KỲ THI TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG
NĂM HỌC 2019-2020

Nhóm: PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA

50 DẠNG TOÁN

PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA LẦN 2

TOÁN
THPT

NĂM 2020

50 DẠNG TOÁN
PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA LẦN 2

MỤC LỤC

DẠNG 1. HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP – TỔ HỢP

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Có bao nhiêu cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 10 học sinh?
(A) C_{10}^2. (B) A_{10}^2. (C) 10^2. (D) 2^{10}.

Lời giải.
Số cách chọn 2 học sinh từ nhóm gồm 10 học sinh là tổ hợp chập 2 của 10: C_{10}^2 (cách)
Chọn phương án (A)

Câu 1. Có hai kiểu mặt đồng hồ đeo tay (vuông, tròn) và có ba kiểu dây (kim loại, da, nhựa). Hỏi có bao nhiêu cách chọn một chiếc đồng hồ có một mặt và một dây?
(A) 8. (B) 6. (C) 5. (D) 7.

Lời giải.
Có 2 cách chọn kiểu mặt đồng hồ, có 3 cách chọn kiểu dây đồng hồ.
Số cách chọn một chiếc đồng hồ có một mặt và một dây theo qui tắc nhân là $2 \cdot 3 = 6$.
Chọn phương án (B)

Câu 2. Một hộp chứa 10 quả cầu phân biệt. Số cách lấy ra từ hộp đó cùng lúc 3 quả cầu là
(A) 120. (B) 10. (C) 60. (D) 720.

Lời giải.
Số cách chọn 3 quả cầu từ hộp là $C_{10}^3 = 120$.
Chọn phương án (A)

Câu 3. Tổ 1 của lớp 11A gồm 6 bạn nam và 4 bạn nữ. Để chọn một đội lao động trong tổ, cần chọn một bạn nữ và ba bạn nam. Số cách chọn như vậy là
(A) 21. (B) 60. (C) 40. (D) 120.

Lời giải.
Số cách chọn một đội lao động gồm 3 nam và 1 nữ là $C_6^3 \cdot C_2^1 = 40$ cách.
Chọn phương án (C)

Câu 4. Một tổ gồm n học sinh, biết rằng có 210 cách chọn 3 học sinh trong tổ để làm ba việc khác nhau. Số n thỏa mãn hệ thức nào sau đây?
(A) $n(n+1)(n+2) = 210$. (B) $n(n+1)(n+2) = 420$.
(C) $n(n-1)(n-2) = 210$. (D) $n(n-1)(n-2) = 420$.

Lời giải.
Học sinh thứ nhất có n cách chọn, học sinh thứ hai có $n-1$ cách chọn, học sinh thứ ba có $n-2$ cách chọn. Do đó $n(n-1)(n-2) = 210$.
Chọn phương án (C)

Câu 5. Một chi đoàn có 16 đoàn viên. Cần bầu chọn một Ban Chấp hành ba người gồm Bí thư, Phó Bí thư và Ủy viên. Số cách chọn ra Ban Chấp hành nói trên là

(A) 560. (B) 4096. (C) 48. (D) 3360.

Lời giải.

Mỗi cách bầu chọn một Ban Chấp hành ba người gồm Bí thư, Phó Bí thư và Ủy viên là một chỉnh hợp chập 3 của 16 phần tử. Do đó có $\mathrm{A}_{16}^3 = \dfrac{16!}{13!} = 3360$ cách.

Chọn phương án (D)

Câu 6. Cho k, n là các số tự nhiên thỏa mãn $0 \leqslant k \leqslant n$. Công thức nào trong các công thức sau đây là **sai**?

(A) $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{k!}$. (B) $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. (C) $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$. (D) $\mathrm{P}_n = n!$.

Lời giải.

Dựa vào công thức tính số chỉnh hợp, có đáp án A sai

Chọn phương án (A)

Câu 7. Công thức tính số chỉnh hợp chập k của n phần tử (với các số nguyên k, n thỏa $0 \leq k \leq n$) là

(A) $\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$. (B) $\dfrac{n!}{(n-k+1)!}$. (C) $\dfrac{n!}{(n-k)!}$. (D) $\dfrac{(n-k)!k!}{n!}$.

Lời giải.

Công thức tính số chỉnh hợp chập k của n phần tử (với các số nguyên k, n thỏa $0 \leq k \leq n$) là $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Chọn phương án (C)

Câu 8. Từ các chữ số 1; 2; 3; 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau?

(A) 42. (B) 12. (C) 24. (D) 4^4.

Lời giải.

Mỗi số như vậy là một hoán vị của 4 phần tử. Vậy có thể lập được $4! = 24$ số thỏa mãn đề bài.

Chọn phương án (C)

Câu 9. Có bao nhiêu cách xếp một nhóm học sinh gồm 4 bạn nam và 6 bạn nữ thành một hàng ngang?

(A) 10!. (B) 4!. (C) 6!.4!. (D) 6!.

Lời giải.

Nhóm học sinh đó có tất cả 10 học sinh.

Xếp 10 học sinh thành một hàng ngang có $\mathrm{P}_{10} = 10!$ cách xếp.

Chọn phương án (A)

Câu 10. Công thức tính số chỉnh hợp chập k của n là

(A) $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. (B) $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$. (C) $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. (D) $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

Lời giải.

Theo công thức tính số chỉnh hợp trong SGK lớp 11 thì $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Chọn phương án (C)

B MỨC ĐỘ 2

Câu 11. Từ các chữ số $1, 5, 6, 7$ có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau?

(A) 20. (B) 14. (C) 36. (D) 24.

Lời giải.

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $a, b, c, d \in A = \{1, 5, 6, 7\}$.

Vì số cần tìm có 4 chữ số khác nhau nên:

- a được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
- b được chọn từ tập $A \setminus \{a\}$ (có 3 phần tử) nên có 3 cách chọn.
- c được chọn từ tập $A \setminus \{a, b\}$ (có 2 phần tử) nên có 2 cách chọn.
- d được chọn từ tập $A \setminus \{a, b, c\}$ (có 1 phần tử) nên có 1 cách chọn.

Như vậy, ta có $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ số cần tìm.

Chọn phương án (D)

Câu 12. Một tổ công nhân có 12 người. Cần chọn 3 người để đi làm cùng một nhiệm vụ, hỏi có bao nhiêu cách chọn?

(A) $12!$. (B) C_{12}^3. (C) 12^3. (D) A_{12}^3.

Lời giải.

Chọn 3 người từ 12 người đi thực hiện cùng một nhiệm vụ là một tổ hợp chập 3 của 12 phần tử.

Số cách chọn là C_{12}^3.

Chọn phương án (B)

Câu 13. Biết $\mathrm{A}_n^2 + \mathrm{C}_n^3 = 50$, $(n \in \mathbb{N}^*)$. Khi đó, giá trị của n là

(A) 4. (B) 5. (C) 6. (D) 7.

Lời giải.

Từ $\mathrm{A}_n^2 + \mathrm{C}_n^3 = 50 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-2)!} + \dfrac{n!}{3!(n-3)!} = 50 \Leftrightarrow n(n-1) + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} = 50$

$\Rightarrow \dfrac{n^3}{6} + \dfrac{n^2}{2} - \dfrac{2n}{3} = 50 \Rightarrow n = 6.$

Chọn phương án (C)

Câu 14. Một lớp có 30 học sinh gồm 20 nam, 10 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một nhóm 3 học sinh sao cho nhóm đó có ít nhất 01 học sinh là nữ?

(A) 1140. (B) 2920. (C) 1900. (D) 900.

Lời giải.

Số cách chọn là $\mathrm{C}_{10}^1 . \mathrm{C}_{20}^2 + \mathrm{C}_{10}^2 . \mathrm{C}_{20}^1 + \mathrm{C}_{10}^3 = 2920 \cdot$

Chọn phương án (B)

Câu 15. Sắp xếp 6 nam sinh và 4 nữ sinh vào một dãy ghế hàng ngang có 10 chỗ ngồi. Số cách xếp sao cho các nữ sinh luôn ngồi cạnh nhau là

(A) 34560. (B) 17280. (C) 744. (D) 120960.

Lời giải.

Ta coi 4 nữ sinh là một cùng với 6 nam sinh lúc này xếp vào 10 chỗ ngồi là số hoán vị của 7 phần tử.

Trong 4 nữ sinh còn có thể hoán đổi vị trí.

Vậy có: $7! \cdot 4! = 120960$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu.

Chọn phương án D

Câu 16. Trong một buổi lễ có 13 cặp vợ chồng tham dự. Mỗi ông bắt tay với mọi người trừ vợ mình. Biết các bà không ai bắt tay với nhau. Hỏi có bao nhiêu cái bắt tay?

A 85. B 78. C 312. D 234.

Lời giải.

Loại 1: Hai người đàn ông bắt tay nhau.

— Một ông bắt tay với 12 ông kia $\Rightarrow$ có $12 \cdot 13$ cái bắt tay.

— Những mỗi cách bắt tay như vậy được tính 2 lần. Vậy ở loại 1 có $\dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 13$ cái bắt tay.

Loại 2: Một người đàn ông bắt tay một người phụ nữ.

Một người đàn ông bắt tay 12 người phụ nữ, trừ vợ $\Rightarrow$ có $12 \cdot 13$ cái bắt tay.

Vậy có $\dfrac{3}{2} \cdot 12 \cdot 13$.

Chọn phương án D

Câu 17. Từ các chữ số 1; 3; 4; 6; 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có ba chữ số khác nhau?

A 12. B 10. C 24. D 60.

Lời giải.

Số tự nhiên chẵn có 3 chữ số có dạng $\overline{a_1a_2a_3}$, $a_3 \in \{4; 6\}$

a_3 có 2 cách chọn

a_1; a_2 có A_4^2 cách chọn, suy ra có $2\mathrm{A}_4^2 = 24$ số

Chọn phương án C

Câu 18. Trong kho đèn trang trí đang còn 5 bóng đèn loại I, 7 bóng đèn loại II, các bóng đèn đều khác nhau về màu sắc và hình dáng. Lấy ra 5 bóng đèn bất kỳ. Hỏi có bao nhiêu khả năng xảy ra nếu số bóng đèn loại I nhiều hơn số bóng đèn loại II?

A 3360. B 245. C 246. D 3480.

Lời giải.

Số cách chọn 5 bóng đèn loại I là $\mathrm{C}_5^5 = 1$.

Số cách chọn 4 bóng đèn loại I, 1 bóng đèn loại II là $\mathrm{C}_5^4 \cdot \mathrm{C}_7^1 = 35$.

Số cách chọn 3 bóng đèn loại I, 2 bóng đèn loại II là $\mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{C}_7^2 = 210$.

Vậy số cách lấy số bóng đèn loại I nhiều hơn số bóng đèn loại II là $1 + 35 + 210 = 246$ cách.

Chọn phương án C

Câu 19. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn mà mỗi số có 4 chữ số đôi một khác nhau?

A 4500. B 2296. C 50000. D 2520.

Lời giải.

Gọi số cần tìm là $n = \overline{abcd}$.

TH1. $d = 0$.

— Chọn a, b, c có $\mathrm{A}_9^3 = 504$.

TH2. $d \neq 0$.

— Chọn d trong các số $2; 4; 6; 8$ có 4 cách.

— Chọn a $(a \neq 0, a \neq d)$ có 8 cách.

— Chọn b, c trong 8 số còn lại có A_8^2 cách.

Trong trường hợp này có $4 \cdot 8 \cdot \mathrm{A}_8^2 = 1792$ số.

Vậy có $504 + 1792 = 2296$ số tự nhiên chẵn mà mỗi số có 4 chữ số đôi một khác nhau.
Chọn phương án B

Câu 20. Giải bóng đá AFF-CUP 2018 có tất cả 10 đội bóng tham gia, chia đều làm hai bảng A và B. Ở vòng đấu bảng, mỗi đội bóng thi đấu với mỗi đội bóng cùng bảng 1 trận. Hỏi tại vòng bảng các đội thi đấu tổng cộng bao nhiêu trận?

A 40. **B** 30. **C** 50. **D** 20.

Lời giải.
Mỗi bảng có 5 đội bóng.
Mỗi đội bóng thi đấu với mỗi đội bóng cùng bảng 1 trận nên số trận thi đấu trong mỗi bảng bằng số cách chọn 2 đội bóng từ 5 đội, tức là $\mathrm{C}_5^2 = 10$ trận.
Vì có hai bảng nên tổng số trận đấu ở vòng bảng là 20 trận.
Chọn phương án D

C MỨC ĐỘ 3

Câu 21. Từ các số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 lập được bao nhiêu số có 6 chữ số mà chữ số liền sau nhỏ hơn chữ số liền trước?

A 7. **B** 20160. **C** 5040. **D** 25.

Lời giải.
Ta có C_8^6 cách chọn ra 6 số trong 8 số đã cho và sắp xếp chúng thành một số thỏa mãn đề bài.
Trong các số trên do có cả số 0 nên có C_7^5 cách chọn ra 5 số trong các số trên không có chữ số 0.
Như vậy có tất cả $\mathrm{C}_8^6 - \mathrm{C}_7^5 = 7$.
Chọn phương án A

Câu 22. Cho tập hợp $A = \{a; b; c; d; e; f; g\}$. Số tập con có nhiều hơn một phần tử của A là

A 64. **B** 128. **C** 120. **D** 127.

Lời giải.
Số tập con có k phần tử của một tập hợp X có n phần tử là C_n^k
Ta lại có $\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n = 2^n$

Do đó tổng số tập con của A (kể cả tập A) là $2^7 = 128$
Số tập con không có phần tử nào (tập rỗng) của A là $\mathrm{C}_7^o = 1$
Số tập con có 1 phần tử của A là $\mathrm{C}_7^1 = 7$
Vậy số tập con có nhiều hơn một phần tử của A là : $128 - 1 - 7 = 120$
Chọn phương án C

Câu 23. Trong mặt phẳng, cho một đa giác lồi có 20 cạnh. Số đường chéo của đa giác là
A 360. B 380. C 190. D 170.

Lời giải.

Đoạn thẳng nối 2 đỉnh bất kì sẽ là cạnh hoặc đường chéo của đa giác lồi.
Số đường chéo của đa giác lồi 20 cạnh là $\mathrm{C}_{20}^2 - 20 = 170$.

Chọn phương án D

Câu 24. Trong một lớp học có 10 học sinh có hoàn cảnh khó khăn. Hội phụ huynh chọn ra 5 học sinh bất kì trong số 10 học sinh đó để trao 5 phần quà khác nhau. Số cách trao quà là
A 252. B 50. C 30240. D 120.

Lời giải.

Chọn 5 học sinh bất kì trong 10 học sinh có C_{10}^5 cách chọn.
Số cách trao 5 phần quà khác nhau cho 5 học sinh đã chọn là $\mathrm{P}_5 = 5!$.
Vậy số cách trao là $\mathrm{C}_{10}^5 \cdot 5! = 32420$.

Chọn phương án C

Câu 25. Có bao nhiêu cách xếp khác nhau cho 5 bạn nam và 4 bạn nữ thành một hàng ngang sao cho các bạn nữ đứng cạnh nhau
A 14400. B 5760. C 2880. D 17280.

Lời giải.

Vì các bạn nữ đứng cạnh nhau nên xem các bạn nữ như 1 bạn cùng với 5 bạn nam có 6! cách xếp. Mà các bạn nữ đứng cạnh nhau có 4! cách. Vậy tất cả có $6!4! = 17280$ cách xếp.
Chọn phương án D

Câu 26. Có 12 học sinh giỏi gồm 3 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 6 học sinh sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh?
A 924. B 805. C 508. D 180.

Lời giải.

Trường hợp 1: không có học sinh khối 12.
Số cách chọn: $\mathrm{C}_9^6 = 84$.
Trường hợp 2: không có học sinh khối 11.
Số cách chọn: $\mathrm{C}_8^6 = 28$.
Trường hợp 3: không có học sinh khối 10.
Số cách chọn: $\mathrm{C}_7^6 = 7$.
Số cách chọn ra 6 học sinh không phân biệt khối lớp: $\mathrm{C}_{12}^6 = 924$.
Số cách chọn ra 6 học sinh sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh là $924 - (84 + 28 + 7) = 805$.
Chọn phương án B

Câu 27. Có 20 bông hoa trong đó có 8 bông đỏ, 7 bông vàng, 5 bông trắng. Chọn ngẫu nhiên 4 bông để tạo thành một bó. Có bao nhiên cách chọn để bó hoa có cả 3 màu?

(A) 2380. (B) 14280. (C) 1920. (D) 4760.

Lời giải.

Số cách chọn được một bó hoa có 2 hoa đỏ, 1 hoa vàng và 1 hoa trắng là $\mathrm{C}_8^2\mathrm{C}_7^1\mathrm{C}_5^1 = 980$. Số cách chọn được một bó hoa có 1 hoa đỏ, 2 hoa vàng và 1 hoa trắng là $\mathrm{C}_8^1\mathrm{C}_7^2\mathrm{C}_5^1 = 840$. Số cách chọn được một bó hoa có 1 hoa đỏ, 1 hoa vàng và 2 hoa trắng là $\mathrm{C}_8^1\mathrm{C}_7^1\mathrm{C}_5^2 = 560$. Do đó số cách chọn được bó hoa có cả 3 màu là

$$980 + 840 + 560 = 2380.$$

Chọn phương án (A)

Câu 28. Đa giác đều nào có 20 đường chéo?

(A) Ngũ giác đều. (B) Lục giác đều. (C) Bát giác đều. (D) Thập giác đều.

Lời giải.

Gọi n là số cạnh của đa giác đều, khi đó, đa giác có n đỉnh, từ n đỉnh đó, ta có thể tạo được C_n^2 đoạn thẳng.

Trong đó bao gồm cả cạnh và đường chéo của đa giác, vậy số đường chéo của đa giác là $\mathrm{C}_n^2 - n$.

Từ giả thiết ta có $\mathrm{C}_n^2 - n = 20 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-2)!2!} - n = 20 \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)}{2} - n = 20$

$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 40 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n = -5 & \text{(loại)} \\ n = 8 & \text{(nhận)} \end{array}\right.$. Vậy đa giác thỏa mãn là bát giác đều.

Chọn phương án (C)

Câu 29. Cô giáo chia 4 quả táo, 3 quả cam và 2 quả chuối cho 9 cháu (mỗi cháu 1 quả). Hỏi có bao nhiêu cách chia khác nhau?

(A) 120. (B) 1260. (C) 9. (D) 24.

Lời giải.

— Chọn 4 trong 9 cháu chia táo có: C_9^4 (cách).

— Chọn 3 trong 5 cháu còn lại chia cam có: C_3^5 (cách).

— Chọn 2 trong 2 cháu còn lại chia chuối có: C_2^2 (cách).

Vậy số cách chia khác nhau là $\mathrm{C}_9^4 \cdot \mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{C}_2^2 = 1260$.

Chọn phương án (B)

Câu 30. Long và Hưng cùng 8 bạn rủ nhau đi xem bóng đá. Số cách xếp nhóm bạn trên vào 10 chỗ ngồi sắp hàng ngang sao cho Long và Hưng ngồi cạnh nhau là

(A) $9 \cdot 8!$. (B) $18 \cdot 8!$. (C) $8!$. (D) $9!$.

Lời giải.

Số cách để hai bạn Long và Hưng ngồi cạnh nhau là 18 cách.

Số cách để xếp 8 bạn còn lại là $8!$ cách.

Vậy có $18 \cdot 8!$ cách.

Chọn phương án (B)

Câu 31. Tại một buổi lễ có 13 cặp vợ chồng tham dự, mỗi ông bắt tay với mọi người trừ vợ của mình, các bà không ai bắt tay nhau. Hỏi có bao nhiêu cái bắt tay?

(A) 234. (B) 312. (C) 78. (D) 185.

Lời giải.

— Bắt tay ngẫu nhiên có: C_2^{26} (cách).

— Chồng bắt tay vợ mình có: 13 (cách).

— Các bà vợ bắt tay nhau có: C_2^{13} (cách)

Vậy số cái bắt tay thỏa đề bài là: $C_2^{26} - 13 - C_2^{13} = 234$ (cái).

Chọn phương án (A)

D MỨC ĐỘ 4

Câu 32. Có bao nhiêu số tự nhiên có sáu chữ số khác nhau từng đôi một, trong đó chữ số 5 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 4?

(A) 2942. (B) 1500. (C) 249. (D) 3204.

Lời giải.

Ta ghép bộ ba chữ số $1; 5; 4$ thành hai bộ số đặc biệt là $(1; 5; 4)$ và $(4; 5; 1)$ có hai cách.

Bài toán trở thành: Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số sao cho các chữ số khác nhau từng đôi một,trong đó có 1 số đặc biệt?

Ta xét các trường hợp sau:

TH1. Số đặc biệt đứng ở hàng nghìn. Chọn 3 chữ số còn lại có $A_7^3 = 210$ cách.

TH2. Số đặc biệt đứng ở hàng trăm hoặc hàng chục hoặc hàng đơn vị có 3 cách.
Chọn số hàng nghìn có 6 cách.
Chọn 2 chữ số còn lại có $A_6^2 = 30$ cách.
Trường hợp này có $3 \cdot 6 \cdot 30 = 540$ cách.

Do đó có tất cả $210 + 540 = 750$ số.

Trở lại bài toán, ta có 2 số đặc biệt nên có tất cả $2 \cdot 750 = 1500$ số cần tìm.

Chọn phương án (B)

Câu 33. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp $12T$, 3 học sinh lớp $12H$ và 5 học sinh lớp $12A$ thành một hàng ngang. Tính số cách xếp 10 học sinh trên sao cho không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau.

(A) 36360. (B) 63360. (C) 66033. (D) 33066.

Lời giải.

Đầu tiên ta xếp 5 học sinh lớp $12A$ thành một hàng có $5! = 120$ cách.

Giữa 5 học sinh này có 4 khoảng trống và 2 khoảng trống ở hai đầu mút, ta đánh số vị trí các khoảng trống từ trái sang phải là $1; 2; 3; 4; 5; 6$ như hình dưới.

$$1 - A - 2 - A - 3 - A - 4 - A - 5 - A - 6$$

Vì hai học sinh cùng lớp không đứng cạnh nhau nên các vị trí $2; 3; 4; 5$ phải có học sinh lớp $12T, 12H$. Nhưng tổng học sinh hai lớp đó là 5 nên có một học sinh sẽ đứng ở vị trí 1 hoặc 6 hoặc đứng ghép với một học sinh lớp khác trong các vị trí $2; 3; 4; 5$. Ta xét các trường hợp sau:

TH1. Xếp 5 học sinh $12T, 12H$ vào các vị trí $1; 2; 3; 4; 5$ có $5! = 120$ cách.

TH2. Xếp 5 học sinh $12T, 12H$ vào các vị trí $2; 3; 4; 5; 6$ có $5! = 120$ cách.

TH3. Ghép một học sinh $12T$ và một học sinh $12H$ thành một cặp có $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ cách.
Xem cặp này như là một học sinh đặc biệt.
Xếp 4 học sinh vào các vị trí $2; 3; 4; 5$ có $4!$ cách.
Trường hợp này có $12 \cdot 4! = 288$ cách.

Vậy có $120 \cdot (120 + 120 + 288) = 63360$ cách xếp.
Chọn phương án B

Câu 34. Số nghiệm của bất phương trình $\mathrm{C}_{n-1}^4 - \mathrm{C}_{n-1}^3 - \dfrac{5}{4}\mathrm{A}_{n-2}^2 < 0$ là

A. 0. B. Vô số. C. 5. D. 6.

Lời giải.

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 5$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{(n-1)!}{4!(n-5)!} - \frac{(n-1)!}{3!(n-4)!} - \frac{5}{4}\frac{(n-2)!}{(n-4)!} < 0 \\ \Rightarrow\ & \frac{(n-2)!}{(n-4)!}\left[\frac{(n-1)(n-4)}{4!} - \frac{(n-1)}{3!} - \frac{5}{4}\right] < 0 \\ \Rightarrow\ & (n-1)(n-4) - 4(n-1) - 30 < 0 \\ \Leftrightarrow\ & n^2 - 9n - 22 < 0 \\ \Leftrightarrow\ & -2 < n < 11. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện, suy ra bất phương trình đã cho có sáu nghiệm $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10$.
Chọn phương án D

Câu 35. Lập các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau từ các chữ số $2; 3; 4; 5$. Tính tổng S các số tự nhiên đó.

A. $S = 24$. B. $S = 93324$. C. $S = 11111$. D. $S = 66660$.

Lời giải.

Mỗi chữ số trong một số có 4 chữ số được lặp lại $3!$ lần.
Khi đó, $S = 3!(2 + 3 + 4 + 5)(10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0) = 93324$.
Chọn phương án B

Câu 36. Có bao nhiêu số có 5 chữ số mà các chữ số của nó tăng dần hoặc giảm dần?

A. 11. B. 504. C. 378. D. 252.

Lời giải.

Gọi số có 5 chữ số lập từ $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ là $\overline{abcde}$.

— Thứ tự tăng dần: $a < b < c < d < e$. Lúc này $a \neq 0$ nên $a, b, c, d, e \in \{1, 2, \ldots 9\}$.
Số cách chọn ra 5 chữ số khác nhau từ $\{1, 2, \ldots 9\}$ là C_9^5 cách. Với mỗi cách chọn đó, chỉ có duy nhất một cách sắp xếp các chữ số theo thứ tự tăng dần. Do đó, có C_9^5 số thỏa yêu cầu.

— Thứ tự giảm dần: $a > b > c > d > e$. Lập luận tương tự, nhưng chú ý rằng lúc này các chữ số $a, b, c, d, e \in \{0, 1, 2, \ldots 9\}$ do đó có C_{10}^5 số thỏa yêu cầu.

Vậy có tất cả $\mathrm{C}_9^5 + \mathrm{C}_{10}^5 = 378$ số thỏa yêu cầu.
Chọn phương án C

Câu 37. Vòng bảng giải bóng đá cúp C1 Châu Âu (Champions League) 2017 – 2018 do Liên đoàn bóng đá Châu Âu (UEFA) tổ chức gồm 32 đội được chia thành 8 bảng đấu (mỗi bảng gồm 4 đội). Mỗi đội phải đá vòng tròn 2 lượt (lượt đi và lượt về). Trung bình mỗi trận đấu vòng bảng, UEFA có tổng doanh thu 18 triệu Euro. Hỏi doanh thu từ vòng bảng cúp C1 của UEFA là bao nhiêu tiền? (Tính theo đơn vị: tỷ Euro)

A 1,404. B 1,152. C 2,808. D 1,728.

Lời giải.
Số đội bóng có trong mỗi bảng đấu (32 đội chia ra thành 8 bảng): 4 đội.
Số trận đấu của mỗi bảng đấu là $\mathrm{A}_4^2 = 12$ trận (do mỗi cặp - 2 đội đấu với nhau 2 trận).
Vậy số trận đấu của bòng bảng là $8 \times 12 = 96$ trận.
Doanh thu từ vòng bảng của giải đấu là 96×18 (triệu Euro) $= 1{,}728$ (tỷ Euro).
Chọn phương án D

Câu 38. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 lập được bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 3 và có ba chữ số khác nhau?

A 30. B 36. C 40. D 34.

Lời giải.
Gọi $\overline{abc}$ là số cần lập.
Khi đó $(a, b, c) \in \{(0, 1, 2), (0, 1, 5), (0, 2, 4), (0, 4, 5), (1, 2, 3), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (3, 4, 5)\}$
+ Với bộ $(0, 1, 2)$ lập được 4 số.
+ Với bộ $(1, 2, 3)$ lập được 3! số.
Vậy có tất cả $4 \cdot 4 + 4 \cdot 3! = 40$.
Chọn phương án C

Câu 39. Từ một nhóm 12 học sinh gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B, 3 học sinh lớp C. Có bao nhiêu cách chọn ra 4 học sinh sao cho 4 học sinh được chọn thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên?

A 225. B 235. C 215. D 200.

Lời giải.
- Chọn 4 học sinh tùy ý, có $\mathrm{C}_{12}^4 = 495$ cách.
- Chọn 4 học sinh có cả 3 lớp:
+ TH1: Chọn $1A$, $1B$, $2C$ có $5 \cdot 3 \cdot \mathrm{C}_3^2 = 60$.
+ TH2: Chọn $1A$, $1B$, $2C$ có $5 \cdot \mathrm{C}_4^2 \cdot 3 = 90$.

+ TH3: Chọn $1A$, $1B$, $2C$ có $\mathrm{C}_5^2 \cdot 4 \cdot 3 = 120$.

Số cách chọn thỏa bài toán là: $495 - 60 - 90 - 120 = 225$.

Chọn phương án A

Câu 40. Có bao nhiêu cách chia 20 viên bi giống hệt nhau vào 4 cái hộp đôi một khác nhau, sao cho mỗi cái hộp có ít nhất 2 viên bi.

A C_{20}^4. **B** C_{19}^3 . **C** C_{12}^4. **D** C_{15}^3.

Lời giải.

Gọi $x, y, x, t \in \mathbb{N}$ là số viên bi cho vào 4 cái hộp. Ta có

$$\begin{cases} x + y + z + t = 20 \\ x \geq 2, y \geq 2, z \geq 2, t \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) + (y-1) + (z-1) + (t-1) = 16 \\ x - 1 \geq 1, y - 1 \geq 1, z - 1 \geq 1, t - 1 \geq 1 \end{cases}.$$

Khi đó số nghiệm nguyên của phương trình là C_{15}^3.

Chọn phương án D

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. A	4. A	5. B	6. A	7. A	8. C	9. D	10. A
11. B	12. B	13. B	14. B	15. C	16. C	17. D	18. A	19. D	20. D
21. B	22. B	23. C	24. C	25. B	26. B	27. D	28. A	29. C	30. D
31. C	32. D	33. D	34. A	35. C	36. A	37. D	38. B	39. A	40. B
41. C	42. A	43. D	44. A	45. A	46. D	47. D	48. A	49. D	50. C
51. D	52. B	53. A	54. B	55. B	56. A	57. D	58. C	59. B	60. D
61. D	62. A	63. A	64. B	65. D	66. A	67. A	68. C	69. D	70. D
71. D	72. A	73. D	74. B	75. C	76. D	77. B	78. A	79. B	80. A

DẠNG 2. CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$ và $u_2 = 9$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

Ⓐ 6. Ⓑ 3. Ⓒ 12. Ⓓ -6.

Lời giải.

Cấp số cộng (u_n) có số hạng tổng quát là: $u_n = u_1 + (n-1)d$.

(Với u_1 là số hạng đầu và d là công sai).

Suy ra ta có: $u_2 = u_1 + d \Leftrightarrow 9 = 3 + d \Leftrightarrow d = 6$.

Vậy công sai của cấp số công đã cho bằng 6.

Chọn phương án A

Câu 1. Tính tổng 100 số hạng đầu của cấp số cộng biết $u_1 = -5, d = 3$.

Ⓐ 292. Ⓑ 14350. Ⓒ 14600. Ⓓ 14500.

Lời giải.

$S_{100} = \dfrac{(2u_1 + 99d)\,100}{2} = 14350$.

Chọn phương án B

Câu 2. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số cộng?

Ⓐ $1, 3, 5, 7, 9$. Ⓑ $2, 4, 5, 6, 7$. Ⓒ $1, 2, 4, 8, 16$. Ⓓ $3, -6, 12, -24$.

Lời giải.

Vì $3 = 1 + 2; 5 = 3 + 2; 7 = 5 + 2; 9 = 7 + 2$. Nên theo định nghĩa cấp số cộng, dãy số $1, 3, 5, 7, 9$ là một cấp số cộng với công sai $d = 2$.

Chọn phương án A

Câu 3. Cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$, $q = 2$. Tìm u_2.

Ⓐ $u_2 = 6$. Ⓑ $u_2 = 5$. Ⓒ $u_2 = -6$. Ⓓ $u_2 = 1$.

Lời giải.

Cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$, $q = 2$, có số hạng tổng quát $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$, $n \geq 2$. Vậy $u_2 = u_1 \cdot q = 6$.

Chọn phương án A

Câu 4. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1, công bội q. Gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n). Trong các công thức sau, công thức nào **sai**?

Ⓐ $S_n = u_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ⓑ $u_{n+1} = u_n \cdot q$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ⓒ $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

Ⓓ $|u_k| = \sqrt{u_{k-1} \cdot u_{k+1}}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2$ và u_k không là số hạng cuối.

Lời giải.

Các công thức ở phương án B, C, D đều đúng.

Nhóm: PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA

Công thức ở phương án A sai vì $S_n = u_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ không đúng khi $q = 1$.

Chọn phương án A

Câu 5. Dãy số nào trong các dãy số sau là cấp số nhân?

A $2; 4; 8; 16; 32; 63$. **B** $1; -2; 4; -8; 16; -32$. **C** $1; 3; 9; 27; 54; 162$. **D** $4; 2; 1; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{16}$.

Lời giải.

Vì $\dfrac{4}{2} = \dfrac{8}{4} = \dfrac{16}{8} = \dfrac{32}{16} \neq \dfrac{63}{32}$ nên dãy số ở phương án A không là cấp số nhân.

Vì $\dfrac{3}{1} = \dfrac{9}{3} = \dfrac{27}{9} \neq \dfrac{54}{27}$ nên dãy số ở phương án C không là cấp số nhân.

Vì $\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} \neq \dfrac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}}$ nên dãy số ở phương án D không là cấp số nhân.

Vì $\dfrac{-2}{1} = \dfrac{4}{-2} = \dfrac{-8}{4} = \dfrac{16}{-8} = \dfrac{-32}{16} = -2$ nên dãy số ở phương án B là cấp số nhân.

Chọn phương án B

Câu 6. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu tiên là $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$. Tìm số hạng u_5 của cấp số cộng (u_n) đó.

A $u_5 = 14$. **B** $u_5 = 11$. **C** $u_5 = 17$. **D** $u_5 = 13$.

Lời giải.

Ta có $u_5 = u_1 + 4d = 2 + 4 \cdot 3 = 14$.

Chọn phương án A

Câu 7. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1 = 3$ và công bội $q = -2$. Tìm số hạng thứ bảy của cấp số nhân đó.

A $u_7 = 192$. **B** $u_7 = -9$. **C** $u_7 = -192$. **D** $u_7 = 384$.

Lời giải.

$u_7 = u_1 q^6 = 3(-2)^6 = -192$.

Chọn phương án A

Câu 8. Cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d. Công thức số hạng tổng quát của (u_n) là

A $u_n = u_1 + nd$. **B** $u_n = u_1 + (n+1)d$. **C** $u_n = u_1 + (n-1)d$. **D** $u_n = u_1 - nd$.

Lời giải.

Theo lý thuyết, công thức số hạng tổng quát của (u_n) là $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Chọn phương án C

Câu 9. Cho cấp số cộng $1, 4, 7, \ldots$. Số hạng thứ 100 của cấp số cộng là

A 297. **B** 301. **C** 295. **D** 298.

Lời giải.

Cấp số cộng $1, 4, 7, \ldots$ có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công sai $d = 3$.

Chọn phương án D

Câu 10. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 3n - 2$. Tìm công sai d của cấp số cộng.

(A) $d = 3$. (B) $d = 2$. (C) $d = -2$. (D) $d = -3$.

Lời giải.

Ta có $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - 3n + 2 = 3$. Suy ra $d = 3$ là công sai của cấp số cộng

Chọn phương án (A)

Câu 11. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$, công bội $q = -2$. Hỏi -192 là số hạng thứ mấy của (u_n)?

(A) Số hạng thứ 6. (B) Số hạng thứ 7. (C) Số hạng thứ 5. (D) Số hạng thứ 8.

Lời giải.

Giả sử -192 là số hạng thứ n của (u_n) với $n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có $-192 = u_1.q^{n-1} \Leftrightarrow -192 = (-3).(-2)^{n-1} \Leftrightarrow 64 = (-2)^{n-1} \Leftrightarrow (-2)^6 = (-2)^{n-1} \Leftrightarrow 6 = n - 1$ $\Leftrightarrow 7 = n$. Do đó -192 là số hạng thứ 7 của (u_n).

Chọn phương án (B)

Câu 12. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 5$ Giá trị của u_4 bằng

(A) 22. (B) 17. (C) 12. (D) 250.

Lời giải.

$$u_4 = u_1 + 3d = 2 + 3 \cdot 5 = 17.$$

Chọn phương án (B)

Câu 13. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu tiên $u_1 = \frac{1}{2}$, công bội $q = 2$. Giá trị của u_{25} bằng

(A) 2^{26}. (B) 2^{23}. (C) 2^{24}. (D) 2^{25}.

Lời giải.

Theo công thức số hạng tổng quát của cấp số nhân ta có $u_{25} = u_1 \cdot q^{24} = \frac{1}{2} \cdot 2^{24} = 2^{23}$.

Chọn phương án (B)

Câu 14. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $q = -2$. Tính tổng 10 số hạng đầu liên tiếp của cấp số nhân?

(A) $S_{10} = -511$. (B) $S_{10} = 1023$. (C) $S_{10} = 1025$. (D) $S_{10} = -1025$.

Lời giải.

Ta có $S_{10} = u_1 \cdot \frac{1 - q^{10}}{1 - q} = -3 \cdot \frac{1 - (-2)^{10}}{1 - (-2)} = 1023$.

Chọn phương án (B)

Câu 15. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_1 = 3$, $u_2 = -1$. Tìm u_3.

(A) $u_3 = 4$. (B) $u_3 = 2$. (C) $u_3 = -5$. (D) $u_3 = 7$.

Lời giải.

Công thức tổng quát của cấp số cộng có số hạng đầu là u_1 và công sai d là $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Vậy ta có $d = u_2 - u_1 = -1 - 3 = -4 \Rightarrow u_3 = u_2 + d = -1 + (-4) = -5$.

Chọn phương án (C)

Câu 16. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -\frac{1}{4}$ và công sai $d = \frac{1}{4}$. Giá trị của $u_1 + u_2 + \cdots + u_5$ bằng

(A) $\frac{4}{5}$. (B) $-\frac{4}{5}$. (C) $\frac{5}{4}$. (D) $\frac{15}{8}$.

Lời giải.

Tổng của 5 số hạng đầu $u_1 + u_2 + \cdots + u_5 = 5u_1 + \dfrac{5(5-1)}{2}d = \dfrac{5}{4}$.

Chọn phương án C

Câu 17. Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đầu lần lượt là $5; 9; 13; 17; \ldots$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng.

(A) $u_n = 4n + 1$. (B) $u_n = 5n - 1$. (C) $u_n = 5n + 1$. (D) $u_n = 4n - 1$.

Lời giải.

Dãy số đã cho là cấp số cộng có $u_1 = 5; u_2 = 9 \Rightarrow d = u_2 - u_1 = 4$.

Do đó $u_n = u_1 + (n-1)d = 5 + (n-1)4 = 4n + 1$.

Chọn phương án D

Câu 18. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 5$ và tổng 40 số hạng đầu bằng 3320. Tìm công sai của cấp số cộng đó.

(A) 4 . (B) -4 . (C) 8. (D) -8 .

Lời giải.

Tổng của n số hạng đầu của cấp số cộng là $S_n = nu_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$

$\Leftrightarrow 3320 = 40 \cdot 5 + \dfrac{40 \cdot 39}{2}d \Leftrightarrow d = 4$

Chọn phương án A

Câu 19. Cho một cấp số cộng (u_n) là $u_1 = \dfrac{1}{2}, u_2 = \dfrac{7}{2}$. Khi đó công sai d bằng

(A) $\dfrac{3}{2}$. (B) 6. (C) 5. (D) 3.

Lời giải.

Phương pháp: Số hạng tổng quát của cấp số cộng có số hạng đầu u_1 và công sai d là $u_n = u_1 + (n-1)d$

Cách giải: Ta có: $u_2 = u_1 + d \Leftrightarrow \dfrac{7}{2} = \dfrac{1}{2} + d \Leftrightarrow d = 3$

Chọn phương án D

Câu 20. Cho cấp số nhân (u_n), với $u_1 = -9$, $u_4 = \dfrac{1}{3}$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

(A) $\dfrac{1}{3}$. (B) -3. (C) 3. (D) $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $u_4 = u_1 \cdot q^3 = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow q^3 = \dfrac{1}{3 \cdot u_1} = \dfrac{1}{-27} \Leftrightarrow q = -\dfrac{1}{3}$.

Vậy cấp số nhân (u_n) có công bội $q = -\dfrac{1}{3}$

Chọn phương án D

B MỨC ĐỘ 2

Câu 21. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2$, $d = 9$. Khi đó số 2018 là số hạng thứ mấy trong dãy?

(A) 223. (B) 225. (C) 224. (D) 226.

Lời giải.
Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d \Leftrightarrow 2018 = 2 + (n-1) \cdot 9 \Leftrightarrow n = 225$.
Chọn phương án B

Câu 22. Cho cấp số nhân (u_n) (với $n \in \mathbb{N}^*$) với công bội $q = 2$ và có số hạng thứ hai $u_2 = 5$. Số hạng thứ 7 của cấp số nhân là

A $u_7 = 80$. **B** $u_7 = 160$. **C** $u_7 = 640$. **D** $u_7 = 320$.

Lời giải.
Ta có $u_n = 2^{n-1} \cdot u_1$. Mà $u_2 = 5 = 2u_1 \Rightarrow u_1 = \dfrac{5}{2}$, do đó $u_7 = \dfrac{5}{2} \cdot 2^6 = 160$.
Chọn phương án B

Câu 23. Cho dãy số hữu hạn (u_n) được xác định như sau: $u_1 = -2; u_2 = 0; u_3 = 2; u_4 = 4; u_5 = 6$. Biết u_1 là số hạng đầu và u_5 là số hạng cuối. Số hạng tổng quát của dãy số trên là

A $u_n = n - 2$. **B** $u_n = -2n$. **C** $u_n = 2n - 4$. **D** $u_n = -2(n+1)$.

Lời giải.
Ta có: $u_1 = -2; u_2 = 0; u_3 = 2; u_4 = 4; u_5 = 6$ là 5 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng có công sai $d = 2$ nên $u_n = -2 + (n-1) \cdot 2 \Leftrightarrow u_n = 2n - 4$.
Chọn phương án C

Câu 24. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = -3$. Tính tổng 10 số hạng đầu của (u_n).

A $S_{10} = 115$. **B** $S_{10} = -155$. **C** $S_{10} = -115$. **D** $S_{10} = 155$.

Lời giải.
Tổng 10 số hạng đầu của (u_n) là $S_{10} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{10} = \dfrac{10}{2}(2u_1 + 9d) = 5(4 - 27) = -115$.

Chọn phương án C

Câu 25. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_n = 3 - 5n$. Tìm công sai d của cấp số cộng (u_n).

A $d = 3$. **B** $d = -5$. **C** $d = -3$. **D** $d = 5$.

Lời giải.
Theo giả thiết suy ra $u_{n+1} = 3 - 5(n+1) = -2 - 5n \Rightarrow u_{n+1} - u_n = -5, \forall n \geq 1$.
Suy ra (u_n) là cấp số cộng, công sai $d = -5$.
Chọn phương án B

Câu 26. Cho cấp số cộng (u_n) có hai số hạng đầu $u_1 = -2$, $u_2 = 2$. Số hạng thứ 2018 là số nào?

A 560. **B** 8066. **C** 506. **D** 8068.

Lời giải.
Công sai $d = u_2 - u_1 = 2 - (-2) = 4$. Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d$. Suy ra

$$u_{2018} = u_1 + 2017d = -2 + 2017 \cdot 4 = 8066.$$

Chọn phương án B

Câu 27. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng biết $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_7 = 1 \\ u_1 + u_6 = 16 \end{cases}$

(A) $u_1 = \dfrac{171}{17}, d = -\dfrac{14}{17}$. (B) $u_1 = -\dfrac{14}{17}, d = \dfrac{171}{17}$. (C) $u_1 = 2, d = 3$. (D) $u_1 = 3, d = 2$.

Lời giải.

$\begin{cases} u_2 + u_5 - u_7 = 1 \\ u_1 + u_6 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - d = 1 \\ 2u_1 + 5d = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 2 \end{cases}$.

Chọn phương án D

Câu 28. Cho cấp số cộng (u_n), biết $u_1 = 5, u_2 = 9$. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên.

(A) 230. (B) 410. (C) 275. (D) 41.

Lời giải.

Ta có $u_2 = u_1 + d \Rightarrow d = 4$.

Vậy $S_{10} = \dfrac{10}{2}(u_1 + u_{10}) = 5(u_1 + u_1 + 9d) = 230$.

Chọn phương án A

Câu 29. Cho dãy số (u_n), biết: $u_1 = 3, u_{n+1} = u_n + 4$ với $n \geqslant 1$. Tìm u_{1000}?

(A) 3900. (B) 4000. (C) 3999. (D) 4200.

Lời giải.

Dãy (u_n) là dãy CSC có $u_1 = 3$ và $d = 4$.

$u_n == u_1 + (n-1)d = 3 + 4(n-1)$.

Vậy $u_{1000} = 3 + 4 \cdot 999 = 3999$.

Chọn phương án C

Câu 30 (HK1, Phan Bội Châu Đắk Lắk, 2018).

Cho cấp số nhân (u_n), biết $\begin{cases} u_2 - u_5 = -126 \\ u_2 + u_3 + u_4 = 42 \end{cases}$. Tìm u_1.

(A) 4. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) $\dfrac{4}{5}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

$\begin{cases} u_2 - u_5 = -126 \\ u_2 + u_3 + u_4 = 42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 d - u_1 d^4 = -126 \\ u_1 d + u_1 d^2 + u_1 d^3 = 42 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 d\left(1 - d^3\right) = -126 \\ u_1 d\left(1 + d + d^2\right) = 42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 d\left(1 - d^3\right) = -126 \\ \dfrac{1 - d^3}{1 + d + d^2} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 4 \\ u_1 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Chọn phương án D

Câu 31. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n), biết $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_2 + u_5 = 7 \end{cases}$

(A) $u_1 = -36, d = -13$. (B) $u_1 = 36, d = 13$. (C) $u_1 = 36, d = -13$. (D) $u_1 = -36, d = 13$.

Lời giải.

$\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_2 + u_5 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1 - (3-1)d + u_1 + (5-1)d = 10 \\ u_1 + d + u_1 + (5-1)d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 36 \\ d = -13 \end{cases}$.

Chọn phương án C

Câu 32. Cho cấp số nhân (u_n), biết $u_1 = 2, q = \dfrac{1}{3}$. Tìm u_{10}?

Ⓐ $\dfrac{2}{3^8}$. Ⓑ $\dfrac{2}{3^{10}}$. Ⓒ $\dfrac{3}{2^9}$. Ⓓ $\dfrac{2}{3^9}$.

Lời giải.

Cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2, q = \dfrac{1}{3} \Rightarrow u_{10} = u_1 \cdot q^9 = 2 \cdot \dfrac{1}{3^9}$.

Chọn phương án D

Câu 33. Tính tổng sau $S = 1 + 5 + 9 + \cdots + 397$ ta được.

Ⓐ 19298. Ⓑ 19090. Ⓒ 19920. Ⓓ 19900.

Lời giải.

$S = 1 + 5 + 9 + \cdots + 397$ là tổng 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng có $u_1 = 1$ và công sai $d = 4$.

$S_{100} = \dfrac{100}{2}(2 \cdot 1 + 99 \cdot 4) = 19900$.

Chọn phương án D

Câu 34. Cho dãy số (u_n) , biết: $u_1 = 2, u_{n+1} = u_n \cdot \dfrac{1}{3}$ với $n \geqslant 1$. Tìm u_{100}?

Ⓐ $\dfrac{2}{3^{99}}$. Ⓑ $\dfrac{2}{3^{100}}$. Ⓒ $\dfrac{4}{3^{99}}$. Ⓓ $\dfrac{4}{3^{999}}$.

Lời giải.

Dãy số (u_n) có $u_1 = 2, u_{n+1} = u_n \cdot \dfrac{1}{3}$ với $n \geqslant 1$

Chọn phương án A

là một CSN có $d = \dfrac{1}{3} \Rightarrow u_n = u_1 q^{n-1} = 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$.

Vậy $u_{100} = 2 \cdot \dfrac{1}{3^{99}} = \dfrac{2}{3^{99}}$.

Câu 35. Tìm số hạng thứ 11 của cấp số cộng có số hạng đầu bằng 3 và công sai $d = -2$.

Ⓐ -21. Ⓑ 23. Ⓒ -17. Ⓓ -19.

Lời giải.

$u_{11} = u_1 + 10d = -17$.

Chọn phương án C

Câu 36. Tìm công bội q của một cấp số nhân (u_n) có $u_1 = \dfrac{1}{2}$ và $u_6 = 16$.

Ⓐ $q = 2$. Ⓑ $q = -2$. Ⓒ $q = \dfrac{1}{2}$. Ⓓ $q = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

$u_6 = u_1 q^5 \Rightarrow q^5 = 32 \Rightarrow q = 2$.

Chọn phương án A

Câu 37. Người ta trồng 1275 cây theo hình tam giác như sau: Hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ 2 có 2 cây, hàng thứ 3 có 3 cây, ... hàng thứ k có k cây $(k \geq 1)$. Hỏi có bao nhiêu hàng?

Ⓐ 51. Ⓑ 52. Ⓒ 53. Ⓓ 50.

Lời giải.

Tổng số cây là tổng của k số hạng đầu của một cấp số cộng có số hạng đầu là $u_1 = 1$ và số hạng thứ k là $u_k = k$.

Ta có $S_k = \dfrac{k(k+1)}{2} = 1275 \Leftrightarrow k = 50$.

Chọn phương án D

Câu 38. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \sqrt{n+11}$. Tính số hạng thứ năm của dãy số đã cho.

A 6. **B** 4. **C** $\sqrt{15}$. **D** 5.

Lời giải.

Ta có $u_5 = \sqrt{5+11} = 4$.

Chọn phương án B

Câu 39. Cho cấp số cộng có $u_1 = 1$ và công sai $d = -4$. Giá trị của số hạng thứ 17 bằng bao nhiêu?

A $u_{17} = -63$. **B** $u_{17} = 65$. **C** $u_{17} = -85$. **D** $u_{17} = -75$.

Lời giải.

Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d \Rightarrow u_{17} = 1 + 16 \cdot (-4) = -63$.

Chọn phương án A

Câu 40. Cho cấp số cộng (u_n) có: $u_1 = -0{,}1$; $d = 0{,}1$. Số hạng thứ 7 của cấp số cộng này là

A 1,6. **B** 0,5. **C** 6. **D** 0,6.

Lời giải.

Số hạng thứ 7 của cấp số cộng là $u_7 = u_1 + 6d = -0{,}1 + 6 \cdot 0{,}1 = 0{,}5$.

Chọn phương án B

C MỨC ĐỘ 3

Câu 41. Tính số hạng đầu u_1 và và công sai d của cấp số cộng (u_n), biết $\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 7. \end{cases}$

A $u_1 = -36, d = 13$. **B** $u_1 = 36, d = 13$. **C** $u_1 = 36, d = -13$. **D** $u_1 = -36, d = -13$.

Lời giải.

Theo giả thiết suy ra $\begin{cases} u_1 + 2d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 36 \\ d = -13. \end{cases}$

Chọn phương án C

Câu 42. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_2 + u_3 - u_6 = 7 \\ u_4 + u_8 = -14 \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng này là

A $u_n = 5 - 2n$. **B** $u_n = 2 + n$. **C** $u_n = 3n + 2$. **D** $u_n = -3n + 1$.

Lời giải.

Ta có $u_2 = u_1 + d$, $u_3 = u_1 + 2d$, $u_6 = u_1 + 5d$, $u_4 = u_1 + 3d$ và $u_8 = u_1 + 7d$. Do đó

$$\begin{cases} (u_1 + d) + (u_1 + 2d) - (u_1 + 5d) = 7 \\ (u_1 + 3d) + (u_1 + 7d) = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - 2d = 7 \\ 2u_1 + 10d = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = -2. \end{cases}$$

Vì vậy $u_n = 3 + (n-1) \cdot (-2) = 5 - 2n$.

Chọn phương án A

Câu 43. Tìm x, y để dãy số 9; x; -1; y là một cấp số cộng.

(A) $x = 2,\ y = 5$. (B) $x = 4,\ y = 6$. (C) $x = 2,\ y = -6$. (D) $x = 4,\ y = -6$.

Lời giải.

Để dãy số 9; x; -1; y là một cấp số cộng ta phải có $\begin{cases} x = \dfrac{9-1}{2} \\ -1 = \dfrac{x+y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -6. \end{cases}$

Chọn phương án (D)

Câu 44. Chu vi của một đa giác là 158 cm, số đo các cạnh của nó lập thành một cấp số cộng với công sai $d = 3$ cm. Biết cạnh lớn nhất là 44 cm. Số các cạnh của đa giác đó là bao nhiêu?

(A) 4. (B) 6. (C) 5. (D) 3.

Lời giải.

Trường hợp 1: Số cạnh của đa giác là 3.

Gọi độ dài các cạnh là a, b, c với $a \geq b \geq c$. Theo đề suy ra $a = 44$, $b = 41$, $c = 38$. Suy ra chu vi tam giác là $a + b + c = 123$ (không thỏa mãn).

Trường hợp 2: Số cạnh của đa giác là 4.

Gọi độ dài các cạnh là a, b, c, d với $a \geq b \geq c \geq d$. Theo đề suy ra $a = 44$, $b = 41$, $c = 38$, $d = 35$. Suy ra chu vi tứ giác là $a + b + c + d = 158$ (thỏa mãn).

Chọn phương án (A)

Câu 45. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_2 - u_4 + u_5 & = 114 \\ u_3 - u_5 + u_6 & = 342 \end{cases}$

(A) $u_1 = 2,\ q = 3$. (B) $u_1 = 3,\ q = 2$. (C) $u_1 = 1,\ q = 3$. (D) $u_1 = 1,\ q = 2$.

Lời giải.

$$\begin{cases} u_2 - u_4 + u_5 & = 114 \\ u_3 - u_5 + u_6 & = 342 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q(1 - q^2 + q^3) & = 114(1) \\ u_1q^2(1 - q^2 + q^3) & = 342(2) \end{cases}$$

Lấy phương trình (2) chia cho phương trình (1) ta được $q = 3$.

Thay vào phương trình (1) ta được $u_1 = 2$.

Chọn phương án (A)

Câu 46. Tính tổng sau: $S = \dfrac{1}{2} + 1 + 2 + \cdots + 2^{98}$

(A) $2^{98} - \dfrac{1}{2}$. (B) $2^{99} - 1$. (C) $2^{96} - \dfrac{1}{2}$. (D) $2^{99} - \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $1 + 2 + \cdots + 2^{98}$ là tổng 99 số hạng đầu tiên của cấp số nhân có $u_1 = 1$ và $d = 2$.

$S_{99} = \dfrac{1\left(1 - 2^{99}\right)}{1 - 2} = 2^{99} - 1$.

Vậy $S = \dfrac{1}{2} + 2^{99} - 1 = 2^{99} - \dfrac{1}{2}$.

Chọn phương án (D)

Câu 47. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_3 = 6, u_8 = 16$. Tính công sai d và tổng của 10 số hạng đầu tiên.

Ⓐ $d = 2; S_{10} = 100$. Ⓑ $d = 1; S_{10} = 80$. Ⓒ $d = 2; S_{10} = 120$. Ⓓ $d = 2; S_{10} = 110$.

Lời giải.

$d = \dfrac{u_8 - u_3}{5} = \dfrac{16 - 6}{5} = 2$.

$u_1 = u_3 - 2d = 6 - 2 \cdot 2 = 2$.

$S_{10} = \dfrac{10 \cdot (u_1 + u_{10})}{2} = \dfrac{10 \cdot (u_1 + u_1 + 9 \cdot d)}{2} = \dfrac{10 \cdot (2 + 2 + 9 \cdot 2)}{2} = 110$.

Chọn phương án D

Câu 48. Cho cấp số cộng có $u_1 = 0$ và công sai $d = 3$. Tổng của 26 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó bằng bao nhiêu?

Ⓐ 975. Ⓑ 775. Ⓒ 875. Ⓓ 675.

Lời giải.

Ta có $S_n = nu_1 + \dfrac{n(n-1)}{2} \cdot d \Rightarrow S_{26} = 26 \cdot 0 + \dfrac{26.25}{2} \cdot 3 = 975$.

Chọn phương án A

Câu 49. Cho (u_n) là cấp số cộng với công sai d. Biết $u_5 = 16$, $u_7 = 22$. Tính u_1.

Ⓐ $u_1 = -5$. Ⓑ $u_1 = -2$. Ⓒ $u_1 = 19$. Ⓓ $u_1 = 4$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_5 = 16 \\ u_7 = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 16 \\ u_1 + 6d = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4 \\ d = 3 \end{cases}$.

Vậy $u_1 = 4$.

Chọn phương án D

Câu 50. Một chiếc đồng hồ đánh chuông, kể từ thời điểm 0 giờ thì sau mỗi giờ số tiếng chuông được đánh đúng bằng số giờ mà đồng hồ chỉ tại thời điểm đánh chuông. Hỏi đến 12 giờ trưa đồng hồ đó đánh bao nhiêu tiếng chuông?

Ⓐ 300. Ⓑ 156. Ⓒ 78. Ⓓ 48.

Lời giải.

Số tiếng chuông mà đồng hồ đã đánh từ sau 0 giờ đến 12 giờ trưa là:

$$1 + 2 + \cdots + 12 = \frac{12 \times 13}{2} = 78.$$

Chọn phương án C

Câu 51. Cho dãy (u_n) là một cấp số cộng có $u_1 = 2$ và $u_9 = 26$. Tìm u_5.

Ⓐ 15. Ⓑ 13. Ⓒ 12. Ⓓ 14.

Lời giải.

Ta có $u_1 + u_9 = u_1 + u_1 + 8d = 2u_1 + 8d = 2(u_1 + 4d) = 2u_5$. Do đó $u_5 = \dfrac{u_1 + u_9}{2} = \dfrac{2 + 26}{2} = 14$.

Chọn phương án D

Câu 52. Bốn số lập thành một cấp số cộng. Tổng của chúng bằng 22, tổng các bình phương của chúng bằng 166. Tính tổng các lập phương của bốn số đó.

(A) 1480. (B) 1408. (C) 1804. (D) 1840.

Lời giải.

Giả sử cấp số cộng là u_1, u_2, u_3, u_4. Từ giả thiết và tính chất của cấp số cộng, ta có

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 22 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 166 \\ u_1 + u_4 = u_2 + u_3 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được hai cấp số cộng là $1, 4, 7, 10$ và $10, 7, 4, 1$.

Ta có $1^3 + 4^3 + 7^3 + 10^3 = 1408$.

Chọn phương án (B)

Câu 53. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_4 = 40, u_6 = 160$. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n).

(A) $u_1 = -5, q = -2$. (B) $u_1 = -2, q = -5$. (C) $u_1 = -5, q = 2$. (D) $u_1 = -140, q = 60$.

Lời giải.

$u_4 = 40 \Leftrightarrow u_1 q^3 = 40$

$u_6 = 160 \Leftrightarrow u_1 q^5 = 160$

Suy ra: $q^2 = 4 \Leftrightarrow q = 2$ hoặc $q = -2$

Với $q = 2$ thì $u_4 = 40 \Rightarrow u_1 = 5$

Với $q = -2$ thì $u_4 = 40 \Rightarrow u_1 = -5$

Chọn phương án (A)

Câu 54. Cho cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu là $u_1 = 15$ và công sai $d = -2$. Tìm số hạng thứ 8 của cấp số cộng đã cho.

(A) -1. (B) 1. (C) 103. (D) 64.

Lời giải.

Ta có $u_8 = u_1 + 7d = 15 + 7(-2) = 1$.

Chọn phương án (B)

Câu 55. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 + u_{29} = 40$. Giá trị của $S_{30} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{30}$ là

(A) 640. (B) 600. (C) 620. (D) 500.

Lời giải.

Ta có $u_2 + u_{29} = u_1 + d + u_1 + 28d = u_1 + u_1 + 29d = u_1 + u_{30} = 40$.

$S = \dfrac{n \cdot (u_1 + u_{30})}{2} = \dfrac{30 \cdot 40}{2} = 600$

Chọn phương án (B)

Câu 56. Ông Nam đã trồng cây ca cao trên mảnh đất của mình có dạng hình tam giác, ông trồng ở hàng đầu tiên 3 cây ca cao, kể từ hàng thứ hai trở đi số cây ca cao phải trồng ở mỗi hàng nhiều hơn 5 cây so với số cây ở hàng trước đó và ở hàng cuối cùng ông đã trồng 2018 cây ca cao. Số cây ca cao mà ông Nam đã trồng trên mảnh đất của mình là

(A) 408.242 cây. (B) 407.231 cây. (C) 407.232 cây. (D) 408.422 cây.

Lời giải.

Số cây ông Nam trồng trên mỗi hàng từ hàng 1 đến hàng cuối cùng tương ứng tạo thành một cấp số cộng với $u_1 = 3$ và công sai $d = 5$.
Theo công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng ta có

$$u_n = u_1 + (n-1)d \Rightarrow 2018 = 3 + (n-1) \cdot 5 \Leftrightarrow n = 404.$$

Do đó tổng số cây ông Nam đã trồng trên mảnh đất của minh là

$$S = \frac{(3+2018) \cdot 404}{2} = 408.242 \text{ cây}.$$

Chọn phương án (A)

Câu 57. Cho (u_n) là cấp số cộng với công sai d. Biết $u_7 = 16$, $u_9 = 22$. Tính u_1.

(A) 4. (B) 19. (C) 1. (D) -2.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} u_7 = 16 \\ u_9 = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6d = 16 \\ u_1 + 8d = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -2 \\ d = 3 \end{cases}.$$

Do đó, $u_1 = -2$ và $d = 3$.
Chọn phương án (D)

Câu 58. Trong một cấp số nhân gồm các số hạng dương, hiệu của số hạng thứ năm và số hạng thứ tư là 576, hiệu của số hạng thứ hai và số hạng đầu tiên là 9. Tìm tổng S_3 của 3 số hạng đầu của cấp số nhân này.

(A) $S_3 = 21$. (B) $S_3 = -63$. (C) $S_3 = 63$. (D) $S_3 = -21$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} u_5 - u_4 = 576 \\ u_2 - u_1 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^3 (q-1) = 576 \\ u_1(q-1) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = 64 \\ u_1(q-1) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 4 \\ u_1 = 3. \end{cases}$$

Vậy $S_3 = 3 \cdot \dfrac{4^3 - 1}{4 - 1} = 63$.
Chọn phương án (C)

Câu 59. Số tự nhiên n thỏa mãn đẳng thức $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n+1) = 4187$ là

(A) 51. (B) 52. (C) 49. (D) 50.

Lời giải.

Xét cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$, $d = 3$. Khi đó $3n + 1 = u_{n+1}$.
Suy ra $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n+1) = S_{n+1} = \dfrac{(1 + 3n + 1)(n+1)}{2} = 4187 \Rightarrow n = 52$.
Chọn phương án (B)

Câu 60. Cho ba số a, b, c là ba số liên tiếp của một cấp số cộng có công sai là 2. Nếu tăng số thứ nhất thêm 1, tăng số thứ hai thêm 1 và tăng số thứ ba thêm 3 thì được ba số mới là ba số liên tiếp của một cấp số nhân. Tính $(a + b + c)$.

(A) 12. (B) 18. (C) 3. (D) 9.

Lời giải.

Do a, b, c là ba số liên tiếp của một cấp số cộng có công sai là 2 nên $b = a + 2, c = a + 4$.

$a+1, a+3, a+7$ là ba số liên tiếp của một cấp số nhân $\Leftrightarrow (a+1)(a+7) = (a+3)^2 \Leftrightarrow a = 1$.

Với $a = 1$, ta có $\begin{cases} b = 3 \\ c = 5 \end{cases}$.

Suy ra $a + b + c = 9$.

Chọn phương án (D)

D MỨC ĐỘ 4

Câu 61. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}, (n \geq 1)$. Số hạng tổng quát của dãy (u_n) là

(A) $u_n = 2 \cdot 3^n + 1$. (B) $u_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$. (C) $u_n = 2 \cdot 3^n - 1$. (D) $u_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 1$.

Lời giải.

Xét dãy số (v_n) với $v_n = u_n - 1, \forall n \geq 1$.

Theo giả thiết suy ra $u_{n+1} - 1 = 3(u_n - 1) \Rightarrow v_{n+1} = 3v_n, \forall n \geq 1$.

Suy ra (v_n) là cấp số nhân có cộng bội $q = 3$ và số hạng đầu $v_1 = u_1 - 1 = 3 - 1 = 2$.

Số hạng tổng quát $v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow u_n = v_n + 1 = 2 \cdot 3^{n-1} + 1$.

Chọn phương án (D)

Câu 62. Cho x và y là các số nguyên thỏa mãn các số $x + 6y$,$5x + 2y$, $8x + y$ theo thứ tự lập thành cấp cộng và các số $x - \frac{5}{3}y$, $y - 1$, $2x - 3y$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tính tổng $S = 2x + 3y$.

(A) -9. (B) 6. (C) -6. (D) 9.

Lời giải.

Vì các số $x + 6y$,$5x + 2y$, $8x + y$ theo thứ tự lập thành cấp cộng nên ta có

$$(x + 6y) + (8x + y) = 2(5x + 2y) \Leftrightarrow x = 3y.$$

Vì các số $x - \frac{5}{3}y$, $y - 1$, $2x - 3y$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân nên ta có

$$\left(x - \frac{5}{3}y\right)(2x - 3y) = (y - 1)^2.$$

Thay $x = 3y$ vào phương trình trên, ta được

$$\begin{aligned} & \left(3y - \frac{5}{3}y\right)(6y - 3y) = (y-1)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 4y^2 = y^2 - 2y + 1 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. . \end{aligned}$$

Ta loại trường hợp $y = \dfrac{1}{3}$ vì y là số nguyên. Suy ra $x = 3y = 3(-1) = -3$. Vậy

$$S = 2x + 3y = 2(-3) + 3(-1) = -9.$$

Chọn phương án (A)

Câu 63. Tính tổng tất các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2(m+2)x^2 + 2m + 3 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

(A) $\dfrac{14}{9}$. **(B)** $\dfrac{10}{9}$. **(C)** $\dfrac{12}{9}$. **(D)** $\dfrac{8}{9}$.

Lời giải.

Đặt $u = x^2$, phương trình đã cho trở thành $u^2 - 2(m+2)u + 2m + 3 = 0$. Ta có

$$\Delta' = (m+2)^2 - (2m+3) = (m+1)^2.$$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} u = 1 \\ u = 2m+3 \end{array}\right.$. Để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt thì

$$\begin{cases} 2m + 3 > 0 \\ 2m + 3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{3}{2} \\ m \neq -1 \end{cases}.$$

ta có bốn nghiêm của phương trình đã cho là ± 1, $\pm\sqrt{2m+3}$. Giả sử $0 < a < b$, khi đó bốn số $-b$, $-a$, a, b lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi

$$b - a = 2a \Leftrightarrow b = 3a.$$

Do đó ta xét hai trường hợp

Trường hợp 1: $\sqrt{2m+3} < 1$. Khi đó 4 nghiệm của phương trình đã cho lập thành một cấp số cộng nếu

$$\begin{aligned} & 1 = 3\sqrt{2m+3} \\ \Rightarrow\ & 1 = 9(2m+3) \\ \Rightarrow\ & m = -\frac{13}{9} \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \end{aligned}$$

Trường hợp 2: $1 < \sqrt{2m+3}$. Khi đó 4 nghiệm của phương trình đã cho lập thành một cấp số cộng nếu

$$\begin{aligned} & \sqrt{2m+3} = 3 \\ \Rightarrow\ & 2m + 3 = 9 \\ \Rightarrow\ & m = 3 \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \end{aligned}$$

Vậy tổng các giá trị của m là $-\dfrac{13}{9} + 3 = \dfrac{14}{9}$.

Chọn phương án (A)

Câu 64. Khi ký hợp đồng dài hạn 10 năm với các công nhân tuyển dụng, công ty X, đề xuất phương án trả lương như sau: Người lao động sẽ nhận 7 triệu ở quý đầu tiên (một quí là ba tháng), và kể từ quí làm việc thứ hai mức lương sẽ tăng 500.000 đồng mỗi quí. Như vậy sau 10 năm làm việc, hết hạn hợp đồng, tổng số tiền lương người lao động đã nhận được là bao nhiêu?

Ⓐ $137,5$ triệu. Ⓑ 670 triệu. Ⓒ 570 triệu. Ⓓ 610 triệu.

Lời giải.

Số tiền nhận được hàng quý là một cấp số cộng hữu hạn với số hạng đầu tiên là: $u_1 = 7$ (triệu), công sai là $0,5$ (triệu). Trong 10 năm sẽ có 40 quý, nên cấp số cộng trên có 40 phần tử.

Từ đó ta có $S_{40} = \dfrac{40}{2}\left(2u_1 + (40-1).d\right) = \dfrac{40}{2}\left(2.7 + (40-1).0,5\right) = 670$ (triệu).

Chọn phương án B

Câu 65. Cho dãy (u_n) là một cấp số nhân gồm 6 số hạng. Tổng năm số hạng đầu của dãy là 22, tổng năm số hạng sau của dãy bằng -44. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

Ⓐ $\begin{cases} u_1 = 3 \\ q = -2 \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} u_1 = -3 \\ q = -2 \end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases} u_1 = -2 \\ q = 2 \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} u_1 = 2 \\ q = -2 \end{cases}$.

Lời giải.

Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 22 \\ u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = -44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 22 \\ q(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5) = -44 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q = -2 \\ u_1.\dfrac{(-2)^5 - 1}{-2-1} = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -2 \\ u_1 = 2. \end{cases}$$

Chọn phương án D

Câu 66. Ba số x, y, z lập thành một cấp số cộng và có tổng bằng 21. Nếu lần lượt thêm các số $2; 3; 9$ vào ba số đó (theo thứ tự của cấp số cộng) thì được ba số lập thành một cấp số nhân. Tính $F = x^2 + y^2 + z^2$.

Ⓐ $F = 389$ hoặc $F = 179$. Ⓑ $F = 441$ hoặc $F = 357$.

Ⓒ $F = 395$ hoặc $F = 179$. Ⓓ $F = 389$ hoặc $F = 395$.

Lời giải.

Phương pháp:

Ba số x, y, z lập thành một cấp số cộng $\Leftrightarrow x + z = 2y$.

Và số x, y, z lập thành một cấp số nhân $\Leftrightarrow xz = y^2$.

Cách giải:

Do 3 số x, y, z lập thành một cấp số cộng và có tổng bằng 21 nên ta có

$$\begin{cases} x + z = 2y \\ x + y + z = 21. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 14 \\ y = 7. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 - z \\ y = 7. \end{cases} \quad (1)$$

Nếu lần lượt thêm các số $2; 3; 9$ vào ba số đó (theo thứ tự của cấp số cộng) thì được ba số lập thành một cấp số nhân nên ta có: $(x+2)(z+9) = (y+3)^2$. (2)

Thay (1) vào (2) ta có: $(14 - z + 2)(z + 9) = (7 + 3)^2 \Leftrightarrow z^2 - 7z - 44 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 11 \\ z = -4. \end{array}\right.$

$z = 11 \Rightarrow z = 14 - 11 = 3 \Rightarrow F = x^2 + y^2 + z^2 = 3^2 + 7^2 + 11^2 = 179.$

$z = -4 \Rightarrow x = 14 - (-4) = 18 \Rightarrow F = x^2 + y^2 + z^2 = 18^2 + 7^2 + (-4)^2 = 389.$

Chọn phương án A

Câu 67. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 5 \end{cases}$. Tìm số hạng thứ 2020 của dãy.

A $u_{2020} = 3 \cdot 2^{2020} - 5$. **B** $u_{2020} = 3 \cdot 2^{2019} + 5$. **C** $u_{2020} = 3 \cdot 2^{2019} - 5$. **D** $u_{2020} = 3 \cdot 2^{2020} + 5$.

Lời giải.

Ta có $u_{n+1} = 2u_n + 5 \Leftrightarrow u_{n+1} + 5 = 2(u_n + 5)$.

Xét dãy (v_n) với $v_n = u_n + 5$. Ta có $\begin{cases} v_1 = 6 \\ v_{n+1} = 2v_n. \end{cases}$

Như vậy dãy (v_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu bằng 6 và công bội bằng 2. Ta tính được $v_{2020} = 6 \cdot 2^{2019} = 3 \cdot 2^{2020}$.

Suy ra $u_{2020} = v_{2020} - 5 = 3 \cdot 2^{2020} - 5$.

Chọn phương án A

Câu 68. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos 2x - \tan^2 x = \dfrac{\cos^2 x - \cos^3 x - 1}{\cos^2 x}$ trên đoạn $[1; 70]$.

A 188π. **B** 263π. **C** 363π. **D** 365π.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình là $\cos x \neq 0$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (2\cos^2 x - 1) \cdot \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \cos^2 x - \cos^3 x - 1 \\ \Leftrightarrow\ & 2\cos^4 x + \cos^3 x - \cos^2 x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \pi + k_1 2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k_2 2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k_3 2\pi \end{array}\right. \quad (k_1,\ k_2,\ k_3 \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vì $x \in [1; 70]$ nên $0 \leq k_1,\ k_2 \leq 10$ và $1 \leq k_3 \leq 11$.

Áp dụng công thức tính tổng 11 số hạng đầu tiên của một cấp số cộng, ta có

$$S = \frac{11}{2}(\pi + 21\pi) + \frac{11}{2}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{61\pi}{3}\right) + \frac{11}{2}\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{65\pi}{3}\right) = 363\pi.$$

Chọn phương án C

Câu 69. Trong một lớp có $(2n + 3)$ học sinh gồm An, Bình, Chi cùng $2n$ học sinh khác. Khi xếp tùy ý các học sinh này vào một dãy ghế được đánh số từ 1 đến,$(2n + 3)$, mỗi học sinh ngồi một ghế thì xác suất để số ghế của An, Bình, Chi theo thứ tự lập thành một cấp số cộng là $\frac{17}{1155}$. Số học sinh 1155 của lớp là

(A) 27. (B) 25. (C) 45. (D) 35.

Lời giải.

Số cách các xếp học sinh vào ghế là $(2n+3)!$.

Nhận xét rằng nếu ba số tự nhiên a, b, c lập thành một cấp số cộng thì $a+c=2b$ nên $a+c$ là một số chẵn. Như vậy a, c phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

Từ 1 đến $2n+3$ có $n+1$ số chẵn và $n+2$ số lẻ.

Muốn có một cách xếp học sinh thỏa số ghế của An, Bình, Chi theo thứ tự lập thành một cấp số cộng ta sẽ tiến hành như sau:

Bước 1: chọn hai ghế có số thứ tự cùng chẵn hoặc cùng lẻ rồi xếp An và Chi vào, sau đó xếp Bình vào ghế chính giữa. Bước này có $A_{n+1}^2 + A_{n+2}^2$ cách.

Bước 2: xếp chỗ cho $2n$ học sinh còn lại. Bước này có $(2n)!$ cách.

Như vậy số cách xếp thỏa yêu cầu này là $\left(A_{n+1}^2 + A_{n+2}^2\right).(2n)!$.

Ta có phương trình:

$$\frac{\left(A_{n+1}^2 + A_{n+2}^2\right).(2n)!}{(2n+3)!} = \frac{17}{1155} \Leftrightarrow \frac{n(n+1)+(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)} = \frac{17}{1155}$$

$$\Leftrightarrow 68n^2 - 1019n - 1104 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 16 \\ n = -\dfrac{69}{68} (\text{ loại.}) \end{array}\right.$$

Vậy số học sinh của lớp là 35.

Chọn phương án (D)

Câu 70. Trong một lớp có $(2n+3)$ học sinh gồm An, Bình, Chi cùng $2n$ học sinh khác. Khi xếp tùy ý các học sinh này vào một dãy ghế được đánh số từ 1 đến $(2n+3)$, mỗi học sinh ngồi một ghế thì xác suất số ghế của An, Bình, Chi theo thứ tự lập thành một cấp số cộng là $\frac{17}{1155}$. Số học sinh của lớp là

(A) 27. (B) 25. (C) 45. (D) 35.

Lời giải.

Số cách sắp xếp các học sinh vào ghế là $(2n+3)!$.

Ba số tự nhiên a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì $a+c=2b$ nên $a+c$ là một số chẵn. Như vậy a, c phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

Từ 1 đến $(2n+3)$ có $n+1$ số tự nhiên chẵn và $n+2$ số tự nhiên lẻ.

Muốn có một cách xếp học sinh sao cho số ghế của An, Bình, Chi theo thứ tự lập thành một cấp số cộng ta tiến hành như sau.

Bước 1: Chọn 2 ghế có số thứ tự cùng chẵn hoặc cùng lẻ rồi xếp An và Chi vào, sau đó xếp Bình vào vị trí ghế chính giữa An và Chi. Bước này có

$$\mathrm{A}_{n+1}^2 + \mathrm{A}_{n+2}^2 \text{ cách.}$$

Bước 2: Xếp chỗ cho $2n$ học sinh còn lại, bước này có $(2n)!$ cách xếp.
Vậy số cách xếp thỏa mãn yêu cầu là $(\mathrm{A}_{n+1}^2 + \mathrm{A}_{n+2}^2) \cdot (2n)!$.
Theo bài ra ta có phương trình

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(\mathrm{A}_{n+1}^2 + \mathrm{A}_{n+2}^2\right) \cdot (2n)!}{(2n+3)!} = \frac{17}{1155}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{n(n+1)+(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)} = \frac{17}{1155}\\
\Leftrightarrow\ &68n^2 - 1019n - 1104 = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} n = 16 \text{ (thỏa mãn)}\\ n = -\dfrac{69}{68} \text{ (loại)}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy số học sinh trong lớp là 35 học sinh.
Chọn phương án D

Câu 71. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$ và tổng 100 số hạng đầu bằng 24850. Tính $S = \dfrac{1}{u_1u_2} + \dfrac{1}{u_2u_3} + \cdots + \dfrac{1}{u_{49}u_{50}}$.

A $S = \dfrac{9}{246}$. **B** $S = \dfrac{4}{23}$. **C** $S = 123$. **D** $S = \dfrac{49}{246}$.

Lời giải.

Giả sử d là công sai của cấp số cộng (u_n), ta có $S_{100} = \dfrac{(2u_1 + 99d) \cdot 100}{50} = 24850 \Rightarrow d = 5$. Từ đó suy ra $u_{50} = u_1 + 49d = 246$.
Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned}
5S &= \frac{d}{u_1u_2} + \frac{d}{u_2u_3} + \cdots + \frac{d}{u_{49}u_{50}}\\
&= \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} + \cdots + \frac{1}{u_{49}} - \frac{1}{u_{50}}\\
&= \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{50}} = \frac{245}{246}.
\end{aligned}$$

Vậy $S = \dfrac{49}{246}$.
Chọn phương án D

Câu 72. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 2018$ và $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{1 + u_n^2}}$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n < \dfrac{1}{2018}$ bằng

A 4072325. **B** 4072324. **C** 4072326. **D** 4072327.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $\dfrac{1}{u_{n+1}^2} = \dfrac{1}{u_n^2} + 1$.
Đặt $v_n = \dfrac{1}{u_n^2}$. Khi đó $v_1 = \dfrac{1}{2018^2}$ và $v_{n+1} = v_n + 1$. Vậy (v_n) là một cấp số cộng.
Ta có $v_n = \dfrac{1}{2018^2} + (n-1)$. Vậy từ đó suy ra $u_n = \dfrac{2018}{\sqrt{1 + (n-1) \cdot 2018^2}}$.

Theo giả thiết ta có $\dfrac{2018}{\sqrt{1+(n-1)\cdot 2018^2}} < \dfrac{1}{2018} \Leftrightarrow n > \dfrac{2018^4-1}{2018^2}+1 = 4072324,9999997544$.
Vậy n nhỏ nhất bằng 4072325.
Chọn phương án (A)

Câu 73. Cho cấp số cộng (u_n). Gọi $S_n = u_1+u_2+\cdots+u_n$. Biết rằng $\dfrac{S_p}{S_q} = \dfrac{p^2}{q^2}$ với $p \neq q$, $p, q \in \mathbb{N}^*$. Tính giá trị của biểu thức $\dfrac{u_{2017}}{u_{2018}}$.

(A) $\dfrac{4034}{4035}$. (B) $\dfrac{4031}{4035}$. (C) $\dfrac{4031}{4033}$. (D) $\dfrac{4033}{4035}$.

Lời giải.
Từ giả thiết thay $p=1, q=2$ vào đẳng thức ta có

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{u_1}{2u_1+d} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow d = 2u_1.$$

Vậy $\dfrac{u_{2017}}{u_{2018}} = \dfrac{u_1+2016d}{u_1+2017d} = \dfrac{\frac{d}{2}+2016d}{\frac{d}{2}+2017d} = \dfrac{4033}{4035}$.
Chọn phương án (D)

Câu 74. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $\sqrt{u_n - 1} \geq 2039190$.

(A) $n = 2017$. (B) $n = 2020$. (C) $n = 2018$. (D) $n = 2019$.

Lời giải.
Ta có $u_n = u_{n-1} + (n-1)^3 = n_{n-2} + (n-2)^3 + (n-1)^3 = \cdots = u_1 + 1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3 = 1 + 1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3$.
Xét biểu thức: $\sqrt{u_n - 1} \geq 2039190 \Leftrightarrow \sqrt{1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3} \geq 2039190$. (1)
Bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được rằng: $1^3+2^3+\ldots+n^3 = \dfrac{[n(n+1)]^2}{4}$.
Thay vào (1) ta được: $\dfrac{n(n-1)}{2} \geq 2039190$. Giải bất phương trình ta thu được nghiệm $n \geq 2020$.
Chọn phương án (B)

Câu 75. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d=-3$ và $u_2^2+u_3^2+u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng S_{100} của 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

(A) $S_{100} = -14400$. (B) $S_{100} = -15450$. (C) $S_{100} = -14250$. (D) $S_{100} = -14650$.

Lời giải.
Xét $A = u_2^2+u_3^2+u_4^2 = (u_1-3)^2+(u_1-6)^2+(u_1-9)^2 = 3u_1^2 - 36u_1 + 126 \geq 18$.
Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow u_1 = 6$, khi đó $S_{100} = \dfrac{100\,(2u_1+99d)}{2} = -14250$.
Chọn phương án (C)

Câu 76. Trong một giải cờ vua gồm nam và nữ vận động viên. Mỗi vận động viên phải chơi hai ván với mỗi động viên còn lại. Cho biết có 2 vận động viên nữ và số ván các vận động viên chơi nam chơi với nhau hơn số ván họ chơi với hai vận động viên nữ là 84. Hỏi số ván tất cả các vận động viên đã chơi?

(A) 168. (B) 156. (C) 132. (D) 182.

Lời giải.

Giả sử số nam vận động viên là n, $n \in \mathbb{N}^*$.

— Trước hết, ta tính số ván cờ mà các vận động viên (VĐV) nam chơi với nhau.
VĐV nam thứ nhất chơi cờ với $n-1$ vận động viên nam khác, tạo ra $2(n-1)$ ván.
VĐV nam thứ hai chơi cờ với $n-2$ vận động viên nam khác (không tính với VĐV nam thứ nhất vì đã tính ở trên), tạo ra $2(n-2)$ ván.
...
VĐV nam thứ $n-1$ chơi cờ với 1 vận động viên khác, tạo ra 2 ván.
Suy ra tổng số ván cờ mà các VĐV nam đã chơi với nhau là

$$S_1 = 2((n-1)+(n-2)+\ldots+1) = 2\left(\frac{n(n+1)}{2} - n\right) = n^2 - n.$$

— Tiếp theo, ta tính số ván cờ mà các VĐV nam chơi với các VĐV nữ: mỗi VĐV nữ chơi $2n$ ván cờ với các VĐV nam, do đó tổng số ván cờ mà 2 VĐV nữ chơi với n VĐV nam là $S_2 = 4n$.

— Cuối cùng, hai VĐV nữ chơi với nhau tổng cộng $S_3 = 2$ ván cờ.

Theo giả thiết, ta có $S_1 = S_2 + 84 \Rightarrow n = 12$.
Vậy tổng số ván cờ mà các VĐV đã chơi với nhau là $S_1 + S_2 + S_3 = 182$.
Chọn phương án (D)

Câu 77. Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$, công bội $q = 2$. Tính tổng $T = \frac{1}{u_1 - u_5} + \frac{1}{u_2 - u_6} + \frac{1}{u_3 - u_7} + \cdots + \frac{1}{u_{20} - u_{24}}$.

(A) $\frac{1-2^{19}}{15 \cdot 2^{18}}$. (B) $\frac{1-2^{20}}{15 \cdot 2^{19}}$. (C) $\frac{2^{19}-1}{15 \cdot 2^{18}}$. (D) $\frac{2^{20}-1}{15 \cdot 2^{19}}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{u_1(1-q^4)} + \frac{1}{u_2(1-q^4)} + \frac{1}{u_3(1-q^4)} + \cdots + \frac{1}{u_{20}(1-q^4)} \\
&= \frac{1}{1-q^4}\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \cdots + \frac{1}{u_{20}}\right) \\
&= \frac{1}{1-q^4}\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_1 q} + \frac{1}{u_1 q^2} + \cdots + \frac{1}{u_1 q^{19}}\right) \\
&= \frac{1}{u_1(1-q^4)}\left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \cdots \frac{1}{q^{19}}\right) \\
&= \frac{1}{u_1(1-q^4)} \cdot \frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{q}\right)^{20}\right)}{1 - \frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Thay $u_1 = 1$, $q = 2$ vào, ta được $T = \dfrac{1-2^{20}}{15\cdot 2^{19}}$.

Chọn phương án B

Câu 78. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 5$, $a_{n+1} = qa_n + 3$, $\forall n \geq 1$, trong đó q là hằng số, $q \neq 0$, $q \neq 1$. Biết công thức số hạng tổng quát của dãy số viết dưới dạng $a_n = \alpha q^{n-1} + \beta\dfrac{1-q^{n-1}}{1-q}$. Tính $\alpha + 2\beta$.

A 11. B 13. C 16. D 9.

Lời giải.

Từ dữ kiện đề bài, ta mong muốn tìm được công thức số hạng tổng quát dựa vào cấp số nhân, tức là $a_{n+1} - b = q(a_n - b)$. (1)

Khi đó $a_{n+1} = qa_n + b(1-q) \Rightarrow b = \dfrac{3}{1-q}\,(q \neq 1)$.

Từ (1) suy ra

$$a_{n+1} - b = q(a_n - b) = \cdots = q^n(a_1 - b) = q^n(5-b).$$

Suy ra $a_n = b + q^{n-1}(5-b) = 5q^{n-1} + b(1-q^{n-1}) = 5q^{n-1} + 3\dfrac{1-q^{n-1}}{1-q}$.

Đồng nhất hệ số ta được $\alpha = 5$, $\beta = 3$.

Do đó $\alpha + 2\beta = 11$.

Chọn phương án A

Câu 79. Cho dãy số (u_n): $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Số 20 là số hạng thứ mấy trong dãy?

A 5. B 6. C 9. D 10.

Lời giải.

Ta đi tìm số hạng tổng quát của dãy (u_n). Ta phân tích $n = a(n+1)^2 + b(n+1) - an^2 - bn$.

Cho $n = 0$, $n = -1$ ta được $\begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Do đó

$$u_{n+1} - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{2}(n+1) = u_n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

Đặt $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{2}n \quad (1)$, suy ra $v_{n+1} = v_n$.

Do đó (v_n) là cấp số nhân với công bộ $q = 1$, số hạng đầu $v_1 = u_1 = 5$. Suy ra: $v_n = 5, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Thay vào (1) ta được

$$u_n = 5 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n.$$

Khi đó,

$$5 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = 20 \Leftrightarrow n^2 - n - 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 6 \\ n = -5 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Chọn phương án B

Câu 80. Cho tập $X = \{6; 7; 8; 9\}$. Gọi E là tập hợp các số tự nhiên có 2018 chữ số lập từ các chữ số của tập X. Chọn ngẫu nhiên một số trong tập E, tính xác suất để chọn được số chia hết cho 3.

A $\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^{4035}}\right)$. **B** $\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^{2017}}\right)$. **C** $\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^{4036}}\right)$. **D** $\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^{2018}}\right)$.

Lời giải.

Gọi A_n là tập hợp các số tự nhiên có n chữ số lập từ các chữ số của X và là số chia hết cho 3; B_n là tập hợp các số tự nhiên có n chữ số lập từ các chữ số của X và là số không chia hết cho 3.

Với mỗi số thuộc A_n, có hai cách thêm vào cuối một chữ số 6 hoặc chữ số 9 để được số thuộc A_{n+1} và có hai cách để thêm một chữ số 7 hoặc chữ số 8 vào cuối để được số thuộc B_{n+1}.

Với mỗi số thuộc B_n có một cách thêm vào cuối một chữ số 7 hoặc chữ số 8 để được số thuộc A_{n+1} và có ba cách thêm một chữ số 6, 9 hoặc 7 hoặc 8 vào cuối để được số thuộc B_{n+1}.

Như vậy

$$\begin{cases} n(A_{n+1}) = 2n(A_n) + n(B_n) \\ n(B_{n+1}) = 2n(A_n) + 3n(B_n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3n(A_{n+1}) - n(B_{n+1}) = 4n(A_n) \\ n(A_{n+1}) = 2n(A_n) + n(B_n) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n(B_n) = 3n(A_n) - 4n(A_{n-1}) \\ n(A_{n+1}) = 2n(A_n) + n(B_n) \end{cases} \Rightarrow n(A_{n+1}) = 5n(A_n) - 4n(A_{n-1}), (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$$

Suy ra $n(A_{n+2}) = 5n(A_{n+1}) - 4n(A_n), (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

Hay $n(A_{n+2}) - n(A_{n+1}) = 4\left[n(A_{n+1}) - n(A_n)\right], (\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

Ta có $n(A_1) = 2$, $n(B_1) = 2$, $n(A_2) = 6$, $n(B_2) = 10$, $n(A_3) = 22$.

