai:** *Vũ Văn Quý*, 12A1, THPT Nguyễn Chí Thanh, Pleiku; **Hòa Bình:** *Đỗ Quang Vinh*, 11 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Triệu Gia Ân*, 10 Toán 2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Văn Thế*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nghệ An:** *Hồ Xuân Hùng*, 10T1, THPT Đô Lương I, Đà Sơn, Đô Lương.

NGUYỄN ANH DŨNG

**Bài T8/441.** *Biết rằng $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Hãy chứng minh trong hai số $\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)^{\frac{1}{\cos^2 x}}, \left(\dfrac{1}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ có ít nhất một số lớn hơn $\sqrt{3}$.*

***Lời giải.*** (Theo đa số các bạn)

Trong khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $0 < \sin 2x \leq 1$ nên $\dfrac{1}{\sin x\cos x} \geq 2 > \sqrt{3}$. Vậy nên, nếu cả hai số $\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)^{\frac{1}{\cos^2 x}}, \left(\dfrac{1}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ đều nhỏ hơn hoặc bằng $\sqrt{3}$ thì

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{\sin x}\right)^{\frac{1}{\cos^2 x}} \leq \sqrt{3} \\ \left(\dfrac{1}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}} \leq \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\sin x} \leq 3^{\frac{\cos^2 x}{2}} \\ \dfrac{1}{\cos x} \leq 3^{\frac{\sin^2 x}{2}} \end{cases}.$$

Suy ra $2 \leq \dfrac{1}{\sin x\cos x} \leq 3^{\frac{\cos^2 x}{2}+\frac{\sin^2 x}{2}} = \sqrt{3}$,

mâu thuẫn. Ta có đpcm. ❐

➢ **Nhận xét.**

Các bạn sau đây có lời giải đúng:

**Hà Tĩnh:** *Nguyễn Văn Thế, Lê Văn Tường Nhật* 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Thanh Hóa:** *Lê Thanh Thái Bình*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; *Lê Hùng Cường*, 11A7, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa; **Bình Định:** *Mai Tiến Luật*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hưng Yên:** *Trần Bá Trung*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Gia Lai:** *Vũ Văn Quý*, 12A1, THPT Nguyễn Chí Thanh, Pleiku; **Hà Nội:** *Hoàng Lê Nhật Tùng*, 10A2, THPT chuyên KHTN; *Trần Mạnh Hùng*, 11 Toán A, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Vĩnh Long:** *Huỳnh Hảo*, 11T2, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Nghệ An:** *Hồ Xuân Hùng*, 10T1, THPT Đô Lương I, *Trần Ngọc Linh*, 11A2, THPT Quỳnh Lưu 1; **TP. Hồ Chí Minh:** *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 10T, PTNK ĐHQG TP. Hồ Chí Minh; **Đắk Lắk:** *Nguyễn Ngọc Gia Văn*, 10CT, THPT chuyên Nguyễn Du; **Quảng Bình:** *Nguyễn Minh Ngọc, Hồ Anh Tiến*, 10T, THPT chuyên Quảng Bình.

NGUYỄN VĂN MẬU

**Bài L1/441.** *Một đứa trẻ dùng một sợi dây có độ dài l để điều khiển một mô hình máy bay có khối lượng m. Đứa trẻ cầm đầu dây di chuyển trong mặt phẳng nằm ngang theo đường tròn bán kính r. Máy bay chuyển động trong mặt phẳng nằm ngang với vận tốc không đổi v theo đường tròn bán kính R > r, ở độ cao h bên trên mặt phẳng chuyển động của nắm tay. Các tâm của hai vòng tròn cùng nằm trên một đường thẳng đứng. Trục của máy bay nằm ngang, hướng theo phương tiếp tuyến với quỹ đạo của nó. Mặt phẳng của các cánh cũng nằm ngang. Hãy xác định lực nâng tác dụng lên mô hình.*

***Lời giải.***

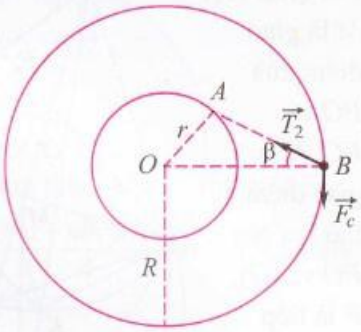
Kí hiệu $\alpha$ là góc lập bởi sợi dây và phương thẳng đứng. Lực căng dây $T$ có thành phần thẳng đứng và nằm ngang lần lượt là $T_1$ và $T_2$.

Ta có: $T_1 = T\cos\alpha = T\dfrac{h}{l}; T_2 = T\sin\alpha = T\sqrt{1-\dfrac{h^2}{l^2}}$.

Lực nâng máy bay:

$F = mg + T_1$

$= mg + T\dfrac{h}{l}$. (1)




Trên hình vẽ, $B$ là máy bay, $A$ là hình chiếu của nắm tay lên mặt phẳng quỹ đạo của máy bay. Ta có:

$$F_{ht} = T_2\cos\beta = T\sqrt{1-\frac{h^2}{l^2}}\cos\beta = m\frac{v^2}{R}. \quad (2)$$

Dùng định lí hàm số côsin cho tam giác $OAB$ ta tính được: $\cos\beta = \dfrac{R^2 + l^2 - r^2 - h^2}{2R\sqrt{l^2 - h^2}}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta tìm được:

$$F = m\left(g + \frac{2v^2h}{R^2 + l^2 - r^2 - h^2}\right). \square$$

➢ **Nhận xét.**

Bạn *Nguyễn Mạnh Dân*, 10A3, THPT Chuyên **Vĩnh Phúc** có lời giải đúng.

NGUYỄN XUÂN QUANG

**Bài L2/441.** *Cần lắp một cầu chì bảo hiểm vào mạch điện có một dây đồng đường kính d = 2mm, với yêu cầu là khi dây đồng nóng thêm $\Delta T = 8^oC$ thì dây chì ở cầu chì sẽ nóng chảy. Tính đường kính d' của dây chì cần chọn, cho biết:* Đồng có khối lượng riêng $D = 8600$ kg/m$^3$, nhiệt dung riêng $c = 395$ J/kg độ, điện trở suất $\rho = 1{,}72.10^{-8}$ Ωm; Chì có khối lượng riêng $D' = 11300$ kg/m$^3$, nhiệt dung riêng $c' = 131$ J/kg độ, nhiệt độ ban đầu $T_0 = 27^oC$, nhiệt nóng chảy $\lambda' = 25000$ J/kg, điện trở suất $\rho' = 21.10^{-8}$ Ωm; Chì nóng chảy ở $327^oC$.

***Lời giải.***

Do dây đồng và dây chì mắc nối tiếp nên cường độ dòng điện $I$ chạy qua dây đồng và dây chì như nhau.

– Khi dòng điện chạy qua dây đồng, ta có PT cân bằng nhiệt: $mc\Delta T = I^2R$

$$\Leftrightarrow DSlc\Delta T = I^2\rho\frac{l}{S} \Rightarrow DS^2c\Delta T = I^2\rho \quad (1)$$

(trong đó $R$ là điện trở của dây đồng, $S$ là tiết diện của dây đồng).