Xét dãy số (u_n) với $u_n = n(A_{n+1}) - n(A_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta có $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 4u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

Dễ thấy (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 4$ nên $u_n = 4^n, (\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

Ta được $n(A_{n+1}) - n(A_n) = 4^n \Leftrightarrow n(A_{n+1}) - \frac{4^{n+1}}{3} = n(A_n) - \frac{4^n}{3}, (\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

Suy ra $n(A_n) - \frac{4^n}{3} = n(A_1) - \frac{4}{3} \Leftrightarrow n(A_n) = \frac{4^n+2}{3}, (\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

Số phần tử của tập E là 4^{2018}, trong đó có $\frac{4^{2018}+2}{3}$ số chia hết cho 3. Vì vậy xác suất lấy ngẫu nhiêm một số của tập E được số chia hết cho 3 là $p = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^{4035}}\right)$.

Chọn phương án A

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. A	4. A	5. B	6. A	7. A	8. C	9. D	10. A
11. B	12. B	13. B	14. B	15. C	16. C	17. D	18. A	19. D	20. D
21. B	22. B	23. C	24. C	25. B	26. B	27. D	28. A	29. C	30. D
31. C	32. D	33. D	34. A	35. C	36. A	37. D	38. B	39. A	40. B
41. C	42. A	43. D	44. A	45. A	46. D	47. D	48. A	49. D	50. C
51. D	52. B	53. A	54. B	55. B	56. A	57. D	58. C	59. B	60. D
61. D	62. A	63. A	64. B	65. D	66. A	67. A	68. C	69. D	70. D
71. D	72. A	73. D	74. B	75. C	76. D	77. B	78. A	79. B	80. A

DẠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH MŨ, LOGARIT

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Nghiệm của phương trình $3^{x-1}=27$ là

A $x=4$. **B** $x=3$. **C** $x=2$. **D** $x=1$.

Lời giải.

Ta có $3^{x-1}=27 \Leftrightarrow 3^{x-2}=3^3 \Leftrightarrow x-1=3 \Leftrightarrow x=4$.

Chọn phương án A

Câu 1. Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(3x-2)=3$.

A $x=\dfrac{8}{3}$. **B** $x=\dfrac{10}{3}$. **C** $x=\dfrac{16}{3}$. **D** $x=\dfrac{11}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(3x-2)=3 \Leftrightarrow 3x-2=2^3 \Leftrightarrow 3x=10 \Leftrightarrow x=\dfrac{10}{3}$.

Chọn phương án B

Câu 2. Tìm nghiệm của phương trình $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2x+1}=2-\sqrt{3}$.

A $x=\dfrac{1}{4}$. **B** $x=-\dfrac{3}{4}$. **C** $x=-1$. **D** $x=-\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2x+1}=2-\sqrt{3} \Leftrightarrow 2x+1=\log_{7+4\sqrt{3}}\left(2-\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow 2x+1=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{4}$.

Chọn phương án B

Câu 3. Gọi x_1,x_2 là nghiệm của phương trình $7^{x^2-5x+9}=343$. Tính x_1+x_2.

A $x_1+x_2=4$. **B** $x_1+x_2=6$. **C** $x_1+x_2=5$. **D** $x_1+x_2=3$.

Lời giải.

Ta có $7^{x^2-5x+9}=343 \Leftrightarrow 7^{x^2-5x+9}=7^3 \Leftrightarrow x^2-5x+9=3 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=3.\end{array}\right.$

Do đó tổng hai nghiệm $x_1+x_2=2+3=5$.

Chọn phương án C

Câu 4. Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2-3x}=\dfrac{1}{4}$ là

A $S=\varnothing$. **B** $S=\{1;2\}$. **C** $S=\{0\}$. **D** $S=\{1\}$.

Lời giải.

$2^{x^2-3x}=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{x^2-3x}=2^{-2} \Leftrightarrow x^2-3x=-2 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=2$.

Chọn phương án B

Câu 5. Phương trình $3^{x-4}=1$ có nghiệm là

A $x=-4$. **B** $x=4$. **C** $x=0$. **D** $x=5$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$3^{x-4} = 3^0 \Leftrightarrow x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

Chọn phương án B

Câu 6. Phương trình $3^{x-4} = 1$ có nghiệm là

A $x = -4$. **B** $x = 5$. **C** $x = 4$. **D** $x = 0$.

Lời giải.

Phương trình tương đương: $3^{x-4} = 1 \Leftrightarrow x - 4 = \log_3 1 = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

Chọn phương án C

Câu 7. Tập nghiệm của phương trình $\log_{0,25}\left(x^2 - 3x\right) = -1$ là:

A $\{4\}$. **B** $\left\{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}; \dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}\right\}$.

C $\{1; -4\}$. **D** $\{-1; 4\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 3 \end{array}\right.$.

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_{0,25}\left(x^2 - 3x\right) = -1 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 3x = 4 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 3x - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{ll} x = -1 & \text{(nhận)} \\ x = 4 & \text{(nhận)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $S = \{-1; 4\}$.

Chọn phương án D

Câu 8. Tập nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2 - 2x + 4\right) = 2$ là

A $\{0; -2\}$. **B** $\{2\}$. **C** $\{0\}$. **D** $\{0; 2\}$.

Lời giải.

Ta có $x^2 - 2x + 4 = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{0; 2\}$.

Chọn phương án D

Câu 9. Phương trình $\log_2(x+1) = 2$ có nghiệm là

A $x = -3$. **B** $x = 1$. **C** $x = 3$. **D** $x = 8$.

Lời giải.

Phương pháp: $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$.

Cách giải: $\log_2(x+1) = 2 \Leftrightarrow x + 1 = 2^2 \Leftrightarrow x + 1 = 4 \Leftrightarrow x = 3$.

Chọn phương án C

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị x thoả mãn $5^{x^2} = 5^x$?

A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Lời giải.

Ta có $5^{x^2} = 5^x \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Chọn phương án D

Câu 11. Tìm nghiệm của phương trình $\log_3(x-2) = 2$.

A. $x = 9$. B. $x = 8$. C. $x = 11$. D. $x = 10$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} & \log_3(x-2) = 2 \\ \Leftrightarrow\ & x - 2 = 3^2 \\ \Leftrightarrow\ & x - 2 = 9 \\ \Leftrightarrow\ & x = 11. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 11$

Chọn phương án C

Câu 12. Tìm tập nghiệm của phương trình $3^{x^2+2x} = 1$.

A. $S = \{-1; 3\}$. B. $S = \{-2; 0\}$. C. $S = \{-3; 1\}$. D. $S = \{0; 2\}$.

Lời giải.

Ta có $3^{x^2+2x} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2. \end{array}\right.$

Do đó tập nghiệm của phương trình là $S = \{0; 2\}$.

Chọn phương án D

Câu 13. Tích tất cả các nghiệm của phương trình $3^{x^2+x} = 9$ bằng

A. -2. B. -1. C. 2. D. 3.

Lời giải.

$$\begin{aligned} 3^{x^2+x} = 9 \ &\Leftrightarrow\ 3^{x^2+x} = 3^2 \\ &\Leftrightarrow\ x^2 + x = 2 \\ &\Leftrightarrow\ x^2 + x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy tích tất cả các nghiệm của phương trình đã cho bằng -2.

Chọn phương án A

Câu 14. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $\log_5(x+1) - \log_5(x-3) = 1$. Tìm S.

A. $S = \{-2; 4\}$. B. $S = \{\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}; \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\}$.

C $S = \{4\}$. **D** $S = \{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\}$.

Lời giải.

Điều kiện:$x > 3$

PT $\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-3} = 5 \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa). Vậy $S = \{4\}$.

Chọn phương án C

Câu 15. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x+4) = 4$.

A $S = \{-4; 12\}$. **B** $S = \{4\}$. **C** $S = \{4; 8\}$. **D** $S = \{12\}$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(x+4) = 4 \Leftrightarrow x+4 = 2^4 \Leftrightarrow x = 12$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{12\}$.

Chọn phương án D

Câu 16. Tập nghiệm S của phương trình $\left(\frac{4}{7}\right)^x \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{3x-1} - \frac{16}{49} = 0$ là

A $S = \left\{\frac{-1}{2}\right\}$. **B** $S = \{2\}$. **C** $S = \left\{\frac{-1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$. **D** $S = \left\{\frac{-1}{2}; 2\right\}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $\left(\frac{4}{7}\right)^{1-2x} = \left(\frac{4}{7}\right)^2 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}$.

Chọn phương án A

Câu 17. Tìm tập xác định của hàm số $y = \left(-x^2+3x+4\right)^{\frac{1}{3}} + \sqrt{2-x}$.

A $\mathscr{D} = (-1; 2]$. **B** $\mathscr{D} = [-1; 2]$. **C** $\mathscr{D}(-\infty; 2]$. **D** $\mathscr{D} = (-1; 2)$.

Lời giải.

Hàm số $y = (-x^2+3x+4)^{\frac{1}{3}} + \sqrt{2-x}$ xác định khi $\sqrt{2-x}$ và $y = (-x^2+3x+4)^{\frac{1}{3}}$ xác định.

$\sqrt{2-x}$ xác định khi $x \leqslant 2$.

$y = (-x^2+3x+4)^{\frac{1}{3}}$ xác định khi $-x^2+3x+4 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 4$. Vậy ta có điều kiện xác định của hàm số trên là $-1 < x \leqslant 2$

Chọn phương án A

Câu 18. Nghiệm của phương trình $\log_2 x = 3$ là

A $x = 9$. **B** $x = 6$. **C** $x = 8$. **D** $x = 5$.

Lời giải.

Ta có $\log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 2^3 \Leftrightarrow x = 8$

Chọn phương án C

Câu 19. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2(x-5) = 4$.

A $x = 21$. **B** $x = 3$. **C** $x = 11$. **D** $x = 13$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(x-5) = 4 \Leftrightarrow x-5 = 2^4 \Leftrightarrow x = 21$.

Chọn phương án A

Câu 20. Giải phương trình $(2{,}5)^{5x-7} = \left(\frac{2}{5}\right)^{x+1}$.

Ⓐ $x \geq 1$. Ⓑ $x = 1$. Ⓒ $x < 1$. Ⓓ $x = 2$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{7-5x} = \left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} \Leftrightarrow 7 - 5x = x + 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Chọn phương án Ⓑ

B MỨC ĐỘ 2

Câu 21. Số nghiệm của phương trình $2^{2x^2-7x+5} = 1$ là

Ⓐ 0. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 1.

Lời giải.

Phương pháp:

Phương trình $a^x = b\,(a, b > 0, a \neq 1) \Leftrightarrow x = \log_a b$.

Cách giải:

Ta có: $2^{2x^2-7x+5} = 1 \Leftrightarrow 2^{2x^2-7x+5} = 2^0 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{5}{2} \end{array}\right.$.

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Chọn phương án Ⓒ

Câu 22. Phương trình $\ln(x-2) \cdot \ln(x+1) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 0.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$, với điều kiện trên ta có

$\ln(x-2) \cdot \ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln(x-2) = 0 \\ \ln(x+1) = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 1 \\ x + 1 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \text{ (nhận)} \\ x = 0 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Chọn phương án Ⓒ

Câu 23. Phương trình $7^{2x^2+6x+4} = 49$ có tổng tất cả các nghiệm bằng

Ⓐ 1. Ⓑ $\frac{5}{2}$. Ⓒ -1. Ⓓ $-\frac{5}{2}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$7^{2x^2+6x+4} = 7^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 4 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} \\ x = -2. \end{array}\right.$

Vậy tổng tất cả các nghiệm bằng $-\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2}$.

Chọn phương án D

Câu 24. Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 - x + 2) = 1$

A $\{0\}$. B $\{0;1\}$. C $\{-1;0\}$. D $\{1\}$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2 - x + 2 > 0$.

$\log_2(x^2 - x + 2) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 2 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Chọn phương án B

Câu 25. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3(7 - 3^x) = 2 - x$

A 2. B 1. C 7. D 3.

Lời giải.

Ta có $\log_3(7 - 3^x) = 2 - x \Leftrightarrow 7 - 3^x = 3^{2-x} \Leftrightarrow 7 - 3^x = \dfrac{9}{3^x} \Leftrightarrow (3^x)^2 - 7 \cdot 3^x + 9 = 0.\quad (*)$

Phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt thỏa $3^{x_1} + 3^{x_2} = 7;\ 3^{x_1} \cdot 3^{x_2} = 9$,

suy ra $3^{x_1 + x_2} = 3^2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2$

Chọn phương án A

Câu 26. Tập nghiệm của phương trình $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ là

A $\{0;1\}$. B $\{1\}$. C $\{0\}$. D $\{1;3\}$.

Lời giải.

Ta có $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 1 \\ 3^x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Chọn phương án A

Câu 27. Tích các nghiệm của phương trình $\log_2 x \cdot \log_4 x \cdot \log_8 x \cdot \log_{16} x = \dfrac{81}{24}$ là

A 3. B 2. C $\dfrac{1}{2}$. D 1.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$.

Ta có

$$\log_2 x \cdot \log_4 x . \log_8 x \cdot \log_{16} x = \frac{81}{24} \Leftrightarrow \log_2 x \cdot \log_{2^2} x \cdot \log_{2^3} x \cdot \log_{2^4} x = \frac{81}{24}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \log_2^4 x = \frac{81}{24} \Leftrightarrow \log_2^4 x = 81 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 3 \\ \log_2 x = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = \dfrac{1}{8}. \end{array}\right.$$

Do đó tích các nghiệm của phương trình bằng 1.

Chọn phương án D

Câu 28. Số nghiệm của phương trình $9^x + 2.3^{x+1} - 7 = 0$ là

A 0. B 2. C 4. D 1.

Lời giải.

Đặt $t = 3^x, t > 0$

Phương trình đã cho trở thành $t^2 + 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \ \text{(nhận)} \\ t = -7 \ \text{(loại)} \end{array}\right.$.

Với $t = 1$ thì $3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Chọn phương án D

Câu 29. Nghiệm của phương trình $2^{7x-1} = 8^{2x-1}$ là

A $x = 2$. **B** $x = -3$. **C** $x = -2$. **D** $x = 1$.

Lời giải.

$2^{7x-1} = 8^{2x-1} \Leftrightarrow 2^{7x-1} = 2^{6x-3} \Leftrightarrow 7x - 1 = 6x - 3 \Leftrightarrow x = -2$.

Chọn phương án C

Câu 30. Số nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 - 4x) = 2$ bằng

A 2. **B** 4. **C** 3. **D** 1.

Lời giải.

Để logarit có nghĩa thì $x^2 - 4x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ hoặc $x > 4$.

Khi đó $\log_2(x^2 - 4x) = 2 \Leftrightarrow \log_2(x^2 - 4x) = \log_2 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 + 2\sqrt{2} > 4$ hoặc $x = 2 - 2\sqrt{2} < 0$, thỏa mãn điều kiện. Phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Chọn phương án A

Câu 31. Số nghiệm nguyên của phương trình $4^{x+1} - 2^{x+2} + 1 = 0$ bằng

A 0. **B** 4. **C** 1. **D** 2.

Lời giải.

$4^{x+1} - 2^{x+2} + 1 = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2 \cdot 2^x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2^x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -1$.

Chọn phương án C

Câu 32. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_4 x^2 - \log_2 3 = 1$ là

A 6. **B** 5. **C** 4. **D** 0.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng phương pháp đưa về cùng cơ số.

Sử dụng các công thức

① $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha} \log_a b$. ② $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$ với $(a; b > 0; a \neq 1)$.

Cách giải:

Điều kiện: $x \neq 0$.

Ta có $\log_4 x^2 - \log_2 3 = 1 \Leftrightarrow \log_{2^2} x^2 - \log_2 3 = 1 \Leftrightarrow \log_2 |x| - \log_2 3 = 1$

$\Leftrightarrow \log_2 \dfrac{|x|}{3} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|x|}{3} = 2 \Leftrightarrow |x| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \left(\text{ thoả mãn}\right) \\ x = -6 \left(\text{ thoả mãn}\right) \end{array}\right.$

Tổng các nghiệm của phương trình là $6 + (-6) = 0$.

Chú ý: $\log_a x^2 = \log_a |x|$.

Chọn phương án D

Câu 33. Tập nghiệm của phương trình $\log_{0,25}\left(x^2-3x\right)=-1$ là

A. $\{4\}$.
B. $\{1;-4\}$.
C. $\left\{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2};\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}\right\}$.
D. $\{-1;4\}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng $\log_a f(x)=b \Leftrightarrow f(x)=a^b$.

Cách giải:

Điều kiện: $x^2-3x>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>3 \end{array}\right.$

Ta có $\log_{0,25}\left(x^2-3x\right)=-1 \Leftrightarrow x^2-3x=0,25^{-1} \Leftrightarrow x^2-3x=4 \Leftrightarrow x^2-3x-4=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=-1 & (\text{ nhận}) \\ x=4 & (\text{ nhận}) \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\{-1;4\}$.

Chọn phương án D

Câu 34. Nghiệm của phương trình $3^{2x-1}=27$ là

A. $x=2$.
B. $x=3$.
C. $x=0$.
D. $x=-2$.

Lời giải.

Ta có: $3^{2x-1}=27 \Leftrightarrow 2x-1=3 \Leftrightarrow x=2$.

Chọn phương án A

Câu 35. Phương trình $4^x-2^{x+2}+3=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1<x_2$. Đặt $P=2x_1+3x_2$. Khi đó

A. $P=3\log_3 2$.
B. $P=3\log_2 3$.
C. $P=0$.
D. $P=2\log_3 2$.

Lời giải.

Ta có $4^x-2^{x+2}+3=0 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2-4\cdot 2^x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=1 \\ 2^x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\log_2 3. \end{array}\right.$

Do $x_1<x_2$ nên $x_1=0$, $x_2=\log_2 3$.

Vậy $P=2x_1+3x_2=3\log_2 3$.

Chọn phương án B

Câu 36. Phương trình $\log_3(3x-2)=3$ có nghiệm là

A. $x=\dfrac{29}{3}$.
B. $x=87$.
C. $x=\dfrac{11}{3}$.
D. $x=\dfrac{25}{3}$.

Lời giải.

Điều kiện $3x-2>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{2}{3}$.

Ta có: $\log_3(3x-2)=3 \Leftrightarrow \log_3(3x-2)=\log_3 3^3 \Leftrightarrow 3x-2=27 \Leftrightarrow x=\dfrac{29}{3}$.

Chọn phương án A

Câu 37. Phương trình $3^{1-x}=2+\left(\dfrac{1}{9}\right)^x$ có bao nhiêu nghiệm âm?

A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 3.

Lời giải.

$3^{1-x} = 2 + \left(\frac{1}{9}\right)^x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^x - 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{1}{3}\right)^x\right]^2 - 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{1}{3}\right)^x = 1\\ \left(\frac{1}{3}\right)^x = 2\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 0\\ x = -\log_3 2.\end{array}\right.$

Vậy phương trình có 1 nghiệm âm.

Chọn phương án B

Câu 38. Nghiệm của phương trình $9^x - 4.3^x - 45 = 0$ là

A $x = 9$. B $x = -5$ hoặc $x = 9$.

C $x = 2$ hoặc $x = \log_3 5$. D $x = 2$.

Lời giải.

$9^x - 4.3^x - 45 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x = 9\\ 3^x = -5\end{array}\right. \Leftrightarrow x = 2.$

Chọn phương án D

Câu 39. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\ln x^2 < 0$.

A $S = (-1;1)$. B $S = (-1;0)$. C $S = (-1;1)\setminus\{0\}$. D $S = (0;1)$.

Lời giải.

Ta có $\ln x^2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq 0\\ x^2 < 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq 0\\ -1 < x < 1\end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-1;1)\setminus\{0\}$.

Chọn phương án C

Câu 40. Số nghiệm của phương trình $\log_3\left(x^2+4x\right) + \log_{\frac{1}{3}}(2x+3) = 0$ là

A 2. B 3. C 0. D 1.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^2+4x > 0\\ 2x+3 > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x > 0\\ x < -4\end{array}\right.\\ x > -\frac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}\log_3\left(x^2+4x\right) - \log_3(2x+3) = 0 &\Leftrightarrow \log_3\frac{x^2+4x}{2x+3} = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{x^2+4x}{2x+3} = 1\\ &\Leftrightarrow x^2+4x = 2x+3\\ &\Leftrightarrow x^2+2x-3 = 0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1\\ x = -3 \text{ (loại)}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có duy nhất 1 nghiệm.

Chọn phương án D

C MỨC ĐỘ 3

Câu 41. Biết phương trình $8\log_2^2\sqrt[3]{x}+2(m-1)\log_{\frac{1}{4}}x-2019=0$ có hai nghiệm phân biệt thoả mãn $x_1x_2=4$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $m\in(1;2)$. (B) $m\in(2;5)$. (C) $m\in(0;1)$. (D) $m\in(4;7)$.

Lời giải.

Ta có $8\log_2^2\sqrt[3]{x}+2(m-1)\log_{\frac{1}{4}}x-2019=0\Leftrightarrow\frac{8}{9}\log_2^2x-(m-1)\log_2x-2019=0$.

Đặt $t=\log_2x\Leftrightarrow x=2^t$ ta được $\frac{8}{9}t^2-(m-1)t-2019=0$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1x_2=4$ khi và chỉ khi

$$\frac{8}{9}t^2-(m-1)t-2019=0$$

có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn

$$2^{t_1+t_2}=4\Leftrightarrow t_1+t_2=2\Leftrightarrow\frac{9(m-1)}{8}=2\Leftrightarrow m=\frac{25}{9}\in(2;5).$$

Chọn phương án B

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m+3)\,9^x+(2m-1)\,3^x+m+1=0$ có hai nghiệm trái dấu.

(A) $-3<m<-1$. (B) $-3<m<-\frac{3}{4}$. (C) $-1<m<-\frac{3}{4}$. (D) $m\geq-3$.

Lời giải.

Đặt $t=3^x>0$ ta có phương trình $(m+3)\,t^2+(2m-1)t+m+1=0$ (1).

Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu (giả sử $x_1<0<x_2$) $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm dương phân biệt thỏa $0<t_1=3^{x_1}<1<3^{x_2}=t_2$, nghĩa là $0<t_1<1<t_2$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m+3\neq0\\ \Delta>0\\ (t_1-1)(t_2-1)<0\\ t_1t_2>0\\ t_1+t_2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq-3\\ -20m-11>0\\ t_1t_2-(t_1+t_2)+1<0\\ t_1t_2>0\\ t_1+t_2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq-3\\ m<-\frac{11}{20}\\ \frac{m+1}{m+3}+\frac{2m-1}{m+3}+1<0\\ \frac{m+1}{m+3}>0\\ -\frac{2m-1}{m+3}>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq-3\\ m<-\frac{11}{20}\\ \frac{4m+3}{m+3}<0\\ \frac{m+1}{m+3}>0\\ -\frac{2m-1}{m+3}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq-3\\ m<-\frac{11}{20}\\ -3<m<-\frac{3}{4}\\ m<-3\vee m>-1\\ -3<m<\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow-1<m<-\frac{3}{4}.$$

Chọn phương án C

Câu 43. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_2^2 x + \log_2 x - m = 0$ có nghiệm $x \in (0;1)$.

A $m \geq 0$. **B** $m \geq -\frac{1}{4}$. **C** $m \geq -1$. **D** $m \leq -\frac{1}{4}$.

Lời giải.

Đặt $t = \log_2 x$, vì $0 < x < 1$ nên $t < 0$ hay $t \in (-\infty; 0)$.

Phương trình trở thành $t^2 + t - m = 0 \Leftrightarrow m = t^2 + t$.

Xét hàm $f(t) = t^2 + t$ trên $(-\infty; 0)$.

Đồ thị hàm số $y = f(t)$ là parabol có hoành độ đỉnh $t = -\frac{1}{2} \in (-\infty; 0)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc $(0;1)$ khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số đã cho tại ít nhất 1 điểm thuộc $(-\infty; 0) \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{4}$.

Chọn phương án B

Câu 44. Cho phương trình $\log_3^2 x - 4\log_3 x + m - 3 = 0$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 > x_2 > 1$.

A 6. **B** 4. **C** 3. **D** 5.

Lời giải.

Đặt $t = \log_3 x$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 4t + m - 3 = 0 \qquad (*)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 > t_2 > 0$.

Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 > t_2 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - m > 0 \\ m - 3 > 0 \\ 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 7.$$

Chọn phương án C

Câu 45. Phương trình $9^x - 6^x = 2^{2x+1}$ có bao nhiêu nghiệm âm?

A 3. **B** 0. **C** 1. **D** 2.

Lời giải.

Phương pháp:

Chuyển vế, chia cả hai vế cho 4^x và giải phương trình thu được tìm nghiệm.

Cách giải:

$9^x - 6^x = 2^{2x+1} \Leftrightarrow 9^x - 2.4^x = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x} - \left(\dfrac{3}{2}\right)^x - 2 = 0$

Đặt $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x = t > 0$ thì $t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 2 \text{ (nhận)} \end{array}\right. \Rightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} 2 > 0.$

Vậy phương trình không có nghiệm nào âm.

Chọn phương án B

Câu 46. Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8)$ có hai nghiệm phân biệt là

A Vô số. **B** 4. **C** 3. **D** 5.

Lời giải.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ mx - 8 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ m = \dfrac{x^2 - 2x + 9}{x} \end{cases} \quad (*)$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 9}{x}$ trên khoảng $(0;1)$. Ta có $f'(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (do $x > 1$). Cùng với $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 8$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, ta có bảng biến thiên của $f(x)$ như sau.

x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	8	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên, ta thấy phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 khi và chỉ khi $4 < m < 8$.

Do $m \in Z$ nên $m \in \{5; 6; 7\}$. Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Chọn phương án C

Câu 47. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $16^x - 2(m+1)4^x + 3m - 8 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

A 6. **B** 7. **C** 0. **D** 3.

Lời giải.

Đặt $t = 4^x, t > 0$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 0 < x_2$ khi và chỉ khi phương trình $t^2 - 2(m+1)t + 3m - 8 = 0$ có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn

$$0 < t_1 < 1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m + 9 > 0 \\ m > -1 \\ m > \dfrac{8}{3} \\ m < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{8}{3} < m < 9.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Chọn phương án (A)

Câu 48. Phương trình $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = 7^{x-1}$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 0. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Phương pháp

Sử dụng công thức: $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

Giải phương trình mũ: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

Cách giải:

$\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = 7^{x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = \left(\frac{1}{7}\right)^{1-x}$

$x^2-2x-3 = 1-x \Leftrightarrow x^2-x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1-\sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$.

Chọn phương án (D)

Câu 49. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây để phương trình $4^x - m\cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$.

(A) $m \in (1;3)$. (B) $m \in \left(\frac{9}{2};5\right)$. (C) $m \in (3;5)$. (D) $m \in (-2;-1)$.

Lời giải.

Ta có $4^x - m2^{x+1} + 2m = 0 \Leftrightarrow 4^x - 2m2^x + 2m = 0$. (1)

Đặt $t = 2^x > 0$, phương trình (1) trở thành $t^2 - 2mt + 2m = 0$. (2)

Phương trình (1) có hai nghiệm thỏa mãn $x_1+x_2 = 3$, khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm thỏa mãn $t_1 \cdot t_2 = 8$. Tức là $\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m \geq 0 \\ 2m = 8 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4$.

Chọn phương án (C)

Câu 50. Tính tổng T của các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\mathrm{e}^x + \left(m^2 - m\right)\mathrm{e}^{-x} = 2m$ có đúng hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn $\frac{1}{\log \mathrm{e}}$.

(A) $T = 28$. (B) $T = 20$. (C) $T = 21$. (D) $T = 27$.

Lời giải.

Đặt $t = \mathrm{e}^x$, $t > 0$. Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2mt + m^2 - m = 0$ (1).

Phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn $\frac{1}{\log \mathrm{e}}$ khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa $0 < t_1 < t_2 < 10$.

Nghĩa là

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(10) > 0 \\ 0 < \frac{S}{2} < 10 \\ P > 0. \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{21-\sqrt{41}}{2}.$$

Vì m nguyên nên $m \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Vậy $T = 27$.

Chọn phương án D

Câu 51. Tính bình phương tổng các nghiệm của phương trình $3\sqrt{\log_2 x} - \log_2(4x) = 0$.

A 5. B 324. C 9. D 260.

Lời giải.

Điều kiện : $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$

Khi đó

$$\begin{aligned} & 3\sqrt{\log_2 x} - \log_2(4x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 3\sqrt{\log_2 x} - (2 + log_2 x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -\log_2 x + 3\sqrt{\log_2 x} - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = 2 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 16. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Ta thấy $x = 2, x = 16$ thỏa điều kiện.

Vậy tổng bình phương các nghiệm bằng $2^2 + 16^2 = 260$.

Chọn phương án D

Câu 52. Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $9^x - 4 \cdot 3^x + m + 2 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A 2019. B 15. C 12. D 2018.

Lời giải.

Đặt $t = 3^x, t > 0$ thì phương trình đã cho trở thành $t^2 - 4t + m + 2 = 0 \quad (1)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiêm dương phân biệt

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - (m-2) > 0 \\ 4 > 0 \\ m - 2 > 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - m > 0 \\ m > 2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow\ 2 < m < 6. \end{aligned}$$

Các giá trị nguyên thỏa yêu cầu bài toán là $3, 4, 5$.

Vậy tổng $S = 3 + 4 + 5 = 12$.

Chọn phương án C

Câu 53. Tìm tất cả các giá trị của thực của tham số m để phương trình $9^{|\cos x|}-(m-1)\,3^{|\cos x|}-m-2=0$ có nghiệm thực.

(A) $m\geq \frac{5}{2}$. (B) $m\leq 0$. (C) $0<m<\frac{5}{2}$. (D) $0\leq m\leq \frac{5}{2}$.

Lời giải.

Đặt $t=3^{|\cos x|},(1\leq t\leq 3)$. Phương trình đã cho trở thành

$$t^2-(m-1)\,t-m-2=0\Leftrightarrow m\,(1+t)=t^2+t-2\Leftrightarrow m=\frac{t^2+t-2}{t+1}=f\,(t)\,,t\in[1;3]\,. \quad (1)$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương tình (1) có nghiệm thực thuộc $[1;3]$

$$\Leftrightarrow \min_{[1;3]} f\,(t)\leq m\leq \max_{[1;3]} f\,(t)\,.$$

Ta có $f'\,(t)=\dfrac{t^2+2t+3}{(t+1)^2}>0,\ \forall t\in[1;3]$. Và $f\,(1)=0;f\,(3)=\dfrac{5}{2}$.

Vậy $0\leq m\leq \dfrac{5}{2}$.

Chọn phương án D

Câu 54. Gọi x_1,x_2 là 2 nghiệm của phương trình $\left(2-\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x=4$. Khi đó $x_1^2+2x_2^2$ bằng

(A) 2. (B) 5. (C) 4. (D) 3.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\text{Ta có } (2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x-4 &\Leftrightarrow (2-\sqrt{3})^x+\frac{1}{(2-\sqrt{3})^x}=4\\ &\Leftrightarrow (2-\sqrt{3})^{2x}-4(2-\sqrt{3})^x+1=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(2-\sqrt{3})^x=2+\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^{-1}\\(2-\sqrt{3})^x=2-\sqrt{3}\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right..\end{aligned}$$

Do đó $x_1^2+2x_2^2=|x_1|^2+2\,|x_2|^2=1+2=3$.

Chọn phương án D

Câu 55. Tìm tập nghiệm S của phương trình $2^{x+1}=4$

(A) $S=\{4\}$. (B) $S=\{1\}$. (C) $S=\{3\}$. (D) $S=\{2\}$.

Lời giải.

Phương pháp: Giải phương trình mũ: $a^{f(x)}=a^m\Leftrightarrow f(x)=m$.

Cách giải: Ta có: $2^{x+1}=4\Leftrightarrow 2^{x+1}=2^2\Leftrightarrow x+1=2\Leftrightarrow x=1$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\{1\}$.

Chọn phương án B

Câu 56. Tính tích tất cả các nghiệm của phương trình $2^{2x^2+5x+4}=4$.

(A) 1. (B) $\frac{5}{2}$. (C) $-\frac{5}{2}$. (D) -1.

Lời giải.

Phương pháp:

+) Giải phương trình mũ: $a^{f(x)} = a^m \Leftrightarrow f(x) = m$.

+) Áp dụng hệ thức Vi-ét.

Cách giải:

Ta có: $2^{2x^2+5x+4} = 4 \Leftrightarrow 2x^2+5x+4 = 2 \Leftrightarrow 2x^2+5x+2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} \\ x = -2 \end{array}\right. \Rightarrow x_1x_2 = 1$.

Chọn phương án (A)

Câu 57. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\left(7-3\sqrt{5}\right)^{x^2} + m\left(7+3\sqrt{5}\right)^{x^2} = 2^{x^2-1}$ có đúng bốn nghiệm phân biệt.

(A) $0 < m < \frac{1}{16}$. (B) $0 \le m < \frac{1}{16}$. (C) $-\frac{1}{2} < m < 0$. (D) $-\frac{1}{2} < m \le \frac{1}{16}$.

Lời giải.

Phương pháp:

+) Ta có: $\left(7+3\sqrt{5}\right)\left(7-3\sqrt{5}\right) = 49-45 = 4 \Rightarrow 7-3\sqrt{5} = \frac{4}{7+3\sqrt{5}}$

+) Đặt ẩn phụ và đưa phương trình đã cho về phương trình bậc hai ẩn t từ đó tìm m theo yêu cầu của đề bài.

Cách giải:

Ta có: $\left(7+3\sqrt{5}\right)\left(7-3\sqrt{5}\right) = 49-45 = 4 \Rightarrow 7+3\sqrt{5} = \frac{4}{7-3\sqrt{5}}$

Khi đó $\left(7-3\sqrt{5}\right)^{x^2} + m\left(7+3\sqrt{5}\right)^{x^2} = 2^{x^2-1}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{7+3\sqrt{5}}\right)^{x^2} + m\left(7+3\sqrt{5}\right)^{x^2} = \frac{1}{2}.2^{x^2}$$

$$\Leftrightarrow 2.2^{x^2} - 2^{x^2}.\left(7+3\sqrt{5}\right)^2 + 2m\left(7+3\sqrt{5}\right)^{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2.\left(\frac{2}{7+3\sqrt{5}}\right)^{2x^2} - \left(\frac{2}{7+3\sqrt{5}}\right)^{x^2} + 2m = 0(*)$$

Đặt $\left(\frac{2}{7+3\sqrt{5}}\right)^{2x^2} = t \Rightarrow x^2 = \log_{\frac{2}{7+3\sqrt{5}}} t$.

Ta có: $0 < \frac{2}{7+3\sqrt{5}} < 1 \Rightarrow \log_{\frac{2}{7+3\sqrt{5}}} t > 0 \Leftrightarrow 0 < t < 1 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow 2t^2 - t + 2m = 0(1)$

Để phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ pt (1) có hai nghiệm phân biệt $t \in (0;1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ af(0) > 0 \\ af(1) > 0 \\ 0 < -\frac{b}{2a} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-16m > 0 \\ 4m > 0 \\ 2(2m+1) > 0 \\ 0 < \frac{1}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{16} \\ m > 0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{16} \\ m > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Chọn phương án (A)

Câu 58. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1)^2 - \log_2(x-3)^2 = 2\log_2(x-1)$ trên $\mathbb{R}$. Tìm số phần tử của S.

A 1. **B** 3. **C** 4. **D** 2.

Lời giải.

Điều kiện xác định của phương trình là $x > 1$ và $x \neq 3$.

Phương trình đã cho viết lại như sau

$$\begin{aligned} & \log_2(x-1)^4 - \log_2(x-3)^2 = \log_2(x-1)^2 \\ \Leftrightarrow\ & \log_2(x-1)^4 = \log_2[(x-1)^2 \cdot (x-3)^2] \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)^4 = (x-3)^2 \cdot (x-1)^2 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)^2 = (x-3)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & x-1 = x-3 \\ & x-1 = 3-x \end{aligned}\right. \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{(nhận)}. \end{aligned}$$

Vậy $S = \{2\}$. Khi đó, số phần tử của S là 1.

Chọn phương án A

Câu 59. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong $[-2017; 2017]$ để phương trình $\log(mx) = 2\log(x+1)$ có nghiệm duy nhất?

A 4015. **B** 4014. **C** 2017. **D** 2018.

Lời giải.

Ta có $\log(mx) = 2\log(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ mx = (x+1)^2 \end{cases}$. (1)

Dễ thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của (1), do đó (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ m = \dfrac{(x+1)^2}{x} = x + \dfrac{1}{x} + 2 \end{cases}$. (2)

Xét hàm số $f(x) = x + \dfrac{1}{x} + 2$ trên $\in (-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

Ta có $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & x = 1 \\ & x = -1 \text{ (loại)} \end{aligned}\right.$. Bảng biến thiên

x	-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & m < 0 \\ & m = 4 \end{aligned}\right.$.

Mà $m \in \mathbb{Z}, m \in [-2017; 2017] \Rightarrow m \in \{-2017; -2016; \ldots; -1\} \cup \{4\}$. Vậy, có 2018 giá trị của m thoả mãn.

Chọn phương án D

Câu 60. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\log_2^2 x + \log_2 x + m = 0$ có nghiệm $x \in (0;1)$.

(A) $m \le \frac{1}{4}$. (B) $m \le 1$. (C) $m \ge \frac{1}{4}$. (D) $m \ge 1$.

Lời giải.

Đặt $t = \log_2 x$. Với $x \in (0;1) \Leftrightarrow t \in (-\infty;0)$.

Phương trình trở thành $t^2 + t + m = 0 \Leftrightarrow m = -t^2 - t \quad (*)$.

Ta cần tìm m để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có nghiệm.

Xét hàm $f(t) = -t^2 - t$ với $t \in (-\infty;0)$; $f'(t) = -2t - 1$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \le \frac{1}{4}$.

Chọn phương án (A)

D MỨC ĐỘ 4

Câu 61. Biết x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\frac{4x^2-4x+1}{2x}\right) + 4x^2 + 1 = 6x$ và $x_1 + 2x_2 = \frac{1}{4}(a + \sqrt{b})$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a + b$.

(A) $a + b = 16$. (B) $a + b = 14$. (C) $a + b = 13$. (D) $a + b = 11$.

Lời giải.

Phương pháp:

Giải phương trình bằng phương pháp xét hàm số.

Cách giải:

ĐKXĐ: $x \ne \frac{1}{2}, x > 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_7\left(\frac{4x^2-4x+1}{2x}\right) + 4x^2 + 1 = 6x. \\ \Leftrightarrow\ & \log_7\left(4x^2-4x+1\right) - \log_7(2x) + 4x^2 + 1 = 6x. \\ \Leftrightarrow\ & \log_7\left(4x^2-4x+1\right) + 4x^2 - 4x + 1 = \log_7(2x) + 2x \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \log_7 t + t, t > 0$ ta có $f'(t) = \frac{1}{t\ln 7} + 1 > 0, \forall t > 0$.

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Khi đó, (1) $\Leftrightarrow f\left(4x^2-4x+1\right) = f(2x) \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 2x \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \text{ (tm)} \\ x = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \text{ (tm)}. \end{array}\right.$

TH1: $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{4}; x_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{4} \Rightarrow x_1 + 2x_2 = \dfrac{9-\sqrt{5}}{4} = \dfrac{1}{4}(a+\sqrt{b})$: Vô lí.

TH2: $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{4}; x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{4} \Rightarrow x_1 + 2x_2 = \dfrac{9+\sqrt{5}}{4} = \dfrac{1}{4}(a+\sqrt{b}) \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow a + b = 14.$

Chọn phương án B

Câu 62. Cho phương trình $m\ln^2(x+1) - (x+2-m)\ln(x+1) - x - 2 = 0$ (1). Tập tất cả giá trị của tham số m để phương trình (1) có các nghiệm, trong đó có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$ là khoảng $(a; +\infty)$. Khi đó, a thuộc khoảng

A $(3,8; 3,9)$. **B** $(3,7; 3,8)$. **C** $(3,6; 3,7)$. **D** $(3,5; 3,6)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x > -1$. Ta có

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow m\ln^2(x+1) - (x+2-m)\ln(x+1) - x - 2 = 0\\
&\Leftrightarrow m\ln^2(x+1) - (x+2)\ln(x+1) + m\ln(x+1) - (x+2) = 0\\
&\Leftrightarrow m\ln(x+1)\left[\ln(x+1)+1\right] - (x+2)\left[\ln(x+1)+1\right] = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\ln(x+1)+1\right]\left[m\ln(x+1) - x - 2\right] = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln(x+1)+1 = 0 \\ m\ln(x+1) - x - 2 = 0 \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \mathrm{e}^{-1} - 1 < 0 \text{ (loại)} \\ m\ln(x+1) - x - 2 = 0\,(*) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Với $m = 0$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm $x = -2 < 0$ (loại) nên không thỏa bài toán.

Với $m \neq 0$ thì $(*) \Leftrightarrow \dfrac{\ln(x+1)}{x+2} = \dfrac{1}{m}$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x+2}$ có $f'(x) = \dfrac{\frac{x+2}{x+1} - \ln(x+1)}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow x = x_0 \in (2;3)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+2}$ nên ta có bảng biến thiên trên $(-1; +\infty)$ như sau

x		-1		0		2		x_0		3		4		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$		$+$	$\frac{\ln 3}{4}$	$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$			0				c				$\frac{\ln 5}{6}$		6

Để phương trình có nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$ thì $0 < \dfrac{1}{m} < \dfrac{\ln 5}{6} \Rightarrow \dfrac{6}{\ln 5} \approx 3{,}728$.

Suy ra $a \in (3,7; 3,8)$.

Chọn phương án B

Câu 63. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m sao cho phương trình $\log_2 \dfrac{3x^2+3x+m+1}{2x^2-x+1} = x^2 - 5x - m + 2$ có nghiệm?

(A) Vô số. (B) 4. (C) 6. (D) 5.

Lời giải.

Điều kiện $3x^2+3x+m+1>0$.

$$\begin{aligned}&\log_2\frac{3x^2+3x+m+1}{2x^2-x+1}=x^2-5x-m+2\\ \Leftrightarrow\ &\log_2\left(3x^2+3x+m+1\right)-\log_2\left(2x^2-x+1\right)=x^2-5x-m+2\\ \Leftrightarrow\ &\log_2\left(3x^2+3x+m+1\right)+\left(3x^2+3x+m+1\right)=\log_2\left(4x^2-2x+2\right)+\left(4x^2-2x+2\right)\qquad(*)\end{aligned}$$

Xét hàm $f(t)=\log_2 t+t$ với $t>0$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t\cdot\ln 2}+1>0$ với mọi $t>0$.

Vậy hàm $f(t)=\log_2 t+t$ với $t>0$, luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó phương trình $(*)\Leftrightarrow f\left(3x^2+3x+m+1\right)=f\left(4x^2-2x+2\right)\Leftrightarrow 3x^2+3x+m+1=4x^2-2x+2$
$\Leftrightarrow x^2-5x-m+1=0$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 25-4.(-m+1)\geq 0\Leftrightarrow m\geq-\dfrac{21}{4}$.

Do m nguyên âm nên $m\in\{-5;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1\}$.

Chọn phương án (D)

Câu 64. Gọi $(a;b)$ là tập các giá trị của tham số m để phương trình $2e^{2x}-8e^x-m=0$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0;\ln 5)$. Tổng $a+b$ là

(A) 2. (B) 4. (C) -6. (D) -14.

Lời giải.

Phương pháp:

Đặt $t=e^x$. Đưa phương trình đã cho về phương trình ẩn t với $t\in(1;5)$.

Cô lập m và sử dụng phương pháp hàm số để phương trình ẩn t có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(1;5)$ khi đó phương trình đã cho cũng có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0;\ln 5)$.

Cách giải:

Đặt $t=e^x$. Khi đó với $x\in(0;\ln 5)\Rightarrow t\in\left(e^0;e^{\ln 5}\right)$ hay $t\in(1;5)$.

Phương trình đã cho trở thành $2t^2-8t-m=0\Leftrightarrow 2t^2-8t=m$ với $t\in(1;5)$.

Nhận thấy rằng để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc $(0;\ln 5)$ thì phương trình $2t^2-8t=m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $(1;5)$.

Xét $f(t)=2t^2-8t\Rightarrow f'(t)=4t-8=0\Leftrightarrow t=2\in(1;5)$

BBT của $f(t)$ trên $(1;5)$.

t	1		2		5
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	-6	$\searrow$	-8	$\nearrow$	10

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình $2t^2-8t=m$ có hai nghiệm phân biệt $t\in(1;5)$ khi và chỉ khi $-8<m<-6$.

Vậy để phương trình $2e^{2x}-8e^x-m=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;\ln 5)$ thì $m\in(-8;-6)\Rightarrow a=-8;b=-6\Rightarrow a+b=-14$.
Chọn phương án D

Câu 65. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\log_3(x+3)+m\log_{\sqrt{x+3}}9=16$ có hai nghiệm thỏa mãn $-2<x_1<x_2$.

A 17. B 16. C 14. D 15.

Lời giải.
Điều kiện xác định $x>-3$ và $x\neq 2$.
Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}&\log_3(x+3)+4m\log_{(x+3)}3-16=0\\ \Leftrightarrow\ &\log_3^2(x+3)-16\log_3(x+3)+4m=0 \qquad (1).\end{aligned}$$

Đặt $\log_3(x+3)=t$, phương trình (1) trở thành $t^2-16t+4m=0$ (2).
Ta có $\log_3(x+3)=t\Leftrightarrow x=3^t-3$.
Theo điều kiện đề bài thì $x>-2$ nên $3^t-3>-2\Leftrightarrow t>0$.
Vậy phương trình $\log_3(x+3)+m\log_{\sqrt{x+3}}9=16$ có hai nghiệm thỏa mãn $-2<x_1<x_2$ thì phương trình (2) phải có hai nghiệm t dương phân biệt

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ t_1+t_2=16>0\\ t_1\cdot t_2=4m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}64-4m>0\\ 4m>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<16.$$

Vậy có 15 giá trị nguyên m thỏa mãn.
Chọn phương án D

Câu 66. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tồn tại các số thực x, y thỏa mãn $\mathrm{e}^{3x+5y-10}-\mathrm{e}^{x+3y-9}=1-2x-2y$ và $\log_5^2(3x+2y+4)-(m+6)\log_5(x+5)+m^2+9=0$?

A 3. B 5. C 4. D 6.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{3x+5y-10}-\mathrm{e}^{x+3y-9}=1-2x-2y&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{3x+5y-10}-\mathrm{e}^{x+3y-9}=(x+3y-9)-(3x+5y-10)\\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{3x+5y-10}+(3x+5y-10)=\mathrm{e}^{x+3y-9}+(x+3y-9)\\ &\Leftrightarrow f(3x+5y-10)=f(x+3y-9) \qquad (1)\end{aligned}$$

với $f(t)=\mathrm{e}^t+t$. Vì $f'(t)=\mathrm{e}^t+1>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Do đó (1) $\Leftrightarrow 3x+5y-10=x+3y-9\Leftrightarrow 2y=1-2x$. Thay vào điều kiện còn lại, ta được phương trình

$$\log_5^2(x+5)-(m+6)\log_5(x+5)+m^2+9=0 \qquad (2)$$

Bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm x, điều này xảy ra khi $\Delta=3m^2+12m\geq 0\Leftrightarrow 0\leq m\leq 4\Rightarrow m\in\{1;2;3;4\}$.
Chọn phương án C

50 DẠNG TOÁN PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA LẦN 2

Câu 67. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $0 \leq x, y \leq 1$, trong đó x, y không đồng thời bằng 0 hoặc 1 và $\log_3\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right) + (x+1)\cdot(y+1) - 2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P với $P = 2x + y$.

(A) 2. (B) 1. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) 0.

Lời giải.

Ta có

$$\log_3\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + (x+1)\cdot(y+1) - 2 = 0 \Leftrightarrow \log_3(x+y) - \log_3(1-xy) + xy + x + y - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \log_3(x+y) + (x+y) = \log_3(1-xy) + 1 - xy.$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3(t) + t,\ t \in (0;2)$, ta có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 3} + 1 > 0\ \forall t \in (0;2)$. Do đó phương trình trên tương đương với

$$x + y = 1 - xy \Leftrightarrow y = \frac{1-x}{1+x}.$$

Từ đó suy ra $P = 2x + y = 2x + \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{2x^2+x+1}{x+1}$.

$P' = \dfrac{2x^2+4x}{(x+1)^2}$, $P' = 0$ có nghiệm $x = 0$ thuộc $[0;1]$.

Lần lượt thay $x = 0$ và $x = 1$ vào P, ta nhận được giá trị nhỏ nhất của P bằng 1.

Chọn phương án (B)

Câu 68. Cho phương trình $\log_{\sqrt{2}}(mx - 6x^3) + 2\log_{\frac{1}{2}}(-14x^2 + 29x - 2) = 0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có ba nghiệm phân biệt.

(A) $18 < m < \dfrac{39}{2}$. (B) $18 < m < 20$. (C) $19 < m < 20$. (D) $19 < m < \dfrac{39}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_{\sqrt{2}}(mx - 6x^3) + 2\log_{\frac{1}{2}}(-14x^2 + 29x - 2) = 0 \Leftrightarrow \log_2(mx - 6x^3) = \log_2(-14x^2 + 29x - 2)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -14x^2 + 29x - 2 > 0 \\ mx - 6x^3 = -14x^2 + 29x - 2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{14} < x < 2 \\ \dfrac{6x^3 - 14x^2 - 2}{x} = m - 29. \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{6x^3 - 14x^2 - 2}{x}$ với $x \in \left(\dfrac{1}{14};2\right)$, ta có $f'(x) = \dfrac{12x^3 - 14x^2 + 2}{x^2}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -\dfrac{1}{3} & \text{(loại)} \\ x = \dfrac{1}{2} & \text{(nhận)} \\ x = 1 & \text{(nhận).} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{14}$		$\frac{1}{2}$		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{2839}{98}$	$\nearrow$	$-\frac{19}{2}$	$\searrow$	-10	$\nearrow$	-5

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để phương trình có 3 nghiệm thì $-10 < m - 29 < -\dfrac{19}{2} \Leftrightarrow 19 < m < \dfrac{39}{2}$.

Chọn phương án D

Câu 69. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $9 \cdot 9^{x^2-2x} - (2m+1)\, 15^{x^2-2x+1} + (4m-2)\, 5^{2x^2-4x+2} = 0$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

A $\dfrac{1}{2} < m < 1$.

B $m > \dfrac{3+\sqrt{6}}{2}$ hoặc $m < \dfrac{3-\sqrt{6}}{2}$.

C $m > 1$ hoặc $m < \dfrac{1}{2}$.

D $\dfrac{3-\sqrt{6}}{2} < m < \dfrac{3+\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & 9 \cdot 9^{x^2-2x} - (2m+1)15^{x^2-2x+1} + (4m-2)5^{2x^2-4x+2} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 9^{x^2-2x+1} - (2m+1)15^{x^2-2x+1} + (4m-2)5^{2x^2-4x+2} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\left(\frac{3}{5}\right)^{(x-1)^2}\right]^2 - (2m+1)\left(\frac{3}{5}\right)^{(x-1)^2} + 4m - 2 = 0, (1). \end{aligned}$$

Đặt $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{(x-1)^2} = t > 0$.

Khi đó (1) trở thành

$$t^2 - (2m+1)t + 4m - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t-2m+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 2m-1. \end{array}\right.$$

Chú ý rằng với $t = 2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{5}\right)^{(x-1)^2} = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = \log_{\frac{3}{5}} 2$, mà $\log_{\frac{3}{5}} 2 < 0$ và $(x-1)^2 \geq 0$ nên phương trình này vô nghiệm.

Do đó (1) $\Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{5}\right)^{(x-1)^2} = 2m - 1$. (2)

Xét hàm $f(x) = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{(x-1)^2}$ có $f'(x) = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{(x-1)^2} \cdot \ln\left(\dfrac{3}{5}\right) \cdot 2(x-1)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên hàm số $f(x)$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên hàm $f(x)$, ta thấy để phương trình (1) có 2 nghiệm thực x phân biệt thì phương trình (2) phải có duy nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$, nghiệm còn lại (nếu có) khác 1. Số nghiệm của (2) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{(x-1)^2}$ và đường thẳng $y = 2m - 1$ nên điều kiện của m thỏa mãn là $0 < 2m - 1 < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < m < 1$.

Chọn phương án A

Câu 70. Cho phương trình $4^x - (10m+1)\,2^x + 32 = 0$ biết rằng phương trình này có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_1x_2} = 1$. Khi đó, khẳng định nào sau đây về m là đúng?

A $0 < m < 1$. **B** $2 < m < 3$. **C** $-1 < m < 0$. **D** $1 < m < 2$.

Lời giải.

Đặt $2^x = t\,(t > 0)$. Khi đó phương trình trở thành $t^2 - (10m+1)\,t + 32 = 0$. $(*)$

Phương trình ban đầu có hai nghiệm x_1, x_2

$\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} (10m+1)^2 - 4.32 > 0 \\ (10m+1) > 0 \\ 32 > 0. \end{cases}$.

Theo định lý Viet ta có $\begin{cases} t_1 + t_2 = 10m + 1 \\ t_1t_2 = 32. \end{cases}$

Với $t_1 \cdot t_2 = 32 \Rightarrow 2^{x_1} + x_2 = 32 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 5$.

Lại có $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_1x_2} = 1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + 1 = x_1x_2$ nên $x_1x_2 = 6$.

Khi đó ta có x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $X^2 - 5X + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 2 \Rightarrow t_1 = 4 \\ X = 3 \Rightarrow t_2 = 8 \end{array}\right.$.

Mặt khác $t_1 + t_2 = 10m + 1 \Leftrightarrow 12 = 10m + 1 \Leftrightarrow m = \dfrac{11}{10}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $1 < m < 2$.

Chọn phương án D

Câu 71. Cho hai số thực $a > 1$, $b > 1$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $a^x \cdot b^{x^2-1} = 1$. Trong trường hợp biểu thức $S = \left(\dfrac{x_1x_2}{x_1 + x_2}\right)^2 - 4x_1 - 4x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất, mệnh đề nào sau đây là đúng?

A $a < b$. **B** $ab = 4$. **C** $ab = 2$. **D** $a > b$.

Lời giải.

Ta có: $a^x = b^{1-x^2} \Leftrightarrow x \cdot \log_b a = 1 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + (\log_b a)\, x - 1 = 0$
Khi đó

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\log_b a \\ x_1 x_2 = -1. \end{cases}$$

Do đó $S = \left(\dfrac{-1}{-\log_b a}\right)^2 - 4\left(-\log_b a\right) = \dfrac{1}{\left(\log_b a\right)^2} + 4\log_b a$.

Đặt $t = \log_b a > \log_b 1 = 0$. Khi đó $S = \dfrac{1}{t^2} + 4t = \dfrac{1}{t^2} + 2t + 2t \overset{Cauchy}{\geqslant} 3\sqrt[3]{4}$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \ \min S = 3\sqrt[3]{4} \Leftrightarrow 2t = \frac{1}{t^2} \\ &\Leftrightarrow \ t^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ &\Leftrightarrow \ \log_b a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ &\Rightarrow \ a = b^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} < b^1 \Rightarrow a < b. \end{aligned}$$

Chọn phương án A

Câu 72. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $4^x + 9^y + 16^z = 2^x + 3^y + 4^z$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 2^{x+1} + 3^{y+1} + 4^{z+1}$.

(A) $\dfrac{13+\sqrt{87}}{2}$. (B) $\dfrac{11+\sqrt{87}}{2}$. (C) $\dfrac{7+\sqrt{37}}{2}$. (D) $\dfrac{9+\sqrt{87}}{2}$.

Lời giải.

Đặt $a = 2^x,\ b = 3^y,\ c = 4^z\ (a > 0, b > 0, c > 0)$.

Theo giả thiết, ta có $a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c \Leftrightarrow \left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4} \quad (*)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 2a + 3b + 4c$.

Trong không gian tọa độ $Oxyz$, lấy các điểm $M(a; b; c), a > 0, b > 0, c > 0$ thỏa mãn với $(*)$.

$\Leftrightarrow M$ thuộc mặt cầu tâm $I\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Xét mặt phẳng $(\alpha) :: 2x + 3y + 4z - T = 0$ đi qua $M(a; b; c)$.

$\Rightarrow d\left(I_2(\alpha)\right) \le IM = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \dfrac{\left|2 \cdot \dfrac{1}{2} + 3 \cdot \dfrac{1}{2} + 4 \cdot \dfrac{1}{2} - T\right|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}} \le \dfrac{\left|\dfrac{9}{2} - T\right|}{\sqrt{29}} \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\Leftrightarrow \left|T - \dfrac{9}{2}\right| \le \dfrac{\sqrt{87}}{2} \Leftrightarrow T - \dfrac{9}{2} \le \dfrac{\sqrt{87}}{2} \Leftrightarrow T \le \dfrac{9 + \sqrt{87}}{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (\alpha)$ tiếp xúc với mặt cầu (I, R) tại M.

Bằng tính toán, ta giải được: $a = \dfrac{29 + 2\sqrt{87}}{58}$; $b = \dfrac{29 + 3\sqrt{87}}{58}$; $c = \dfrac{29 + 4\sqrt{87}}{58}$.

Vậy $\max T = \dfrac{9 + \sqrt{87}}{2}$.

Chọn phương án D

Câu 73. Có bao nhiêu giá trị m để phương trình

$$9.3^{2x} - m\left(4\sqrt[4]{x^2 + 2x + 1} + 3m + 3\right) \cdot 3^x + 1 = 0.$$

có đúng ba nghiệm phân biệt.

A Vô số. **B** 3. **C** 1. **D** 2.

Lời giải.

Ta có

$$9 \cdot 3^{2x} - m\left(4\sqrt[4]{x^2+2x+1} + 3m + 3\right) \cdot 3^x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3^{x+1} + \frac{1}{3^{x+1}} - \frac{m}{3}(4\sqrt{|x+1|} + 3m + 3) = 0. \quad (1)$$

Đặt $t = x + 1$, phương trình (1) trở thành

$3^t + \frac{1}{3^t} - \frac{m}{3}(4\sqrt{|t|} + 3m + 3) = 0.$ (2)

Bái toán trở thành tìm số giá trị nguyên của m để phương trình (2) có đúng ba nghiệm thực phân biệt.

Nhận xét: Nếu t_0 là một nghiệm của phương trình (2) thì $-t_0$ cũng là một nghiệm của phương trình (2). Do đó điều kiện cần để phương trình (2) có đúng ba nghiệm thực phân biệt là phương trình (2) có nghiệm $t = 0$.

Với $t = 0$, thay vào phương trình (2) ta có $-m^2 - m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2. \end{cases}$

Thử lại

— Với $m = -2$ phương trình (2) thành $3^t + \frac{1}{3^t} + \frac{2}{3}(4\sqrt{|t|} - 3) = 0$.

Ta có $3^t + \frac{1}{3^t} \geq 2, \forall t \in \mathbb{R}$ và $\frac{2}{3}(4\sqrt{|t|} - 3) \geq -2, \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra $3^t + \frac{1}{3^t} + \frac{2}{3}(4\sqrt{|t|} - 3) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Dấu "=" xảy ra khi $t = 0$, hay phương trình (2) có nghiệm duy nhất $t = 0$ nên loại nghiệm $m = -2$.

— Với $m = 1$ phương trình (2) thành $3^t + \frac{1}{3^t} - \frac{1}{3}(4\sqrt{t|} + 6) = 0$ (3)

Dễ thấy phương trình (3) có ba nghiệm $t = -1$, $t = 0$, $t = 1$.

Ta chứng minh phương trình (3) chỉ có ba nghiệm $t = -1$, $t = 0$, $t = 1$.

Vì t là nghiệm thì $-t$ cũng là nghiệm nên ta chỉ xét phương trình (3) trên $[0; +\infty)$.

Trên tập $[0; +\infty)$, (3) $\Leftrightarrow 3^t + \frac{1}{3^t} - \frac{1}{3}(4\sqrt{t} + 6) = 0$.

Xét hàm $f(t) = 3^t + \frac{1}{3^t} - \frac{1}{3}(4\sqrt{t} + 6)$ trên $[0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = 3^t \ln 3 - 3^{-t} \cdot \ln 3 - \frac{2}{3\sqrt{t}}$, $f''(t) = 3^t \ln^2 3 + 3^{-t} \cdot \ln^2 3 + \frac{1}{3 \cdot (\sqrt{t})^3} > 0, \forall t > 0$. Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty) \Rightarrow f'(t) = 0$ có tối đa một nghiệm $t > 0 \Rightarrow f(t) = 0$ có tối đa hai nghiệm $t \in [0; +\infty)$. Suy ra trên $[0; +\infty)$, phương trình (3) có hai nghiệm $t = 0$, $t = 1$.

Do đó trên tập $\mathbb{R}$, phương trình (3) có đúng ba nghiệm $t = -1$, $t = 0$, $t = 1$. Vậy chọn $m = 1$.

Chú ý: Đối với bài toán trắc nghiệm này, sau khi loại được $m = -2$, ta có thể kết luận đáp án C do đề không có phương án nào là không tồn tại m.
Chọn phương án C

Câu 74. Tìm tập S tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}\left(4x + 4y - 6 + m^2\right) \geq 1$ và $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

A $S = \{-5; 5\}$.
B $S = \{-7; -5; -1; 1; 5; 7\}$.
C $S = \{-5; -1; 1; 5\}$.
D $S = \{-1; 1\}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&\log_{x^2+y^2+2}\left(4x + 4y - 6 + m^2\right) \geq 1 = \log_{x^2+y^2+2}\left(x^2 + y^2 + 2\right)\\
\Leftrightarrow &4x + 4y - 6 + m^2 \geq x^2 + y^2 + 2 \text{ (do } x^2 + y^2 + 2 > 1)\\
\Leftrightarrow &x^2 + y^2 - 4x - 4y - m^2 + 8 \leq 0\\
\Leftrightarrow &(x-2)^2 + (y-2)^2 \leq m^2 \quad (1)
\end{aligned}$$

(1) là hình tròn (C_1) có tâm $I(2; 2)$, bán kính $(R_1 = |m|$ với $m \neq 0$ hoặc là điểm $I(2; 2)$ với $m = 0$.
Ta có $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ (2) là đường tròn (C_2) có tâm $J(-1; 2)$ bán kính $R_2 = 2$.
Khi $m = 0$ ta có $I(2; 2) \notin (C_2)$ nên yêu cầu bài toán không thỏa mãn.
Khi $m \neq 0$ ta nhận thấy để tồn tại duy nhất cặp số $(x; y)$ thỏa mãn 2 điều kiện (1) và (2) thì chỉ xảy ra 2 trường hợp sau:
Trường hợp 1: (C_1);(C_2) tiếp xúc ngoài với nhau

$$\Leftrightarrow I_1I_2 = R_1 + R_2 \Leftrightarrow \sqrt{(-1-2)^2 + (2-2)^2} = m + 2 \Leftrightarrow 3 = m + 2 \Leftrightarrow m = 1(tm).$$

Trường hợp 2: (C_1); (C_2) tiếp xúc trong và $R_1 < R_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I_1I_2 = |R_1 - R_2| \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = |m-2| \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 5 \\ m = -1 \end{array}\right. \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1 \ (tm).$$

Vậy $S = \{-1; 1\}$.
Chọn phương án D

Câu 75. Số nghiệm của phương trình $2018^x + x^2 = \sqrt{2016\sqrt[3]{2017 + \sqrt[5]{2018}}}$ là

A 1. **B** 2. **C** 3. **D** 4.

Lời giải.
Đặt $f(x) = 2018^x + x^2$. Suy ra $f''(x) = 2018^x.\ln^2 2018 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Do đó phương trình có nhiều nhất hai nghiệm.
Mặt khác $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$ và $f(0) = 1 - \sqrt{2016 + \sqrt[3]{2017 + \sqrt[5]{2018}}} < 0$
nên phương trình đã cho có đúng hai nghiệm
Chọn phương án B

Câu 76. Với tham số k thuộc tập S nào dưới đây thì phương trình $\log_2(x+3)+\log_2 x^2 = k$ có nghiệm duy nhất.

A $S=(-\infty;0)$. **B** $S=[2;+\infty)$. **C** $S=(4;+\infty)$. **D** $S=(0;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x>-3 \\ x\neq 0 \end{cases}$.

Ta có: $\log_2(x+3)+\log_2 x^2 = k \Leftrightarrow \log_2(x^3+3x^2)=k \Leftrightarrow x^3+3x^2=2^k$

Đặt $f(x)=x^3+3x^2 \Rightarrow f'(x)=3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên phương trình có nghiệm duy nhất khi $2^k>4 \Leftrightarrow k>2$

Chọn phương án C

Câu 77. Tìm m để phương trình $4^{x^2}-2^{x^2+2}+6=m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt?

A $m=3$. **B** $m=2$. **C** $m>3$. **D** $2<m<3$.

Lời giải.

Đặt $t=2^{x^2}$ $(t\geq 1)$, ta có phương trình $t^2-4.t+6-m=0$. (1)

Nhận thấy rằng khi $t=1$ thì $x=0$, còn khi $t>1$ thì $x=\pm\sqrt{\log_2 t}$ nên để phương trình ban đầu có 3 nghiệm x thì phương trình (1) phải có một nghiệm $t_1=1$ và một nghiệm $t_2>1$.

Thay $t=1$ vào phương trình (1) ta có $1-4+6-m=0 \Leftrightarrow m=3$.

Thử lại ta được $m=3$ thỏa mãn.

Chọn phương án A

Câu 78. Cho hai số thực $a>1$, $b>1$. Biết phương trình $a^x\cdot b^{x^2-1}=1$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left(\dfrac{x_1x_2}{x_1+x_2}\right)^2-4(x_1+x_2)$.

A $3\sqrt[3]{4}$. **B** 4. **C** $3\sqrt[3]{2}$. **D** $\sqrt[3]{4}$.

Lời giải.

Ta có $a^x\cdot b^{x^2-1}=1 \Leftrightarrow x+(x^2-1)\log_a b=0 \Leftrightarrow (\log_a b)\cdot x^2+x-\log_a b=0$.

Do phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 nên theo định lý Viet ta có

$$x_1+x_2=-\frac{1}{\log_a b}=-\log_b a \text{ và } x_1x_2=-1.$$

Khi đó $S=\dfrac{1}{\log_b^2 a}+4\log_b a$, đặt $t=\log_b a$. Do $b>1, a>1$ nên $t>0$. Vậy

$$S=\frac{1}{t^2}+4t=\frac{1}{t^2}+2t+2t\geq 3\sqrt[3]{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{t^2} = 2t \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Vậy $\min\limits_{t>0} S = 3\sqrt[3]{4}$.

Chọn phương án A

Câu 79. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $(2-x)(2+4^x) = 6$. Khi đó số phần tử của tập S là bao nhiêu?

A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Lời giải.

Xét hàm số $y = (2-x)(2+4^x) - 6$.

$y' = -(2+4^x) + (2-x)\cdot 4^x \ln 4$.

$y'' = -2\ln 4 \cdot 4^x + (2-x)\ln^2 4 \cdot 4^x$.

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 2 + \frac{1}{\ln 2}$.

$y'' = 0$ có một nghiệm nên $y' = 0$ có không quá hai nghiệm, do đó $y = 0$ có không quá ba nghiệm.

Mặt khác $x = 0$, $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$ là các nghiệm của phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm $x = 0$, $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$.

Chọn phương án B

Câu 80. Tính tổng các nghiệm thực của phương trình $(4^x-16)^3 + (16^x-4)^3 = (16^x+4^x-20)^3$.

A. 3. B. $\frac{7}{2}$. C. 4. D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải.

Đặt $t = 4^x > 0$, phương trình trở thành

$$(t-16)^3 + \left(t^2-4\right)^3 = \left(t^2+t-20\right)^3 \Leftrightarrow (t-16)^3 + \left(t^2-4\right)^3 = \left(t-16+t^2-4\right)^3$$

$$\Leftrightarrow 3\left(t-16\right)\left(t^2-4\right)\left(t-16+t^2-4\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=16 \\ t=4 \end{array}\right.$$

Vậy ta có các nghiệm là $x = \frac{1}{2}, x = 2, x = 1$. Suy ra tổng các nghiệm là $\frac{7}{2}$.

Chọn phương án B

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. B	3. C	4. B	5. B	6. C	7. D	8. D	9. C	10. D
11. C	12. D	13. A	14. C	15. D	16. A	17. A	18. C	19. A	20. B
21. C	22. C	23. D	24. B	25. A	26. A	27. D	28. D	29. C	30. A
31. C	32. D	33. D	34. A	35. B	36. A	37. B	38. D	39. C	40. D
41. B	42. C	43. B	44. C	45. B	46. C	47. A	48. D	49. C	50. D
51. D	52. C	53. D	54. D	55. B	56. A	57. A	58. A	59. D	60. A
61. B	62. B	63. D	64. D	65. D	66. C	67. B	68. D	69. A	70. D
71. A	72. D	73. C	74. D	75. B	76. C	77. A	78. A	79. B	80. B

DẠNG 4. TÍNH THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Thể tích của khối lập phương cạnh 2 bằng

(A) 6. (B) 8. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.

Thể tch1 khối lập phương cạnh a là $V = a^3$.

Vậy thể tích khối lập phương cạnh 2 là $V = 2^3 = 8$.

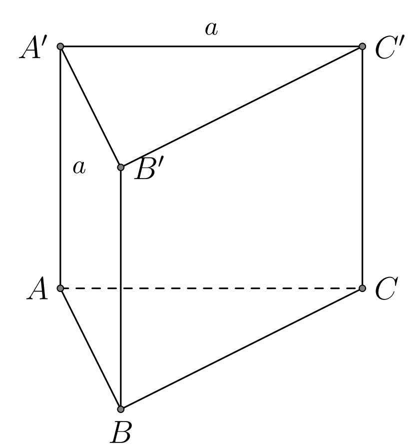
Chọn phương án (B)

Câu 1. Thể tích của khối lăng trụ đứng tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a bằng

(A) $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. (B) $\frac{a^3}{3}$. (C) $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (D) $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V = h \cdot S_{ABC} = a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.



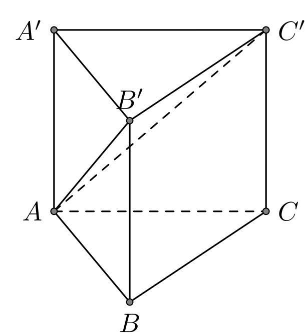
Chọn phương án (C)

Câu 2. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Tính thể tích khối đa diện $ABCB'C'$ theo V.

(A) $\frac{3V}{4}$. (B) $\frac{2V}{3}$. (C) $\frac{V}{2}$. (D) $\frac{V}{4}$.

Lời giải.

Ta có $V_{A.A'B'C'} = \frac{1}{3}V \Rightarrow V_{ABCB'C'} = V - \frac{1}{3}V = \frac{2V}{3}$.



Chọn phương án (B)

Câu 3. Gọi S là diện tích đáy, h là chiều cao của khối lăng trụ. Thể tích khối lăng trụ đó là:

(A) $V = \frac{1}{3}Sh$. (B) $V = \frac{1}{6}Sh$. (C) $V = Sh$. (D) $V = \frac{1}{2}Sh$.

Lời giải.

Theo công thức sách giáo khoa ta có $V = Sh$.

Chọn phương án (C)

Câu 4. Thể tích khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a là:

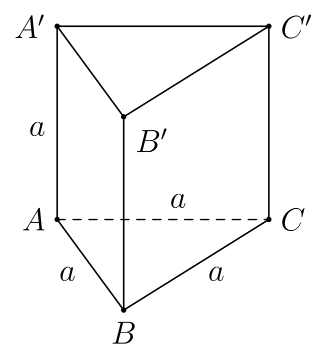
(A) $\frac{a^3}{3}$. (B) $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. (C) $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. (D) $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

Lời giải.

Theo giả thiết mặt đáy của lăng trụ là tam giác đều cạnh a nên đáy có diện tích $B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lăng trụ đứng chiều cao $h = a$, do vậy thể tích của khối lăng trụ đã cho là

$V = B \cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.



Chọn phương án (B)

Câu 5. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA' = \frac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) là trung điểm BC. Tính thể tích V của khối lăng trụ đó.

(A) $V = a^3$. (B) $V = \frac{2a^3}{3}$. (C) $V = \frac{3a^3}{4\sqrt{2}}$. (D) $V = a^3\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm BC.

Theo giả thiết, $A'H$ là đường cao hình lăng trụ và $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy, thể tích khối lăng trụ là $V = S_{\Delta ABC}.A'H = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

Chọn phương án (C)

Câu 6. Viết công thức tính thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy là B (đvdt) và chiều cao có độ dài là h.

(A) $V = B^2h$. (B) $V = Bh$. (C) $V = \frac{1}{3}Bh$. (D) $V = 3Bh$.

Lời giải.

Chọn phương án (B)

Câu 7. Cho lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy bằng a và khoảng cách giữa hai đáy của lăng trụ bằng $4a$. Tính thể tích V của lăng trụ đã cho?

(A) $V = 9\sqrt{3}a^3$. (B) $V = 6\sqrt{3}a^3$. (C) $V = 2\sqrt{3}a^3$. (D) $V = 3\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.

Diện tích đáy: $S = 6 \cdot S_{\Delta AOB} = 6 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{2}$.

Khi đó thể tích của khối lăng trụ là: $V = S \cdot h = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{2} \cdot 4a = 6\sqrt{3}a^3$.

Chọn phương án B

Câu 8. Hình lăng trụ có chiều cao h và diện tích đáy S thì thể tích bằng

A $\dfrac{1}{6}Sh$. **B** $\dfrac{1}{3}Sh$. **C** $\dfrac{1}{2}Sh$. **D** Sh.

Lời giải.

Thể tích của khối lăng trụ là $V = Sh$.

Chọn phương án D

Câu 9. Cho lăng trụ tam giác đều, có độ dài tất cả các cạnh bằng 2. Tính thể tích V của khối lăng trụ đó.

A $V = 2\sqrt{3}$. **B** $V = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **C** $V = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. **D** $V = \dfrac{27\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Diện tích đáy tam giác đều cạnh 2 là $S = \dfrac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$.

Thể tích của khối lăng trụ là $V = S \cdot h = \sqrt{3} \cdot 2 = 2\sqrt{3}$.

Chọn phương án A

Câu 10. Cho lăng trụ tứ giác đều có đáy là hình vuông cạnh a, chiều cao $2a$. Tính thể tích khối lăng trụ.

A $\dfrac{2a^3}{3}$. **B** $\dfrac{4a^3}{3}$. **C** a^3. **D** $2a^3$.

Lời giải.

Đáy của lăng trụ tứ giác đều là hình vuông cạnh a nên diện tích đáy $S = a^2$. Khi đó thể tích lăng trụ là: $V = S.h = a^2.2a = 2a^3$.

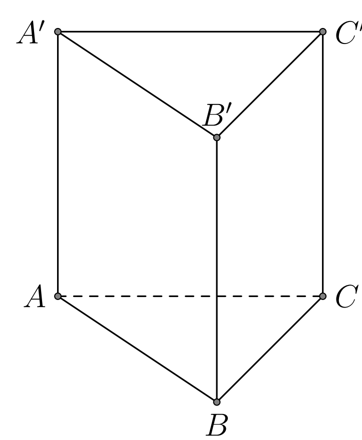
Chọn phương án D

Câu 11. Cho (H) là khối lăng trụ đứng tam giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính thể tích của (H).

A $\dfrac{a^3}{2}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ đứng, tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a là $V = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.



Chọn phương án C

Câu 12. Cho khối lăng trụ đứng có diện tích đáy bằng $2a^2$ và cạnh bên bằng $3a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A $2a^3$. **B** $3a^3$. **C** $18a^3$. **D** $6a^3$.

Lời giải.

$V = S_{\text{đáy}}h = 2a^2 \cdot 3a = 6a^3$.

Chọn phương án D

Câu 13. Cho khối lăng trụ đứng có diện tích đáy bằng $2a^2$ và cạnh bên bằng $3a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A $2a^3$. **B** $3a^3$. **C** $18a^3$. **D** $6a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ đứng $V = 2a^2 \cdot 3a = 6a^3$.

Chọn phương án D

Câu 14. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = 2a$, tam giác ABC vuông tại B có $AB = a$, $BC = 2a$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

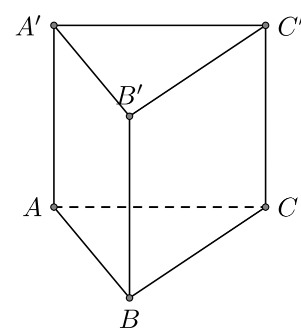
A $2a^3$. **B** $\dfrac{2a^3}{3}$. **C** $\dfrac{4a^3}{3}$. **D** $4a^3$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = a^2$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = 2a^3$.



Chọn phương án A

Câu 15. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A với $AB = a$, $AC = 2a\sqrt{3}$, cạnh bên $AA' = 2a$. Thể tích khối lăng trụ bằng bao nhiêu?

A a^3. **B** $a^3\sqrt{3}$. **C** $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **D** $2a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $V = AA' \cdot S_{ABC} = 2a \cdot \dfrac{a \cdot 2a\sqrt{3}}{2} = 2a^3\sqrt{3}$.

Chọn phương án D

Câu 16. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2a$, $A'A = a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a.

A $V = \dfrac{3a^3}{4}$. **B** $V = a^3$. **C** $V = 3a^3$. **D** $V = \dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\triangle ABC} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.
Thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = 3a^3$.
Chọn phương án C

Câu 17. Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy bằng B và chiều cao bằng h là

A $V = \dfrac{1}{3}Bh$. **B** $V = \dfrac{1}{6}Bh$. **C** $V = \dfrac{1}{2}Bh$. **D** $V = Bh$.

Lời giải.

Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy bằng B và chiều cao bằng h là $V = Bh$.

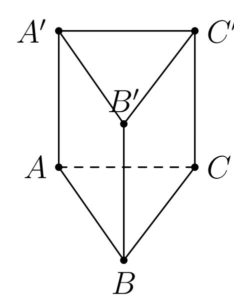
Chọn phương án D

Câu 18. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2a$, $AA' = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $3a^3$. **B** a^3. **C** $\dfrac{a^3}{4}$. **D** $\dfrac{3a^3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $S_{\triangle ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}AB^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2a)^2 = \sqrt{3}a^2$.
Do đó $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC}AA' = \sqrt{3}a^2 \cdot a\sqrt{3} = a^3$.



Chọn phương án B

Câu 19. Thể tích V của khối lăng trụ có chiều cao bằng h và diện tích bằng B là

A $V = Bh$. **B** $V = \dfrac{1}{6}Bh$. **C** $V = \dfrac{1}{3}Bh$. **D** $V = \dfrac{1}{2}Bh$.

Lời giải.

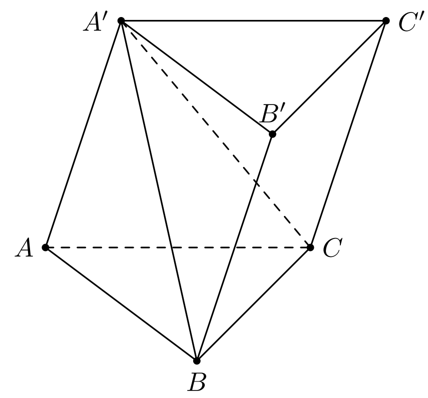
Ta có $V = hB$.
Chọn phương án A

Câu 20. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 1 và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng 2. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A 1. **B** 6. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Ta có $V_{A'.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{A'BC} \cdot d(A, (A'BC)) = \dfrac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 = \dfrac{2}{3}$.
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{A'.ABC} = 2$.



Chọn phương án C

B MỨC ĐỘ 2

Câu 21. Cho hình lăng trụ $ABCDA'B'C'D'$ có hình chiếu A' lên $mp(ABCD)$ là trung điểm AB, $ABCD$ là hình thoi cạnh 2a, góc $\widehat{ABC} = 60°$, BB' tạo với đáy một góc 30°. Tính thể tích hình lăng trụ $ABCDA'B'C'D'$.

A $a^3\sqrt{3}$. **B** $\dfrac{2a^3}{3}$. **C** $2a^3$. **D** a^3.

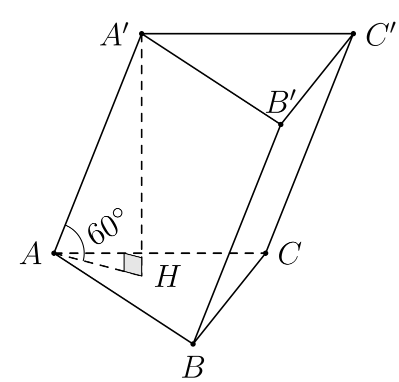
Lời giải.
Gọi H là hình chiếu của A' trên $mp(ABCD)$. Dễ thấy góc $\measuredangle(BB'; mp(ABCD)) = \measuredangle(AA'; mp(ABCD)) = \measuredangle A'AH = 30^o$
$AH = a \Rightarrow A'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Dễ dàng tính được diện tích đáy: $S_{ABCD} = 2.(2a)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3}$.
Suy ra: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2a^3$.

Chọn phương án C

Câu 22. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a, các mặt bên hợp với mặt đáy một góc 60°. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **B** $\dfrac{3a^3}{8}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **D** $\dfrac{a^3}{8}$.

Lời giải.
Kẻ $A'H \perp (ABC) \Rightarrow (A'A, (ABC)) = \widehat{A'AH} = 60°$.
Xet $\triangle AHA' : \sin 60° = \dfrac{A'H}{AA'} \Leftrightarrow A'H = AA' \sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = S_{\triangle ABC} \cdot A'H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a^3}{8}$.



Chọn phương án B

Câu 23. Một khối lăng trụ tứ giác đều có thể tích là 4. Nếu gấp đôi các cạnh đáy đồng thời giảm chiều cao của khối lăng trụ này hai lần thì được khối lăng trụ mới có thể tích là:

A. 8. B. 4. C. 16. D. 2.

Lời giải.

Phương pháp:

Nhận xét sự thay đổi về thể tích của khối lăng trụ theo cạnh đáy và chiều cao rồi kết luận.

Cách giải:

Gọi cạnh đáy và chiều cao khối lăng trụ đều là a; h thì thể tích $V = a^2h$.

Nếu gấp đôi các cạnh đáy đồng thời giảm chiều cao của khối lăng trụ hai lần thì $V' = \left(2a^2\right) \cdot \dfrac{h}{2} = 2a^2h = 2V$.

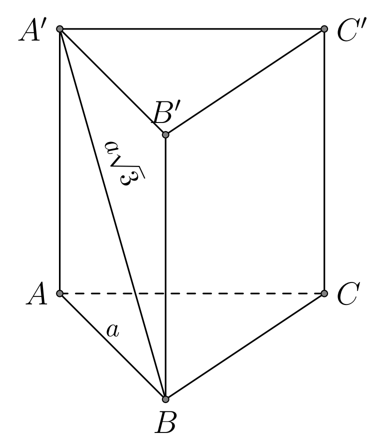
Vậy thể tích khối lăng trụ được tăng lên 2 lần và bằng $4 \cdot 2 = 8$.

Chọn phương án A

Câu 24. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại $B, AB = a, A'B = a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $\dfrac{a^3}{6}$. C. $\dfrac{a^3}{2}$. D. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Do tam giác $A'AB$ vuông tại A nên theo Py-ta-go ta có

$$A'B^2 = AA'^2 + AB^2 \Leftrightarrow AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 - a^2} = a\sqrt{2}.$$

Lại có tam giác ABC vuông cân tại B nên $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB^2 = \dfrac{1}{2}a^2$.

Thể tích khối lăng trụ đã cho

$$V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn phương án D

Câu 25. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2a$, $AA' = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $3a^3$. B. a^3. C. $\dfrac{3a^3}{4}$. D. $\dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải.

Vì tam giác ABC là tam giác đều cạnh $2a$ nên diện tích đáy $S_{\triangle ABC} = \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.

Lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên đường cao là AA'.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = a\sqrt{3} \cdot a^2\sqrt{3} = 3a^3$.

Chọn phương án A

Câu 26. Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a và tổng diện tích các mặt bên bằng $3a^2$.

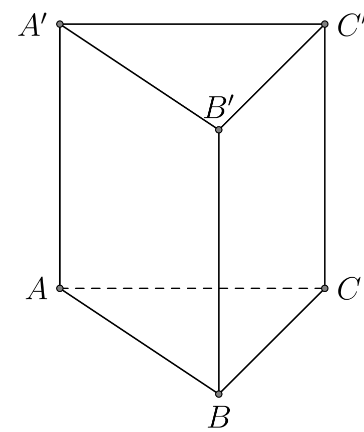
A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. B. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. D. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Theo đề bài, ta có $3S_{ABB'A'} = 3a^2 \Rightarrow AB \cdot AA' = a^2 \Leftrightarrow AA' = a$.

Thể tích khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.



Chọn phương án C

Câu 27. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = 2a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

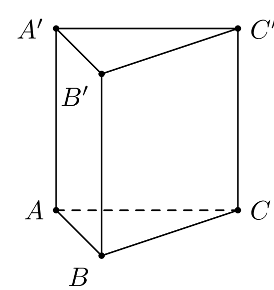
(A) $V = \dfrac{1}{3}a^3$. (B) $V = 6a^3$. (C) $V = a^3$. (D) $V = \dfrac{2}{3}a^3$.

Lời giải.

Tam giác ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = 2a \Rightarrow BA = BC = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$.

Diện tích của tam giác ABC: $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot BC = a^2$.

Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = BB' \cdot S_{\triangle ABC} = a \cdot a^2 = a^3$.



Chọn phương án C

Câu 28. Tính chiều cao của khối lăng trụ tam giác đều biết thể tích bằng $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$, cạnh đáy bằng a.

(A) $3a$. (B) $2a$. (C) a. (D) $6a$.

Lời giải.

Khối lăng trụ tam giác đều có đáy là tam giác đều.

Theo bài ra ta có đáy là tam giác đều cạnh a.

Diện tích đáy là $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Gọi h là chiều cao của khối lăng trụ.

Ta có: $V = S.h \Rightarrow h = \dfrac{V}{S} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2} : \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2a$.

Chọn phương án B

Câu 29. Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, góc tạo bởi $A'B$ và đáy bằng $60°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

(A) $\dfrac{3a^3}{4}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (C) $a^3\sqrt{3}$. (D) $3a^3$.

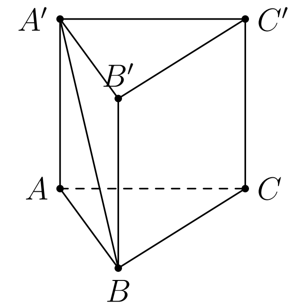
Lời giải.

Ta có: $BB' \perp (A'B'C')$ nên $\left(\widehat{A'B,(A'B'C')}\right) = \widehat{BA'B'} = 60^\circ$.

Xét tam giác $BB'A'$ vuông tại B' có $\tan 60^\circ = \dfrac{BB'}{B'A'} \Rightarrow BB' = a\sqrt{3}$.

Và $S_{\Delta A'B'C'} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = BB' \cdot S_{\Delta A'B'C'} = a\sqrt{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3}{4}$.



Chọn phương án A

Câu 30. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BC = a$, mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 30° và tam giác $A'BC$ có diện tích bằng $a^2\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. **B** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **D** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Ta có $V = Bh = S_{ABC} \cdot AA'$

Do $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp A'B$.

Và $\begin{cases} BC \perp AB \subset (ABC) \\ BC \perp A'B \subset (A'BC) \\ BC = (ABC) \cap (A'BC) \end{cases}$

$\Rightarrow ((ABC),(A'BC)) = (AB, A'B) = \widehat{ABA'}$.

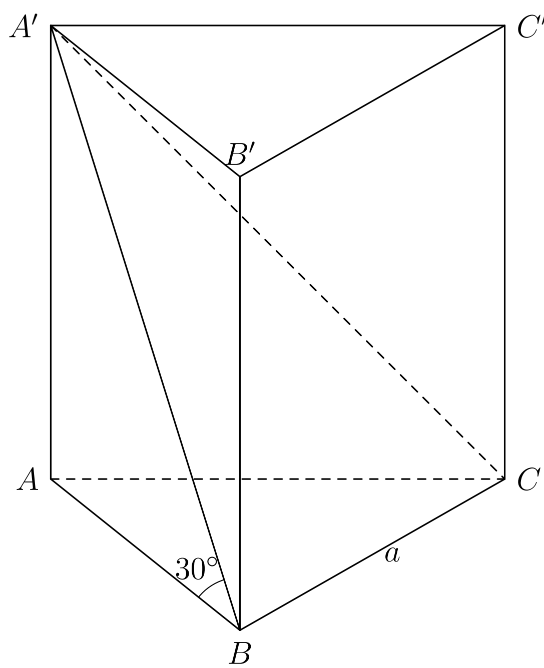
Ta có $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}A'B \cdot BC$

$\Rightarrow A'B = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \dfrac{2a^2\sqrt{3}}{a} = 2a\sqrt{3}$.

$AB = A'B \cdot \cos\widehat{ABA'} = 2a\sqrt{3}\cos 30^\circ = 3a$.

$AA' = A'B \cdot \sin\widehat{ABA'} = 2a\sqrt{3}\sin 30^\circ = a\sqrt{3}$.

$V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot AA' = \dfrac{1}{2} \cdot 3a \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.