– Tại thời điểm dây chì nóng chảy, ta có PT cân bằng nhiệt: $m'c'\Delta T' + m'\lambda' = I^2R'$

$$\Leftrightarrow D'S'l'c\Delta T' + D'S'l'\lambda' = I^2\rho'\frac{l'}{S'}$$

$$\Rightarrow D'S'^2(c\Delta T' + \lambda') = I^2\rho'.$$

Từ (1), (2) và $\Delta T = 8^oC$, $\Delta T' = 327 - 27 = 300^oC$, $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$, $S' = \dfrac{\pi d'^2}{4}$, ta có:

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{Dd^4c\Delta T}{D'd'^4(c'\Delta T' + \lambda')}$$

$$\Rightarrow d' = \sqrt[4]{\frac{\rho}{\rho'}\frac{Dc\Delta T}{D'(c'\Delta T' + \lambda')}}.d.$$

Thay số ta tính được: $d' = 1{,}644$ (mm). ❐

➢ **Nhận xét.**

Trong số các bạn gửi bài kì này, bạn *Nguyễn Văn Hùng*, 11B, THPT chuyên Quang Trung, **Bình Phước** có lời giải chính xác và ngắn gọn. Ngoài ra, bạn *Phan Quốc Vương*, 11A1, THPT Diễn Châu 3, Diễn Châu, **Nghệ An** cũng có lời giải đúng.

ĐẶNG THANH HẢI

## Giải bài
## CUỘC THI GIẢI TOÁN ĐẶC BIỆT
## KỈ NIỆM 50 NĂM TẠP CHÍ TH&TT

**T3/THCS.** *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^3+y^3=x^2+xy+y^2 & (1)\\ \sqrt{6x^2y^2-x^4-y^4}=\dfrac{13}{4}(x+y)-2xy-\dfrac{3}{4}. & (2)\end{cases}$$

***Lời giải.*** (Của bạn *Lê Phước Định*, THCS Hội An, **Quảng Nam**)

Dễ thấy $x=y=0$ không phải là nghiệm.

Do đó $x^2-xy+y^2=\left(x-\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3y^2}{4}>0.$

Từ (1) suy ra $x+y=\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$

$$=3-\frac{2(x-y)^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{1}{3}+\frac{2(x+y)^2}{3(x^2-xy+y^2)}. \quad (3)$$

Từ (3) suy ra $\dfrac{1}{3}\le x+y\le 3.$ (*)

Lại có

$$\sqrt{6x^2y^2-x^4-y^4}=\sqrt{4x^2y^2-(x^2-y^2)^2}\le 2|xy|. \quad (4)$$

Từ (2) và (4) suy ra

$$\frac{13}{4}(x+y)-2xy-\frac{3}{4}\le 2|xy|. \quad (5)$$

Nếu $xy<0$ thì từ (5) ta có

$$\frac{13}{4}(x+y)-2xy-\frac{3}{4}\le -2xy\Rightarrow x+y\le\frac{3}{13}<\frac{1}{3},$$

trái với (*). Suy ra $xy\ge 0$. Từ (5) ta có:

$$\frac{13}{4}(x+y)-2xy-\frac{3}{4}\le 2xy$$

$$\Leftrightarrow\frac{13(x+y)-3}{4}\le 4xy=(x+y)^2-(x-y)^2\le(x+y)^2$$

$$\Rightarrow(x+y-3)\left(x+y-\frac{1}{4}\right)\ge 0.$$

Do $x+y\ge\dfrac{1}{3}>\dfrac{1}{4}$ nên suy ra $x+y\ge 3$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} xy>0\\ x=y\\ x+y=3\end{cases}\Rightarrow x=y=\dfrac{3}{2}.$

Thử lại ta thấy $(x;y)=\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ là nghiệm của HPT đã cho. Vậy HPT có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. ❐

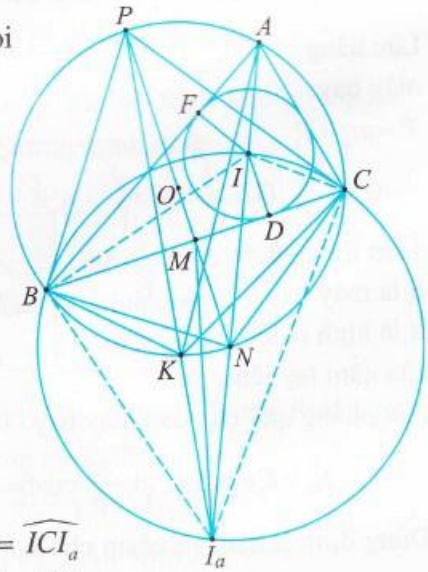
➢ **Nhận xét.**

Các bạn sau đây có lời giải tốt:

**Thanh Hóa:** *Đặng Quang Anh*, 7A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Hà Tĩnh:** *Trần Nguyễn Đức Thọ*, 9B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Quảng Bình:** *Phan Trần Hướng*, 8Đ, THCS Quách Xuân Kỳ, Bố Trạch; **Bình Định:** *Nguyễn Bảo Trân*, 7A, THCS Tây Sơn.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

**T4/THCS.** *Cho tam giác ABC, (O), (I) và $I_a$ theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh A của tam giác. Gọi D là tiếp điểm của (I) với BC; P là trung điểm cung $\widehat{BAC}$ của (O) và $PI_a$ lại cắt (O) tại K. Chứng minh rằng $\widehat{DAI}=\widehat{KAI}$.*




***Lời giải.*** Gọi $M$ là giao điểm của $PO$ và $BC$; $N$ là giao điểm thứ hai của $PO$ và $(O)$; $F$ là tiếp điểm của $(I)$ và $AB$.

Dễ thấy $\widehat{IBI_a}=90^\circ=\widehat{ICI_a}$ và $NI=NB=NC$.

Do đó $NI=NI_a=NB=NC$. Nói cách khác tứ giác $IBI_aC$ nội tiếp đường tròn $(N)$.

Vì $NM\,//\,ID$; $NI_a\equiv IA$ nên $\widehat{MNI_a}=\widehat{DIA}$.

Vì $\widehat{NMB}=90^\circ=\widehat{IFA}$; $\widehat{NBM}=\dfrac{1}{2}\widehat{BAC}=\widehat{IAF}$ nên $\Delta MNB\backsim\Delta FIA$. Kết hợp với $ID=FI$; $NB=NI_a$ suy ra $\dfrac{NM}{ID}=\dfrac{NM}{FI}=\dfrac{NB}{IA}=\dfrac{NI_a}{IA}$.

Vậy $\Delta NMI_a \backsim \Delta IDA$. (1)

Vì $NB = NI_a$; $\widehat{NBP} = 90°$; $BM \perp NP$ nên $NI_a^2 = NB^2 = NM.NP$.

Do đó $NI_a$ tiếp xúc với đường tròn $(I_aMP)$ (2)

Từ (1) và (2) với chú ý rằng $I_aP \equiv KP$; $AN \equiv AI$ suy ra

$\widehat{DAI} = \widehat{MI_aN} = \widehat{I_aPN} = \widehat{KPN} = \widehat{KAN} = \widehat{KAI}$. ❐

➢ **Nhận xét.**

Bài toán này khó, chỉ có ba bạn tham gia giải. Xin nêu tên cả ba bạn. **Quảng Nam:** *Lê Phước Định*, 9/1, THCS Kim Đồng, TP. Hội An; **Thanh Hoá:** *Đặng Quang Anh*, 7A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, *Lê Quang Dũng*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hoá.

NGUYỄN MINH HÀ

**T3/THPT.** *Dãy các số thực dương* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *thoả mãn* $a_{n+1} = \dfrac{2}{a_n + a_{n-1}}$ *với* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *Chứng minh rằng tồn tại các số thực s, t mà* $s \le a_n \le t$ *với* $n = 0, 1, 2, \ldots$

**Lời giải.** Đặt $t = \max\left\{a_0, a_1, \dfrac{1}{a_0}, \dfrac{1}{a_1}\right\}$.

Ta có: $\dfrac{1}{t} = \min\left\{a_0, a_1, \dfrac{1}{a_0}, \dfrac{1}{a_1}\right\}$. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{1}{t} \le a_i \le t \text{ với } i = n-1;\ i = n. \quad (*)$$

Với $n = 1$, khẳng định (*) đúng theo cách xác định của $t$. Giả sử khẳng định (*) đã đúng với $n = k$, tức là $\dfrac{1}{t} \le a_{k-1}, a_k \le t$. Ta chứng minh khẳng định (*) cũng đúng với $n = k + 1$.

Thật vậy: $a_{k+1} = \dfrac{2}{a_k + a_{k-1}} \le \dfrac{2}{\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t}} = t$,

$$a_{k+1} = \frac{2}{a_k + a_{k-1}} \ge \frac{2}{t + t} = \frac{1}{t}.$$

Khẳng định (*) đã được chứng minh.

Như vậy $s \le a_n \le t\ \forall n \ge 0$, trong đó $s = \dfrac{1}{t}$. ❐

➢ **Nhận xét.**

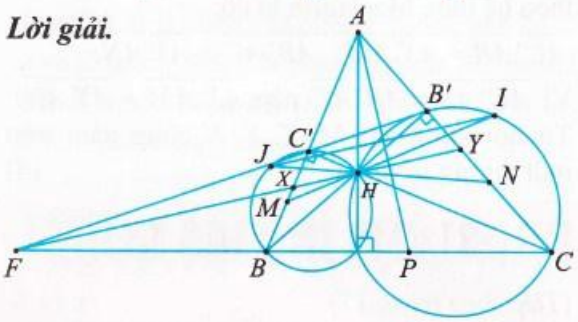
Mấu chốt của bài toán là xác định $t$ và phát biểu khẳng định (*). Có 5 bạn gửi lời giải về Tòa soạn và tất cả các bạn đều giải đúng:

**Hải phòng:** *Lương Thế Sơn*, 11T, THPT chuyên Trần Phú; **Nam Định:** *Nguyễn Hồng Đăng*, 10T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Văn Thế*, 10T1, *Trần Hậu Mạnh Cường*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **TP. Hồ Chí Minh:** *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 10T, PTNK ĐHQG TP. Hồ Chí Minh.

NGUYỄN MINH ĐỨC

**T4/THPT.** *Cho tam giác ABC (AC > AB). Các đường cao BB' và CC' của tam giác cắt nhau tại H. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BC', CB'. MH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CHB' tại I; NH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC' tại J. Giả sử P là trung điểm của cạnh BC, chứng minh rằng AP ⊥ IJ.*

***Lời giải.***




***Bổ đề.*** *(Định lí Brocard) Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O, R). Gọi E, F, H lần lượt là giao điểm của AB và CD; BC và AD; AC và BD. Khi đó O là trực tâm của tam giác EFH.*

***Chứng minh bổ đề.*** Giả sử đường tròn $(AFB)$ cắt đoạn $EF$ tại $G$. Khi đó dễ chứng minh $EGBC$, $FGDC$ là các tứ giác nội tiếp. Từ đó

$EF^2 = EG.EF + FG.FE = EC.ED + FB.FC = \mathcal{P}_{E/(O)} + \mathcal{P}_{F/(O)} = EO^2 - R^2 + FO^2 - R^2$

$= EO^2 + FO^2 - 2R^2$ (1)

Cũng có $EH^2 = EO^2 + HO^2 - 2R^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $EF^2 - EH^2 = FO^2 - HO^2$ $\Leftrightarrow EF^2 - FO^2 = EH^2 - HO^2 \Rightarrow FH \perp EO$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $EH \perp FO$.

Do đó $O$ là trực tâm của tam giác $EFH$ (đpcm).

***Trở lại bài toán.*** Đặt $k = \dfrac{HB}{HC}$ và gọi $d$ là đường thẳng chứa đường phân giác trong của $\widehat{BHC}$. Xét phép đồng dạng $\mathcal{H}(H, k) \circ S_d$ (trong đó $\mathcal{H}(H, k)$ là phép vị tự tâm $H$, tỉ số $k$; $S_d$ là

phép đối xứng qua đường thẳng $d$). Ta thấy:
$\mathcal{H}(H, k)\circ S_d : H \mapsto H; B \mapsto C; B' \mapsto C'$. Do đó
$\mathcal{H}(H, k)\circ S_d : M \mapsto N; (BHC') \mapsto (CHB')$;

$$HM \mapsto HN.$$

Từ đó $\mathcal{H}(H, k)\circ S_d : J \mapsto I$.

Vậy do $\mathcal{H}(H, k)\circ S_d : J \mapsto I; M \mapsto N$ nên dễ thấy $\overline{HM}.\overline{HI} = \overline{HN}.\overline{HJ}$, suy ra bốn điểm $M, N, I, J$ cùng nằm trên một đường tròn (3)

Giả sử $F$ là giao điểm của $B'C'$ với $BC$; $FH$ cắt $AB$, $AC$ theo thứ tự tại $X$, $Y$. Khi đó, do $(AXC'B) = (AYB'C) = -1$, với chú ý rằng $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $BC'$ và $CB'$, theo hệ thức Maclaurin ta có:
$\overline{AC'}.\overline{AB} = \overline{AX}.\overline{AM}$; $\overline{AB'}.\overline{AC} = \overline{AY}.\overline{AN}$.
Vì $\overline{AC'}.\overline{AB} = \overline{AB'}.\overline{AC}$ nên $\overline{AX}.\overline{AM} = \overline{AY}.\overline{AN}$.
Từ đó bốn điểm $M, X, Y, N$ cùng nằm trên một đường tròn (4)

Từ (3) và (4) suy ra $XY \parallel IJ$. Rõ ràng theo định lí *Brocard* thì $AP \perp FH$ hay $AP \perp XY$. Do đó $AP \perp IJ$, ta có đpcm. ❐

➢ **Nhận xét.**

1. Một số bạn đã chỉ ra $AP$ là đường trung trực của đoạn $IJ$. Để chứng minh $AP \perp IJ$, ngoài cách sử dụng định lí *Brocard*, có thể sử dụng bổ đề sau:

*Cho tam giác ABC, các đường cao BB', CC' cắt nhau tại H; F là giao điểm của B'C' với BC. Khi đó FH ⊥ AP.*

2. Các bạn sau có lời giải tốt hơn cả. **Hải Phòng:** *Lương Thế Sơn*, 11 Toán, THPT chuyên Trần Phú; **Phú Thọ:** *Phạm Ngọc Hải*, 10 Toán, *Vũ Thị Mai*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hùng Vương; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Huy*, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Hồ Xuân Hùng*, 10T1, THPT Đô Lương 1; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Văn Thế*, 10T1, *Trần Hậu Mạnh Cường*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Ninh Thuận:** *Nguyễn Trần Lê Minh*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

HỒ QUANG VINH

# PROBLEMS IN THIS ISSUE

(*Tiếp theo trang* 17)

## FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

**Problem T6/445.** Given any triple of real numbers $a, b, c > 1$. Prove the following inequality: $(\log_b a + \log_c a - 1)\times$

$$\times(\log_c b + \log_a b - 1)\times(\log_a c + \log_b c - 1) \le 1.$$

**Problem T7/445.** Let $ABC$ ($AB < AC$) be an acute triangle inscribed in a circle $(O)$. The altitudes $AD$, $BE$, $CF$ intersect at $H$. Let $K$ be the midpoint of $BC$. The tangent lines to the circle $(O)$ at $B$ and $C$ meetss at $J$. Prove that $HK$, $JD$, $EF$ are concurrent.

**Problem T8/445.** Find all functions $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that $f$ is bounded on a certain interval contaning 0 and $f$ satisfies

$$2f(2x) = x + f(x) \text{ for every } x \in \mathbb{R}.$$

## TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

**Problem T9/445.** Let $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x + 1964$ be a polynomial. Prove that there exists an integer $a$ such that $f(a)$ is divisible by $3^{2014}$.

**Problem T10/445.** Does there exist a continuous function $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying the following property: for any $x \in \mathbb{R}$, among $f(x)$, $f(x+1)$, $f(x+2)$ there are exaclty two rational numbers and one irrational number?