Chọn phương án A

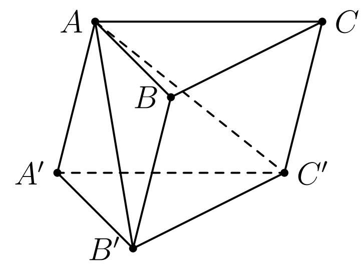
Câu 31. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Tính thể tích khối tứ diện $ABCB'C'$.

A $\dfrac{V}{4}$. **B** $\dfrac{V}{2}$. **C** $\dfrac{3V}{4}$. **D** $\dfrac{2V}{3}$.

Lời giải.

Ta có $V_{A.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}d(A,(A'B'C')S_{\triangle A'B'C'} = \dfrac{1}{3}V.$

Do đó $V_{ABCB'C'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.A'B'C'} = V - \dfrac{1}{3}V = \dfrac{2}{3}V.$



Chọn phương án D

Câu 32. Cho khối lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác vuông cân tại A, $AC = AB = 2a$, góc giữa AC' và mặt phẳng (ABC) bằng 30°. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

(A) $\dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$. (B) $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{4a^2}{3}$.

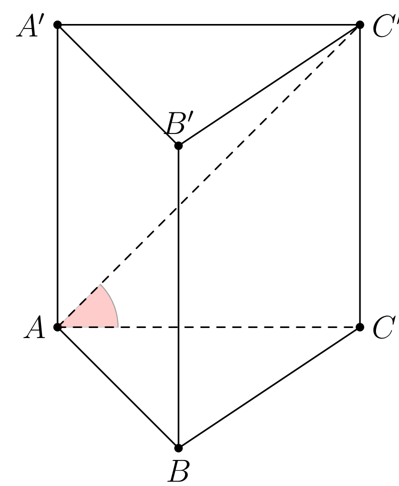
Lời giải.

Vì $C'C \perp (ABC)$ nên góc giữa AC' và (ABC) là $\widehat{CAC'}$.

Ta có : $\tan\widehat{CAC'} = \dfrac{CC'}{AC} \Rightarrow CC' = AC \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Diện tích đáy : $S_{\triangle ABC} = \dfrac{AB \cdot AC}{2} = \dfrac{2a \cdot 2a}{2} = 2a^2.$

Vậy : $V_{ABC.A'B'C'} = Bh = 2a^2 \cdot \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}.$



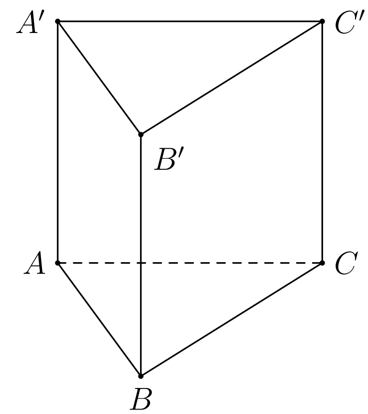
Chọn phương án C

Câu 33. Lăng trụ tam giác đều có độ dài tất cả các cạnh bằng 3. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $\dfrac{27\sqrt{3}}{2}$. (B) $\dfrac{27\sqrt{3}}{4}$. (C) $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$. (D) $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Diện tích đáy $B = \dfrac{3^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.
Độ dài đường cao của khối lăng trụ $h = 3$.
Vậy thể tích khối lăng trụ đã cho là $V = Bh = \dfrac{9\sqrt{3}}{4} \cdot 3 = \dfrac{27\sqrt{3}}{4}$.

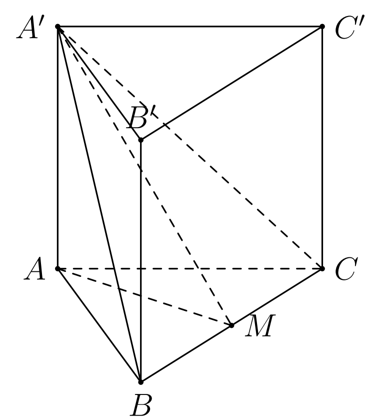


Chọn phương án B

Câu 34. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 30° và tam giác có ABC diện tích bằng $8a^2$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

(A) $8a^3\sqrt{3}$. (B) $8a^3$. (C) $\dfrac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{8a^3}{3}$.

Lời giải.



— Gọi là trung M điểm của BC. Ta chứng minh được $BC \perp (AA'M)$ nên góc giữa hai mặt phẳng và $(A'BC)$ mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{A'MA} = 30^\circ$.

— Đặt $AB = x$, Tam giác ABC là hình chiếu của tam giác $A'BC$ lên mặt phẳng (ABC) nên $S_{ABC} = S_{A'B'C'} \cdot \cos 30^0 = 4a^2\sqrt{3} \Rightarrow x = 4a \Rightarrow AM = 2a\sqrt{3}$.

— $\dfrac{AA'}{AM} = \tan 30^\circ \Rightarrow AA' = 2a$.

— Vậy $V_{ABCA'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = 8a^3\sqrt{3}$.

Chọn phương án A

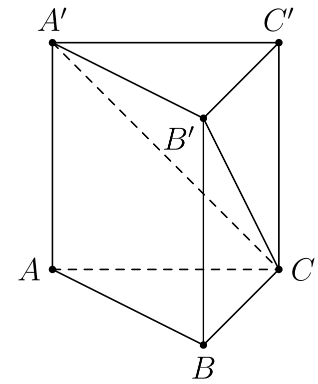
Câu 35. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Biết thể tích lăng trụ là V, tính thể tích khối chóp $C.ABB'A'$.

(A) $\dfrac{2V}{3}$. (B) $\dfrac{V}{3}$. (C) $\dfrac{3V}{4}$. (D) $\dfrac{V}{2}$.

Lời giải.

Ta có $V_{CA'B'C'} = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}(C,(A'B'C')) \cdot S_{A'B'C'} = \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{V}{3}$.

Suy ra $V_{C.ABB'A'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{CA'B'C'} = V - \dfrac{V}{3} = \dfrac{2V}{3}$.



Chọn phương án A

Câu 36. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa đường thẳng $A'C'$ và mặt đáy bằng $45°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

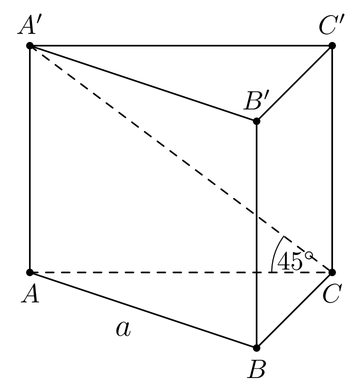
Lời giải.

Theo tính chất lăng trụ tam giác đều thì lăng trụ đã cho là lăng trụ đứng, có đáy là tam giác ABC đều, cạnh $AB = a$. Do đó $S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Góc giữa $A'C$ và mặt phẳng (ABC) là góc $A'CA = 45°$.

$AA' = AC \cdot \tan 45° = AB \cdot \tan 45° = a$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.



Chọn phương án A

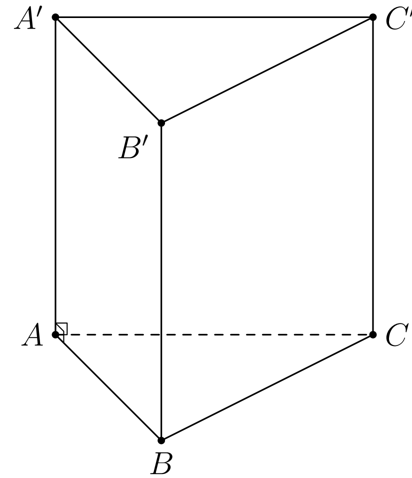
Câu 37. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các mặt bên là hình vuông $\sqrt{2}a$. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{2}$. **B** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **C** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}$. **D** $V = \dfrac{\sqrt{6}a^2}{6}$.

Lời giải.

Hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các mặt bên là hình vuông nên tam giác ABC là tam giác đều và

$$\begin{cases} AA' \perp AC \\ AA' \perp AB \end{cases} \Rightarrow AA' \perp (ABC).$$



Khi đó

$$\begin{aligned} V = AA' \cdot S_{\triangle ABC} &= AA' \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot AB^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\sqrt{2}a\right)^3 = \frac{\sqrt{6}a^3}{2}. \end{aligned}$$

Chọn phương án A

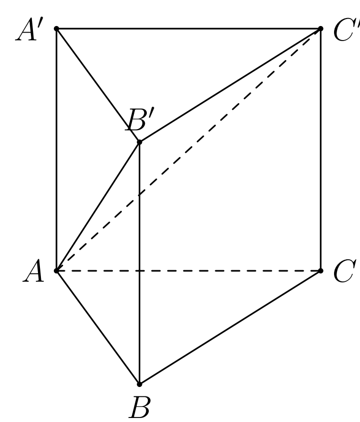
Câu 38. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Tính thể tích khối đa diện $ABCB'C'$.

A $\frac{V}{2}$. **B** 45π. **C** 180π. **D** 15π.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} V_{ABCA'B'} &= V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.A'B'C'} \\ &= V_{ABC.A'B'C'} - \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} \\ &= \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3}V \end{aligned}$$



Chọn phương án D

Câu 39. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$, cạnh đáy bằng $2a\sqrt{3}$, cạnh bên bằng $2a$. Thể tích khối lăng trụ là

A $4a^3\sqrt{3}$. **B** $5a^3\sqrt{3}$. **C** $6a^3\sqrt{3}$. **D** $7a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Diện tích đáy: $S_{\triangle ABC} = \dfrac{(2a\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 3a^2\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp là $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC}.AA' = 3a^2\sqrt{3}.2a = 6a^3\sqrt{3}$.

Chọn phương án C

Câu 40. Một lăng trụ đứng tam giác có các cạnh đáy bằng $37, 13, 30$ và diện tích xung quanh bằng 480. Tính thể tích khối lăng trụ.

A 2010. **B** 1080. **C** 2040. **D** 1010.

Lời giải.

Gọi h là chiều cao của lăng trụ. Khi đó diện tích xung quanh của lăng trụ là

$S_{xq} = 37h + 13h + 30h = 80h = 480 \Leftrightarrow h = 6$.

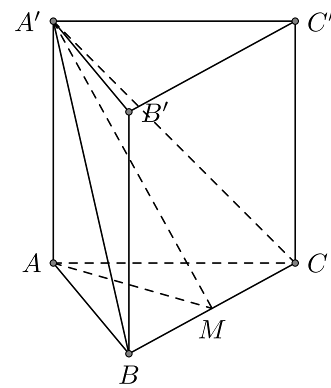
Diện tích đáy của lăng trụ $S = \sqrt{40(40-37)(40-13)(40-30)} = 180$.
Vậy thể tích lăng trụ là: $V = S \cdot h = 180 \cdot 6 = 1080$.
Chọn phương án B

C MỨC ĐỘ 3

Câu 41. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết rằng góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là $30°$ tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 2. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A $2\sqrt{6}$. **B** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **C** 2. **D** $\sqrt{3}$.

Lời giải.



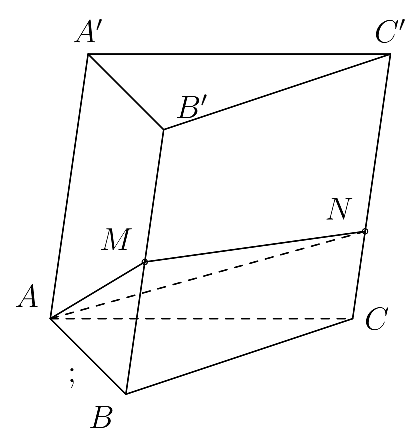
Gọi độ dài cạnh $AA' = x, x > 0$.
Xét $\Delta A'AM$ vuông tại A ta có $\sin 30° = \dfrac{A'A}{A'M} \Rightarrow A'M = \dfrac{A'A}{\sin 30°} = 2x$.
$\tan 30° = \dfrac{A'A}{AM} \Rightarrow AM = \dfrac{A'A}{\tan 30°} = \dfrac{x}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = x\sqrt{3}$.
Xét tam giác ABC đều có đường cao AM, suy ra $\dfrac{2AM}{\sqrt{3}} = \dfrac{2x\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2x$.
Ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot A'M \cdot BC = 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}A'M \cdot BC = 2$
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.
Vậy $AA' = 1, AB = 2$. Do đó $V = Bh = S_{ABC} \cdot A'A = 2^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1 = \sqrt{3}$.
Chọn phương án D

Câu 42. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Gọi M là trung điểm cạnh BB' điểm N thuộc cạnh CC' sao cho $CN = 2C'N$. Tính thể tích V'của khối chóp $A.BCNM$ theo V.

A $V' = \dfrac{7V}{12}$. **B** $V' = \dfrac{7V}{18}$. **C** $V' = \dfrac{V}{3}$. **D** $V' = \dfrac{V}{2}$.

Lời giải.

Gọi $h = \mathrm{d}(B', CC')$. Khi đó ta có $S_{BCC'B'} = h \cdot CC'$ và
$S_{BMNC} = \dfrac{(BM+CN) \cdot h}{2} = \dfrac{1}{2}h \cdot \left(\dfrac{1}{2}CC' + \dfrac{2}{3}CC'\right) = \dfrac{7}{12}h \cdot CC'$.
Ta có $\dfrac{V'}{V_{ABCC'B'}} = \dfrac{S_{BMNC}}{S_{BCC'B'}} = \dfrac{7}{12}$.
Mặt khác ta có $V_{ABCC'B'} = \dfrac{2}{3}V$.
Vậy $V' = \dfrac{7}{12} \cdot \dfrac{2}{3}V = \dfrac{7V}{18}$.



Chọn phương án B

Câu 43. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA' và BB'. Đường thẳng CM cắt đường thẳng $C'A'$ tại P, đường thẳng CN cắt đường thẳng $C'B'$ tại Q. Thể tích của khối đa diện lồi $A'MPB'NQ$ bằng

A 1. **B** $\frac{1}{3}$. **C** $\frac{1}{2}$. **D** $\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của CC', h là chiều cao của lăng trụ $ABC.A'B'C'$

Ta có $V_{C.C'PQ} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{\Delta C'PQ} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot 4S_{\Delta C'A'B'} = \frac{4}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{4}{3}$.

$V_{MNI.A'B'C'} = \frac{1}{2} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2}$.

$V_{C.MNI} = \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} \cdot S_{MNI} = \frac{1}{6} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{6}$.

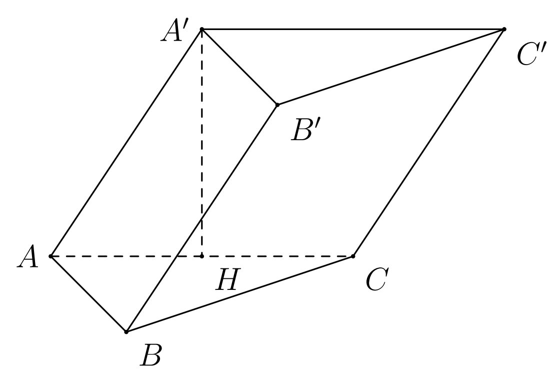
Suy ra $V_{A'MPB'NQ} = V_{C.C'PQ} - (V_{MNI.A'B'C'} + V_{C.MNI}) = \frac{2}{3}$.

Chọn phương án D

Câu 44. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 1$, $AC = 2$, cạnh $AA' = \sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt đáy (ABC) trùng với chân đường cao hạ từ B của tam giác ABC. Thể tích V của khối lăng trụ đã cho là

A $V = \frac{\sqrt{21}}{12}$. **B** $V = \frac{\sqrt{7}}{4}$. **C** $V = \frac{\sqrt{21}}{4}$. **D** $V = \frac{3\sqrt{21}}{4}$.

Lời giải.



Gọi H là chân đường cao hạ từ B trong tam giác ABC.

Theo đề $A'H$ là đường cao của lăng trụ.

Xét ΔABC

$AB^2 = AH \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{AB^2}{AC} = \frac{1}{2}$.

$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{3}$.

Xét $\Delta AA'H$. ta có $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Thể tích cần tìm

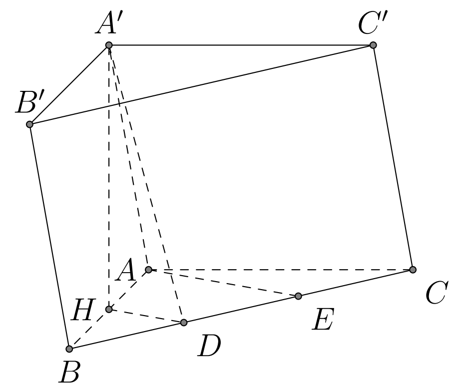
$$V = S_{\Delta ABC} \cdot AH = \left(\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC\right) AH = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{21}{4}.$$

Chọn phương án C

Câu 45. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{2}$. Biết góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$ và hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm H của AB. Tính thể tích V của khối lăng trụ đó.

A $V = \frac{a^3}{6}$. **B** $V = \frac{a^3}{2}$. **C** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **D** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H, A lên BC.

Ta có $\begin{cases} HD \perp BC \\ A'H \perp BC \end{cases} \Rightarrow (A'HD) \perp BC \Rightarrow A'D \perp BC$.

Khi đó $(A'BC)$ và (ABC) chính là góc giữa hai đường thẳng $A'D$ và HD hay $\widehat{A'DH} = 60^\circ$.

Xét tam giác vuông ABC, $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{3}$.

Nên $AE = \dfrac{AB \cdot AC}{BC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ suy ra $HD = \dfrac{1}{2}AE = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Từ đó $A'H = HD \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{6}}{6} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

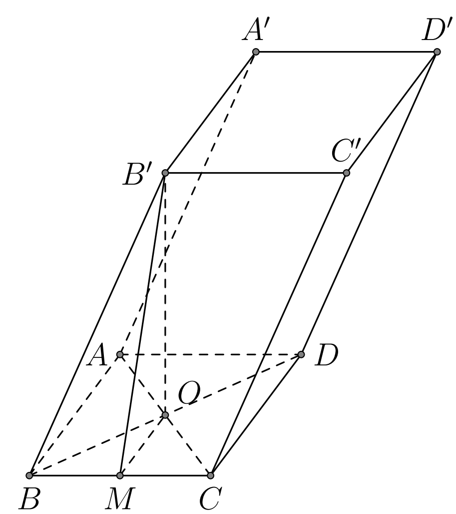
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'H = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC \cdot A'H = \dfrac{1}{2}a \cdot a\sqrt{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3}{2}$.

Chọn phương án B

Câu 46. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Chân đường cao hạ từ B' trùng với tâm O của đáy $ABCD$; góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ với đáy bằng 60°. Thể tích lăng trụ bằng

A $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. **B** $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. **C** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **D** $\dfrac{3a^3}{4}$.

Lời giải.



Từ giả thiết suy ra tam giác ABC đều nên

$$S_{ABCD} = 2S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Gọi M là hình chiếu của O trên BC thì BC vuông góc với mặt phẳng $(B'OM)$.

Suy ra góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ và mặt phẳng đáy là góc $\widehat{B'MO} = 60^\circ$.

Ta lại có tam giác BOC vuông tại O, có đường cao OM nên

$$\frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{16}{3a^2}$$

$\Rightarrow OM = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác $B'OM$ vuông tại O nên $B'O = OM \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{3a}{4}$

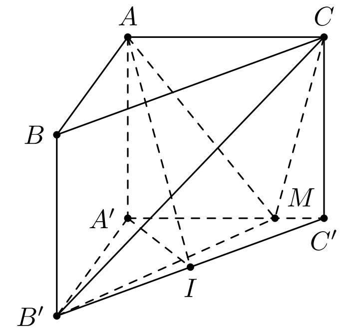
$$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = B'O \cdot S_{ABCD} = \frac{3a}{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}.$$

Chọn phương án A

Câu 47. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC cân tại A với $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, mặt bên $(AB'C')$ tạo với đáy (ABC) một góc 60°. Gọi M là điểm thuộc cạnh $A'C'$ sao cho $A'M = 3MC'$. Tính thể tích V của khối chóp $CMBC'$.

A $V = \dfrac{3a^3}{8}$. **B** $V = \dfrac{a^3}{24}$. **C** $V = \dfrac{a^3}{8}$. **D** $V = \dfrac{a^3}{32}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của $B'C' \Rightarrow A'I \perp B'C' \Rightarrow \widehat{IA'B'} = 60^\circ$.
Xét tam giác $A'IB'$ vuông tại I có $A'I = A'B'\cos 60^\circ = \dfrac{a}{2}$.
Ta có $B'C' \perp A'I$ và $B'C' \perp AA'$ nên góc giữa $(AB'C')$ và (ABC) là $\widehat{AIA'} = 60^\circ$.
Xét tam giác $A'IA$ vuông tại A' có $AA' = A'I \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Mà $S_{\triangle MCC'} = \dfrac{1}{4}S_{\triangle A'CC'}$ nên

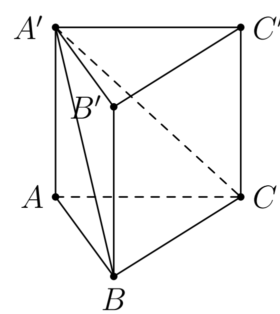
$$\begin{aligned} V_{CMBC'} &= \frac{1}{4}V_{BA'CC'} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} \\ &= \frac{1}{12}\cdot AA'\cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\sin 120^\circ\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{32}. \end{aligned}$$

Chọn phương án D

Câu 48. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AC = a\sqrt{2}$, biết góc giữa $(A'BC)$ và đáy bằng 60°. Tính thể tích V của khối lăng trụ.

A $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **C** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.



Do đáy tam giác vuông cân tại B, $AC = a\sqrt{2}$ nên AB = a.
Lại có: $(A'BC) \cap (ABC) = BC$ mà $BC \perp (A'B'BA)$ nên góc tạo bởi $(A'BC)$ và đáy là $\widehat{A'BA}$.
Theo bài ra: $\widehat{A'BA} = 60^\circ$.
$AA' = AB \cdot \tan\widehat{A'BA} = a \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.
Thể tích V của khối lăng trụ: $V = A'A \cdot S_{ABC} = a\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2}a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Chọn phương án A

Câu 49. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.AB'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a, \widehat{BAC} = 120^\circ$, mặt phẳng $(A'BC')$ tạo với đáy một góc 60°. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

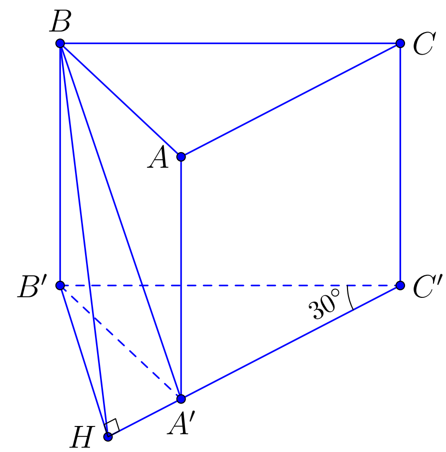
A $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. **B** $\dfrac{9a^3}{8}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **D** $\dfrac{3a^3}{8}$.

Lời giải.

Ta có: $B'H = \sin 30°.B'C' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\widehat{BHB'} = 60° \Rightarrow BB' = B'H.\tan 60° = \dfrac{3a}{2}$

$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.BB' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{3a}{2} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.



Chọn phương án A

Câu 50. Cho lăng trụ đứng tam giác $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P, Q là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC', $B'C'$ thỏa mãn $\dfrac{AM}{AA'} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{BN}{BB'} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{CP}{CC'} = \dfrac{1}{4}$, $\dfrac{CQ}{C'B'} = \dfrac{1}{5}$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối tứ diện $MNPQ$ và khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{22}{45}$. **B** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{11}{45}$. **C** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{19}{45}$. **D** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{11}{30}$.

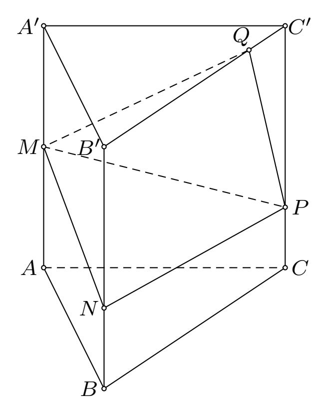
Lời giải.

$V_{A'ABC} = \dfrac{1}{3}V_2 \Rightarrow V_{ABCCB'} = V_{M.BCCB'} = \dfrac{2}{3}V_2$

Mà $S_{B'NQ} = \dfrac{4}{15}S_{BCC'B'}, S_{C'PQ} = \dfrac{3}{40}S_{BCC'B'}, S_{BCPN} = \dfrac{7}{24}S_{BCC'B'}$

Suy ra $S_{NPQ} = S_{BCCB'} - S_{B'NQ} - S_{C'PQ} - S_{BCPN} = \dfrac{11}{30}S_{BCCB}$

Do đó $V_1 = V_{MNPQ} = \dfrac{11}{30}V_{MBCCB} = \dfrac{11}{45}V_2$ tức là $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{11}{45}$.

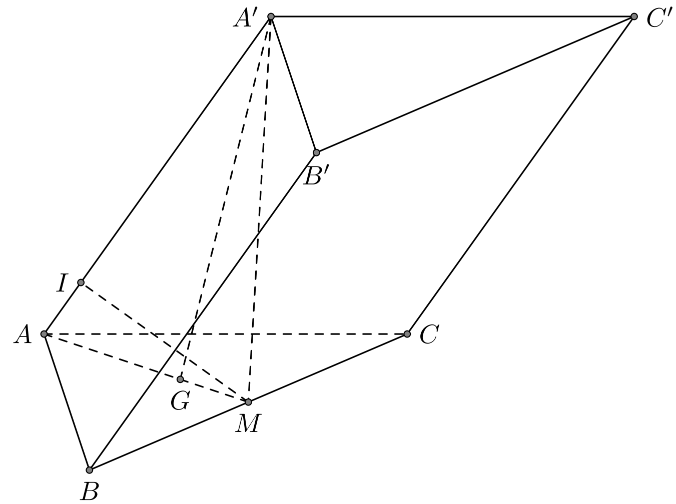


Chọn phương án B

Câu 51. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ đó.

A $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BC và I là hình chiếu vuông góc của M lên trên cạnh AA'.
Vì $AM \perp BC$ và $A'O \perp BC$ nên $BC \perp (AA'M)$. Suy ra $BC \perp MI$.
Vì $BC \perp MI$ và $BC \perp AA'$ nên MI là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng BC và AA'. Suy ra $MI = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.
Vì hai tam giác $AA'O$ và AMI đồng dạng nên ta có $\dfrac{A'O}{MI} = \dfrac{AO}{AI}$. Suy ra

$$A'O = \frac{MI.AO}{AI} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{3a}{4}} = \frac{a}{3}.$$

Khi đó, thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.A'O = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12} \text{ (dvtt)}.$$

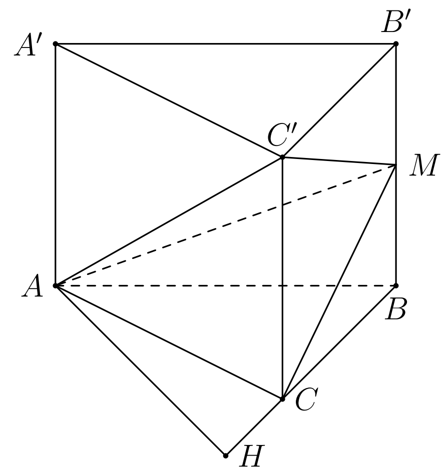
Chọn phương án A

Câu 52. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại C, $\widehat{BAC} = 30°$, $AB = \sqrt{3}a$, $AA' = a$. Gọi M là trung điểm của BB'. Tính theo a thể tích V của khối tứ diện $MACC'$.

A $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **B** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **D** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{18}$.

Lời giải.

Tam giác ABC cân tại $C, \widehat{BAC} = 30°, AB = \sqrt{3}a$.
Đặt $AC = CB = x > 0$.
Áp dụng định lí Côsin trong $\triangle ABC$ ta có
$AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CB \cdot \cos 120° = AB^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 3a^2 \Leftrightarrow x = a$.
Kẻ $AH \perp BC$, mà $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng. $\Rightarrow AH \perp (MCC')$.
Dễ thấy $S_{\triangle MCC'} = \dfrac{1}{2}S_{BCC'B'} = \dfrac{1}{2}a^2$.
$V_{MACC'} = \dfrac{1}{3} \cdot AH \cdot S_{\triangle MCC'} = \dfrac{1}{3}a\sqrt{3} \cdot \sin 30° = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$.



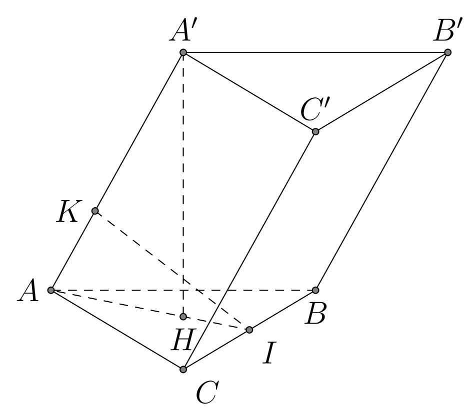
Chọn phương án (A)

Câu 53. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **(B)** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **(C)** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **(D)** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' lên mp(ABC) và I là trung điểm BC.
Ta có $\begin{cases} A'H \perp BC \\ AI \perp BC \end{cases}$ suy ra $BC \perp (A'AI)$ nên $BC \perp AA'$.
Gọi K là hình chiếu vuông góc của I lên AA'.
Khi đó IK là đoạn vuông góc chung của AA' và BC.
Mặt khác $\mathrm{d}(AA', BC) = IK = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.
Tam giác ABC đều cạnh a suy ra



$$AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}; AH = \frac{2}{3}AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}; S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Tam giác AIK vuông tại K có $\sin \widehat{KAI} = \dfrac{IK}{AI} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{KAI} = 30°$.

Xét tam giác vuông $AA'H$ vuông tại H có $A'H = AH.\tan 30° = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a}{3}$.

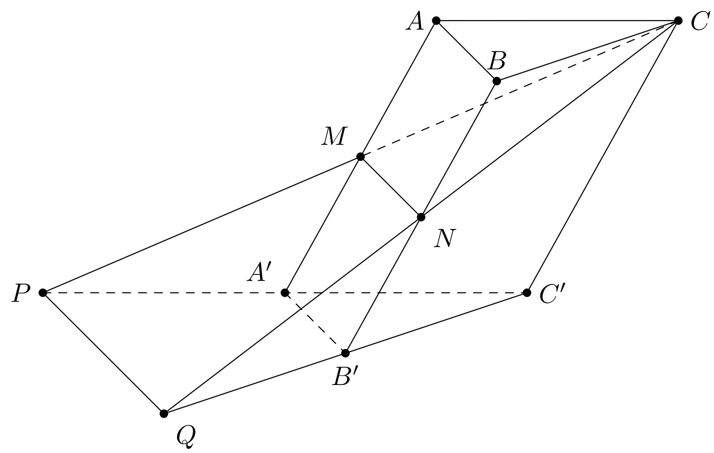
$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.A'H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Chọn phương án (D)

Câu 54. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA' và BB'. Đường thẳng CM cắt đường thẳng $C'A'$ tại P, đường thẳng CN cắt đường thẳng $C'B'$ tại Q. Thể tích của khối đa diện lồi $A'MPB'NQ$ bằng

(A) 1. **(B)** $\dfrac{1}{3}$. **(C)** $\dfrac{1}{2}$. **(D)** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.



Ta có $V_{C.ABNM} = \dfrac{1}{2}V_{C.A'B'BA} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{CMNA'B'C'} = \dfrac{2}{3}$.
Do M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', BB' nên A', B' lần lượt là trung điểm của các đoạn $C'P$, $C'Q$. Do vậy, tam giác $C'QP$ đồng dạng với tam giác $C'B'A'$ với tỉ số 2 nên $S_{\triangle C'QP} = 4{\cdot}S_{\triangle A'B'C'}$.
Suy ra

$$V_{C.CQP} = \frac{1}{3}\cdot \mathrm{d}\left(C, \left(A'B'C\right)\right)\cdot S_{\triangle C'QP} = 4\cdot\frac{1}{3}\mathrm{d}\left(C, \left(A'B'C\right)\right)\cdot S_{\triangle A'B'C} = 4\cdot V_{C.A'B'C} = \frac{4}{3}.$$

Khi đó

$$V_{A'MPB'NQ} = V_{C.C'PQ} - V_{CMNA'B'C} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Chọn phương án D

Câu 55. Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$. Tam giác $A'AC$ vuông cân tại A, $A'C = 2a$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD').

A $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $A'C = 2a \Rightarrow AA' = AC = a\sqrt{2}$
$\Rightarrow AB = BC = a$.
$V_{A.BCD'} = V_{D'.ABC} = \dfrac{1}{3}\cdot DD'.S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3}\cdot a\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{2}a^2 = \dfrac{1}{6}a^3\sqrt{2}$.
Mà: $S_{\triangle BCD'} = \dfrac{1}{2}\cdot BC.CD' = \dfrac{1}{2}\sqrt{CD^2 + DD'^2} = \dfrac{1}{2}\cdot a\cdot a\sqrt{3} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
$\Rightarrow d(A, (BCD')) = \dfrac{3V_{A.BCD'}}{S_{\triangle BCD'}} = \dfrac{3\cdot\dfrac{1}{6}\cdot a^3\sqrt{2}}{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

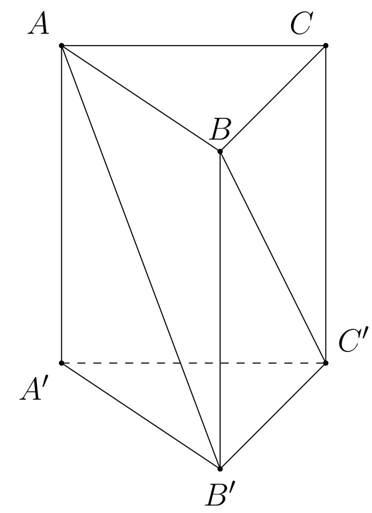
Chọn phương án D

Câu 56. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 3. Biết hai đường thẳng AB', BC' vuông góc với nhau. Tính thể tích V của khối lăng trụ.

A $V = \dfrac{27\sqrt{3}}{6}$. **B** $V = \dfrac{27\sqrt{3}}{8}$. **C** $V = \dfrac{27\sqrt{3}}{3}$. **D** $V = \dfrac{27\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Do $AB' \perp BC'$ nên $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'} = 0$
$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}\right) = 0$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA'}\overrightarrow{BB'} = 0$
$\Leftrightarrow AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ + 9 = 0 \Leftrightarrow AB = 3\sqrt{2}$.
Suy ra $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{27\sqrt{3}}{2}$.



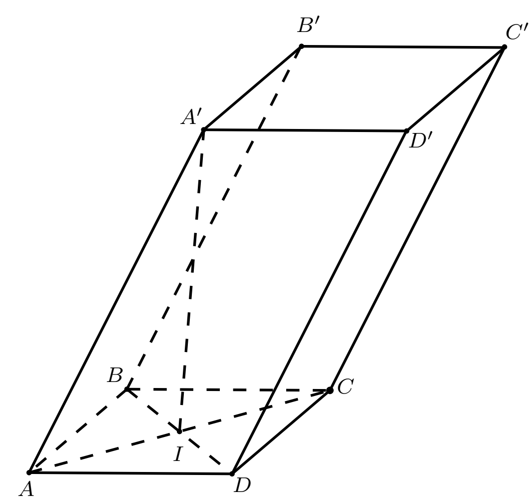
Chọn phương án D

Câu 57. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm AC và BD. Tính thể tích V của khối lăng trụ đó, biết độ dài cạnh bên là $3a$.

A $V = 2a^3\sqrt{6}$. **B** $V = a^3\sqrt{6}$. **C** $V = \dfrac{2}{3}a^3\sqrt{6}$. **D** $V = 2a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi I là giao điểm của AC và BD, ta có $AI = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{a^2 + 3a^2}}{2} = a$.
Tam giác $A'IA$ vuông tại I nên $A'I = \sqrt{9a^2 - a^2} = 2a\sqrt{2}$.
Thể tích lăng trụ là $V = a.a\sqrt{3}.2a\sqrt{2} = 2a^3\sqrt{6}$.



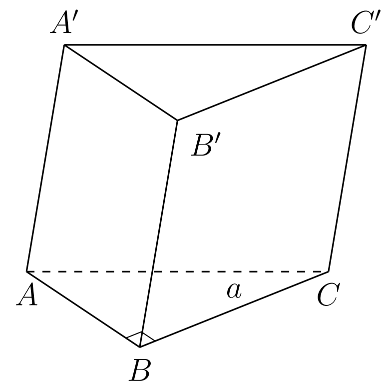
Chọn phương án A

Câu 58. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$, biết đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $BC = a$. Tính chiều cao h của khối lăng trụ đã cho.

A $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B** $h = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$. **C** $h = 3a\sqrt{3}$. **D** $h = a\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a^2$. Suy ra $h = \frac{V_{ABC.A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{a^3\sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot a^2} = a\sqrt{3}$.



Chọn phương án D

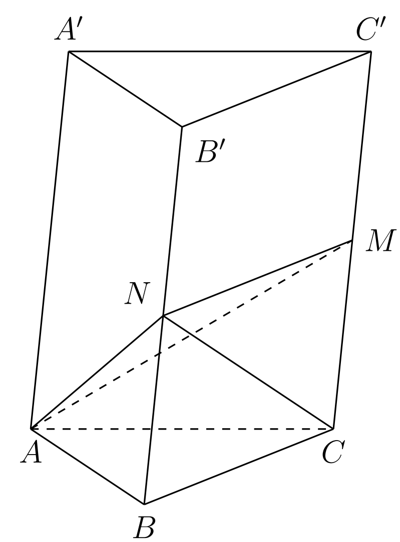
Câu 59. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Lấy M, N lần lượt là trung điểm của CC' và BB'. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai khối đa diện $ABCMN$ và $ABC.A'B'C'$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A $\frac{1}{2}$. **B** $\frac{2}{3}$. **C** $\frac{1}{6}$. **D** $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $V_1 = V_{AMNB} + V_{AMCB} = 2V_{MABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} V_{C'ABC} = \frac{1}{3}.V_2$

Suy ra $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$.



Chọn phương án D

Câu 60. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, trên cạnh AA', BB' lấy các điểm M, N sao cho $AA' = 3A'M$; $BB' = 3B'N$. Mặt phẳng $(C'MN)$ chia khối lăng trụ đã cho thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích khối chóp $C'.A'B'NM$, V_2 là thể tích khối đa diện $ABCMNC'$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A $\frac{2}{9}$. **B** $\frac{3}{4}$. **C** $\frac{2}{7}$. **D** $\frac{5}{7}$.

Lời giải.

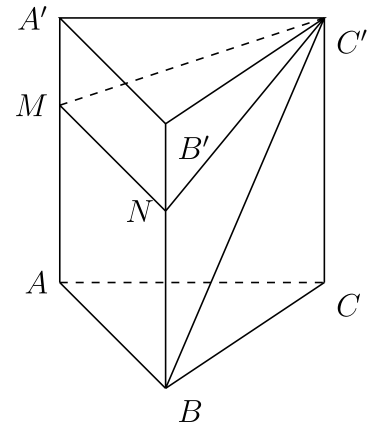
Ta có, $V_{C'ABB'A'} = V - V_{C'ABC} = V - \frac{1}{3}V = \frac{2}{3}V$

Mà $V_{C'.A'B'NM} = \frac{1}{3} \cdot V_{C'.ABB'A'}$

Nên $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}V = \frac{2}{9}V$

Suy ra, $V_2 = V - V_1 = V - \frac{2}{7}V = \frac{7}{9}V$

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{7}$.



Chọn phương án (C)

D MỨC ĐỘ 4

Câu 61. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác (ABC). Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

(A) $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. (B) $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (C) $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (D) $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

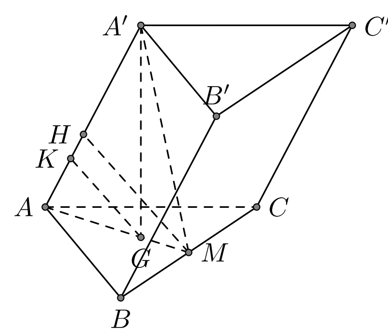
Lời giải.

Gọi M, G lần lượt là trung điểm của BC và trọng tâm của tam giác ABC.

Do tam giác ABC đều cạnh a nên $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, có

$\begin{cases} AM \perp BC \\ A'G \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'M)$.

Trong mặt phẳng $(AA'M)$ kẻ $MH \perp AA'$. Khi đó $MH \perp BC$ vì $BC \perp (AA'M)$.



Vậy MH là đoạn vuông góc chung của AA' và BC nên $MH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Trong tam giác $AA'G$ kẻ $GK \perp AH$ thì $GK \parallel MH \Rightarrow \frac{GK}{MH} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow GK = \frac{2}{3}MH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Xét tam giác $AA'G$ vuông tại G ta có $\frac{1}{GK^2} = \frac{1}{A'G^2} + \frac{1}{GA^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{1}{A'G^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{A'G^2} = \frac{36}{3a^2} - \frac{9}{3a^2} = \frac{9}{a^2} \Leftrightarrow A'G = \frac{a}{3}$.

Vậy thể tích của khối lăng trụ đã cho là $V = A'G \cdot S_{ABC} = \frac{a}{3}v \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

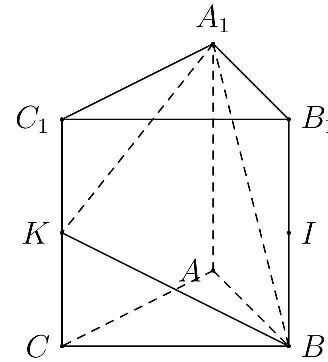
Chọn phương án (B)

Câu 62. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có $AB = a$, $AC = 2a$, $AA_1 = 2a\sqrt{5}$ và $\widehat{BAC} = 120°$.

Gọi K, I lần lượt là trung điểm của các cạnh CC_1, BB_1. Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (A_1BK) bằng

A $a\sqrt{15}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{5}}{6}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{15}}{3}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.



Ta có $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos 120^\circ} = a\sqrt{7}$

$A_1B = \sqrt{A_1A^2 + AB^2} = a\sqrt{21}$; $A_1K = \sqrt{A_1C_1^2 + C_1K^2} = 3a$;

$KB = \sqrt{KC^2 + CB^2} = 2a\sqrt{3}$

$\mathrm{d}(I, (A_1BK)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(B_1, (A_1BK)) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3V_{B_1A_1BK}}{S_{\Delta A_1BK}}$

Mà $V_{B_1A_1BK} = \dfrac{1}{2}V_{K.A_1B_1BA} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3}V_{ABC.A_1B_1C_1}$

$= \dfrac{1}{3} \cdot 2a\sqrt{5}\dfrac{1}{2}a \cdot 2a \cdot \sin 120^\circ = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$

Diện tích tam giác A_1BK bằng

$S = \sqrt{p\left(p - 2a\sqrt{3}\right)(p - 3a)\left(p - a\sqrt{21}\right)} = 3a^2\sqrt{3}$ với $p = \dfrac{2a\sqrt{3} + 3a + a\sqrt{21}}{2}$

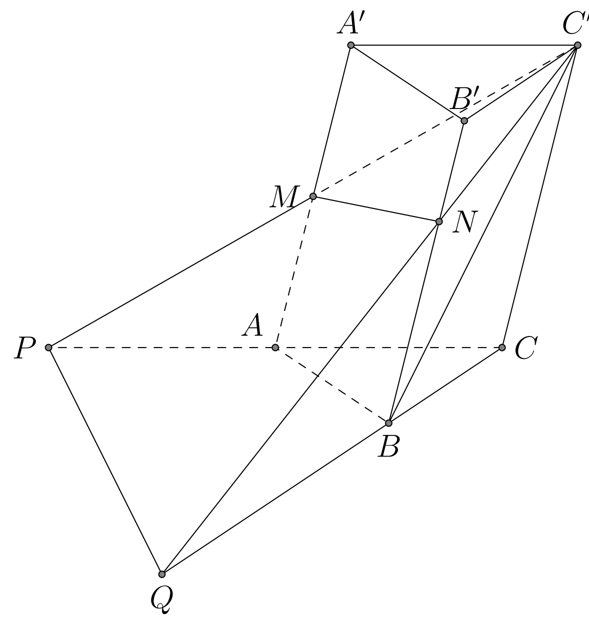
Vậy $\mathrm{d}\left(I, (A_1BK)\right) = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{\dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}}{3a^2\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{6}$.

Chọn phương án B

Câu 63. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 2. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên cạnh AA', BB' sao cho M là trung điểm của AA' và $BN = \dfrac{1}{2}NB'$. Đường thẳng CM cắt đường thẳng $C'A'$ tại P, đường thẳng CN cắt đường thẳng $C'B'$ tại Q. Tính thể tích V của khối đa diện $A'MPB'NQ$.

A $V = \dfrac{13}{18}$. **B** $V = \dfrac{23}{9}$. **C** $V = \dfrac{5}{9}$. **D** $V = \dfrac{7}{18}$.

Lời giải.



Ta có

$V_{C.A'B'C'} = \frac{1}{3}d\left(C,(A'B'C')\right).S_{A'B'C'} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3}.$

Suy ra $V_{C.ABB'A'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{C.A'B'C'} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$

Ta thấy $ABNM$ là hình thang nên

$$\begin{aligned} S_{ABNM} &= \frac{(AM+BN)\,d\,(BN;AM)}{2} \\ &= \frac{\left(\frac{AA'}{2}+\frac{BB'}{3}\right).d\,(BB',AA')}{2} \\ &= \frac{5}{12}AA'.d\left(BB',AA'\right). \end{aligned}$$

Mà

$S_{ABB'A'} = AA'\cdot d\left(AA',BB'\right) \Rightarrow S_{ABNM} = \frac{5}{12}\cdot S_{ABB'A'}.$

Suy ra

$$\begin{aligned} V_{C.ABNM} &= \frac{1}{3}d\,(C,(ABNM))\cdot S_{ABCNM} \\ &= \frac{1}{3}d\left(C,(ABB'A')\right)\cdot\frac{5}{12}\cdot S_{ABB'A'} \\ &= \frac{5}{12}\cdot\frac{1}{3}d\left(C,(ABB'A')\right)\cdot S_{ABB'A'} \\ &= \frac{5}{12}\cdot V_{CABB'A'} \\ &= \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

Suy ra $V_{CC'B'NMA'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{C.ABNM} = 2 - \frac{5}{9} = \frac{13}{9}.$

Ta có $A'M \parallel CC' \Rightarrow \frac{PA'}{PC'} = \frac{A'M}{CC'} = \frac{1}{2} \Rightarrow PA' = \frac{1}{2}PC' = A'C' \Rightarrow PC' = 2A'C'.$

Và $B'N \parallel CC' \Rightarrow \frac{B'N}{CC'} = \frac{QB'}{QC'} = \frac{2}{3} \Rightarrow QC' = 3B'C'.$

Mà $S_{A'B'C'} = \frac{1}{2}C'A'\cdot C'B'\cdot\sin C'$ suy ra

$$\Leftrightarrow S_{C'PQ} = \frac{1}{2}C'P\cdot C'Q\cdot\sin C' = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot A'C'\cdot 3B'C'\sin C = 6\cdot\left(\frac{1}{2}A'C'\cdot B'C'\cdot\sin C\right) = 6S_{A'B'C'}.$$

Ta có $V_{C.C'PQ} = \frac{1}{3}d\,(C;(A'B'C'))\cdot S_{C'PQ} = \frac{1}{3}d\,(C;(A'B'C'))\cdot 6S_{C'A'B'} = 6\cdot V_{C.A'B'C'} = 6\cdot\frac{2}{3} = 4.$

Từ đó $V_{A'MPB'NQ} = V_{C.C'PQ} - V_{CC'B'NMA'} = 4 - \frac{13}{9} = \frac{23}{9}.$

Chọn phương án B

Câu 64. Một khối lăng trụ tam giác có thể phân chia ít nhất thành n khối tứ diện có thể tích bằng nhau. Khẳng định nào sau đây là **đúng?**.

A 8. **B** 3. **C** 6. **D** 4.

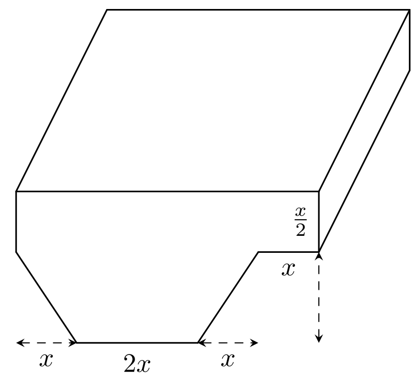
Lời giải.

Vì thể tích khối lăng trụ $V_1 = Bh$ và thể tích khối chóp (tứ diện) $V_2 = \dfrac{1}{3}Bh$ suy ra $V_1 = 3V_2$ nên ít nhất ta có thể chia lăng trụ thành ba khối tứ diện (vì chiều cao lớn nhất của khối tứ diện bằng chiều cao lăng trụ và diện tích đáy lớn nhất của tứ diện bằng diện tích đáy lăng trụ).

Chọn phương án B

Câu 65.

Người ta muốn xây dựng một bể bơi (hình vẽ bên) có thể tích là $V = \dfrac{968}{4+2\sqrt{2}}(m^3)$. Khi đó giá trị thực của x để diện tích xung quanh của bể bơi là nhỏ nhất thuộc khoảng nào sau đây?

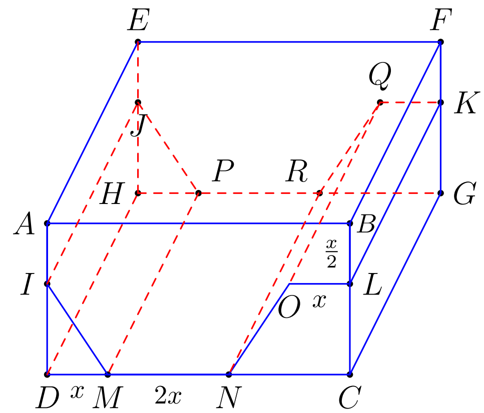


A $(0;3)$. **B** $(3;5)$. **C** $(5;6)$. **D** $(2;4)$.

Lời giải.

Gọi chiều cao của khối lăng trụ bể bơi là h.

Ta có



$$\begin{aligned}V &= S\cdot h\\ &= \left(5x\cdot\frac{3x}{2}-\frac{x\cdot x}{2}-\frac{2x+x}{2}\right)\cdot h\\ &= \frac{11x^2}{2}\\ &\Rightarrow h=\frac{2V}{11x^2}\end{aligned}$$

Diện tích xung quanh của bể bơi là

$$\begin{aligned}S_{xq} &= S_{AIJE}+S_{IMPJ}+S_{MNPR}+S_{NOQR}+S_{OLKQ}+S_{BLKF}+2S_{MNIABLON}\\ &= \frac{x}{2}\cdot h+x\sqrt{2}\cdot h+2x\cdot h+x\sqrt{2}\cdot h+xh+\frac{x}{2}\cdot h+2\cdot\frac{11x^2}{2}\\ &= (4+2\sqrt{2})xh+2\cdot\frac{11x^2}{2}\\ &= (4+2\sqrt{2})\cdot\frac{2V}{11x}+11x^2.\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số ta có

$$S_{xq}=\frac{(4+2\sqrt{2})V}{11x}+\frac{(4+2\sqrt{2})V}{11}+11x^2\geq 3\sqrt[3]{\frac{(4+2\sqrt{2})^2\cdot V^2}{11}}.$$

Vậy $\min S_{xq}=3\sqrt[3]{\dfrac{(4+2\sqrt{2})^2\cdot V^2}{11}}$ khi và chỉ khi $\dfrac{(4+2\sqrt{2})V}{11x}=11x^2\Rightarrow x^3=\dfrac{(4+2\sqrt{2})V}{121}=8\Rightarrow x=2$.

Chọn phương án A

Câu 66. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, $AB=2a$, M là trung điểm $A'B'$ và khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng (MBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **B** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$. **C** $\dfrac{3\sqrt{2}a^3}{2}$. **D** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{2}$.

Lời giải.

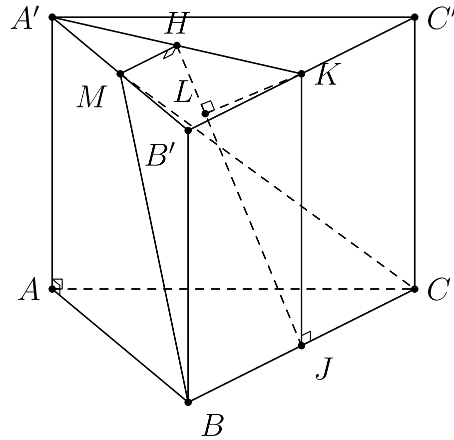
Gọi J, K, H lần lượt là trung điểm của BC, $B'C'$, KA' do $MH \parallel B'C'$ nên $MH \parallel BC$. Do đó mặt phẳng (MBC) trùng với mặt phẳng $(MHJB)$.

Khi đó $\mathrm{d}\left(C',(MBC)\right) = \mathrm{d}\left(K,(MBC)\right)$.

Do giả thiết $\begin{cases} MH \perp A'K \\ MH \perp KJ \end{cases} \Rightarrow MH \perp (JKH)$

nên $(JKH) \perp (MHJB)$.

Gọi L là hình chiếu vuông góc của K trên JH. Theo chứng minh trên suy ra $KL \perp (BMHJ)$.



Do đó $\mathrm{d}\left(K,(MBC)\right) = KL$ hay $\mathrm{d}\left(C',(MBC)\right) = KL$.

Xét $\triangle JKH$ vuông ở K ta có $KL = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và $KH = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

Khi đó $\dfrac{1}{LK^2} = \dfrac{1}{KH^2} + \dfrac{1}{KJ^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{KJ^2} = \dfrac{1}{\frac{2a^2}{4}} - \dfrac{1}{\frac{3a^2}{4}} \Leftrightarrow KL^2 = \dfrac{3a^2}{2}$ suy ra $KL = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Do đó thể tích $V_{ABC.A'B'C'} = KJ \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a^2\sqrt{3} = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{2}$.

Chọn phương án C

Câu 67. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AB. Diện tích thiết diện cắt lăng trụ đã cho bởi mặt phẳng $(A'C'M)$ là

A $\dfrac{7\sqrt{2}}{16}a^2$. **B** $\dfrac{3\sqrt{35}}{16}a^2$. **C** $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}a^2$. **D** $\dfrac{9}{8}a^2$.

Lời giải.

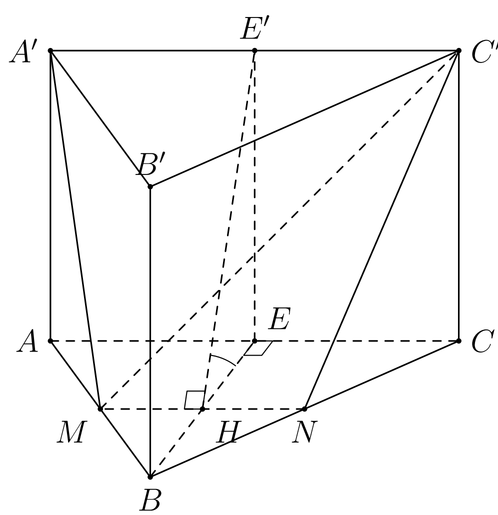
Gọi N là trung điểm BC.

Kẻ $MN \parallel AC \Rightarrow MN \parallel A'C'$.

Mặt phẳng $(A'C'M)$ cắt lăng trụ theo thiết diện là hình thang $A'C'NM$.

Gọi E, E' lần lượt là trung điểm AC và $A'C'$. Gọi H là giao điểm của MN và BE. Khi đó $MN \perp (E'HE)$.

Ta có: $\begin{cases} \left(A'C'NM\right) \cap (ABC) = MN \\ EH \perp MN \\ E'H \perp MN \end{cases}$



$\Rightarrow \left((A'C'NM),(ACNM)\right) = (HE, HE') = \widehat{E'HE} = \varphi$.

Ta có

$$BE = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HE = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot E'H = \sqrt{E'E^2 + EH^2} = \sqrt{2a^2 + \frac{3a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{35}}{4}.$$

Từ đó $\cos\varphi = \dfrac{HE}{HE'} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{4}{a\sqrt{35}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{35}}$.

Diện tích hình thang cân S_{ACMN}

$$S_{ACMN} = \frac{(MN + AC) \cdot HE}{2} = \frac{\left(\frac{a}{2} + a\right)\frac{a\sqrt{3}}{4}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}.$$

Ta có $S_{ACNM} = S_{A'C'MM} \cdot \cos\varphi$.

Vậy $S_{A'C'MM} = \dfrac{S_{ACNM}}{\cos\varphi} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{16} \cdot \dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{3}} = \dfrac{3a^2\sqrt{35}}{16}$.

Chọn phương án B

Câu 68. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $A, AB = 2a$. Biết diện tích tam giác $A'BC$ bằng $4a^2$. Thể tích lăng trụ đó là:

A $\dfrac{2\sqrt{10}a^3}{3}$. **B** $2\sqrt{10}a^3$. **C** $2\sqrt{6}a^3$. **D** $\dfrac{2\sqrt{6}a^3}{3}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow AI \perp BC; AI = \dfrac{1}{2}BC = \sqrt{2}a$.

Ta có: $\begin{cases} AI \perp BC \\ AA' \perp BC \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (AA'I) \Rightarrow BC \perp A'I$.

Do đó: $S_{\Delta A'BC} = \dfrac{1}{2}.A'I.BC$

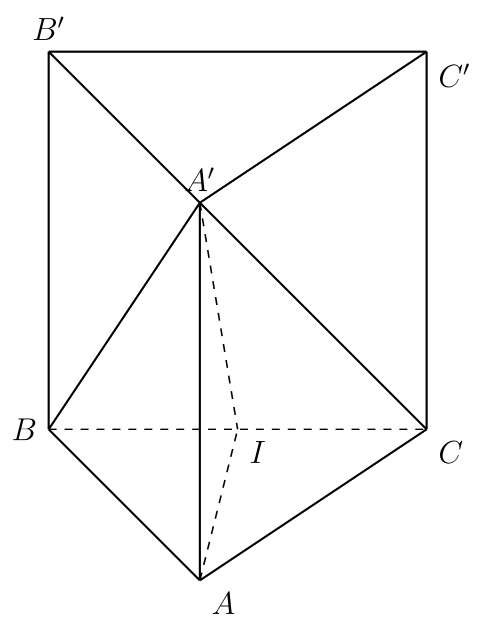
Mà $S_{\Delta A'BC} = 4a^2; BC = \sqrt{2}AB = 2\sqrt{2}a$

Nên $A'I = 2\sqrt{2}a$.

Ta có: $\Delta A'AI$ vuông tại A (Do $AA' \perp AI$)

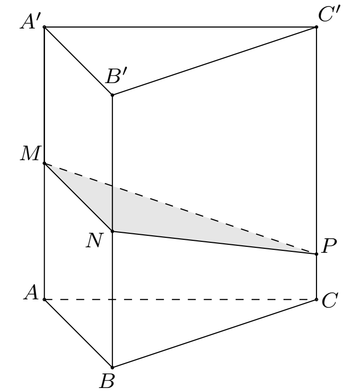
$\Rightarrow$ Áp dụng định lí Py - ta - go ta có: $A'A = \sqrt{A'I^2 - AI^2} = a\sqrt{6}$.

Ta có: $V_{\text{lăng trụ}} = AA'.S_{\Delta ABC} = a\sqrt{6}.\dfrac{1}{2}.(2a)^2 = 2\sqrt{6}a^3$.



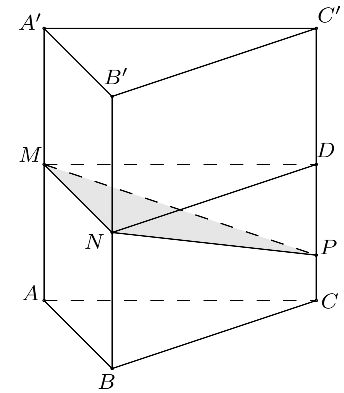
Chọn phương án C

Câu 69.
Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', BB'; P là điểm trên CC' sao cho $C'P = 5CP$. Gọi V_1, V lần lượt là thể tích các khối đa diện $A'B'C'.MNP, ABC.A'B'C'$ (hình vẽ bên). Tính $\dfrac{V_1}{V}$



Ⓐ $\dfrac{11}{18}$. Ⓑ $\dfrac{5}{24}$. Ⓒ $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.
Gọi diện tích đáy và chiều cao của lăng trụ lần lượt là S và $6h$.



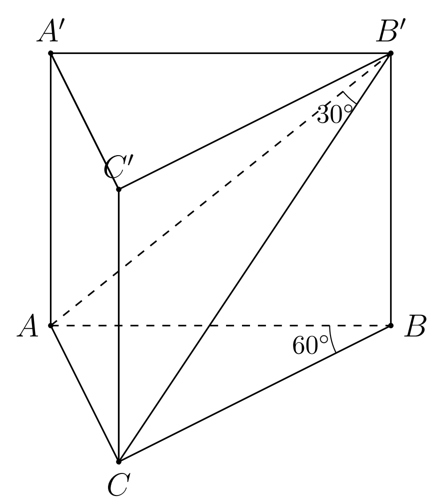
Ta có:
∘ $V = 6h \cdot S$
∘ $V_1 = V_{MND.A'B'C'} + V_{P.MND} = 3h \cdot S + \dfrac{1}{3} \cdot 2h \cdot S = \dfrac{11}{3}hS$
Vậy $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{11}{18}$

Chọn phương án A

Câu 70. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, $\widehat{ABC} = 60°$, $BC = a$. Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc $30°$. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Ⓐ $V = a^3\sqrt{3}$. Ⓑ $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. Ⓓ $V = a^3\sqrt{6}$.

Lời giải.
$AC = a\sqrt{3}, S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$
$\widehat{AB'C} = 30° \Rightarrow B'C = \dfrac{AC}{\tan 30°} = 3a.$
$BB' = 2a\sqrt{2} \Rightarrow V = a^3\sqrt{6}.$



Chọn phương án D

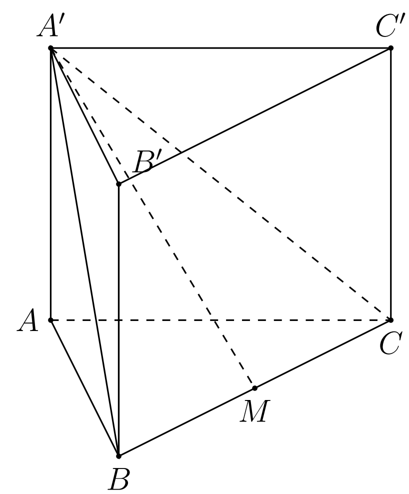
Câu 71. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 2, diện tích tam giác $A'BC$ bằng 3. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $V = 2\sqrt{5}$. **B** $V = \sqrt{2}$. **C** $V = 3\sqrt{2}$. **D** $V = \sqrt{5}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow \dfrac{1}{2}A'M.BC = 3$

$\Leftrightarrow A'M = 3 \Rightarrow AA' = \sqrt{6} \Rightarrow V = S_{ABC}.AA' = 3\sqrt{2}$

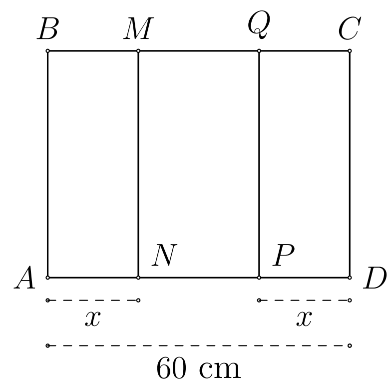


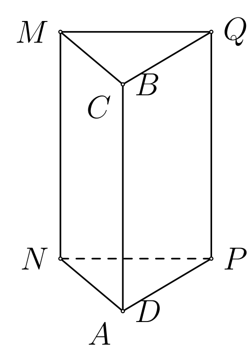
Chọn phương án C

Câu 72.

Cho một tấm tôn hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 60$ cm. Ta gập tấm tôn theo hai cạnh MN và PQ vào phía trong sao cho BA trùng với CD (như hình vẽ bên) để được lăng trụ đứng khuyết hai đáy. Khối lăng trụ có thể tích lớn nhất khi x bằng bao nhiêu?

A $x = 20$. **B** $x = 30$. **C** $x = 45$. **D** $x = 40$.





Lời giải.

Ta có $AN = PD = x$, $NP = 60 - 2x \Rightarrow \mathrm{p}_{\triangle DNP} = 30$.

Thể tích khối lăng trụ như hình vẽ bằng:

$V = S_{\triangle DNP} \cdot MN = MN \cdot \sqrt{(30-x)(30-x)(30-60+2x)}$

$= MN \cdot \sqrt{(30-x)^2(2x-30)}, x \in (15; 30)$.

Xét hàm số $f(x) = (30-x)^2(2x-30)$.

$f'(x) = -2(30-x)(3x-60); f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 30 \\ x = 20. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

Dựa vào bảng biến thiên, $\max\limits_{(15;30)} f(x) = f(20) = 1000$.

Do đó thể tích khối lăng trụ như hình vẽ lớn nhất khi $x = 20$ cm.

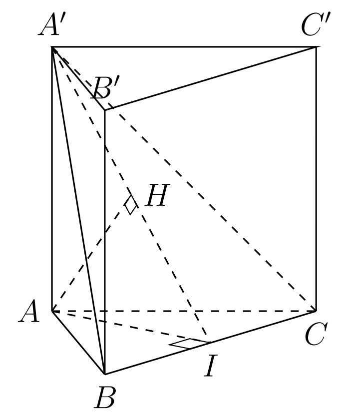
x	15		20		30
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	1000	$\searrow$	

Chọn phương án (A)

Câu 73. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Khi đó thể tích V của lăng trụ bằng

(A) a^3. **(B)** $3a^3$. **(C)** $\dfrac{4}{3}a^3$. **(D)** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}a^3$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của BC. Ta có $BC \perp (A'AI) \Rightarrow (A'BC) \perp (A'AI)$ theo giao tuyến $A'I$, kẻ $AH \perp A'I$ tại H ta có:

$AH \perp (A'BC) \Rightarrow AH = d\left(A, (A'BC)\right) = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}; AI = 2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

Tam giác $A'AI$ vuông tại A nên:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AI^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2}$$

$\Rightarrow AA' = a\sqrt{3}; S_{ABC} = (2a)^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$

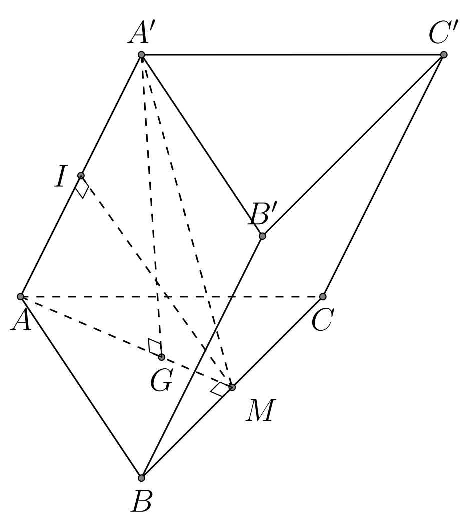
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = a\sqrt{3} \cdot a^2\sqrt{3} = 3a^3$.

Chọn phương án (B)

Câu 74. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ là

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **(B)** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **(C)** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **(D)** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải.



Gọi G là trọng tâm tam giác đều ABC, I là hình chiếu của M lên AA' với M là trung điểm của BC.

Có $A'G \perp BC$, $AG \perp BC \Rightarrow BC \perp (AA'G) \Rightarrow BC \perp MI$.

Suy ra MI là đường vuông góc chung của AA' và BC và theo giả thiết ta có $MI = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Ta có $\triangle AA'G \sim \triangle AMI (g.g) \Rightarrow \dfrac{A'G}{MI} = \dfrac{AG}{AI}$.

Mà $AM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow AG = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{1}{\sqrt{3}}a$;

$AI = \sqrt{AM^2 - MI^2} = \dfrac{3a}{4}$. Suy ra $A'G = \dfrac{1}{3}a$.

Từ đó $V_{ABC.A'B'C'} = A'G \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3}a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

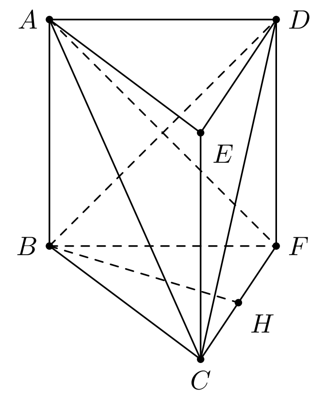
Chọn phương án (A)

Câu 75. Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài các cạnh $AB = a$, $AD = BC = b$, AB là đoạn vuông góc chung của BC và AD và $(AB, CD) = \alpha$, $\left(0 < \alpha < 90°,\ \tan\alpha < \dfrac{2b}{a}\right)$. Nếu thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất thì giá trị của $\tan\alpha$ bằng

(A) $\dfrac{b}{2a}$. (B) $\dfrac{b\sqrt{3}}{a}$. (C) $\dfrac{b\sqrt{2}}{a}$. (D) $\dfrac{b}{3a}$.

Lời giải.

Dựng hình lăng trục đứng tam giác $ADE.BFC$ như hình vẽ, H là trung điểm của CF. Khi đó ta có



$$\widehat{CDF} = (CD, FD) = (CD, AB) = \alpha.$$

Suy ra $FC = DF\tan\alpha = a\tan\alpha$. Dễ thấy tam giác BFC cân tại B nên

$$BH = \sqrt{BF^2 - HF^2} = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2\tan^2\alpha}}{2}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} V_{D.ABC} = V_{F.ABC} = V_{A.BCF} &= \frac{1}{3}AB \cdot S_{BCF} \\ &= \frac{1}{6}AB \cdot BH \cdot FC = \frac{1}{12}a^2\tan\alpha\sqrt{4b^2 - a^2\tan^2\alpha} \\ &= \frac{a^3}{12}\tan\alpha\sqrt{\frac{4b^2}{a^2} - \tan^2\alpha} \le \frac{a^3}{12} \cdot \frac{\tan^2\alpha + \dfrac{4b^2}{a^2} - \tan^2\alpha}{2} \\ &= \frac{ab^2}{6}. \end{aligned}$$

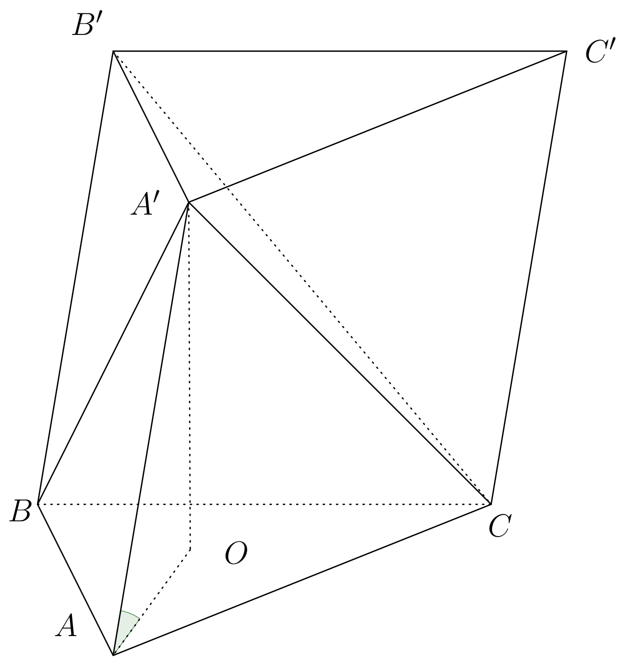
Dấu bằng xảy ra khi $\tan\alpha = \sqrt{\dfrac{4b^2}{a^2} - \tan^2\alpha}$ hay $\tan\alpha = \dfrac{b\sqrt{2}}{a}$.

Chọn phương án (C)

Câu 76. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu của A' trên (ABC) trùng với tâm O của tam giác ABC. Biết $A'O = \dfrac{a}{2}$. Tính khoảng cách từ B' đến $(A'BC)$.

(A) $\dfrac{3a}{4}$. (B) $\dfrac{3a}{\sqrt{21}}$. (C) $\dfrac{3a}{\sqrt{28}}$. (D) $\dfrac{3a}{\sqrt{13}}$.

Lời giải.



Vì $\triangle ABC$ đều nên $OA = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Suy ra $A'C = A'B = AA' = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$.

Ta lại có $V_{A'.ABC} = V_{C.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$ nên

$$\begin{aligned} V_{BCA'B'} &= V_{ABC.A'B'C'} - V_{C.A'B'C'} - V_{A'.ABC} \\ &= \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3}\cdot A'O\cdot S_{ABC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}. \end{aligned}$$

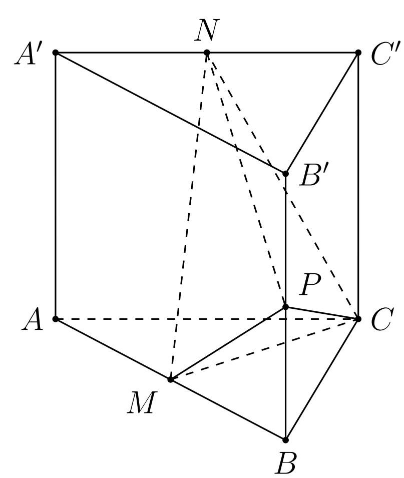
Mà $\triangle A'BC$ có $A'B = A'C = \dfrac{\sqrt{21}}{6}$, $BC = a$ nên $S_{A'BC} = \dfrac{a^2}{2\sqrt{3}}$.

Vậy $d\left(B',(A'BC)\right) = \dfrac{3V_{BCA'B'}}{S_{A'BC}} = \dfrac{3a}{4}$.

Chọn phương án A

Câu 77.

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, $A'C'$, BB'. Tính thể tích V' của khối tứ diện $CMNP$.



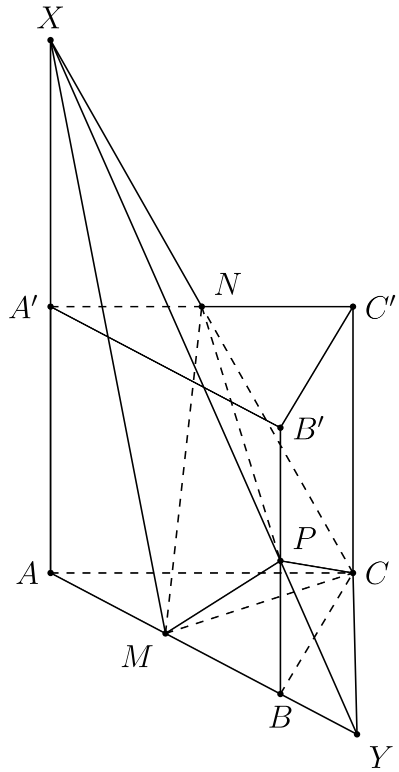
A $V' = \dfrac{5}{24}V$.

B $V' = \dfrac{1}{4}V$.

C $V' = \dfrac{7}{24}V$.

D $V' = \dfrac{1}{3}V$.

Lời giải.



Gọi X, Y lần lượt là giao điểm của CN và AA', XP và AB.
Dễ thấy N là trung điểm XC nên $S_{CNM} = \dfrac{1}{2} S_{CMX}$, suy ra $V_{PCNM} = \dfrac{1}{2} V_{PCMX}$.
Áp dụng định lí Thales ta có

$$\frac{YP}{YX} = \frac{YB}{YA} = \frac{PB}{XA} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{XP}{XY} = \frac{3}{4} \text{ và } YM = \frac{5}{6}AB.$$

Ta có $\dfrac{V_{PCMX}}{V_{XMCY}} = \dfrac{XP}{XY} = \dfrac{3}{4}$, mà

$$\frac{V_{XMCY}}{V_{XABC}} = \frac{S_{CMY}}{S_{ABC}} = \frac{MY}{AB} = \frac{5}{6}$$

nên

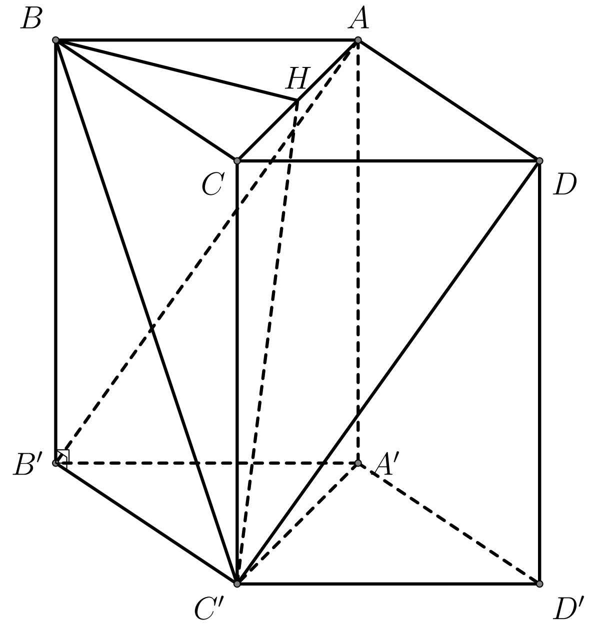
$$V_{PCMX} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} V_{XABC} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot 2V_{A'ABC} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{5V}{12}.$$

Vậy $V_{PCNM} = \dfrac{1}{2} V_{PCMX} = \dfrac{5V}{24}$.
Chọn phương án A

Câu 78. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy ABC bằng $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$, góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng 60°. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB' và BC'.

A $d = \dfrac{2\sqrt{2}a}{3}$. **B** $d = \dfrac{4a}{3}$. **C** $d = \dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$. **D** $d = \dfrac{2\sqrt{6}a}{3}$.

Lời giải.



Có $S_{\triangle ABC} = \dfrac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow R = \dfrac{AB}{\sqrt{3}} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AB = 2a$.

Dựng hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ suy ra $AB' \parallel DC'$ nên $\widehat{(AB', BC')} = \widehat{(DC', BC')} = 60^\circ$.

TH1: $\widehat{BC'D} = 120^\circ$. Xét tam giác BDC' có $\sin 60^\circ = \dfrac{BH}{BC'} \Rightarrow BC' = 2a = BC$ (loại).

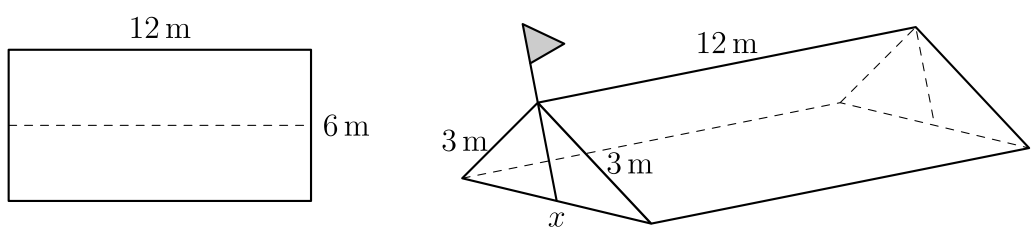
TH2: $\widehat{BC'D} = 60^\circ$ suy ra $BC' = 2BH = 2a\sqrt{3} \Rightarrow BB' = 2\sqrt{2}a > BC$.

$d = d\left(AB', BC'\right) = d\left(AB', (BC'D)\right) = d\left(A, (BC'D)\right) = d\left(C, (BC'D)\right)$

$= \dfrac{3V_{C'.BCD}}{S_{\triangle BC'D}} = \dfrac{3 \cdot \dfrac{2\sqrt{6}a^3}{3}}{3\sqrt{3}a^2} = \dfrac{2\sqrt{2}a}{3}$.

Chọn phương án A

Câu 79. Kết thúc học kỳ 1, trường THPT Triệu Quang Phục có tổ chức cho học sinh các lớp tham quan học tập trải nghiệm tại nhà thờ Phát Diệm và chùa Bái Đính, trong số đó có lớp $12A1$. Để có thể có chỗ nghỉ ngơi trong quá trình tham quan, lớp $12A1$ đã dựng trên mặt đất bằng một chiếc lều bằng bạt từ một tấm bạt hình chữ nhật có chiều dài là $12\,\text{m}$ và chiều rộng là $6\,\text{m}$ bằng cách: Gập đôi tấm bạt lại theo đoạn nối trung điểm hai cạnh là chiều rộng của tấm bạt sao cho hai mép chiều dài còn lại của tấm bạt sát đất và cách nhau $x\,(\text{m})$ (như hình vẽ). Tìm x để khoảng không gian phía trong lều là lớn nhất.



(A) $x = 3\sqrt{3}$. (B) $x = 3$. (C) $x = 4$. (D) $x = 3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Khoảng không gian phía trong lều bằng thể tích khối lăng trụ đứng tam giác có chiều cao 12 m và tam giác đáy cân có hai cạnh bằng 3 m cạnh còn lại bằng x, $(0 < x < 6)$.

Thể tích khối lăng trụ $V(x) = 12 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{3^2 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = 3x\sqrt{36 - x^2}$.

Xét hàm số $V(x) = 3x\sqrt{36 - x^2}$ trên $(0; 6)$, ta có:

$V'(x) = 3\sqrt{36 - x^2} + 3x \cdot \dfrac{-2x}{2\sqrt{36 - x^2}} = \dfrac{3(36 - x^2) - 3x^2}{\sqrt{36 - x^2}} = \dfrac{6(18 - x^2)}{\sqrt{36 - x^2}}$.

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3\sqrt{2} \\ x = 3\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Trên khoảng $(0; 6)$, ta có $V'(x) > 0, \forall x \in (0; 3\sqrt{2})$ và $V'(x) < 0, \forall x \in (3\sqrt{2}; 6)$.

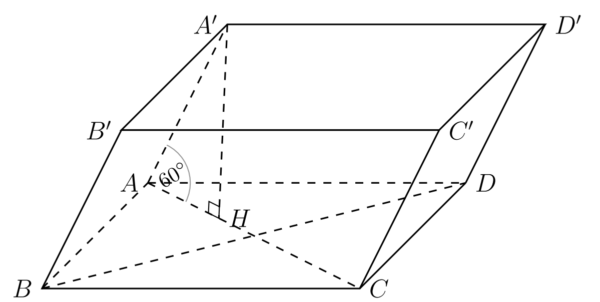
Vậy $\max\limits_{(0;6)} V(x) = V(3\sqrt{2})$ khi $x = 3\sqrt{2}$.

Chọn phương án D

Câu 80. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, tâm O và $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Các cạnh $A'A$, $A'B$, $A'D$ cùng tạo với đáy một góc 60°. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A $V = a^3\sqrt{3}$. **B** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D** $\dfrac{3a^3}{2}$.

Lời giải.



Theo giả thiết suy ra ΔABD đều nên

$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = \dfrac{2\sqrt{3}a^2}{4}$.

Gọi H là hình chiếu của A' trên mp$(ABCD)$. Suy ra H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABD hay H là trọng tâm tam giác ABD.

Ta có $A'H = AH \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = a$

$\Rightarrow V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Chọn phương án C

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. B	3. C	4. B	5. C	6. B	7. B	8. D	9. A	10. D
11. C	12. D	13. D	14. A	15. D	16. C	17. D	18. B	19. A	20. C
21. C	22. B	23. A	24. D	25. A	26. C	27. C	28. B	29. A	30. A
31. D	32. C	33. B	34. A	35. A	36. A	37. A	38. D	39. C	40. B
41. D	42. B	43. D	44. C	45. B	46. A	47. D	48. A	49. A	50. B
51. A	52. A	53. D	54. D	55. D	56. D	57. A	58. D	59. D	60. C
61. B	62. B	63. B	64. B	65. A	66. C	67. B	68. C	69. A	70. D
71. C	72. A	73. B	74. A	75. C	76. A	77. A	78. A	79. D	80. C

DẠNG 5. HÀM SỐ MŨ – LÔGARÍT

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Tập xác định của hàm số y=$\log_2 x$ là

(A) $[0;+\infty)$. (B) $(-\infty;+\infty)$. (C) $(0;+\infty)$. (D) $[2;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của số $y=\log_2 x$ là $x>0$.

Vậy tập xác định của hàm đã cho là: $D=(0;+\infty)$.

Chọn phương án (C)

Câu 1. Tập xác định của hàm số $y=\log_2\left(4-x^2\right)$ là tập hợp nào sau đây?

(A) $\mathscr{D}=(-2;2)$. (B) $\mathscr{D}=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

(C) $\mathscr{D}=[-2;2]$. (D) $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Điều kiện để hàm số $y=\log_a f(x)\,(0<a\neq 1)$ có nghĩa là $f(x)>0$.

Cách giải:

Điều kiện xác định $4-x^2>0\Leftrightarrow x\in(-2;2)$.

Chọn phương án (A)

Câu 2. Tập xác định của hàm số $y=\log_2\dfrac{3-x}{2x}$ là

(A) $\mathscr{D}=(3;+\infty)$. (B) $\mathscr{D}=(0;3]$.

(C) $\mathscr{D}=(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$. (D) $\mathscr{D}=(0;3)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định khi $\dfrac{3-x}{2x}>0\Leftrightarrow x\in(0;3)$.

Chọn phương án (D)

Câu 3. Tập xác định của hàm số $y=\log\left(x-2\right)^2$ là

(A) $\mathbb{R}$. (B) $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. (C) $(2;+\infty)$. (D) $[2;+\infty)$.

Lời giải.

Phương pháp:

Hàm số $y=\log_a f\left(x\right)$ xác định nếu $f\left(x\right)$ xác định và $f\left(x\right)>0$.

Cách giải:

Hàm số $y=\log\left(x-2\right)^2$ xác định nếu $\left(x-2\right)^2>0\Leftrightarrow x\neq 2$.

Vậy TXĐ $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Chú ý: Khi giải nhiều học sinh biến đổi $\left(x-2\right)^2>0\Leftrightarrow x>2$ rồi chọn $\mathscr{D}=(2;+\infty)$ là sai.

Chọn phương án (B)

Câu 4. Tìm đạo hàm của hàm số $y=\ln\left(1+e^{2x}\right)$.

A $y' = \dfrac{-2e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$. **B** $y' = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$. **C** $y' = \dfrac{1}{e^{2x}+1}$. **D** $y' = \dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng công thức đạo hàm $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$ và $(e^u)' = u'.e^u$.

Cách giải:

Ta có $y' = \left(\ln\left(1+e^{2x}\right)\right)' = \dfrac{\left(1+e^{2x}\right)'}{1+e^{2x}} = \dfrac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}$.

Chọn phương án D

Câu 5. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_{2019}|x|$, $\forall x \neq 0$.

A $y' = \dfrac{1}{|x|\ln 2019}$. **B** $y' = \dfrac{1}{|x|}$. **C** $y' = \dfrac{1}{x\ln 2019}$. **D** $y' = x\ln 2019$.

Lời giải.

Theo công thức đạo hàm, ta có $y' = \dfrac{1}{x\ln 2019}$.

Chọn phương án C

Câu 6. Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực?

A $y = \left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^x$. **B** $y = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$. **C** $y = \log_{\frac{\pi}{4}}\left(2x^2+1\right)$. **D** $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Lời giải.

Loại phương án C và D vì các hàm số trong các phương án này không xác định trên $\mathbb{R}$.

Chọn A vì $\dfrac{2}{\mathrm{e}} < 1$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn phương án A

Câu 7. Cho các mệnh đề sau

(I). Cơ số của lôgarit phải là số dương.

(II). Chỉ số số thực dương mới có lôgarit.

(III). $\ln(A+B) = \ln A + \ln B$ với mọi $A > 0, B > 0$.

(IV). $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$ với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Số mệnh đề đúng là

A 1. **B** 3. **C** 4. **D** 2.

Lời giải.

(I) Sai vì cơ số của $\log_a b$ chỉ cần thỏa mãn $0 < a \neq 0$.

(II) Đúng vì điều kiện có nghĩa của $\log_a b$ là $b > 0$.

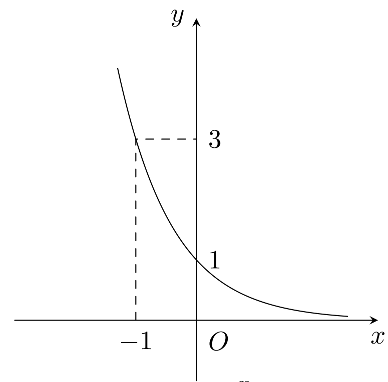
(III) Sai vì $\ln A + \ln B = \ln(AB) \neq \ln(A+B)$ với $A, B > 0$.

(IV) Sai vì nếu $a, b, c < 0$ thì các biểu thức $\log_a b, \log_b c, \log_c a$ không có nghĩa.

Chọn phương án A

Câu 8.

Đồ thị hình bên là của hàm số nào?



A $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$. **B** $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$. **C** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. **D** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Lời giải.

Đồ thị đi xuống nên hàm số đã cho là nghịch biến nên loại A và B.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-1; 3)$ nên chỉ có đáp án C thỏa.

Chọn phương án C

Câu 9. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A $y = \left(\frac{3}{\pi}\right)^x$. **B** $y = \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^x$. **C** $y = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}\right)^x$. **D** $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$.

Lời giải.

Do $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3} > 1$ nên hàm số $y = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}\right)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn phương án C

Câu 10. Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A $y = \log_5 x$. **B** $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. **C** $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$. **D** $y = \left(\frac{e}{3}\right)^x$.

Lời giải.

chú ý rằng $\frac{e}{3} < 1$.

Chọn phương án D

Câu 11. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào đồng biến trên tập $\mathbb{R}$.

A $y = \log_{\sqrt{10}-3} x$. **B** $y = \log_2\left(x^2 - x\right)$. **C** $y = \left(\frac{\mathrm{e}}{3}\right)^{2x}$. **D** $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$.

Lời giải.

Hàm số $y = \log_{\sqrt{10}-3} x$ có cơ số $a = \sqrt{10} - 3$ nên hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Hàm số $y = \log_2\left(x^2 - x\right)$ có tập xác định $D = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = \left(\frac{\mathrm{e}}{3}\right)^{2x}$ có $\frac{\mathrm{e}}{3} < 1$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$ có $\frac{\pi}{3} > 1$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn phương án D

Câu 12. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$?

A $y = (2 + \sqrt{x})^\pi$. **B** $y = \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)^\pi$. **C** $y = \left(2 + x^2\right)^\pi$. **D** $y = (2 + x)^\pi$.

Lời giải.

Hàm số $y=(2+\sqrt{x})^{\pi}$ có tập xác định $\mathscr{D}=[0;+\infty)$.

Hàm số $y=\left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)^{\pi}$ có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Hàm số $y=\left(2+x^2\right)^{\pi}$ có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Hàm số $y=(2+x)^{\pi}$ có tập xác định $\mathscr{D}=(-2;+\infty)$.

Chọn phương án C

Câu 13. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực $\mathbb{R}$?

A $y=\log_{\frac{1}{2}} x$. **B** $y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^{x}$. **C** $y=\left(\frac{2}{e}\right)^{x}$. **D** $y=\log_{\frac{\pi}{4}}\left(2x^2+1\right)$.

Lời giải.

Hàm số $y=\left(\dfrac{2}{e}\right)^{x}$ là hàm số mũ, có cơ số $0<a=\dfrac{2}{e}<1$ nên hàm sốnghịch biến trên tập số thực $\mathbb{R}$.

Chọn phương án C

Câu 14. Đạo hàm của hàm số $y=\ln\left(5-3x^2\right)$ là

A $\dfrac{6}{3x^2-5}$. **B** $\dfrac{2x}{5-3x^2}$. **C** $\dfrac{6x}{3x^2-5}$. **D** $\dfrac{-6x}{3x^2-5}$.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng công thức tính đạo hàm $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$

Cách giải: $\left[\ln\left(5-3x^2\right)\right]'=\dfrac{-6x}{5-3x^2}=\dfrac{6x}{3x^2-5}$.

Chọn phương án C

Câu 15. Tìm tập xác định của hàm số $y=\ln(1-x)$.

A $\mathscr{D}=(-\infty;-1)$. **B** $\mathscr{D}=(-1;+\infty)$. **C** $\mathscr{D}=(-\infty;1)$. **D** $\mathscr{D}=(1;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $y=\ln(1-x)$ xác định $\Leftrightarrow 1-x>0 \Leftrightarrow x<1$. Do đó tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=(-\infty;1)$.

Chọn phương án C

Câu 16. Tính đạo hàm của hàm số $y=2^x$.

A $y'=\dfrac{2^x}{\ln 2}$. **B** $y'=2^x\ln 2$. **C** $y'=x.2^{x-1}\ln 2$. **D** $y'=x.2^{x-1}$.

Lời giải.

Sử dụng công thức đạo hàm $(a^x)'=a^x\ln a$. Do đó ta có $(2^x)'=2^x\ln 2$.

Chọn phương án B

Câu 17. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A $y=\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^{x}$. **B** $y=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{x}$. **C** $y=\left(\dfrac{2}{e}\right)^{x}$. **D** $y=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x}$.

Lời giải.

Phương pháp: Hàm số $y=a^x(a>0,a\neq 1)$

— Nếu $a>1$ thì hàm số $y=a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

— Nếu $0<a<1$ thì hàm số $y=a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

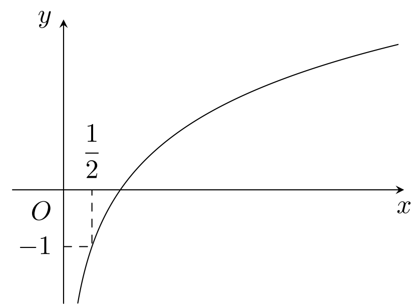
50 DẠNG TOÁN PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA LẦN 2

Cách giải: Ta có $\frac{\pi}{3} > 1 \Rightarrow$ Hàm số $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn phương án A

Câu 18.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây?



(A) $y = \log_2(2x)$.
(B) $y = \log_2 x$.
(C) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.
(D) $y = \log_{\sqrt{2}} x$.

Lời giải.

Từ hình vẽ suy ra hàm số đồng biến nên loại hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Lại từ hình vẽ suy đồ thị hàm số đi qua điểm $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$.

Kiểm tra ta thấy $-1 \neq \log_2\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)$; $-1 = \log_2 \frac{1}{2}$ và $-1 \neq \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2}$ nên loại các hàm số $y = \log_2(2x)$ và $y = \log_{\sqrt{2}} x$.

Chọn phương án B

Câu 19. Đạo hàm của hàm số $y = \sin x + \log_3 x^3 \quad (x > 0)$ là

(A) $y' = \cos x + \frac{3}{x \ln 3}$.
(B) $y' = -\cos x + \frac{1}{x^3 \ln 3}$.
(C) $y' = \cos x + \frac{1}{x^3 \ln 3}$.
(D) $y' = -\cos x + \frac{1}{x \ln 3}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $(\sin x)' = \cos x$, $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $(0 < a \neq 1)$, ta có $y' = \cos x + \frac{3}{x \ln 3}$.

Chọn phương án A

Câu 20. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_9\left(x^2 + 1\right)$.

(A) $y' = \frac{1}{(x^2+1)\ln 9}$.
(B) $y' = \frac{x}{(x^2+1)\ln 3}$.
(C) $y' = \frac{2x \ln 9}{x^2+1}$.
(D) $y' = \frac{2\ln 3}{x^2+1}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{\left(x^2+1\right)'}{(x^2+1)\ln 9} = \frac{2x}{(x^2+1)\ln 3^2} = \frac{2x}{(x^2+1)\,2\ln 3} = \frac{x}{(x^2+1)\ln 3}$.

Chọn phương án B

B MỨC ĐỘ 2

Câu 21. Phát biểu nào sau đây là sai?

(A) Hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ đồng biến khi $a > 1$.
(B) Hàm số logarit $y = \log_a x\,(a > 0, a \neq 1)$ có tập xác định là $(0; +\infty)$.
(C) Hàm số mũ $y = a^x\,(a > 0, a \neq 1)$ có tập xác định là $(0; +\infty)$.
(D) Đồ thị hàm số mũ $y = a^x\,(a > 0, a \neq 1)$ nhận Ox làm tiệm cận ngang.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng tính chất hàm mũ và lôgarit.

- Hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ đồng biến khi $a > 1$ và nghịch biến khi $0 < a < 1$.
- Hàm số lôgarit $y = \log_a x\,(a > 0, a \neq 1)$ có tập xác định là $(0; +\infty)$ và tập giá trị $\mathbb{R}$; đồ thị có tiệm cận đứng là trục Ox.
- Hàm số mũ $y = a^x\,(a > 0, a \neq 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị $(0; +\infty)$; đồ thị có tiệm cận ngang là trục Oy.

Cách giải:

Phát biểu sai là: Hàm số mũ $y = a^x\,(a > 0, a \neq 1)$ có tập xác định là $(0; +\infty)$.

Sửa lại: Hàm số mũ $y = a^x\,(a > 0, a \neq 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Chọn phương án C

Câu 22. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_8 (6x - 5)$.

A $y' = \dfrac{2}{(6x-5)\ln 2}$. B $y' = \dfrac{1}{(6x-5)\ln 8}$. C $y' = \dfrac{6}{6x-5}$. D $y' = \dfrac{6}{(6x-5)\ln 4}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{(6x-5)'}{(6x-5)\cdot \ln 8} = \dfrac{6}{3(6x-5)\cdot \ln 2} = \dfrac{2}{(6x-5)\cdot \ln 2}$.

Chọn phương án A

Câu 23. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực $\mathbb{R}$?

A $y = \left(\dfrac{\mathrm{e}}{3}\right)^x$. B $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. C $y = \left(\dfrac{4}{\pi}\right)^x$. D $y = \log_2 x$.

Lời giải.

Nhận xét:

— Hàm số $y = \left(\dfrac{\mathrm{e}}{3}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ vì cơ số $\left(\dfrac{\mathrm{e}}{3}\right) < 1$.

— Hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ có tập xác định $\mathscr{D} = (0; +\infty)$ nên không thể nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

— $y = \left(\dfrac{4}{\pi}\right)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ vì có cơ số $\left(\dfrac{4}{\pi}\right) > 1$.

— Hàm số $y = \log_2 x$ có tập xác định $\mathscr{D} = (0; +\infty)$ nên không thể nghich biến hoặc đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy $y = \left(\dfrac{\mathrm{e}}{3}\right)^x$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn phương án A

Câu 24. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (x^2 - 3x - 4)^{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

A $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash(-1; 4)$. B $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

C $\mathscr{D} = (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$. D $\mathscr{D} = (-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số là $x^2-3x-4>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>4\\x<-1.\end{array}\right.$

Vậy $\mathscr{D}=(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$.

Chọn phương án C

Câu 25. Hàm số $f(x)=\log_2(x^2-2x)$ có đạo hàm

A $f'(x)=\dfrac{\ln 2}{x^2-2x}$.

B $f'(x)=\dfrac{1}{(x^2-2x)\ln 2}$.

C $f'(x)=\dfrac{(2x-2)\ln 2}{x^2-2x}$.

D $f'(x)=\dfrac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 2}$.

Lời giải.

$$f'(x)=(\log_2(x^2-2x))'=\frac{(x^2-2x)}{(x^2-2x)\ln 2}=\frac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 2}.$$

Chọn phương án D

Câu 26. Hàm số $y=(x^2-x+1)\mathrm{e}^x$ có đạo hàm là

A $y'=(2x-1)\mathrm{e}^x$.

B $y'=(x^2-x)\mathrm{e}^x$.

C $y'=(x^2+x)\mathrm{e}^x$.

D $y'=(x^2+1)\mathrm{e}^x$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$y'=\left(x^2-x+1\right)'\mathrm{e}^x+\left(x^2-x+1\right)(\mathrm{e}^x)'=\left(x^2+x\right)\mathrm{e}^x$.

Chọn phương án C

Câu 27. Trong các hàm số sau, hàm số nào không xác định trên $\mathbb{R}$?

A $y=3^x$.

B $y=\log(x^2)$.

C $y=\ln(|x|+1)$.

D $y=(0{,}3)^x$.

Lời giải.

Hàm số $y=\log(x^2)$ xác định khi $x^2>0\Leftrightarrow x\neq 0$.

Chọn phương án B

Câu 28. Với giá trị nào của x thì biểu thức $B=\log_2(2x-1)$ xác định?

A $x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.

B $x\in(-1;+\infty)$.

C $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

D $x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải.

Để biểu thức $B=\log_2(2x-1)$ xác định thì $2x-1>0\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$

Chọn phương án D

Câu 29. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào đồng biến trên tập $\mathbb{R}$?

A $y=2^{1-3x}$.

B $y=\log_2(x-1)$.

C $y=\log_2(2^x+1)$.

D $y=\log_2\left(x^2+1\right)$.

Lời giải.

Hàm số $y=\log_2(2^x+1)$ có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$y'=\dfrac{2^x}{2^x+1}>0\,\forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy hàm số $y=\log_2(2^x+1)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn phương án C

Câu 30. Trong các hàm số dưới đây, đồ thị hàm số nào nhận trục tung là đường tiệm cận?

A $y=\log_3 x$.

B $y=\dfrac{1}{3^x}$.

C $y=\dfrac{1}{x+1}$.

D $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng:

a) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\left(x\neq-\dfrac{d}{c}\right)$ nhận đường thẳng $y=\dfrac{a}{c}$ làm tiệm cận ngang và đường thẳng $x=-\dfrac{d}{c}$ làm tiệm cận đứng.

b) Đồ thị hàm số $y=\log_a x,(x>0)$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng.

c) Đồ thị hàm số $y=a^x,(a>0)$ nhận trục hoành làm tiệm cận ngang (không có tiệm cận đứng).

Cách giải:

a) Đồ thị hàm số $y=\log_3 x,(x>0)$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng.

b) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3^x}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ và $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$ nhận trục hoành làm tiệm cận ngang (không có tiệm cận đứng).

c) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{x+1}$ nhận $x=-1$ làm tiệm cận đứng và $y=0$ làm tiệm cận ngang.

Chọn phương án A

Câu 31. Hàm số $y=3^{x^2+2}$ có đạo hàm là

A. $y'=\dfrac{3^{x^2+2}}{\ln 3}$. B. $y'=\dfrac{2x\cdot 3^{x^2+2}}{\ln 3}$. C. $y'=2x\cdot 3^{x^2+2}\cdot\ln 3$. D. $y'=2x\cdot 3^{x^2+2}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\left(3^{x^2+2}\right)'=3^{x^2+2}\ln 3\cdot\left(x^2+2\right)'=2x\cdot 3^{x^2+2}\ln 3$.

Chọn phương án C

Câu 32. Biết đồ thị của hàm số $y=f(x)$ đối xứng với đồ thị hàm số $y=\log_a x \quad (0<a\neq 1)$ qua điểm $I(2;2)$. Giá trị của $f\left(4-a^{2018}\right)$ là

A. -2020. B. 2014. C. -2014. D. 2020.

Lời giải.

Gọi $M(x;\log_a x)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $y=\log_a x$ thì điểm đối xứng với M qua I là $M'(4-x;4-\log_a x)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Do đó $f(4-x)=4-\log_a x$. Suy ra: $f\left(4-a^{2018}\right)=4-\log_a a^{2018}=-2014$

Chọn phương án C

Câu 33. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=\sqrt{\log x+1-1}$.

A. $\mathscr{D}=(10;+\infty)$. B. $\mathscr{D}=(9;+\infty)$. C. $\mathscr{D}=(-\infty;9)$. D. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases}x+1>0\\ \log x+1-1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>0\\ \log x+1\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>0\\ x+1\geq 10\end{cases}\Leftrightarrow x\geq 9.$

Vậy $\mathscr{D}=(9;+\infty)$.

Chọn phương án B

Câu 34. Tập xác định của hàm số $y=\log_2\dfrac{x+3}{2-x}$ là

(A) $D=\mathbb{R}\setminus\{-3;2\}$.
(B) $D=(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$.
(C) $D=[-3;2]$.
(D) $D=(-3;2)$.

Lời giải.

Hàm số $\log_2\dfrac{x+3}{2-x}$ có nghĩa khi $\dfrac{x+3}{2-x}>0\Leftrightarrow -3<x<2$.

Chọn phương án (D)

Câu 35. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y=\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$.
(B) $y=\log_{\frac{1}{3}}x$.
(C) $y=\log_{\frac{\pi}{4}}\left(x^2+1\right)$.
(D) $y=\left(\dfrac{2}{e}\right)^x$.

Lời giải.

Phương pháp

Hàm số $y=a^x$ với $0<a<1$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Cách giải:

Xét đáp án A có: $\dfrac{\pi}{3}\approx 1.047>0\Rightarrow y=\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$ đồng biến trên loại đáp án A.

Loại đáp án B vì TXĐ là:$(0;+\infty)$.

Xét đáp án C có: $y'=\dfrac{2x}{(x^2+1)\ln\dfrac{\pi}{4}}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x=0$

$\Rightarrow$ hàm số không thể nghịch biến trên $\mathbb{R}\Rightarrow$ loại đáp án C.

Chọn phương án (D)

Câu 36. Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}+\ln(x-1)$ là

(A) $\mathscr{D}=[1;2]$.
(B) $\mathscr{D}=(1;+\infty)$.
(C) $\mathscr{D}=(1;2)$.
(D) $\mathscr{D}=(-\infty;2)$.

Lời giải.

Phương pháp

Hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)}$ xác định $\Leftrightarrow f(x)>0$

Hàm số $y=\ln f(x)$ xác định $\Leftrightarrow f(x)>0$

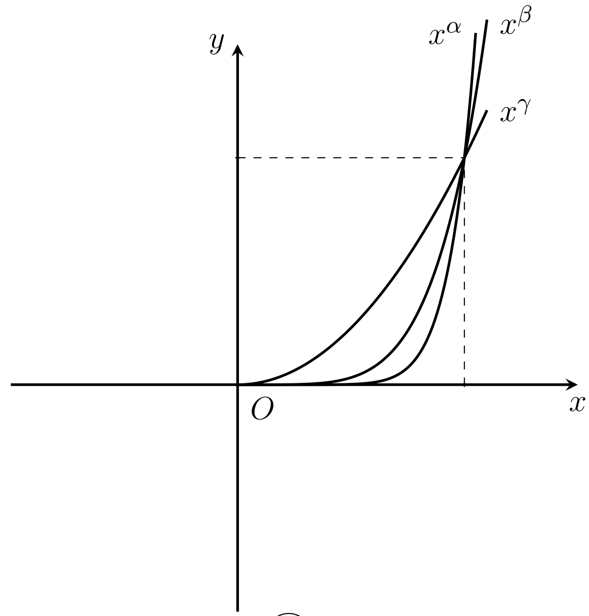
Cách giải:

Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow\begin{cases}2-x>0\\x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<2\\x>1\end{cases}$.

Chọn phương án (C)

Câu 37.

Cho đồ thị hàm số $y = x^{\alpha}$; $y = x^{\beta}$; $y = x^{\gamma}$ trên $(0; +\infty)$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A $\gamma < \beta < \alpha < 0$. **B** $0 < \gamma < \beta < \alpha < 1$. **C** $0 < \alpha < \beta < \gamma < 1$. **D** $1 < \gamma < \beta < \alpha$.

Lời giải.

Phương pháp

Sử dụng đơn điệu của hàm số mũ $y = a^x$: Với $0 < a < 1$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ với $a > 1$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Cách giải:

Ta có: $a < x < 1$ thì $x^{\alpha} < x^{\beta} < x^{\gamma} < x^2 \Rightarrow \alpha > \beta > \gamma > 1$

Với $x > 1$ thì : $a^1 < x^{\gamma} < x^{\beta} < x^{\alpha} \Rightarrow 1 < \gamma < \beta < \alpha$.

Chọn phương án D

Câu 38. Cho hàm số $y = \dfrac{2^x}{\ln 2} - 2x + 3$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$. **B** Hàm số có giá trị cực tiểu là $y = \dfrac{2}{\ln 2} + 1$.

C Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. **D** Hàm số đạt cực trị tại $x = 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2^x - 2 \Rightarrow \forall x \in (0; 1)\,, y' > 0$ nên hàm số nghịch biến trên $(0; 1)$.

Chọn phương án A

Câu 39. Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{1}{\log_2(5 - x)}$ là

A $(-\infty; 5) \setminus \{4\}$. **B** $(5; \infty)$. **C** $(-\infty, 5)$. **D** $[5; +\infty)$.

Lời giải.

— Điều kiện $\begin{cases} 5 - x > 0 \\ \log_2(5 - x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ 5 - x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x \neq 4 \end{cases}$.

— Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (-\infty; 5) \setminus \{4\}$.

Chọn phương án A

Câu 40. Hàm số $y=\ln\left(x^2+mx+1\right)$ xác định với mọi giá trị của x khi

A $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$. **B** $m>2$. **C** $-2<m<2$. **D** $m<2$.

Lời giải.

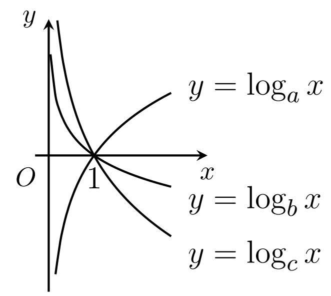
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow x^2+mx+1>0,\quad \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m^2-4<0 \Leftrightarrow -2<m<2$.

Chọn phương án C

C MỨC ĐỘ 3

Câu 41.

Cho a, b, c dương và khác 1. Các hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào dưới đây đúng?



A $b>c>a$.

B $a>b>c$.

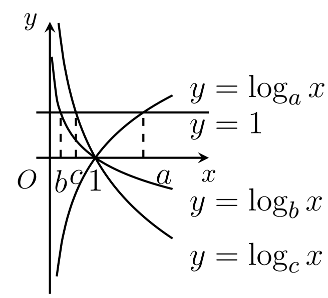
C $a>c>b$.

D $c>b>a$.

Lời giải.

Kẻ đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị của các hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$ lần lượt tại các điểm có hoành độ là a, b, c.

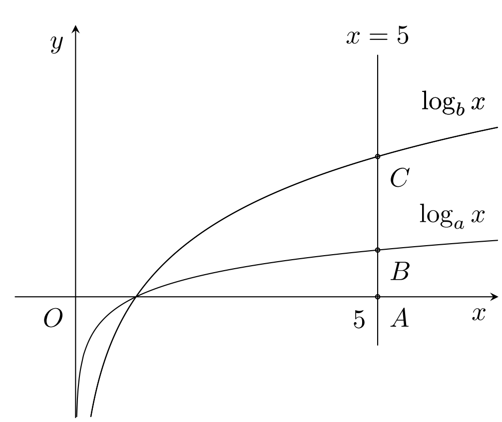
Từ đồ thị ta có $a>c>b$.



Chọn phương án C

Câu 42.

Cho các hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng $x=5$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ lần lượt tại A, B và C. Biết rằng $CB=2AB$. Mệnh đề nào sau đay là **đúng**?



A $a=5b$. **B** $a=b^2$. **C** $a=b^3$. **D** $a^3=b$.

Lời giải.

Ta có $A(5;0), B\left(5;\log_a 5\right), C\left(5;\log_b 5\right)$.

$CB=2AB \Leftrightarrow \log_b 5-\log_a 5=2\log_a 5 \Leftrightarrow \log_b 5=3\log_a 5 \Leftrightarrow \log_5 b=\dfrac{1}{3}\log_5 a \Leftrightarrow a=b^3$.

Chọn phương án C

Câu 43. Cho hàm số $f(x) = \ln \dfrac{x+1}{x+4}$.

Tính giá trị của biểu thức $P = f'(0) + f'(3) + f'(6) + \cdots + f'(2019)$.

A $\dfrac{1}{4}$. **B** $\dfrac{2024}{2023}$. **C** $\dfrac{2022}{2023}$. **D** $\dfrac{2020}{2023}$.

Lời giải.

Với $x \in [0; +\infty)$ ta có $x+1 > 0$ và $x+4 > 0$ nên $f(x) = \ln \dfrac{x+1}{x+4} = \ln(x+1) - \ln(x+4)$.

Từ đó $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+4}$. Do đó

$$\begin{aligned} P &= f'(0) + f'(3) + f'(6) + \ldots + f'(2019) \\ &= \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2020} - \frac{1}{2023}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2023} = \frac{2022}{2023}. \end{aligned}$$

Chọn phương án C

Câu 44. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x^2}{2} - mx + \ln(x-1)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A 4. **B** 1. **C** 3. **D** 2.

Lời giải.

Hàm số luôn xác định trên $(1; +\infty)$, có $y' = x - m + \dfrac{1}{x-1} = x + \dfrac{1}{x-1} - m$.

Để hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow x + \dfrac{1}{x-1} \geq m, \forall x \in (1; +\infty)$.

Với $x > 1$, áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$g(x) = x + \frac{1}{x-1} = x - 1 + \frac{1}{x-1} + 1 \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}} + 1 = 3.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$, (thỏa mãn).

Vậy $\min\limits_{(1;+\infty)} g(x) = 3$, hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi $m \leq 3$ mà $m \in \mathbb{Z}^+$, suy ra $m \in \{1; 2; 3\}$.

Chọn phương án C

Câu 45. Cho hàm số $f(x) = \ln 2018 - \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$.Tính $S = f'(1) + f'(2) + f'(3) + \cdots + f'(2017)$

A $\dfrac{4035}{2018}$. **B** 2017. **C** $\dfrac{2016}{2017}$. **D** $\dfrac{2017}{2018}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = -\dfrac{x}{x+1} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$.

Do đó $S = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2017} - \dfrac{1}{2018} = 1 - \dfrac{1}{2018} = \dfrac{2017}{2018}$.

Chọn phương án D

Câu 46. Hàm số $y = \log_2\left(4^x - 2^x + m\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi

A $m \geq \dfrac{1}{4}$. **B** $m > 0$. **C** $m < \dfrac{1}{4}$. **D** $m > \dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

— Điều kiện $4^x - 2^x + m > 0$.

— Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R} \Leftrightarrow 4^x - 2^x + m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m > -4^x + 2^x, \forall x \in \mathbb{R}$. (*)

— Đặt $t = 2^x$, $t > 0$. Khi đó $(*)$ trở thành $m > -t^2 + t, \forall t > 0 \Leftrightarrow \max \lim\limits_{(0;+\infty)} f(t)$ với $f(t) = -t^2 + t$, $t > 0$.

- Ta có $f'(t) = -2t + 1$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$.
- Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$+\infty$

- Từ bảng biến thiên ta thấy $\max \lim\limits_{(0;+\infty)} f(t) = \dfrac{1}{4}$ đạt được khi $t = \dfrac{1}{2}$.
- Vậy $m > \max\limits_{(0;+\infty)} f(t) \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{4}$.

Chọn phương án D

Câu 47. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{4x+7}{\log_{2018}\left(x^2 - 2x + m^2 - 6m + 10\right)}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ là:

A $(2;4) \setminus \{3\}$. **B** $[2;4] \setminus \{3\}$. **C** $[4;+\infty)$. **D** $(-\infty;2) \cup (4;+\infty)$.

Lời giải.

Phương pháp: +) Hàm số $y = \log_a f(x) (0 < a \neq 1)$ xác định $\Leftrightarrow f(x > 0)$.

+) Hàm số $\dfrac{1}{A}$ xác định $\Leftrightarrow A \neq 0$.

Cách giải: Hàm số $y = \dfrac{4x+7}{\log_{2018}\left(x^2 - 2x + m^2 - 6m + 10\right)}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\log_{2018}\left(x^2-2x+m^2-6m+10\right)\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}\\ x^2-2x+m^2-6m+10>0, \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2x+m^2-6m+10\neq 1, \forall x\in\mathbb{R}\\ x^2-2x+m^2-6m+10>0, \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2+(m-3)^2\neq 1, \forall x\in\mathbb{R}\\ (x-1)^2+(m-3)^2>0, \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(m-3)^2\neq 1-(x-1)^2, \forall x\in\mathbb{R}\\ (x-1)^2+(m-3)^2>0, \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(m-3)^2>1\\ m-3\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>4\\ m<2\end{array}\right.\\ m\neq 3\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m>4\\ m<2\end{array}\right.$$

Chọn phương án D

Câu 48. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $y = \ln(x^2+2) - mx + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A 2019. **B** 2020. **C** 4038. **D** 1009.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{2x}{x^2+2} - m$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \dfrac{2x}{x^2+2} - m \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow m \leq \dfrac{2x}{x^2+2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Xét $h(x) = \dfrac{2x}{x^2+2}$ với $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $h'(x) = \dfrac{4-2x^2}{(x^2+2)^2}$.

Cho $h'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}x=\sqrt{2}\\ x=-\sqrt{2}.\end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0

Suy ra $m \leq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, m là số nguyên trong đoạn $[-2019; 2019]$ nên có 2019 số.

Chọn phương án A

Câu 49. Tìm m của hàm số $y = \dfrac{5^{-x}+2}{5^{-x}-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

A $m < -2$. **B** $m > -2$. **C** $m \leq -2$. **D** $-2 < m \leq 1$.

Lời giải.

$y = \dfrac{5^{-x}+2}{5^{-x}-m} \Rightarrow y' = \dfrac{-5^{-x}\ln 5\left(5^{-x}-m\right)+5^{-x}\ln 5\left(5^{-x}+2\right)}{\left(5^{-x}-m\right)^2} = \dfrac{5^{-x}\ln 5(2+m)}{\left(5^{-x}-m\right)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m+2>0 \\ 5^{-x}-m \neq 0, \forall x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-2 \\ 5^{-x} \neq m, \forall x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-2 \\ m \leq 1 \end{cases}$$

Chọn phương án D

Câu 50. Cho hàm số $y = \ln \dfrac{1}{x+1}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A $xy'+1 = -e^y$. **B** $xy'+1 = e^y$. **C** $xy'-1 = e^y$. **D** $xy'-1 = e^y$.

Lời giải.

Ta có $e^y = e^{\ln \frac{1}{x+1}} = \dfrac{1}{x+1}$.

$y' = -\dfrac{x+1}{(x+1)^2} = -\dfrac{1}{x+1} \Rightarrow xy'+1 = -y' \Rightarrow xy'+1 = \dfrac{1}{x+1} = e^y$

Chọn phương án B

D MỨC ĐỘ 4

Câu 51. Cho a, b là các số thực và hàm số $f(x) = a\log^{2019}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+b\sin x\cos 2018x+6$. Biết $f\left(2018^{\ln 2019}\right) = 10$. Tính $P = f\left(-2019^{\ln 2018}\right)$.

A $P = 4$. **B** $P = 2$. **C** $P = -2$. **D** $P = 10$.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = f(x)-6 = a\log^{2019}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+b\sin x\cos 2018x$.

Do $\sqrt{x^2+1}+x > |x|+x \geq 0$ nên hàm số $g(x)$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathscr{D} \Rightarrow -x \in \mathscr{D}$. Lại có

$$\begin{aligned} g(-x) &= a\log^{2019}\left(\sqrt{(-x)^2+1}-x\right)+b\sin(-x)\cos(-2018x) \\ &= a\log^{2019}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)-b\sin x\cos 2018x \\ &= a\log^{2019}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)-b\sin x\cos 2018x \\ &= -a\log^{2019}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)-b\sin x\cos 2018x = -g(x). \end{aligned}$$

Suy ra $g(x)$ là hàm số lẻ.

Lại có $2018^{\ln 2019} = 2019^{\ln 2018}$ và $f\left(2018^{\ln 2019}\right) = 10$ nên $g\left(2018^{\ln 2019}\right) = 4$ và $g\left(-2019^{\ln 2018}\right) = -g\left(2018^{\ln 2019}\right) = -4$. Từ đó suy ra $f\left(-2019^{\ln 2018}\right) = 2$.

Chọn phương án C

Câu 52. Cho biểu thức $f(x) = \dfrac{1}{2018^x+\sqrt{2018}}$. Tính tổng sau

$$S = \sqrt{2018}\left[f(-2017)+f(-2016)+\cdots+f(0)+f(1)+\cdots+f(2018)\right]$$

Ⓐ $S = 2018$. Ⓑ $S = \dfrac{1}{2018}$. Ⓒ $S = \sqrt{2018}$. Ⓓ $S = \dfrac{1}{\sqrt{2018}}$.

Lời giải.

a) Trước hết ta chứng minh với $a + b = 1$ thì $f(a) + f(b) = \dfrac{1}{\sqrt{2018}}$. Thật vậy

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) =& \frac{1}{2018^a + \sqrt{2018}} + \frac{1}{2018^b + \sqrt{2018}} \\ =& \frac{1}{\sqrt{2018}}\left(\frac{1}{2018^{a-\frac{1}{2}} + 1} + \frac{1}{2018^{b-\frac{1}{2}} + 1}\right) \\ =& \frac{1}{\sqrt{2018}}\left(\frac{1}{2018^{a-\frac{1}{2}} + 1} + \frac{1}{2018^{1-a-\frac{1}{2}} + 1}\right) \\ =& \frac{1}{\sqrt{2018}}\left(\frac{1}{2018^{a-\frac{1}{2}} + 1} + \frac{2018^{a-\frac{1}{2}}}{2018^{a-\frac{1}{2}} + 1}\right) \\ =& \frac{1}{\sqrt{2018}}. \end{aligned}$$

Áp dụng tính chất trên ta có

$$\begin{aligned} f(-2017) + f(2018) &= \frac{1}{\sqrt{2018}} \\ f(-2016) + f(2016) &= \frac{1}{\sqrt{2018}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ f(0) + f(1) &= \frac{1}{\sqrt{2018}} \end{aligned}$$

Vậy $S = \sqrt{2018} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2018}} \cdot 2018 = 2018$.

Chọn phương án A

Câu 53. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\ln\left(\dfrac{1-2x}{x+y}\right) = 3x + y - 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{xy}} + 1$

Ⓐ $P_{\min} = 8$. Ⓑ $P_{\min} = 16$. Ⓒ $P_{\min} = 9$. Ⓓ $P_{\min} = 2$.

Lời giải.

$\ln\left(\dfrac{1-2x}{x+y}\right) = 3x + y - 1$ xác định $\Leftrightarrow \dfrac{1-2x}{x+y} > 0$.

Do $x, y > 0$ nên $1 - 2x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{1}{2}$

Khi đó: $\ln\left(\dfrac{1-2x}{x+y}\right) = 3x + y - 1$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \ln(1-2x) - \ln(x+y) = (x+y) - (1-2x) \\ &\Leftrightarrow \ln(1-2x) + (1-2x) = \ln(x+y) + (x+y) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \ln t + t$ với $t > 0$
Hàm số $f(t)$ xác định và liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$
$f'(t) = \dfrac{1}{t} + 1 > 0; \forall t > 0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

$$\Rightarrow f(1-2x) = f(x+y)$$
$$\Leftrightarrow 1 - 2x = x + y \Leftrightarrow y = 1 - 3x > 0$$

Do đó: $P = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x(1-3x)}} + 1 \geq \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{1-2x} + 1$ (Dấu bằng xảy ra khi $x = 1 - 3x \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$)
Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{1-2x} + 1; x \in \left(0; \dfrac{1}{3}\right)$
Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left(0; \dfrac{1}{3}\right)$
$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{(1-2x)^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{(1-2x)^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 = (1-2x)^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	9

Vậy $P_{\min} = 8$ tại $x = \dfrac{1}{4}$

Chọn phương án (A)

Câu 54. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_3 \dfrac{2x+y+1}{x+y} = x + 2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{\sqrt{y}}$.

(A) $3 + \sqrt{3}$. **(B)** 4. **(C)** $3 + 2\sqrt{3}$. **(D)** 6.

Lời giải.

Ta có:

$$\log_3 \frac{2x+y+1}{x+y} = x + 2y$$
$$\Leftrightarrow \log_3(2x+y+1) - \log_3(x+y) = 3(x+y) - (2x+y+1) + 1$$
$$\Leftrightarrow \log_3(2x+y+1) + (2x+y+1) = \log_3[3(x+y)] + 3(x+y).\ (1)$$

Xét hàm số $y = f(a) = \log_3 a + a$ trên $(0; +\infty)$.
Dễ thấy hàm số $y = f(a)$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.
Do đó, $(1) \Leftrightarrow f(2x + y + 1) = f(3(x + y)) \Leftrightarrow 2x + y + 1 = 3(x + y) \Leftrightarrow x + 2y = 1$.
Ta có $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{\sqrt{y}} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{2}\sqrt{y}}$
$\geq \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{4} + y}{2}} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{4} + y} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{4} + y}$
$\geq \dfrac{(1 + 1 + 1)^2}{x + \dfrac{1}{4} + y + \dfrac{1}{4} + y} = \dfrac{9}{x + 2y + \dfrac{1}{2}} = 6$.
Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = \dfrac{1}{2}$; $y = \dfrac{1}{4}$.
Chọn phương án D

Câu 55. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2018^x}{2018^x + \sqrt{2018}}$. Tính $S = f\left(\dfrac{1}{2017}\right) + f\left(\dfrac{2}{2017}\right) + \cdots + f\left(\dfrac{2016}{2017}\right)$.

A $S = 2017$. **B** $S = 1008$. **C** $S = \sqrt{2016}$. **D** $S = 1006$.

Lời giải.

Xét hai số thực dương a và b sao cho $a + b = 1$. Ta có

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) &= \frac{2018^a}{2018^a + \sqrt{2018}} + \frac{20018^b}{2018^b + \sqrt{2018}} \\ &= \frac{2 \cdot 2018^a 2018^b + \sqrt{2018}\left(2018^a + 2018^b\right)}{2018^a 2018^b + \sqrt{2018}\left(2018^a + 2018^b\right) + 2018} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} S &= f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + \cdots + f\left(\frac{2016}{2017}\right) \\ &= \left[f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2016}{2017}\right)\right] + \cdots + \left[f\left(\frac{1008}{2017}\right) + f\left(\frac{1009}{2017}\right)\right] = 1008. \end{aligned}$$

Chọn phương án B

Câu 56. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $a > 0$ thỏa mãn $\left(2^a + \dfrac{1}{2^a}\right)^{2017} \leq \left(2^{2017} + \dfrac{1}{2^{2017}}\right)^a$.

A $0 < a < 1$. **B** $1 < a < 2017$. **C** $0 < a \leq 2017$. **D** $a \geq 2017$.

Lời giải.

Xét hàm $f(x) = \dfrac{\ln(2^x + 2^{-x})}{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(2^x - 2^{-x})\ln 2^x - (2^x + 2^{-x})\ln(2^x + 2^{-x})}{x^2(2^x + 2^{-x})}$.
Vì $\ln 2^x < \ln(2^x + 2^{-x})$ và $0 < 2^x - 2^{-x} < 2^x + 2^{-x}$ nên $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ nghịch biến.

Do vậy

$$\begin{aligned}&\left(2^a+\frac{1}{2^a}\right)^{2017}\le\left(2^{2017}+\frac{1}{2^{2017}}\right)^a\\ \Leftrightarrow&2017\ln(2^a+2^{-a})\le a\ln(2^{2017}+2^{-2017})\\ \Leftrightarrow&\frac{\ln(2^a+2^{-a})}{a}\le\frac{\ln(2^{2017}+2^{-2017})}{2017}\\ \Leftrightarrow&a\ge 2017.\end{aligned}$$

Chọn phương án D

Câu 57. Cho a,b,c là các số thực thuộc đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\log_2^3 a+\log_2^3 b+\log_2^3 c\le 1$. Khi biểu thức $P=a^3+b^3+c^3-3\left(\log_2 a^a+\log_2 b^b+\log_2 c^c\right)$ đạt giá trị lớn nhất thì tổng $a+b+c$ là

A. 3. B. $3\cdot 2^{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}$. C. 4. D. 6.

Lời giải.

Đặt $x=\log_2 a,\ y=\log_2 b,\ z=\log_2 c$.

Ta có $\log_2^3 a+\log_2^3 b+\log_2^3 c\le 1\Rightarrow x^3+y^3+z^3\le 1; 0\le x,y,z\le 1$.

Biểu thức $P=a^3+b^3+c^3-3(ax+by+cz)$.

Xét hàm số $f(t)=t-\log_2 t$ với $t\in[1;2]$. $f'(t)=1-\dfrac{1}{t\ln 2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t_0=\dfrac{1}{\ln 2}$.

Suy ra $f(t)\le\max\{f(1),f(2),f(t_0)\}=1,\ x\in[1;2]$.

Do đó, $a-x-1\le 0\Rightarrow a^3-3ax-x^3-1=(a-x-1)\left(a^2+x^2+1+a+ax-x\right)\le 0$.

Suy ra $a^3-3ax\le x^3+1$.

Biểu thức $P=a^3+b^3+c^3-3(ax+by+cz)\le x^3+y^3+z^3+3\le 4, P_{\max}=4$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hai trong ba số x, y, z bằng 0 và số còn lại bằng 1. Vậy $a+b+c=4$.

Chọn phương án C

Câu 58. Cho biểu thức $f(x)=\dfrac{1}{2018^x+\sqrt{2018}}$. Tính tổng sau

$$S=\sqrt{2018}\left[f(-2017)+f(-2016)+\cdots+f(0)+f(1)+\cdots+f(2018)\right]$$

A. $S=\sqrt{2018}$. B. $S=\dfrac{1}{2018}$. C. $S=2018$. D. $S=\dfrac{1}{\sqrt{2018}}$.

Lời giải.

Xét hai số $a,b\in\mathbb{R}$ sao cho $a+b=1\Leftrightarrow a-1=-b$.

$$\begin{aligned}f(a)+f(b)&=\frac{1}{2018^a+\sqrt{2018}}+\frac{1}{2018^b+\sqrt{2018}}=\frac{1}{2018\cdot 2018^{a-1}+\sqrt{2018}}+\frac{1}{2018^b+\sqrt{2018}}\\&=\frac{1}{2018\cdot 2018^{-b}+\sqrt{2018}}+\frac{1}{2018^b+\sqrt{2018}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2018}(\sqrt{2018}\cdot 2018^{-b}+1)}+\frac{1}{2018^b+\sqrt{2018}}\\&=\frac{2018^b}{\sqrt{2018}(\sqrt{2018}+2018^b)}+\frac{1}{2018^b+\sqrt{2018}}=\frac{2018^b+\sqrt{2018}}{\sqrt{2018}(\sqrt{2018}+2018^b)}=\frac{1}{\sqrt{2018}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{2018}\left[f(-2017)+f(-2016)+\cdots+f(0)+f(1)+\cdots+f(2018)\right] \\ &= \sqrt{2018}\left[f(-2017)+f(2018)+f(-2016)+f(2017)+\cdots+f(0)+f(1)\right] = \sqrt{2018}\cdot\frac{2018}{\sqrt{2018}} = 2018. \end{aligned}$$

Chọn phương án C

Câu 59. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\log_3\left(-x^2+mx+2m+1\right)$ xác định với mọi $x\in(1;2)$.

A $m\ge -\dfrac{1}{3}$. **B** $m\ge\dfrac{3}{4}$. **C** $m>\dfrac{3}{4}$. **D** $m<-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Hàm số xác định với mọi $x\in(1;2)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow\ -x^2+mx+2m+1>0, \forall x\in(1;2) \\ &\Leftrightarrow\ m>\frac{x^2-1}{x+2}=g(x), \forall x\in(1;2) \end{aligned}$$

Xét $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+2}=x-2+\dfrac{3}{x+2}\Rightarrow g'(x)=1-\dfrac{3}{(x+2)^2}>0$, $\forall x\in(1;2)$.

Do $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=\dfrac{3}{4}$. Vậy $m\ge\dfrac{3}{4}$ là giá trị cần tìm.

Chọn phương án B

Câu 60. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2^x}{2^x+2}$. Khi đó tổng $f(0)+f\left(\dfrac{1}{10}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{19}{10}\right)$ có giá trị bằng

A $\dfrac{59}{6}$. **B** 10. **C** $\dfrac{19}{2}$. **D** $\dfrac{28}{3}$.

Lời giải.

Với $a+b=2$ ta có: $f(a)+f(b)=f(a)+f(2-a)=\dfrac{2^a}{2^a+2}+\dfrac{2^{2-a}}{2^{2-a}+2}=\dfrac{2^a}{2^a+2}+\dfrac{2}{2^a+2}=1$.

Suy ra: $f(0)+f(1)+\left[f\left(\dfrac{1}{10}\right)+f\left(\dfrac{19}{10}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\dfrac{9}{10}\right)+f\left(\dfrac{11}{10}\right)\right]=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{2+2}+9\cdot 1=\dfrac{59}{6}$.

Chọn phương án A

BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. D	3. B	4. D	5. C	6. A	7. A	8. C	9. C	10. D
11. D	12. C	13. C	14. C	15. C	16. B	17. A	18. B	19. A	20. B
21. C	22. A	23. A	24. C	25. D	26. C	27. B	28. D	29. C	30. A
31. C	32. C	33. B	34. D	35. D	36. C	37. D	38. A	39. A	40. C
41. C	42. C	43. C	44. C	45. D	46. D	47. D	48. A	49. D	50. B
51. C	52. A	53. A	54. D	55. B	56. D	57. C	58. C	59. B	60. A

DẠNG 6. NGUYÊN HÀM

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

(A) $F'(x) = -f(x), \forall x \in K$.
(B) $f'(x) = F(x), \forall x \in K$.
(C) $F'(x) = f(x), \forall x \in K$.
(D) $f'(x) = -F(x), \forall x \in K$.

Lời giải.

Theo định nghĩa thì hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in K$.

Chọn phương án (C)

Câu 1. Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{5x+4}$.

(A) $F(x) = \dfrac{1}{\ln 5} \ln|5x+4| + C$.
(B) $F(x) = \ln|5x+4| + C$.
(C) $F(x) = \dfrac{1}{5} \ln|5x+4| + C$.
(D) $F(x) = \dfrac{1}{5} \ln(5x+4) + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \frac{1}{5x+4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\ln|5x+4| + C$.

Chọn phương án (C)

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = 2x + \mathrm{e}^x$. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2019$.

(A) $F(x) = \mathrm{e}^x - 2019$.
(B) $F(x) = x^2 + \mathrm{e}^x - 2018$.
(C) $F(x) = x^2 + \mathrm{e}^x + 2017$.
(D) $F(x) = x^2 + \mathrm{e}^x + 2018$.

Lời giải.

$F(x) = \displaystyle\int (2x + \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = x^2 + \mathrm{e}^x + C$.

Do $F(0) = 2019$ nên $0^2 + \mathrm{e}^0 + C = 2019 \Leftrightarrow C = 2018$.

Vậy $F(x) = x^2 + \mathrm{e}^x + 2018$.

Chọn phương án (D)

Câu 3. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - 1$ là

(A) $x^3 + C$.
(B) $\dfrac{x^3}{3} + x + C$.
(C) $6x + C$.
(D) $x^3 - x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = \int (3x^2 - 1)\,\mathrm{d}x = x^3 - x + C$.

Chọn phương án (D)

Câu 4. Hàm số $f(x) = \cos(4x+7)$ có một nguyên hàm là

(A) $-\sin(4x+7) + x$.
(B) $\dfrac{1}{4}\sin(4x+7) - 3$.
(C) $\sin(4x+7) - 1$.
(D) $-\dfrac{1}{4}\sin(4x+7) + 3$.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = \cos(4x+7)$ có một nguyên hàm là $\dfrac{1}{4}\sin(4x+7) - 3$.

Chọn phương án (B)

Câu 5. Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?

(A) $\displaystyle\int [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)dx - \int g(x)\mathrm{d}x$.

(B) $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$.

(C) $\displaystyle\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$.

(D) $\displaystyle\int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Khẳng định A, B, D đúng theo tính chất của nguyên hàm.

Khẳng định C chỉ đúng khi $k \neq 0$.

Chọn phương án (C)

Câu 6. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \cos x$ là

(A) $2x - \sin x + C$.

(B) $\dfrac{1}{3}x^3 + \sin x + C$.

(C) $\dfrac{1}{3}x^3 - \sin x + C$.

(D) $x^3 + \sin x + C$.

Lời giải.

Ta có: $\displaystyle\int (x^2 + \cos x)dx = \frac{1}{3}x^3 + \sin x + C$.

Chọn phương án (B)

Câu 7. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x^2$ là

(A) $\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} + C$.

(B) $x^4 + x^3$.

(C) $3x^2 + 2x$.

(D) $\dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{4}x^3$.

Lời giải.

$$\int \left(x^3 + x^2\right)\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C.$$

Chọn phương án (A)

Câu 8. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau?

(A) $\displaystyle\int 2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 2\left(\mathrm{e}^x + C\right)$.

(B) $\displaystyle\int x^3\,\mathrm{d}x = \frac{x^4 + C}{4}$.

(C) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C$.

(D) $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$ nên mệnh đề ở phương án C sai.

Chọn phương án (C)

Câu 9. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^{2x}$?

(A) $\displaystyle\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x = 2.5^{2x}\ln 5 + C$.

(B) $\displaystyle\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x = 2.\frac{5^{2x}}{\ln 5} + C$.

(C) $\displaystyle\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{25^x}{2\ln 5} + C$.

(D) $\displaystyle\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{25^{x+1}}{x+1} + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.\frac{5^{2x}}{\ln 5} + C = \frac{25^x}{2\ln 5} + C$.

Chọn phương án C

Câu 10. Hàm số có đạo hàm bằng $2x+\dfrac{1}{x^2}$ là

A. $y=\dfrac{2x^3-2}{x^3}$. B. $y=\dfrac{x^3+1}{x}$. C. $y=\dfrac{3x^3+3x}{x}$. D. $y=\dfrac{x^3+5x-1}{x}$.

Lời giải.

Ta xét $\displaystyle\int\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=x^2-\frac{1}{x}+C=\frac{x^3+Cx-1}{x}$.

Chọn $C=5$ ta được hàm số thoả yêu cầu bài toán là $y=\dfrac{x^3+5x-1}{x}$.

Chọn phương án D

Câu 11. Công thức nào sau đây là **sai**?

A. $\displaystyle\int x^3dx=\frac{1}{4}x^4+C$. B. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\cot x+C$.

C. $\displaystyle\int\sin x dx=-\cos x+C$. D. $\displaystyle\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng bảng nguyên hàm cơ bản.

Cách giải: Ta có $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\cot x+C$ do đó đáp án B sai.

Chọn phương án B

Câu 12. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x^3+x-1$ là:

A. x^4+x^2+x+C. B. $12x^2+1+C$. C. $x^4+\dfrac{1}{2}x^2-x+C$. D. $x^4-\dfrac{1}{2}x^2-x+C$.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng nguyên hàm cơ bản $\displaystyle\int x^n\,\mathrm{d}x=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$.

Cách giải: $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=4\cdot\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-x+C=x^4+\frac{1}{2}\cdot x^2-x+C$.

Chọn phương án C

Câu 13. Họ các nguyên hàm của hàm số $y=\cos x+x$ là

A. $\sin x+\dfrac{1}{2}x^2+C$. B. $\sin x+x^2+C$. C. $-\sin x+\dfrac{1}{2}x^2+C$. D. $-\sin x+x^2+C$.

Lời giải.

Ta có $F(x)=\displaystyle\int(\cos x+x)\,\mathrm{d}x=\sin x+\frac{1}{2}x^2+C$.

Chọn phương án A

Câu 14. Nếu $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\mathrm{e}^x+C$ thì $f(x)$ bằng

A. $f(x)=3x^2+\mathrm{e}^x$. B. $f(x)=\dfrac{x^4}{3}+\mathrm{e}^x$. C. $f(x)=x^2+\mathrm{e}^x$. D. $f(x)=\dfrac{x^4}{12}+\mathrm{e}^x$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\mathrm{e}^x+C\Rightarrow f(x)=x^2+\mathrm{e}^x$.

Chọn phương án C

Câu 15. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^{2019}$, $(x \in \mathbb{R})$ là hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

(A) $F(x) = 2019x^{2018} + C,\ (C \in \mathbb{R})$.
(B) $F(x) = x^{2020} + C,\ (C \in \mathbb{R})$.
(C) $F(x) = \dfrac{x^{2020}}{2020} + C,\ (C \in \mathbb{R})$.
(D) $F(x) = 2018x^{2019} + C,\ (C \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\displaystyle\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ \ (n \neq -1)$, ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int x^{2019}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{2020}}{2020} + C$.

Chọn phương án (C)

Câu 16. Hàm số $F(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

(A) $f(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$.
(B) $f(x) = x^2\mathrm{e}^{x^2}$.
(C) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$.
(D) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = (F(x))' = \left(e^{x^2}\right)' = 2xe^{x^2}$.

Chọn phương án (A)

Câu 17. Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

(A) $\displaystyle\int \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \mathrm{d}x = \frac{\int f(x)\,\mathrm{d}x}{\int g(x)\,\mathrm{d}x}, (g(x) \neq 0, \forall x \in \mathrm{R})$.
(B) $\displaystyle\int f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x - \int g(x)\,\mathrm{d}x$.
(C) $\displaystyle\int k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x, (k \neq 0, k \in \mathbb{R})$.
(D) $\displaystyle\int f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo tính chất của nguyên hàm ta có mệnh đề sai là $\displaystyle\int \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \mathrm{d}x = \frac{\int f(x)\,\mathrm{d}x}{\int g(x)\,\mathrm{d}x}, (g(x) \neq 0, \forall x \in \mathrm{R})$.

Chọn phương án (A)

Câu 18. Tìm tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{-x}$.

(A) $\dfrac{3^{-x}}{\ln 3} + C$.
(B) $-\dfrac{3^{-x}}{\ln 3} + C$.
(C) $-3^{-x} + C$.
(D) $-3^{-x}\ln 3 + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int 3^{-x}\mathrm{d}x = -\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$.

Chọn phương án (B)

Câu 19. Tìm tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 5x$.

(A) $\dfrac{1}{5}\cos 5x + C$.
(B) $\cos 5x + C$.
(C) $-\cos 5x + C$.
(D) $-\dfrac{1}{5}\cos 5x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \sin 5x\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \sin 5x\mathrm{d}(5x) = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$.

Chọn phương án (D)

Câu 20. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 1$ là

(A) $F(x) = 2x^2 + x$. (B) $F(x) = 2$. (C) $F(x) = C$. (D) $F(x) = x^2 + x + C$.

Lời giải.

Ta có

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (2x+1)\,\mathrm{d}x = x^2 + x + C.$$

Chọn phương án (D)

B MỨC ĐỘ 2

Câu 21. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x + x$ là

(A) $\mathrm{e}^x + x^2 + C$. (B) $\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^2 + C$. (C) $\frac{1}{x+1}\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^2 + C$. (D) $\mathrm{e}^x + 1 + C$.

Lời giải.

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(\mathrm{e}^x + x\right)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^2 + C$

Chọn phương án (B)

Câu 22. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x(1 + \ln x)$ là

(A) $2x^2 \ln x + 3x^2$. (B) $2x^2 \ln x + x^2$. (C) $2x^2 \ln x + 3x^2 + C$. (D) $2x^2 \ln x + x^2 + C$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\int 4x(1+\ln x)\,\mathrm{d}x &= \int (1+\ln x)\,\mathrm{d}(2x^2)\\ &= 2x^2(1+\ln x) - \int 2x^2\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= 2x^2(1+\ln x) - x^2 + C\\ &= 2x^2\ln x + x^2 + C.\end{aligned}$$

Chọn phương án (D)

Câu 23. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + \sin x$ là

(A) $x^2 + \cos x + C$. (B) $x^2 - \cos x + C$. (C) $\frac{x^2}{2} - \cos x + C$. (D) $\frac{x^2}{2} + \cos x + C$.

Lời giải.

Cách 1: Dựa vào bảng nguyên hàm các hàm số cơ bản ta có $\int (x + \sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - \cos x + C$.

Cách 2: Lấy đạo hàm các hàm số trên ta được kết quả.

Chọn phương án (C)

Câu 24. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ và $F(0) = \frac{201}{2}$. Giá trị $F\left(\frac{1}{2}\right)$ là

(A) $\frac{1}{2}\mathrm{e} + 200$. (B) $2\mathrm{e} + 200$. (C) $\frac{1}{2}\mathrm{e} + 50$. (D) $\frac{1}{2}\mathrm{e} + 100$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C$.

Theo đề bài ta có $F(0) = \frac{201}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\mathrm{e}^0 + C = \frac{201}{2} \Leftrightarrow C = 100$.

Vậy $F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + 100 \Rightarrow F(2) = \frac{1}{2}\mathrm{e} + 100$.

Chọn phương án (D)

Câu 25. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) \cdot g(x)$ biết $F(1) = 3$, biết $\int f(x)\mathrm{d}x = x + 2018$ và $\int g(x)\mathrm{d}x = x^2 + 2019$.

(A) $F(x) = x^3 + 1$. (B) $F(x) = x^3 + 3$. (C) $F(x) = x^2 + 2$. (D) $F(x) = x^2 + 3$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = x + 2018 \Rightarrow f(x) = (x + 2018)' = 1$

và $\int g(x)\mathrm{d}x = x^2 + 2019 \Rightarrow g(x) = (x^2 + 2019)' = 2x$.

$\Rightarrow f(x) \cdot g(x) = 2x \Rightarrow F(x) = \int f(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x = x^2 + C$.

Mặt khác $F(1) = 3 \Rightarrow 1^2 + C = 3 \Rightarrow C = 2$.

Vậy $F(x) = x^2 + 2$.

Chọn phương án (C)

Câu 26. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x\left(1 + 3x^3\right)$ là

(A) $x^2\left(1 + \dfrac{3}{2}x^2\right) + C$. (B) $x^2\left(1 + \dfrac{6x^3}{5}\right) + C$. (C) $2x\left(x + \dfrac{3}{4}x^4\right) + C$. (D) $x^2\left(x + \dfrac{3}{4}x^3\right) + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int 2x\left(1 + 3x^3\right)\,\mathrm{d}x = \int\left(2x + 6x^4\right)\,\mathrm{d}x = x^2 + \dfrac{6x^5}{5} + C = x^2\left(1 + \dfrac{6x^3}{5}\right) + C$.

Chọn phương án (B)

Câu 27. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^x$ là

(A) $(2x-1)\mathrm{e}^x + C$. (B) $(2x+3)\mathrm{e}^x + C$. (C) $2x\mathrm{e}^x + C$. (D) $(2x-2)\mathrm{e}^x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (2x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = 2x+1 \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^x. \end{cases}$

$\Rightarrow \int (2x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (2x+1)\mathrm{e}^x - \int 2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (2x+1)\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + C = (2x-1)\mathrm{e}^x + C$.

Chọn phương án (A)

Câu 28. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$.

(A) $\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^{2x} + C$. (B) $\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2x} + C$.

(C) $\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^{2x+1}}{2x+1} + C$. (D) $\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C$.

Lời giải.

Ta có $\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}(2x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C$.

Chọn phương án (D)

Câu 29. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + \cos x$. Tìm khẳng định đúng.

(A) $F(x) = \mathrm{e}^{-x} + \sin x + 2019$.
(B) $F(x) = \mathrm{e}^{-x} + \cos x + 2019$.
(C) $F(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \sin x + 2019$.
(D) $F(x) = -\mathrm{e}^{-x} - \cos x + 2019$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\int (\mathrm{e}^{-x} + \cos x)\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x} + \sin x + C$, với C là hằng số

Cho $C = 2019$ ta có $F(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \sin x + 2019$.

Chọn phương án (C)

Câu 30. Nếu $f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\sqrt{2x-1}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x) = \dfrac{10x^2 - 7x + 2}{\sqrt{2x-1}}$ trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$ thì $a + b + c$ có giá trị bằng

(A) 3.
(B) 0.
(C) 2.
(D) 4.

Lời giải.

Ta có: $g(x) = f'(x) = (2ax + b)\sqrt{2x-1} + \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}\left(ax^2 + bx + c\right) = \dfrac{(2ax+b)(2x-1) + \left(ax^2 + bx + c\right)}{\sqrt{2x-1}}$.

$= \dfrac{5ax^2 + (3b - 2a)x + c - b}{\sqrt{2x-1}}$.

Theo bài ra: $g(x) = \dfrac{10x^2 - 7x + 2}{\sqrt{2x-1}}$ nên

$$\frac{5ax^2 + (3b-2a)x + c - b}{\sqrt{2x-1}} = \frac{10x^2 - 7x + 2}{\sqrt{2x-1}} \Rightarrow \begin{cases} 5a = 10 \\ 3b - 2a = -7 \\ c - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 1. \end{cases}$$

Vậy $a + b + c = 2$.

Chọn phương án (C)

Câu 31. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ thỏa mãn $F(\mathrm{e}+1) = 4$. Tìm $F(x)$.

(A) $F(x) = 2\ln(x-1) + 2$.
(B) $F(x) = \ln(x-1) + 3$.
(C) $F(x) = 4\ln(x-1)$.
(D) $F(x) = \ln(x-1) - 3$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \int \dfrac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \ln(x-1) + C$.

$F(\mathrm{e}+1) = 4 \Rightarrow \ln \mathrm{e} + C = 4 \Rightarrow C = 3$.

Vậy $F(x) = \ln(x-1) + 3$.

Chọn phương án (B)

Câu 32. Họ nguyên hàm của hàm số $y = 3x(x + \cos x)$ là

(A) $x^3 + 3(x\sin x + \cos x) + C$.
(B) $x^3 - 3(x\sin x + \cos x) + C$.
(C) $x^3 + 3(x\sin x - \cos x) + C$.
(D) $x^3 - 3(x\sin x - \cos x) + C$.

Lời giải.

Ta có $I = \int 3x(x + \cos x)\mathrm{d}x = \int \left(3x^2 + 3x\cos x\right)\mathrm{d}x = x^3 + 3\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

Tính $J = \int x\cos x \mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} x = u \\ \cos x \mathrm{d}x = \mathrm{d}v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ \sin x = v \end{cases}$.

$\Rightarrow J = x\sin x - \int \sin x \mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C$.

Vậy $I = x^3 + 3(x\sin x + \cos x) + C$.

Chọn phương án (A)

Câu 33. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3^x + \dfrac{1}{x}$.

(A) $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3^x}{\ln 3} - \dfrac{1}{x^2} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

(B) $\dfrac{x^3}{3} - 3^x + \dfrac{1}{x^2} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

(C) $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3^x}{\ln 3} - \ln|x| + C$, $C \in \mathbb{R}$.

(D) $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $\int \left(x^2 - 3^x + \dfrac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3^x}{\ln 3} - \dfrac{1}{x^2} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Chọn phương án (D)

Câu 34. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{2}{4x-3}$.

(A) $\int \dfrac{2}{4x-3} \mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}\ln|4x-3| + C$.

(B) $\int \dfrac{2}{4x-3} \mathrm{d}x = 2\ln\left|2x - \dfrac{3}{2}\right| + C$.

(C) $\int \dfrac{2}{4x-3} \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\ln\left|2x - \dfrac{3}{2}\right| + C$.

(D) $\int \dfrac{2}{4x-3} \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\ln\left(2x - \dfrac{3}{2}\right) + C$.

Lời giải.

Ta có $\int \dfrac{2}{4x-3} \mathrm{d}x = \int \dfrac{1}{2x - \frac{3}{2}} \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\ln\left|2x - \dfrac{3}{2}\right| + C$.

Chọn phương án (C)

Câu 35. Hàm số $F(x) = x^2\ln(\sin x - \cos x)$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

(A) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sin x - \cos x}$.

(B) $f(x) = 2x\ln(\sin x - \cos x) + \dfrac{x^2}{\sin x - \cos x}$.

(C) $f(x) = 2x\ln(\sin x - \cos x) + \dfrac{x^2(\cos x + \sin x)}{\sin x - \cos x}$.

(D) $f(x) = \dfrac{x^2(\sin x + cosx)}{\sin x - \cos x}$.

Lời giải.

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ nên

$$f(x) = F'(x) = 2x \cdot \ln(\sin x - \cos x) + x^2 \cdot \frac{(\sin x - \cos x)'}{\sin x - \cos x} = 2x \cdot \ln(\sin x - \cos x) + x^2 \cdot \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}.$$

Chọn phương án (C)

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) - xf(x) = 0, f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Giá trị của$f(1)$ bằng

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

(B) $\dfrac{1}{e}$.

(C) $\sqrt{e}$.

(D) e.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = x \Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \ln[f(x)] = \dfrac{1}{2}x^2 + C$ (do $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

Do đó $\ln[f(0)] = \dfrac{1}{2}\cdot 0^2 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \ln f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \Rightarrow f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow f(1) = \sqrt{\mathrm{e}}$.

Chọn phương án C

Câu 37. Cho hàm số $f(x) = \sin^2 2x \cdot \sin x$. Hàm số nào dưới đây là nguyên hàm của hàm $f(x)$.

A $y = \dfrac{4}{3}\cos^3 - \dfrac{4}{5}\sin^5 x + C$.

B $y = -\dfrac{4}{3}\cos^3 x + \dfrac{4}{5}\cos^5 x + C$.

C $y = \dfrac{4}{3}\sin^3 x - \dfrac{4}{5}\cos^5 x + C$.

D $y = -\dfrac{4}{3}\sin^3 x + \dfrac{4}{5}\sin^5 x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \sin^2 2x \cdot \sin x\,\mathrm{d}x = 4\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x\,\mathrm{d}x$

$$= -4\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \mathrm{d}(\cos x) = -4\int \left(1 - \cos^2 x\right) \cdot \cos^2 x \cdot \mathrm{d}(\cos x)$$

$$= -4\int \left(\cos^2 x - \cos^4 x\right) \cdot \mathrm{d}(\cos x) = -\frac{4}{3}\cos^3 x + \frac{4}{5}\cos^5 x + C.$$

Chọn phương án B

Câu 38. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x + 2)^2}$?

A $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\ln x + 2} + C$.

B $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{-1}{\ln x + 2} + C$.

C $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x}{\ln x + 2} + C$.

D $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln x + 2 + C$.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng bảng nguyên hàm cơ bản $\displaystyle\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2} = \dfrac{-1}{x} + C$ và công thức vi phân $\mathrm{d}[f(x)] = f'(x)\mathrm{d}x$.

Cách giải: $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{1}{x(\ln x + 2)^2}\mathrm{d}x = \int \dfrac{\mathrm{d}(\ln x + 2)}{(\ln x + 2)^2} = \dfrac{-1}{\ln x + 2} + C$.

Chú ý: HS có thể sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ để giải bài toán này bằng cách đặt $t = \ln x + 2$.

Chọn phương án B

Câu 39. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + 3$ là

A $\dfrac{x^3}{3} + 3x + C$.

B $x^3 + 3x + C$.

C $\dfrac{x^3}{2} + 3x + C$.

D $x^2 + 3 + C$.

Lời giải.

Sử dụng công thức $\displaystyle\int x^n\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C\,(n \neq -1)$.

Chọn phương án A

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn $f'(x) = 27 + \cos x$ và $f(0) = 2019$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A $f(x) = 27x + \sin x + 1991$.

B $f(x) = 27x - \sin x + 2019$.

C $f(x) = 27x + \sin x + 2019$.

D $f(x) = 27x - \sin x - 2019$.

Lời giải.

50 DẠNG TOÁN PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA LẦN 2

Ta có $f'(x) = 27 + \cos x \Rightarrow \displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int (27 + \cos x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow f(x) = 27x + \sin x + C$.

Lại có $f(0) = 2019 \Rightarrow 27 \cdot 0 + \sin 0 + C = 2019 \Leftrightarrow C = 2019 \Rightarrow f(x) = 27x + \sin x + 2019$.

Chọn phương án C

C MỨC ĐỘ 3

Câu 41. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = 2$ và $F(\mathrm{e}) = \ln 2$. Giá trị của biểu thức $F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right) + F(\mathrm{e}^2)$ bằng

A. $3\ln 2 + 2$.   B. $\ln 2 + 2$.   C. $\ln 2 + 1$.   D. $2\ln 2 + 1$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x| + C$, $x > 0$, $x \neq 1$.

Nên $F(x) = \begin{cases} \ln(\ln x) + C_1 \text{ khi } x > 1 \\ \ln(-\ln x) + C_2 \text{ khi } 0 < x < 1. \end{cases}$

Mà $F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = 2$ nên $\ln\left(-\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) + C_2 = 2 \Leftrightarrow C_2 = 2$; $F(\mathrm{e}) = \ln 2$ nên $\ln(\ln \mathrm{e}) + C_1 = \ln 2 \Leftrightarrow C_1 = \ln 2$.

Suy ra $F(x) = \begin{cases} \ln(\ln x) + \ln 2 \text{ khi } x > 1 \\ \ln(-\ln x) + 2 \text{ khi } 0 < x < 1. \end{cases}$

Vậy $F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right) + F\left(\mathrm{e}^2\right) = \ln\left(-\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right) + 2 + \ln(\ln \mathrm{e}^2) + \ln 2 = 3\ln 2 + 2$.

Chọn phương án A

Câu 42. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ thỏa mãn $F(0) = 5$. Khi đó phương trình $F(x) = 5$ có số nghiệm thực là:

A. 0.   B. 1.   C. 2.   D. 3.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng các công thức nguyên hàm cơ bản để tìm $F(x)$ sau đó giải phương trình.

Cách giải:

Ta có: $F(x) = \int \left(x^3 - 2x^2 + 1\right)dx = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2x^3}{3} + x + C$.

Lại có: $F(0) = 5 \Leftrightarrow C = 5 \Rightarrow F(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2x^3}{3} + x + 5$.

$F(x) = 5 \Leftrightarrow \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2x^3}{3} + x = 0 \Leftrightarrow x\left(\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2x^3}{3} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x \approx -1,04 \end{array}\right.$.

Chọn phương án B

Câu 43. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = 4x + 3$ và $f(1) = -1$. Biết rằng phương trình $f(x) = 10$ có hai nghiệm thực x_1, x_2. Tính tổng $\log_2|x_1| + \log_2|x_2|$.

A. 8.   B. 16.   C. 4.   D. 3.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng công thức: $f(x) = \displaystyle\int f'(x)\,dx$ để tìm hàm số $f(x)$ sau đó giải phương trình và tính tổng đề bài yêu cầu.

Ta có: $f(x)=\displaystyle\int(4x+3)\,\mathrm{d}x=2x^3+3x+C$.

Lại có: $f(1)=-1\Rightarrow 2\cdot1+3\cdot1+C=-1\Leftrightarrow C=-6\Rightarrow f(x)=2x^2+3x-6$.

$\Rightarrow f(x)=10\Leftrightarrow 2x^2+3x-6=10\Leftrightarrow 2x^2+3x-16=0\quad(*)$.

Ta có: $ac=2\cdot(-16)=-32<0\Rightarrow(*)$ luôn có hai nghiệm trái dấu.

Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{3}{2}\\ x_1x_2=-8.\end{cases}$

Ta có: $\log_2|x_1|+\log_2|x_2|=\log_2|x_1x_2|=\log_2|-8|=\log_2 2^3=3$.

Chọn phương án D

Câu 44. Biết rằng trên khoảng $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$ hàm số $f(x)=\dfrac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}$ có một nguyên hàm $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{2x-3},(a,b,c\in\mathbb{Z})$. Tổng $S=a+b+c$ bằng

A 6. **B** 5. **C** 4. **D** 3.

Lời giải.

Phương pháp: $f(x)$ có một nguyên hàm $F(x)\Leftrightarrow(F(x))'=f(x)$.

Cách giải:

$$\begin{aligned}F(x)&=\left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{2x-3}\\ \Rightarrow(F(x))'&=(2ax+b)\sqrt{2x-3}+\frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{2x-3}}=\frac{(2ax+b)(2x-3)+ax^2+bx+c}{\sqrt{2x-3}}\\ &=\frac{5ax^2+(3b-6a)x-3b+c}{\sqrt{2x-3}}.\end{aligned}$$

$f(x)$ có một nguyên hàm $F(x)\Leftrightarrow(F(x))'=f(x)$, khi đó $\begin{cases}5a=20\\ 3b-6a=-30\\ -3b+c=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\ b=-2\\ c=1\end{cases}$.

$\Rightarrow S=a+b+c=3$.

Chọn phương án D

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f'(x)-2018f(x)=2018x^{2017}\mathrm{e}^{2018x}$ với mọi $x\in\mathbb{R},f(0)=2018$. Tính $f(1)$.

A $f(1)=2019\mathrm{e}^{2018}$. **B** $f(1)=2019\mathrm{e}^{-2018}$. **C** $f(1)=2017\mathrm{e}^{2018}$. **D** $f(1)=2018\mathrm{e}^{2018}$.

Lời giải.

Ta có: $f'(x)-2018f(x)=2018x^{2017}\mathrm{e}^{2018x}\Leftrightarrow\mathrm{e}^{-2018x}f'(x)-2018\mathrm{e}^{-2018x}f(x)=2018x^{2017}$.

$\Rightarrow\left(\mathrm{e}^{-2018x}f(x)\right)'=2018x^{2017}\Rightarrow\mathrm{e}^{-2018x}f(x)$ là 1 nguyên hàm của$2018x^{2017}$.

Ta có: $\displaystyle\int 2018x^{2017}\,\mathrm{d}x=x^{2018}+C\Rightarrow\mathrm{e}^{-2018x}f(x)=x^{2018}+C_0$.

Mà $f(0)=2018\Rightarrow2018=C_0\Rightarrow\mathrm{e}^{-2018x}f(x)=x^{2018}+2018\Rightarrow f(x)=x^{2018}\mathrm{e}^{2018x}+2018\mathrm{e}^{2018x}$

$\Rightarrow f(1)=\mathrm{e}^{2018}+2018\mathrm{e}^{2018}=2019\mathrm{e}^{2018}$.

Chọn phương án A

Câu 46. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\sin^2x}$ trên khoảng $(0;\pi)$ là

A $x\cot x - \ln|\sin x| + C$.
B $.-x\cot x + \ln(\sin x) + C$.
C $-x\cot x - \ln(\sin x) + C$.
D $x\cot x + \ln|\sin x| + C$.

Lời giải.

$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = -\cot x \end{cases}$.

Khi đó: $F(x) = \int \frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -x.\cot x + \int \cot x\mathrm{d}x = -x.\cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x = -x.\cot x + \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin x}$
$= -x.\cot x + \ln|\sin x| + C$.

Với $x \in (0;\pi)$ suy ra $\sin x > 0$ suy ra $\ln|\sin x| = \ln(\sin x)$.

Vậy $F(x) = -x\cot x + \ln(\sin x) + C$.

Chọn phương án B

Câu 47. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Biết $F\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = k$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$. Tính $F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \cdots + F(10\pi)$.

A 55. **B** 44. **C** 45. **D** 0.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C$.

$$\text{Suy ra } F(x) = \begin{cases} \tan x + C_0,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_1,\ x \in \left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_2,\ x \in \left(\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right) \\ \dots \\ \tan x + C_9,\ x \in \left(\frac{17\pi}{2};\frac{19\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_{10},\ x \in \left(\frac{19\pi}{2};\frac{21\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F\left(\frac{\pi}{4}+0\pi\right) = 1 + C_0 = 0 \Rightarrow C_0 = -1 \\ F\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right) = 1 + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = 0 \\ F\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right) = 1 + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 1 \\ \dots \\ F\left(\frac{\pi}{4}+9\pi\right) = 1 + C_9 = 9 \Rightarrow C_9 = 8 \\ F\left(\frac{\pi}{4}+10\pi\right) = 1 + C_{10} = 10 \Rightarrow C_{10} = 9. \end{cases}$$

Vậy $F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \cdots + F(10\pi) = \tan 0 - 1 + \tan\pi + \tan 2\pi + 1 + \cdots + \tan 10\pi + 9 = 44$.

Chọn phương án B

Câu 48. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+3}{x^2+3x+2}$ là

A $\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C$.
B $2\ln|x+1| + \ln|x+2| + C$.
C $2\ln|x+1| - \ln|x+2| + C$.
D $-\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C$.

Lời giải.

Ta có:

$I = \int f(x)dx = \int \frac{x+3}{x^2+3x+2}dx = \int \frac{x+3}{(x+1)(x+2)}dx$

$= \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)dx = 2\ln|x+1| - \ln|x+2| + C$.

Chọn phương án C

Câu 49. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{x^2}\left(x^3 - 4x\right)$. Hàm số $F\left(x^2 + x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Ⓐ 6. Ⓑ 5. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= \int e^{x^2}\left(x^3 - 4x\right) \mathrm{d}x &&= \int e^{x^2}\left(x^2 - 4\right) x \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int (x^2 - 4) \, \mathrm{d}(e^{x^2}) &&= \frac{1}{2}\left[(x^2 - 4) \cdot e^{x^2} - 2 \cdot \int x e^{x^2} \, \mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 5) e^{x^2} + C. \end{aligned}$$

Đặt $g(x) = F(x^2 + x)$.

Suy ra $g(x) = F(x^2 + x) = \frac{1}{2} \cdot \left[(x^2 + x)^2 - 5\right] \cdot e^{(x^2+x)^2} + C$.

$$\Rightarrow g'(x) = \left(x^2 + x\right)(2x + 1) e^{\left(x^2+x\right)^2}\left[\left(x^2 + x\right)^2 - 4\right].$$

$g'(x) = x(x+1)(2x+1)\left(x^2 + x - 2\right)\left(x^2 + x + 2\right) e^{\left(x^2+x\right)^2}$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \dfrac{-1}{2} \\ x = -2 \end{array}\right.$$

Vậy hàm số $F\left(x^2 + x\right)$ có 5 điểm cực trị.

Chọn phương án B

Câu 50. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{x - \cos x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y = F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Ⓐ 1. Ⓑ Vô số điểm. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \displaystyle\int f(x) \, \mathrm{d}x \Rightarrow F'(x) = f(x)$.

$\Rightarrow F'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x - \cos x}{x^2} = 0 \; (x \neq 0) \Leftrightarrow g(x) = x - \cos x = 0$.

Xét hàm số $g(x) = x - \cos x$ ta có $g'(x) = 1 + \sin x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm duy nhất.

Chọn phương án A

Câu 51. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$, biết $f'(x) + (2x + 1) f(x) = 0$, $f(x) = 0, f'(x) > 0, f(2) = \dfrac{1}{6}$. Tính giá trị của $P = f(1) + f(2) + \ldots + f(2019)$.

Ⓐ $P = \dfrac{2020}{2019}$. Ⓑ $P = \dfrac{2019}{2020}$. Ⓒ $P = \dfrac{2018}{2019}$. Ⓓ $P = \dfrac{2021}{2020}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)+(2x+1)f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{-f'(x)}{f(x)}=2x+1 \Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{-f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int(2x+1)\mathrm{d}x$.

Suy ra $\dfrac{1}{f(x)}=x^2+x+c \Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+c}$. Mà $f(2)=\dfrac{1}{6} \Rightarrow c=0 \Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$.

$P=f(1)+f(2)+\ldots+f(2019)=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\ldots+\dfrac{1}{2019}-\dfrac{1}{2020}=\dfrac{2019}{2020}$.

Chọn phương án B

Câu 52. Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $y=2^{\sin x}2^{\cos x}(\cos x-\sin x)$.

A $y=2^{\sin x+\cos x}+C$.

B $y=\dfrac{2^{\sin x}\cdot 2^{\cos x}}{\ln 2}$.

C $y=\ln\left(2\cdot 2^{\sin x+\cos x}\right)+C$.

D $y=-\dfrac{2^{\sin x+\cos x}}{\ln 2}+C$.

Lời giải.

Ta có: $y=2^{\sin x}\cdot 2^{\cos x}(\cos x-\sin x)=2^{\sin x+\cos x}\cdot(\cos x-\sin x)$

Xét $\displaystyle\int 2^{\sin x+\cos x}\cdot(\cos x-\sin x)\,\mathrm{d}x$

Đặt: $\sin x+\cos x=t \Rightarrow (\cos x-\sin x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$

Vậy $\displaystyle\int 2^{\sin x+\cos x}\cdot(\cos x-\sin x)\,\mathrm{d}x=\int 2^t\,\mathrm{d}t=\dfrac{2^t}{\ln 2}+C=\dfrac{2^{\sin x+\cos x}}{\ln 2}+C=\dfrac{2^{\sin x}\cdot 2^{\cos x}}{\ln 2}+C$

Chọn phương án B

Câu 53. Hàm số $F(x)$ nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $y=\sqrt[3]{x+1}$?

A $F(x)=\dfrac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}}+C$.

B $F(x)=\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{(x+1)^4}+C$.

C $F(x)=\dfrac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1}+C$.

D $F(x)=\dfrac{3}{4}\sqrt[4]{(x+1)^3}+C$.

Lời giải.

Ta có: $I=\displaystyle\int\sqrt[3]{x+1}\,\mathrm{d}x$

Đặt: $t=\sqrt[3]{x+1} \Rightarrow t^3=x+1 \Rightarrow 3t^2\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$

$\Rightarrow I=\displaystyle\int t\cdot 3t^2\,\mathrm{d}t=\int 3t^3\,\mathrm{d}t=\dfrac{3}{4}t^4+C=\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4}+C=\dfrac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1}+C$

Vậy $F(x)=\dfrac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1}+C$.

Chọn phương án C

Câu 54. Trong các mệnh đề sau

(I). $\displaystyle\int f^2(x)\mathrm{d}x=\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)^2$.

(II). $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\mathrm{C}$.

(III). $\displaystyle\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x+\mathrm{C}$ với mọi $k\in\mathbb{R}$.

(IV). $\left(\displaystyle\int f'(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x)$.

Số mệnh đề đúng là

A 2. **B** 4. **C** 1. **D** 3.

Lời giải.

* Mệnh đề (I) ta cho $f(x)=1,\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có $VT(I) = \int 1\mathrm{d}x = x + \mathrm{C}, VP(I) = \left(\int 1\mathrm{d}x\right)^2 = (x+\mathrm{C})^2 = x^2 + 2x\mathrm{C} + C^2$.
Vậy $VT(I) \neq VP(I)$ nên mệnh đề (I) sai.
* Mệnh đề (II) đúng theo tính chất nguyên hàm.
* Mệnh đề (III) sai khi $k = 0$.
* Mệnh đề (IV) ta gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.
Ta có $VT(IV) = (F(x) + \mathrm{C})' = F'(X) + \mathrm{C}' = f(x) = VP(IV)$. Vậy (IV) là mệnh đề đúng. Kết luận: Vậy có 2 mệnh đề đúng.
Chọn phương án A

Câu 55. Biết $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2x\ln(3x-1) + C$ với $x \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A $\int f(3x)\,\mathrm{d}x = 2x\ln(9x-1) + C$.
B $\int f(3x)\,\mathrm{d}x = 6x\ln(3x-1) + C$.
C $\int f(3x)\,\mathrm{d}x = 6x\ln(9x-1) + C$.
D $\int f(3x)\,\mathrm{d}x = 3x\ln(9x-1) + C$.

Lời giải.
Đặt $x = 3t \Rightarrow \mathrm{d}x = 3\mathrm{d}t$. Ta có:
$\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3\int f(3t)\,\mathrm{d}t = 2\cdot 3t\ln(3\cdot 3t-1) + C \Rightarrow \int f(3t)\,\mathrm{d}t = 2t\ln(9t-1) + C \Rightarrow \int f(3x)\,\mathrm{d}x = 2x\ln(9x-1) + C$.
Chọn phương án A

Câu 56. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+3\cos x}$ và $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$. Khi đó $F(0)$ là

A $-\dfrac{2}{3}\ln 2 + 2$.
B $-\dfrac{1}{3}\ln 2 - 2$.
C $-\dfrac{1}{3}\ln 2 + 2$.
D $-\dfrac{2}{3}\ln 2 - 2$.

Lời giải.
Ta có $F(x) = \int \dfrac{\sin x}{1+3\cos x}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3}\int \dfrac{\mathrm{d}(1+3\cos x)}{1+3\cos x} = -\dfrac{1}{3}\ln|1+3\cos x| + C$.
$F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow F(x) = -\dfrac{1}{3}\ln|1+3\cos x| + 2$.
Suy ra $F(0) = -\dfrac{1}{3}\ln 4 + 2 = -\dfrac{2}{3}\ln 2 + 2$.
Chọn phương án A

Câu 57. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2018^x\ln 2018 - \cos x$ và $f(0) = 2$. Phát biểu nào sau đây **đúng**?

A $f(x) = 2018^x + \sin x + 1$.
B $f(x) = \dfrac{2018^x}{\ln 2018} + \sin x + 1$.
C $f(x) = \dfrac{2018^x}{\ln 2018} - \sin x + 1$.
D $f(x) = 2018^x - \sin x + 1$.

Lời giải.
Vì $\int (2018^x\ln 2018 - \cos x)\,\mathrm{d}x = 2018^x - \sin x + C$. Do $f(0) = 2$ nên $C = 1$.
Vậy $f(x) = 2018^x - \sin x + 1$.
Chọn phương án D

Câu 58. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số $f(x)=\dfrac{2017x}{(x^2+1)^{2018}}$ thỏa mãn $F(1)=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của $F(x)$.

Ⓐ $m=-\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $m=\dfrac{1-2^{2017}}{2^{2018}}$. Ⓒ $m=\dfrac{2^{2017}+1}{2^{2018}}$. Ⓓ $m=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\int \frac{2017x}{(x^2+1)^{2018}}\,dx=\frac{2017}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x^2+1\right)}{(x^2+1)^{2018}}=-\frac{1}{2\left(x^2+1\right)^{2017}}+C.$$

Do đó ta có thể viết $F(x)=-\dfrac{1}{2\left(x^2+1\right)^{2017}}+C$. Vì $F(1)=0$ nên $C=\dfrac{1}{2^{2018}}$. Suy ra

$$F(x)=\frac{1}{2^{2018}}-\frac{1}{2\left(x^2+1\right)^{2017}}\geq\frac{1}{2^{2017}}-\frac{1}{2}=\frac{1-2^{2017}}{2^{2018}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=0$. Vậy $m=\dfrac{1-2^{2017}}{2^{2018}}$.

Chọn phương án B

Câu 59. Biết $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=2x\ln(3x-1)+C$ với $x\in\left(\dfrac{1}{9};+\infty\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\displaystyle\int f(3x)\,\mathrm{d}x=2x\ln(9x-1)+C$. Ⓑ $\displaystyle\int f(3x)\,\mathrm{d}x=6x\ln(3x-1)+C$.

Ⓒ $\displaystyle\int f(3x)\,\mathrm{d}x=6x\ln(9x-1)+C$. Ⓓ $\displaystyle\int f(3x)\,\mathrm{d}x=3x\ln(9x-1)+C$.

Lời giải.

Đặt $x=3t\Rightarrow\mathrm{d}x=3\,\mathrm{d}t\Rightarrow\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=3\int f(3t)\,\mathrm{d}t=6t\cdot\ln(9t-1)+C$

$\Rightarrow\displaystyle\int f(3t)\,\mathrm{d}t=2t\cdot\ln(9t-1)+C$.

Mà nguyên hàm không phụ thuộc vào biến số nên $\displaystyle\int f(3x)\,\mathrm{d}x=2x\ln(9x-1)+C$.

Chọn phương án A

Câu 60. Hàm số nào dưới đây **không** là nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{x(2+x)}{(x+1)^2}$?

Ⓐ $y=\dfrac{x^2+x-1}{x+1}$. Ⓑ $y=\dfrac{x^2-x-1}{x+1}$. Ⓒ $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$. Ⓓ $y=\dfrac{x^2}{x+1}$.

Lời giải.

Ta có biến đổi: $\dfrac{x(2+x)}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}=1-\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Suy ra, $\displaystyle\int\frac{x(2+x)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x=x+\frac{1}{x+1}+C=\frac{x^2+(C+1)x+C+1}{x+1}$.

— Với $C=-2$, ta được $y=\dfrac{x^2-x-1}{x+1}$;

— Với $C=0$, ta được $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$;

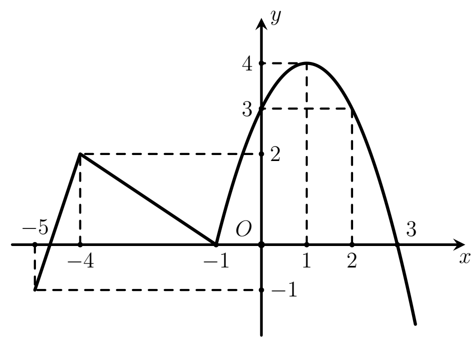
— Với $C = -1$, ta được $y = \dfrac{x^2}{x+1}$.

Vậy hàm số không phải là nguyên hàm của hàm số đã cho là $y = \dfrac{x^2+x-1}{x+1}$.

Chọn phương án (A)

D MỨC ĐỘ 4

Câu 61. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[-5; 3]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y = ax^2 + bx + c$).



Biết $f(0) = 0$, giá trị của $2f(-5) + 3f(2)$ bằng:

(A) 33. (B) $\dfrac{109}{3}$. (C) $\dfrac{35}{3}$. (D) 11.

Lời giải.

Từ đồ thị ta có $f'(x) = \begin{cases} 3x + 14 & \text{nếu } -5 \le x \le -4 \\ -\dfrac{2}{3}(x+1) & \text{nếu } -4 \le x \le -1 \\ -x^2 + 2x + 3 & \text{nếu } -1 \le x \le 3 \end{cases}$.

Suy ra $f(x) = \begin{cases} 3 \cdot \dfrac{x^2}{2} + 14x + C_1 & \text{nếu } -5 \le x \le -4 \\ -\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x^2}{2} + x\right) + C_2 & \text{nếu } -4 \le x \le -1 \\ -\dfrac{x^3}{3} + x^2 + 3x + C_3 & \text{nếu } -1 \le x \le 3 \end{cases}$.

Mặt khác

$f(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$.

$f(-1) = -\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2} - 1\right) + C_2 = -\dfrac{1}{3} + 1 - 3 \Rightarrow C_2 = -2$.

$f(-4) = 24 - 56 + C_1 = -\dfrac{16}{3} + \dfrac{8}{3} - 2 \Rightarrow C_1 = \dfrac{82}{3}$.

Khi đó $2f(-5) + 3f(2) = \dfrac{35}{3}$.

Chọn phương án (C)

Câu 62. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$ là

(A) $(x-1)e^x + C$. (B) $(x-2)e^x + e^x + C$. (C) $(x+1)e^x + C$. (D) $(x+2)e^{2x} + e^x + C$.

Lời giải.

Sử dụng phương pháp tọa độ hóa. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ. Chuẩn hóa $a = 1$ (đơn vị dài). Khi đó $SA = \sqrt{11}$ Đặt $OC = OD = b > 0; OS = c > 0$ ta có:
$SA^2 = SC^2 = SO^2 + OC^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = 11(1)$. Tọa độ các điểm $B(0; -b; 0), C(b; 0; 0), D(0; b; 0), S(0; 0; c)$
Mặt phẳng (SBC) có phương trình $\frac{x}{b} + \frac{y}{-b} + \frac{z}{c} = 1 \Rightarrow$ vtpt của (SBC) là: $\left(\frac{1}{b}; -\frac{1}{b}; \frac{1}{c}\right)$. Theo giả thiết ta có: $|cos(n_1; n_2)| = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{|1|}{\sqrt{1}.\sqrt{2}} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{c^2}}{\frac{2}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{9}{c^2} = \frac{2}{b^2} \Leftrightarrow 9b^2 - 2c^2 = 0$. Kết hợp (1) và (2) ta được: $b^2 = 2$ và $c^2 = 9 \Rightarrow b = \sqrt{2}$ và $c = 3$ (do $b, c > 0$). Vậy $CD = OC\sqrt{2} = 2; SO = 3 \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}.2^2.3 = 4$ (đơn vị thể tích). Vậy $V_{S.ABCD} = 4a^3$.