**Problem T11/445.** Given a sequence $\{a_n\}_1^\infty$ where: $a_1 = 1$, $a_2 = 2014$ and

$$a_{n+1} = \frac{2013a_n}{n} + \left(1 + \frac{2013}{n-1}\right)a_{n-1}.$$

Find $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)$ for $n = 2, 3, 4, \ldots$

**Problem T12/445.** Let $ABCD$ be a quadrilateral circumscribing a circle $(I)$. The sides $AB$ and $BC$ are tangent to $(I)$ at $M$ and $N$ respectively. Let $E$ be the intersection of $AC$ and $MN$, and $F$ be the intersection of $BC$ and $DE$. $DM$ intersects $(I)$ at another point, say $T$. Prove that $FT$ is tangent to $(I)$.

*Translated by* NGUYEN PHU HOANG LAN

# BÀI TOÁN 6 TRONG KÌ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA IRAN NĂM 2013

**NGUYỄN VĂN LINH**
*(SV K50 TCNH ĐH Ngoại Thương, Hà Nội)*

***(Tiếp theo kì trước)***

## III. MỞ RỘNG

★ **Bài toán 1.** *Cho 2n điểm $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_n, B_n$ $(n \geq 2)$ theo thứ tự nằm trên đường thẳng l. Hai cung $\omega_k$ và $\gamma_k$ dựng trên dây $A_kB_k$ $(k=\overline{1,n})$ sao cho 2n cung cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ l đồng thời $\omega_k$ tiếp xúc với $\omega_{k-1}$ và $\omega_{k+1}$, $\gamma_k$ tiếp xúc với $\gamma_{k-1}$ và $\gamma_{k+1}$. Khi đó giao điểm của tiếp tuyến chung ngoài của các cặp cung $\omega_1$ và $\gamma_{2k}$, $\gamma_1$ và $\omega_{2k}$ nằm trên l; giao điểm của các tiếp tuyến chung ngoài của các cặp cung $\omega_1$ và $\omega_{2k+1}$, $\gamma_1$ và $\gamma_{2k+1}$ cũng nằm trên l $(k = 1, 2, \ldots)$.*

***Chứng minh***

*Cách 1*

Để chứng minh bài toán mở rộng trước tiên ta phát biểu một bổ đề sau.

**Bổ đề 6.** *Cho 6 điểm $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ cùng nằm trên đường thẳng l sao cho các đoạn thẳng $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3$ tách rời nhau. Hai cung $\omega_i$ và $\gamma_i$ cùng dựng trên dây $A_iB_i$ $(i=\overline{1,3})$ sao cho 6 cung cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ l. Kí hiệu $d_{ij}$ là tiếp tuyến chung ngoài của cặp cung $\omega_i$ và $\omega_j$, $k_{ij}$ là tiếp tuyến chung ngoài của cặp cung $\gamma_i$ và $\gamma_j$. Giả sử giao điểm của $d_{12}$ và $k_{12}$, $d_{23}$ và $k_{23}$ cùng nằm trên l. Khi đó giao điểm của $d_{13}$ và $k_{13}$ cũng nằm trên l.*

***Lời giải.*** Gọi X, Y lần lượt là giao của $d_{12}$ và $k_{12}$, $d_{23}$ và $k_{23}$; Z là giao của $d_{13}$ và l.

Từ Z kẻ tiếp tuyến $k'_{13}$ tới $\gamma_1$ (h.9).

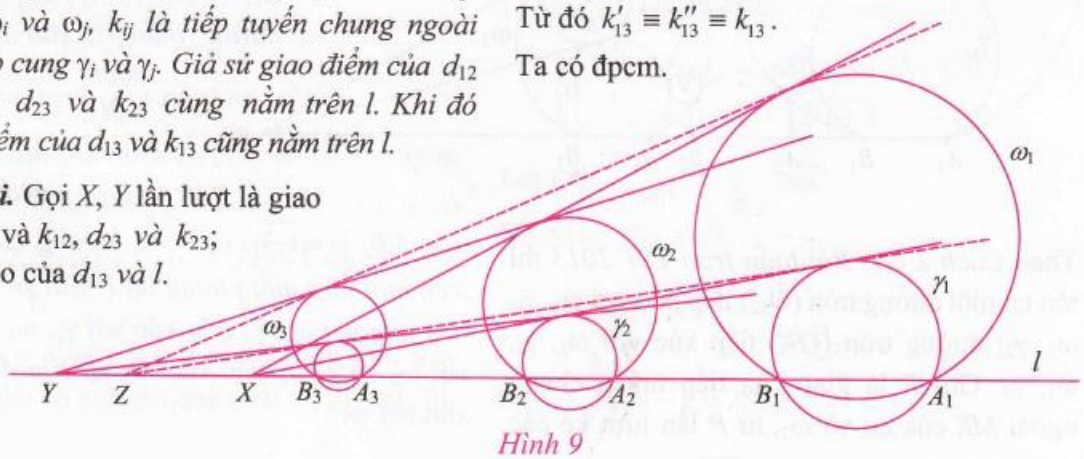
Áp dụng *Bổ đề 3* cho hai đường tròn $\omega_1$, $\gamma_1$ và hai điểm X, Z suy ra tồn tại một đường tròn $C_1$ nội tiếp tứ giác tạo bởi giao điểm của 4 đường thẳng $d_{12}, k_{12}, d_{13}, k'_{13}$. Tương tự, tồn tại đường tròn $C_2$ nội tiếp tứ giác tạo bởi giao điểm của 4 đường thẳng $d_{12}, k_{12}, d_{23}, k_{23}$. Gọi $C_3$ là đường tròn nội tiếp (hoặc bàng tiếp) của tam giác tạo bởi giao điểm của các đường thẳng $d_{13}, d_{23}, k_{23}$.

Áp dụng *định lí Monge-D'Alembert* cho ba đường tròn $C_1$, $C_2$, $C_3$ ta có X là tâm vị tự ngoài của $C_1$ và $C_2$; Y là tâm vị tự ngoài của $C_2$ và $C_3$ nên tâm vị tự ngoài của $C_1$ và $C_3$ nằm trên XY.

Do $d_{13}$ là tiếp tuyến chung của $C_1$ và $C_3$ nên $d_{13}$ cắt l tại tâm vị tự ngoài Z của $C_1$ và $C_3$. Mà $k'_{13}$ tiếp xúc với $C_1$ nên $k'_{13}$ tiếp xúc với $C_3$.

Từ Z kẻ tiếp tuyến $k''_{13}$ tới $\gamma_3$, lại áp dụng *Bổ đề 3* cho hai đường tròn $\omega_3$ và $\gamma_3$ với hai điểm Y, Z suy ra $C_3$ tiếp xúc với $k''_{13}$. Từ đó $k'_{13} \equiv k''_{13} \equiv k_{13}$.

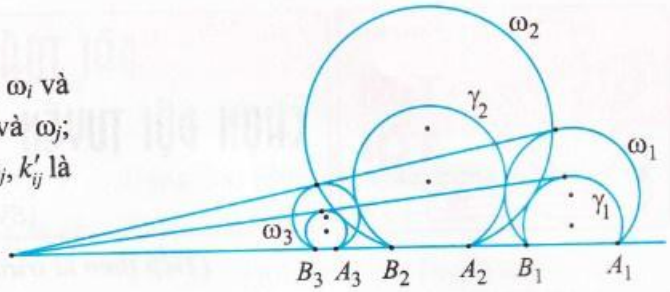
Ta có đpcm.



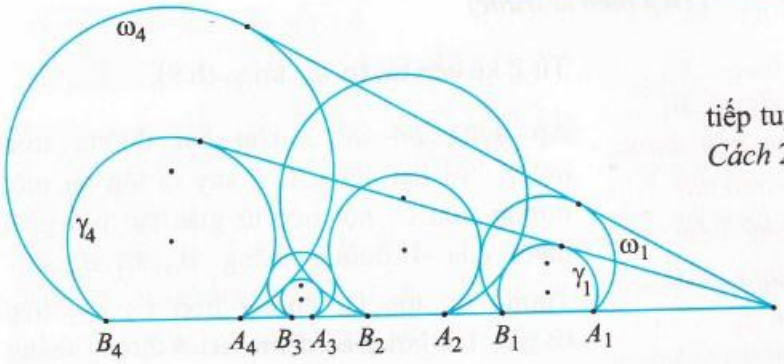

*Hình 9*

***Trở lại bài toán.*** (*h*.10, *h*.11)

Kí hiệu $d_{ij}$ là tiếp tuyến chung ngoài của $\omega_i$ và $\gamma_j$, $k_{ij}$ là tiếp tuyến chung ngoài của $\gamma_i$ và $\omega_j$; $d'_{ij}$ là tiếp tuyến chung ngoài của $\omega_i$ và $\omega_j$, $k'_{ij}$ là tiếp tuyến chung ngoài của $\gamma_i$ và $\gamma_j$ ($i < j$). Gọi $X_{ij}$ là giao của $d_{ij}$ và $k_{ij}$; $X'_{ij}$ là giao của $d'_{ij}$ và $k'_{ij}$.



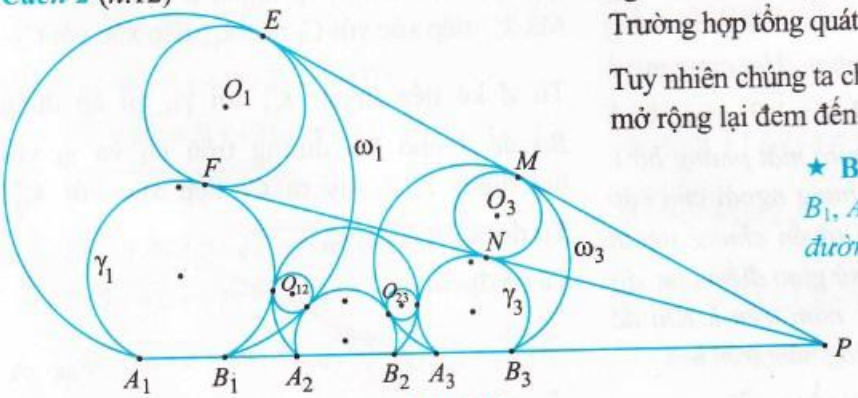
*Hình 10*



*Hình 11*

Theo *Bài toán Iran TST 2013* ta có $X_{12}$ và $X_{23}$ nằm trên $l$. Do đó áp dụng bổ đề 6 suy ra $X'_{13}$ nằm trên $l$. Lại có $X_{34}$ nằm trên $l$ nên lại áp dụng *Bổ đề* 6 suy ra $X_{14}$ nằm trên $l$. Chứng minh tương tự ta thu được $X_{1(2k)}$ và $X'_{1(2k+1)}$ nằm trên $l$.

***Cách 2*** (*h*.12)



*Hình 12*

Theo *Cách* 2 cho *Bài toán Iran TST 2013* thì tồn tại một đường tròn $(O_{12})$ tiếp xúc với $\omega_1$, $\gamma_1$, $\omega_2$, $\gamma_2$; đường tròn $(O_{23})$ tiếp xúc với $\omega_2$, $\gamma_2$, $\omega_3$, $\gamma_3$. Gọi $P$ là giao của tiếp tuyến chung ngoài $ME$ của $\omega_1$ và $\omega_3$, từ $P$ lần lượt kẻ các tiếp tuyến $PN$, $PF$ tới $\gamma_3$, $\gamma_1$. Cũng theo *Cách* 2 cho *Bài toán Iran TST 2013* thì tồn tại đường tròn $(O_1)$ tiếp xúc với $\omega_1$, $\gamma_1$ lần lượt tại $E$, $F$; đường tròn $(O_3)$ tiếp xúc với $\omega_3$, $\gamma_3$ lần lượt tại $M$, $N$.

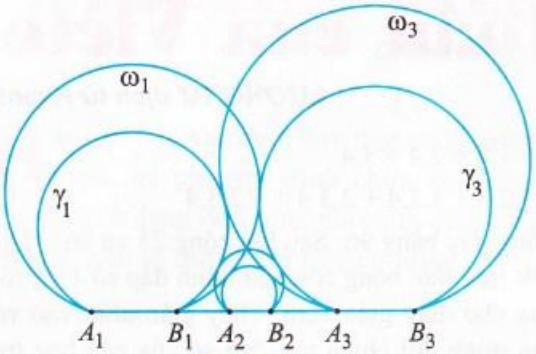
Theo *Bổ đề 2*, tâm vị tự ngoài của các cặp đường tròn $((O_1), (O_{12}))$; $((O_{12}), (O_{23}))$ nằm trên $l$. Do đó, theo *định lí Monge-D'Alembert*, tâm vị tự ngoài của $(O_1)$ và $(O_{23})$ nằm trên $l$.

Cũng theo *Bổ đề 2*, tâm vị tự ngoài của $(O_{23})$ và $(O_3)$ nằm trên $l$ nên lại áp dụng *định lí Monge-D'Alembert*, suy ra tâm vị tự ngoài của $(O_1)$ và $(O_3)$ nằm trên $l$. Điều này có nghĩa là $P$, $N$, $F$ thẳng hàng hay giao điểm của tiếp tuyến chung ngoài của các cặp $(\omega_1, \omega_3)$, $(\gamma_1, \gamma_3)$ nằm trên $l$. Trường hợp tổng quát được chứng minh tương tự.

Tuy nhiên chúng ta chưa dừng lại ở đây. Bài toán mở rộng lại đem đến một bài toán thú vị khác.

★ **Bài toán 2.** *Cho 6 điểm $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$, $A_3$, $B_3$ cùng nằm trên đường thẳng $l$ sao cho các đoạn thẳng $A_1B_1$, $A_2B_2$, $A_3B_3$ tách rời nhau. Hai cung $\omega_i$ và $\gamma_i$ cùng dựng trên dây $A_iB_i$ ($i = \overline{1,3}$) sao cho 6 cung cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ $l$. Giả sử rằng $\omega_1$ tiếp xúc với $\omega_2$, $\gamma_1$ tiếp xúc với $\gamma_2$, $\omega_3$ tiếp xúc với $\omega_2$ và $\gamma_1$, $\gamma_3$ tiếp xúc với $\gamma_2$. Khi đó $\gamma_3$ tiếp xúc với $\omega_1$.*

***Lời giải.*** (*h*.13) Kí hiệu như lời giải *Bài toán* 1. Ta có $X'_{13}$ nằm trên *l*.




*Hình 13*

Gọi $\gamma'_3$ là cung qua $A_3$, $B_3$ và tiếp xúc với $\omega_1$. Theo *Bài toán Iran TST 2013* suy ra giao điểm của tiếp tuyến của các cặp cung $\omega_1$ và $\omega_3$; $\gamma_1$ và $\gamma'_3$ nằm trên *l*. Hay tiếp tuyến đi qua $X'_{13}$ của $\gamma_1$ tiếp xúc với $\gamma'_3$, điều này có nghĩa là $\gamma'_3 \equiv \gamma_3$. Ta có đpcm.

Dựa theo *Bài toán* 1 và sử dụng cách chứng minh tương tự ở trên, ta có thể tổng quát *Bài toán* 2 như sau.