Chọn phương án (C)

Câu 63. Cho hàm số $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ và $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot f'(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $4 < f(3) < 6$. (B) $f(3) < 2$. (C) $2 < f(3) < 4$. (D) $f(3) > 6$.

Lời giải.

Phương pháp:

+) Từ giả thiết suy ra $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

+) Sử dụng phương pháp nguyên hàm 2 vế.

Cách giải:

Theo bài ra ta có: $f(x) = \sqrt{x+1}f'(x)$ (*)

Do $f(x) > 0 \forall x \in R$ nên từ (*) ta có $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được:

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$

$\Leftrightarrow \ln|f(x)|\, dx = 2\sqrt{x+1} + C \Leftrightarrow \ln f(x) = 2\sqrt{x+1} + C \Leftrightarrow f(x) = e^{2\sqrt{x+1}+C}$.

Ta có $f(0) = 1 \Rightarrow 1 = e^{2+C} \Leftrightarrow 2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -2$.

Do đó $f(x) = e^{2\sqrt{x+1}-2} \Rightarrow f(3) = e^2 \approx 7,4 > 6$.

Chọn phương án (D)

Câu 64. Cho hàm số $f(x) > 0$ với $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ và $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot f'(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $f(3) < 2$. (B) $2 < f(3) < 4$. (C) $4 < f(3) < 6$. (D) $f(3) < f(6)$.

Lời giải.

Do giả thiết $f(x) > 0$ với $x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot f'(x)$ suy ra $\sqrt{x+1} > 0$.

Khi đó $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot f'(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

Suy ra $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}} \mathrm{d}x \quad (*)$.

Mà $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C_1$. Vì $f(x) > 0$ nên $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln f(x) + C_1$.
Mặt khác $\int \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{\mathrm{d}(x+1)}{\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1} + C_2$.
Từ $(*)$ suy ra $\ln f(x) = 2\sqrt{x+1} + C \Rightarrow f(x) = \mathrm{e}^{2\sqrt{x+1}+C}$.
Do $f(0) = 1$ nên $\mathrm{e}^{2+C} = 1 \Leftrightarrow 2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -2$ suy ra $f(x) = \mathrm{e}^{2\sqrt{x+1}-2}$.
Khi đó $f(3) = \mathrm{e}^{2\sqrt{3+1}-2} = \mathrm{e}^2$ và $f(6) = \mathrm{e}^{2\sqrt{7}-2}$ suy ra $f(3) < f(6)$.
Chọn phương án D

Câu 65. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x) + f(x) = 3x^2\sqrt{x}$. Biết $f(1) = \dfrac{1}{2}$. Tính $f(4)$.

A) 24. B) 14. C) 4. D) 16.

Lời giải.
Với $x > 0$, ta có

$$2xf'(x) + f(x) = 3x^2\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x}f'(x) + (\sqrt{x})'f(x) = \frac{3}{2}x^2$$
$$\Rightarrow \left[\sqrt{x}f(x)\right]' = \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow \sqrt{x}f(x) = \frac{x^3}{2} + C.$$

Mà $f(1) = \dfrac{1}{2}$ nên $C = 0$, suy ra $\sqrt{x}f(x) = \dfrac{x^3}{2} \Rightarrow f(4) = 16$.
Chọn phương án D

Câu 66. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = 1$ và $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x$. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A) $m > e$. B) $0 < m \leqslant 1$. C) $0 < m < e$. D) $1 < m < e$.

Lời giải.
Ta có $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x \Rightarrow \int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int (2-2x)\,\mathrm{d}x. \Leftrightarrow \ln f(x) = 2x - x^2 + C \Leftrightarrow f(x) = A.e^{2x-x^2}$.
Mà $f(0) = 1$ suy ra $f(x) = e^{2x-x^2}$.
Ta có $2x - x^2 = 1 - \left(x^2 - 2x + 1\right) = 1 - (x-1)^2 \leqslant 1$.
Suy ra $0 < e^{2x-x^2} \leqslant e$ và ứng với một giá trị thực $t < 1$ thì phương trình $2x - x^2 = t$ sẽ có hai nghiệm phân biệt.
Vậy để phương trình $f(x) = m$ có 2 nghiệm phân biệt khi $0 < m < e^1 = e$.
Chọn phương án C

Câu 67. Cho $F(x) = -\dfrac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

A) $\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{\ln x}{x^3} + \dfrac{1}{3x^3} + C$.
B) $\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\ln x}{x^3} + \dfrac{1}{3x^3} + C$.
C) $\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\ln x}{x^3} - \dfrac{1}{5x^5} + C$.
D) $\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\ln x}{x^3} + \dfrac{1}{5x^5} + C$.

Lời giải.

Ta có $F'(x)=\dfrac{f(x)}{x}\Leftrightarrow \dfrac{1}{x^4}=\dfrac{f(x)}{x}\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x^3}$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=f'(x)\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ v=f(x).\end{cases}$

Suy ra

$$\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=f(x)\cdot\ln x-\int\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\ln x}{x^3}-F(x)+C=\frac{\ln x}{x^3}+\frac{1}{3x^3}+C.$$

Chọn phương án (B)

Câu 68. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$. Biết rằng $f(-3)+f(3)=0$ và $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$. Tính $T=f(-2)+f(0)+f(4)$.

(A) $T=\ln 3+\dfrac{1}{2}\ln 5$.

(B) $T=\ln 3+\dfrac{1}{2}\ln 5+2$.

(C) $T=\ln 3-\dfrac{1}{2}\ln 5+1$.

(D) $T=\ln 3-\dfrac{1}{2}\ln 5+2$.

Lời giải.

+ Xét trên khoảng $(1;+\infty)$.

$f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\mathrm{C}_1=\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}+\mathrm{C}_1$.

Ta có $f(3)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2}+\mathrm{C}_1=-\dfrac{1}{2}\ln 2+\mathrm{C}_1$.

+ Xét trên khoảng $(-\infty;-1)$.

$f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\mathrm{C}_2=\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}+\mathrm{C}_2$.

Ta có $f(-3)=\dfrac{1}{2}\ln 2+\mathrm{C}_2$.

+ Xét trên khoảng $(-1;1)$.

$f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\mathrm{C}_3=\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{x+1}+\mathrm{C}_3$.

Ta có $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}\ln 3+\mathrm{C}_3$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\ln 3+\mathrm{C}_3$

+ Theo giả thiết suy ra $f(-3)+f(3)=0\Leftrightarrow\mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2=0$ và $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\Leftrightarrow 2\mathrm{C}_3=2\Leftrightarrow\mathrm{C}_3=1$.

Mặt khác $f(4)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{5}+\mathrm{C}_1$,$f(-2)=\dfrac{1}{2}\ln 3+\mathrm{C}_2$, $f(0)=\mathrm{C}_3$.

Suy ra $T=f(-2)+f(0)+f(4)=\dfrac{1}{2}\ln 3+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{5}+\mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2+\mathrm{C}_3$

$\Rightarrow T=\dfrac{1}{2}\ln 3+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{5}+1=\ln 3-\dfrac{1}{2}\ln 5+1$.

Chọn phương án (C)

Câu 69. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=|1+x|-|1-x|$ trên tập $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $F(1)=3$. Tính tổng $T=F(0)+F(2)+F(-3)$.

(A) 8. (B) 12. (C) 14. (D) 10.

Lời giải.

Ta viết lại hàm số $f(x)$ đã cho

$$f(x)=\begin{cases}2 & \text{nếu } x>1\\ 2x & \text{nếu } -1\le x\le 1\\ -2 & \text{nếu } x<-1\end{cases}.$$

Xét trên các khoảng $(-\infty;-1),(-1;1),(1;+\infty)$ hàm số $f(x)$ có nguyên hàm là

$$F(x)=\begin{cases}2x+C_1 & \text{nếu } x>1\\ x^2+C_2 & \text{nếu } -1<x<1\\ -2x+C_3 & \text{nếu } x<-1\end{cases}.$$

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó $F(x)$ liên tục tại các điểm $x=-1$ và $x=1$. Để có điều này trước hết phải có

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)\\ \lim\limits_{x\to(-1)^+}F(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}F(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=C_3\\ C_2=C_1+1\end{cases}.$$

Lại có $F(1)=3$ nên $C_1=1$ khi đó ta có

$$F(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{nếu } x>1\\ x^2+2 & \text{nếu } -1\le x\le 1\\ -2x+1 & \text{nếu } x<-1\end{cases}.$$

Vậy $T=F(0)+F(2)+F(-3)=14$.
Chọn phương án C

Câu 70. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}$, với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $2<f(5)<3$. B $4<f(5)<5$. C $1<f(5)<2$. D $3<f(5)<4$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}\Leftrightarrow\displaystyle\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}}$.

Suy ra $\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}(f(x))}{f(x)}=\int(3x+1)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow\ln f(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C\Leftrightarrow f(x)=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C}$.

Mà $f(1)=1\Rightarrow 1=\mathrm{e}^{\frac{4}{3}+C}\Rightarrow C=-\dfrac{4}{3}\Rightarrow f(5)\approx 3{,}793$.

Chọn phương án D

Câu 71. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2+f(x)\cdot f''(x)=2x^2-x+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=3$. Giá trị của $[f(1)]^2$ bằng

A 28. B 22. C $\dfrac{19}{2}$. D 10.

Lời giải.

50 DẠNG TOÁN PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA LẦN 2

Ta có

$$\begin{aligned} & [f'(x)]^2 + f(x)\cdot f"(x) = 2x^2 - x + 1 \\ \Leftrightarrow\ & \left[f(x)\cdot f'(x)\right]' = 2x^2 - x + 1 \\ \Leftrightarrow\ & f(x)\cdot f'(x) = \int (2x^2 - x + 1)\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow\ & f(x)\cdot f'(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C. \end{aligned}$$

Thay $x = 0$ ta được $f(0)\cdot f'(0) = C \Leftrightarrow C = 9$.
Khi đó

$$\begin{aligned} & f(x)\cdot f'(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 9 \\ \Leftrightarrow\ & \int f(x)\cdot f'(x)\mathrm{d}x = \int \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 9\right)\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow\ & \int f(x)\mathrm{d}[f(x)] = \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 9x + C_1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}f^2(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 9x + C_1 \\ \Leftrightarrow\ & f^2(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 18x + 2C_1. \end{aligned}$$

Thay $x = 0$ ta được $f^2(0) = 2C_1 \Leftrightarrow C_1 = \dfrac{9}{2}$.
Vậy $f^2(x) = \dfrac{1}{3}x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 18x + 9$, nên $f^2(1) = 28$.
Chọn phương án A

Câu 72. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + x^4}$, $f(1) = a$ và $f(-2) = b$. Giá trị của biểu thức $f(-1) - f(2)$ bằng

A $a + b$. **B** $b - a$. **C** $a - b$. **D** $-a - b$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2 + x^4}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}\right)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} - \arctan x + C$.
Do hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ nên liên tục trên từng khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$. Do đó, hàm số $f(x)$ có dạng $\begin{cases} -\dfrac{1}{x} - \arctan x + C_1, & \text{nếu } x < 0 \\ -\dfrac{1}{x} - \arctan x + C_2, & \text{nếu } x > 0. \end{cases}$

Thay $x = 1$, ta được $a = -\dfrac{1}{1} - \arctan 1 + C_2 \Rightarrow C_2 = a + 1 + \dfrac{\pi}{4}$.
Thay $x = -2$, ta được $b = -\dfrac{1}{-2} - \arctan(-2) + C_1 \Rightarrow C_1 = b - \dfrac{1}{2} - \arctan 2$.
Do đó

$$\begin{aligned} f(-1) - f(2) &= \left[-\frac{1}{-1} - \arctan(-1) + b - \frac{1}{2} - \arctan 2\right] - \left[-\frac{1}{2} - \arctan 2 + a + 1 + \frac{\pi}{4}\right] \\ &= b - a. \end{aligned}$$

Chọn phương án B

Câu 73. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\displaystyle\int \frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5}+C$. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(2x)$ trên tập $\mathbb{R}^+$.

(A) $\dfrac{x+3}{2\left(x^2+4\right)}+C$. (B) $\dfrac{x+3}{x^2+4}+C$. (C) $\dfrac{2x+3}{4\left(x^2+1\right)}+C$. (D) $\dfrac{2x+3}{8\left(x^2+1\right)}+C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int 2f\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{x+1}\right) = \frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{\sqrt{x+1}^2+4}+C$,

suy ra $\displaystyle\int f\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{x+1}\right) = \frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt{x+1}^2+4}+C$

Từ đó suy ra $\displaystyle\int f(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int f(2x)\,\mathrm{d}(2x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+3}{(2x)^2+4}+C = \frac{2x+3}{8\left(x^2+1\right)}+C$.

Chọn phương án (D)

Câu 74. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$. Biết rằng $f(-3)+f(3)=0$ và $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$. Tính $T=f(-2)+f(0)+f(4)$.

(A) $T=1+\ln\dfrac{9}{5}$. (B) $T=1+\ln\dfrac{6}{5}$. (C) $T=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$. (D) $T=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{6}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle f(x)=\int\frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$.

— Với $x\in(-\infty;-1)$ ta có $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_1$.

— Với $x\in(1;+\infty)$ ta có $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_3$.

Mà $f(-3)+f(3)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{-3-1}{-3+1}\right|+C_1+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{3-1}{3+1}\right|+C_3=0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln 2+C_1+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+C_3=0 \Leftrightarrow C_1+C_3=0.$$

Do đó $f(-2)=\dfrac{1}{2}\ln 3+C_1$; $f(4)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{5}+C_3$.

— Với $x\in(-1;1)$ ta có $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_2$.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{2}+1}\right|+C_2+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1}\right|+C_2=2.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln 3+C_2+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}+C_2=2 \Leftrightarrow C_2=1.$$

Do đó với $x\in(-1;1)$: $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+1 \Rightarrow f(0)=1$.

Vậy $T=f(-2)+f(0)+f(4)=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$.

Chọn phương án C

Câu 75. Biết luôn có hai số a và b để $F(x)=\dfrac{ax+b}{x+4}$ $(4a-b\neq 0)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $2f^2(x)=(F(x)-1)\,f'(x)$. Khẳng định nào dưới đây đúng và đầy đủ nhất?

A $a=1, b=4$. **B** $a=1, b=-1$. **C** $a=1, b\in\mathbb{R}\backslash\{4\}$. **D** $a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=F'(x)=\dfrac{4a-b}{(x+4)^2}$; $f'(x)=\dfrac{-2(4a-b)}{(x+4)^3}$.

Thay vào biểu thức, ta có

$$\begin{aligned}2f^2(x)=(F(x)-1)\,f'(x)&\Leftrightarrow 4a-b=-(a-1)x-b+4\\&\Leftrightarrow (a-1)x+4(a-1)=0\quad(1)\end{aligned}$$

(1) đúng với mọi $x\neq -4$ khi $a=1$, $4a-b\neq 0\Rightarrow b\neq 4$.

Chọn phương án C

Câu 76. Giả sử $\displaystyle\int\frac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}=-\frac{1}{g(x)}+C$ (C là hằng số). Tính tổng của các nghiệm của phương trình $g(x)=0$.

A -1. **B** 1. **C** 3. **D** -3.

Lời giải.

Ta có

$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=\left(x^2+3x\right)\left(x^2+3x+2\right)+1=\left(x^2+3x\right)^2+2\left(x^2+3x\right)+1=\left(x^2+3x+1\right)^2$.

Do đó

$$\int\frac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}=\int\frac{\left(x^2+3x+1\right)'\,\mathrm{d}x}{\left(x^2+3x+1\right)^2}=-\frac{1}{x^2+3x+1}+C.$$

Vậy $\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{x^2+3x+1}$.

Suy ra $g(x)=x^2+3x+1$. Do đó $g(x)=0\Leftrightarrow x^2+3x+1=0$.

Vậy theo định lí Viet, tổng các nghiệm của phương trình $g(x)=0$ là -3.

Chọn phương án D

Câu 77. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=1$ và $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2-2x$, hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A 1. **B** 2. **C** 3. **D** 5.

Lời giải.

Theo bài ra ta có $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\int(2-2x)\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow\ln|f(x)|=2x-x^2+C.$ (1)

Thay $x=0$ vào (1) ta được $C=0$, từ đó suy ra $\ln|f(x)|=2x-x^2\Leftrightarrow f(x)=\mathrm{e}^{2x-x^2}$.

Phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm phân biệt khi chỉ khi phương trình $m=\mathrm{e}^{2x-x^2}$ có hai nghiệm phân biệt tương đương với $-x^2+2x-\ln m=0$ có hai nghiệm phân biệt tương đương với $\Delta'=1-\ln m>0\Leftrightarrow 0<m<\mathrm{e}$, từ đó suy ra $m=1$ hoặc $m=2$.

Chọn phương án B

Câu 78. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2 + f(x)\cdot f''(x) = 15x^4 + 12x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A. $\frac{9}{2}$. B. $\frac{5}{2}$. C. 10. D. 8.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \left(f'(x)\right)^2 + f(x)\cdot f''(x) = 15x^4 + 12x \\ \Leftrightarrow\ & \left[f'(x)\cdot f(x)\right]' = 15x^4 + 12x \\ \Leftrightarrow\ & f'(x)\cdot f(x) = 3x^5 + 6x^2 + C_1. \end{aligned}$$

Do $f(0) = f'(0) = 1$ nên ta có $C_1 = 1$. Do đó:

$$\begin{aligned} & f'(x)\cdot f(x) = 3x^5 + 6x^2 + 1 \\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{1}{2}f^2(x)\right)' = 3x^5 + 6x^2 + 1 \\ \Leftrightarrow\ & f^2(x) = x^6 + 4x^3 + 2x + C_2. \end{aligned}$$

Mà $f(0) = 1$ nên ta có $C_2 = 1$. Vậy $f^2(x) = x^6 + 4x^3 + 2x + 1$ suy ra $f^2(1) = 8$.

Chọn phương án D

Câu 79. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(0; +\infty) \setminus \{\mathrm{e}\}$ thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{1}{x(\ln x - 1)}$, $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right) = \ln 6$ và $f\left(\mathrm{e}^2\right) = 3$. Giá trị của biểu thức $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) + f\left(\mathrm{e}^3\right)$ bằng

A. $3(\ln 2 + 1)$. B. $2\ln 2$. C. $3\ln 2 + 1$. D. $\ln 2 + 3$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x(\ln x - 1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\ln x - 1)}{\ln x - 1} = \ln|\ln x - 1| + C$

$= \begin{cases} \ln(\ln x - 1) + C_1 & \text{khi} \quad x > \mathrm{e} \\ \ln(1 - \ln x) + C_2 & \text{khi} \quad 0 < x < \mathrm{e} \end{cases}.$

Vì $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right) = \ln 6 \Rightarrow \ln\left(1 - \ln\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right) + C_2 = \ln 6 \Rightarrow \ln 3 + C_2 = \ln 6 \Rightarrow C_2 = \ln 6 - \ln 3 = \ln 2$.

Vì $f\left(\mathrm{e}^2\right) = 3 \Rightarrow \ln\left(\ln \mathrm{e}^2 - 1\right) + C_1 = 3 \Rightarrow C_2 = 3$.

Do đó $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) + f\left(\mathrm{e}^3\right) = \ln\left(1 - \ln\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) + \ln 2 + \ln\left(\ln \mathrm{e}^3 - 1\right) + 3 = 2\ln 2 + \ln 2 + 3 = 3(\ln 2 + 1)$.

Chọn phương án A

Câu 80. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$, biết $f'(x) + (2x+3)f^2(x) = 0$, $f(x) > 0$ với mọi $x > 0$ và $f(1) = \dfrac{1}{6}$. Tính giá trị của $P = 1 + f(1) + f(2) + \cdots + f(2017)$

A. $\frac{6059}{4038}$. B. $\frac{6055}{4038}$. C. $\frac{6053}{4038}$. D. $\frac{6047}{4038}$.

Lời giải.

$f'(x) + (2x+3)f^2(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)} = -2x - 3$. Lấy nguyên hàm hai vế ta có $-\dfrac{1}{f(x)} = -x^2 - 3x + C$.

Do $f(1) = \dfrac{1}{6}$ nên $C = -2$.

Vậy $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3x+2} = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}$.

Do đó $P = 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2018} - \dfrac{1}{2019} = \dfrac{6055}{4038}$.

Chọn phương án B

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. D	4. B	5. C	6. B	7. A	8. C	9. C	10. D
11. B	12. C	13. A	14. C	15. C	16. A	17. A	18. B	19. D	20. D
21. B	22. D	23. C	24. D	25. C	26. B	27. A	28. D	29. C	30. C
31. B	32. A	33. D	34. C	35. C	36. C	37. B	38. B	39. A	40. C
41. A	42. B	43. D	44. D	45. A	46. B	47. B	48. C	49. B	50. A
51. B	52. B	53. C	54. A	55. A	56. A	57. D	58. B	59. A	60. A
61. C	62. C	63. D	64. D	65. D	66. C	67. B	68. C	69. C	70. D
71. A	72. B	73. D	74. C	75. C	76. D	77. B	78. D	79. A	80. B

DẠNG 7. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 3$ và chiều cao $h = 4$.Thể tích của khối chóp đã cho bằng

(A) 6. (B) 12. (C) 36. (D) 4.

Lời giải.

Ta có công thức thể tích khối chóp $V = \dfrac{1}{3}B.h = \dfrac{1}{3}.3.4 = 4$.

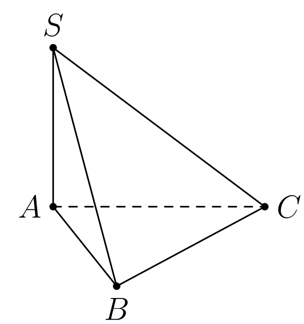
Chọn phương án (D)

Câu 1. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (B) $\dfrac{a^3}{2}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (D) $\dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $V = \dfrac{1}{3}SA \cdot \mathrm{S}_{ABC} = \dfrac{1}{3}a\sqrt{3}\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{4}$.



Chọn phương án (D)

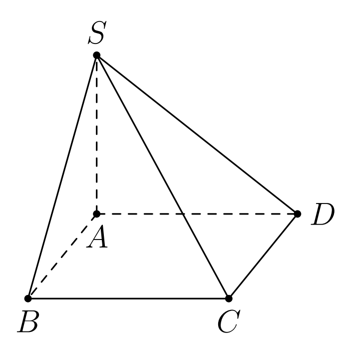
Câu 2. Cho khối chóp $S.ABCD$ cạnh bên SA vuông góc với đáy, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a, SA = 3a$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

(A) $6a^3$. (B) $\dfrac{a^3}{3}$. (C) $2a^3$. (D) a^3.

Lời giải.

Theo giả thiết $ABCD$ là hình chữ nhật nên thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$V = \frac{1}{3}SA \cdot AB \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot a \cdot 2a = 2a^3.$$



Chọn phương án (C)

Nhóm: PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA

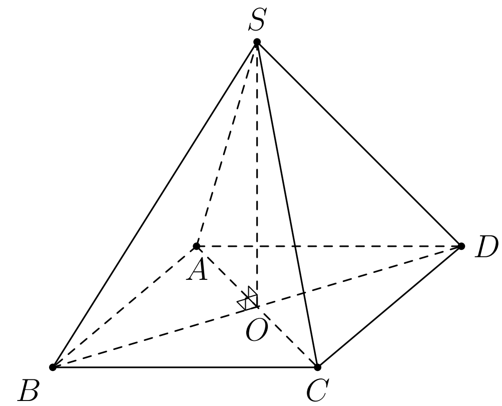
Câu 3. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng a, đường cao SO. Biết $SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.



Chọn phương án A

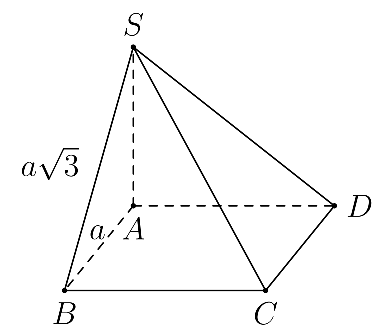
Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. $SA \perp (ABCD)$ và $SB = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

A $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **C** $a^3\sqrt{2}$. **D** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $S_{ABCD} = a^2, SA^2 = SB^2 - AB^2 = 3a^2 - a^2 = 2a^2 \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$.

Do đó $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = \dfrac{1}{3}a^2 a\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}a^3$.



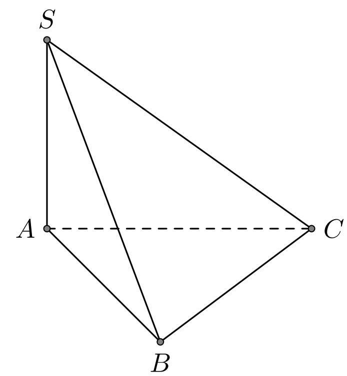
Chọn phương án D

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A,cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC). Biết $AB = 2a$ và $SB = 2\sqrt{2}a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$?

A $V = \dfrac{8a^3}{3}$. **B** $V = \dfrac{4a^3}{3}$. **C** $V = 4a^3$. **D** $V = 8a^3$.

Lời giải.

ΔSAB vuông tại A có $SA^2 = SB^2 - AB^2 = 4a^2$ nên $SA = 2a$.
Có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = 2a^2$.
Có $V = \dfrac{1}{3}SA \cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}2a \cdot 2a^3 = \dfrac{4}{3}a^3$.



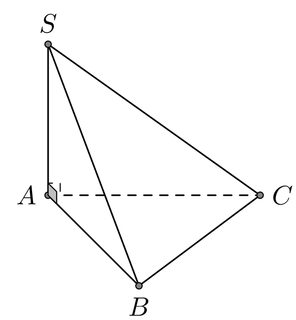
Chọn phương án B

Câu 6. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $SA = 2$, tam giác ABC vuông cân tại A và $AB = 1$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A $\dfrac{1}{6}$. **B** $\dfrac{1}{3}$. **C** 1. **D** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = \dfrac{1}{2} \Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SA \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3}$.



Chọn phương án B

Câu 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính thể tích V của khối chóp $D'.ABCD$.

A $V = \dfrac{a^3}{4}$. **B** $V = \dfrac{a^3}{6}$. **C** $V = \dfrac{a^3}{3}$. **D** $V = a^3$.

Lời giải.

Diện tích đáy $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$, chiều cao $D'D = a$.
Do đó $V_{D'.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot D'D = \dfrac{1}{3}a^2 \cdot a = \dfrac{a^3}{3}$.
Chọn phương án C

Câu 8. Diện tích đáy của khối chóp có chiều cao bằng h và thể tích bằng V là

A $B = \dfrac{6V}{h}$. **B** $B = \dfrac{3V}{h}$. **C** $B = \dfrac{2V}{h}$. **D** $B = \dfrac{V}{h}$.

Lời giải.

Ta có: $V = \dfrac{1}{3}Bh \Rightarrow B = \dfrac{3V}{h}$.
Chọn phương án B

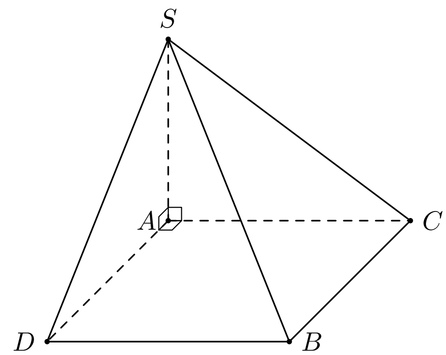
Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A $3a^3$. **B** $9a^3$. **C** a^3. **D** $\dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải.

Ta có thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot a^2 = a^3.$$



Chọn phương án C

Câu 10. Cho khối chóp tam giác có đường cao bằng 100 cm và cạnh đáy bằng 20 cm, 21 cm, 29 cm. Tính thể tích khối chóp này.

A. $7\,000\sqrt{2}$ cm^3. B. $6\,000$ cm^3. C. $6\,213$ cm^3. D. $7\,000$ cm^3.

Lời giải.

Diện tích đáy

$$S = \sqrt{\frac{20+21+29}{2}\left(\frac{20+21+29}{2} - 20\right)\left(\frac{20+21+29}{2} - 21\right)\left(\frac{20+21+29}{2} - 29\right)} = 210 \text{ cm}^2.$$

Thể tích khối chóp

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 210 \cdot 100 = 7\,000 \text{ cm}^3.$$

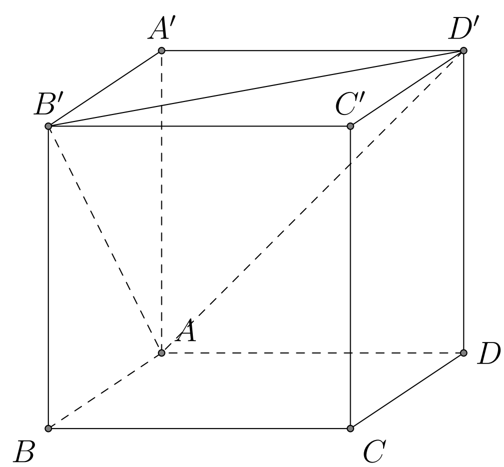
Chọn phương án D

Câu 11. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2$ cm; $AD = 5$ cm; $AA' = 3$ cm. Tính thể tích khối chóp $A.A'B'D'$

A. 5 cm^3. B. 10 cm^3. C. 20 cm^3. D. 15 cm^3.

Lời giải.

Ta có $V_{A.A'B'D'} = \frac{1}{3} \cdot AA' \cdot \frac{1}{2} \cdot A'B' \cdot A'D' = 5$ cm^3.



Chọn phương án A

Câu 12. Cho khối chóp có thể tích $V = 36$ cm^3 và diện tích mặt đáy $B = 6$ cm^2. Tính chiều cao của khối chóp.

Ⓐ $h = 18$ cm. Ⓑ $h = \frac{1}{2}$ cm . Ⓒ $h = 6$ cm . Ⓓ $h = 72$ cm .

Lời giải.

Từ công thức thể tích khối chóp, ta suy ra $h = \frac{3V}{S} = \frac{3 \cdot 36}{6} = 18$ cm.

Chọn phương án Ⓐ

Câu 13. Thể tích của khối chóp có diện tích mặt đáy bằng B, chiều cao bằng h được tính bởi công thức

Ⓐ $V = \frac{1}{3}Bh$. Ⓑ $V = Bh$. Ⓒ $V = \frac{1}{2}Bh$. Ⓓ $V = 3Bh$.

Lời giải.

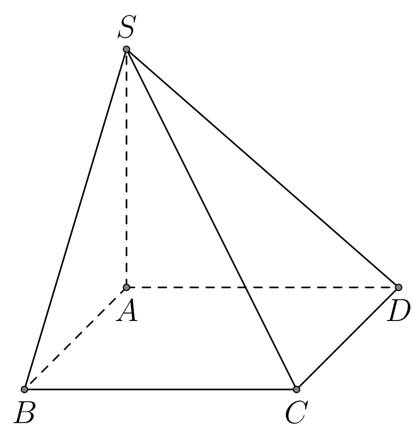
Công thức tính thể tích chóp.

Chọn phương án Ⓐ

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Khi đó, thể tích của khối chóp bằng

Ⓐ $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. Ⓑ $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. Ⓒ $a^3\sqrt{3}$. Ⓓ $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.



$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \times SA \times S_{ABCD} = \frac{1}{3} \times a\sqrt{3} \times a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Chọn phương án Ⓐ

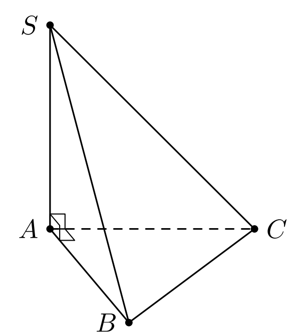
Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A, $AB = 2a$, $AC = 3a$, SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

Ⓐ $2a^3$. Ⓑ $6a^3$. Ⓒ $3a^3$. Ⓓ a^3.

Lời giải.

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2}2a \cdot 3a = 3a^2$.

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot 3a^2 \cdot a = a^3$.



Chọn phương án D

Câu 16. Cho khối chóp $S.ABC$. Trên các đoạn SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' sao cho $SA' = \frac{1}{2}SA$, $SB' = \frac{1}{3}SB$; $SC' = \frac{1}{4}SC$. Khi đó tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C'$ và $S.ABC$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{12}$. C. $\frac{1}{24}$. D. $\frac{1}{6}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{V'_{SA'BC}}{V_{SABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$.

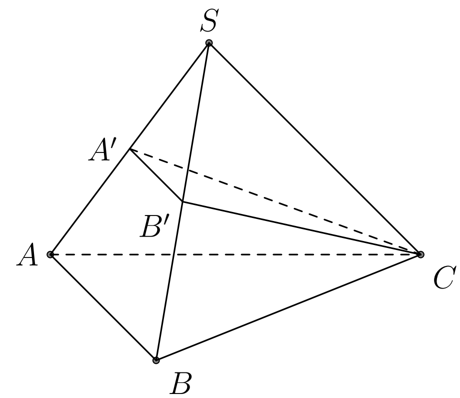
Chọn phương án C

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có A', B' lần lượt là trung điểm của SA, SB. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối chóp $S.A'B'C'$ và $S.ABC$. Tính tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{1}{8}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{V_1}{V_2} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.



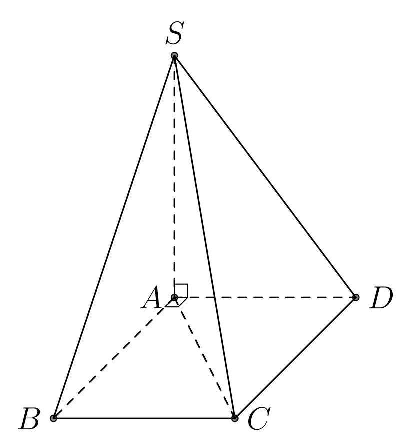
Chọn phương án B

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SA = 2a$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$

A. $\frac{a^3}{3}$. B. $\frac{a^3}{6}$. C. $\frac{a^3}{4}$. D. $\frac{2a^3}{5}$.

Lời giải.

Ta có $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot 2a = \frac{a^3}{3}$.



Chọn phương án (A)

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 3a$, $BC = a$, cạnh bên $SD = 2a$ và SD vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

(A) a^3. **(B)** $2a^3$. **(C)** $6a^3$. **(D)** $3a^3$.

Lời giải.

Ta có thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3} \cdot SD \cdot AB \cdot BC = \dfrac{1}{3} \cdot 2a \cdot 3a \cdot a = 3a^3$.

Chọn phương án (D)

Câu 20. Cho chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 4, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = 6$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

(A) $24\sqrt{3}$. **(B)** $8\sqrt{3}$. **(C)** $6\sqrt{3}$. **(D)** $4\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $V = \dfrac{1}{3}.SA.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.6.\dfrac{4^2\sqrt{3}}{4} = 8\sqrt{3}$.

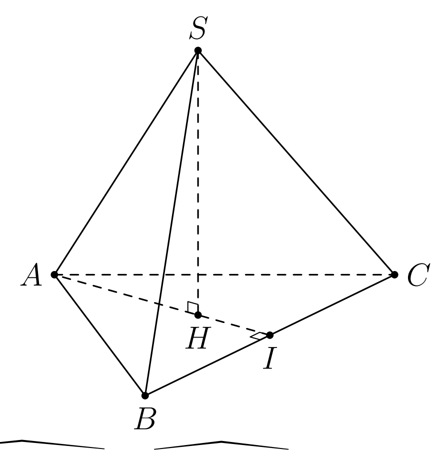
Chọn phương án (B)

B MỨC ĐỘ 2

Câu 21. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và đáy bằng 30°. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{18}$. **(B)** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{36}$. **(C)** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **(D)** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC). Khối chóp $S.ABC$ đều nên H là trọng tâm của tam giác ABC.

Xét tam giác ABI ta có

$$AI = \sqrt{AB^2 - BI^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vì H là trọng tâm của tam giác ABC nên

$$AH = \frac{2}{3}AI = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Lại có AH là hình chiếu vuông góc của SA lên (ABC). Suy ra $\widehat{(SA,(ABC))} = \widehat{(SA, AH)} = 30^\circ$.

Xét tam giác SAH ta có

$$SH = \tan 30^\circ \cdot AH = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{3}.$$

Diện tích tam giác ABC là

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2}a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}SH = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\frac{a}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{36}.$$

Chọn phương án D

Câu 22. Cho một hình chóp tam giác đều có cạnh bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 60°. Thể tích khối chóp đó là

A $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B** $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$. **C** $\frac{a^3}{12}$. **D** $\frac{a^3}{36}$.

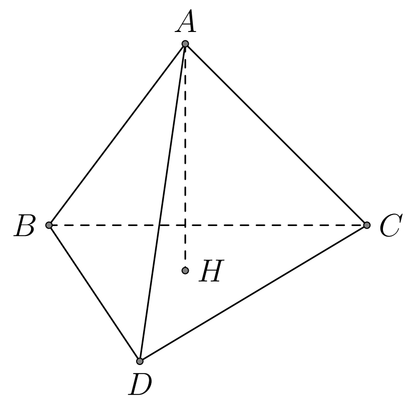
Lời giải.

Góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy là $\widehat{SAH} = 60^\circ$.

$AH = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$SH = AH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3} = a$.

Do đó $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V = \frac{1}{3}\cdot a\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.



Chọn phương án A

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, biết $AB = 4a, SB = 6a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là V. Tỉ số $\frac{4a^3}{3V}$ có giá trị là

A $\frac{\sqrt{5}}{10}$. **B** $\frac{3\sqrt{5}}{8}$. **C** $\frac{\sqrt{5}}{8}$. **D** $\frac{\sqrt{5}}{160}$.

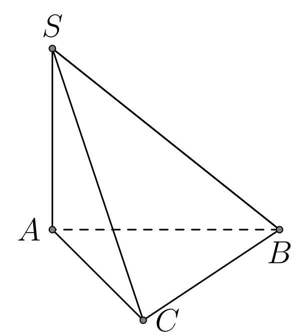
Lời giải.

Ta có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{36a^2 - 16a^2} = 2a\sqrt{5}$

$\Rightarrow AC = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{4a}{\sqrt{2}} = 2a\sqrt{2}$.

Do đó $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC^2 = \frac{1}{2}(2a\sqrt{2})^2 = 4a^2$.

Vậy $V = \frac{1}{3}SA\cdot S_{ASC} = \frac{1}{3}\cdot 2a\sqrt{5}\cdot 4a^2 = \frac{8\sqrt{5}}{3}a^3 \Rightarrow \frac{4a^3}{3V} = \frac{\sqrt{5}}{10}$.

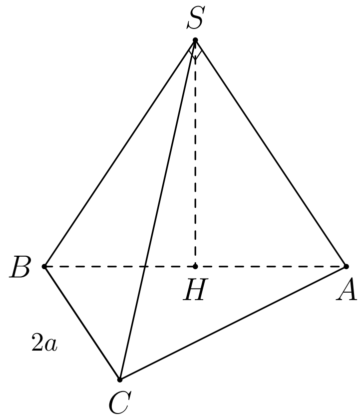


Chọn phương án A

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có $(SAB)\perp(ABC)$, tam giác ABC đều cạnh $2a$, tam giác SAB vuông cân tại S. Tính thể tích hình chóp $S.ABC$.

A $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C** $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **D** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.



Kẻ $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABC)$ Vì $(ABC) \cap (ABC) = AB$ và $(ABC) \perp (ABC)$.

Ta có: $SH = \dfrac{AB}{2} = a$ (Do SAB là tam giác vuông cân tại S cạnh huyền $AB = 2a$).

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = (2a)^2\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}a^2$.

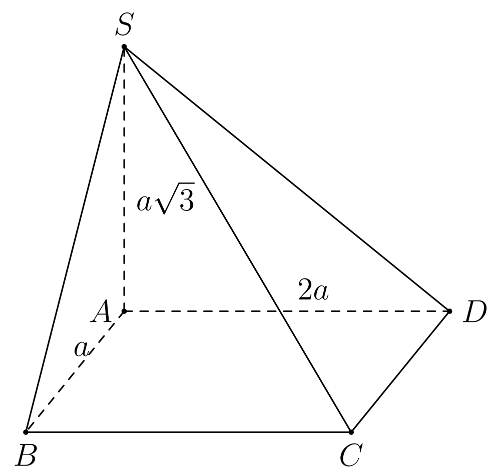
Vậy thể tích khối chóp $SABC$ là: $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3}.a.\sqrt{3}a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Chọn phương án A

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

A $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B** $a^3\sqrt{3}$. **C** $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **D** $2a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.



Ta có: $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot \dfrac{1}{2}AB \cdot BC = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Chọn phương án A

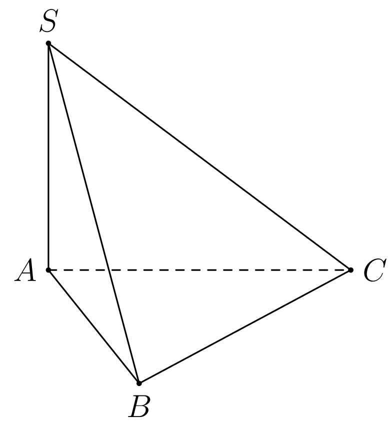
Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A $\dfrac{2a^3}{3}$. **B** $\dfrac{1}{4}$. **C** $\dfrac{a^3}{4}$. **D** $\dfrac{3a^3}{4}$.

Lời giải.

Ta có: $S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$SA \perp (ABC) \Rightarrow$ Thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}.S_{\triangle ABC}.SA = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{3} = \dfrac{a^3}{4}$.



Chọn phương án C

Câu 27. Nếu một hình chóp đều có chiều cao và cạnh đáy cùng tăng lên 3 lần thì thể tích của nó tăng lên

A 18 lần. B 54 lần. C 9 lần. D 27 lần.

Lời giải.

Phương pháp:

Công thức tính thể tích khối chóp: $V = \dfrac{1}{3}Sh$.

Cách giải:

Giả sử hình chóp có chiều cao là h và cạnh đáy là a. Thể tích khối chóp là: $V = \dfrac{1}{3}.a^2.h$.

Khi chiều cao và cạnh đáy cùng tăng lên 3 lần thì thể tích của khối chóp là:

$$V' = \frac{1}{3}(3a)^2.3h = 27.\frac{1}{3}.a^2.h = 27V.$$

Vậy thể tích tăng 27 lần.

Chọn phương án D

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $A.A'B'C'D'$ và $S.ABCD$.

A $\dfrac{1}{16}$. B $\dfrac{1}{4}$. C $\dfrac{1}{8}$. D $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow \dfrac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{1}{16}$.

Và $\dfrac{V_{S.B'D'C'}}{V_{S.ABCD}} + \dfrac{V_{S.B'D'C'}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow \dfrac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{1}{8}$.

Chọn phương án C

Câu 29. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{6}$, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$?

A $V = 9a^3$. B $V = 2a^3$. C $V = 3a^3$. D $V = 6a^3$.

Lời giải.

Ta có hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $a\sqrt{6} \Rightarrow AB = BC = CD = AD = a\sqrt{6}$.

Ta có $BD = \sqrt{DC^2 + CB^2} = 2\sqrt{a} \Rightarrow OB = \dfrac{BD}{2} = a\sqrt{3}$.

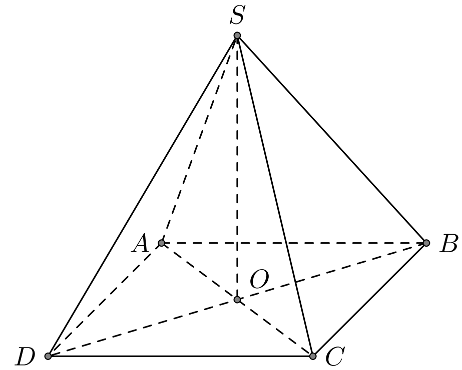
Diện tích ΔABC là $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot BC = 3a^2$.

Vì góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60^\circ \Rightarrow \widehat{SBO} = 60^\circ$.

Ta có $SO = OB \cdot \tan \widehat{SBO} = 3a$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SO \cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot 3a \cdot 3a^2 = 3a^3$.



Chọn phương án C

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a\sqrt{3}$, $AD = a$, cạnh SA có độ dài bằng $2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.BCD$.

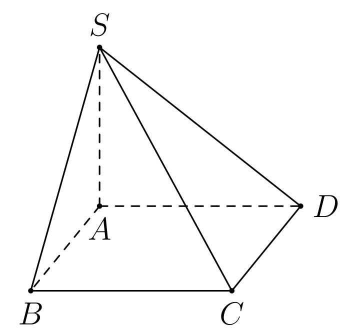
(A) $\dfrac{2a^3}{3}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải.

Diện tích tam giác BCD là $S_{BCD} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}a^2\sqrt{3}$.

Đường cao của khối chóp là $SA = 2a$.

Thể tích khối chóp $S.BCD$ là $V_{S.BCD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{BCD} \cdot SA = \dfrac{1}{3}a^3\sqrt{3}$.



Chọn phương án B

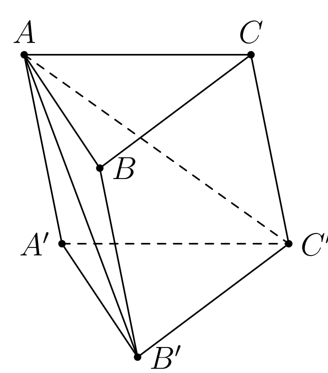
Câu 31. Lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Khi đó, thể tích khối chóp $A.BCC'B'$ bằng

(A) $\dfrac{V}{2}$. (B) $\dfrac{3V}{4}$. (C) $\dfrac{2V}{3}$. (D) $\dfrac{V}{3}$.

Lời giải.

Ta có $V_{A.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}V$.

Suy ra $V_{A.BCC'B'} = V - V_{A.A'B'C'} = \dfrac{2}{3}V$.



Chọn phương án C

Câu 32. Cho khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng $2a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

(A) $\dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$. **(B)** $\dfrac{8a^3}{3}$. **(C)** $\dfrac{8\sqrt{2}a^3}{3}$. **(D)** $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải.

Diện tích đáy $S_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$.
Đường chéo đáy $AC = 2\sqrt{2}a$ nên $AO = a\sqrt{2}$,
do đó chiều cao $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = a\sqrt{2}$.
Vậy thể tích là $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \dfrac{1}{3}4a^2a\sqrt{2} = \dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$.

Chọn phương án (A)

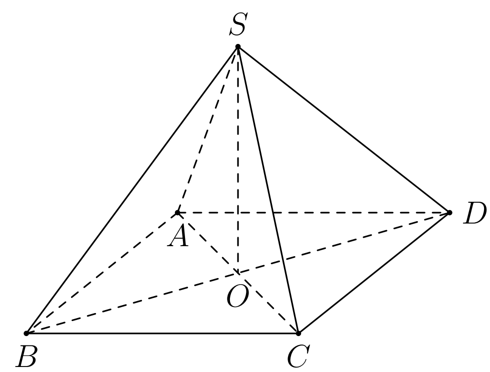
Câu 33. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a, tam giác ABD đều, SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = 2a$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **(B)** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **(C)** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **(D)** $a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $h = SO = 2a$, $S = S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}Sh = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot 2a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.



Chọn phương án (B)

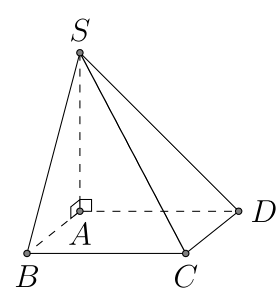
Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$. Biết SA vuông góc với đáy và $SC = a\sqrt{5}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

(A) $V = \dfrac{2a^3}{3}$. **(B)** $V = 2a^3$. **(C)** $V = \dfrac{a^3}{3}$. **(D)** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$ nên $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a$.
Tam giác SAC vuông tại A có $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = a$.
Thể tích của khối chóp

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3}a \cdot \left(a\sqrt{2}\right)^2 = \frac{2a^3}{3}.$$



Chọn phương án (A)

Câu 35. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$.

(A) $V = \dfrac{a^3}{8}$. **(B)** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **(C)** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **(D)** $V = \dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AB, suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Ta có $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \times SH \times S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{8}$.

Chọn phương án A

Câu 36. Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy là a và mặt bên tạo với đáy một góc $45°$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

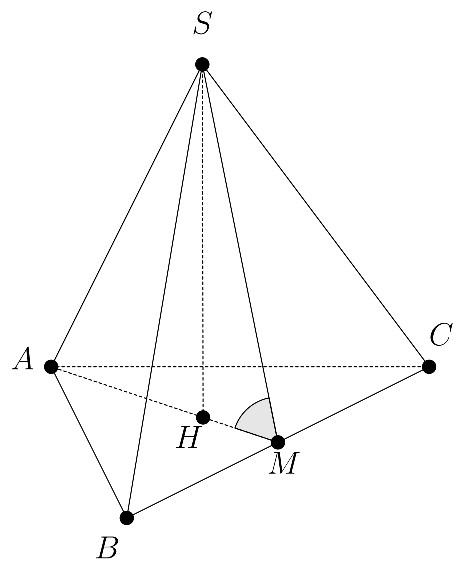
A $\dfrac{a^3}{8}$. B $\dfrac{a^3}{24}$. C $\dfrac{a^3}{12}$. D $\dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Tính diện tích đáy và chiều cao rồi áp dụng công thức $V = \dfrac{1}{3}Sh$ tính thể tích.

Cách giải:



Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC suy ra SH là đường cao.

Góc giữa mặt bên và đáy là góc giữa SM và AM với M là trung điểm của BC.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow MH = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

Tam giác vuông SHM có $MH = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}, SMH = 45°$ nên $SH = HM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Vậy thể tích $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC} \cdot SH = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a^3}{24}$.

Chọn phương án B

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{3}$, $AB = a$, $BC = 2a$, $AC = a\sqrt{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

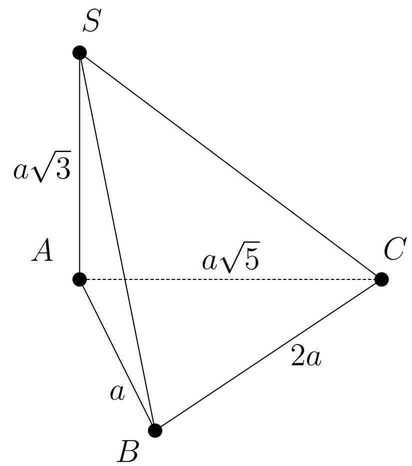
A $2a^3\sqrt{3}$. B $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. C $\dfrac{a^3}{\sqrt{3}}$. D $a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Tính diện tích đáy và chiều cao rồi áp dụng công thức $V = \dfrac{1}{3}Sh$ tính thể tích.

Cách giải:



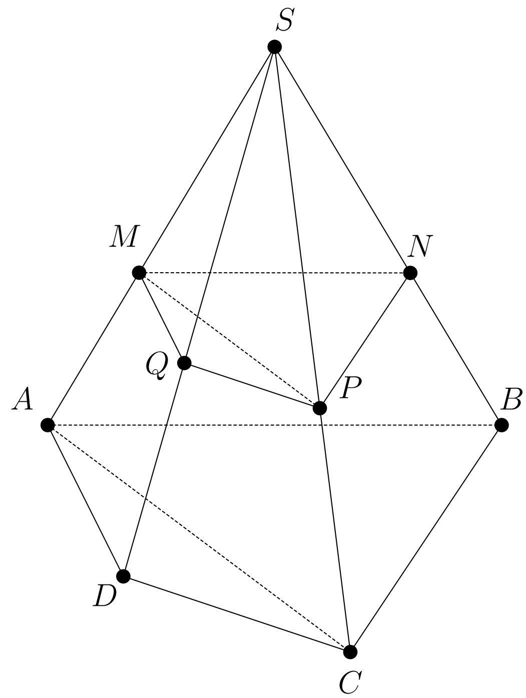
Xét tam giác ABC có $AB^2 + BC^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2 = AC^2$.
Nên tam giác ABC vuông tại B (Định lí Pytago đảo).
Thể tích $V = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \cdot SA = \dfrac{1}{6} \cdot a \cdot 2a \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{a^3}{\sqrt{3}}$.
Chọn phương án C

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết thể tích khối chóp $S.MNPQ$ là 1.

A 16. **B** 8. **C** 2. **D** 4.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng công thức tính tỉ số thể tích đối với khối chóp tam giác: $\dfrac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SA} \cdot \dfrac{SN}{SB} \cdot \dfrac{SP}{SC}$ với M, N, P lần lượt thuộc SA, SB, SC.
Cách giải:



Ta có $\dfrac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ADC}} = \dfrac{SM}{SA} \cdot \dfrac{SP}{SC} \cdot \dfrac{SQ}{SD} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$ $\dfrac{V_{S.MPN}}{V_{S.ACB}} = \dfrac{SM}{SA} \cdot \dfrac{SP}{SC} \cdot \dfrac{SN}{SB} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$

Suy ra $\dfrac{1}{8} = \dfrac{V_{S.MNP}}{V_{S.ADC}} = \dfrac{V_{S.MPN}}{V_{S.ACB}} = \dfrac{V_{S.MPN} + V_{S.MPN}}{V_{S.ADC} + V_{S.ACB}} = \dfrac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = 8V_{S.MNPQ} = 8.$

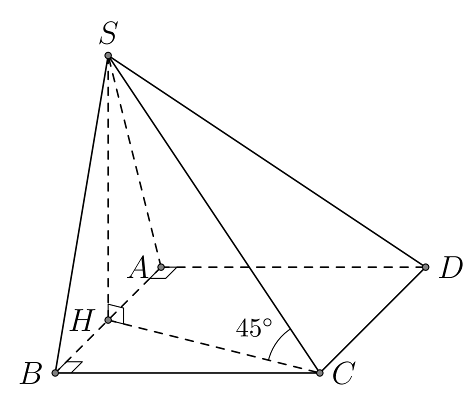
Chú ý: Công thức tỉ số thể tích trên chỉ áp dụng đối với chóp tam giác.

Chọn phương án B

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 45°. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{24}$. **D** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AB.

$(SAB) \perp (ABCD), (SAB) \cap (ABCD) = AB$,

mà $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Do đó $(SC, (ABCD)) = \widehat{SCH} = 45^\circ$.

Xét tam giác vuông BHC có $HC = \sqrt{BC^2 + BH^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét tam giác vuông SHC có $SH = HC = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Suy ra $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$.

Chọn phương án D

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SC vuông góc với mặt phẳng $(ABC), SC = a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

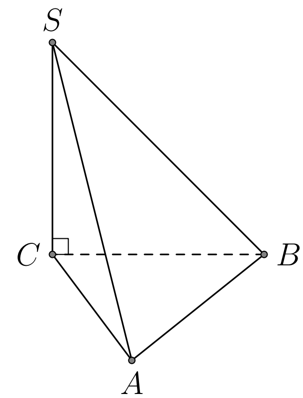
A $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **D** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.

Đáy ABC là tam giác đều cạnh a nên diện tích bằng $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Đường cao của hình chóp là $SC = a$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $\dfrac{1}{3}SC \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3}a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ (đvdt)



Chọn phương án D

C MỨC ĐỘ 3

Câu 41. Cho khối chóp $S.ABC$ có $AB = 5$ cm, $BC = 4$ cm, $CA = 7$ cm. Các mặt bên tạo với mặt phẳng đáy (ABC) một góc $30°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}cm^3$. **B** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}cm^3$. **C** $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}cm^3$. **D** $\dfrac{4\sqrt{3}}{4}cm^3$.

Lời giải.

Gọi H là chân đường cao của khối chóp $S.ABC$.

Lần lượt gọi hình chiếu của H lên các cạnh AB, BC, CA là D, E, F.

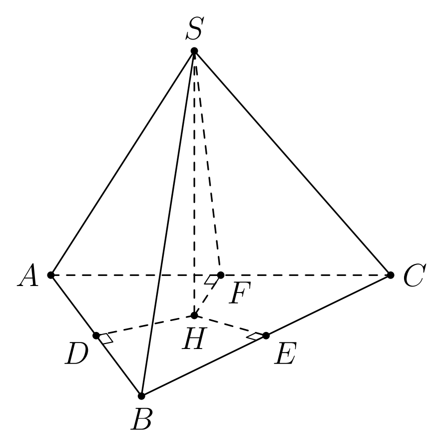
Khi đó ta có góc giữa các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCA)$ với mặt đáy (ABC) lần lượt là $\widehat{SDH}, \widehat{SHE}, \widehat{SFH}$

$\Rightarrow \widehat{SDH} = \widehat{SDH} = \widehat{SEH} = \widehat{SFH} = 30°$.

Từ đó suy ra $DH = HE = HF$.

Suy ra H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có

$p = \dfrac{AB + BC + CA}{2} = 8$ (cm).



$\Rightarrow S_{ABC} = \sqrt{p(p-5)(p-4)(p-7)} = 4\sqrt{6}$.

Mà $S_{ABC} = pr \Rightarrow r = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ (cm).

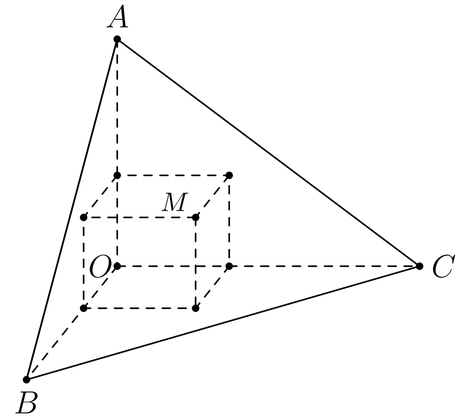
Do đó $SH = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \cdot \tan 30° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (cm).

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt{2}}{2}4\sqrt{6} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ (cm^3).

Chọn phương án B

Câu 42.

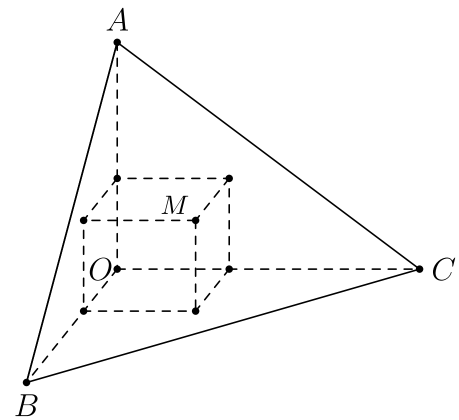
Có một khối gỗ dạng hình chóp $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = 3$ cm, $OB = 6$ cm, $OC = 12$ cm. Trên mặt (ABC) người ta đánh dấu một điểm M sau đó người ta cắt gọt khối gỗ để thu được một hình hộp chữ nhật có OM là một đường chéo đồng thời hình hộp có 3 mặt nằm trên 3 mặt của tứ diện (xem hình vẽ). Thể tích lớn nhất của khối gỗ hình hộp chữ nhật bằng



Ⓐ 8 cm^3. Ⓑ 24 cm^3. Ⓒ 12 cm^3. Ⓓ 36 cm^3.

Lời giải.

Gọi khoảng cách từ điểm M đến các mặt bên $(OAB), (OBC), (OCA)$ lần lượt là a, b, c.



Khi đó $V_{O.ABC} = V_{M.OAB} + V_{M.OBC} + V_{M.OAC}$.

Hay $\frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 12 = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot b \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 + \frac{1}{3} \cdot c \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 12$

$\Rightarrow 12 = a + 4b + 2c$.

Thể tích khối gỗ hình hộp chữ nhật theo đề bài là $V = abc$.

Ta có $abc = \frac{1}{8} a \cdot 4b \cdot 2c \leq \frac{1}{8}\left(\frac{a+4b+2c}{3}\right)^3 = \frac{1}{8} \cdot \frac{12^3}{27} = 8$ (Theo bất đẳng thức Cô-si).

Vậy $V = abc$ đạt giá trị lớn nhất bằng 8 cm^3.

Khi $a = 4b = 2c \Leftrightarrow a = 4$ cm, $b = 1$ cm, $c = 2$ cm.

Chọn phương án Ⓐ

Câu 43. Cho khối chóp tam giác $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), đáy là tam giác ABC cân tại A, độ dài trung tuyến AD bằng a, cạnh bên SB tạo với đáy góc 30° và tạo với mặt phẳng (SAD) góc 30°. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

Ⓐ $\frac{a^3}{3}$. Ⓑ $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. Ⓓ $\frac{a^3}{6}$.

Lời giải.

Đặt $SA = x > 0$. Ta có $BD \perp (SAD) \Rightarrow \widehat{BSD} = 30^\circ, \widehat{SBA} = 30^\circ$.

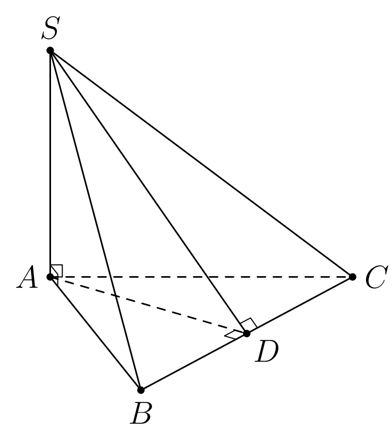
$AB = SA \cdot \tan 30^\circ = x\sqrt{3}$.

$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2x$.

$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{3x^2 - a^2}$.

Xét tam giác vuông SBD, ta có

$\sin BSD = \frac{BD}{SB} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{3x^2 - a^2} = 2x \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Khi đó $SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}, BC = 2BD = 2\sqrt{3 \cdot \frac{a^2}{2} - a^2} = a\sqrt{2}$.

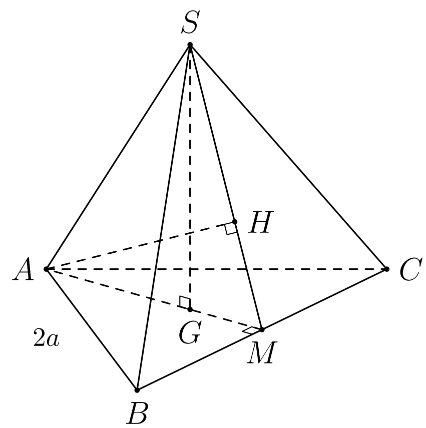
Vậy $V = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot 12 \cdot a \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3}{6}$.

Chọn phương án Ⓓ

Câu 44. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $AB = 2a$, khoảng cách từ A đến (SBC) là $\dfrac{3a}{2}$. Tính thể tích hình chóp $S.ABC$.

(A) $a^3\sqrt{3}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Đáp án là D

Gọi M là trung điểm của BC và G là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Do $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SG \perp (ABC)$ và G là trọng tâm $\triangle ABC$.

Ta có: $\begin{cases} AM \perp BC \\ SG \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$ hay $(SBC) \perp (SAM)$ theo giao tuyến SM.

Trong (SAM), kẻ $AH \perp SM, H \in SM \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Vậy $\mathrm{d}(A,(SBC)) = AH = \dfrac{3a}{2}$.

Vì $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh $2a$ nên $AM = \dfrac{2a.\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ và $S_{\triangle ABC} = \dfrac{(2a)^2.\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.

Đặt $SG = x$. Ta có: $GM = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Xét $\triangle SGM$ vuông tại G ta có: $SM = \sqrt{SG^2 + GM^2} = \sqrt{x^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}$

Xét $\triangle SAM$ ta có: $S_{\triangle SAM} = \dfrac{1}{2}SG.AM = \dfrac{1}{2}AH.SM \Rightarrow x.a\sqrt{3} = \dfrac{3a}{2}.\sqrt{x^2 + \dfrac{a^2}{3}}$

$\Leftrightarrow 4x^2 = 3\left(x^2 + \dfrac{a^2}{3}\right) \Leftrightarrow x = a$. Do đó: $SG = a$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SG.S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3}a.a^2\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

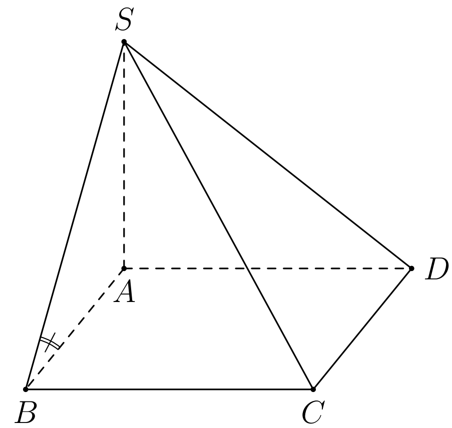
Chọn phương án D

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$. Biết góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng $60°$. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

(A) $a^3\sqrt{3}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải.

Góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là $\widehat{SBA} = 60°$.
Ta có: Diện tích đáy: $S_{ABCD} = a^2$.
Tam giác SAB vuông tại $A \Rightarrow SA = AB \cdot \tan\left(\widehat{SBA}\right) = a \cdot \tan 60° = a\sqrt{3}$.
Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:
$V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3}a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.



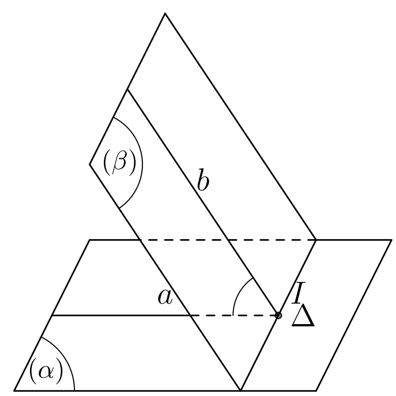
Chọn phương án B

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $AB = a, \widehat{BAD} = 60°, SO \perp (ABCD)$ và mặt phẳng (SCD) tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

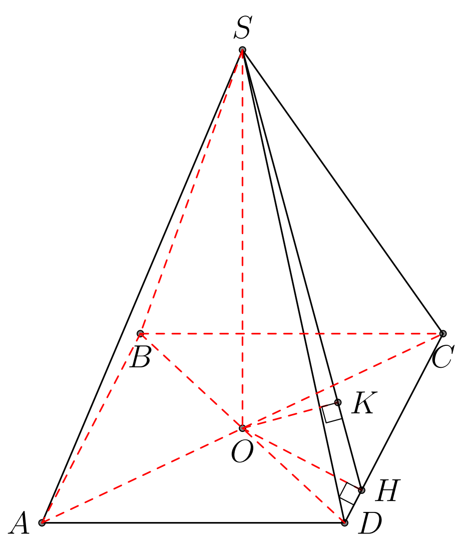
(A) $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. (B) $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. (C) $\frac{\sqrt{3}a^3}{48}$. (D) $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$.

Lời giải.

Phương pháp - Xác định góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β).
- Tìm giao tuyến Δ của (α) và (β).
- Xác định một mặt phẳng $(\gamma) \perp \Delta$.
- Tìm các giao tuyến $a = (\alpha) \cap (\gamma); b = (\beta) \cap (\gamma)$.
- Góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là: $\widehat{((\alpha), (\beta))} = \widehat{(a, b)}$.



Cách giải:



Kẻ $OH \perp CD, (H \in CD)$.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp OH \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOH) \Rightarrow \widehat{((SCD); (ABCD))} = \widehat{SHO} = 60°$.

$ABCD$ là hình thoi tâm O, $\widehat{BAD}=60^\circ \Rightarrow \Delta BCD$ đều nên $OH=\dfrac{1}{2}d(B,CD)=\dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

ΔSOH vuông tại $O \Rightarrow SO=OH.\tan\widehat{SHO}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}.\tan 60^\circ=\dfrac{3a}{4}$.

Diện tích hình thoi $ABCD$ là $S_{ABCD}=2S_{ABC}=2.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

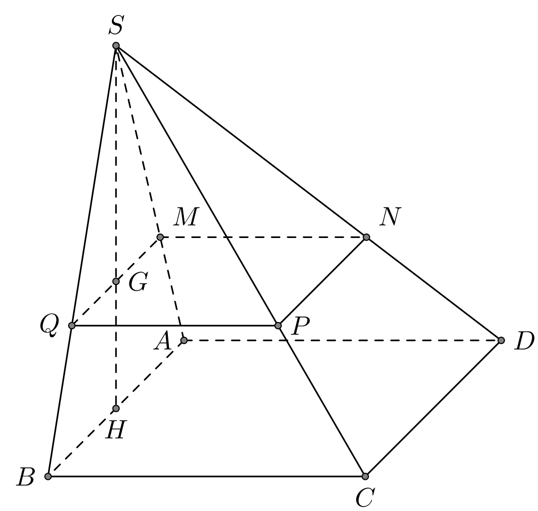
Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot SO\cdot S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{3a}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Chọn phương án B

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, mặt bên (SAB) là một tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ và có diện tích bằng $\dfrac{27\sqrt{3}}{4}$(đvdt). Một mặt phẳng đi qua trọng tâm tam giác (SAB) và song song với mặt đáy $(ABCD)$ chia khối chóp $(S.ABCD)$ thành hai phần, tính thể tích V của phần chứa điểm S?

A $V=24$. **B** $V=8$. **C** $V=12$. **D** $V=36$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AB, do tam giác SAB đều nên $SH\perp AB \Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

$S_{\Delta SAB}=\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{27\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow x^2=27\Leftrightarrow x=3\sqrt{3}$.

Vậy $SH=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3\cdot\sqrt{3}}}{2}=\dfrac{9}{2}$.

Suy ra $S_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SH\cdot S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{9}{2}\left(3\sqrt{3}\right)^2=\dfrac{81}{2}$.

Dễ thấy mặt phẳng đi qua G song song với mặt đáy cắt hình chóp theo thiết diện là hình vuông $MNPQ$ như hình vẽ.

Ta có $\dfrac{MQ}{AB}=\dfrac{SG}{SH}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow MQ=\dfrac{3\sqrt{3}\cdot 2}{3}=2\sqrt{3}$

và $SG=\dfrac{2}{3}SH=\dfrac{2\cdot\dfrac{9}{2}}{3}=3$.

Vậy $V=\dfrac{1}{3}SG\cdot S_{MNPQ}=\dfrac{1}{3}\cdot 3\cdot\left(2\sqrt{3}\right)^2=12$.

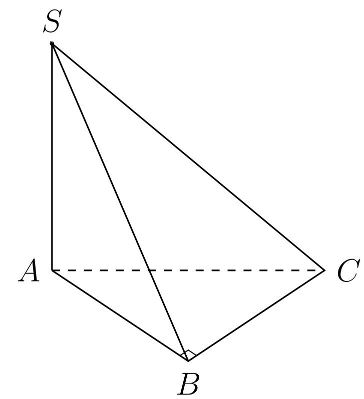
Chọn phương án C

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy. Tam giác ABC vuông cân tại B, biết $SA=AC=2a$. Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ là

A $V=\dfrac{2a^3}{3}$. **B** $V=\dfrac{a^3}{3}$. **C** $V=2a^3$. **D** $V=\dfrac{4a^3}{3}$.

Lời giải.

Do tam giác ABC vuông cân tại B nên
$AB = AC = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$.
$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SA \cdot \dfrac{1}{2}BA \cdot BC = \dfrac{1}{3} \cdot 2a \cdot \dfrac{1}{2}a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{2a^3}{3}$.



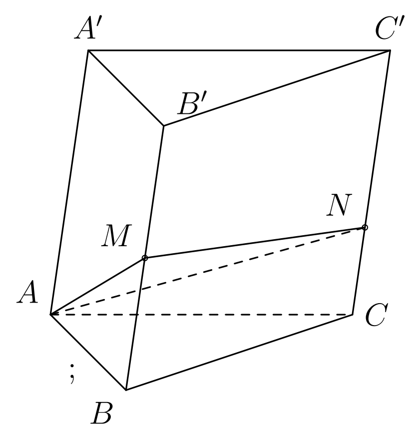
Chọn phương án A

Câu 49. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Gọi M là trung điểm cạnh BB' điểm N thuộc cạnh CC' sao cho $CN = 2C'N$. Tính thể tích V'của khối chóp $A.BCNM$ theo V.

A $V' = \dfrac{7V}{12}$. **B** $V' = \dfrac{7V}{18}$. **C** $V' = \dfrac{V}{3}$. **D** $V' = \dfrac{V}{2}$.

Lời giải.

Gọi $h = \mathrm{d}(B', CC')$. Khi đó ta có $S_{BCC'B'} = h \cdot CC'$ và
$S_{BMNC} = \dfrac{(BM + CN) \cdot h}{2} = \dfrac{1}{2}h \cdot \left(\dfrac{1}{2}CC' + \dfrac{2}{3}CC'\right) = \dfrac{7}{12}h \cdot CC'$.
Ta có $\dfrac{V'}{V_{ABCC'B'}} = \dfrac{S_{BMNC}}{S_{BCC'B'}} = \dfrac{7}{12}$.
Mặt khác ta có $V_{ABCC'B'} = \dfrac{2}{3}V$.
Vậy $V' = \dfrac{7}{12} \cdot \dfrac{2}{3}V = \dfrac{7V}{18}$.



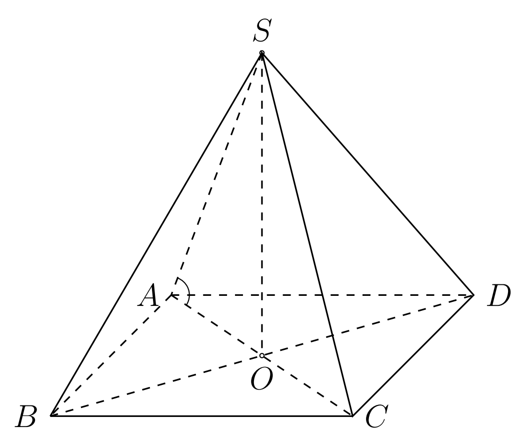
Chọn phương án B

Câu 50. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh $AB = a$, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng $45°$. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ là

A $V = \dfrac{a^3}{3}$. **B** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **C** $V = \dfrac{a^3}{6}$. **D** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có $SO \perp (ABCD)$.
$\Rightarrow (SA, (ABC)) = (SA, (ABCD)) = \widehat{SAO}$
$\Rightarrow SO = OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.



Chọn phương án B

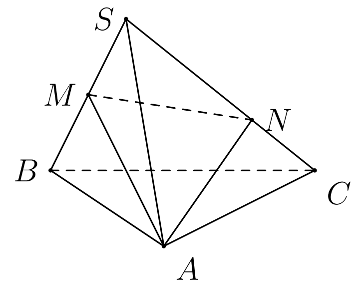
Câu 51. Cho hình chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 9, diện tích đáy bằng 5. Gọi M là trung điểm cạnh SB và N thuộc cạnh SC sao cho $NS = 2NC$. Thể tích V của khối chóp $A.BMNC$ là

A. $V = 10$. B. $V = 30$. C. $V = 5$. D. $V = 15$.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SM}{SB} \cdot \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AMN} = \dfrac{1}{3}V_{S.ABC}$

Suy ra: $V_{A.BMNC} = \dfrac{2}{3}V_{S.ABC} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 5 \cdot 9 = 10$



Chọn phương án A

Câu 52. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ là

A. $V = \dfrac{2a^3\sqrt{6}}{12}$. B. $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. C. $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. D. $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải.

Gọi K là trung điểm của đoạn AB.

Ta có ΔSAB đều $\Rightarrow SK \perp AB$.

Mà $(SAB) \perp (ABC)$ theo giao tuyến AB

$\Rightarrow SK \perp (ABC) \Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SK \cdot S_{\Delta ABC}$

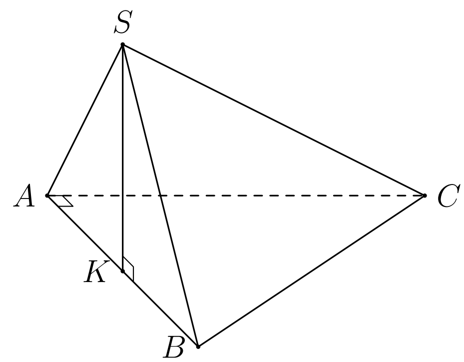
Ta có ΔABC vuông tại A có $AB = a, BC = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = \dfrac{1}{2}a \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$

ΔSAB đều cạnh $AB = a \Rightarrow$ đường cao $SK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

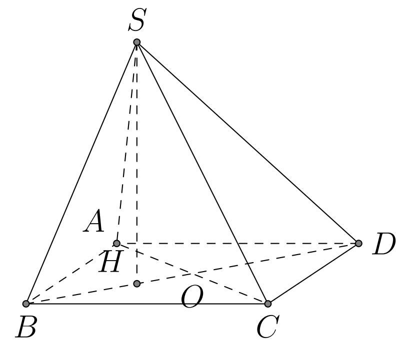


Chọn phương án C

Câu 53. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $ABC = 60^\circ$, $SA = SB = SC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$. B. $V = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{2}$. C. $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. D. $V = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.



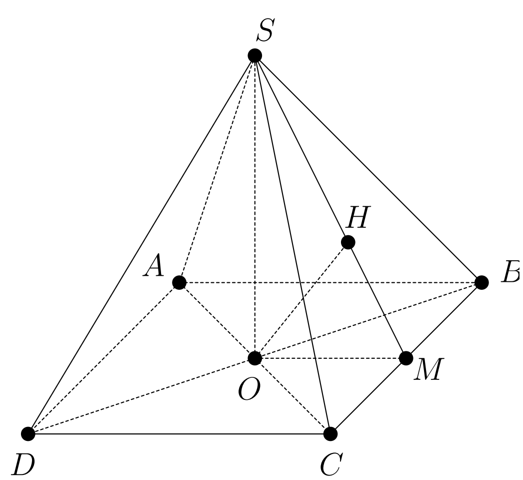
Vì $ABCD$ là hình thoi nên $AB = BC$ mà $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên ABC là tam giác đều cạnh a.
Gọi H là trọng tâm tam giác ABC, O là giao điểm hai đường chéo hình thoi.
Vì $SA = SB = SC$ nên S thuộc trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC hay chân đường cao hạ từ S xuống (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp H của tam giác ABC suy ra $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
Vì ABC đều cạnh a tâm H nên $AC = a$, $BO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $BH = \dfrac{2}{3}BO = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Xét tam giác BHD vuông tại H có $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.
Diện tích hình thoi $ABCD$ là $\dfrac{1}{2}AC \cdot BD = \dfrac{1}{2}AC \cdot 2BO = \dfrac{1}{2}a \cdot 2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
Thể tích $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{2}SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$.
Chọn phương án A

Câu 54. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh $2a$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $4a^3$. Tính khoảng cách từ điểm O tới mặt bên của hình chóp.

A $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B** $\dfrac{3a}{4}$. **C** $\dfrac{3a\sqrt{10}}{10}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{10}}{10}$.

Lời giải.

Phương pháp:
Sử dụng quan hệ vuông góc giữa đường thẳng và mặt phẳng để xác định khoảng cách $\mathrm{d}\left(O;(P)\right) = OH$ với $OH \perp (P)$ tại H.
(Để chứng minh $OH \perp (P)$ ta chứng minh OH vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (P)).
Ta tính SO dựa vào công thức thể tích hình chóp, tính OH dựa vào hệ thức lượng trong tam giác vuông.
Cách giải:



Vì $S.ABCD$ là chóp tứ giác đều có O là tâm đáy nên $SO \perp (ABCD)$.
Gọi M là trung điểm BC, trong tam giác SOM kẻ $OH \perp SM$ tại H.
Vì $ABCD$ là hình vuông tâm O nên $OB = OC = OA = OD = \dfrac{BD}{2}$.
Suy ra $OM \perp BC$ (vì ΔOBC vuông cân có OM là trung tuyến cũng là đường cao).
Ta có $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BC$, lại có $OM \perp BC$ nên $BC \perp (SOM)$ suy ra $BC \perp OH$.
Từ đó vì $\begin{cases} OH \perp SM \\ OH \perp BC \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SBC)$ tại $H \Rightarrow \mathrm{d}\,(O;(SBC)) = OH$.
Xét tam giác OBC vuông cân tại O có trung tuyến $OM = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2} \cdot 2a = a$.
Diện tích đáy $S_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$.
Ta có $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} \Leftrightarrow 4a^3 = \dfrac{1}{3}SO \cdot 4a^2 \Rightarrow SO = 3a$.
Xét tam giác SOM vuông tại M có OH là đường cao nên theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{1}{(3a)^2} + \dfrac{1}{a^2} \Leftrightarrow OH^2 = \dfrac{10}{9a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{3a\sqrt{10}}{10}$.
Vậy $\mathrm{d}\,(O;(SBC)) = \dfrac{3a\sqrt{10}}{10}$.
Chọn phương án C

Câu 55. Cho hình chóp $S.ABCDE$ có đáy hình ngũ giác và có thể tích là V. Nếu tăng chiều cao của hình chóp lên 3 lần đồng thời giảm độ dài các cạnh đi 3 lần thì ta được khối chóp mới $S'.A'B'C'D'E'$ có thể tích là V'. Tỷ số thể tích $\dfrac{V'}{V}$ là

A 3. **B** $\dfrac{1}{5}$. **C** 1. **D** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có công thức tính thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}Sh$.
Hai đa giác đồng dạng với nhau nên $S_{S'.A'B'C'D'E'} = \dfrac{1}{9}S_{S.ABCDE}$.
Chiều cao của hình chóp $S'.A'B'C'D'E'$ tăng lên 3 lần nên ta có

$$V' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9}S_{S.ABCDE}3h = \frac{1}{3}V.$$

Do đó tỉ số thể tích $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{3}$.
Chọn phương án D

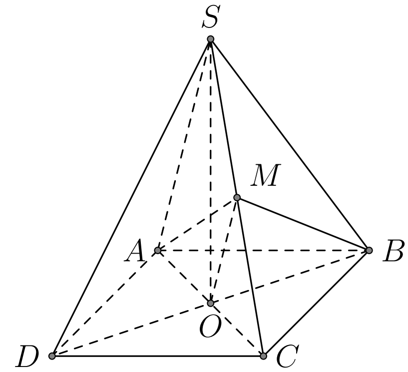
Câu 56. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có thể tích V, có O là tâm của đáy. Lấy M là trung điểm của cạnh bên SC. Thể tích khối tứ diện $ABMO$ bằng

A $\dfrac{V}{4}$. **B** $\dfrac{V}{2}$. **C** $\dfrac{V}{16}$. **D** $\dfrac{V}{8}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} V_{ABMO} &= \frac{1}{2}V_{ABMC};\\ V_{ABMC} &= \frac{1}{2}V_{SABC} = \frac{1}{4}V_{SABCD} = \frac{1}{4}V\\ \Rightarrow V_{ABMO} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}V = \frac{1}{8}V \end{aligned}$$

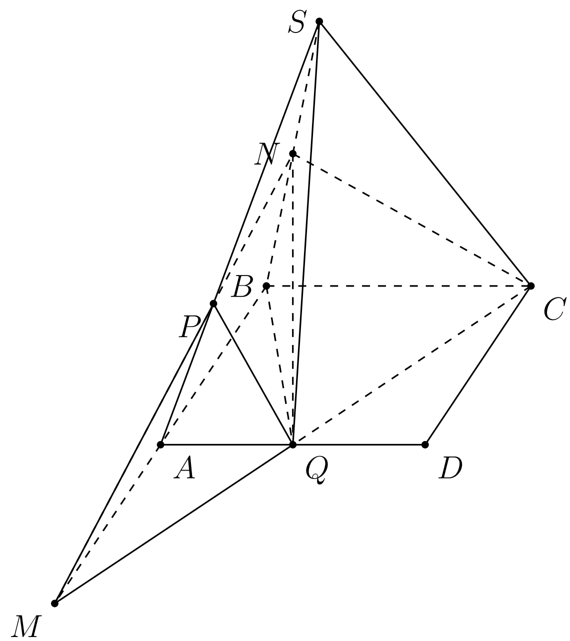


Chọn phương án D

Câu 57. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi N là trung điểm cạnh SB, M là điểm đối xứng với B qua A. Mặt phẳng (MNC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích lần lượt là V_1, V_2 với $V_1 < V_2$ và V là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tính tỷ số $\frac{V_1}{V}$.

A $\frac{7}{12}$. **B** $\frac{7}{24}$. **C** $\frac{5}{24}$. **D** $\frac{5}{12}$.

Lời giải.



Gọi $P = MN \cap SA, Q = MC \cap AD$. Ta có thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MNC) là tứ giác $CNPQ$. Dễ thấy P là trọng tâm của tam giác SBM và Q là trung điểm của đoạn AD.

Gọi V_0 thể tích của phần chứa điểm S, S là diện tích của tứ giác $ABCD$ và h chiều cao của hình chóp $S.ABCD$.

Ta có $V_0 = V_{S.NPQ} + V_{S.NQC} + V_{S.QDC}$.

Mà $V_{S.NPQ} = \frac{SP}{SA}\cdot\frac{SN}{SB}\cdot V_{S.BAQ} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot S_{ABQ}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}S\cdot h = \frac{1}{12}V$.

$V_{S.NQC} = \frac{SN}{SB}\cdot V_{S.BQC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}.S_{BQC}\cdot h = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}S\cdot h = \frac{1}{4}V$.

$V_{S.QDC} = \frac{1}{3}\cdot S_{QDC}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}S\cdot h = \frac{1}{4}V$.

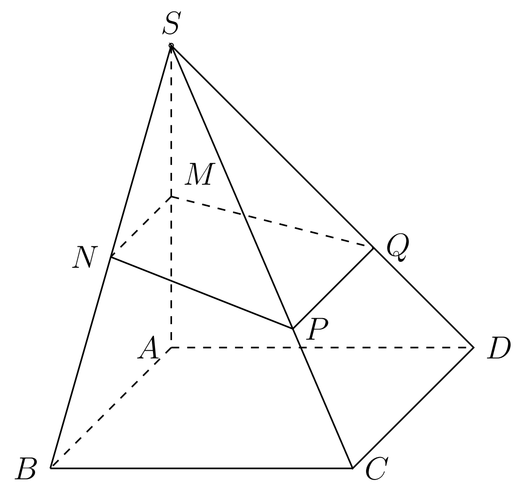
Suy ra $V_0 = \dfrac{1}{12}V + \dfrac{1}{4}V + \dfrac{1}{4}V = \dfrac{7}{12}V$.
Dẫn đến $V_2 = \dfrac{7}{12}V$ và $V_1 = V - V_2 = \dfrac{5}{12}V$.
Vậy $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{5}{12}$.
Nhận xét: kết quả này đúng cho hình chóp có đáy là hình bình hành.
Chọn phương án D

Câu 58. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích $V = 12$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB, P là điểm thuộc cạnh SC sao cho $PS = 2PC$. Mặt phẳng (MNP) cắt cạnh SD tại Q. Thể tích khối chóp $S.MNPQ$ bằng

A $\dfrac{5}{18}$. **B** $\dfrac{7}{3}$. **C** $\dfrac{4}{3}$. **D** $\dfrac{12}{25}$.

Lời giải.

Ta có $P \in (MNP) \cap (SCD)$ và $MN \parallel CD$. Do đó giao tuyến của (MNP) và (SCD) song song với CD. Qua P trong mặt phẳng (SCD) kẻ đường thẳng song song với CD cắt SD tại Q. Khi đó $(MNP) \cap (SCD) = PQ$ và $PQ \parallel CD \Rightarrow \dfrac{SP}{SC} = \dfrac{SQ}{SD} = \dfrac{2}{3}$. Ta có



$\dfrac{V_{SMNP}}{V_{SABCD}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{6} \Rightarrow \dfrac{V_{SMNP}}{V} = \dfrac{1}{12}$.

$\dfrac{V_{SMQP}}{V_{SABCD}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9} \Rightarrow \dfrac{V_{SMQP}}{V} = \dfrac{1}{9}$.

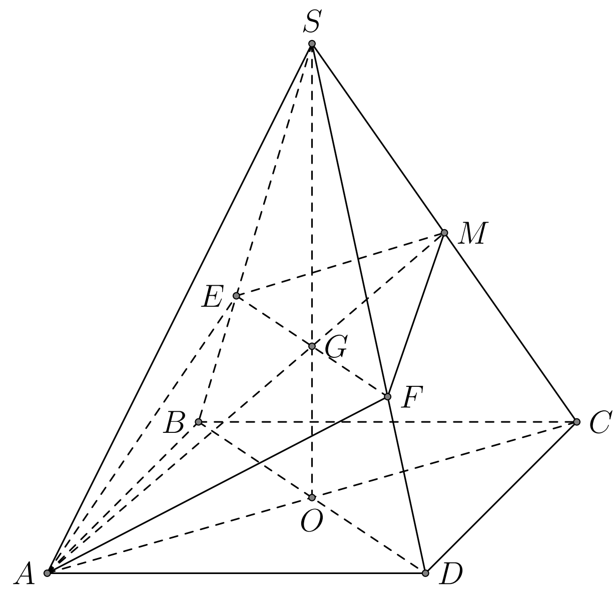
Vậy $V_{SMNPQ} = \dfrac{7}{36}V = \dfrac{7}{3}$.

Chọn phương án B

Câu 59. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên tạo với góc 60°. Gọi M là trung điểm của SC. Mặt phẳng qua AM và song song với BD, cắt SB, SD lần lượt tại E và F và chia khối chóp thành hai phần. Tính thể tích V của khối chóp không chứa đỉnh S.

A $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{36}$. **B** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{9}$. **C** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{18}$. **D** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải.



Gọi $O = AC \cap BD$, $G = AM \cap SO$, suy ra G là trọng tâm tam giác SAC nên $\dfrac{SG}{SO} = \dfrac{2}{3}$.

Ta có $(\widehat{SC,(ABCD)}) = \widehat{SCO} = 60^\circ$, do đó

$$OC = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}, SO = OC\tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Thể tích khối chóp $S.ABCD$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}\cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa AM và song song với BD, suy ra (α) là mặt phẳng đi qua G, song song với BD và cắt SB, SD lần lượt tại E và F.

Do đó, (α) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác $AEMF$, suy ra (α) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần là khối chóp $S.AEMF$ và khối đa diện $EMFABCD$.

Ta có EF đi qua G và song song BD nên $\dfrac{SE}{SB} = \dfrac{SF}{SD} = \dfrac{SG}{SO} = \dfrac{2}{3}$.

Xét hai khối chóp $S.AEF$ và $S.ABD$, ta có $\dfrac{V_{S.AEF}}{V_{S.ABD}} = \dfrac{SE}{SB}\cdot\dfrac{SF}{SD} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow V_{S.ABD} = \dfrac{2}{9}V_{S.ABCD}$.

Xét hai khối chóp $S.EFM$ và $S.BCD$, ta có $\dfrac{V_{S.EFM}}{V_{S.BCD}} = \dfrac{SE}{SB}\cdot\dfrac{SF}{SD}\cdot\dfrac{SM}{SC} = \dfrac{2}{9} \Rightarrow V_{S.EFM} = \dfrac{1}{9}V_{S.ABCD}$.

Ta có $V_{S.AEMF} = V_{S.AEF} + V_{S.EFM} = \dfrac{1}{3}V_{S.ABCD}$.

Thể tích khối chóp không chứa đỉnh S là

$$V = V_{S.ABCD} - V_{S.AEMF} = \frac{2}{3}V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{9}.$$

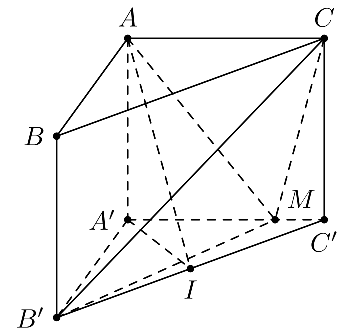
Chọn phương án B

Câu 60. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC cân tại A với $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, mặt bên $(AB'C')$ tạo với đáy (ABC) một góc 60°. Gọi M là điểm thuộc cạnh $A'C'$ sao cho $A'M = 3MC'$. Tính thể tích V của khối chóp $CMBC'$.

A $V = \dfrac{3a^3}{8}$. **B** $V = \dfrac{a^3}{24}$. **C** $V = \dfrac{a^3}{8}$. **D** $V = \dfrac{a^3}{32}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của $B'C' \Rightarrow A'I \perp B'C' \Rightarrow \widehat{IA'B'} = 60^\circ$.
Xét tam giác $A'IB'$ vuông tại I có $A'I = A'B'\cos 60^\circ = \dfrac{a}{2}$.
Ta có $B'C' \perp A'I$ và $B'C' \perp AA'$ nên góc giữa $(AB'C')$ và (ABC) là $\widehat{AIA'} = 60^\circ$.
Xét tam giác $A'IA$ vuông tại A' có $AA' = A'I \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Mà $S_{\triangle MCC'} = \dfrac{1}{4}S_{\triangle A'CC'}$ nên



$$\begin{aligned} V_{CMBC'} &= \frac{1}{4}V_{BA'CC'} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} \\ &= \frac{1}{12}\cdot AA'\cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\sin 120^\circ\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{32}. \end{aligned}$$

Chọn phương án D

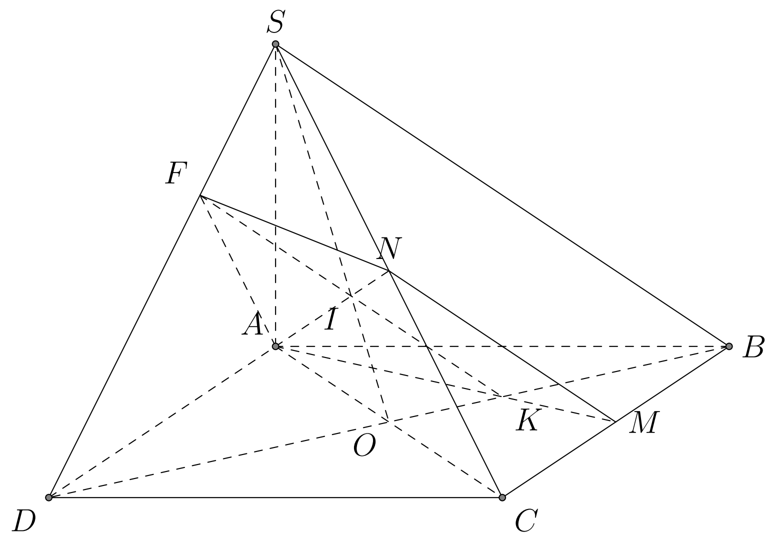
D MỨC ĐỘ 4

Câu 61. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, SC. Mặt phẳng (AMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa điểm B có thể tích là V_1. Gọi V là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tính tỷ số $\dfrac{V_1}{V}$.

A. $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{13}{24}$. B. $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{11}{24}$. C. $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{17}{24}$. D. $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{7}{12}$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của BD và AC.
I là giao điểm của SO và AN. K là giao điểm của AM và BD. Kéo dài IK cắt SD tại F.
Suy ra thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (AMN) là $AMNF$.
Vì I là giao điểm của hai đường trung tuyến AN và SO của tam giác SAC nên I là trọng tâm của tam giác SAC.
Vì K là giao điểm của hai đường trung tuyến AM và BO của tam giác ABC nên K là trọng tâm của tam giác SAC.



$\Rightarrow \dfrac{OK}{OB} = \dfrac{OI}{OS} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow IK \parallel SB$.
Hay $KF \parallel SB$
$\Rightarrow \dfrac{DK}{DB} = \dfrac{DF}{DS} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{SF}{SD} = \dfrac{1}{3}$.

Dễ thấy $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle AMC} = \dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{4}S_{ABCD} \Rightarrow V_{SAMC} = V_{SAMB} = \dfrac{1}{2}V_{SABC} = \dfrac{1}{4}V$.

Ta có: $\dfrac{V_{SAFN}}{V_{SADC}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SF}{SB} \cdot \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$.

$\dfrac{V_{SAMN}}{V_{SACM}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SN}{SC} \cdot \dfrac{SM}{SM} = \dfrac{1}{2}$.

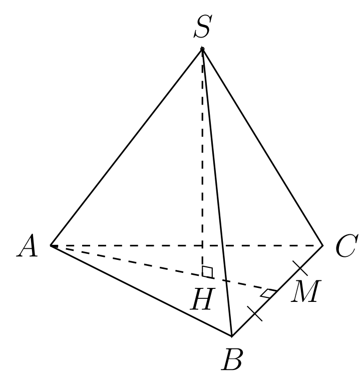
$\Rightarrow V_1 = V_{SAFN} + V_{SAMN} + V_{SAMB} = \dfrac{1}{12}V + \dfrac{1}{8}V + \dfrac{1}{4} = \dfrac{11}{24}V \Rightarrow \dfrac{V_1}{V} = \dfrac{11}{24}$.

Chọn phương án B

Câu 62. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC = 4$, $BC = 2$, $SA = 4\sqrt{3}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SAC} = 30^\circ$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A $V = 8$. **B** $V = 6$. **C** $V = 4$. **D** $V = 12$.

Lời giải.



Ta có $\triangle SAB = \triangle SAC$ $c.g.c$ hay tam giác SBC cân.

Gọi M là trung điểm BC ta có $AM \perp BC$, $SM \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAM)$.

Gọi H là hình chiếu của S trên AM thì $SH \perp AM$, $SH \perp BC$ nên SH là đường cao của hình chóp. Xét tam giác SAB có $SB^2 = SA^2 + AB^2 - 2 \cdot SA \cdot AB \cdot \cos 30^\circ = 16 \Rightarrow SB = 4 \Rightarrow SC = 4$.

Do đó $SM^2 = \dfrac{SB^2 + SC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4} = 15 \Rightarrow SM = \sqrt{15}$.

Tam giác ABC có $AM^2 = \dfrac{AB^2 + AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4} = 15 \Rightarrow AM = \sqrt{15}$.

Khi đó $S_{SAM} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 6$.

Do đó $SH = \dfrac{2S_{SAM}}{AM} = \dfrac{2 \cdot 6}{\sqrt{15}} = \dfrac{4\sqrt{15}}{5}$.

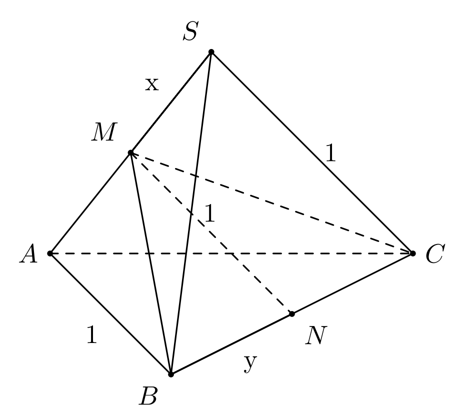
Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC} \cdot SH = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}AM \cdot BC \cdot SH = 4$.

Chọn phương án C

Câu 63. Cho x, y là các số thực dương. Xét các khối chóp $S.ABC$ có $SA = x$, $BC = y$ các cạnh còn lại đều bằng 1. Khi x, y thay đổi, thể tích khối chóp $S.ABC$ có giá trị lớn nhất bằng.

A $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$. **B** $\dfrac{1}{8}$. **C** $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$. **D** $\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Vì tam giác SAB, SAC lần lượt cân tại B và C nên $BM \perp SA$, $CM \perp SA$. Suy ra $SA \perp (BMC)$.

Ta có $V_{S.MBC} = V_{S.AMBC}$ nên

$$V_{S.ABC} = V_{S.MBC} + V_{S.AMBC} = 2V_{S.MBC} = \frac{2}{3}.SM \cdot S_{\triangle MBC}.$$

Ta có $BM = CM = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4}}$, tam giác BCM cân tại M nên $MN = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4}}$.

$$V_{S \cdot ABC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2}y\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{x^2}{4} \cdot \frac{y^2}{4}\left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}\right)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\left(1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}\right)\geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}\cdot\frac{y^2}{4}\cdot\left(1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}\right)}\Rightarrow\frac{x^2}{4}\cdot\frac{y^2}{4}\left(1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}\right)\leq\frac{1}{27}.$$

Dấu "="xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất bằng

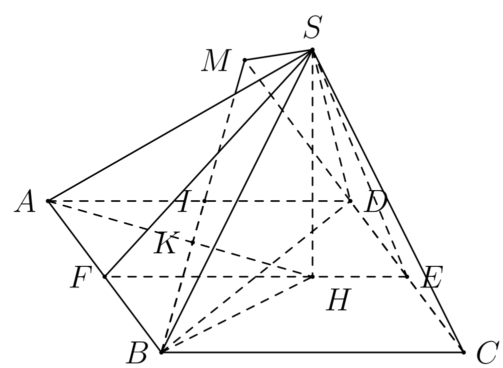
$$V_{S\cdot ABC}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{27}}=\frac{2\sqrt{3}}{27}.$$

Chọn phương án D

Câu 64. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a mặt bên SAB là tam giác đều, mặt bên SCD là tam giác vuông cân tại S, gọi M là điểm thuộc đường thẳng CD sao cho BM vuông góc với SA. Tính thể tích V của khối chóp $S.BDM$?

A $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$. **B** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **C** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{32}$. **D** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Lời giải.



Gọi E,F lần lượt là trung điểm của đoạn CD và AB, ta có

ΔSAB đều $\Rightarrow AB\perp SF\Rightarrow CD\perp SF$ (do $CD\parallel AB$) (1).

ΔSCD vuông cân tại $S\Rightarrow CD\perp SE$ (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra $CD\perp(SEF)\Rightarrow(SEF)\perp(ABCD)$ theo giao tuyến EF.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên EF

$\Rightarrow SH\perp(ABCD)$

Dựng $BK\perp AH$ tại $K\Rightarrow BK\perp(SAH)\Rightarrow BK\perp SA$.

Gọi $M=BK\cap CD$ ta có $SH\perp(ABCD)$ hay $SH\perp(BDM)$. Suy ra $V_{S.BDM}=\dfrac{1}{3}SH\cdot S_{\Delta BDM}$.

ΔSCD vuông cân tại $S\Rightarrow SE=\dfrac{CD}{2}=\dfrac{a}{2}$; ΔSAB đều cạnh $AB=a\Rightarrow SF=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $EF=a$.

$\Rightarrow SE^2+SF^2=\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{3a^2}{4}=a^2=EF^2\Rightarrow\Delta SEF$ vuông cân tại S

$$\Rightarrow SH=\frac{SE\cdot SF}{EF}=\frac{\frac{a}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow AH=\sqrt{SA^2-SH^2}=\sqrt{a^2-\frac{3a^2}{16}}=\frac{a\sqrt{13}}{4}\text{ và }HF=\sqrt{SF^2-SH^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}-\frac{3a^2}{16}}=\frac{3a}{4}$$

Ta có $BK\cdot AH=HK\cdot AB\Rightarrow BK=\dfrac{HK\cdot AB}{AH}=\dfrac{\frac{3a}{4}\cdot a}{\frac{a\sqrt{13}}{a}}=\dfrac{3a}{\sqrt{13}}$

ΔKBA và ΔABI là hai tam giác vuông đồng dạng (với $I=BM\cap AD$)

$$\Rightarrow\frac{BI}{AB}=\frac{AB}{BK}\Rightarrow BI=\frac{AB^2}{BK}=\frac{a^2}{\frac{3a}{\sqrt{13}}}=\frac{a\sqrt{13}}{3}$$

$\Rightarrow AI = \sqrt{BI^2 - AB^2} = \sqrt{\dfrac{13a^2}{9} - a^2} = \dfrac{2a}{3} \Rightarrow ID = \dfrac{a}{3}$

ΔDIM và ΔAIB là hai tam giác vuông đồng dạng

$\Rightarrow \dfrac{DM}{AB} = \dfrac{DI}{AI} = \dfrac{\frac{a}{3}}{\frac{2a}{3}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow DM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2} \Rightarrow S_{\Delta BDM} = \dfrac{1}{2}BC \cdot DM = \dfrac{1}{2}a \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^2}{4}$

$\Rightarrow V_{S.BDM} = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{\Delta BDM} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$.

Chọn phương án A

Câu 65. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tại A và D, $AB = AD = 2a$, $CD = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng $60°$. Gọi I là trung điểm của AD, biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A $\dfrac{3\sqrt{17}}{5}a^3$. **B** $\dfrac{3\sqrt{23}}{5}a^3$. **C** $\dfrac{3\sqrt{15}}{5}.a^3$. **D** $\dfrac{3\sqrt{19}}{5}a^3$.

Lời giải.

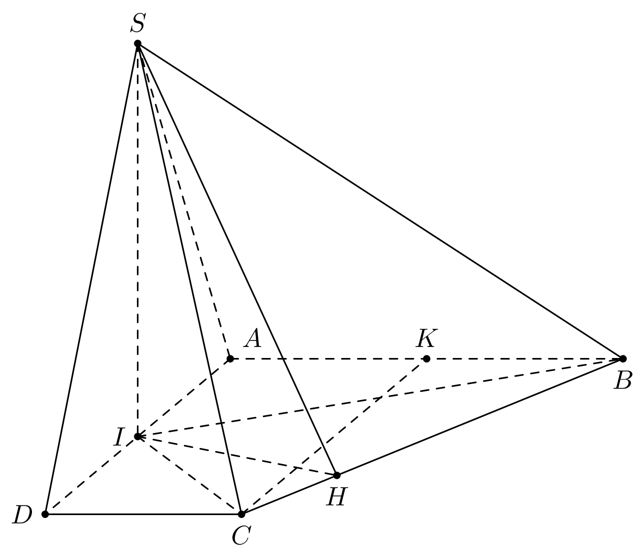
Theo giả thuyết, ta có $SI \perp (ABCD)$.

Gọi K là trung điểm của AB ta suy ra $ADCK$ là hình chữ nhật.

$\Rightarrow \begin{cases} CK \perp AB \\ BC = \sqrt{CK^2 + KB^2} = a\sqrt{5} \end{cases}$.

Dựng $IH \perp BC$ tại H, ta suy ra

$$\widehat{(SBC),(ABCD)} = \widehat{SHI} = 60°.$$



Ta có

$$S_{\triangle BCI} = S_{ABCD} - S_{\triangle ABI} - S_{\triangle DCI} = 3a^2 - a^2 - \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{3a^2}{2}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} IH = \dfrac{2S_{\triangle BCI}}{BC} = \dfrac{3a^2}{a\sqrt{5}} \\ SI = IH \tan 60° = \dfrac{3a\sqrt{15}}{5}. \end{cases}$$

Suy ra $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SI \cdot S_{ABCD} = \dfrac{3a^3\sqrt{15}}{5}$.

Chọn phương án C

Câu 66. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = BD = CD = 1$. Khi thể tích khối tứ diện $ABCD$ lớn nhất thì khoảng cách giữa hai đường thẳng AD vàBC bằng

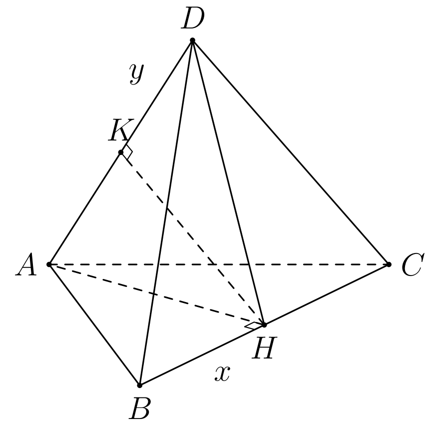
(A) $\dfrac{1}{3}$. (B) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. (C) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. (D) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Đặt $BC = x$, $AD = y$ $(x, y > 0)$.

Gọi H, K lần lượt là trung điểm của BC và AD. Do các tam giác ABC và DBC cân tại A và D nên $AH \perp BC$, $DH \perp BC$ $\Rightarrow BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp HK$.

Mặt khác, các tam giác ABC, DBC bằng nhau nên $AH = DH \Rightarrow HK \perp AD$ hay $HK = \mathrm{d}(AD, BC)$.



Ta có $\begin{cases} AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{2} \\ HK = \sqrt{AH^2 - AK^2} = \dfrac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{2} \end{cases}$.

Thể tích khối chóp $ABCD$ là $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot BC \cdot S_{\triangle HAD} = \dfrac{1}{12} xy\sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$V_{ABCD} = \frac{1}{12} xy\sqrt{4 - x^2 - y^2} = \frac{1}{12}\sqrt{x^2y^2(4 - x^2 - y^2)} \leq \frac{1}{12}\sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2 + 4 - x^2 - y^2}{3}\right)^3} = \frac{2\sqrt{3}}{27}.$$

Dấu "=" xảy ra khi chỉ khi $x^2 = y^2 = 4 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x = y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Do đó, $\max V_{ABCD} = \dfrac{2\sqrt{3}}{27} \Leftrightarrow x = y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Khi đó, $HK = \dfrac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy $\mathrm{d}(AD, BC) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Chọn phương án D

Câu 67. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, $AC = 2a\sqrt{3}$, $BD = 2a$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Biết khoảng cách từ tâm O đến (SAB) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$, tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

(A) $V = a^2\sqrt{3}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

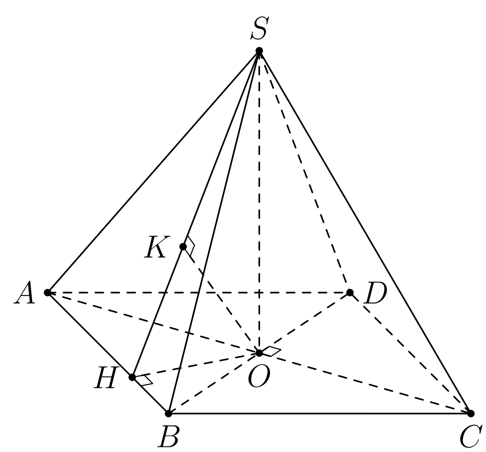
Gọi O là giao điểm của AC và BD, theo giả thuyết ta có $SO \perp (ABCD)$.

Dựng $OH \perp AB$ tại H, ta có $AB \perp (SOH)$
$\Rightarrow (SAB) \perp (SOH)$ (giao tuyến SH).

Dựng $OK \perp SH$ tại K, ta có $SK \perp (SAB)$
$\Rightarrow OK = \mathrm{d}(O, (SAB)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vì $ABCD$ là hình thoi nên $OA \perp OB$ và

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$$



suy ra $\dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{1}{OK^2} - \dfrac{1}{OA^2} - \dfrac{1}{OB^2} = \dfrac{4}{a^2} \Rightarrow SO = \dfrac{a}{2}$.

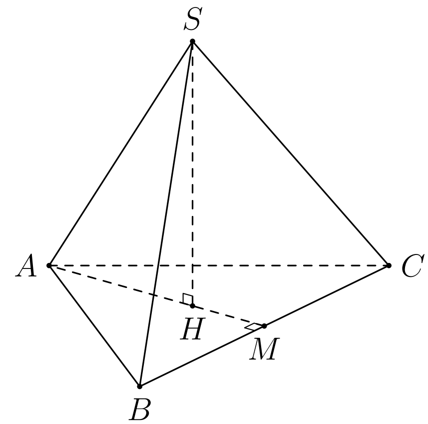
Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot 2a^2\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Chọn phương án B

Câu 68. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều và có $SA = SB = SC = 1$. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp đã cho.

A $V_{\max} = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$. **B** $V_{\max} = \dfrac{1}{6}$. **C** $V_{\max} = \dfrac{1}{12}$. **D** $V_{\max} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải.



Gọi H là trọng tâm tam giác đều ABC, theo giả thuyết suy ra $SH \perp (ABC)$.

Đặt $AB = x \Rightarrow AH = \dfrac{x\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SH = \sqrt{1 - \dfrac{3x^2}{9}} = \dfrac{\sqrt{9-3x^2}}{3}$ và $S_{\triangle ABC} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{9-3x^2}}{3} \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{12}x^2\sqrt{3-x^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta được

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{12\sqrt{2}}\sqrt{x^2x^2(6-2x^2)} \le \frac{1}{12\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{x^2+x^2+6-2x^2}{3}\right)^3} = \frac{1}{6}.$$

Dấu "=" xảy ra khi chỉ khi $x^2 = 6 - 2x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

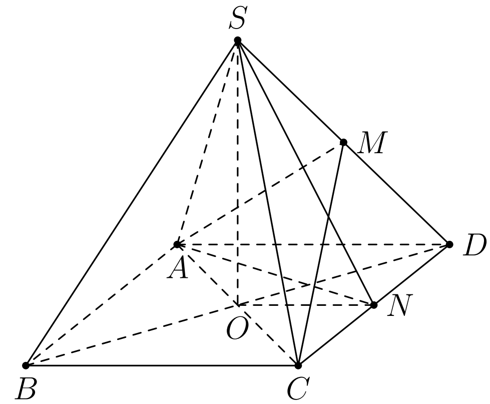
Vậy $\max V_{S.ABC} = \dfrac{1}{6}$ khi chỉ khi $AB = \sqrt{2}$.

Chọn phương án B

Câu 69. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60°. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SD, DC . Thể tích khối tứ diện $ACMN$ là

A $\dfrac{a^3}{8}$. **B** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **C** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

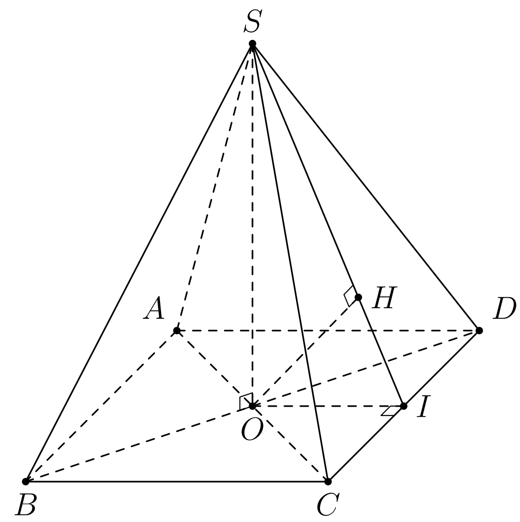


Gọi O là tâm mặt đáy, suy ra $SO \perp (ABCD)$.
Góc giữa mặt bên và mặt đáy là $\widehat{SNO} = 60^\circ$.
$SO = ON \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.
Vì M là trung điểm của SD nên $\mathrm{d}\left(M, (ACN)\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(S, (ABCD)\right) = \dfrac{1}{2}SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
$S_{ANC} = \dfrac{1}{2}S_{ACD} = \dfrac{1}{4}S_{ABCD} = \dfrac{1}{4} \cdot (2a)^2 = a^2$.
Vậy $V_{ACMN} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.
Chọn phương án C

Câu 70. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có khoảng cách từ tâm O của đáy đến (SCD) bằng $2a$, a là hằng số dương. Đặt $AB = x$, giá trị của x để thể tích $S.ABCD$ đạt giá trị nhỏ nhất là

A $\sqrt{3}a$. **B** $2\sqrt{6}a$. **C** $\sqrt{2}a$. **D** $\sqrt{6}a$.

Lời giải.



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, hạ $OI \perp CD \quad (1)$. Do giả thiết $SO \perp (ABCD)$ suy ra $SO \perp OI$ và $SO \perp CD \quad (2)$.
Từ (1) và (2) suy ra $CD \perp (SOI)$.
Trong mặt phẳng (SOI) kẻ $OH \perp SI$, từ chứng minh trên ta suy ra $CD \perp OH$.
Khi đó $\begin{cases} OH \perp CD \\ OH \perp SH \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SCD)$.
Nên $\mathrm{d}\left(O,(SCD)\right) = OH$.
Do $AB = x$ nên $OI = \dfrac{x}{2}$, trong tam giác SOI ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OI^2} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{4a^2} - \frac{1}{\frac{x^2}{4}} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{4a^2} - \frac{4}{x^2} \\ &\Leftrightarrow \quad SO^2 = \frac{4a^2x^2}{x^2-16a^2} \Leftrightarrow SO = \sqrt{\frac{4a^2x^2}{x^2-16a^2}}. \end{aligned}$$

Gọi V là thể tích khối chóp $S.ABCD$ ta có $V = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \sqrt{\dfrac{4a^2x^2}{x^2-16a^2}} \cdot x^2 = \dfrac{2ax^3}{3\sqrt{x^2-16a^2}}$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{2ax^3}{3\sqrt{x^2-16a^2}}$ trên khoảng $(4a; +\infty)$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3ax^2\sqrt{x^2-16a^2} - \dfrac{ax^4}{\sqrt{x^2-16a^2}}}{(x^2-16a^2)} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2ax^4 - 48a^3x^2}{(x^2-16a^2) \cdot \sqrt{x^2-16a^2}}$.

Xét $f'(x) = 0$ suy ra

$$\begin{aligned} 2ax^4 - 48a^3x^2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2ax^2\left(x^2 - 24a^2\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 24a^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2\sqrt{6}a \\ x = -2\sqrt{6}a \end{array}\right. \Rightarrow x = 2\sqrt{6}a. \end{aligned}$$

Mà $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2ax^3}{3\sqrt{x^2-16a^2}} = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 4a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4a^+} \dfrac{2ax^3}{3\sqrt{x^2-16a^2}} = +\infty$

Ta có bảng biến

x	$4a$		$2\sqrt{6}a$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$16\sqrt{3}a^3$	$\nearrow$	$+\infty$

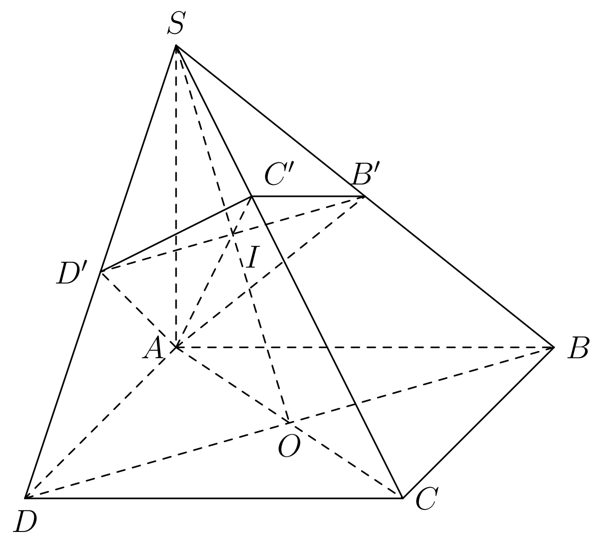
Dựa vào bảng biến thiên suy ra $\min\limits_{x\in(4a;+\infty)} f(x) = 16\sqrt{3}a^3$ khi $x = 2\sqrt{6}a$.

Chọn phương án (B)

Câu 71. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, gọi B' và D' theo thứ tự là trung điểm các cạnh SB, SD. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt cạnh SC tại C'. Tính tỷ số thể tích của hai khối đa diện được chia ra bởi mặt phẳng $(AB'D')$

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) $\dfrac{1}{6}$. (C) $\dfrac{1}{12}$. (D) $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$ và SO cắt $B'D'$ tại I.

Nối AI cắt SC tại C' nên A, B', C', D' đồng phẳng

Đặt $V_{S.ABCD} = V \Rightarrow V_{S.ACD} = V_{S.ABC} = \dfrac{V}{2}$.

Ta có $\dfrac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}} = \dfrac{SC'}{SC}.\dfrac{SD'}{SD}$

và $\dfrac{V_{S.AC'B'}}{V_{S.ACB}} = \dfrac{SC'}{SC}.\dfrac{SB'}{SB}$.

Do đó,

$\dfrac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}} + \dfrac{V_{S.AC'B'}}{V_{S.ACB}} = \dfrac{SC'}{SC}.\left(\dfrac{SB'}{SB} + \dfrac{SD'}{SD}\right)$.

Hay $\dfrac{2V_{S.AC'B'}}{V} + \dfrac{2V_{S.AC'D'}}{V} = \dfrac{SC'}{SC}$.

Ta có $B'D' = \dfrac{1}{2}BD \Rightarrow SI = \dfrac{1}{2}SO$.

Xét tam giác $\triangle SCO$ có C', I, A thẳng hàng nên áp dụng định lý Mê-nê-la-úyt ta có

$$\frac{C'S}{C'C}\cdot\frac{AC}{AO}\cdot\frac{IO}{IS} = 1 \Leftrightarrow \frac{C'S}{C'C}\cdot 2\cdot 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{3}.$$

Suy ra $\dfrac{2V_{S.AB'C'D'}}{V} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow V_{S.AB'C'D'} = \dfrac{V}{6} \Rightarrow V_{AB'C'D'BCD} = V - \dfrac{V}{6} = \dfrac{5V}{6}$.

Vậy tỷ số thể tích của hai khối đa diện được chia ra bởi $(AB'D')$ là $\dfrac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{AB'C'D'BCD}} = \dfrac{V}{6} : \dfrac{5V}{6} = \dfrac{1}{5}$.

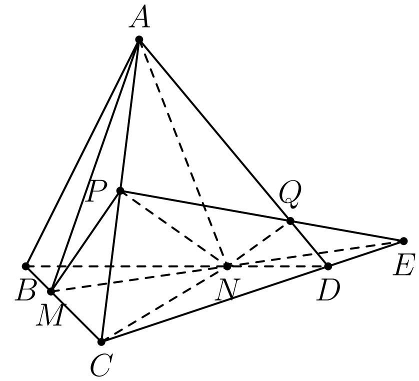
Chọn phương án (D)

Câu 72. Cho tứ diện $ABCD$, trên các cạnh BC, BD, AC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $BC = 3BM$, $BD = \dfrac{3}{2}BN$, $AC = 2AP$. Mặt phẳng (MNP) chia khối tứ diện $ABCD$ thành 2 phần có thể tích lần lượt là V_1, V_2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

(A) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{26}{19}$. (B) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{3}{19}$. (C) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{15}{19}$. (D) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{26}{13}$.

Lời giải.

Gọi $E = MN \cap CD$ và $Q = AD \cap PE$.
Khi đó thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (MNP) là tứ giác $MNQP$.
Từ đó ta có $V_{ABMNQP} = V_{ABMN} + V_{AMNP} + V_{ANPQ}$. $(*)$
Áp dụng định lí Menelaus trong tam giác BCD ta có:



$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{EC}{ED}\cdot\frac{ND}{NB} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{EC}{ED}\cdot\frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{EC}{ED} = 4$$

Áp dụng định lí Menelaus trong tam giác ACD ta có:

$$\frac{PA}{PC}\cdot\frac{EC}{ED}\cdot\frac{QD}{QA} = 1 \Rightarrow 1\cdot 4\cdot\frac{QD}{QA} = 1 \Rightarrow \frac{QD}{QA} = \frac{1}{4}.$$

Ta có $\dfrac{S_{BMN}}{S_{BCD}} = \dfrac{BM}{BC}\cdot\dfrac{BN}{BD} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9} \Rightarrow \dfrac{V_{ABMN}}{V_{ABCD}} = \dfrac{2}{9} \Rightarrow V_{ABMN} = \dfrac{2}{9}V_{ABCD}$. (1)

Lại có $\dfrac{S_{NMC}}{S_{DBC}} = \dfrac{d(N;BC)\cdot MC}{d(D;BC)\cdot BC} = \dfrac{NB}{DB}\cdot\dfrac{MC}{BC} = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow \dfrac{V_{AMNC}}{V_{ABCD}} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow V_{AMNC} = \dfrac{4}{9}V_{ABCD}$.

Do đó $\dfrac{V_{AMNP}}{V_{AMNC}} = \dfrac{AP}{AC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow V_{AMNP} = \dfrac{1}{2}V_{AMNC} = \dfrac{2}{9}V_{ABCD}$. (2)

Lại có $\dfrac{S_{CND}}{S_{CBD}} = \dfrac{DN}{DB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{V_{ACDN}}{V_{ABCD}} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{ACDN} = \dfrac{1}{3}V_{ABCD}$.

Do đó $\dfrac{V_{APQN}}{V_{ACDN}} = \dfrac{AP}{AC}\cdot\dfrac{AQ}{AD} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{5} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow V_{APQN} = \dfrac{2}{5}V_{ACDN} = \dfrac{2}{15}V_{ABCD}$. (3)

Thay (1), (2) và (3) vào $(*)$, ta có $V_{ABMNQP} = \dfrac{2}{9}V_{ABCD} + \dfrac{2}{9}V_{ABCD} + \dfrac{2}{15}V_{ABCD} = \dfrac{26}{45}V_{ABCD}$.

Gọi $V_1 = V_{ABMNQ}$ và V_2 là thể tích phần còn lại ta có $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{26}{19}$.

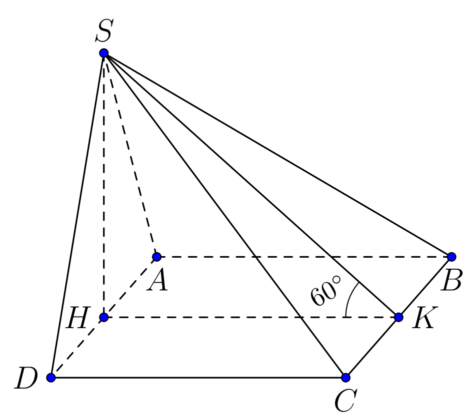
Chọn phương án A

Câu 73. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, tam giác SAD vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $AB = a, SA = 2SD$, mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A $\dfrac{15a^3}{2}$. **B** $\dfrac{3a^3}{2}$. **C** $\dfrac{5a^3}{2}$. **D** $5a^3$.

Lời giải.

Kẻ $SH \perp AD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$



— $\left(\widehat{(SBC);(ABCD)}\right) = \widehat{SKH} = 60°$.

— $SH = HK\tan 60° = a\sqrt{3}$.

— $\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SD^2} \Rightarrow \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{5}{4SD^2} \Rightarrow SD = \dfrac{\sqrt{15}a}{2}, SA = a\sqrt{15}, AD = \dfrac{5\sqrt{3}a}{2}$.

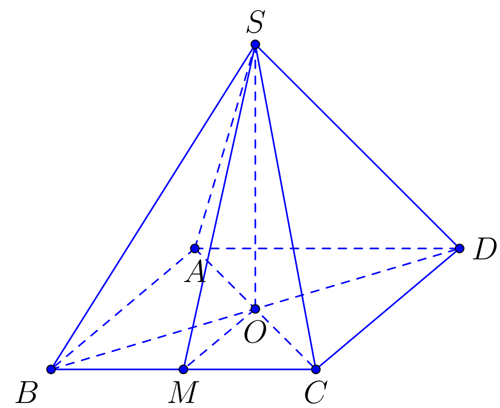
Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}a\sqrt{3}.a.\dfrac{5\sqrt{3}a}{2} = \dfrac{5a^3}{2}$.

Chọn phương án C

Câu 74. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có $AC = 2a$, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt đáy bằng $45°$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

(A) $a^3\sqrt{2}$. (B) $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. (D) $\dfrac{a^3}{2}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow \begin{cases} SM \perp BC \\ OM \perp BC \end{cases}$

Suy ra $((SBC);(ABCD)) = (SM;OM) = \widehat{SMO} = 45°$.

Vì $AC = 2a$ nên $AB = BC = a\sqrt{2} \Rightarrow SO = OM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

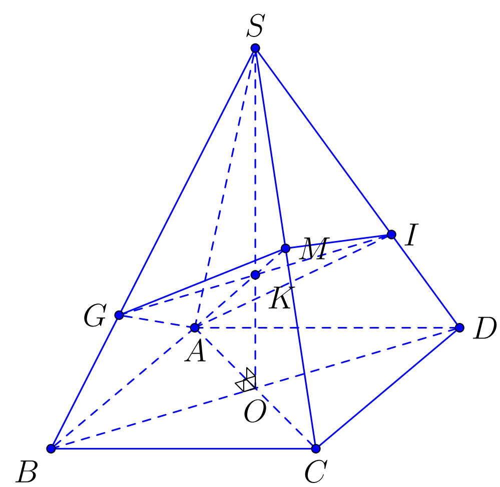
$V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\left(a\sqrt{2}\right)^2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Chọn phương án (C)

Câu 75. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi M là trung điểm SC, mặt phẳng (P) chứa AM và song song với BD chia khối chóp thành 2 khối đa diện. Đặt V_1 là thể tích khối đa diện có chứa đỉnh S và V_2 là thể tích khối đa diện có chứa đáy. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

(A) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{3}{2}$. (B) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{2}$. (C) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{2}{3}$. (D) $\dfrac{V_1}{V_2} = 1$.

Lời giải.



Nhìn hình vẽ ta thấy $V_1 = V_{S.MIAG}$.

Gọi $V_{S.ABCD} = V \Rightarrow V_{S.ABC} = V_{S.ADC} = \dfrac{V}{2}$.

Có $\dfrac{V_{S.AGM}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SG}{SB}.\dfrac{SM}{SC} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AGM} = \dfrac{V}{6}$.

Có $\dfrac{V_{S.AMI}}{V_{S.ADC}} = \dfrac{SM}{SC}.\dfrac{SI}{SD} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow V_{S.AMI} = \dfrac{V}{6} \Rightarrow V_{S.MIAG} = \dfrac{V}{3} \Rightarrow V_2 = V - \dfrac{V}{3} = \dfrac{2}{3}V \Rightarrow \dfrac{V_2}{V_1} = 2$.

Chọn phương án (B)

Câu 76. Một khối lăng trụ tam giác có thể phân chia ít nhất thành n khối tứ diện có thể tích bằng nhau. Khẳng định nào sau đây là **đúng?**.

(A) 8. (B) 3. (C) 6. (D) 4.

Lời giải.

Vì thể tích khối lăng trụ $V_1 = Bh$ và thể tích khối chóp (tứ diện) $V_2 = \dfrac{1}{3}Bh$ suy ra $V_1 = 3V_2$ nên ít nhất ta có thể chia lăng trụ thành ba khối tứ diện (vì chiều cao lớn nhất của khối tứ diện bằng

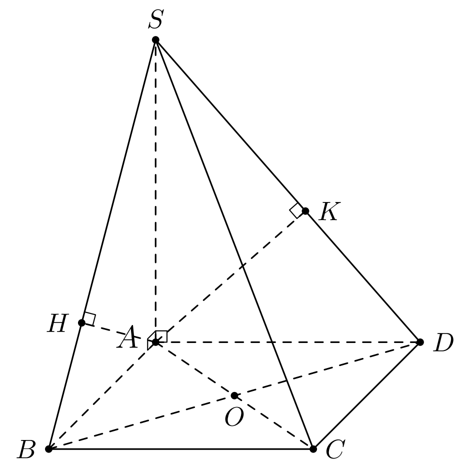
chiều cao lăng trụ và diện tích đáy lớn nhất của tứ diện bằng diện tích đáy lăng trụ).
Chọn phương án B

Câu 77. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$. Biết $SA = a$ và vuông góc với đáy. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng φ, với $\cos\varphi = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

(A) $\dfrac{4}{3}a^3$. (B) $\dfrac{2}{3}a^3$. (C) $2a^3$. (D) $\dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải.

Gọi $AD = x$ $(x > 0)$.
Kẻ $AH \perp SB$, $AK \perp SD$ dễ dàng chứng minh được $AH \perp (SBC)$, $AK \perp (SCD) \Rightarrow ((SBC),(SCD)) = (AH, AK)$.
Trong tam giác SBC ta có



$$\begin{aligned}\cos BSD &= \frac{SB^2 + SD^2 - BD^2}{2SB \cdot SD}\\ &= \frac{2a^2 + \left(a^2 + x^2\right) - \left(a^2 + x^2\right)}{2 \cdot a\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + x^2}}\\ &= \frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + x^2}}.\end{aligned}$$

Trong tam giác SAD có $SK = \dfrac{SA^2}{SD} = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.
Xét tam giác AHK có

$$\begin{aligned}HK^2 &= SH^2 + SK^2 - 2SH \cdot SK \cdot \cos BSD\\ &= \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{a^4}{a^2 + x^2} - 2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + x^2}}\\ &= \frac{a^2}{2} \Rightarrow AH = \frac{a}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Xét tam giác AHK có $AK = \dfrac{SA \cdot AD}{SD} = \dfrac{a \cdot x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ $\cos HAK = \dfrac{AH^2 + AK^2 - HK^2}{2AH \cdot AK}$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\dfrac{2a^2}{4} + \dfrac{a^2x^2}{a^2 + x^2} - \dfrac{a^2}{2}}{2\dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + x^2}} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{x^2}{2a^2 + 2x^2} \Rightarrow x = 2a.$$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot a \cdot 2a \cdot a = \dfrac{2a^3}{3}$.
Chọn phương án B

Câu 78. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 1$, $SB = 2$, $SC = 3$ và $\widehat{ASB} = 60^\circ$, $\widehat{BSC} = 120^\circ$, $\widehat{CSA} = 90^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

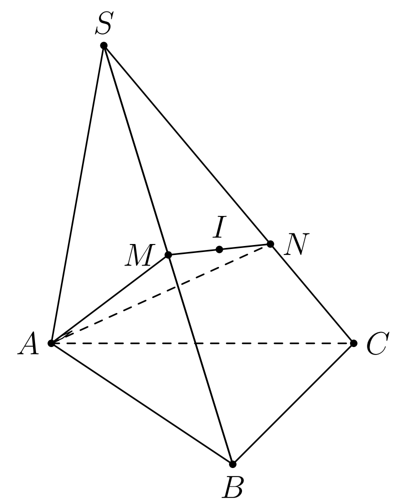
(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (B) $\sqrt{2}$. (C) $\frac{\sqrt{2}}{6}$. (D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

Trên cạnh SB, SC lần lượt lấy điểm M, N sao cho $SM = SN = 1$.

Ta có $AM = 1$, $AN = \sqrt{2}$, $MN = \sqrt{3}$ nên tam giác AMN vuông tại A.

Hình chóp $S.AMN$ có $SA = SM = SN = 1$ nên hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (AMN) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông AMN và đó là điểm trung điểm I của MN.



Trong $\triangle SIM$, $SI = \sqrt{SM^2 - IM^2} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$.

Khi đó,

$$V_{S.AMN} = \frac{1}{3}SI \cdot S_{AMN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

Ta có

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow V_{S.ABC} = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn phương án (A)

Câu 79. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SC = x\ (0 < x < a\sqrt{3})$, các cạnh còn lại đều bằng a. Biết rằng thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất khi và chỉ khi $x = \frac{a\sqrt{m}}{n} (m, n \in \mathbb{N}*)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $m + 2n = 10$. (B) $2m^2 - 3n < 15$. (C) $m^2 - n = 30$. (D) $4m - n^2 = -20$.

Lời giải.

Phương pháp:

+) Chứng minh hình chiếu vuông của S trên $(ABCD)$ trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD.

+) Chứng minh tam giác SAC vuông tại S, tính AC.

+) Tính BD.

+) Sử dụng công thức tính thể tích $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$.

Cách giải:

Vì $SA = SB = SD = a$ nên hình chiếu vuông của S trên $(ABCD)$ trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD. Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Do tam giác ABD cân tại $A \Rightarrow H \in AC$.

Dễ dàng chứng minh được: $\Delta SBD = \Delta ABD$ (c.c.c)

$\Rightarrow SO = AO = \frac{AC}{2} \Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S (Tam giác có trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy) $\Rightarrow AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = \sqrt{a^2 + x^2}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAC có $SH = \frac{SA.SC}{AC} = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

Ta có $OA = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2 + x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2}$

$\Rightarrow BD = \sqrt{3a^2 - x^2}$.

Do ABCD là hình thoi $\Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD$.

Khi đó ta có: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{6}.\dfrac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}\sqrt{a^2+x^2}.\sqrt{3a^2-x^2} = \dfrac{1}{6}ax\sqrt{3a^2-x^2}$.

Áp dụng BĐT Cô-si ta có: $x\sqrt{3a^2-x^2} \le \dfrac{x^2+3a^2-x^2}{2} = \dfrac{3a^2}{2}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} \le \dfrac{1}{6}\cdot a\cdot \dfrac{3a^2}{2} = \dfrac{a^3}{4}$.

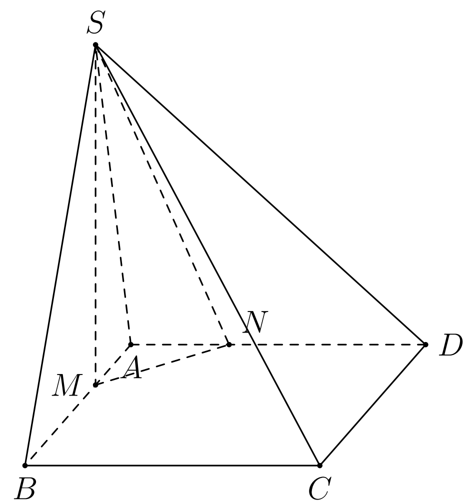
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = 3a^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{3a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{a\sqrt{m}}{n} \Rightarrow \begin{cases} m=6 \\ n=2 \end{cases} \Rightarrow m+2n=10$.

Chọn phương án A

Câu 80. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Hai điểm M, N thuộc các cạnh AB và AD (M, N không trùng với A, B, D) sao cho $\dfrac{AB}{AM} + 2.\dfrac{AD}{AN} = 4$. Kí hiệu V, V_1 lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABCD$ và $S.MBCDN$. Tìm giá trị lớn nhất của $\dfrac{V_1}{V}$.

A $\dfrac{2}{3}$. **B** $\dfrac{3}{4}$. **C** $\dfrac{1}{6}$. **D** $\dfrac{14}{17}$.

Lời giải.



Do các khối chóp $S.ABCD$ và $S.MBCDN$ có cùng chiều cao kẻ từ S nên $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{S_{MBCDN}}{S_{ABCD}}$

Ta có: $\dfrac{AB}{AM} + 2\dfrac{AD}{AN} = 4$.

ÁP dụng BĐT cô-si, ta có:

$\dfrac{AB}{AM} + 2\dfrac{AD}{AN} \ge 2\sqrt{\dfrac{AB}{AM}.2\dfrac{AD}{AN}} = 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\dfrac{AB\cdot AD}{AM\cdot AN}}$ (với $\dfrac{AB}{AM} > 1$, $\dfrac{AD}{AN} > 1$)

$\Rightarrow 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\dfrac{AB\cdot AD}{AM\cdot AN}} \le 4 \Leftrightarrow \dfrac{AB\cdot AD}{AM\cdot AN} \le 2$

$\Rightarrow \dfrac{S_{ABD}}{S_{AMN}} \le 2 \Rightarrow \dfrac{S_{ABCD}}{S_{AMN}} \le 4$ (do $S_{ABD} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$)

$\Rightarrow \dfrac{S_{AMN}}{S_{ABCD}} \geqslant \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{S_{ABCDN}}{S_{ABCD}} \geqslant \dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{V_1}{V} \le \dfrac{3}{4}$.

Tỉ số $\dfrac{V_1}{V}$ đạt GTLN bằng $\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{AB}{AM} + 2\dfrac{AD}{AN} = 4 \\ \dfrac{AB}{AM} = 2\dfrac{AD}{AN} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \dfrac{AB}{AM} = 2 \\ \dfrac{AD}{AN} = 1 \end{cases}$.

Chọn phương án B

BẢNG ĐÁP ÁN

1. D	2. C	3. A	4. D	5. B	6. B	7. C	8. B	9. C	10. D
11. A	12. A	13. A	14. A	15. D	16. C	17. B	18. A	19. D	20. B
21. D	22. A	23. A	24. A	25. A	26. C	27. D	28. C	29. C	30. B
31. C	32. A	33. B	34. A	35. A	36. B	37. C	38. B	39. D	40. D
41. B	42. A	43. D	44. D	45. B	46. B	47. C	48. A	49. B	50. B
51. A	52. C	53. A	54. C	55. D	56. D	57. D	58. B	59. B	60. D
61. B	62. C	63. D	64. A	65. C	66. D	67. B	68. B	69. C	70. B
71. D	72. A	73. C	74. C	75. B	76. B	77. B	78. A	79. A	80. B

DẠNG 8. KHỐI NÓN-TRỤ- CẦU

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Cho khối nón có chiều cao $h = 3$ và bán kính đáy $r = 4$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

(A) 16π. (B) 48π. (C) 36π. (D) 4π.

Lời giải.

Ta có công thức thể tích khối nón $V = \frac{1}{3}\pi r^2.h = \frac{1}{3}\pi.16.3 = 16\pi$.

Chọn phương án (A)

Câu 1. Thể tích khối cầu có bán kính bằng $\frac{a}{2}$ là

(A) $\frac{\pi a^3}{2}$. (B) $\frac{\pi a^2}{4}$. (C) $\frac{\pi a^3}{6}$. (D) πa^2.

Lời giải.

Phương pháp: Công thức tính thể tích khối cầu có bán kính r là: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Cách giải: Thể tích khối cầu có bán kính bằng $\frac{a}{2}$ là: $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{\pi a^3}{6}$.

Chọn phương án (C)

Câu 2. Cho khối nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và chiều cao $h = 4$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

(A) $V = 12\pi$. (B) $V = 4\pi$. (C) $V = 4$. (D) $V = 12$.

Lời giải.

Thể tích khối nón là

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(\sqrt{3})^2 \cdot 4 = 4\pi$.

Chọn phương án (B)

Câu 3. Cho khối trụ có thể tích V và bán kính đáy R. Chiều cao của khối trụ đã cho bằng

(A) $\frac{V}{\pi R^2}$. (B) $\frac{V}{3\pi R^2}$. (C) $\frac{V}{R^2}$. (D) $\frac{V}{3R^2}$.

Lời giải.

Ta có $V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi R^2}$.

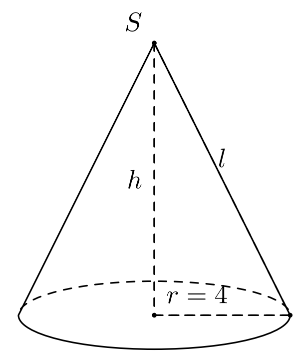
Chọn phương án (A)

Câu 4. Cho hình nón có bán kính đáy $r = 4$ và diện tích xung quanh bằng 20π. Thể tích của khối nón đã cho bằng

(A) 4π. (B) 16π. (C) $\frac{16}{3}\pi$. (D) $\frac{80}{3}\pi$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính diện tích xung quanh của hình nón ta có



$$S_{xq} = \pi r l \Rightarrow 20\pi = \pi \cdot 4 \cdot l \Rightarrow l = 5.$$

Vì $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ nên $h = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$.
Khối nón có thể tích là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 16\pi$.

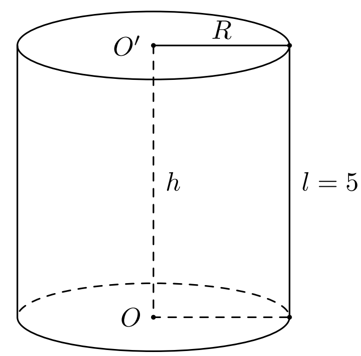
Chọn phương án (B)

Câu 5. Cho khối trụ có đường sinh bằng 5 và thể tích bằng 45π. Diện tích toàn phần của hình trụ là

(A) 48π. (B) 36π. (C) 12π. (D) 24π.

Lời giải.

Vì hình trụ có đường cao bằng đường sinh nên $h = l = 5$.
Áp dụng công thức tính thể tích khối trụ ta có
$V = \pi R^2 h \Rightarrow 45\pi = \pi \cdot R^2 \cdot 5 \Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow R = 3$.
Diện tích toàn phần của hình trụ là
$S_{tp} = 2\pi R h + 2\pi R^2 = 2\pi \cdot 3 \cdot 5 + 2\pi \cdot 3^2 = 30\pi + 18\pi = 48\pi$.



Chọn phương án (A)

Câu 6. Tính theo a thể tích của một khối trụ có bán kính đáy là a, chiều cao bằng $2a$.

(A) $2\pi a^3$. (B) $\dfrac{2\pi a^3}{3}$. (C) $\dfrac{\pi a^3}{3}$. (D) πa^3.

Lời giải.

Phương pháp:
Công thức tính thể tích khối trụ $V = \pi r^2 h$.
Cách giải:
Ta có $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot a^2 \cdot 2a = 2\pi \cdot a^3$.
Chọn phương án (A)

Câu 7. Khối cầu có bán kính $R = 6$ có thể tích bằng bao nhiêu?

(A) 144π. (B) 288π. (C) 48π. (D) 72π.

Lời giải.

Ta có công thức tính thể tích khối cầu $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Từ đó suy ra thể tích khối cầu đã cho là $V = \dfrac{4}{3}\pi 6^3 = 288\pi$.

Chọn phương án (B)

Câu 8. Tính thể tích V của khối trụ có bán kính đáy và chiều cao đều bằng 2.

(A) $V = 12\pi$. (B) $V = 8\pi$. (C) $V = 16\pi$. (D) $V = 4\pi$.

Lời giải.

Theo đề bài ta có bán kính đáy $R = 2$, chiều cao khối trụ $h = 2$.

Do đó $V = \pi R^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 2 = 8\pi$.

Chọn phương án B

Câu 9. Khối trụ tròn xoay có đường kính bằng $2a$, chiều cao $h = 2a$ có thể tích là

(A) $V = 2\pi a^2$. (B) $V = 2\pi a^3$. (C) $V = 2\pi a^2 h$. (D) $V = \pi a^3$.

Lời giải.

Khối trụ tròn xoay có bán kính bằng $\dfrac{2a}{2} = a$ nên có thể tích là $V = \pi a^2 \cdot 2a = 2\pi a^3$.

Chọn phương án B

Câu 10. Tính thể tích V của khối nón có bán kính đáy bằng 3 và chiều cao bằng 6.

(A) $V = 18\pi$. (B) $V = 54\pi$. (C) $V = 108\pi$. (D) $V = 36\pi$.

Lời giải.

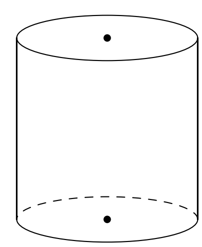
Ta có $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 18\pi$.

Chọn phương án A

Câu 11. Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng S, diện tích đáy bằng diện tích một mặt cầu bán kính a. Khi đó thể tích của hình trụ bằng

(A) Sa. (B) $\dfrac{1}{2}Sa$. (C) $\dfrac{1}{3}Sa$. (D) $\dfrac{1}{4}Sa$.

Lời giải.



Gọi r là bán kính đáy của hình trụ, h là chiều cao của hình trụ.

Theo bài ra ta có $\begin{cases} S = 2\pi r h \\ \pi r^2 = 4\pi a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2a \\ h = \dfrac{S}{4\pi a} \end{cases}$.

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4a^2 \cdot \dfrac{S}{4\pi a} = Sa$.

Chọn phương án A

Câu 12. Cho hình nón có chiều cao h và góc ở đỉnh bằng 90°. Thể tích của khối nón xác định bởi hình nón trên:

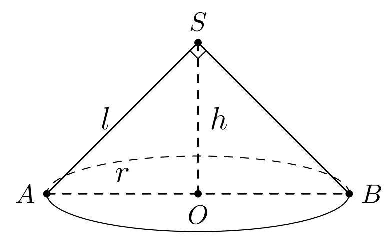
(A) $\dfrac{2\pi}{3}$. (B) $\dfrac{\sqrt{6}\pi}{3}$. (C) $\dfrac{\pi}{3}$. (D) 2π.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra bán kính nón $r = h$.

Vậy thể tích khối nón tương ứng là

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi h^3}{3}.$$



Chọn phương án C

Câu 13. Cho khối trụ có độ dài đường sinh bằng $2a$ và bán kính đáy bằng a. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

(A) πa^3. (B) $2\pi a^3$. (C) $\dfrac{\pi a^3}{3}$. (D) $\dfrac{\pi a^3}{6}$.

Lời giải.

Dựa vào công thức tính thể tích khối trụ ta có $V = \pi r^2 h = \pi \cdot a^2 \cdot 2a = 2\pi a^3$.

Chọn phương án (B)

Câu 14. Tính thể tích V của khối nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và chiều cao $h = 4$.

(A) $V = 4\pi$. (B) $V = 12\pi$. (C) $V = 16\pi\sqrt{3}$. (D) $V = 4$.

Lời giải.

Thể tích V của khối nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và chiều cao $h = 4$ là $V = \dfrac{1}{3}\pi\left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot 4 = 4\pi$.

Chọn phương án (A)

Câu 15. Cho hình lăng trụ đứng có diện tích đáy là $3a^2$, độ dài cạnh bên bằng $2a$. Thể tích khối lăng trụ bằng

(A) $6a^3$. (B) a^3. (C) $3a^3$. (D) $2a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ là $V = B.h$ với B là diện tích đáy, h là chiều cao của lăng trụ.

Lăng trụ đã cho là lăng trụ đứng suy ra đường cao là một cạnh bên nên $h = 2a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ đã cho là: $V = 3a^2 \cdot 2a = 6a^3$.

Chọn phương án (A)

Câu 16. Tính thể tích của khối nón có chiều cao bằng 4 và độ dài đường sinh bằng 5.

(A) 12π. (B) 36π. (C) 16π. (D) 48π.

Lời giải.

Bán kính đường tròn đáy của khối nón là $r = \sqrt{l^2 - h^2} = 3$.

Vậy thể tích của khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = 12\pi$.

Chọn phương án (A)

Câu 17. Khối cầu bán kính $R = 6$ có thể tích bằng bao nhiêu?

(A) 72π. (B) 48π. (C) 288π. (D) 144π.

Lời giải.

Ta có thể tích của khối cầu được tính theo công thức: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi 6^3 = 288\pi$.

Chọn phương án (C)

Câu 18. Cho khối nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và chiều cao $h = 4$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

(A) $V = 16\pi\sqrt{3}$. (B) $V = 12\pi$. (C) $V = 4$. (D) $V = 4\pi$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính thể tích của khối nón ta tính được $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}.\pi.(\sqrt{3})^2.4 = 4\pi$.

Chọn phương án (D)

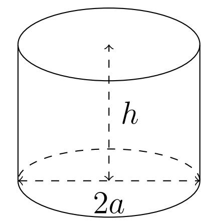
Câu 19. Hình trụ tròn xoay có đường kính đáy là $2a$, chiều cao là $h = 2a$ có thể tích là

(A) $V = 2\pi a^3$. (B) $V = \pi a^3$. (C) $V = 2\pi a^2$. (D) $V = 2\pi a^2 h$.

Lời giải.

Bán kính đường tròn đáy của hình trụ là $r = a$.

Thể tích $V = h \cdot \pi r^2 = 2a \cdot \pi a^2 = 2\pi a^3$.



Chọn phương án (A)

Câu 20. Công thức tính thể tích khối trụ có bán kính đáy R và chiều cao bằng h là

(A) $V = \pi Rh$. (B) $V = \pi R^2 h$. (C) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$. (D) $V = \pi R h^2$.

Lời giải.

Gọi S là diện tích đáy của khối trụ, khi đó $V = Sh = \pi R^2 h$.

Chọn phương án (B)

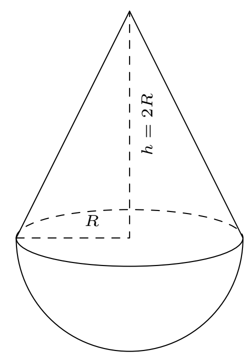
B MỨC ĐỘ 2

Câu 21.

Một đồ vật được thiết kế bởi một nửa khối cầu và một khối nón úp vào nhau sao cho đáy của khối nón và thiết diện của nửa mặt cầu chồng khít lên nhau như hình vẽ bên. Biết khối nón có đường cao gấp đôi bán kính đáy, thể tích của toàn bộ khối đồ vật bằng 36π cm^3. Diện tích bề mặt của toàn bộ đồ vật đó bằng

(A) $\pi(\sqrt{5}+3)$ cm^2. (B) $9\pi(\sqrt{5}+2)$ cm^2.

(C) $9\pi(\sqrt{5}+3)$ cm^2. (D) $\pi(\sqrt{5}+2)$ cm^2.



Lời giải.

Ta có thể tích của toàn bộ đồ vật V bằng tổng thể tích khối nón V_1 và nữa thể tích khối cầu V_2.

$\Rightarrow V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \Leftrightarrow r = 3$ cm.

$\Rightarrow$ đường sinh của khối nón $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{5r^2} = r\sqrt{5}$.

Diện tích bề mặt toàn bộ đồ vật S bằng tổng diện tích xung quanh khối nón S_1 và nữa diện tích xung quanh khối cầu S_2.

$\Rightarrow S = S_1 + S_2 = \pi r l + \frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2 = \pi r^2\sqrt{5} + 2\pi r^2 = \pi r^2(\sqrt{5}+2) = \pi \cdot 3^2(\sqrt{5}+2) = 9\pi(\sqrt{5}+2)$.

Chọn phương án (B)

Câu 22. Hình cầu có đường kính bằng 2 thì thể tích bằng

(A) $\frac{32}{3}\pi$. (B) $\frac{4}{3}\pi$. (C) 4π . (D) 16π.

Lời giải.

Thể tích hình cầu bán kính R được tính theo công thức $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, với $R = 1$ ta có $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{4}{3}\pi$.

Chọn phương án (B)

Câu 23. Thiết diện qua trục của hình nón tròn xoay là một tam giác đều cạnh $2a$. Tính thể tích V của khối nón đó.

(A) $V = \pi a^3\sqrt{3}$. (B) $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$. (D) $V = \dfrac{3\pi a^3}{8}$.

Lời giải.

Cắt hình nón bằng mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là tam giác đều suy ra $2r = 2a \Rightarrow r = a$ và đường cao $h = a\sqrt{3}$.

Thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\cdot\pi a^2\cdot a\sqrt{3} = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Chọn phương án (B)

Câu 24. Một khối nón có bán kính đáy bằng 3 và góc ở đỉnh bằng 60° thì có thể tích bằng bao nhiêu?

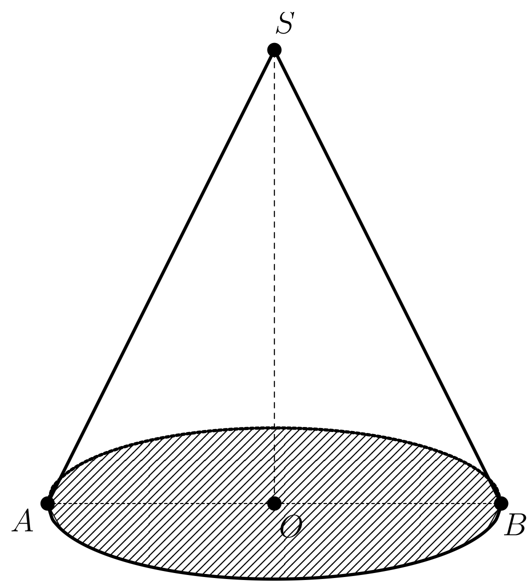
(A) $9\pi\sqrt{3}$. (B) $27\pi\sqrt{3}$. (C) $3\pi\sqrt{3}$. (D) $6\pi\sqrt{3}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng công thức tính thể tích khối nón $V = \dfrac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h$ với r là bán kính đáy, h là chiều cao hình chóp.

Cách giải:



Cắt hình nón bằng mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là tam giác cân SAB có $AB = 2R = 6$ và $ASB = 60^\circ$ nên tam giác SAB đều cạnh $6 \Rightarrow$ trung tuyến $SO = \dfrac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

Thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h = \dfrac{1}{3}\pi\cdot 3^2\cdot 3\sqrt{3} = 9\pi\sqrt{3}$.

Chọn phương án (A)

Câu 25. Một khối nón có thể tích bằng 4π và chiều cao bằng 3. Bán kính đường tròn đáy bằng

(A) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. (B) $\dfrac{4}{3}$. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Ta có: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h \Rightarrow 4\pi = \dfrac{1}{3}\pi R^2\cdot 3 \Rightarrow R^2 = 4 \Rightarrow R = 2$.

Chọn phương án (D)

Câu 26. Hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều và có thể tích $V = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3$. Diện tích xung quanh S của hình nón đó là

(A) $S = 4\pi a^2$. (B) $S = 2\pi a^2$. (C) $S = \dfrac{1}{2}\pi a^2$. (D) $S = 3\pi a^2$.

Lời giải.

Gọi R là bán kính đáy của hình nón.

Vì thiết diện qua trục là tam giác đều nên chiều cao của hình nón là $h = R\sqrt{3}$.

Từ đây ta suy ra thể của khối nón $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{\pi R^3\sqrt{3}}{3}$. (1)

Theo giả thiết ta có $V = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $R = a$. Do đó diện tích xung quanh là $S = \pi a \cdot 2a = 2\pi a^2$.

Chọn phương án (B)

Câu 27. Tính thể tích V của khối trụ có bán kính đáy bằng 6 và chiều cao bằng 3.

(A) $V = 216\pi$. (B) $V = 108\pi$. (C) $V = 72\pi$. (D) $V = 36\pi$.

Lời giải.

Áp dụng công thức thể tích khối trụ $V = \pi r^2 h = 6^2 \cdot 3\pi = 108\pi$.

Chọn phương án (B)

Câu 28. Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng 10 và diện tích xung quanh bằng 60π . Thể tích của khối nón đã cho bằng

(A) 360π. (B) 288π. (C) 120π. (D) 96π.

Lời giải.

Ta có $S_{xq} = \pi r l = 10\pi r = 60\pi \Rightarrow r = 6$.

và $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

Vậy thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi$.

Chọn phương án (D)

Câu 29. Một hình trụ có trục OO' chứa tâm của một mặt cầu bán kính R, các đường tròn đáy của hình trụ đều thuộc mặt cầu trên, đường cao của hình trụ bằng R. Tính thể tích V của khối trụ.

(A) $V = \dfrac{3\pi R^3}{4}$. (B) $V = \pi R^3$. (C) $V = \dfrac{\pi R^3}{4}$. (D) $V = \dfrac{\pi R^3}{3}$.

Lời giải.

Phương pháp

Thể tích khối trụ có bán kính đáy R và chiều cao h là: $V = \pi R^2 h$.

Cách giải:

Đường kính đáy của khối trụ là: $2r = \sqrt{(2R)^2 - R^2} = R\sqrt{3} \Rightarrow r = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

$$V = \pi r^2 h = \pi \left(\dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 R = \dfrac{3\pi R^3}{4}.$$

Chọn phương án (A)

Câu 30. Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh bằng $36\pi a^2$. Tính thể tích V của lăng trụ lục giác đều nội tiếp hình trụ.

(A) $V = 27\sqrt{3}a^3$. (B) $V = 24\sqrt{3}a^3$. (C) $V = 36\sqrt{3}a^3$. (D) $V = 81\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.

Thiết diện qua trục hình trụ là hình vuông $ADD'A'$. Gọi O, O' lần lượt là hai tâm đường tròn đáy (hình vẽ). Suy ra $l = 2r$.

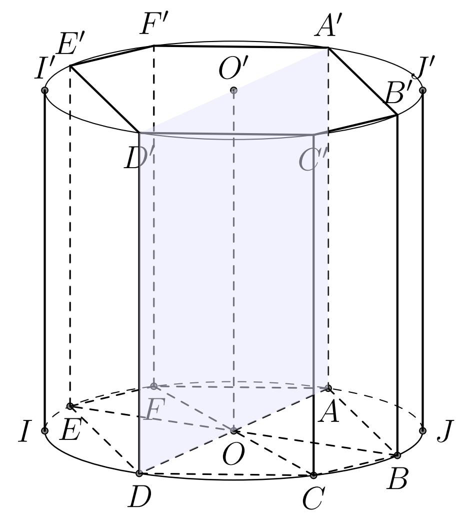
Theo giả thiết ta có

$S_{xq} = 2\pi rl = 36\pi a^2 \Leftrightarrow 2\pi r \cdot 2r = 36\pi a^2 \Rightarrow r = 3a \Rightarrow l = 6a$.

Lăng trụ lục giác đều $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$ nội tiếp hình trụ có chiều cao là $h = 6a$.

$S_{ABCDEF} = 6S_{\Delta OAB} = 6 \cdot \dfrac{(3a)^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{27a^2\sqrt{3}}{2}$ (vì ΔOAB đều, cạnh bằng $3a$).

Suy ra $V = \dfrac{27a^2\sqrt{3}}{2} \cdot 6a = 81a^3\sqrt{3}$.



Chọn phương án (D)

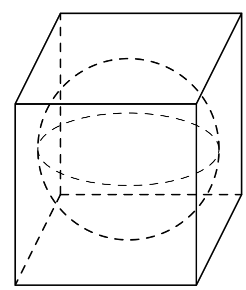
Câu 31. Cho hình lập phương có thể tích bằng $64a^3$. Thể tích của khối cầu nội tiếp hình lập phương đó bằng

(A) $V = \dfrac{8\pi a^3}{3}$. (B) $V = \dfrac{16\pi a^3}{3}$. (C) $V = \dfrac{64\pi a^3}{3}$. (D) $V = \dfrac{32\pi a^3}{3}$.

Lời giải.

Khối lập phương có thể tích $64a^3$ nên cạnh bằng $4a$.

Khối cầu nội tiếp khối lập phương có bán kính $R = \dfrac{4a}{2} = 2a$ nên thể tích khối cầu là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi(2a)^3 = \dfrac{32\pi a^3}{3}$.



Chọn phương án (D)

Câu 32. Khối nón có bán kính đáy $r = 3$, chiều cao $h = \sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối nón

(A) $V = 9\pi\sqrt{2}$. (B) $V = 3\pi\sqrt{11}$. (C) $V = 3\pi\sqrt{2}$. (D) $V = \pi\sqrt{2}$.

Lời giải.

Thể tích của khối nón $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot \sqrt{2} = \dfrac{9\pi\sqrt{2}}{3}$.

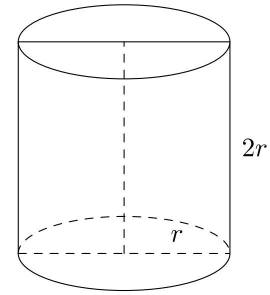
Chọn phương án (C)

Câu 33. Cho hình trụ có diện tích toàn phần là 8π và có thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua trục là hình vuông. Tính thể tích khối trụ?

(A) $\dfrac{4\pi}{9}$. (B) $\dfrac{\pi\sqrt{6}}{9}$. (C) $\dfrac{16\pi\sqrt{3}}{9}$. (D) $\dfrac{\pi\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải.

Gọi bán kính đường tròn đáy là r. Vì thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua trục là hình vuông nên chiều cao hình trụ là $2r$. Ta có $S_{tp} = 2S_d + S_{xq} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2$.



Theo đề bài $S_{tp} = 8\pi \Rightarrow r^2 = \dfrac{4}{3} \Rightarrow r = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; $V = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 = 2\pi \cdot \dfrac{8\sqrt{3}}{9} = \dfrac{16\sqrt{3}\pi}{9}$.

Chọn phương án C

Câu 34. Khối nón (N) có bán kính đáy bằng 3 và diện tích xung quanh bằng 15π. Tính thể tích V của khối nón (N).

A $V = 36\pi$. **B** $V = 60\pi$. **C** $V = 20\pi$. **D** $V = 12\pi$.

Lời giải.

— Ta có $S_{xq} = \pi rl \Rightarrow l = \dfrac{S_{xq}}{\pi r} = \dfrac{15\pi}{3\pi} = 5$ và chiều cao $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$.

— Vậy $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$.

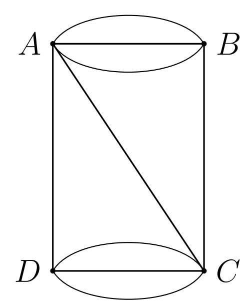
Chọn phương án D

Câu 35. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có AB và CD thuộc hai đáy hình trụ, $AB = 4a; AC = 5a$. Tính thể tích khối trụ:

A $V = 8\pi a^3$. **B** $V = 16\pi a^3$. **C** $V = 12\pi a^3$. **D** $V = 4\pi a^3$.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng công thức tính thể tích khối trụ có chiều cao h và bán kính đáy r là $V = \pi r^2 h$.



Cách giải:

Áp dụng định lí Pytago trong tam giác vuông ABC có
$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{25a^2 - 16a^2} = 3a$.

Vậy thể tích khối trụ là $V = \pi\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 .BC = \pi.(2a)^2.3a = 12\pi a^2$.

Chọn phương án C

Câu 36. Thiết diện qua trục của một hình trụ là một hình vuông có cạnh bằng $2a$. Tính theo a thể tích khối trụ đó.

A πa^3. **B** $2\pi a^3$. **C** $4\pi a^3$. **D** $\dfrac{2}{3}\pi a^3$.

Lời giải.

Ta có: $V_{\text{Trụ}} = h\pi r^2 = 2a \cdot \pi \cdot a^2 = 2\pi a^3$.

Chọn phương án B

Câu 37. Cắt mặt cầu (S) bằng một mặt phẳng cách tâm một khoảng bằng 4cm được thiết diện là một hình tròn có diện tích $9\pi\text{cm}^2$. Tính thể tích khối cầu (S).

A $\dfrac{250\pi}{3}$ cm^3. **B** $\dfrac{2500\pi}{3}$ cm^3. **C** $\dfrac{25\pi}{3}$ cm^3. **D** $\dfrac{500\pi}{3}$ cm^3.

Lời giải.

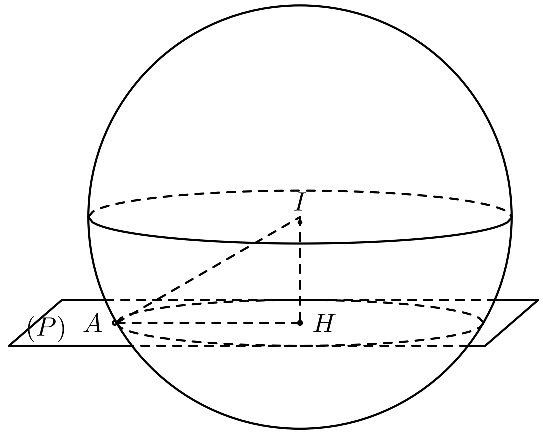
— Gọi I là tâm mặt cầu (S), H là tâm đường tròn giao tuyến, A là một điểm bất kì trên đường tròn, R là bán kính của (S).

— Ta có $\mathrm{d}(I,(P)) = 4$.

— $S_{(C)} = \pi AH^2 = 9\pi \Rightarrow AH = 3$.

— Ta có $R = \sqrt{AH^2 + \mathrm{d}(I,(P))} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$.

— Thể tích khối cầu (S) là $V_{(S)} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{500\pi}{3}$.

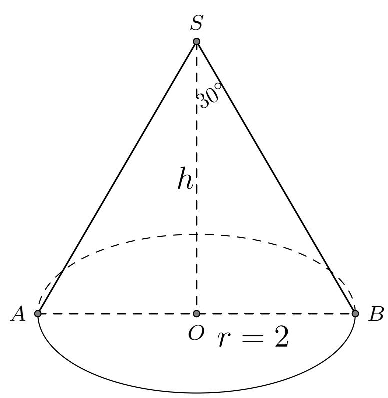


Chọn phương án D

Câu 38. Cho hình nón có bán kính đáy bằng 2 cm, góc ở đỉnh bằng $60°$. Tính thể tích của khối nón đó.

A $\dfrac{8\sqrt{3}\pi}{9}$ cm^3. **B** $8\sqrt{3}\pi$ cm^3. **C** $\dfrac{8\sqrt{3}\pi}{3}$ cm^3. **D** $\dfrac{8\pi}{3}$ cm^3.

Lời giải.



Vì góc ở đỉnh bằng $60°$ nên đường cao của hình nón là

$$h = r \cdot \cot 30° = 2\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Khi đó, thể tích khối nón là

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{8\pi\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3.$$

Chọn phương án C

Câu 39. Cho khối cầu có thể tích bằng $\dfrac{8\pi a^3\sqrt{6}}{27}$, khi đó bán kính R của mặt cầu là

A $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **B** $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **C** $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D** $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

Thể tích khối cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8\pi a^3\sqrt{6}}{27} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Chọn phương án D

Câu 40. Một hình trụ tròn xoay có độ dài đường sinh bằng đường kính đáy và thể tích của khối trụ bằng 16π . Diện tích toàn phần của khối trụ đã cho bằng

(A) 16π. (B) 12π. (C) 8π. (D) 24π.

Lời giải.

Gọi bán kính đáy của hình trụ là R suy ra $h = l = 2R$.

Theo đề bài ta có thể tích khối trụ là: $V = \pi R^2.h = \pi R^2.2R = 2\pi R^3 = 16\pi \Rightarrow R = 2$

Do đó $h = l = 4$. Diện tích toàn phần của khối trụ là: $S = 2\pi Rl + 2\pi R^2 = 2\pi.2.4 + 2\pi.2^2 = 24\pi$

Chọn phương án D

Câu 41. Từ một khối đất sét hình trụ có chiều cao bằng $36(cm)$ và đường tròn đáy có đường kính bằng $24(cm)$. Bạn Toán muốn chế tạo khối đất đó thành nhiều khối cầu và chúng có cùng bán kính $6(cm)$. Hỏi bạn Toán có thể làm ra được tối đa bao nhiêu khối cầu như thế ?

(A) 108. (B) 54. (C) 72. (D) 18.

Lời giải.

Thể tích khối trụ đất sét là:$V_T = \pi R_T^2 h = \pi \cdot 12^2 \cdot 36 = 5184\pi$.

Thể tích khối cầu $V_C = \frac{4}{3}\pi R_C^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 288\pi$.

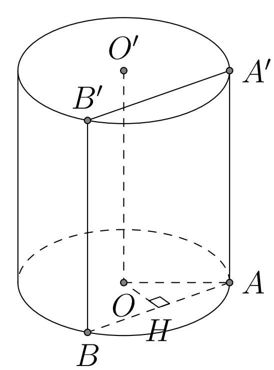
Số khối cầu có thể chế tạo từ khối trụ là $\frac{V_T}{V_C} = \frac{5184\pi}{288\pi} = 18$.

Chọn phương án D

Câu 42. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng $a\sqrt{2}$. Cắt hình trụ bởi một mặt phẳng, song song với trụ của hình trụ và cách trục của hình trụ một khoảng bằng $\frac{a}{2}$ ta được thiết diện là một hình vuông. Tính thể tích V của khối trụ đã cho.

(A) $V = \pi a^3\sqrt{3}$. (B) $V = \frac{2\pi a^3\sqrt{7}}{3}$. (C) $V = 2\pi a^3\sqrt{7}$. (D) $V = \pi a^3$.

Lời giải.



Gọi O, O' lần lượt là tâm các đáy và thiết diện là hình vuông $ABCD$.

Gọi H là trung điểm AB, ta có $\begin{cases} OH \perp AB \\ OH \perp AA' \end{cases}$ suy ra $OH \perp (ABB'A')$.

Do đó $\mathrm{d}\left(OO', (ABCD)\right) = OH = \frac{a}{2}$.

Tam giác OAH vuông tại H nên $AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Suy ra $AB = AA' = OO' = 2AH = a\sqrt{7}$ (do $ABCD$ là hình vuông).

Vậy thể tích $V = \pi R^2 h = \pi \cdot \left(a\sqrt{2}\right)^2 \cdot a\sqrt{7} = 2\pi a^3\sqrt{7}$.

Chọn phương án C

Câu 43. Một tấm bìa hình tròn có bán kính bằng 5 được cắt thành hai hình quạt, sau đó quấn hai hình quạt đó thành hai hình nón (không có đáy). Biết một trong hai hình nón này có diện tích xung quanh là 15π. Tính thể tích hình nón còn lại. Giả sử chiều rộng các mép dán không đáng kể.

(A) $\frac{4\pi\sqrt{21}}{3}$. (B) $2\pi\sqrt{21}$. (C) $\frac{2\pi\sqrt{21}}{3}$. (D) $4\pi\sqrt{21}$.

Lời giải.

Phương pháp:

+ Tính diện tích xung quanh hình nón còn lại.
+ Sử dụng công thức $S_{xq} = \pi \cdot R \cdot l$ để tính bán kính đáy của hình nón này.
+ Sử dụng công thức $R^2 + h^2 = l^2$ để tính chiều cao hình nón.
+ Sử dụng công thức $V = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot h$ để tính thể tích hình nón còn lại.

(với R là bán kính đáy hình nón, h là chiều cao hình nón và l là đường sinh hình nón)

Cách giải:

Diện tích hình tròn là $S = \pi \cdot r^2 = 25\pi$.

Diện tích xung quanh hình nón còn lại là $S_2 = 25\pi - 15\pi = 10\pi$.

Nhận xét rằng khi quấn hình quạt được cắt từ hình tròn thành hình nón thì đường sinh của hình nón chính là bán kính của hình tròn.

Từ đó hình nón còn lại có đường sinh $l = 5$.

Lại có diện tích xung quanh hình nón còn lại là 10π nên gọi R là bán kính hình nón này thì $S_{xq} = \pi \cdot R \cdot l \Rightarrow 10\pi = \pi R \cdot 5 \Rightarrow R = 2$.

Ta gọi chiều cao hình nón này là $h, (h > 0)$ thì $h^2 + R^2 = l^2 \Rightarrow h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$.

Thể tích hình nón còn lại là $V = \frac{1}{3}\pi R^2 = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot \sqrt{21} = \frac{4\pi\sqrt{21}}{3}$.

Chọn phương án (A)

Câu 44. Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường thẳng d đi qua A và song song với BC. Cạnh BC quay xung quanh d tạo thành một mặt xung quanh của hình trụ có thể tích là V_1. Tam giác ABC quay xung quanh trục d được khối tròn xoay có thể tích là V_2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

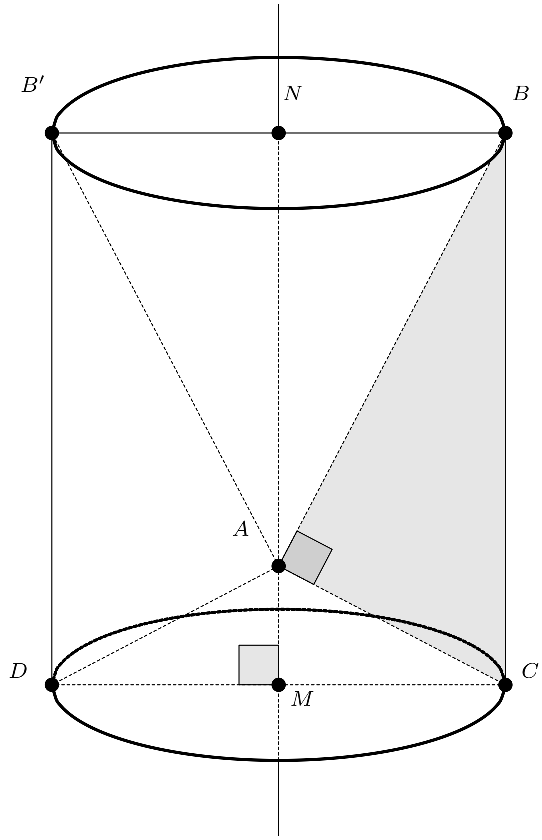
(A) $\frac{2}{3}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) 3. (D) $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Dựng hình, xác định các hình tròn xoay tạo thành khi quay và tính tỉ số thể tích.

Cách giải:



Thể tích khối trụ $V_1 = \pi \cdot R^2 \cdot h = \pi MC^2 \cdot BC$

Tổng thể tích hai khối nón $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi MC^2 \cdot AM + \dfrac{1}{3}\pi NB^2 \cdot AN$

$= \dfrac{1}{3}\pi MC^2 (AM + AN) = \dfrac{1}{3}\pi \cdot MC^2 \cdot BC = \dfrac{1}{3}V_1.$

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = 3.$

Chọn phương án (C)

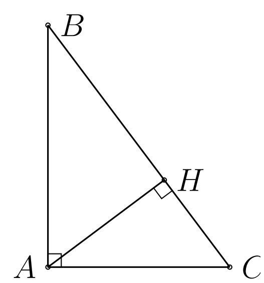
Câu 45. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi V_1, V_2, V_3 lần lượt là thể tích của các hình nón tròn xoay sinh bởi tam giác ABC khi quay quanh các cạnh BC, AC, AB. Biết $V_2 = 3\pi, V_3 = 4\pi$. Tính V_1.

(A) $V_1 = \dfrac{19\pi}{5}$. (B) $V_1 = \dfrac{8\pi}{5}$. (C) $V_1 = \dfrac{16\pi}{5}$. (D) $V_1 = \dfrac{12\pi}{5}$.

Lời giải.

Ta có

$V_1 = \dfrac{1}{3}(BH + CH)\pi AH^2 = \dfrac{1}{3}BC\pi AH^2$, $V_2 = \dfrac{1}{3}AC\pi AB^2$, $V_3 = \dfrac{1}{3}AB\pi AC^2$.



$\Rightarrow \dfrac{V_2}{V_3} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3\pi}{4\pi} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow AB = \dfrac{3}{4}AC.$

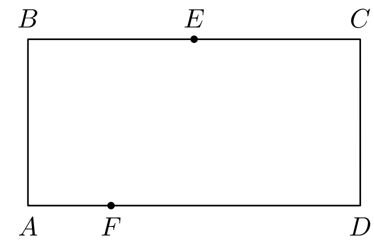
$\Rightarrow V_3 = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{4}AC\pi AC^2 = \dfrac{1}{4}\pi AC^3 = 4\pi.$

$\Rightarrow AC = \sqrt[3]{16} \Rightarrow AB = \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{16} \Rightarrow AH = \dfrac{3}{5}\sqrt[3]{16} = \dfrac{5}{6}\sqrt[3]{16}, BC = \dfrac{5}{4}\sqrt[3]{16}.$

Vậy $V_1 = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{5}{4}\sqrt[3]{16}\pi. \left(\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{16}\right)^2 = \dfrac{12\pi}{5}.$

Chọn phương án (D)

Câu 46.
Có một mảnh bìa hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 2a$, $AD = 4a$. Người ta đánh dấu E là trung điểm BC và $F \in AD$ sao cho $AF = a$. Sau đó người ta cuốn mảnh bìa lại sao cho cạnh DC trùng cạnh AB tạo thành một hình trụ. Tính thể tích tứ diện $ABEF$ với các đỉnh A, B, E, F nằm trên hình trụ vừa tạo thành.



A $\dfrac{16a^3}{3\pi^2}$. **B** $\dfrac{8a^3}{3\pi^2}$. **C** $\dfrac{a^3}{3\pi}$. **D** $\dfrac{8a^3}{\pi^2}$.

Lời giải.

Hai đáy của hình trụ là hai đường tròn bán kính $R = \dfrac{C}{2\pi} = \dfrac{2a}{\pi}$ (chu vi $C = AD = 4a$).

Gọi K là hình chiếu của F lên mặt đáy $\Rightarrow ABKF$ là hình chữ nhật.

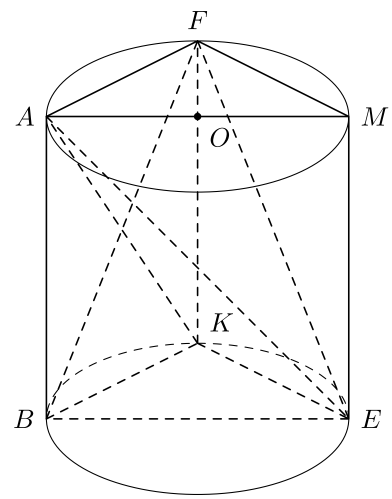
Vì $\overset{\frown}{AF} = \dfrac{1}{4}(O, R) \Rightarrow AF = R\sqrt{2} = \dfrac{2\sqrt{2}a}{\pi}$

$\Rightarrow S_{ABKF} = AB \cdot AF = 2a \cdot \dfrac{2\sqrt{2}a}{\pi} = \dfrac{4\sqrt{2}a^2}{\pi}$.

$EK = \sqrt{BE^2 - BK^2} = \sqrt{\left(\dfrac{4a}{\pi}\right)^2 - \left(\dfrac{2\sqrt{2}a}{\pi}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{2}a}{\pi}$

$\Rightarrow V_{E.ABKF} = \dfrac{1}{3}EK \cdot S_{ABKF} = \dfrac{16a^3}{3\pi}$

$\Rightarrow V_{E.ABF} = \dfrac{1}{2}V_{E.ABKF} = \dfrac{8a^3}{3\pi}$.