★ **Bài toán 3.** *Chuỗi đường tròn $\omega_1$, $\gamma_1$, $\omega_2$, $\gamma_2$, …, $\omega_{2k}$, $\gamma_{2k}$, $\omega_{2k+1}$, $\gamma_{2k+1}$ được xây dựng giống như Bài toán 1. Khi đó nếu $\omega_{2k}$ tiếp xúc với $\omega_1$ thì $\gamma_{2k}$ tiếp xúc với $\gamma_1$; nếu $\omega_{2k+1}$ tiếp xúc với $\gamma_1$ thì $\gamma_{2k+1}$ tiếp xúc với $\omega_1$.*

Ngoài ra, sử dụng phép nghịch đảo phương tích bất kì với cực là điểm bất kì nằm ngoài các đường tròn và đường thẳng *l* trên, ta có thể thu được một mô hình thú vị tương tự *Bài toán 3* với các điểm $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$, …, $A_{2k+1}$, $B_{2k+1}$ cùng nằm trên một đường tròn.

Cuối cùng, trong *Bài toán Iran TST 2013*, ta có thể nhận thấy 4 cung $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, $\omega_4$ cùng tiếp xúc với một đường tròn. Ý tưởng đó giúp chúng ta nghĩ đến một mở rộng khác như sau.

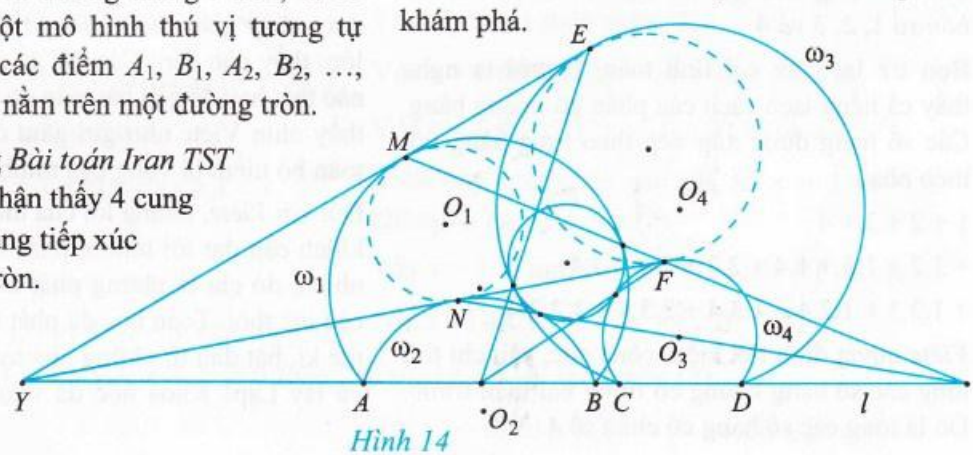
★ **Bài toán 4.** *Cho 4 điểm A, B, C, D theo thứ tự cùng nằm trên đường thẳng l. Hai cung $\omega_1$, $\omega_2$ dựng trên dây AB và hai cung $\omega_3$, $\omega_4$ dựng trên dây CD sao cho 4 cung trên cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng l đồng thời $\omega_2$ nằm giữa $\omega_1$ và l; $\omega_4$ nằm giữa $\omega_3$ và l. Giả sử tồn tại một đường tròn tiếp xúc với 4 cung trên. Khi đó giao điểm của tiếp tuyến chung ngoài của các cặp cung ($\omega_2$, $\omega_4$) và ($\omega_1$, $\omega_3$) nằm trên l.*

Lời giải cho *Bài toán* 4 được thực hiện tương tự *Cách* 2 của lời giải *Bài toán Iran TST 2013*.

Ta cũng có thể tổng quát cho *n* đường tròn như sau.

★ **Bài toán 5.** *Cho 2n điểm $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$, …, $A_n$, $B_n$ ($n \geq 2$) theo thứ tự nằm trên đường thẳng l. Hai cung $\omega_k$ và $\gamma_k$ dựng trên dây $A_kB_k$ ($k = \overline{1,n}$) sao cho 2n cung cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ l đồng thời $\omega_k$ nằm giữa $\gamma_k$ và l. Với mỗi giá trị của k ($k = \overline{1,n-1}$), giả sử tồn tại một đường tròn tiếp xúc với 4 cung $\omega_k$, $\gamma_k$, $\omega_{k+1}$, $\gamma_{k+1}$. Khi đó giao điểm của các tiếp tuyến chung ngoài của $\omega_1$ và $\omega_n$; $\gamma_1$ và $\gamma_n$ nằm trên l.*

Đến đây tác giả xin được kết thúc bài viết. Xung quanh *Bài toán Iran TST 2013* còn rất nhiều điều thú vị, mong bạn đọc tiếp tục khám phá.




*Hình 14*

# Giai thoại về Bài toán của Viète

LƯỢNG TỬ *dịch từ Kvant*

Một ngày đầu tháng 9 năm 1550, cậu bé 10 tuổi *François Viète* trên đường từ trường trở về nhà, vẻ mặt đăm chiêu. Cậu đi dọc theo bờ sông và mải mê suy nghĩ tới mức chẳng hề nhận ra ánh nắng ấm áp gần như mùa hè, cũng chẳng nghe thấy tiếng nước chảy dào dạt dưới sông và tiếng rao của những người bán hàng rong.

Chuyện là thế này. Sau kì nghỉ hè, thầy giáo toán muốn kiểm tra xem đám học trò lớp 3 của mình có còn nhớ những điều mà ông đã dạy cho bọn chúng năm ngoái hay không. Và ông bắt đầu bằng môn Số học. Ông viết lên bảng ba số 1, 2, 3 và yêu cầu học sinh tính tổng của ba số đó với tất cả các tích có thể của hai trong ba số trên và với tích của ba số đó.

Sau một lát, trên mỗi tấm bảng con của đám học trò (tất nhiên chỉ của những đứa hiểu điều kiện bài toán) đã xuất hiện dòng sau:

$$1 + 2 + 3 + 1.2 + 1.3 + 2.3 + 1.2.3$$

Hầu như tất cả đã tìm ra đáp số là 23. Nhưng ông thầy vẫn tỏ vẻ chưa hài lòng:

*Chậm quá! Các em tính quá chậm. Có lẽ là do nghỉ hè quá lâu đây. Chúng ta sẽ phải luyện tập thêm thôi. Bây giờ chúng ta vẫn giải bài toán trước, nhưng không phải đối với ba số mà với bốn số* 1, 2, 3 *và* 4.

Bọn trẻ lại cặm cụi tính toán. Người ta nghe thấy cả tiếng lách cách của phấn gõ xuống bảng. Các số hạng được xắp xếp theo từng hàng nối theo nhau:

$1 + 2 + 3 + 4$

$+ 1.2 + 1.3 + 1.4 + 2.3 + 2.4 + 3.4$

$+ 1.2.3 + 1.2.4 + 1.3.4 + 2.3.4 + 1.2.3.4$

*Viète* quyết định tiết kiệm công sức, cậu chỉ tìm tổng các số hạng không có trong bài toán trước. Đó là tổng các số hạng có chứa số 4:

$4 + 1.4 + 2.4 + 3.4$

$+ 1.2.4 + 1.3.4 + 2.3.4 + 1.2.3.4$

Tổng này bằng 96. Sau khi cộng 23 và 96, *Viète* viết trên tấm bảng con của mình đáp số 119, rồi đưa cho thầy giáo xem. Thầy giáo nhìn vào vở của mình đối chiếu với đáp số của cậu học trò yêu, rồi gật đầu hài lòng.

Thầy giáo và *Viète* phải đợi khá lâu các bạn mới làm xong. Trong thời gian đó hai người theo đuổi những ý nghĩ riêng của mình. Thầy giáo thì trù tính không biết nếu làm thêm bài toán nữa với năm số thì có kịp thời gian hay không. Còn *Viète* cũng suy nghĩ về tổng với năm số 1, 2, 3, 4, 5. Không hiểu bây giờ sẽ có bao nhiêu số hạng nhỉ? Liệu có đủ chỗ để ghi tất cả trên tấm bảng con này không? Nếu chỉ cộng những số hạng mới thôi thì có đủ không?