Chọn phương án B

Câu 47. Một khối nón có thể tích bằng $9a^3\pi\sqrt{2}$. Tính bán kính R đáy khối nón khi diện tích xung quanh nhỏ nhất.

A $R = 3a$. **B** $R = \dfrac{3a}{\sqrt[6]{2}}$. **C** $R = \sqrt[3]{9}a$. **D** $R = \dfrac{3a}{\sqrt[3]{2}}$.

Lời giải.

Gọi h, l lần lượt là chiều cao và độ dài đường sinh của khối nón.

$V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = 9a^3\pi\sqrt{2} \Rightarrow h = \dfrac{27a^3\sqrt{2}}{R^2} \Rightarrow l = \sqrt{R^2 + h^2} = \sqrt{R^2 + 2 \cdot \dfrac{729a^6}{R^4}}$.

$S_{\text{xq}} = \pi R l = \pi\sqrt{R^4 + \dfrac{729a^6}{R^2} + \dfrac{729a^6}{R^2}} \geq \pi\sqrt{\sqrt[3]{R^4 \cdot \dfrac{729a^6}{R^2} \cdot \dfrac{729a^6}{R^2}}}$.

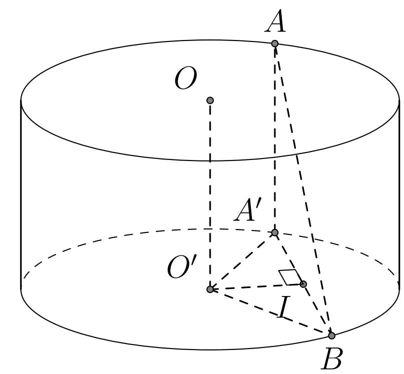
$\Rightarrow S_{\text{xq}} = 9\pi a^2$. Nên $\min S_{\text{xq}} = 9\pi a^2$ khi $R^4 = \dfrac{729a^6}{R^2} \Leftrightarrow R = 3a$.

Chọn phương án A

Câu 48. Cho hình trụ có trục OO', chiều cao bằng a. Trên hai đường tròn đáy (O) và (O') lần lượt lấy hai điểm A và B sao cho khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OO' bằng $\dfrac{a}{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và OO' bằng $60°$. Thể tích của khối trụ đã cho là

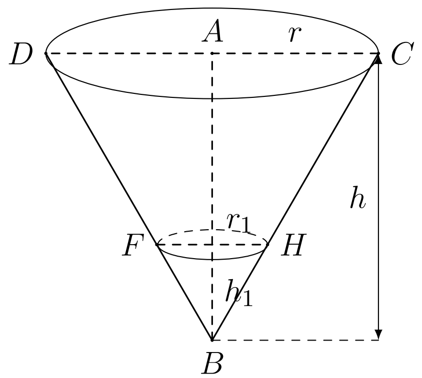
A $\dfrac{2\pi a^3}{3}$. **B** $\dfrac{\pi a^3}{3}$. **C** $2\pi a^3$. **D** πa^3.

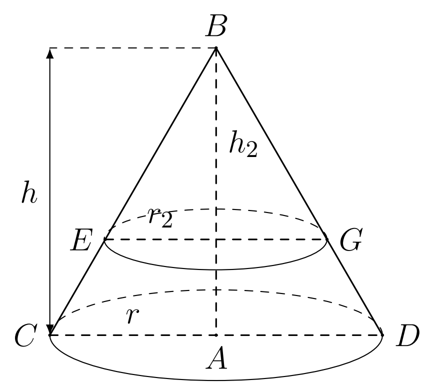
Lời giải.



Dựng AA' vuông góc với mặt phẳng đáy.
$AB \subset (ABA')$ nên $d(AB, OO') = d(OO', (ABA')) = d(O', (ABA'))$.
Gọi I là trung điểm BA'. Ta có $O'I \perp BA'$ (vì $\Delta O'BA'$ cân).
Mà $O'I \perp AA'$ nên $O'I \perp (ABA')$
hay $d(O', (ABA')) = O'I = \dfrac{a}{2}$.
Mặt khác $\widehat{AB, OO'} = \widehat{AB, AA'} = \widehat{A'AB} = 60^\circ$.
Xét $\Delta ABA'$ vuông tại A' có $\tan 60^\circ = \dfrac{A'B}{AA'} \Rightarrow A'B = a\sqrt{3}$ và $BI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Xét $\Delta O'BI$ vuông tại I có $O'B = \sqrt{O'I^2 + BI^2} = a$.
Vậy thể tích của khối trụ đã cho là
$V = \pi \cdot O'B^2 \cdot OO' = \pi \cdot a^2 \cdot a = \pi a^3$.
Chọn phương án D

Câu 49. Một cái phễu có dạng hình nón. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của lượng nước trong phễu bằng $\dfrac{1}{3}$ chiều cao của phễu. Hỏi nếu bịt kín miệng phễu rồi lộn ngược phễu lên thì chiều cao của mực nước xấp xỉ bằng bao nhiêu? Biết rằng chiều cao của phễu là 15 cm.





A. $0,501$ (cm). B. $0,302$ (cm). C. $0,216$ (cm). D. $0,188$(cm).

Lời giải.

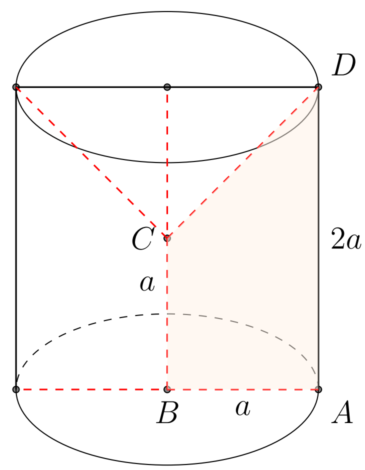
Ta gọi chiếc phễu trên là khối nón (N) có bán kính đáy r và chiều cao $h = 15$ cm và thể tích là V. Thể tích lượng nước đỗ vào phễu cũng bằng thể tích V_1 của khối nón (N_1) có bán kính đáy r_1 và chiều cao h_1.
Áp dụng định lý ta-lét ta có $\dfrac{h_1}{h} = \dfrac{r_1}{r} = \dfrac{1}{3}$
Suy ra $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = \dfrac{1}{3}\pi(\dfrac{r}{3})^2 \cdot \dfrac{h}{3} = \dfrac{1}{81}\pi r^2 h = \dfrac{1}{27}V$
Khi bịt kín miệng phễu rồi lộn ngược phễu lên thì nước trong phễu vẫn giữ nguyên. Phần không chứa nước trong phễu chính là khối nón (N_2) với bán kính đáy r_2, chiều cao h_2 và thể tích là $V_2 = V - V_1 = \dfrac{26}{27}V$.
Áp dụng định lý ta-lét ta có $\dfrac{r_2}{r} = \dfrac{h_2}{h}$.

Nên suy ra: $V_2 = \dfrac{26}{27}V \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 = \dfrac{26}{27}\dfrac{1}{3}\pi r^2 h \Leftrightarrow (\dfrac{r_2}{r})^2\dfrac{h_2}{h} = \dfrac{26}{27} \Leftrightarrow (\dfrac{h_2}{h})^3 = \dfrac{26}{27} \Leftrightarrow h_2 = 5\sqrt[3]{26}$

Vậy chiều cao của mực nước trong phễu sau khi úp ngược là: $15 - 5\sqrt[3]{26} = 0,188$ cm.

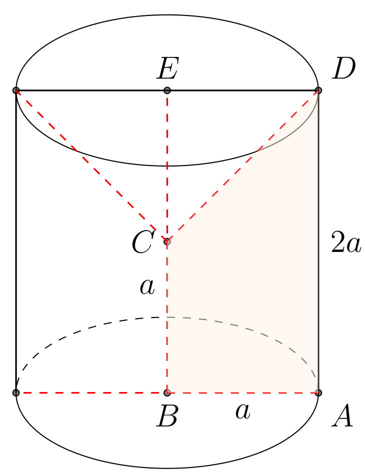
Chọn phương án D

Câu 50. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B với $AB = BC = \dfrac{AD}{2} = a$. Quay hình thang và miền trong của nó quanh đường thẳng chứa cạnh BC. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.



(A) $V = \dfrac{4\pi a^3}{3}$. (B) $V = \dfrac{5\pi a^3}{3}$. (C) $V = \pi a^3$. (D) $V = \dfrac{7\pi a^3}{3}$.

Lời giải.



Dựng hình chữ nhật $ABED$ với E nằm trên tia BC.

Thể tích khối trụ sinh bởi hình chữ nhật $ABED$ khi quay quanh đường thẳng chứa cạnh BC là

$$V_1 = AD \cdot \pi \cdot AB^2 = 2a \cdot \pi \cdot a^2 = 2\pi a^3.$$

Thể tích khối nón sinh bởi tam giác EDC khi xoay quanh đường thẳng chứa cạnh BC là

$$V_2 = \frac{1}{3}CE \cdot \pi \cdot ED^2 = \frac{1}{3}a \cdot \pi \cdot a^2 = \frac{\pi a^3}{3}.$$

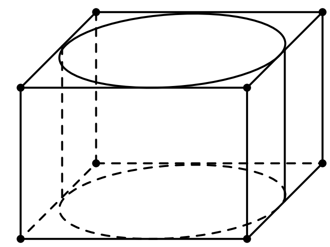
Thể tích khối tròn xoay cần tìm là: $V = V_1 - V_2 = \dfrac{5\pi a^3}{3}$.

Chọn phương án B

Câu 51. Một khối gỗ hình lập phương có thể tích V_1. Một người thợ mộc muốn gọt giũa khối gỗ đó thành một khối trụ có thể tích là V_2. Tỉ số $k = \dfrac{V_2}{V_1}$ lớn nhất bằng bao nhiêu?

A $k = \dfrac{\pi}{4}$. **B** $k = \dfrac{2}{\pi}$. **C** $k = \dfrac{\pi}{2}$. **D** $k = \dfrac{4}{\pi}$.

Lời giải.



Gọi a là cạnh của hình lập phương.

Ta có thể tích của khối lập phương là $V_1 = a^3$.

Suy ra tỉ số $k = \dfrac{V_2}{V_1}$ lớn nhất khi và chỉ khi V_2 lớn nhất.

Khi đó hình trụ có chiều cao bằng cạnh của hình lập phương và có đường tròn đáy nội tiếp một mặt của hình lập phương.

Do đó hình trụ có chiều cao $h = a$ và bán kính đáy $r = \dfrac{a}{2}$.

Ta có $V_2 = \pi r^2 h = \pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \cdot a = \dfrac{\pi a^3}{2}$. Vậy $k = \dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{\pi}{2}$.

Chọn phương án C

Câu 52. Trong số các hình trụ có diện tích toàn phần đều bằng S thì bán kính R và chiều cao h của khối trụ có thể tích lớn nhất là

A $R = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$; $h = 2\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$. **B** $R = \sqrt{\dfrac{S}{4\pi}}$; $h = \sqrt{\dfrac{S}{4\pi}}$.

C $R = \sqrt{\dfrac{2S}{3\pi}}$; $h = 4\sqrt{\dfrac{2S}{3\pi}}$. **D** $R = \sqrt{\dfrac{S}{2\pi}}$; $h = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{S}{2\pi}}$.

Lời giải.

Gọi thể tích khối trụ là V, diện tích toàn phần của hình trụ là S.

Ta có $S = 2S_{day} + S_{xq} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$.

Từ đó suy ra $\dfrac{S}{2\pi} = R^2 + Rh \Leftrightarrow \dfrac{S}{2\pi} = R^2 + \dfrac{V}{\pi R} = R^2 + \dfrac{V}{2\pi R} + \dfrac{V}{2\pi R} \geq \sqrt[3]{\dfrac{V^2}{4\pi^2}}$,

tức là $27\dfrac{V^2}{4\pi^2} \leq \left(\dfrac{S}{2\pi}\right)^3 \Leftrightarrow V \leq \sqrt{\dfrac{S^3}{54\pi}}$.

Vậy $V_{\max} = \sqrt{\dfrac{S^3}{54\pi}}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow R^2 = \dfrac{V}{2\pi R} = \dfrac{\pi R^2 h}{2\pi R} = \dfrac{Rh}{2} \Leftrightarrow h = 2R$.

Khi đó $S = 6\pi R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ và $h = 2R = 2\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$.

Chọn phương án A

Câu 53. Một hộp sữa hình trụ có thể tích V (không đổi) được làm từ một tấm tôn có diện tích đủ lớn. Nếu hộp sữa chỉ kín một đáy thì để tốn ít vật liệu nhất, hệ thức giữa bán kính đáy R và đường cao h bằng:

A $h = \sqrt{3}R$. **B** $h = \sqrt{2}R$. **C** $h = 2R$. **D** $h = R$.

Lời giải.

Phương pháp: Thể tích khối trụ có bán kính đáy R và chiều cao h là: $V = \pi R^2 h$.

Diện tích xung quanh và 1 đáy của hình trụ là: $S = 2\pi Rh + \pi R^2$.

Cách giải:

Ta có thể tích khối trụ có bán kính đáy R và chiều cao h là: $V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \dfrac{V}{\pi R^2}$.

Diện tích xung quanh và 1 đáy của hình trụ là: $S = 2\pi Rh + \pi R^2 \Rightarrow S = 2\pi .R\dfrac{V}{\pi R^2} + \pi R^2 = \dfrac{2V}{R} + \pi R^2$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương $\dfrac{V}{R}; \dfrac{V}{R}; \pi R^2$ ta có:

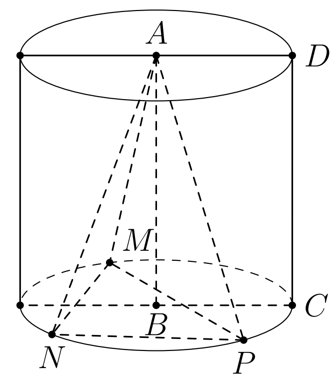
$\dfrac{V}{R} + \dfrac{V}{R}\pi R^2 \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{V}{R} + \dfrac{V}{R}\pi R^2} = 3\sqrt[3]{\pi V^2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Rightarrow \dfrac{V}{R} = \pi R^2 \Leftrightarrow R^3 = \dfrac{V}{\pi} \Leftrightarrow V = \pi R^3 \Rightarrow h = \dfrac{\pi R^3}{\pi R^2} = R$.

Chọn phương án D

Câu 54.

Quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh trục AB cố định, đường gấp khúc $ADCB$ cho ta hình trụ (T). Gọi $\triangle MNP$ là tam giác đều nội tiếp đường tròn đáy (không chứa điểm A). Tính tỷ số giữa thể tích khối trụ và thể tích khối chóp $AMNP$.



A $\dfrac{4}{3\sqrt{3}}\pi$. **B** $\dfrac{4}{\sqrt{3}}\pi$. **C** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\pi$. **D** $\dfrac{4}{3}\pi$.

Lời giải.

Hình trụ (T) có bán kính $r = BC$ và chiều cao $h = CD$. Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h$.

Gọi cạnh của tam giác MNP là x, khi đó bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle MNP$ là

$$r = \frac{2}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = r\sqrt{3}.$$

Khối chóp $AMNP$ có đáy là $\triangle MNP$ đều và chiều cao $AB = DC = h$.

Thể tích khối chóp $V' = \dfrac{1}{3} \cdot AB \cdot S_{\triangle MNP} = \dfrac{1}{3} \cdot h \cdot \dfrac{(r\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}r^2 h}{4}$.

Tỉ số giữa thể tích khối trụ và thể tích khối chóp $AMNP$ là $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{\pi r^2 h}{\dfrac{\sqrt{3}r^2 h}{4}} = \dfrac{4\pi}{\sqrt{3}}$.

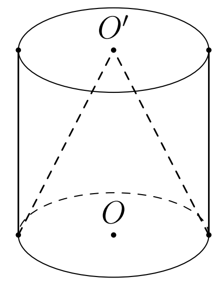
Chọn phương án B

Câu 55. Một hình trụ có chiều cao h và bán kính đáy R. Hình nón có đỉnh là tâm đáy trên của hình trụ và đáy là hình tròn đáy dưới của hình trụ. Gọi V_1 là thể tích của hình trụ, V_2 là thể tích của hình nón. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A 2. **B** $2\sqrt{2}$. **C** 3. **D** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

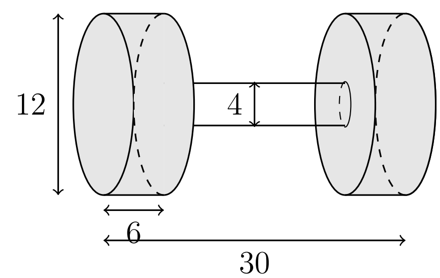
Hai khối nón và khối trụ có cùng chiều cao h và cùng bán kính đáy bằng r.
Do đó ta có $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{\pi r^2 h}{\dfrac{1}{3}\pi r^2 h} = 3$.



Chọn phương án C

Câu 56.

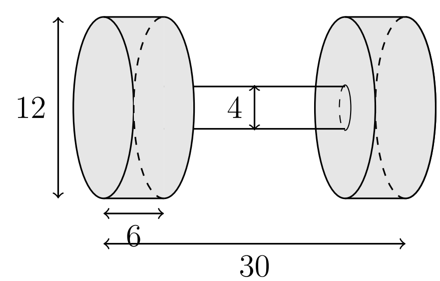
Người ta làm tạ tập cơ tay như hình vẽ với hai đầu là hai khối trụ bằng nhau và tay cầm cũng là khối trụ. Biết hai đầu là hai khối trụ đường kính đáy bằng 12, chiều cao bằng 6, chiều dài tạ bằng 30 và bán kính tay cầm là 2. Hãy tính thể tích vật liệu làm nên tạ tay đó.



A 108π. **B** 6480π. **C** 502π. **D** 504π.

Lời giải.

Gọi h_1, R_1, V_1 lần lượt là chiều cao, bán kính đáy, thể tích khối trụ nhỏ mỗi đầu.

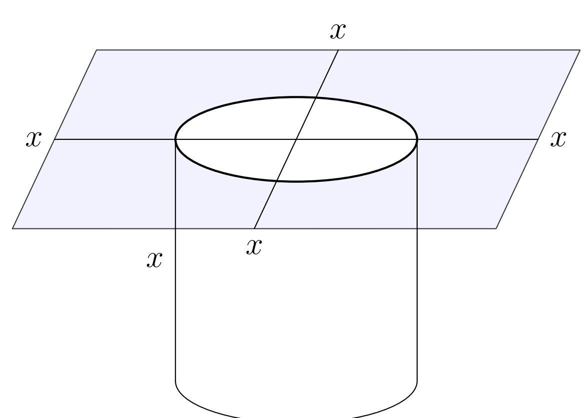


$V_1 = h_1 \cdot \pi \cdot R_1^2 = 6 \cdot \pi \cdot 6^2 = 216\pi$.
Gọi h_2, R_2, V_2 lần lượt là chiều cao, bán kính đáy, thể tích của tay cầm.
$V_2 = h_2 \cdot \pi \cdot R_2^2 = (30 - 2 \cdot 6) \cdot \pi \cdot 2^2 = 72\pi$.
Thể tích vật liệu làm nên tạ tay bằng $V = 2V_1 + V_2 = 504\pi$.

Chọn phương án D

Câu 57.

Trên một mảnh đất hình vuông có diện tích $81m^2$ người ta đào một cái ao nuôi cá hình trụ (như hình vẽ) sao cho tâm của hình tròn đáy trùng với tâm của mảnh đất. Ở giữa mép ao và mép mảnh đất người ta để lại một khoảng đất trống để đi lại, biết khoảng cách nhỏ nhất giữa mép mảnh đất là $x(m)$. Giả sử chiều sâu của ao cũng là $x(m)$. Tính thể tích lớn nhất V của ao.



A $V = 13{,}5\pi$ m^3. **B** $V = 27\pi$ m^3. **C** $V = 36\pi$ m^3. **D** $V = 72\pi$ m^3.

Lời giải.

Đường kính đáy của hình trụ là $9 - 2x \Rightarrow$ Bán kính đáy hình trụ là $\dfrac{9-2x}{2}$.

Khi đó ta có thể tích ao là $V = \pi \left(\dfrac{9-2x}{2}\right)^2 x = \dfrac{\pi}{4}(9-2x)^2 x = \dfrac{\pi}{4} f(x)$.

Xét hàm số $f(x) = (9-2x)^2x = 4x^3 - 36x^2 + 81x$ với $0 < x < \dfrac{9}{2}$ ta có

$f'(x) = 12x^2 - 72x + 81 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{9}{2} \\ x = \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$

BBT

x	0		$\frac{3}{2}$		$\frac{9}{2}$
y'		$+$	0	$-$	0
y	0	$\nearrow$	54	$\searrow$	0

Dựa vào BBT ta thấy $f(x)_{\max} = 54 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$.

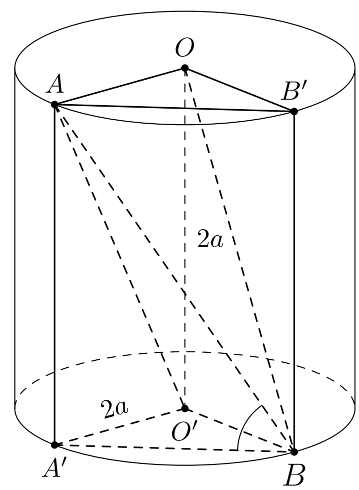
Khi đó $V_{\max} = \dfrac{\pi}{4}.54 = \dfrac{27\pi}{2} = 13,5\pi$ m^3.

Chọn phương án A

Câu 58. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, trên đường tròn tâm O' lấy điểm B. Đặt α là góc giữa AB và đáy. Tính $\tan\alpha$ khi thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất.

A $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B** $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$. **C** $\tan\alpha = 1$. **D** $\tan\alpha = \sqrt{2}$.

Lời giải.



Lấy điểm $A' \in (O')$, $B' \in (O)$ sao cho AA', BB' song song với trục OO'.

Khi đó ta có lăng trụ đứng $OAB'.O'A'B$.

Ta có $V_{OO'AB} = V_{OAB'.O'A'B} - V_{A.O'A'B} - V_{B.OAB'}$

$= V_{OAB'.O'A'B} - \dfrac{1}{3}V_{OAB'.O'A'B} - \dfrac{1}{3}V_{OAB'.O'A'B}$

$= \dfrac{1}{3}V_{OAB'.O'A'B}$.

$\Rightarrow V_{OO'AB} = \dfrac{1}{3}AA' \cdot S_{\triangle OAB'} = \dfrac{1}{6}AA' \cdot OA \cdot OB \cdot \sin\widehat{AOB'}$.

Do đó $V_{OO'AB}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \sin\widehat{AOB'} = 1 \Leftrightarrow \widehat{AOB'} = 90^\circ \Leftrightarrow OA \perp OB'$.

$\Rightarrow O'A' \perp O'B \Rightarrow \triangle O'A'B$ vuông tại $O' \Rightarrow A'B = O'A'\sqrt{2} = 2a\sqrt{2}$.

Ta có $AA' \perp (O'A'B) \Rightarrow (AB, (O'A'B)) = \widehat{ABA'} = \alpha$.

$\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{AA'}{A'B} = \dfrac{2a}{2a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Chọn phương án A

Câu 59. Hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều và có thể tích $V = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3$. Diện tích chung quanh S của hình nón đó là

A $S = \dfrac{1}{2}\pi a^2$. **B** $S = 4\pi a^2$. **C** $S = 2\pi a^2$. **D** $S = \pi a^2$.

Lời giải.

Thiết diện qua trục là tam giác đều nên hình nón đó có $l = 2R \Rightarrow h = R\sqrt{3}$.

Lại có $V = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3 = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{1}{3}\pi R^3\sqrt{3} \Rightarrow R^3 = a^3 \Rightarrow R = a$.

Vậy diện tích xung quanh hình nón là $S_{xq} = \pi Rl = \pi a^2$.

Chọn phương án D

Câu 60. Một khối gỗ hình lập phương có thể tích bằng V_1, một người thợ mộc muốn gọt giũa khối gỗ đó thành một khối trụ có thể tích bằng V_2. Tính tỉ số lớn nhất $k = \dfrac{V_2}{V_1}$.

A $k = \dfrac{1}{4}$. **B** $k = \dfrac{\pi}{2}$. **C** $k = \dfrac{\pi}{4}$. **D** $k = \dfrac{\pi}{3}$.

Lời giải.

Do V_1 không đổi nên $k = \dfrac{V_2}{V_1}$ lớn nhất khi V_2 lớn nhất.

Khi đó khối trụ có hai đáy nằm trên hai mặt của hình lập phương.

Giả sử hình lập phương có cạnh $a \Rightarrow V_1 = a^3$ và $V_2 = \pi\dfrac{a^2}{4} \cdot a = \dfrac{\pi \cdot a^3}{4} \Rightarrow k = \dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{\pi}{4}$.

Chọn phương án C

C MỨC ĐỘ 4

Câu 61. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại các điểm M, N, P. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$.

A $V = \dfrac{108\pi}{3}$. **B** $V = \dfrac{64\sqrt{2}\pi}{3}$. **C** $V = \dfrac{125\pi}{6}$. **D** $V = \dfrac{32\pi}{3}$.

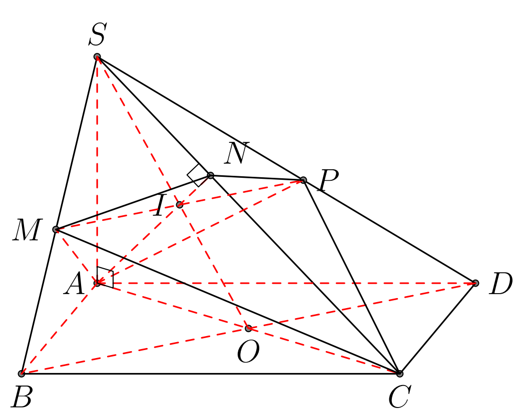
Lời giải.

Phương pháp:

+ Chứng minh: O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$ (với O là tâm của hình vuông $ABCD$).

+ Thể tích khối cầu có bán kính r là: $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Cách giải:



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD \Rightarrow O$ là trung điểm AC.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AP$.

Mặt khác, $\begin{cases} SC \perp AP (\text{do } SC \perp (\alpha)) \\ CD \perp AP \end{cases} \Rightarrow AP \perp (SCD) \Rightarrow AP \perp CP.$

Vậy ΔAPC vuông tại $P \Rightarrow OA = OC = OP$.

Tương tự, ta có: ΔAMC vuông tại $M \Rightarrow OA = OC = OM$.

Lại có, $SC \perp AN$ (do $SC \perp (\alpha)$) $\Rightarrow \Delta ANC$ vuông tại N.

$\Rightarrow OA = OC = ON$

$\Rightarrow OA = OC = OP = OM = ON \Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$.

Bán kính: $R = OA = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$.

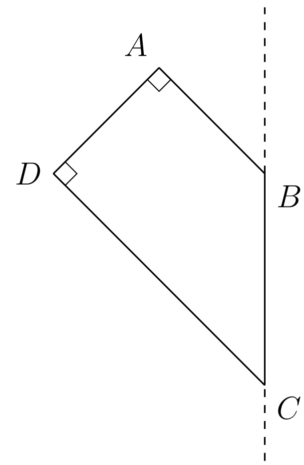
Thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$ là: $V = \dfrac{4}{3}\pi.2^3 = \dfrac{32\pi}{3}$.

Chọn phương án D

Câu 62.

Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D có $CD = 2AB = 2AD = 4$. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra bởi hình thang $ABCD$ khi quay xung quanh đường thẳng BC.

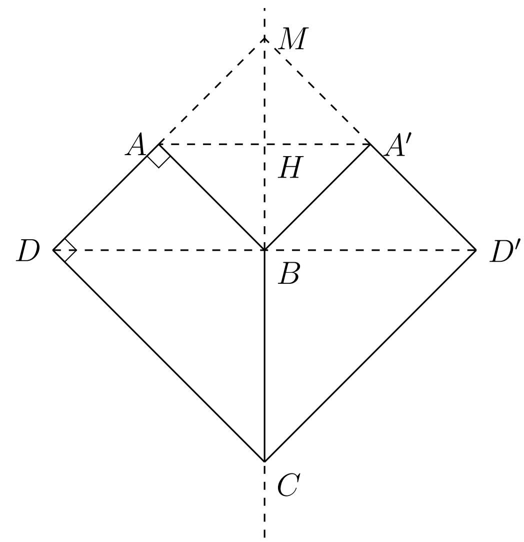
A $V = \dfrac{20\pi\sqrt{2}}{3}$. **B** $V = \dfrac{32\pi\sqrt{2}}{3}$. **C** $10\pi\sqrt{2}$. **D** $V = \dfrac{28\pi\sqrt{2}}{3}$.



Lời giải.

Chọn phương án D

Gọi A', D' lần lượt là điểm đối xứng của A, D qua đường thẳng BC.
Gọi M là giao điểm của AD và $A'D'$.
Ta có $AB = AD = 2$, $CD = 4$ suy ra $AH = BH = \sqrt{2}$ và $BD = BC = 2\sqrt{2}$.
Ta có $\dfrac{AA'}{DD'} = \dfrac{1}{2}$ suy ra $MA = AD = 2$ và $MB = 2\sqrt{2}$.
Gọi V_1 là thể tích của khối nón có chiều cao $BC = 2\sqrt{2}$ và bán kính đường tròn đáy là $BD = 2\sqrt{2}$.
Gọi V_2 là thể tích của khối nón có chiều cao $BM = 2\sqrt{2}$ và bán kính đường tròn đáy là $BD = 2\sqrt{2}$.
Gọi V_3 là thể tích của khối nón có chiều cao $BH = \sqrt{2}$ và bán kính đường tròn đáy là $AH = \sqrt{2}$.
Gọi V_4 là thể tích của khối nón có chiều cao $MH = \sqrt{2}$ và bán kính đường tròn đáy là $AH = \sqrt{2}$.
Ta có $V_1 = V_2$ và $V_3 = V_4$.
Khi đó
$V = V_1 + V_2 - V_3 - V_4 = 2V_1 - 2V_3$
$= 2\dfrac{1}{3}\left[(2\sqrt{2})^2\pi \cdot 2\sqrt{2} - (\sqrt{2})^2\pi \cdot \sqrt{2})\right] = \dfrac{28\pi\sqrt{2}}{3}$.

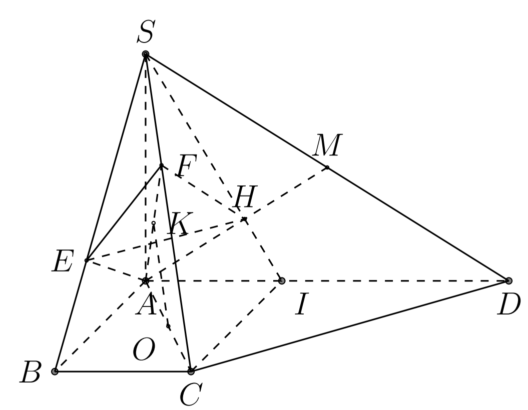


Câu 63. Cho hình chóp $S.BCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$; tứ giác $ABCD$ là hình thang vuông với cạnh đáy AD, BC; $AD = 3BC = 3a$; $AB = a, SA = a\sqrt{3}$. Điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AI}$; M là trung điểm SD, H là giao điểm của AM và SI. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SC. Tính thể tích V của khối nón có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác EFH và đỉnh thuộc mặt phẳng $(ABCD)$.

(A) $V = \dfrac{\pi a^3}{2\sqrt{5}}$. **(B)** $V = \dfrac{\pi a^3}{\sqrt{5}}$. **(C)** $V = \dfrac{\pi a^3}{10\sqrt{5}}$. **(D)** $V = \dfrac{\pi a^3}{5\sqrt{5}}$.

Lời giải.

Xét tam giác SAD vuông tại A có $SA = a\sqrt{3}$, $AD = 3a \Rightarrow \widehat{SDA} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MAI} = 30^\circ$.
Lại có tam giác SAI vuông tại A có $SA = a\sqrt{3}$, $AI = a \Rightarrow \widehat{SIA} = 60^\circ$ nên tam giác AHI có $\widehat{AHI} = 90^\circ$ hay $AH \perp SI$.
Mà $AH \perp IC$ do $IC \parallel BA \perp (SAD)$ nên $AH \perp (SIC) \Rightarrow AH \perp SC$.
Ngoài ra, $AE \perp SB$, $AE \perp BC$ $(BC \perp (SAB)) \Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC$.



Mà $AE \perp SC$ nên $SC \perp (AEFH)$ và $AEFH$ là tứ giác có $\widehat{E} = \widehat{H} = 90^\circ$ nên nội tiếp đường tròn tâm K là trung điểm AF đường kính AF. Gọi O là trung điểm AC thì $OK \parallel SC$ mà $SC \perp (AEFH)$ nên $OK \perp (AEFH)$ hay O chính là đỉnh hình nón và đường tròn đáy là đường tròn đường kính AF.
Ta tính AF, OK.
Xét tam giác SAC vuông tại A đường cao AF nên

$AF = \dfrac{SA \cdot AC}{SC} = \dfrac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$; $OK = \dfrac{1}{2}CF = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{CA^2}{CS} = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$.

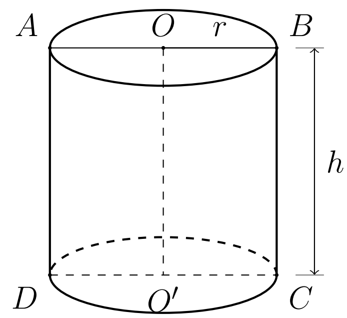
Vậy thể tích $V = \dfrac{1}{2}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \dfrac{a}{\sqrt{5}} \cdot \left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\right)^2 = \dfrac{\pi a^3}{10\sqrt{5}}$.

Chọn phương án C

Câu 64. Thiết diện của hình trụ và mặt phẳng chứa trục của hình trụ là hình chữ nhật có chu vi là 12 cm. Giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ là

(A) 32π cm^2. (B) 64π cm^2. (C) 8π cm^2. (D) 16π cm^2.

Lời giải.



Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình trụ lần lượt là r và h $(r, h > 0)$.
Thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có chu vi $2(AB + BC) = 2(h + 2r)$.
Theo giả thiết ta có $2(h + 2r) = 12 \Leftrightarrow h + 2r = 6 \Leftrightarrow h = 6 - 2r$ $(r < 3)$.
Thể tích khối trụ $V = \pi r^2 h = \pi r^2(6 - 2r) = \pi rr(6 - 2r)$.
Áp dụng BĐT Cô-si cho 3 số $r, r, 6 - 2r$ ta được
$r + r + (6 - 2r) \geq 3\sqrt[3]{rr(6 - 2r)} \Leftrightarrow r^2(6 - 2r) \leq 8 \Leftrightarrow \pi r^2(6 - 2r) \leq 8\pi$
Hay $V \leq 8\pi$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $r = 6 - 2r \Leftrightarrow r = 2$ (thỏa mãn).
Vậy giá trị lớn nhất của khối trụ là $V = 8\pi$.

Chọn phương án C

Câu 65. Giả sử đồ thị hàm số $y = \left(m^2 + 1\right)x^4 - 2mx^2 + m^2 + 1$ có 3 điểm cực trị là A, B, C mà $x_A < x_B < x_C$.Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC ta được một khối tròn xoay. Giá trị của m để thể tích khối tròn xoay đó lớn nhất thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

(A) $(4; 6)$. (B) $(2; 4)$. (C) $(-2; 0)$. (D) $(0; 2)$.

Lời giải.

— $y' = 4\left(m^2 + 1\right)x^3 - 4mx = 4x\left[\left(m^2 + 1\right)x^2 - m\right]$.

— $y' = 0 \Leftrightarrow 4x\left[\left(m^2 + 1\right)x^2 - m\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{m}{m^2 + 1}} \end{array}\right.$ $(m > 0)$

– Với $m > 0$ thì hàm số có ba điểm cực trị với $x_A < x_B < x_C$ là
$A\left(-\sqrt{\dfrac{m}{m^2 + 1}}; -\dfrac{m^2}{m^2 + 1} + m^2 + 1\right)$, $B\left(0; m^2 + 1\right)$, $C\left(\sqrt{\dfrac{m}{m^2 + 1}}; -\dfrac{m^2}{m^2 + 1} + m^2 + 1\right)$.

– Quay $\triangle ABC$ quanh AC được khối tròn xoay có thể tích là

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi BIIC = \frac{2}{3}\pi\left(\frac{m^2}{m^2 + 1}\right) \cdot \sqrt{\frac{m}{m^2 + 1}} = \frac{2}{3}\pi\sqrt{\frac{m^9}{\left(m^2 + 1\right)^5}}.$$

– Xét hàm số $f(x) = \dfrac{m^9}{\left(m^2 + 1\right)^5}$ có

$*$ $f(x) = \dfrac{m^8\left(9 - m^2\right)}{\left(m^2 + 1\right)^6}$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow m = 3 (m > 0)$.

∗ Bảng biến thiên

x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	max	$\searrow$	0

Chọn phương án B

Câu 66. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC), ABC$có tam giác vuông tại B. Biết $BC = 2a, AB = 2a\sqrt{3}, AD = 6a$. Quay tam giác ABC và ABD (bao gồm cả điểm bên trong 2 tam giác) xung quanh đường thẳng AB ta được hai khối tròn xoay. Thể tích phần chung của 2 khối tròn xoay đó bằng:

(A) $\dfrac{5\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. (B) $\dfrac{3\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. (C) $\dfrac{64\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. (D) $\dfrac{4\sqrt{3}\pi a^3}{2}$.

Lời giải.

Phương pháp: Công thức tính thể tích khối nón tròn xoay có chiều cao h và bán kính đáy R là: $V = \dfrac{1}{4}\pi R^2 h$.

Cách giải:

Ta có:

Khối nón (N_1) được sinh bởi ΔABC khi quay quanh AB có chiều cao $h_1 = AB$ và bán kính đáy $R_1 = BC$.

Khối nón (N_2) được sinh bởi ΔADB khi quay quanh AB có chiều cao $h_2 = AB$ và bán kính đáy $R_2 = AD$.

Do hai khối nón cùng có chiều cao AB nên hai đáy của hai khối nón nằm trong hai mặt phẳng song song.

Trong mặt phẳng đáy của hình nón (N_1) kẻ đường kính $GH//DE$. Dễ dàng chứng minh được DEGH là hình thang cân.

Gọi $M = AG \cap BE; N = AH \cap BD, I = AB \cap MN$. Khi đó phần chung giữa hai khối nón (N_1) và (N_2) là hai khối nón: Khối nón (N_3) đỉnh B, đường cao BI, bán kính đáy $IN \Rightarrow V_3 = \dfrac{1}{3}\pi.IN^2.BI$

Khối nón (N_4) đỉnh A, đường cao AI, bán kính đáy $IN \Rightarrow V_4 = \dfrac{1}{3}\pi.IN^2.AI$

Thể tích phần chung $V = V_3 + V_4 = \dfrac{1}{3}\pi.IN^2.BI + \dfrac{1}{3}\pi.IN^2.AI = \dfrac{1}{3}\pi.IN^2.(AI + BI) = \dfrac{1}{3}\pi.IN^2.AB$ Áp dụng định lí Ta-lét ta có:

$\dfrac{MN}{GH} = \dfrac{AI}{AB}; \dfrac{MN}{DE} = \dfrac{BI}{AB} \Rightarrow \dfrac{MN}{GH} + \dfrac{MN}{DE} = \dfrac{AI + BI}{AB} = 1$

$\Rightarrow MN\left(\dfrac{1}{2BC} + \dfrac{1}{2AD}\right) = 1 \Leftrightarrow MN.\left(\dfrac{1}{2.2a} + \dfrac{1}{2.6a}\right) = 1 \Leftrightarrow MN = 3a$

Dễ thấy I là trung điểm của MN $\Rightarrow IN = \dfrac{MN}{2} = \dfrac{3a}{2}$.

Vậy $V = \dfrac{1}{3}\pi.\left(\dfrac{3a}{2}\right)^2.2a\sqrt{3} = \dfrac{3\sqrt{3}\pi a^3}{2}$.

Chọn phương án B

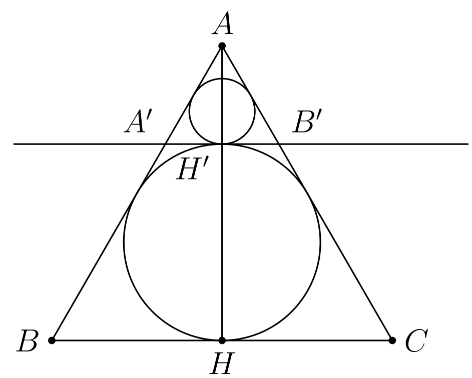
Câu 67. Cho khối nón có độ lớn góc ở đỉnh là $\frac{\pi}{3}$. Một khối cầu (S_1) nội tiếp trong khối nón. Gọi S_2 là khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của nón và với S_1; S_3 là khối tiếp xúc với tất cả các đường sinh của nón với S_2; ...; S_n là khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của nón và với S_{n-1}. Gọi $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_{n-1}, V_n$ lần lượt là thể tích của khối cầu $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_{n-1}, S_n$ và V là thể tích của khối nón. Tính giá trị của biểu thức

$$T = \lim_{n\to+\infty} \frac{V_1 + V_2 + \ldots + V_n}{V}$$

.

A $\frac{3}{5}$. B $\frac{6}{13}$. C $\frac{7}{9}$. D $\frac{1}{2}$.

Lời giải.



Thiết diện qua trục của hình nón là một tam giác đều cạnh l. Do đó bán kính đường tròn nội tiếp tam giác cũng chính là bán kính mặt cầu nội tiếp chóp là $r_1 = \frac{1}{3}\frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{6}$.

Áp dụng định lí Ta-lét ta có

$$\frac{AA'}{AB} = \frac{AH'}{AH} = \frac{AH - HH'}{AH} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2} - \frac{l\sqrt{3}}{3}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow AA' = \frac{l}{3}.$$

Tương tự ta tìm được $r_2 = \frac{l}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{l\sqrt{3}}{18} = \frac{r_1}{3}$.

Tiếp tục như vậy ta có $r_3 = \frac{r_1}{3^2}$, $r_4 = \frac{r_1}{3^3}$, ... $r_n = \frac{r_1}{3^{n-1}}$.

Ta có $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3$, $V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{r_1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3^3}V_1$, $V_3 = \frac{1}{\left(3^3\right)^2}V_1, \ldots; V_n = \frac{1}{\left(3^3\right)^{n-1}}V_1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & \lim_{n\to+\infty}\frac{V_1+V_2+\ldots+V_n}{V}\\
= & \lim_{n\to+\infty}\frac{V_1\left(1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{\left(3^3\right)^2}+\ldots+\frac{1}{\left(3^3\right)^{n-1}}\right)}{V}\\
= & \lim_{n\to+\infty}\frac{V_1\cdot S}{V}.
\end{aligned}$$

Đặt $S = 1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{\left(3^3\right)^2} + \ldots + \frac{1}{\left(3^3\right)^{n-1}}$. Đây là tổng của CSN lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{3^3} < 1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S = \frac{1}{1-\frac{1}{3^3}} = \frac{27}{26}$$

$\Rightarrow V_1 + V_2 + \ldots + V_n = \frac{27}{26}V_1 = \frac{27}{26}\cdot\frac{4}{3}\pi\left(\frac{l\sqrt{3}}{6}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{52}\pi l^3$ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{l}{2}\right)^2\cdot\frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi l^3}{24}$

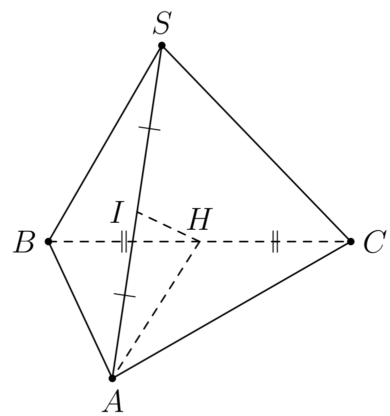
$\Rightarrow T = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{52}\pi l^3}{\dfrac{\sqrt{3}\pi l^3}{24}} = \dfrac{6}{13}$.

Chọn phương án B

Câu 68. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $A, AB = 1$ cm, $AC = \sqrt{3}$ cm. Tam giác SAB, SAC lần lượt vuông tại B và C. Khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng $\dfrac{5\sqrt{5}}{6}$ cm^3. Tính khoảng cách từ C tới (SAB).

A $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm. **B** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ cm. **C** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ cm. **D** $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ cm.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của SA.

Tam giác SAB, SAC vuông tại $B, C \Rightarrow IS = IA = IB = IC \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$.

Gọi H là trung điểm của BC. Vì ΔABC vuông tại A;

$\Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

$\Rightarrow IH \perp (ABC)$.

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$. Theo bài ra ta có:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi R^3 &= \frac{5\sqrt{5}\pi}{6} \Leftrightarrow R^3 = \frac{5\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{125}}{8} \Leftrightarrow R = \frac{\sqrt{5}}{2}; \\ \Rightarrow IS &= IA = IB = IC = \frac{\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Xét tam giác vuông ABC có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2 \Rightarrow AH = 1$.

Xét tam giác vuông IAH có: $IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{\dfrac{5}{4} - 1} = \dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} S_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Rightarrow V_{I.ABC} &= \frac{1}{3}IH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} SI \cap (ABC) = A &\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\,(S, (ABC))}{\mathrm{d}\,(I, (ABC))} = \frac{SA}{IA} = 2 \\ &\Rightarrow \frac{V_{S.ABC}}{V_{S.IBC}} = 2 \\ &\Rightarrow V_{S.ABC} = 2V_{I.ABC} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$

Xét tam giác vuông SAB có $IB = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$$\Rightarrow SA = 2IB = \sqrt{5} \Rightarrow SB = \sqrt{SA^2 - AB^2} = 2 \Rightarrow S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1.$$

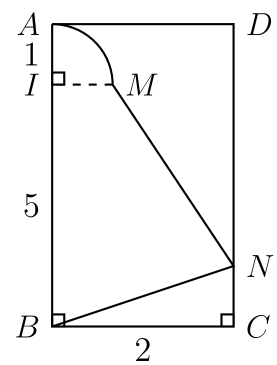
Ta có

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}\mathrm{d}\left(C,(SAB)\right).S_{\Delta SAB}$$
$$\Rightarrow \mathrm{d}\left(C,(SAB)\right) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SAB}} = \frac{3\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Chọn phương án A

Câu 69.

Có một tấm bìa hình chữ nhật $ABCD$ với $AB=6, BC=2$. Trên các cạnh AB, CD lần lượt lấy các điểm I, N sao cho $AI = CN = 1$. Gọi (l) là đường cong bao gồm: cung tròn AM tâm I với $\widehat{AIM} = 90^\circ$ (như hình vẽ bên), và đường gấp khúc MNB. Thể tích của khối tròn xoay khi quay (l) quanh cạnh AB bằng



A $\frac{28\pi}{3}$. **B** $\frac{34}{3}\pi$. **C** 10π. **D** 20π.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của N trên AB, gọi K là giao điểm của CM và AB. Gọi V_1 là thể tích nửa khối cầu tạo bởi cung tròn AM, V_2 là thể tích khối nón tạo bởi tam giác BNH, V_3 là thể tích khối nón cụt tạo bởi hình thang $IMNH$. Ta có

$V_1 = \frac{4}{3}\pi.1^2 = \frac{2}{3}\pi.$

$V_2 = \frac{1}{3}\pi.2^2.1 = \frac{4}{3}\pi.$

Gọi V_4 là thể tích khối nón tạo bởi tam giác KHN, gọi V_5 là thể tích khối nón tạo bởi tam giác KIM. Ta có $V_4 = \frac{1}{3}\pi.2^2.8 = \frac{32}{3}\pi.$

$V_5 = \frac{1}{3}\pi.1^2.4 = \frac{4}{3}\pi.$

Suy ra $V_3 = V_4 - V_5 = \frac{28}{3}\pi.$

Thể tích khối cần tính

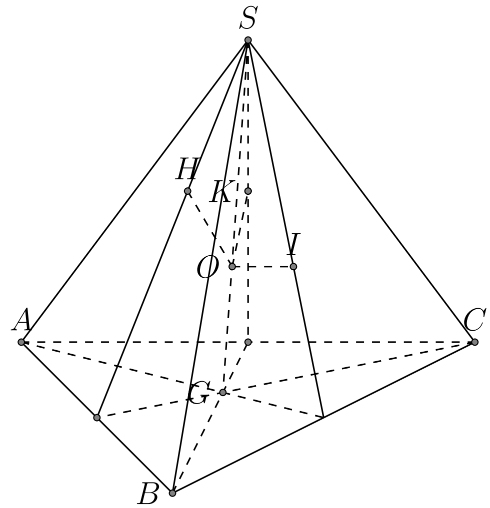
$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{34}{3}\pi.$

Chọn phương án B

Câu 70. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Biết thể tích của hình chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3}{12}$, tính bán kính r của mặt cầu nội tiếp hình chóp.

A $r = \frac{2a}{3+\sqrt{3}}$. **B** $r = 2a$. **C** $r = \frac{2a}{3\left(3+2\sqrt{3}\right)}$. **D** $r = \frac{a}{3\left(3+2\sqrt{3}\right)}$.

Lời giải.



Vì hình chóp $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên ta có $SA = SB = SC$ mà các cạnh bên SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một nên ta có

$V_{S.ABC} = \frac{1}{6}.SA.SB.SC = \frac{1}{6}.SA^3$. Do đó: $\frac{a^3}{6} = \frac{SA^3}{6} \Rightarrow SA = a$

Gọi r là bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp thì: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}r\left(S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SCA} + S_{ABC}\right)$ Với

$S_{SAB} = S_{SBC} = S_{SCA} = \frac{a^2}{2}$, $\triangle\ ABC$ đều, vì $AB = BC = CA = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

Do đó: $S_{ABC} = \left(a\sqrt{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Gọi G, H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên $(ABC), (SAB), (SBC), (SCA)$.

Ta có $OG = OH = OI = OK = r$

Lại có: $V_{S.ABC} = V_{O.ABC} + V_{O.SAB} + V_{O.SBC} + V_{O.SCA} = \frac{r}{3}\left(3S_{\Delta SAB} + S_{\Delta ABC}\right)$.

Suy ra: $r = \dfrac{3 \cdot \frac{a^3}{6}}{3 \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{a}{3 + \sqrt{3}}$

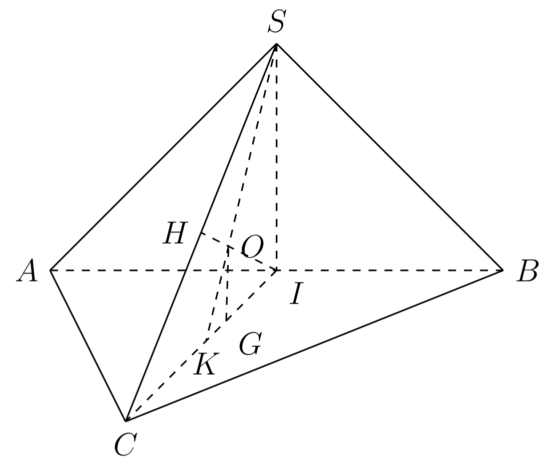
Chọn phương án A

Câu 71. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A $V = \frac{5\pi}{3}$. **B** $V = \frac{20\sqrt{15}\pi}{27}$. **C** $V = \frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$. **D** $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$.

Lời giải.

Gọi O, G, I là tâm mặt cầu ngoại tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và trung điểm của AB. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với (ABC) cho nên $SI \perp (ABC)$, O là tâm mặt cầu ngoại tiếp suy ra $OG \perp (ABC)$, cho nên O thuộc (SCI), mặt khác tam giác SCI cân tại I và O các đều hai điểm S, C suy ra O là trọng tam tam giác SCI.



Gọi K là trung điểm IC và $SO = \dfrac{2}{3}SK = \dfrac{2}{3}\sqrt{SI^2 + IK^2} = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$. Vậy thể tích khối cầu $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot SO^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot \left(\dfrac{\sqrt{15}}{3}\right)^3 = \dfrac{20\sqrt{15}\pi}{27}$.

Chọn phương án B

Câu 72. Cho hình nón (N) có đường sinh tạo với đáy một góc $60°$. Mặt phẳng qua trục của (N) cắt (N) được thiết diện là một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 2. Tính thể tích V của khối (N).

A $V = 3\pi$. **B** $V = 9\pi$. **C** $V = 3\sqrt{3}\pi$. **D** $V = 9\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.

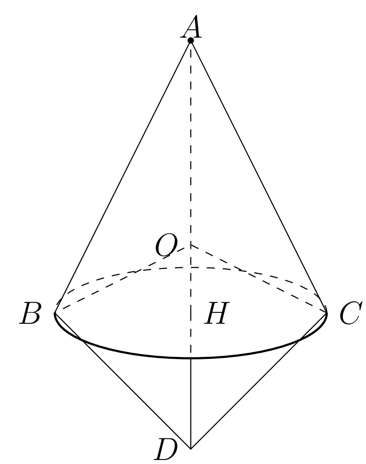
Giả sử thiết diện thỏa mãn đề bài là tam giác ABC nội tiếp $(O; 2)$ đường kính AD, đường sinh của (N) là l.

Theo bài ra ta có $\widehat{ABH} = 60° \Rightarrow \widehat{BAD} = 30° \Rightarrow \widehat{ADB} = 60° \Rightarrow \triangle OBD$ đều $\Rightarrow BD = 2, AD = 4$.

Áp dụng Pytago cho tam giác vuông $ABD : AD^2 = AB^2 + BD^2 \Rightarrow l = 2\sqrt{3}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABH ta có: $r = BH = \sqrt{3}; h = AH = 3$.

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 3 \cdot 3 = 3\pi$. Vậy thể tích của khối nón (N) là 3π.

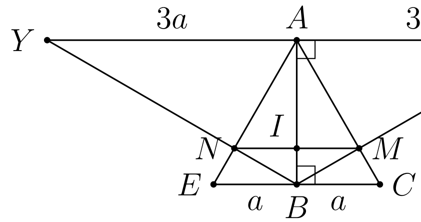


Chọn phương án A

Câu 73. Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$, ABC là tam giác vuông tại B. Biết $BC = a$, $AB = a\sqrt{3}$, $AD = 3a$. Quay các tam giác ABC và ABD (bao gồm cả điểm bên trong hai tam giác) xung quanh đường thẳng AB ta được hai khối trong xoay. Tính thể tích V phần chung của hai khối tròn xoay đó.

A $V = \dfrac{3\sqrt{3}\pi a^3}{16}$. **B** $V = \dfrac{8\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **C** $V = \dfrac{5\sqrt{3}\pi a^3}{16}$. **D** $V = \dfrac{4\sqrt{3}\pi a^3}{16}$.

Lời giải.



Cắt khối tròn xoay bởi mặt phẳng (ABC) ta thu được thiết diện như hình vẽ. Áp dụng định lí Thales ta có

$$\frac{BN}{YN}=\frac{NE}{NA}=\frac{BE}{AY}=\frac{1}{3},$$
$$\frac{BM}{XM}=\frac{CM}{AM}=\frac{BC}{AX}=\frac{1}{3}.$$

Suy ra $IM=\frac{1}{4}AX=\frac{3a}{4}$. Phần chung của hai khối tròn xoay thu được gồm hai khối nón khi quay các tam giác AIM và BIM quanh trục AB. Do đó thể tích của nó là

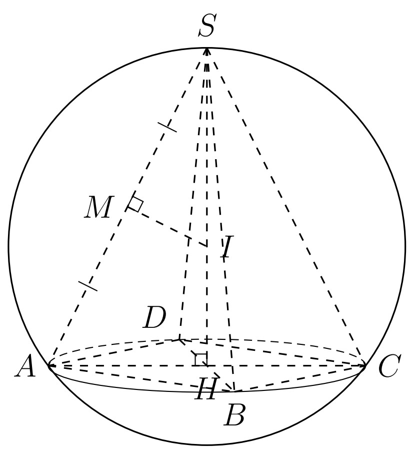
$$V=\frac{1}{3}\pi IM^2\cdot IA+\frac{1}{3}\pi IM^2\cdot IB=\frac{1}{3}\pi IM^2\cdot AB=\frac{3\sqrt{3}\pi a^3}{16}.$$

Chọn phương án A

Câu 74. Tính thể tích lớn nhất của khối chóp tứ giác nội tiếp một mặt cầu bán kính bằng 3.

A $\frac{49}{3}$. **B** 12π. **C** $\frac{32\pi}{3}$. **D** $\frac{64}{3}$.

Lời giải.



Giả sử hình chóp $S.ABCD$ nội tiếp mặt cầu (S) có tâm I bán kính $R=3$, đường cao của hình chóp là SK.

Gọi H là hình chiếu của I lên $mp(ABCD)$ và cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

Dễ thấy đường cao hình chóp lớn nhất khi K trùng H và I nằm giữa đoạn SH. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm H có diện tích lớn nhất khi $ABCD$ là hình vuông.

Vậy để khối chóp $S.ABCD$ có thể tích lớn nhất cần có $S.ABCD$ là khối chóp đều.

Qua trung điểm M của SA kẻ đường thẳng vuông góc với SA cắt SH tại I, khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đều $S.ABCD$.

Đặt $AB = x$ và $SH = h$.

Xét hai tam giác đồng dạng $\triangle SMI$ và $\triangle SHA$ có $\dfrac{SM}{SH} = \dfrac{SI}{SA}$

$\Rightarrow R = SI = \dfrac{SM \cdot SA}{SH} = \dfrac{SA^2}{2SH} \Rightarrow SA^2 = 6SH$.

Xét tam giác vuông SHA có $SA^2 = SH^2 + AH^2 = SH^2 + \dfrac{AB^2}{2} = h^2 + \dfrac{x^2}{2}$.

Ta có $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}hx^2 = -\dfrac{2}{3}h^3 + 4h^2$.

Xét hàm số $V = -\dfrac{2}{3}h^3 + 4h^2$. Ta có $V' = -2h^2 + 8h = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h = 0 \\ h = 4 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

h	$-\infty$		0		4		$+\infty$
V'		$-$	0	$+$	0	$-$	
V			0		$\dfrac{64}{3}$		

Vậy, thể tích lớn nhất của khối chóp tứ giác là $\dfrac{64}{3}$.

Chọn phương án D

Câu 75. Trong các khối trụ có cùng diện tích toàn phần là 6π. Tìm bán kính đáy của khối trụ có thể tích lớn nhất.

A $R = 1$. **B** $R = \dfrac{1}{3}$. **C** $R = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D** $R = 3$.

Lời giải.

Ta có $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 6\pi \Leftrightarrow Rh + R^2 = 3 \Leftrightarrow h = \dfrac{3 - R^2}{R}$. Điều kiện: $0 < R < \sqrt{3}$.

$V = \pi R^2 h = \pi R^2 \cdot \dfrac{3 - R^2}{R} = \pi R(3 - R^2) = -\pi R^3 + 3\pi R$.

$V' = -3\pi R^2 + 3\pi = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} R = 1 \text{ (nhận)} \\ R = -1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

R	0		1		$\sqrt{3}$
$V'(R)$		$+$	0	$-$	
$V(R)$			2π		

Nhìn bảng biến thiên ta thấy $V_{\max} = V(1) = 2\pi$ (đvtt).
Chọn phương án A

Câu 76. Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = 2a$. Mặt bên (SAB), (SAC) lần lượt là các tam giác vuông tại B, C. Biết thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\dfrac{2}{3}a^3$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A $R = a\sqrt{2}$. **B** $R = a$. **C** $R = \dfrac{3a}{2}$. **D** $R = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

Lời giải.

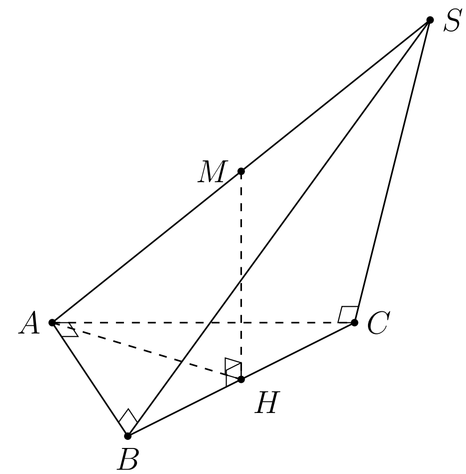
Gọi M, H lần lượt là trung điểm của AS và BC. Do $\triangle ABS$, $\triangle ACS$ vuông tại B và C nên $MB = MC = MA = MS$ hay M là tâm mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$. Lại có $\triangle ABC$ vuông tại A nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, do đó $MH \perp (ABC)$.

Ta có $S_{ABC} = a^2 \Rightarrow \mathrm{d}(S,(ABC)) = \dfrac{3V_{S.ABC}}{S_{ABC}} = 2a$.

Mà $SM \cap (ABC) = A$ nên $\dfrac{\mathrm{d}(S,(ABC))}{\mathrm{d}(M,(ABC))} = \dfrac{SA}{MA} = 2$.

$\Rightarrow MH = \mathrm{d}(M,(ABC)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(S,(ABC)) = a$.

Vậy bán kính là $R = MA = \sqrt{AH^2 + MH^2} = \dfrac{3a}{2}$.

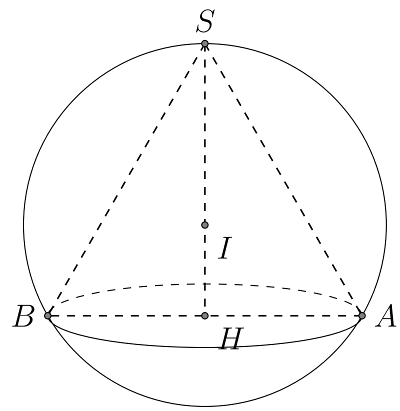


Chọn phương án C

Câu 77. Cho mặt cầu (S) có bán kính R không đổi, hình nón (H) bất kì nội tiếp mặt cầu (S). Thể tích khối nón (H) là V_1 và thể tích phần còn lại của khối cầu là V_2. Giá trị lớn nhất của $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

A $\dfrac{81}{32}$. **B** $\dfrac{76}{32}$. **C** $\dfrac{32}{81}$. **D** $\dfrac{32}{76}$.

Lời giải.

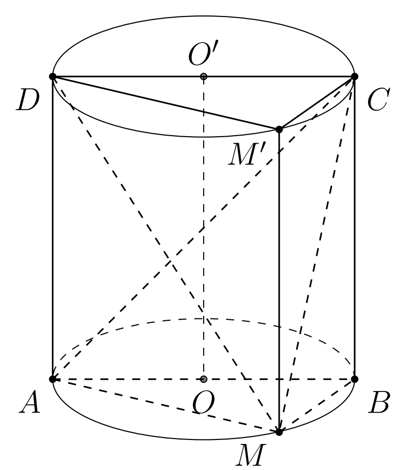


Gọi I, S là tâm mặt cầu và đỉnh hình nón.
Gọi H là tâm đường tròn đáy của hình nón và AB là một đường kính của đáy.
Ta có $\dfrac{V_1}{V_2}+1=\dfrac{V}{V-V_1}$. Do đó để $\dfrac{V_1}{V_2}$ đạt GTLN thì V_1 đạt GTLN.
TH 1: Xét trường hợp $SI \le R$
Khi đó thể tích của hình nón đạt GTLN khi $SI = R$. Lúc đó $V_1=\dfrac{\pi R^3}{3}$.
TH 2: $SI > RI$, I nằm trong tam giác SAB như hình vẽ.
Đặt $IH = x(x>0)$. Ta có
$V_1=\dfrac{1}{3}\pi HA^2\cdot SH=\dfrac{1}{3}\pi(R^2-x^2)(R+x)=\dfrac{\pi}{6}(2R-2x)(R+x)(R+x)\le \dfrac{\pi}{6}\left(\dfrac{4R}{3}\right)^3=\dfrac{32\pi}{81}R^3.$
Dấu bằng xảy ra khi $x=\dfrac{R}{3}$.
Khi đó $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{V}{V-V_1}-1=\dfrac{\dfrac{4}{3}\pi R^3}{\dfrac{4}{3}\pi R^3-\dfrac{32}{81}\pi R^3}-1=\dfrac{8}{19}$.
Chọn phương án D

Câu 78. Cho hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông $ABCD$ cạnh $2\sqrt{3}$ cm với AB là đường kính của đường tròn đáy tâm O. Gọi M là điểm thuộc cung $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn đáy sao cho $\widehat{ABM}=60^\circ$. Tính thể tích của khối tứ diện $ACDM$.

(A) $V = 3\ \text{cm}^3$. (B) $V = 4\ \text{cm}^3$. (C) $V = 6\ \text{cm}^3$. (D) $V = 7\ \text{cm}^3$.

Lời giải.

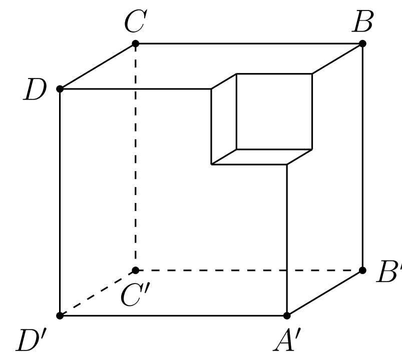


Giả sử hình trụ (T) có trục OO'. Thiết diện qua trục là hình chữ vuông $ABCD$ (A, B thuộc đường tròn tâm O và C, D thuộc đường tròn tâm O').
Ta có $r=\dfrac{1}{2}AB=\sqrt{3}$ cm, $h=l=2\sqrt{3}$ cm.
Gọi M' là hình chiếu của M lên mặt phẳng chứa đường tròn tâm O'.
Ta có $V_{ADMC}=\dfrac{1}{3}V_{AMB.DM'C}=3\ \text{cm}^3$.

Chọn phương án A

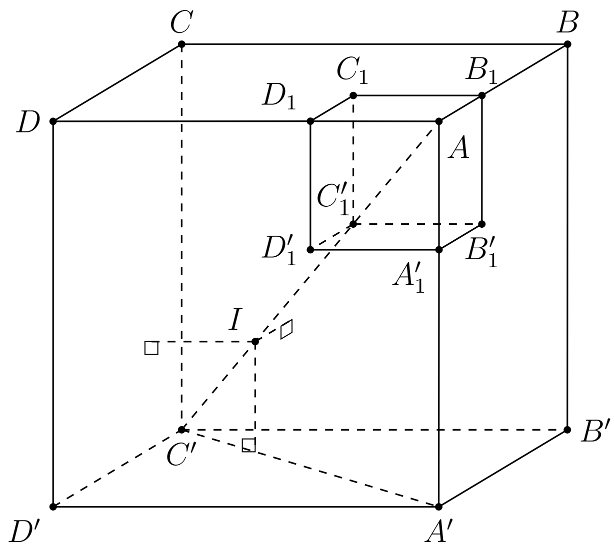
Câu 79.

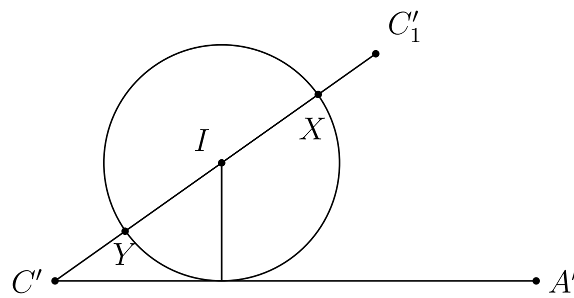
Một khối đa diện H được tạo thành bằng cách từ một khối lập phương cạnh bằng 3, ta bỏ đi khối lập phương cạnh bằng 1 ở một "góc" của nó như hình vẽ. Gọi S là khối cầu có thể tích lớn nhất chứa trong H và tiếp xúc với các mặt phẳng $(A'B'C'D')$, $(BCC'B')$, $(DCC'D')$. Tìm bán kính của S.



A $\dfrac{2+\sqrt{3}}{3}$. **B** $3-\sqrt{3}$. **C** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D** $\sqrt{2}$.

Lời giải.





Gọi hình lập phương được cắt ra là $AB_1C_1D_1.A'_1B'_1C'_1D'_1$. Dễ thấy C'_1 nằm trên đoạn và AC' và $C'C'_1 = \dfrac{2}{3}AC' = 2\sqrt{3}$.

Gọi I, r lần lượt là tâm và bán kính mặt cầu S. Vì mặt cầu S tiếp xúc với các mặt phẳng $(A'B'C'D')$, $(BCC'B')$, $(DCC'D')$ nên I cách đều các mặt phẳng này. Suy ra I nằm trên đoạn $C'C'_1$. Khi đó mặt cầu S cắt tia IC'_1 tại điểm X. Để mặt cầu S nằm trong H thì $IX \le IC'_1$. Ta lại có $IC' = r\sqrt{3}$ nên suy ra

$$r\sqrt{3} + r = IC' + IX \le IC' + IC'_1 = C'C'_1 = 2\sqrt{3}.$$

Suy ra $r \le 3 - \sqrt{3}$. Vậy bán kính lớn nhất của S là $3-\sqrt{3}$, đạt được khi I cách C' một khoảng $3\left(\sqrt{3}-1\right)$.

Chọn phương án B

Câu 80. Cho một chiếc cốc có dạng hình nón cụt và một viên bi có đường kính bằng chiều cao của cốc. Đổ đầy nước vào cốc rồi thả viên bi vào, ta thấy lượng nước tràn ra đúng bằng một nửa lượng nước đổ vào cốc lúc ban đầu. Biết viên bi tiếp xúc với đáy cốc và thành cốc. Tìm tỉ số bán kính của miệng cốc và đáy cốc (bỏ qua độ dày của cốc).

A $\sqrt{3}$. **B** 2. **C** $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. **D** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Gọi R, r lần lượt là bán kính miệng cốc và bán kính đáy cốc, h là chiều cao của cốc, V_1 và V_2 lần lượt là thể tích viên bi và thể tích của cốc, khi đó ta có $R \geq r$ và

$$V_1 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^3, V_2 = \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot \left(R^2 + r^2 + Rr\right).$$

Theo giả thiết ta có $V_2 = 2V_1$, do đó ta có $\frac{\pi}{3} \cdot h \cdot \left(R^2 + r^2 + Rr\right) = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^3 \Leftrightarrow R^2 + r^2 + R \cdot r = h^2$.

Mặt khác $h^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2$ nên suy ra $R^2 - 3Rr + r^2 = 0$.

Khi đó $\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 3\left(\frac{R}{r}\right) + 1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{R}{r} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ \frac{R}{r} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ (do $R \geq r$).

Chọn phương án C

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. B	3. A	4. B	5. A	6. A	7. B	8. B	9. B	10. A
11. A	12. C	13. B	14. A	15. A	16. A	17. C	18. D	19. A	20. B
21. B	22. B	23. B	24. A	25. D	26. B	27. B	28. D	29. A	30. D
31. D	32. C	33. C	34. D	35. C	36. B	37. D	38. C	39. D	40. D
41. D	42. C	43. A	44. C	45. D	46. B	47. A	48. D	49. D	50. B
51. C	52. A	53. D	54. B	55. C	56. D	57. A	58. A	59. D	60. C
61. D	62. D	63. C	64. C	65. B	66. B	67. B	68. A	69. B	70. A
71. B	72. A	73. A	74. D	75. A	76. C	77. D	78. A	79. B	80. C

DẠNG 9. DIỆN TÍCH MẶT CẦU

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Cho mặt cầu có bán kính $R = 2$. Diện tích của mặt cầu đã cho bằng

A. $\frac{32\pi}{3}$. B. 8π. C. 16π. D. 4π.

Lời giải.

$S = 4\pi R^2 = 16\pi$.

Chọn phương án C

Câu 1. Tính diện tích của mặt cầu có bán kính $r = 2$.

A. $\frac{32}{3}\pi$. B. 8π. C. 32π. D. 16π.

Lời giải.

Phương pháp

Công thức tính diện tích mặt cầu bán kính R là $S = 4\pi R^2$.

Cách giải

Công thức tính diện tích mặt cầu bán kính $r = 2$ là $S = 4\pi r^2 = 16\pi$.

Chọn phương án D

Câu 2. Tính diện tích xung quanh của khối trụ có bán kính đáy $r = 2$ và độ dài đường sinh $l = 2\sqrt{5}$.

A. $8\sqrt{5}\pi$. B. $2\sqrt{5}\pi$. C. 2π. D. $4\sqrt{5}\pi$.

Lời giải.

$S_{xq} = 2\pi.r.l = 2\pi.2.2\sqrt{5} = 8\sqrt{5}\pi$.

Chọn phương án A

Câu 3. Cho mặt cầu có diện tích bằng $\frac{8\pi a^2}{3}$. Tính bán kính r của mặt cầu.

A. $r = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. B. $r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $r = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. D. $r = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Diện tích mặt cầu đã cho là $4\pi r^2 = \frac{8\pi a^2}{3}$. Suy ra $r = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Chọn phương án A

Câu 4. Cho hình nón có bán kính đáy bằng 3 và chiều cao bằng 4. Tính diện tích xung quanh của hình nón.

A. 12π. B. 9π. C. 30π. D. 15π.

Lời giải.

Độ dài đường sinh của hình nón là $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho là $S = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi$.

Chọn phương án D

Câu 5. Tính diện tích mặt cầu bán kính $r = 1$.

Ⓐ $S = \pi$. Ⓑ $S = 4\pi$. Ⓒ $S = 4\pi^2$. Ⓓ $S = \dfrac{4\pi}{3}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính diện tích mặt cầu bán kính r, ta có $S = 4\pi r^2 = 4\pi$.

Chọn phương án B

Câu 6. Tính diện tích S của mặt cầu có đường kính bằng $2a$.

Ⓐ $S = 4\pi a^2$. Ⓑ $S = 2\pi a^2$. Ⓒ $S = \pi a^2$. Ⓓ $S = 16\pi a^2$.

Lời giải.

Do mặt cầu có đường kính là $2a$ nên bán kính $R = a$, vậy $S = 4\pi R^2 = 4\pi a^2$.

Chọn phương án A

Câu 7. Biết rằng khi quay một đường tròn có bán kính bằng 1 quay quanh một đường kính của nó ta được một mặt cầu. Tính diện tích mặt cầu đó.

Ⓐ $V = \dfrac{4}{3}\pi$. Ⓑ $V = 4\pi$. Ⓒ $V = \pi$. Ⓓ $V = 2\pi$.

Lời giải.

Vì bán kính $R = 1$, nên áp dụng công thức tính diện tích mặt cầu ta có $S = 4\pi R^2 = 4\pi$.

Chọn phương án B

Câu 8. Một mặt cầu có diện tích là 16π. Tính bán kính R của mặt cầu.

Ⓐ $R = 2\pi$. Ⓑ $R = 2$. Ⓒ $R = 4$. Ⓓ $R = 4\pi$.

Lời giải.

Ta có $S = 4\pi R^2$ nên $16\pi = 4\pi R^2$ suy ra $R = 2$.

Chọn phương án B

Câu 9. Cho mặt cầu có bán kính là $2a$. Tính diện tích của mặt cầu.

Ⓐ $16\pi a^2$. Ⓑ $\dfrac{3}{4}\pi a^2$. Ⓒ $4\pi a^2$. Ⓓ $8\pi a^2$.

Lời giải.

$S = 4\pi R^2 = 16\pi a^2$.

Chọn phương án A

Câu 10. Cho một mặt cầu có diện tích là S, thể tích khối cầu đó là V. Tính bán kính R của mặt cầu.

Ⓐ $R = \dfrac{3V}{S}$. Ⓑ $R = \dfrac{S}{3V}$. Ⓒ $R = \dfrac{4V}{S}$. Ⓓ $R = \dfrac{V}{3S}$.

Lời giải.

Diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu là $S = 4\pi R^2$; $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

$\Rightarrow R = \dfrac{3V}{S}$.

Chọn phương án A

Câu 11. Tính diện tích S của mặt cầu có bán kính bằng $2a$.

Ⓐ $S = 16\pi a^2$. Ⓑ $S = 4\pi a^2$. Ⓒ $S = \dfrac{32}{3}\pi a^3$. Ⓓ $S = \dfrac{16}{3}\pi a^2$.

Lời giải.

Ta có $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot (2a)^2 = 16\pi a^2$.
Chọn phương án A

Câu 12. Tính diện tích của mặt cầu có bán kính $R = 2$.

A. 16π. B. $\dfrac{32\pi}{3}$. C. 8π. D. 32π.

Lời giải.

Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi$.
Chọn phương án A

Câu 13. Tính diện tích S của mặt cầu và thể tích V của khối cầu có bán kính bằng 3 cm.

A. $S = 36\pi\ (\text{cm}^2)$ và $V = 36\pi\ (\text{cm}^3)$. B. $S = 18\pi\ (\text{cm}^2)$ và $V = 108\pi\ (\text{cm}^3)$.
C. $S = 36\pi\ (\text{cm}^2)$ và $V = 108\pi\ (\text{cm}^3)$. D. $S = 18\pi\ (\text{cm}^2)$ và $V = 36\pi\ (\text{cm}^3)$.

Lời giải.

Ta có $S = 4\pi r^2 = 36\pi\ (\text{cm}^2)$ và $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi\ (\text{cm}^3)$.
Chọn phương án A

Câu 14. Cho mặt cầu (S_1) có bán kính R_1, mặt cầu (S_2) có bán kính $R_2 = 2R_1$. Tính tỉ số diện tích của mặt cầu (S_2) và (S_1).

A. $\dfrac{1}{2}$. B. 3. C. 4. D. 2.

Lời giải.

Gọi S_1, S_2 là diện tích của mặt cầu (S_1), (S_2).
Ta có: $\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{4\pi R_2^2}{4\pi R_1^2} = \dfrac{4\pi (2R_1)^2}{4\pi R_1^2} = \dfrac{4 \cdot 4\pi R_1^2}{4\pi R_1^2} = 4$.
Vậy $\dfrac{S_2}{S_1} = 4$.
Chọn phương án C

Câu 15. Biết rằng diện tích mặt cầu có bán kính r được tính theo công thức $S = 4\pi r^2$. Tính diện tích mặt cầu có bán kính bằng 3.

A. 9π. B. 12π. C. 4π. D. 36π.

Lời giải.

Diện tích mặt cầu có bán kính bằng 3 là $S = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi$.
Chọn phương án D

Câu 16. Tính diện tích S của mặt cầu có bán kính bằng a.

A. $S = \dfrac{4}{3}\pi a^2$. B. $S = \pi a^2$. C. $S = 4\pi a^2$. D. $S = \dfrac{\pi a^2}{3}$.

Lời giải.

Diện tích của mặt cầu có bán kính bằng a là $S = 4\pi a^2$.
Chọn phương án C

Câu 17. Tính diện tích S của mặt cầu có đường kính bằng $2a$.

A. $S = 2\pi a^2$. B. $S = 16\pi a^2$. C. $S = \pi a^2$. D. $S = 4\pi a^2$.

Lời giải.

Mặt cầu có đường kính bằng $2a$ nên có bán kính $R = a$.
Vậy diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4\pi a^2$.
Chọn phương án D

Câu 18. Tính diện tích S của mặt cầu có bán kính bằng $2a$.

A $S = 16\pi a^2$. **B** $S = 4\pi a^2$. **C** $S = \dfrac{32}{3}\pi a^2$. **D** $S = \dfrac{16}{3}\pi a^2$.

Lời giải.

Diện tích mặt cầu bán kính $R = 2a$ là $S = 4\pi R^2 = 4\pi(2a)^2 = 16\pi a^2$.
Chọn phương án A

Câu 19. Tính diện tích S của mặt cầu có đường kính bằng 6.

A $S = 12\pi$. **B** $S = 36\pi$. **C** $S = 48\pi$. **D** $S = 144\pi$.

Lời giải.

— Bán kính mặt cầu là $R = 3$.

— Diện tích của mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi$.

Chọn phương án B

Câu 20. Cho hình nón có bán kính đáy bằng $\sqrt{2}$ và độ dài đường sinh bằng 3. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đã cho.

A $S_{\text{xq}} = 2\pi$. **B** $S_{\text{xq}} = 6\pi$. **C** $S_{\text{xq}} = 3\pi\sqrt{2}$. **D** $S_{\text{xq}} = 6\pi\sqrt{2}$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{\text{xq}} = \pi rl = 3\pi\sqrt{2}$.
Chọn phương án C

B MỨC ĐỘ 2

Câu 21. Tính diện tích mặt cầu (S) khi biết chu vi đường tròn lớn của nó bằng 4π.

A $S = 32\pi$. **B** $S = 16\pi$. **C** $S = 64\pi$. **D** $S = 8\pi$.

Lời giải.

Đường tròn lớn có bán kính bằng bán kính R của mặt cầu.
Do đó, chu vi của đường tròn lớn là $2\pi R = 4\pi \Leftrightarrow R = 2$.
Vậy diện tích của mặt cầu (S) là $4\pi R^2 = 16\pi$.
Chọn phương án B

Câu 22. Cắt mặt cầu (S) bằng một mặt phẳng cách tâm một khoảng bằng 4cm được thiết diện là một hình tròn có diện tích $9\pi\text{cm}^2$. Tính thể tích khối cầu (S).

A $\dfrac{250\pi}{3}$ cm^3. **B** $\dfrac{2500\pi}{3}$ cm^3. **C** $\dfrac{25\pi}{3}$ cm^3. **D** $\dfrac{500\pi}{3}$ cm^3.

Lời giải.

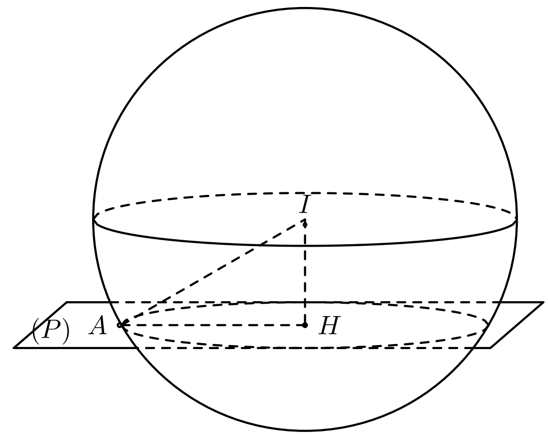
— Gọi I là tâm mặt cầu (S), H là tâm đường tròn giao tuyến, A là một điểm bất kì trên đường tròn, R là bán kính của (S).

— Ta có $\mathrm{d}(I,(P)) = 4$.

— $S_{(C)} = \pi AH^2 = 9\pi \Rightarrow AH = 3$.

— Ta có $R = \sqrt{AH^2 + \mathrm{d}(I,(P))} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$.

— Thể tích khối cầu (S) là $V_{(S)} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{500\pi}{3}$.



Chọn phương án D

Câu 23. Cho mặt cầu (S_1) có bán kính R_1, mặt cầu (S_2) có bán kính $R_2 = 2R_1$. Tính tỉ số diện tích của mặt cầu (S_2) và (S_1).

A. 4. B. 3. C. $\dfrac{1}{2}$. D. 2.

Lời giải.

Tỉ số diện tích của mặt cầu (S_2) và (S_1) bằng $\dfrac{4\pi R_2^2}{4\pi R_1^2} = 4$.

Chọn phương án A

Câu 24. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương có độ dài đường chéo bằng $4a$.

A. $64\pi a^2$. B. $16\pi a$. C. $16\pi a^2$. D. $8\pi a^2$.

Lời giải.

Bán kính mặt cầu $R = \dfrac{4a}{2} = 2a$.

Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 16\pi a^2$.

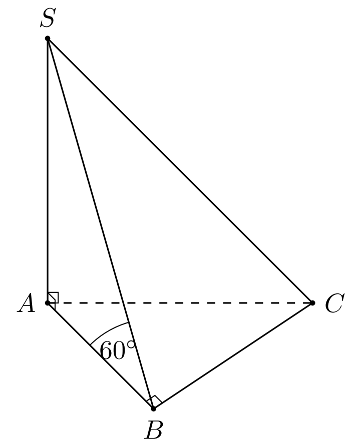
Chọn phương án C

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B có $AC = 2a\sqrt{2}$, SA vuông góc với đáy, góc giữa SB với đáy bằng 60°. Tính diện tích mặt cầu tâm S và tiếp xúc với mặt phẳng (ABC).

A. $16\pi a^2$. B. $24\pi a^2$. C. $16\pi a^2$. D. $48\pi a^2$.

Lời giải.

Vì tam giác ABC vuông cân tại B nên $AB^2 = BC^2 = \dfrac{1}{2}AC^2 = 4a^2$
$\Rightarrow AB = 2a$.
Theo giả thiết $\widehat{(SB;(ABC))} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$
$\Rightarrow SA = AB.\tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$.
Vì $SA \perp (ABC)$ nên mặt cầu tâm S và tiếp xúc với (ABC) có bán kính $R = SA = 2a\sqrt{3}$.
Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4.\left(2a\sqrt{3}\right)^2 = 48\pi a^2$.



Chọn phương án D

Câu 26. Cho mặt cầu có diện tích bằng 72π cm^2. Tính bán kính R của khối cầu giới hạn bởi mặt cầu đó.

A $R = \sqrt{6}$ cm. **B** $R = 3\sqrt{2}$ cm. **C** $R = 6$ cm. **D** $R = 3$ cm.

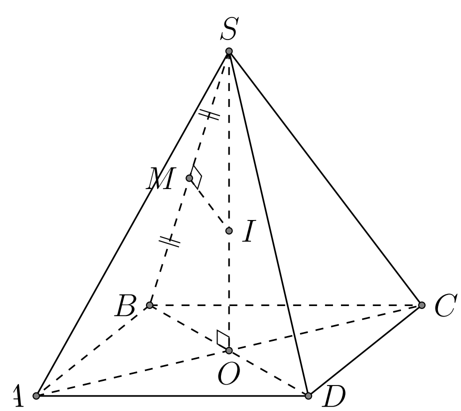
Lời giải.

Ta có diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 \Rightarrow 4\pi R^2 = 72\pi \Leftrightarrow R = 3\sqrt{2}$.
Chọn phương án B

Câu 27. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp một hình chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng 2 và cạnh đáy bằng 1.

A $\dfrac{32\pi}{7}$. **B** $\dfrac{8\pi}{7}$. **C** $\dfrac{128\pi}{21\sqrt{14}}$. **D** $\dfrac{16\pi}{\sqrt{14}}$.

Lời giải.



Gọi $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều, O là giao điểm của AC và BD, M là trung điểm của SB. Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với SB và cắt SO tại I. Suy ra, I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.
Xét $\triangle MSI$ và $\triangle OSB$ là hai tam giác đồng dạng, ta có

$$\frac{MS}{OS} = \frac{SI}{SB} \Rightarrow R = SI = \frac{MS \cdot SB}{OS}.$$

Mặt khác $OS = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$. Do đó $R = \frac{1 \cdot 2}{\frac{\sqrt{14}}{2}} = \frac{2\sqrt{14}}{7}$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoài tiếp là $S = 4\pi R^2 = \frac{32\pi}{7}$ (đvdt).

Chọn phương án A

Câu 28. Tính diện tích bề mặt của khinh khí cầu, biết rằng khinh khí cầu là một hình cầu có đường kính 11 m (lấy $\pi \simeq \frac{22}{7}$ và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

A 380,29 m^2. **B** 697,19 m^2. **C** 190,14 m^2. **D** 95,07 m^2.

Lời giải.

$S_{xq} = 4\pi r^2 = 4\pi \left(\frac{11}{2}\right)^2 \simeq 380{,}29$ m^2. .

Chọn phương án A

Câu 29. Biết rằng khi quay một đường tròn có bán kính bằng 1 quanh một đường kính của nó ta được một mặt cầu. Tính diện tích mặt cầu đó.

A 4π. **B** $\frac{4}{3}\pi$. **C** 2π. **D** π.

Lời giải.

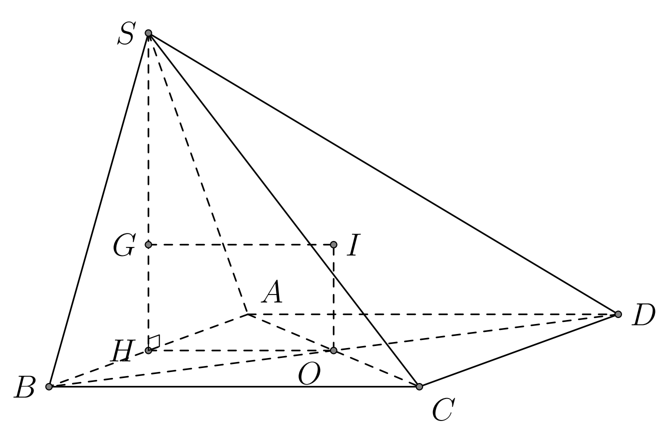
Mặt cầu nhận được khi quay một đường tròn bán kính bằng 1 quanh đường kính của nó là mặt cầu có bán kính bằng bán kính đường tròn, và bằng 1. Diện tích của mặt cầu đó là $4\pi R^2 = 4\pi$.

Chọn phương án A

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 3, AD = 2$. Tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho

A $V = \frac{20\pi}{3}$. **B** $V = \frac{10\pi}{3}$. **C** $V = \frac{32\pi}{3}$. **D** $V = \frac{16\pi}{3}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm AB, G là trọng tâm tam giác SAB, O là giao điểm của AC và BD.

Từ O dựng đường thẳng song song với SH cắt đường thẳng dựng từ G song song với HO tại I.

Ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện và $OIHG$ là hình chữ nhật.

Ta có $GH = \frac{1}{3}\frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = IO$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp

$R = \sqrt{IO^2 + OC^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{13}{4}} = 2$.

Thể tích khối cầu ngoại tiếp $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32\pi}{3}$.

Chọn phương án C

Câu 31. Cho hình lập phương cạnh a nội tiếp mặt cầu (S). Tính diện tích mặt cầu (S).

A πa^2. **B** $\frac{3\pi a^2}{4}$. **C** $3\pi a^2$. **D** $\frac{\pi a^2}{3}$.