Cuối cùng thì con số 119 cũng đã xuất hiện trên tất cả các tấm bảng con. Tất nhiên, không phải tất cả đều tự làm được. Có ai đó đơn giản đã … chép của người bên cạnh. Tất nhiên, đây không phải là bí mật gì đối với ông giáo già. Nhưng biết làm sao được! Toán học vốn là môn học khó, không phải học trò nào cũng vượt được qua. Nhưng nhiều người trong số họ lại có những tài năng khác…

Để giải thêm bài toán mới, không còn đủ thời gian nữa. Và bài toán tính tổng với năm số 1, 2, 3, 4, 5 được thầy giáo cho về làm ở nhà. Trước khi rời lớp, thầy còn dặn: Các em cố nghĩ xem có cách nào thật hay để giải bài toán đó không? Nói đoạn, thầy nhìn Viète như gửi gắm ở cậu học trò yêu toàn bộ niềm hi vọng của mình.

Đối với *Viète*, những lời của thầy thường khuyến khích cậu đạt tới những phát minh thực sự. Tất nhiên, đó chỉ là những phát minh đối với riêng cậu mà thôi. Toán học đã phát triển từ bao nhiêu thế kỉ, bắt đầu từ những nhà toán học cổ Ai Cập và Hy Lạp! Khoa học đã vượt qua một chặng

đường lớn. Để đạt được trình độ hiện đại, còn cần phải biết rất nhiều. Đôi khi cậu tìm ra những cái mà thực ra người ta đã biết từ lâu. Nhưng *Viète* vẫn gọi đó là phát minh của mình. Những lúc như thế, cậu vô cùng sung sướng, một cảm giác không gì sánh nổi của những người khám phá. Ông thầy giáo già đã biết những gì diễn ra trong trái tim cậu học trò tài năng và ông đã cố gắng tìm cho cậu những bài toán thích hợp.

Ngoài ra, những bạn bè cùng lớp, khi chia tay còn khích *Viète*: *Này, nhỡ ngày mai thầy cho giải bài toán từ* 1 *đến* ... 100 *thì sao nhỉ? Mà có khi cho n số cũng nên. Mọi hi vọng bọn mình trông vào cậu đấy, Pythagore của tớ ạ.*

*Viète* không hề giận khi các bạn cùng lớp gọi mình là *Pythagore*. Trái lại, trong thâm tâm cậu còn cảm thấy thích thú nữa là khác. Nhưng giờ đây cần phải giữ tiếng cho cái tên vĩ đại đó. Bằng cách nào đây? Bằng cách phải giải được bài toán tính tổng...

Thầy giáo đã bắt đầu loại bài toán của mình từ số 3. Thế bài toán đơn giản hơn, với $n = 2$ thì sao nhỉ? Ở đây cần phải tìm tổng của ba số hạng $1 + 2 + 1.2$. Ba con số 1, 2 và 1.2 hình như *Viète* đã "nghe thấy" ở đâu đó rồi thì phải. Nhưng ở đâu nhỉ? Chân bước trên đường phố nhưng ý nghĩ của cậu ở mãi tận đâu đâu. Rồi cậu chợt nhớ ra là mấy hôm trước cậu đã tính tích $(x + 1)(x + 2)$ và nhận được tam thức $x^2 + (1 + 2)x + 1.2$. Hệ số của tam thức này (trừ số hạng thứ nhất) chính là ba số của tổng trong bài toán nói trên. Thế còn tổng sinh bởi ba số 1, 2, 3?

Lẽ tự nhiên phải xét tích $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$. Liệu hệ số của đa thức này có giúp ta tính được tổng cần tìm không? Lẽ ra lúc này *Viète* có thể dừng lại, nhặt một cành cây bên đường rồi vạch những tính toán cần thiết trên cát. Nhưng cậu đã làm mọi tính toán ở trong đầu. Thực tế có ba dấu ngoặc. Khi mở ngoặc ra, ta sẽ nhận được một số số hạng (tức là một đa thức). Mỗi một số hạng đó là tích của ba nhân tử, mỗi nhân tử thuộc một dấu ngoặc. Ban đầu ta chỉ nhận được số hạng $x^3$ một lần. Nhưng làm thế nào nhận được hệ số của $x^2$? Ở đây nhân tử $x$ được lấy từ hai dấu ngoặc, còn nhân tử thứ ba là con số trong dấu ngoặc còn lại. Và sau khi nhóm các số hạng này lại, ta được hệ số của $x^2$ chính là tổng $1 + 2 + 3$, tức là tổng của các con số lấy trong mỗi dấu ngoặc.

Tương tự, nếu nhóm các số hạng chứa $x$, thì các hệ số khi đó phải là tích hai con số trong hai dấu ngoặc khác nhau. Tổng của các tích này là $1.2 + 1.3 + 2.3$.

Cuối cùng, là tích của ba con số trong ba dấu ngoặc, là 1.2.3. Như vậy, *Viète* đã hình dung như sau:

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3)$$
$$= x^3 + x^2(1 + 2 + 3) + x(1.2 + 1.3 + 2.3) + 1.2.3$$

Dễ dàng nhận được tổng mà thầy giáo yêu cầu khi cho $x = 1$. Tổng đó chính là vế phải của đẳng thức trên, chỉ thừa một con số 1. Kí hiệu tổng này là $S_3$, ta có: $S_3 = 2.3.4 - 1$

Bây giờ thì *Viète* hoàn toàn tin rằng, đối với các số từ 1 đến 5 tương ứng với tổng $S_5$, bằng $2.3.4.5.6 - 1$. Thực vậy, bây giờ ta chỉ cần khảo sát đa thức $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5)$ và làm tương tự như trên.

Còn chuyện các bạn nói về tổng sinh ra bởi các số từ 1 đến 100 thì sao? Tất nhiên, thầy giáo không yêu cầu tính tổng này, nó là một con số rất lớn: $S_{100} = 2.3.4...101 - 1$

Vậy là ngày mai, "ngài *Pythagore* trẻ tuổi" đã có cái để nói với các bạn về những tổng thú vị này. *Viète* cũng hiểu rằng, đối với một số tự nhiên $n$ bất kì, ta sẽ nhận được một đáp số rất đẹp:

$$S_n = 2.3.4...(n + 1) - 1$$

Vậy là bài toán đã được giải dưới dạng tổng quát. *Viète* vô cùng sung sướng vì cậu lại làm được một phát minh nữa đối với mình. Nhưng cậu vẫn còn một nỗi băn khoăn, công thức thì đẹp đấy nhưng viết hơi dài. Nếu ta nghĩ ra được một kí hiệu mới nào đó cho tích của các số tự nhiên từ 2 đến $n$ thì hay biết bao! (Nên nhớ rằng vào thời *Viète*, các nhà toán học mới bắt đầu đưa các kí hiệu vào môn đại số.) Hay là viết $n$ với dấu chấm than (!) nhỉ? Và khi đó công thức trên sẽ được viết gọn lại là:

$$S_n = (n + 1)! - 1$$

*Viète* mỉm cười và ngoái nhìn xung quanh. Mọi người vẫn hối hả đi qua bên cạnh cậu. Từ xa vọng đến tiếng chuông của một tháp đồng hồ. Một ngày thật hạnh phúc đối với *Viète*.

# Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
# Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 445 (7.2014)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com



**BAN CỐ VẤN KHOA HỌC**

*GS. TSKH.* NGUYỄN CẢNH TOÀN
*GS. TSKH.* TRẦN VĂN NHUNG
*TS.* NGUYỄN VĂN VỌNG
*GS.* ĐOÀN QUỲNH
*PGS. TS.* TRẦN VĂN HẠO

**CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN**

Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam
*NGƯT.* NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm
Tổng biên tập NXB Giáo dục Việt Nam
*GS. TS.* VŨ VĂN HÙNG

**HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP**

*Tổng biên tập : TS.* TRẦN HỮU NAM

*Thư kí Tòa soạn : ThS.* HỒ QUANG VINH

*TS.* TRẦN ĐÌNH CHÂU, *ThS.* NGUYỄN ANH DŨNG, *TS.* TRẦN NAM DŨNG, *TS.* NGUYỄN MINH ĐỨC, *TS.* NGUYỄN MINH HÀ, *TS.* NGUYỄN VIỆT HẢI, *PGS. TS.* LÊ QUỐC HÁN, *ThS.* PHẠM VĂN HÙNG, *PGS. TS.* VŨ THANH KHIẾT, *GS. TSKH.* NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, *TS.* PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, *PGS. TS.* NGUYỄN ĐĂNG PHẤT, *PGS. TS.* TẠ DUY PHƯỢNG, *ThS.* NGUYỄN THẾ THẠCH, *GS. TSKH.* ĐẶNG HÙNG THẮNG, *PGS. TS.* PHAN DOÃN THOẠI, *ThS.* VŨ KIM THỦY, *PGS. TS.* VŨ DƯƠNG THỤY, *GS. TSKH.* NGÔ VIỆT TRUNG.


## TRONG SỐ NÀY


1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
*For Lower Secondary School*
*Lý Văn Công* - Bàn thêm về cách giải một dạng phương trình vô tỉ.

3 *Chu Tuấn* - Đưa một số phương trình, hệ phương trình chứa căn thức về dạng đơn giản nhờ tính chất đơn điệu của hàm số.

7 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên ĐHSP Hà Nội năm học 2014 - 2015.

8 **Phương pháp giải toán**
*Math Problem Solving*
*Cao Minh Quang* - Nét đẹp từ bất đẳng thức Schur.

11 *Huỳnh Văn Minh* - Ứng dụng từ hai định lí cơ bản.

15 **Sai lầm ở đâu ?**
*Where's mistake ?*
*Đào Chí Thanh* - Bài toán có hai nghiệm hình ?

16 **Đề ra kì này**
*Problems in This Issue*
T1/444, ..., T8/444, L1/444, L2/444.

18 **Giải bài kì trước**
*Solutions to Previous Problems*
Giải các bài của Số 441.

24 Giải bài cuộc thi giải toán đặc biệt
T3/THCS, T4/THCS, T3/THPT, T4/THPT.

27 **Bạn đọc tìm tòi**
*Reader's Contributions*
*Nguyễn Văn Linh* - Bài toán 6 trong kì thi chọn đội tuyển Quốc gia Iran năm 2013 (*tiếp theo kì trước*).

30 **Lịch sử Toán học**
*History of Maths*
*Lượng Tử* (*dịch từ Kvant*) - Giai thoại về Bài toán của Viète.


*Ảnh Bìa 1. Bức tranh "Study for Stars" của MC. Escher năm 1948.*


*Trưởng ban biên tập:* NGUYỄN ANH QUÂN
*Trị sự, phát hành:* NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THƯ
*Mĩ thuật:* QUỐC HIỆP, THANH LONG
*Thiết kế, chế bản:* NGUYỄN DUY

# NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

*Trân trọng giới thiệu tới bạn đọc*

*Cuốn sách ảnh*

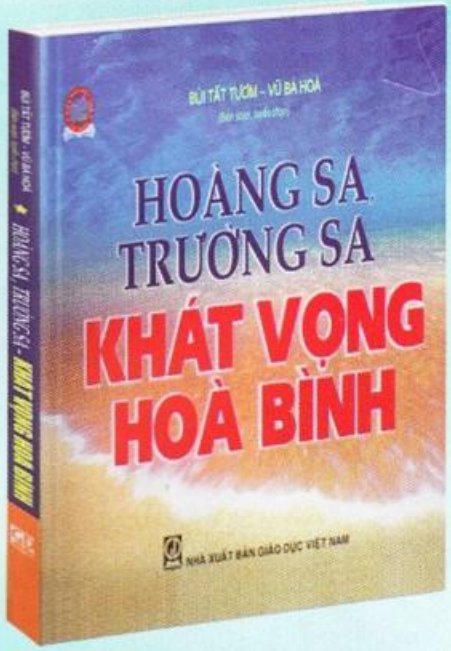
## HOÀNG SA, TRƯỜNG SA - KHÁT VỌNG HÒA BÌNH

Với hơn 500 bức ảnh được tuyển chọn công phu từ nhiều nguồn tư liệu trong và ngoài nước, ***"Hoàng Sa, Trường Sa – Khát vọng hòa bình"*** sẽ giúp bạn đọc nắm được một cách khái quát về vị trí địa lí, điều kiện tự nhiên, tiềm năng kinh tế… của hai quần đảo Hoàng Sa và Trường Sa; những tư liệu lịch sử chủ yếu về chủ quyền của Việt Nam đối với hai quần đảo; về cuộc sống nơi tuyến đầu Tổ quốc hiện nay - nơi mà những người dân Việt, dù là ngư dân hay người chiến sĩ, người công nhân... đang kiên cường bám biển, bám đảo; về sự đầu tư đặc biệt của Nhà nước, của các tổ chức, đoàn thể xã hội và nhân dân đã tạo nên sự đổi thay kì diệu của quần đảo Trường Sa.

Nhóm biên soạn đã tuyển chọn kĩ lưỡng các bức ảnh từ nguồn tư liệu phong phú và đa dạng của những phóng viên – nghệ sĩ nhiếp ảnh trực tiếp sáng tạo tại nơi diễn ra những sự kiện được cả cộng đồng quan tâm. Phần lớn các bức ảnh là ảnh báo chí in đậm hơi thở của cuộc sống, vừa mang tính lịch sử, vừa có tính thời sự, lại giàu giá trị nghệ thuật.

Ảnh được sắp xếp theo kiểu phóng sự với lời bình tinh tế, khiến người xem như đang được dõi theo một câu chuyện với nhiều chủ đề. Đặc biệt có những bức ảnh ghi lại những sự kiện hào hùng, bi tráng..., kí thác tâm huyết của người nghệ sĩ - phóng viên ảnh.

Xem và đọc ***"Hoàng Sa, Trường Sa – Khát vọng hòa bình"***, bạn đọc sẽ có những phút giây chăm chú ngắm nhìn những bức ảnh và suy tư về những sự kiện gắn với quá trình lịch sử xây dựng và bảo vệ biển đảo quê hương của biết bao thế hệ Việt Nam.




**Tác giả:** ***Bùi Tất Tươm, Vũ Bá Hoà***
**Khổ sách: 23×25*cm*; Số trang: 200 *trang***
**Giá bìa: 119.000 *đồng***

Đây thực sự là tác phẩm tôn vinh chủ nghĩa yêu nước Việt Nam, tôn vinh phẩm chất và khí phách cao đẹp của những ngư dân và những người lính đang ngày đêm bảo vệ chủ quyền thiêng liêng của Tổ quốc ở vùng biển đảo Hoàng Sa, Trường Sa. Đó cũng là tài liệu tham khảo cần thiết, phục vụ trực tiếp việc cập nhật kiến thức biển, đảo; bồi dưỡng, giáo dục cho học sinh về nhiệm vụ bảo vệ chủ quyền biển, đảo quê hương.

**Bạn đọc có thể mua sách tại các Công ty Sách - Thiết bị Trường học ở các địa phương hoặc các Cửa hàng Sách của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.**

**Website bán hàng trực tuyến: www.sach24.vn Website: www.nxbgd.vn**

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

# NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC TẠI HÀ NỘI - NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

# TRÂN TRỌNG GIỚI THIỆU

**TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN TRUNG HỌC PHỔ THÔNG**
**(Theo chuyên đề)**

**TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ**
**(Từ lớp 6 đến lớp 9)**

**BỘ SÁCH ÔN THI VÀO LỚP 10 TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN**

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT07M4

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 2014

Giá: 10 000 đồng
Mười nghìn đồng