Lời giải.

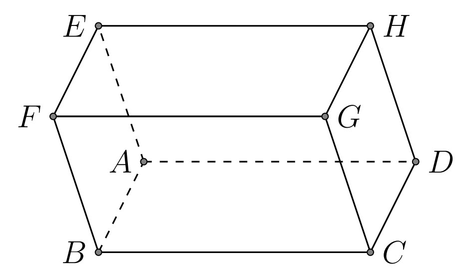
Đường chéo của hình lập phương cạnh a là $a\sqrt{3}$. Mặt cầu (S) ngoại tiếp hình lập phương nên có đường kính là đường chéo của hình lập phương đó. Do đó diện tích của (S) là $4\pi\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi a^2$.

Chọn phương án C

Câu 32. Một hình hộp chữ nhật có ba kích thước là a, b, c. Gọi (S) là mặt cầu đi qua 8 đỉnh của hình hộp chữ nhật đó. Tính diện tích của hình cầu (S) theo a, b, c.

A $\dfrac{\pi}{2}(a^2+b^2+c^2)$. **B** $2\pi(a^2+b^2+c^2)$. **C** $\pi(a^2+b^2+c^2)$. **D** $4\pi(a^2+b^2+c^2)$.

Lời giải.



Giả sử $ABCD.EFGH$ là hình hộp chữ nhật có $AB = a, AD = b, AE = c$.

Ta có: $FD^2 = FB^2 + BD^2 = FB^2 + CD^2 + BC^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Do hình hộp chữ nhật nội tiếp mặt cầu nên FD là đường kính của mặt cầu đó.

Suy ra bán kính của mặt cầu $r = \dfrac{FD}{2} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$.

Khi đó diện tích mặt cầu là

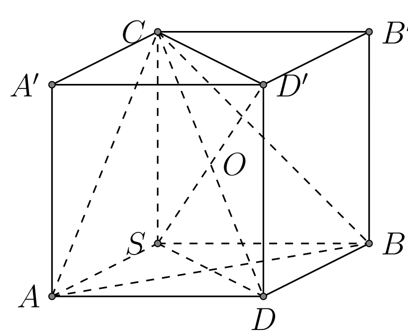
$S = 4\cdot\pi\cdot r^2 = 4\cdot\pi\left(\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}\right)^2 = \pi(a^2+b^2+c^2)$.

Chọn phương án C

Câu 33. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có $SA = 6$, $SB = 8$, $SC = 10$ và SA, SB, SC đôi một vuông góc.

A $S = 100\pi$. **B** $S = 400\pi$. **C** $S = 200\pi$. **D** $S = 150\pi$.

Lời giải.



Dựng hình hộp chữ nhật $SABD.CA'B'D'$. Khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ cũng chính là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp $SABD.CA'B'D'$. Gọi O là giao điểm hai đường chéo SD' và CD của hình hộp, suy ra O là tâm của mặt cầu cần tìm và bán kính của mặt cầu là SO. Áp dụng định lí Pitago ta có:

$CD = 2SO = \sqrt{SC^2 + SD^2} = \sqrt{SC^2 + SA^2 + SB^2}$

$\Rightarrow R = SO = \dfrac{\sqrt{SA^2+SB^2+SC^2}}{2} = 5\sqrt{2}$.

Vậy diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(5\sqrt{2}\right)^2 = 200\pi$.

Chọn phương án C

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABC$, $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, $BC = 10$ cm. Mặt bên SBC là tam giác vuông tại S. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A $100\pi\ (\text{cm}^2)$. **B** $20\pi\ (\text{cm}^2)$. **C** $400\pi\ (\text{cm}^2)$. **D** $\dfrac{500\pi}{3}\ (\text{cm}^2)$.

Lời giải.

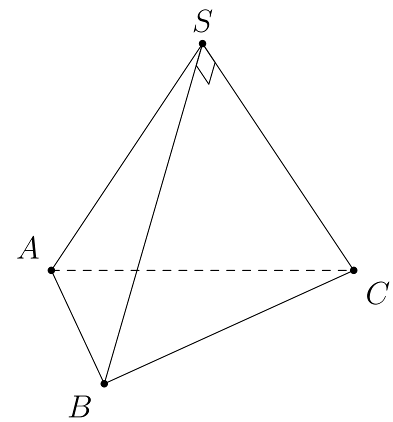
Ta có $AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 = BC^2$

$\Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại $A \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ$. (1)

Mặt khác tam giác SBC vuông tại $S \Rightarrow \widehat{BSC} = 90^\circ$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra S, A, B, C cùng thuộc mặt cầu đường kính BC.

Bán kính $R = \dfrac{BC}{2} = 5 \Rightarrow S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi$ (cm^2).



Chọn phương án A

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3$. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại các điểm M, N, P. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$.

A $V = \dfrac{125\pi}{6}$. **B** $V = \dfrac{32\pi}{3}$. **C** $V = \dfrac{108\pi}{3}$. **D** $V = \dfrac{64\sqrt{2}\pi}{3}$.

Lời giải.

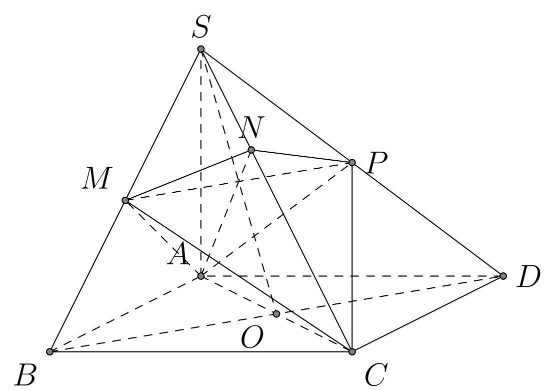
Vì mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại các điểm M, N, P nên $AM \perp SC$, $AN \perp SC$, $AP \perp SC$.

Từ $\begin{cases} CB \perp AB \\ CB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB) \Rightarrow CB \perp AM$, kết hợp với $AM \perp SC$ ta được $AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp CM$.

Từ $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AP$, kết hợp với $AP \perp SC$ ta được $AP \perp (SDC) \Rightarrow AP \perp CP$.

Từ $AN \perp SC$, $AM \perp CM$, $AP \perp CP$ suy ra M, N, P thuộc mặt cầu đường kính AC. Hay mặt cầu ngoại tiếp Bán kính của mặt cầu là $R = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$.

Thể tích khối cầu cần tìm là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{32\pi}{3}$.



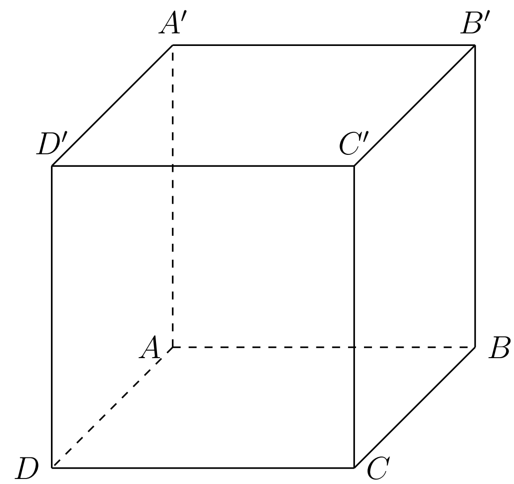
Chọn phương án B

Câu 36. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính diện tích S của mặt cầu có tâm A và tiếp xúc với đường thẳng DD'.

A $S = \dfrac{8}{3}\pi a^2$. **B** $S = 8\pi a^2$. **C** $S = 4\pi a^2$. **D** $S = \dfrac{4}{3}\pi a^2$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với đường thẳng DD' có bán kính $R = AD = a$.
Suy ra $S = 4\pi R^2 = 4\pi a^2$.



Chọn phương án C

Câu 37. Một hình hộp chữ nhật có ba kích thước là $2, 3, 4$ nội tiếp trong một mặt cầu. Tính diện tích của mặt cầu đó.

A $\sqrt{29}$. B $29\sqrt{29}\pi$. C $\dfrac{29}{2}\pi$. D 29π.

Lời giải.

Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật đó là $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{2^2+3^2+4^2} = \dfrac{\sqrt{29}}{2}$. Từ đó suy ra diện tích của mặt cầu đó bằng $4\pi R^2 = 29\pi$.
Chọn phương án D

Câu 38. Cho mặt cầu (S) có diện tích bằng $36a^2\pi$ $(a > 0)$. Tính thể tích của khối cầu (S).

A $18\pi a^3$. B $72\pi a^3$. C $108\pi a^3$. D $36\pi a^3$.

Lời giải.

Diện tích mặt cầu $S = 4\pi r^2 = 36a^2\pi \Rightarrow r = 3a$
$\Rightarrow V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3}\pi(3a)^3 = 36\pi a^3$.
Chọn phương án D

Câu 39. Tính diện tích S của mặt cầu nội tiếp hình lập phương cạnh a (mặt cầu tiếp xúc với cả 6 mặt của hình lập phương).

A $S = 4\pi a^2$. B $S = \pi a^2$. C $S = \dfrac{\pi a^2}{4}$. D $S = \dfrac{\pi a^2}{3}$.

Lời giải.

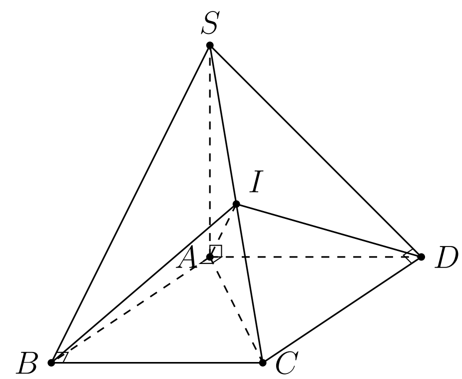
Ta có bán kính mặt cầu: $R = \dfrac{a}{2}$ nên diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = \pi a^2$.
Chọn phương án B

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Tính theo a diện tích S của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A $S = 6\pi a^2$. B $S = \dfrac{\sqrt{6}\pi a^2}{6}$. C $S = \dfrac{6\pi a^3}{7}$. D $S = 4\pi a^2$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ BC \perp (SAB) \\ DC \perp (SAD) \end{cases} \Rightarrow \widehat{SBC} = \widehat{SAC} = \widehat{SDC} = 90°.$



Suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có tâm I là trung điểm của SC và bán kính $R = \dfrac{SC}{2}$.

Ta có $AC = a\sqrt{2}$, $SC = \sqrt{AS^2 + AC^2} = a\sqrt{6}$

$\Rightarrow R = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow S = 4\pi R^2 = 6\pi a^2.$

Chọn phương án A

C MỨC ĐỘ 3

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A, tam giác SAC vuông cân tại S. Biết $AB = a, AC = 2a, (SAC) \perp (ABC)$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

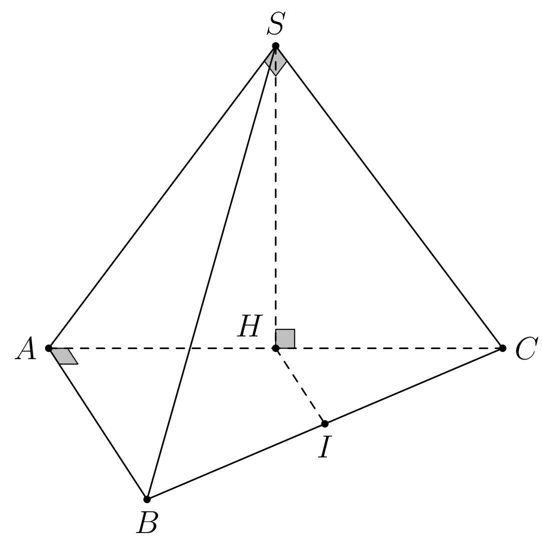
A $2\pi a^2$. **B** $4\pi a^2$. **C** $5\pi a^2$. **D** $3\pi a^2$.

Lời giải.

Gọi H, I lần lượt là trung điểm của BC, AC.

$\triangle SAC$ vuông cân tại $S \Rightarrow SH \perp AC$ và $HA = HC = HS$.

$\triangle ABC$ vuông tại $A \Rightarrow IA = IB = IC \quad (1)$.



Lại có $\begin{cases} (ABC) \perp (SAC) \\ AB \perp AC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAC).$

Mà HI là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow H \parallel AB \Rightarrow HI \perp (SAC)$.

$\Rightarrow IA = IC = IS \quad (2)$.

Từ $(1), (2) \Rightarrow LA = IB = IC = IS$. Do đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

$R = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}.$

Vậy diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 5\pi a^2$.

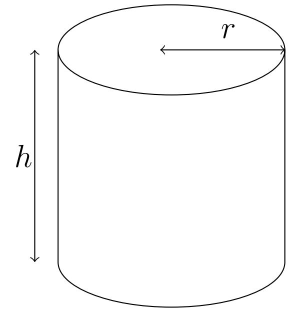
Chọn phương án C

Câu 42. Một hình trụ có bán kính mặt đáy bằng 5cm. Thiết diện qua trục của hình trụ có diện tích bằng 40cm^2. Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

A $S_{xq} = 30\pi\text{cm}^2$. **B** $S_{xq} = 45\pi\text{cm}^2$. **C** $S_{xq} = 40\pi\text{cm}^2$. **D** $S_{xq} = 15\pi\text{cm}^2$.

Lời giải.

Ta có: Diện tích qua trục của hình nón là một hình chữ nhật.
$S_{hcn} = 2R.h = 40\text{cm}^2 \Rightarrow h = 4\text{cm}$.
$S_{xq} = 2\pi R \cdot h = 2\pi \cdot 5 \cdot 4 = 40\pi\text{cm}^2$.



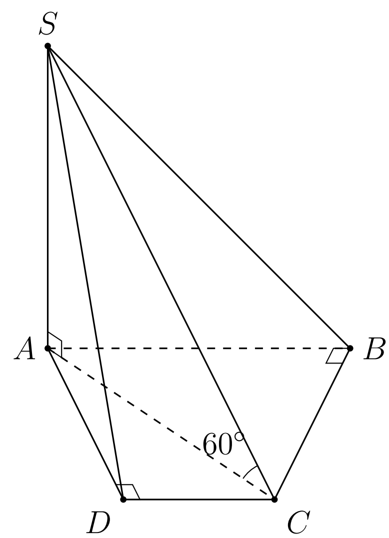
Chọn phương án C

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$, cạnh bên SA vuông góc với $(ABCD)$, góc tạo bởi SC và đáy $ABCD$ bằng 60°, $CD = a$ và tam giác ADC có diện tích bằng $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Tính diện tích S_{mc} của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A $S_{\text{mc}} = 16\pi a^2$. **B** $S_{\text{mc}} = 4\pi a^2$. **C** $S_{\text{mc}} = 32\pi a^2$. **D** $S_{\text{mc}} = 8\pi a^2$.

Lời giải.

Từ $S_{ADC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$ và $DC = a$ ta có $AD = a\sqrt{3}$ và $AC = 2a$. Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp AC$, suy ra $SC = \dfrac{2a}{\cos 60^\circ} = 4a$. Cũng từ $SA \perp (ABCD)$, ta có $SA \perp DC$, mà $DC \perp AD$ nên $DC \perp (SAD)$, suy ra $DC \perp DS$. Chứng minh tương tự ta có $BC \perp BS$. Từ đó mặt cầu đường kính SC là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.
Vậy $S_{\text{mc}} = \pi SC^2 = 16\pi a^2$.



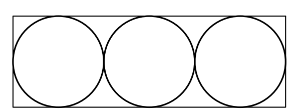
Chọn phương án A

Câu 44. Người ta bỏ ba quả bóng bàn cùng kích thước vào trong một chiếc hộp hình trụ có đáy bằng hình tròn lớn của quả bóng bàn và chiều cao bằng ba lần đường kính quả bóng bàn. Gọi S_b là tổng diện tích ba quả bóng bàn, S_t là diện tích xung quanh của hình trụ. Tính tỉ số $\dfrac{S_b}{S_t}$.

A 1,2. **B** 1. **C** 1,5. **D** 2.

Lời giải.

Gọi R là bán kính của 1 quả bóng bàn $\Rightarrow S_b = 3 \cdot 4\pi R^2 = 12\pi R^2$.
Diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_t = 2\pi R \cdot 6R = 12\pi R^2$.
Vậy tỉ số $\dfrac{S_b}{S_t} = 1$.



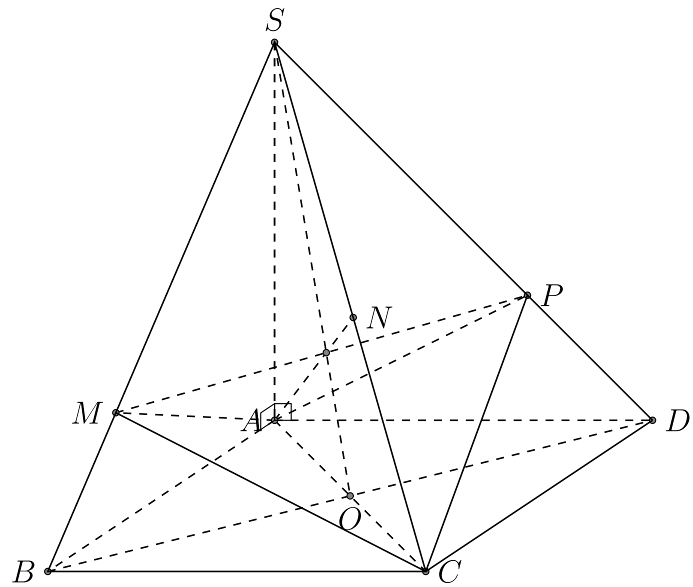
Chọn phương án B

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, các tam giác SAB và SAD là những tam giác vuông tại A. Mặt phẳng (P) qua A vuông góc với cạnh bên SC cắt SB, SC, SD

lần lượt tại các điểm M, N, P. Biết $SC = 8a, \widehat{ASC} = 60^\circ$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp đa diện $ABCDMNP$.

A $V = 24\pi a^3$. **B** $V = 32\sqrt{3}\pi a^3$. **C** $V = 18\sqrt{3}\pi a^3$. **D** $V = 6\pi a^3$.

Lời giải.



Mặt phẳng $(AMNP) \perp SC \Rightarrow \widehat{ANC} = 90^\circ$ (1), $SC \perp AM$.

Do $(SAB) \perp BC \Rightarrow BC \perp AM \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp MC \Rightarrow \widehat{AMC} = 90^\circ$ (2).

Tương tự ta có $\widehat{APC} = 90^\circ$ (3).

Do $ABCD$ là hình vuông nên từ (1), (2), (3) suy ra AC là đường kính mặt cầu ngoại tiếp đa diện $ABCDMNP$.

Xét tam giác SAC có $\sin 60^\circ = \dfrac{AC}{SC}$.

$\Rightarrow AC = 4\sqrt{3}a \Rightarrow R = 2\sqrt{3}a \Rightarrow V = \dfrac{4}{3}\pi\left(2\sqrt{3}a\right)^3 = 32\sqrt{3}\pi a^3$.

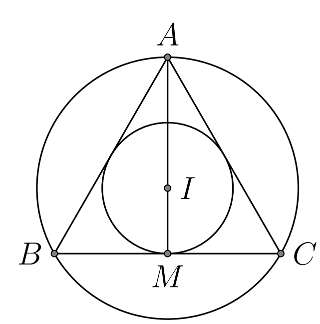
Chọn phương án B

Câu 46. Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối cầu ngoại tiếp và nội tiếp hình nón đã cho. Tính $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A 8. **B** 2. **C** 4. **D** 16.

Lời giải.

Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác đều ABC có độ dài cạnh là 1 với A là đỉnh của hình nón và BC là đường kính đáy của hình nón. Mặt phẳng (ABC) cắt mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp của hình nón thành hai đường tròn trong đó có một đường tròn ngoại tiếp có bán kính R và nội tiếp có bán kính r của tam giác ABC.



Ta có $AM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$R = \frac{2}{3} \cdot AM = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ và } r = \frac{1}{3} \cdot AM = \frac{\sqrt{3}}{6}. \text{ Khi đó } \frac{V_1}{V_2} = \frac{R^3}{r^3} = 8.$$

Chọn phương án (A)

Câu 47. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có cạnh bằng 4. Quay lục giác đều đó quanh đường thẳng AD. Tính thể tích V của khối tròn xoay được sinh ra.

(A) $V = 128\pi$.　(B) $V = 32\pi$.　(C) $V = 16\pi$.　(D) $V = 64\pi$.

Lời giải.

Khối tròn xoay sinh ra gồm hai khối nón (N) và một khối trụ (T) có thiết diện qua trục lần lượt là $\triangle ABF$, $\triangle DCE$ và hình chữ nhật $BCEF$.

Vì $\triangle ABF = \triangle DCE \Rightarrow$ hai khối nón có thể tích bằng nhau.

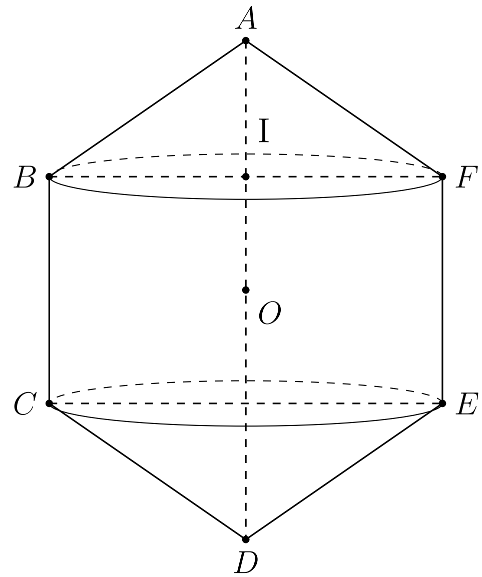
Ta được $V = 2V_N + V_T$.

Gọi I, O lần lượt là trung điểm FB và AD.

Ta có $V_N = \dfrac{1}{3}AI \cdot \pi FI^2 = \dfrac{1}{3} \cdot 2 \cdot \pi(2\sqrt{3})^2 = 8\pi$.

Ta có $V_T = EF \cdot \pi(FI)^2 = 48\pi$.

Vậy $V = 64\pi$.



Chọn phương án (D)

Câu 48. Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng $\sqrt{6}$ và chiều cao $h = 1$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó.

(A) 9π.　(B) 6π.　(C) 5π.　(D) 27π.

Lời giải.

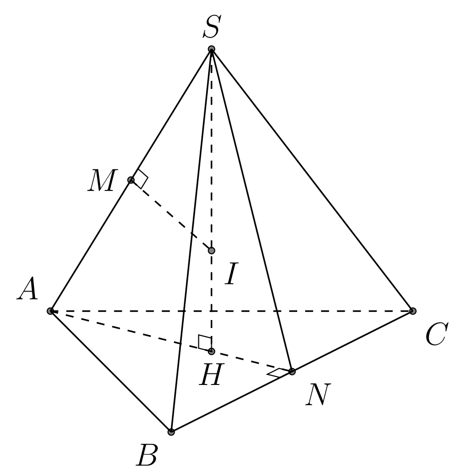
Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và M, N lần lượt là trung điểm SA, BC. Trong (SAN), kẻ đường trung trực của đoạn thẳng SA cắt SH tại I. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đều $S.ABC$.

Ta có $SH = 1; AB = \sqrt{6}; AH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{3} = \sqrt{2}$.

$SA = \sqrt{AH^2 + SH^2} = \sqrt{3}$.

Ta có $SI \cdot SH = SM \cdot SA \Rightarrow r = SI = \dfrac{SA^2}{2SH} = \dfrac{3}{2}$.

Mặt cầu có bán kính $r = \dfrac{3}{2}$ nên diện tích mặt cầu 9π.



Chọn phương án (A)

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc, $SA = a$, $SB = a\sqrt{2}$, $SC = a\sqrt{6}$. Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

(A) $S = \dfrac{9\pi a^2}{2}$.　(B) $S = 4\pi a^2$.　(C) $S = 9\pi a^2$.　(D) $S = \dfrac{9\pi a^2}{4}$.

Lời giải.

Do $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc nên bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $R = \dfrac{\sqrt{SA^2 + SB^2 + SC^2}}{2} = \dfrac{3a}{2}$.

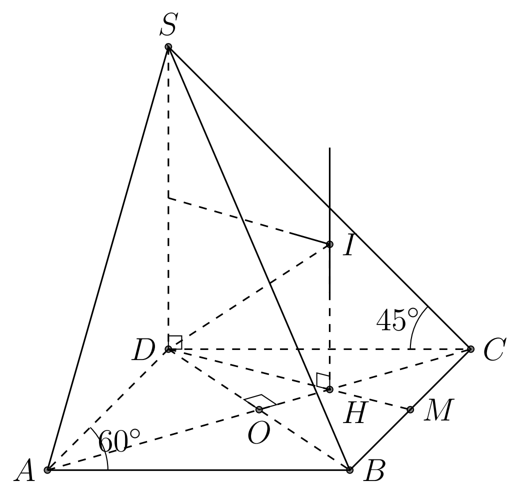
Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp là $S = 4\pi R^2 = 9\pi a^2$.

Chọn phương án C

Câu 50. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng 1, $\widehat{BAD} = 60°$, (SCD) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa SC và mặt đáy $(ABCD)$ bằng $45°$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SBCD$.

A $\dfrac{7\pi}{4}$. **B** $\dfrac{7\pi}{2}$. **C** $\dfrac{7\pi}{6}$. **D** $\dfrac{7\pi}{3}$.

Lời giải.



Do $ABCD$ là hình thoi có $\widehat{BAD} = 60°$ nên tam giác BDC đều. Gọi M là trung điểm của BC, DM cắt OC tại H. Dựng đường thẳng d vuông góc với (BDC) tại H, mặt phẳng trung trực của SD cắt d tại I. Khi đó, I là tâm mặt cầu ngoại tiếp $SBCD$. Ta có

$$DH = \frac{2}{3}DM = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Tam giác SDC vuông cân tại D nên $SD = 1$ suy ra $IH = \dfrac{1}{2}SD = \dfrac{1}{2}$. Tam giác IDH vuông tại H nên

$$ID^2 = IH^2 + DH^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

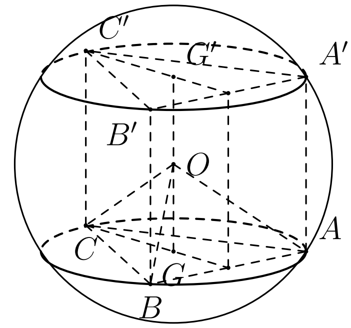
Suy ra diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SBCD$ là $S = 4\pi ID^2 = \dfrac{7\pi}{3}$.

Chọn phương án D

Câu 51. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có các cạnh đều bằng a. Tính diện tích của mặt cầu đi qua sáu đỉnh của hình lăng trụ đó.

A $\dfrac{7\pi a^2}{3}$. **B** $\dfrac{49\pi a^2}{3}$. **C** $\dfrac{49\pi a^2}{144}$. **D** $\dfrac{7\pi a^2}{9}$.

Lời giải.



Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và $A'B'C'$, O là trung điểm của GG'. Vì ABC và $A'B'C'$ là các tam giác đều nên G, G' là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác tương ứng.

Do $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều nên GG' vuông góc với đáy của lăng trụ $\Rightarrow GG'$ là trục của các đường tròn ngoại tiếp các đáy ABC và $A'B'C' \Rightarrow O$ cách đều các đỉnh của hình lăng trụ.

Ta có $GC = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Mà $GG' = a \Rightarrow GO = \dfrac{a}{2} \Rightarrow OA = \sqrt{\dfrac{a^2}{3} + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

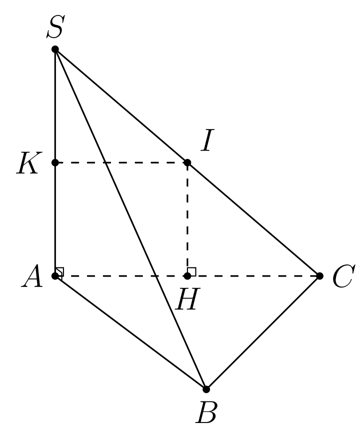
$S = 4\pi \cdot \dfrac{7a^2}{12} = \dfrac{7\pi a^2}{3}$.

Chọn phương án A

Câu 52. Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt đáy ABC là tam giác vuông tại B và $AB = a, BC = a\sqrt{3}$; cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $SA = 2a$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A $16\pi a^2$. **B** $12\pi a^2$. **C** $32\pi a^2$. **D** $8\pi a^2$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm AC, vì $\triangle ABC$ vuông tại B nên $HA = HB = HC$.

Trong mặt phẳng (SAC) dựng $HI \parallel SA$ $(I \in SC)$. Nên $IH \perp (ABC)$ dẫn đến $IA = IB = IC$. Mặt khác IH là đường trung bình tam giác SAC nên $IS = IC$. Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Ta có $R = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{SA^2 + AB^2 + BC^2}}{2} = a\sqrt{2}$.

Từ đó, diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

$S = 4\pi R^2 = 8\pi a^2$.

Chọn phương án D

Câu 53. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC vuông tại B, $AB = 2a$, $BC = a\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{5}$. Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

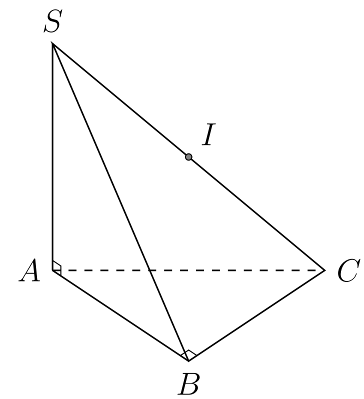
A $11\pi a^2$. **B** $22\pi a^2$. **C** $16\pi a^2$. **D** $\dfrac{11}{3}\pi a^2$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của SC ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp $S.ABC$.

Tính được $SI = \frac{1}{2}SC = \frac{\sqrt{11}a}{2}$ là bán kính của mặt cầu ngoại tiếp đó.

Từ đó ta có diện tích mặt cầu ngoại tiếp bằng $11\pi a^2$.



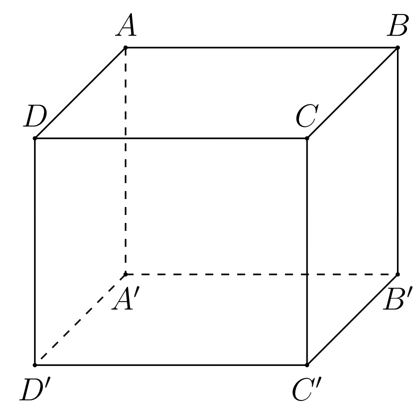
Chọn phương án A

Câu 54. Cho hình lập phương có cạnh bằng a. Tính diện tích S của mặt cầu nội tiếp hình lập phương đó theo a.

A $S = 4\pi a^2$. **B** $S = \pi a^2$. **C** $S = 2\pi a^2$. **D** $S = \frac{4}{3}\pi a^2$.

Lời giải.

Theo tính chất hình lập phương, mặt cầu nội tiếp có bán kính là $r = \frac{a}{2}$. Vậy $S = 4\pi r^2 = \pi a^2$.



Chọn phương án B

Câu 55. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Mặt bên (SAB) là tam giác vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

A $S = 2\pi a^2$. **B** $S = 8\pi a^2$. **C** $S = \pi a^2$. **D** $S = 4\pi a^2$.

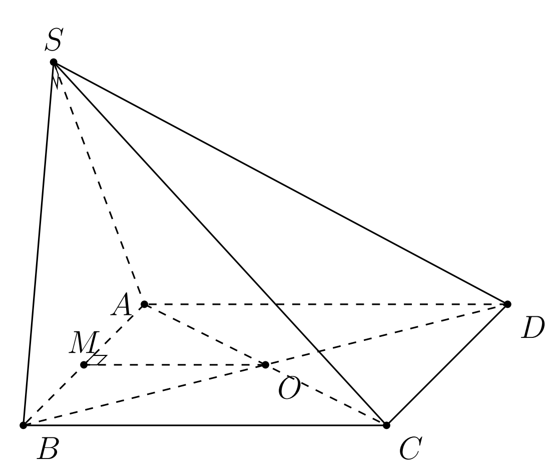
Lời giải.

Gọi M là trung điểm AB và $O = AC \cap BD$. Khi đó $OM \perp (SAB) \Rightarrow OM$ là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông $SAB \Rightarrow OS = OA = OB$.

Mặt khác $ABCD$ là hình vuông nên $OA = OB = OC = OD$.

Hay O là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABCD$.

Bán kính $R = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S = 4\pi R^2 = 2\pi a^2$.



Chọn phương án (A)

Câu 56. Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy, $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A $S = \dfrac{3\pi a^2}{4}$. **B** $S = \pi a^2$. **C** $S = 4\pi a^2$. **D** $S = 3\pi a^2$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của AB, suy ra $OM \perp AB$

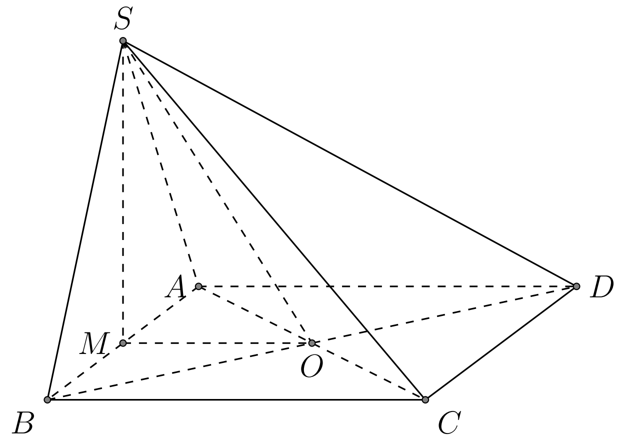
Do $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow OM \perp (SAB)$

$\Rightarrow OM$ là trục đường tròn ngoại tiếp SAB.

Có $\begin{cases} OA = OB = OC = OD \\ OA = OB = OS \end{cases}$

$\Rightarrow OA = OB = OC = OD = OS$ nên O là tâm mặt cầu ngoại tiếp $S.ABCD$ và bán kính là $R = OA = \dfrac{AC}{2} = a$.

Vậy diện tích mặt cầu là $S = 4\pi a^2$.



Chọn phương án (C)

Câu 57. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B; SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB = 6$. Một mặt phẳng (α) đi qua A vuông góc với SC cắt đoạn SC tại M và cắt đoạn SB tại N. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ACMN$.

A 108π. **B** 36π. **C** 27π. **D** 72π.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AN$.

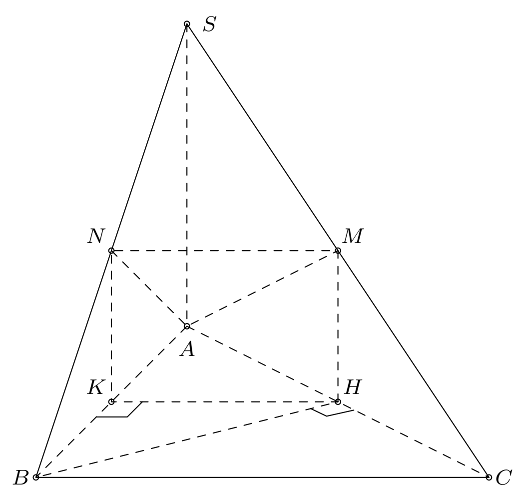
Mặc khác do $SC \perp (\alpha)$ nên $SC \perp AN$.

Do đó $AN \perp (SBC)$, suy ra $AN \perp SB$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AC, AB.

Do tam giác ABC vuông cân tại B nên $BH \perp AC$.

HK là đường trung bình của tam giác ABC nên $HK \parallel BC$, suy ra $HK \perp AB$.

Hơn nữa do $SC \perp (\alpha)$ nên $SC \perp AM$.



Vậy đường thẳng BH là trục của tam giác MAC, đường thẳng HK là trục của tam giác ABN và $H = HK \cap BH$ nên H là tâm mặt cầu đi qua các điểm A, B, C, M, N và cũng chính là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $ACMN$. Độ dài bán kính của mặt cầu chính là độ dài của BH.

$R = BH = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AC^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 6^2} = 3\sqrt{2}$.

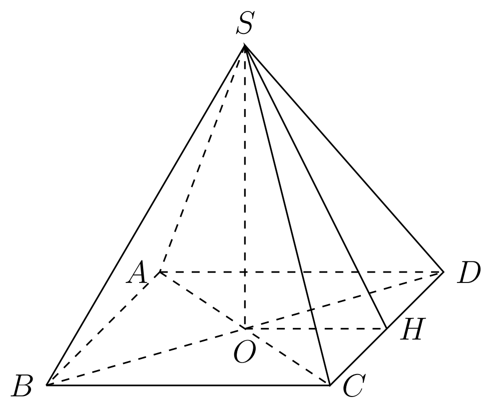
$S = 4\pi R^2 = 4\pi(3\sqrt{2})^2 = 72\pi$.

Chọn phương án D

Câu 58. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, các mặt bên tạo với đáy một góc 60°. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp.

(A) $S = \dfrac{25\pi a^2}{3}$. (B) $S = \dfrac{32\pi a^2}{3}$. (C) $S = \dfrac{8\pi a^2}{3}$. (D) $S = \dfrac{a^2}{12}$.

Lời giải.



Kẻ $OH \perp CD$, ta có $CD \perp SO \Rightarrow CD \perp (SHO)$.

$\Rightarrow \widehat{SHO} = 60^\circ$. Ta có $OH = \dfrac{AD}{2} = a \Rightarrow SO = a\tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

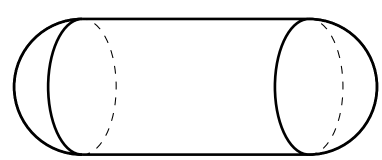
Mặt khác $SD = \sqrt{SO^2 + OD^2} = a\sqrt{5}$.

Áp dụng công thức tính nhanh thì $R = \dfrac{SD^2}{2SO} = \dfrac{5a}{2\sqrt{3}} \Rightarrow S = 4\pi R^2 = \dfrac{25\pi a^2}{3}$.

Chọn phương án A

Câu 59. Một cái bồn chứa nước gồm hai nửa hình cầu và một hình trụ (như hình vẽ). Đường sinh của

hình trụ bằng hai lần đường kính của hình cầu. Biết thể tích của bồn chứa nước là $\dfrac{128\pi}{3}$ (m^3). Tính diện tích xung quanh của cái bồn chứa nước theo đơn vị m^2.



(A) $48\pi\ \mathrm{m}^2$. (B) $40\pi\ \mathrm{m}^2$. (C) $64\pi\ \mathrm{m}^2$. (D) $50\pi\ \mathrm{m}^2$.

Lời giải.

Gọi bán kính đáy của hình trụ là R

$\Rightarrow V = 2V_{\text{bán cầu}} + V_{\text{trụ}} = 2\cdot\dfrac{2}{3}\pi R^3 + \pi R^2\cdot 4R = \dfrac{16\pi R^3}{3} = \dfrac{128\pi}{3} \Rightarrow R = 2$.

Diện tích cần tìm là $S = 2\cdot S_{\text{bán cầu}} + S_{\text{trụ}} = 2\cdot\dfrac{4}{2}\cdot\pi R^2 + 2\pi R\cdot 4R = 48\pi$.

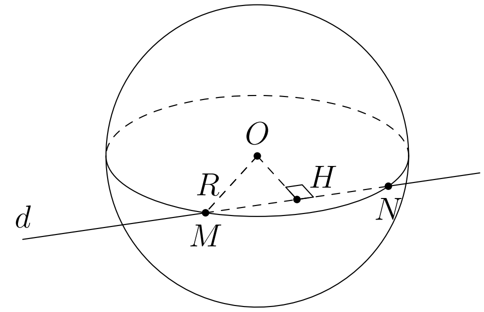
Chọn phương án A

Câu 60. Cho mặt cầu tâm O. Đường thẳng d cắt mặt cầu này tại hai điểm M, N. Biết rằng $MN = 24$ và khoảng cách từ O đến d bằng 5. Tính diện tích S của mặt cầu đã cho.

(A) $S = 100\pi$. (B) $S = 48\pi$. (C) $S = 52\pi$. (D) $S = 676\pi$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm MN. Suy ra $OH \perp MN$.
Do đó OH là khoảng cách từ O đến d nên $OH = 5$.
Bán kính hình cầu $R = OM = \sqrt{OH^2 + MH^2} = 13$.
Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 676\pi$.



Chọn phương án (D)

D MỨC ĐỘ 4

Câu 61. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại các điểm M, N, P. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$.

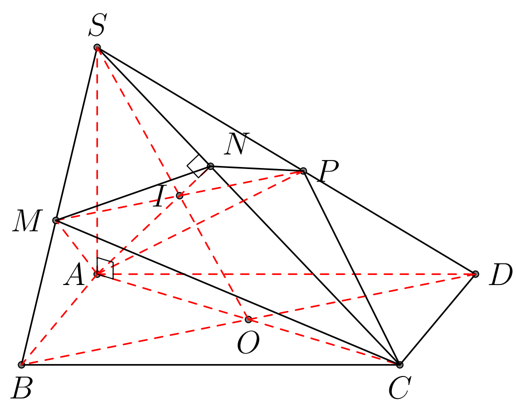
(A) $V = \dfrac{108\pi}{3}$. (B) $V = \dfrac{64\sqrt{2}\pi}{3}$. (C) $V = \dfrac{125\pi}{6}$. (D) $V = \dfrac{32\pi}{3}$.

Lời giải.

Phương pháp:

+ Chứng minh: O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$ (với O là tâm của hình vuông $ABCD$).
+ Thể tích khối cầu có bán kính r là: $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Cách giải:



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD \Rightarrow O$ là trung điểm AC.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AP.$

Mặt khác, $\begin{cases} SC \perp AP (\text{do } SC \perp (\alpha)) \\ CD \perp AP \end{cases} \Rightarrow AP \perp (SCD) \Rightarrow AP \perp CP.$

Vậy ΔAPC vuông tại $P \Rightarrow OA = OC = OP$.
Tương tự, ta có: ΔAMC vuông tại $M \Rightarrow OA = OC = OM$.
Lại có, $SC \perp AN$ (do $SC \perp (\alpha)$) $\Rightarrow \Delta ANC$ vuông tại N.
$\Rightarrow OA = OC = ON$

$\Rightarrow OA = OC = OP = OM = ON \Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$.

Bán kính: $R = OA = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$.

Thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$ là: $V = \dfrac{4}{3}\pi.2^3 = \dfrac{32\pi}{3}$.

Chọn phương án D

Câu 62. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ có diện tích 84π cm^2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD là

A $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$ cm. **B** $\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$ cm. **C** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ cm. **D** $\dfrac{6\sqrt{21}}{7}$ cm.

Lời giải.

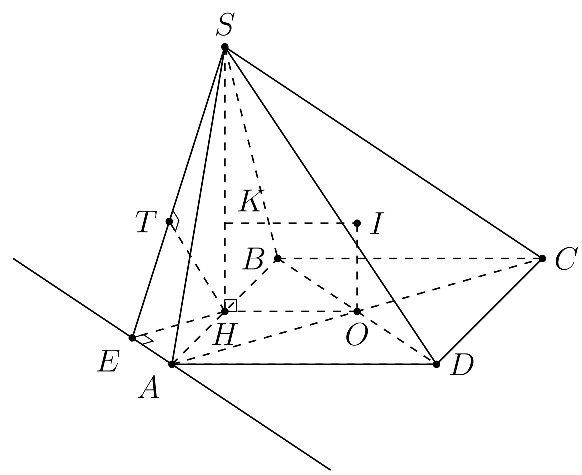
Đặt $AB = x$.

Gọi H là trung điểm của AB, $O = AC \cap BD$ và K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều SAB. Dựng d là đường thẳng đi qua O và $d \perp (ABCD)$, suy ra d song song SH.

Trong mặt phẳng (SH, d), gọi d' là đường thẳng đi qua K và vuông góc SH; $I = d \cap d'$.

Dễ chứng minh được I là tâm mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp $SABCD$ có bán kính $r = IA$.

Khi đó:



$$r = IA = \sqrt{OA^2 + IO^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}x\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{6}x.$$

Theo đề bài ta có: $S = 4\pi r^2 = 84\pi \Rightarrow x = 6$ cm.

Kẻ $Ay \parallel BD$, $HE \perp Ay$ $(H \in Ay)$ và $HT \perp SE$ $(T \in SE)$.

Dễ dàng chứng minh được:

$\mathrm{d}\,(SA, BD) = \mathrm{d}\,(BD, (SAy)) = \mathrm{d}\,(B, (SAy)) = 2\mathrm{d}\,(H, (SAy)) = 2HT$.

Tam giác EAH là tam giác vuông cân tại E nên:

$EH = \dfrac{AH}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Tính được $SH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB = 3\sqrt{3}$.

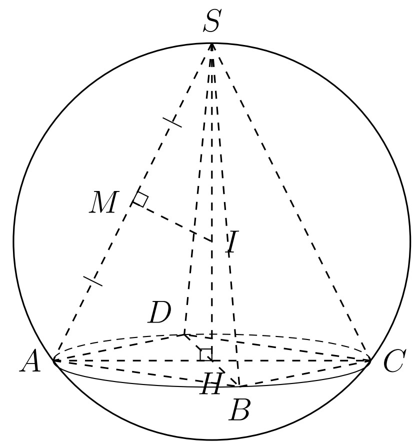
Vậy $\mathrm{d}\,(SA, BD) = 2HT = 2\dfrac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{6\sqrt{21}}{7}$.

Chọn phương án D

Câu 63. Tính thể tích lớn nhất của khối chóp tứ giác nội tiếp một mặt cầu bán kính bằng 3.

A $\dfrac{49}{3}$. **B** 12π. **C** $\dfrac{32\pi}{3}$. **D** $\dfrac{64}{3}$.

Lời giải.



Giả sử hình chóp $S.ABCD$ nội tiếp mặt cầu (S) có tâm I bán kính $R = 3$, đường cao của hình chóp là SK.
Gọi H là hình chiếu của I lên $mp(ABCD)$ và cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.
Dễ thấy đường cao hình chóp lớn nhất khi K trùng H và I nằm giữa đoạn SH. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm H có diện tích lớn nhất khi $ABCD$ là hình vuông.
Vậy để khối chóp $S.ABCD$ có thể tích lớn nhất cần có $S.ABCD$ là khối chóp đều.
Qua trung điểm M của SA kẻ đường thẳng vuông góc với SA cắt SH tại I, khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đều $S.ABCD$.
Đặt $AB = x$ và $SH = h$.
Xét hai tam giác đồng dạng $\triangle SMI$ và $\triangle SHA$ có $\dfrac{SM}{SH} = \dfrac{SI}{SA}$
$\Rightarrow R = SI = \dfrac{SM \cdot SA}{SH} = \dfrac{SA^2}{2SH} \Rightarrow SA^2 = 6SH$.
Xét tam giác vuông SHA có $SA^2 = SH^2 + AH^2 = SH^2 + \dfrac{AB^2}{2} = h^2 + \dfrac{x^2}{2}$.
Ta có $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}hx^2 = -\dfrac{2}{3}h^3 + 4h^2$.
Xét hàm số $V = -\dfrac{2}{3}h^3 + 4h^2$. Ta có $V' = -2h^2 + 8h = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h = 0 \\ h = 4 \end{array}\right.$.
Bảng biến thiên

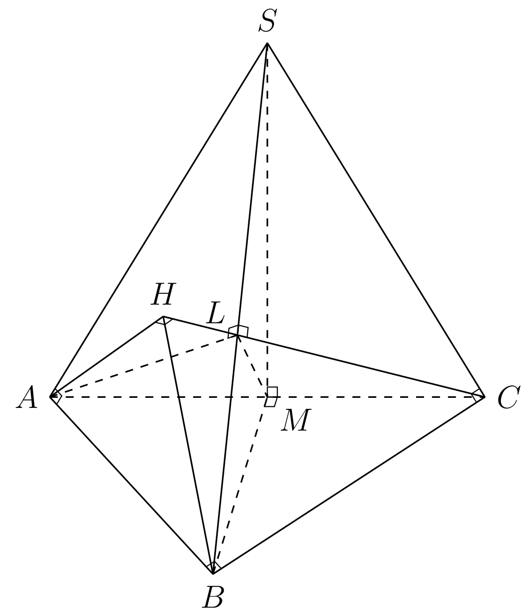
h	$-\infty$		0		4		$+\infty$
V'		$-$	0	$+$	0	$-$	
V	$\searrow$		0	$\nearrow$	$\dfrac{64}{3}$	$\searrow$	

Vậy, thể tích lớn nhất của khối chóp tứ giác là $\dfrac{64}{3}$.
Chọn phương án D

Câu 64. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B. Biết $AB = BC = a\sqrt{3}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A $16\pi a^2$. **B** $12\pi a^2$. **C** $8\pi a^2$. **D** $2\pi a^2$.

Lời giải.



Kẻ $AL \perp SB \Rightarrow CL \perp SB$.
Suy ra $SB \perp (ALC)$.
Kẻ $AH \perp LC \Rightarrow AH \perp (SBC)$.
Suy ra $AH = d(A, (SBC)) = a\sqrt{2}$.
$AC = a\sqrt{6}$, $HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = 2a$.
Và $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = a$.
Đặt $LM = x$, ta có:
$S_{\triangle LAC} = \dfrac{1}{2} \cdot LM \cdot AC = \dfrac{1}{2} \cdot AH \cdot LC$
Suy ra: $LC = x\sqrt{3}$.
Ta có: $BL^2 = BM^2 - LM^2 = \sqrt{\dfrac{3a^2}{2} - x^2}$
và $LH^2 = BH^2 - BL^2 = x^2 - \dfrac{a^2}{2}$.

Ta có: $LH = HC - LC \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - \dfrac{a^2}{2}} = 2a - x\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \dfrac{2a}{\sqrt{3}} \\ x^2 - \dfrac{a^2}{2} = 4a^2 - 4\sqrt{3}ax + 3x^2 \end{cases}$

Hay $\begin{cases} 0 < x < \dfrac{2a}{\sqrt{3}} \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3\sqrt{3}a}{2} \\ x = \dfrac{\sqrt{3}a}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. Suy ra: $AL = \dfrac{3a}{2} \Rightarrow SA = 3a \Rightarrow SB = 2\sqrt{3}a$.

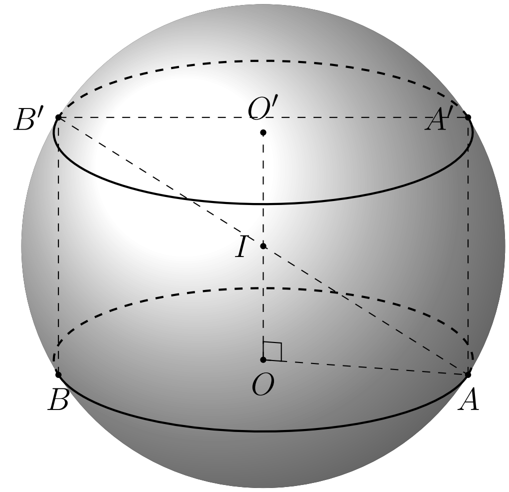
Gọi I là trung điểm SB, do $\triangle SAB, \triangle SBC$ vuông nên ta có $IS = IB = IA = IC$, suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.
Suy ra $R = \dfrac{SB}{2} = a\sqrt{3}$. Từ đó ta có $S_{\text{mặt cầu}} = 4\pi R^2 = 12\pi a^2$.
Chọn phương án B

Câu 65. Cho hình cầu (S) tâm I, bán kính R không đổi. Một hình trụ có chiều cao h và bán kính đáy r thay đổi nội tiếp hình cầu. Tính chiều cao h theo R sao cho diện tích xung quanh của hình trụ lớn nhất.

A $h = R\sqrt{2}$. **B** $h = R$. **C** $h = \dfrac{R}{2}$. **D** $h = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $R = IA$ là bán kính mặt cầu, $r = OA$ là bán kính hình trụ, $h = OO' = 2IO$ là chiều cao hình trụ. Xét $\triangle IOA$ ta có



$$R^2 = r^2 + \frac{h^2}{4} \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}.$$

Mà diện tích xung quanh hình trụ là

$$S = 2\pi rh = 2\pi h\sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}.$$

Xét hàm số

$$f(h) = \frac{h}{2}\sqrt{4R^2 - h^2} = \frac{1}{2}\sqrt{h^2\left(4R^2 - h^2\right)} \leqslant R^2,$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $h = \sqrt{2}R$.

Chọn phương án A

Câu 66. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$, đáy thỏa mãn điều kiện

$$\frac{\cot A + \cot B + \cot C}{2} = \frac{BC}{AB \cdot AC} + \frac{CA}{BC \cdot BA} + \frac{AB}{CA \cdot CB}.$$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên DB, DC. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $A.BCHK$.

A 4π. **B** 8π. **C** 10π. **D** 16π.

Lời giải.

Đặt $BC = a, AC = b, AB = c, R$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{\cot A + \cot B + \cot C}{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\cos C}{\sin C}\right)\\ &= \frac{R}{2}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{abc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{abc} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{abc}\right)\\ &= \frac{R}{2}\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}\right).\end{aligned}$$

Theo giả thiết suy ra

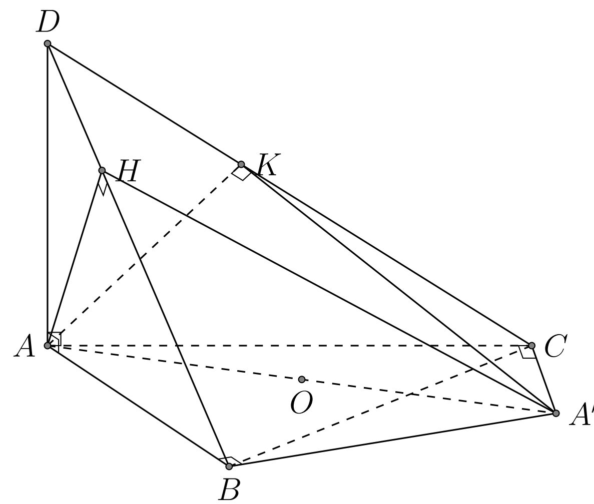
$$\begin{aligned}&\frac{R}{2}\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}\right) = \frac{a}{c \cdot b} + \frac{b}{a \cdot c} + \frac{c}{b \cdot a} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}\\ \Rightarrow\ & R = 2.\end{aligned}$$

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, A' là điểm đối xứng của A qua O nên AA' là đường kính của đường tròn (O,R). Suy ra $\widehat{ABA'} = \widehat{ACA'} = 90°$. (1)

Ta lại có $\begin{cases} A'C \perp AC \\ A'C \perp DA \text{ (do } DA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow$ $A'C \perp (DAC) \Rightarrow A'C \perp AK$.

Mà $AK \perp DC$ nên $AK \perp (DCA') \Rightarrow AK \perp KA'$ hay $\widehat{AKA'} = 90°$. (2)

Chứng minh tương tự ta cũng có $\widehat{AHA'} = 90°$. (3)



Từ (1), (2) và (3) suy ra 5 điểm A, B, C, H, K cùng thuộc mặt cầu tâm O, bán kính $R = 2$. Vậy diện tích của mặt cầu ngoại tiếp $A.BCHK$ là $S = 4\pi R^2 = 16\pi$.

Chọn phương án D

Câu 67. Cho hình trụ (T) có đáy là các đường tròn tâm O và O', bán kính bằng 1, chiều cao hình trụ bằng 2. Các điểm A, B lần lượt nằm trên hai đường tròn (O) và (O') sao cho góc $(OA, O'B) = 60°$. Tính diện tích toàn phần của tứ diện $OAO'B$.

A $S = \dfrac{4+\sqrt{19}}{2}$. **B** $S = \dfrac{4+\sqrt{19}}{4}$. **C** $S = \dfrac{3+2\sqrt{19}}{2}$. **D** $S = \dfrac{1+2\sqrt{19}}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $S_{AOO'} = \dfrac{AO \cdot OO'}{2} = 1, S_{BOO'} = \dfrac{BO' \cdot OO'}{2} = 1$.

Kẻ đường sinh AA', khi đó ta có $AA' = OO' = 2$.

Mà $(O'A', O'B) = (OA, O'B) = 60°$ nên $A'B = O'B = 1$.

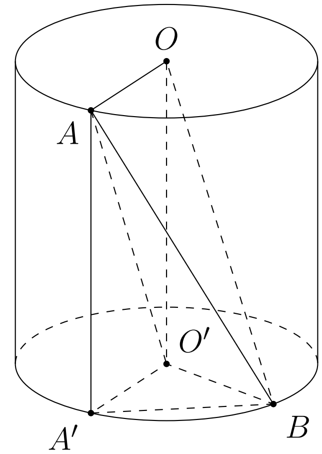
Suy ra: $AB = \sqrt{A'A^2 + A'B^2} = \sqrt{5}$, $OB = \sqrt{O'O^2 + O'B^2} = \sqrt{5}$.

Lấy M là trung điểm OA, khi đó $BM \perp AO$.

Ta có $OM = \dfrac{1}{2} \Rightarrow BM = \sqrt{BO^2 - OM^2} = \dfrac{\sqrt{19}}{2}$, suy ra $S_{AOB} = \dfrac{AO \cdot BM}{2} = \dfrac{\sqrt{19}}{4}$.

Lại có $O'A = \sqrt{A'A^2 + A'O'^2} = \sqrt{5}$ nên ta cũng có $S_{ABO'} = \dfrac{\sqrt{19}}{4}$.

Từ đó dẫn tới diện tích toàn phần của tứ diện $OAO'B$ là $\dfrac{4+\sqrt{19}}{2}$.



Chọn phương án A

Câu 68. Cho mặt cầu (S) bán kính $R = 5$ cm . Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có chu vi bằng 8π cm. Bốn điểm A, B, C, D thay đổi sao cho A, B, C thuộc đường tròn (C), điểm D thuộc (S) (D không thuộc đường tròn (C)) và tam giác ABC đều. Tính thể tích lớn nhất của tứ diện $ABCD$.

A $32\sqrt{3}$ cm^3. **B** $60\sqrt{3}$ cm^3. **C** $20\sqrt{3}$ cm^3. **D** $96\sqrt{3}$ cm^3.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm D trên mặt phẳng (P).

Ta có $V_{ABCD} = V_{D.ABC} = \dfrac{1}{3} DH \cdot S_{ABC}$.

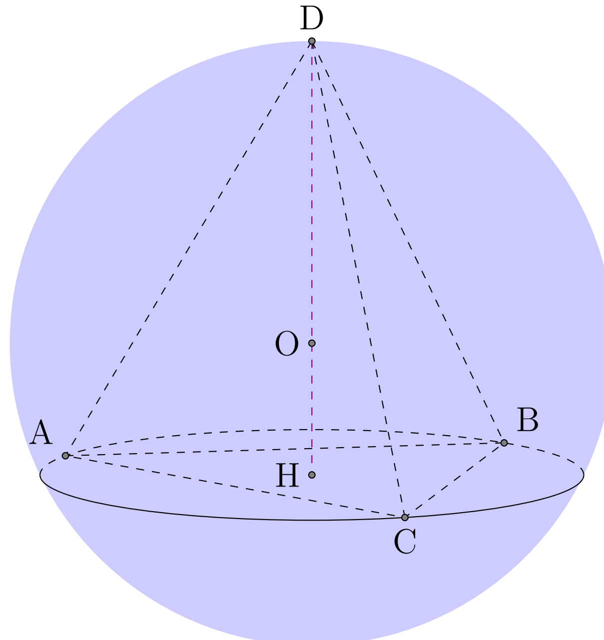
Tam giác đều ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp $r = \dfrac{8\pi}{2\pi} = 4$ cm, nên có cạnh $a = 4\sqrt{3}$ cm.

$\Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{\left(4\sqrt{3}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$ cm^2 không đổi.

Do đó thể tích tứ diện $ABCD$ lớn nhất khi DH lớn nhất.

Khi đó $DH = DO + OH = DO + \sqrt{OA^2 - AH^2} = 5 + \sqrt{25-16} = 8$.

$(V_{D.ABC})_{\max} = \dfrac{1}{3} \cdot 8 \cdot 12\sqrt{3} = 32\sqrt{3}$ cm^3.



Chọn phương án A

Câu 69. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = a\sqrt{3}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ theo a.

A $S = 4\pi a^2$. **B** $S = 8\pi a^2$. **C** $S = 12\pi a^2$. **D** $S = 16\pi a^2$.

Lời giải.

Từ tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = a\sqrt{3}$ suy ra $AC = a\sqrt{6}$.

Gọi O là trung điểm SB. Vì $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$ nên suy ra $OA = OC = OB = OS$, hay O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Gọi H, K lần lượt là trung điểm AC, BC. Từ $OA = OB = OC$ và $HA = HB = HC$ suy ra $OH \perp (ABC)$. Ta cũng có $HK \perp BC$ và $HK = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vì ABC là tam giác vuông cân tại B nên $HB = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Đặt $OH = x$. Kẻ $HI \perp (OK)$, suy ra $HI \perp (SBC)$, nên $HI = d(H;(SBC))$.

Mặt khác H là trung điểm AC nên $HI = d(H;(SBC)) = \dfrac{1}{2} d(A;(SBC) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

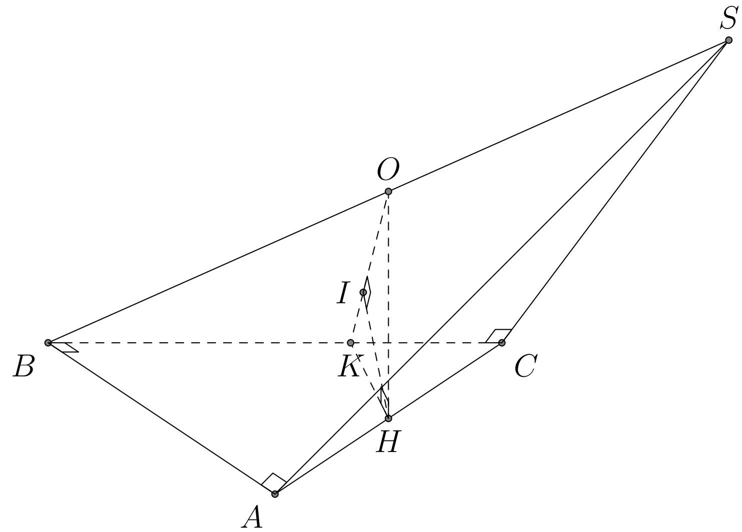
Ta có $\dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{OH^2} + \dfrac{1}{HK^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2} \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

$R = OB = \sqrt{OH^2 + HB^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \dfrac{3a}{2}$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = 12\pi a^2.$$



Chọn phương án C

Câu 70. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có cạnh đáy bằng a và có thể tích $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. Gọi J là điểm cách đều tất cả các mặt của hình chóp. Tính khoảng cách d từ J đến mặt phẳng $(ABCD)$.

A $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **D** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

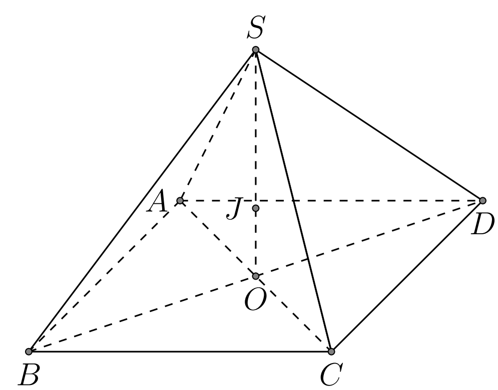
Lời giải.

Với hình chóp có mặt cầu nội tiếp ta có công thức sau:

$$V = \frac{1}{3}S_{tp} \cdot r,$$

trong đó S_{tp} là diện tích toàn phần và r là bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp đó.

Ta thấy J chính là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$ và d là bán kính mặt cầu này.



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD, M$ là trung điểm BC ta có

$$V = \frac{1}{3}SO \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Từ đó

$$SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = a \Rightarrow \mathrm{S}_{\triangle SBC} = \frac{1}{2}SM \cdot BC = \frac{a^2}{2}$$

nên diện tích toàn phần của hình chóp $S.ABCD$ bằng

$$\mathrm{S}_{tp} = 4\mathrm{S}_{\triangle SBC} + a^2 = 3a^2.$$

Lại có

$$V = \frac{1}{3}S_{tp} \cdot d$$

nên $d = \dfrac{3V}{S_{tp}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Chọn phương án C

Câu 71. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC là tam giác cân với $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $AB = AC = a$. Hình chiếu của D trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ biết thể tích tứ diện $ABCD$ là $V = \dfrac{a^3}{16}$.

A $R = \dfrac{a\sqrt{91}}{8}$. **B** $R = \dfrac{a\sqrt{13}}{4}$. **C** $R = \dfrac{13a}{2}$. **D** $R = 6a$.

Lời giải.

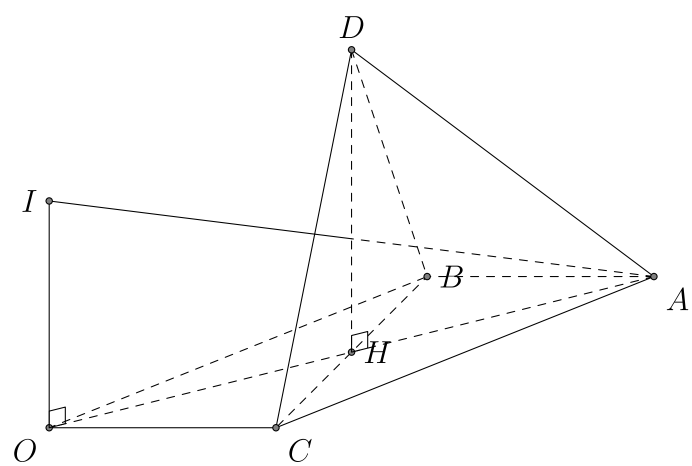
Gọi H là trung điểm BC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta có H là trung điểm của AO. Ta có $DH = \dfrac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ ta có $IO \perp (ABC)$. Do $IA = R$, $OA = a$ nên $IO = \sqrt{R^2 - a^2}$.

Do $HO \perp IO$, $HO \perp HD$ nên ta có

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{4} \pm \sqrt{R^2 - a^2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = R^2$$

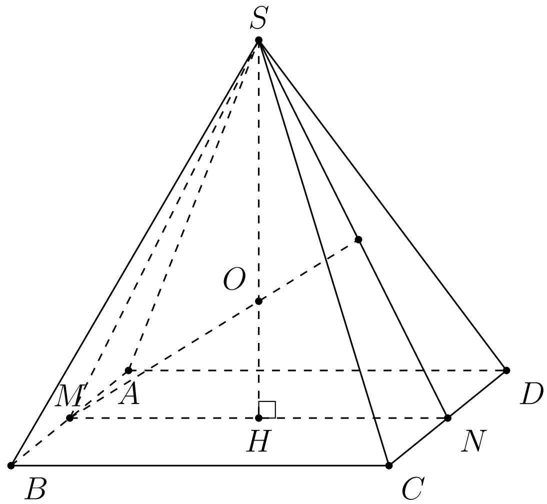
Giải phương trình trên ta được $R = \dfrac{a\sqrt{91}}{8}$.

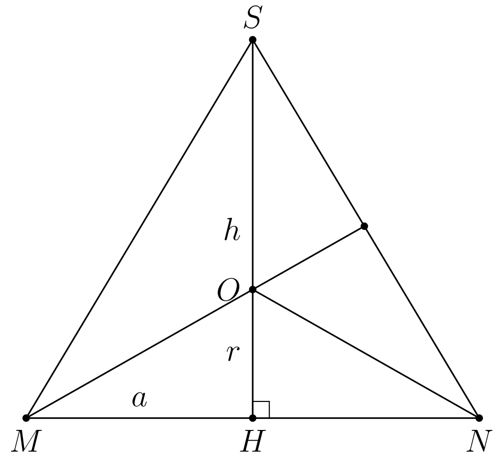


Chọn phương án A

Câu 72. Tính thể tích V của khối chóp tứ giác đều có chiều cao h và bán kính mặt cầu nội tiếp r $(h > 2r > 0)$.

A $V = \dfrac{4h^2r^2}{3(h+2r)}$. **B** $V = \dfrac{4h^2r^2}{h-2r}$. **C** $V = \dfrac{4h^2r^2}{3(h-2r)}$. **D** $V = \dfrac{4h^2r^2}{4(h-2r)}$.





Lời giải.

Gọi SH là đường cao của chóp tứ giác đều $S.ABCD$, khi đó $SH = h$ và mọi điểm thuộc SH đều cách đều các mặt bên của hình chóp. Vậy tâm mặt cầu nội tiếp O của hình chóp thuộc SH.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Xét tam giác SMN, $SM = SN$, $SH \perp MN$ tại trung điểm H.

Trong tam giác SMN kẻ phân giác của góc $\widehat{SMN}$ cắt SH tại O. Vậy O là tâm của mặt cầu nội tiếp chóp $S.ABCD$, đồng thời là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác SMN.

Giả sử a là độ dài cạnh đáy, khi đó diện tích tam giác SMN là

$S = p \cdot r = \dfrac{1}{2}a \cdot h \Leftrightarrow \left(SM + \dfrac{a}{2}\right) r = \dfrac{ah}{2} \Rightarrow SM = \dfrac{ah - ar}{2r} = \dfrac{a(h-r)}{2r}$ (1).

Mặt khác, trong tam giác SMH có $SM = \sqrt{MH^2 + SH^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + h^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4h^2}$ (2).

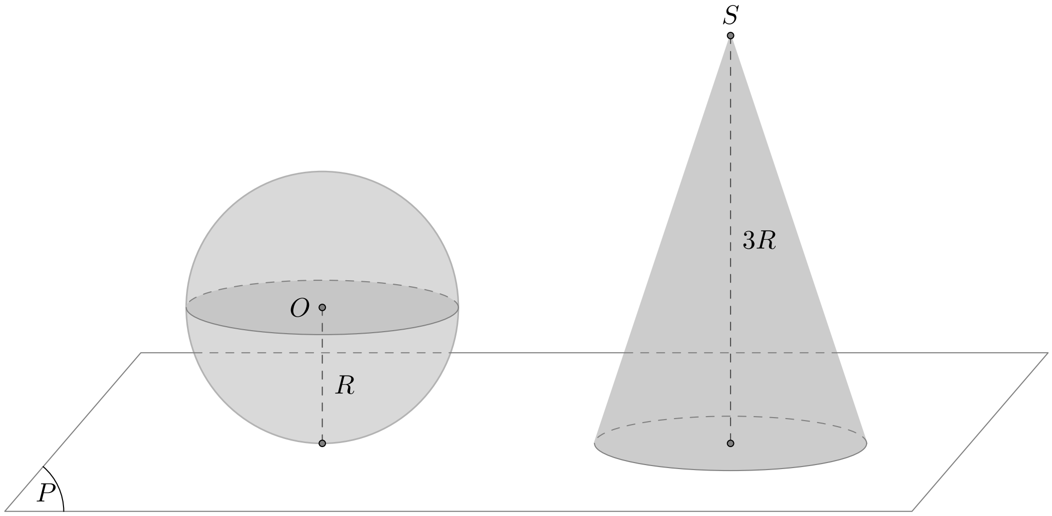
Từ (1) và (2), suy ra $\dfrac{a(h-r)}{2r} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+4h^2} \Rightarrow a^2 = \dfrac{4h^2r^2}{(h-r)^2 - r^2} = \dfrac{4r^2h}{h-2r}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$V = \dfrac{1}{3}h \cdot a^2 = \dfrac{4h^2r^2}{3(h-2r)}$.

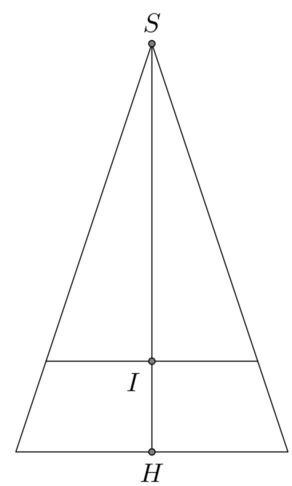
Chọn phương án C

Câu 73. Cho hình cầu tâm O bán kính $R = 5$, tiếp xúc với mặt phẳng (P). Một hình nón tròn xoay có đáy nằm trên (P), có chiều cao $h = 15$, có bán kính đáy bằng R. Hình cầu và hình nón nằm về một phía đối với mặt phẳng (P). Người ta cắt hai hình đó bởi mặt phẳng (Q) song song với (P) và thu được hai thiết diện có tổng diện tích là S. Gọi x là khoảng cách giữa (P) và (Q) $(0 < x \leq 5)$. Biết rằng S đạt giá trị lớn nhất khi $x = \dfrac{a}{b}$ $\left(\text{phân số } \dfrac{a}{b} \text{ tối giản}\right)$. Tính giá trị $T = a + b$.



Ⓐ $T = 17$. Ⓑ $T = 19$. Ⓒ $T = 18$. Ⓓ $T = 23$.

Lời giải.



Vì $\mathrm{d}\left((P),(Q)\right) = x \in (0;5] \Rightarrow \mathrm{d}\left(O,(Q)\right) = R - x = 5 - x$ nên mặt cầu (S) sẽ cắt (Q) theo giao tuyến là đường tròn (C_1) có bán kính

$$R_{(C_1)} = \sqrt{R^2 - \mathrm{d}^2\left(O,(Q)\right)} = \sqrt{25 - (5-x)^2}.$$

Diện tích của hình tròn thiết diện là $S_{(C_1)} = \pi R^2_{(C_1)} = \pi\left[25 - (5-x)^2\right]$.

Giả sử hình nón (N) có tâm đường tròn đáy là H và mặt phẳng (Q) cắt (N) theo giao tuyến là đường tròn (C_2) có tâm I. Theo định lí Thales ta có

$$\frac{SI}{SH} = \frac{R_{(C_2)}}{R_{(N)}} \Leftrightarrow \frac{h-x}{h} = \frac{R_{(C_2)}}{5} \Leftrightarrow R_{(C_2)} = \frac{15-x}{3}.$$

Diện tích của hình tròn thiết diện là $S_{(C_2)} = \pi R^2_{(C_2)} = \pi\left(\frac{15-x}{3}\right)^2$.

Tổng diện tích thiết diện là

$$S = S_{(C_1)} + S_{(C_2)} = \pi\left[25 - (5-x)^2\right] + \pi\left(\frac{15-x}{3}\right)^2 = \pi\left[-\frac{8}{9}\left(x - \frac{15}{4}\right)^2 + \frac{75}{2}\right] \le \frac{75\pi}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{15}{4}$.

Chọn phương án Ⓑ

Câu 74. Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt đáy là tam giác đều cạnh bằng 2, hình chiếu vuông góc của S lên mặt đáy là điểm H nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{AHB} = 150^\circ$; $\widehat{BHC} = 120^\circ$; $\widehat{CHA} = 90^\circ$. Biết tổng diện tích mặt cầu ngoại tiếp các hình chóp $S.HAB$; $S.HBC$; $S.HCA$ bằng $\frac{124\pi}{3}$. Tính chiều cao SH của hình chóp.

Ⓐ $SH = \frac{4}{3}$. Ⓑ $SH = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ $SH = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Ⓓ $SH = \frac{2}{3}$.

Lời giải.

Gọi R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp các hình chóp $S.HAB$; $S.HBC$; $S.HCA$. Gọi r_1, r_2, r_3 tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác AHB; BHC; CHA và $h = SH$.

Ta có

$$R_i^2 = r_i^2 + \frac{h^2}{4} \quad i = 1, 2, 3.$$

Theo giả thiết ta có $4\pi \sum\limits_{i=1}^{3} R_i^2 = \dfrac{124\pi}{3} \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{3} R_i^2 = \dfrac{31}{3}$.

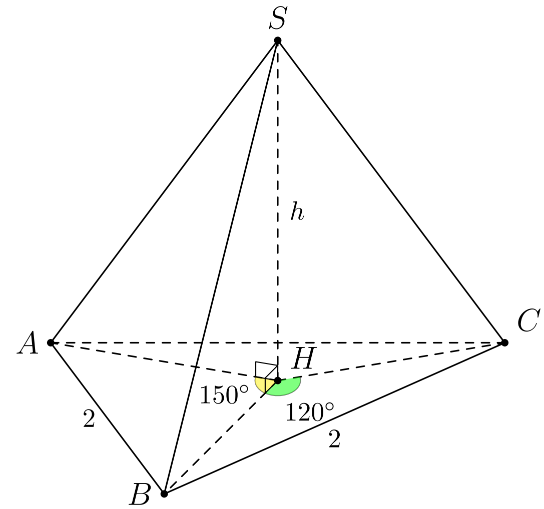
Vậy $\sum\limits_{i=1}^{3} r_i^2 + \dfrac{3h^2}{4} = \dfrac{31}{3}$ $(*)$.

Áp dụng định lý hàm số sin cho các tam giác AHB; BHC; CHA ta có:

$r_1 = \dfrac{AB}{2\sin \widehat{AHB}} = 2$, tương tự $r_2 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$; $r_3 = 1$.

Vậy $(*) \Leftrightarrow \dfrac{19}{3} + \dfrac{3h^2}{4} = \dfrac{31}{3} \Leftrightarrow h = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Chọn phương án C



Câu 75. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = a$, $BC = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ và mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính diện tích xung quanh của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

A $\dfrac{12\pi a^2}{7}$. **B** $\dfrac{4\pi a^2}{7}$. **C** $\dfrac{3\pi a^2}{7}$. **D** $\dfrac{15\pi a^2}{7}$.

Lời giải.

Đặt $AC = 2x$. Gọi I là trung điểm AC, vì tam giác SAC cân tại S suy ra SI vuông góc với AC.

Do đó $SI \perp (ABC) \Rightarrow SI \perp BI$.

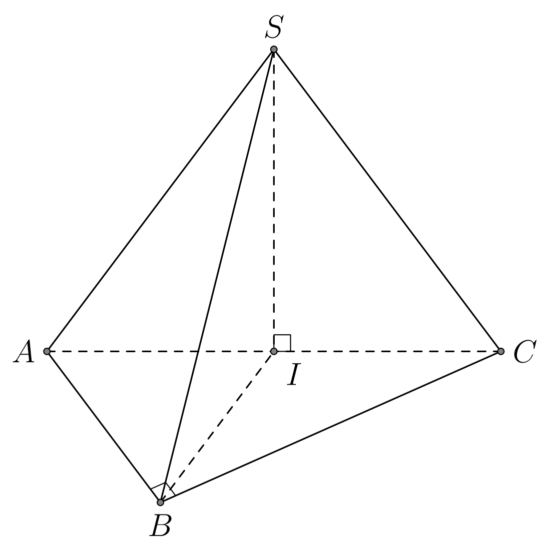
Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác SAI ta được $SI^2 = a^2 - x^2$.

Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác SBI ta được $BI = x$.

Do đó tam giác ABC vuông tại B.

Suy ra $AC = \dfrac{\sqrt{15}}{3} \Rightarrow SI = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$.

$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} SI \cdot AC = \dfrac{a\sqrt{35}}{12}$.



Do $\triangle ABC$ vuông tại B và $(ABC) \perp (SAC)$ suy ra tâm mặt cầu ngoại tiếp nằm trên mặt phẳng (SAC). Do đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAC.

Mà ta có $S_{\triangle SAC} = \dfrac{SA \cdot SC \cdot AC}{4R} \Rightarrow R = \dfrac{SA \cdot SC \cdot AC}{4S_{\triangle SAC}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vậy diện tích xung quanh mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$ bằng $4\pi R^2 = \dfrac{12\pi a^2}{7}$.

Chọn phương án A

BẢNG ĐÁP ÁN

1. D	2. A	3. A	4. D	5. B	6. A	7. B	8. B	9. A	10. A
11. A	12. A	13. A	14. C	15. D	16. C	17. D	18. A	19. B	20. C
21. B	22. D	23. A	24. C	25. D	26. B	27. A	28. A	29. A	30. C
31. C	32. C	33. C	34. A	35. B	36. C	37. D	38. D	39. B	40. A
41. C	42. C	43. A	44. B	45. B	46. A	47. D	48. A	49. C	50. D
51. A	52. D	53. A	54. B	55. A	56. C	57. D	58. A	59. A	60. D
61. D	62. D	63. D	64. B	65. A	66. D	67. A	68. A	69. C	70. C
71. A	72. C	73. B	74. C	75. A					

DẠNG 10. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty;-1)$. (B) $(0;1)$. (C) $(-1;0)$. (D) $(-\infty;0)$.

Lời giải.

Dựa vào hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

Chọn phương án (C)

Câu 1. Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $(1;+\infty)$?

(A) $y = x^4 + 2x^2 + 1$. (B) $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$.

(C) $y = \dfrac{x^3}{2} - x^2 - 3x + 1$. (D) $y = \sqrt{x-1}$.

Lời giải.

Ta có: $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \Rightarrow y' = -3x^2 + 6x - 3$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Chọn phương án (B)

Câu 2. Hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 6x + \dfrac{3}{4}$.

(A) Đồng biến trên $(-2;3)$. (B) Nghịch biến trên $(-2;3)$.

(C) Nghịch biến trên $(-\infty;-2)$. (D) Đồng biến trên $(-2;+\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

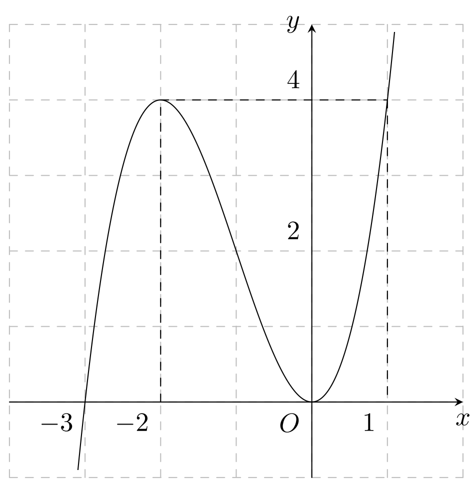
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{97}{12}$	$\searrow$	$-\dfrac{51}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên $(-2; 3)$.
Chọn phương án B

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm khoảng đồng biến của hàm số.

A $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.
B $(-3; +\infty)$.
C $(-\infty; -3)$ và $(0; +\infty)$.
D $(-2; 0)$.



Lời giải.
Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ta có hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.
Chọn phương án A

Câu 4. Cho hàm số $y = x^4 - 8x^2 - 4$. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng.

A $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$.
B $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.
C $(-2; 0)$ và $(0; 2)$.
D $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$.

Lời giải.
TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
$y' = 4x^3 - 16x$.
Ta có: $y' < 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 16x < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ 0 < x < 2 \end{array}\right.$.
Chọn phương án B

Câu 5.
Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(0; +\infty)$.
B $(-1; 1)$.
C $(-\infty; 0)$.
D $(-\infty; -2)$.

Lời giải.
Ta có $y' < 0, \forall x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1) \Rightarrow y' < 0, \forall x \in (-\infty; -2)$.
Chọn phương án D

Câu 6. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ có bảng biến thiên sau, tìm a và b.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	a	$\nearrow$	0	$\searrow$	b	$\nearrow$	$+\infty$

A $a = +\infty; b = 2$.
B $a = -\infty; b = -4$.
C $a = -\infty; b = 1$.
D $a = +\infty; b = 3$.

Lời giải.
Phương pháp:
Tính giới hạn của hàm số khi x tiến đến $-\infty$ để tìm a và tính giá trị của hàm số tại $x = 0$ để tìm b.
Cách giải:
$\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty, y(0) = -4 \Rightarrow a = -\infty; b = -4$.
Chọn phương án B

Câu 7. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
B Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
C Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
D Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Lời giải.
Ta có $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta chọn đáp án D.
Chọn phương án D

Câu 8. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{2-x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.
(B) Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.
(C) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.
(D) Hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

Lời giải.

Ta có $y = \dfrac{x+1}{2-x} = \dfrac{x+1}{-x+2} = \dfrac{3}{(-x+2)^2} > 0, \forall x \neq 2$. Do đó hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$

Chọn phương án (A)

Câu 9. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$.
(B) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.
(C) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và khoảng $(1; +\infty)$.
(D) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2; 1)$.

Lời giải.

Tập xác định là $\mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng xét dấu của y' như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

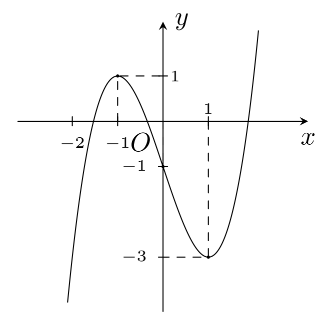
Do đó, hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-1; 1)$.

Chọn phương án (C)

Câu 10. Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-2; 1)$.
(B) $(-1; 2)$.
(C) $(-2; -1)$.
(D) $(-1; 1)$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị, hàm số đồng biến trên $(-2; -1)$.

Chọn phương án (C)

Câu 11. Kết luận nào sau đây về tính đơn điệu của hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ là đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
(B) Hàm số luôn luôn đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

(C) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

(D) Hàm số luôn luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{1}{(x+1)^2}>0,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Chọn phương án (A)

Câu 12. Hàm số $y=\dfrac{x-7}{x+4}$ đồng biến trên khoảng

(A) $(-5;1)$. (B) $(1;4)$. (C) $(-\infty;+\infty)$. (D) $(-6;0)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$.

Ta có $y'=\dfrac{11}{(x+4)^2}>0,\ \forall x\in\mathscr{D}$.

Do đó hàm số $y=\dfrac{x-7}{x+4}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-4)$ và $(-4;\infty)$.

Vậy hàm số $y=\dfrac{x-7}{x+4}$ đồng biến trên khoảng $(1;4)$.

Chọn phương án (B)

Câu 13. Hàm số $y=-x^3-3x^2+9x+20$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

(A) $(3;+\infty)$. (B) $(1;2)$. (C) $(-\infty;1)$. (D) $(-3;1)$.

Lời giải.

Ta có $y'=-3x^2-6x+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.;\ y'>0\Leftrightarrow -3<x<1$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;1)$.

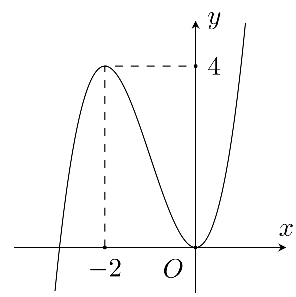
Chọn phương án (D)

Câu 14.

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm khoảng đồng biến của hàm số.

(A) $(3;+\infty)$. (B) $(-\infty;1)$ và $(0;+\infty)$.

(C) $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$. (D) $(-2;0)$.



Lời giải.

Quan sát đồ thị hàm số ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.

Chọn phương án (C)

Câu 15. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. Mệnh đề đúng là

(A) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

(B) Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$, nghịch biến trên $(-1;1)$.

(C) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(D) Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Chọn phương án (D)

Câu 16. Cho hàm số $y = \dfrac{8x-5}{x+3}$. Kết luận nào sau đây là đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-3)\cup(-3;+\infty)$.

(B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

(C) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(D) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

Ta có $y' = \dfrac{29}{(x+3)^2} > 0, \forall x \in \mathscr{D}$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

Chọn phương án (D)

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	-1	↘		↗	-1	↘	
	$-\infty$				-2				$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây

(A) $(0;1)$. (B) $(-1;0)$. (C) $(-\infty;1)$. (D) $(1;+\infty)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Chọn phương án (A)

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↘		↗	3	↘		↗	$-\infty$
			0				0		

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

(A) $(-\infty;0)$. (B) $(0;3)$. (C) $(-1;0)$. (D) $(0;1)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.
Chọn phương án (C)

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A $(0; +\infty)$. **B** $(-\infty; 0)$. **C** $(-1; 0)$. **D** $(-\infty; -2)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$ nên chọn đáp án D.
Chọn phương án (D)

Câu 20.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây. Khẳng định nào sau đây **sai**?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

A Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

B Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

C Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

D Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$. Do đó, khẳng định "Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$" sai.
Chọn phương án (D)

B MỨC ĐỘ 2

Câu 21. Giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{\cot x}{\cot x - m}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ là

A $\left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{array}\right.$. **B** $1 \leq m < 2$. **C** $m \leq 0$. **D** $m > 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{2 - m}{(\cot x - m)^2} \cdot (\cot x)' = \dfrac{2 - m}{(\cot x - m)^2} \cdot \dfrac{-1}{\sin^2 x}$.

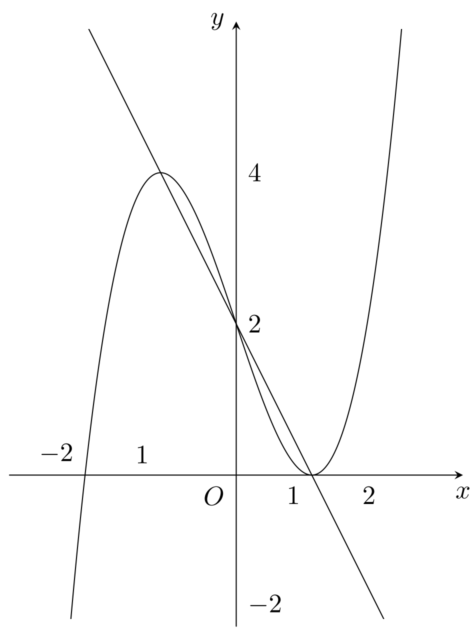
Khi $x \in \left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $\cot x \in (0; 1)$ Để hàm số đồng biến trên $\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ thì

$$\begin{cases} \cot x - m \neq 0 \\ y' > 0 \end{cases}, \forall x \in \left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin (0; 1) \\ 2 - m > 0, \forall x \in \left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2. \end{cases}$$

Chọn phương án A

Câu 22. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đồ thị của hàm $y = f'(x)$, $y = g'(x)$ như hình vẽ. Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $y = f(x) - g(x)$.

A $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.
B $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.
C $(1; +\infty)$ và $(-2; -1)$.
D $(-2; +\infty)$.



Lời giải.

Ta có $y' = f'(x) - g'(x)$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ ta có BBT

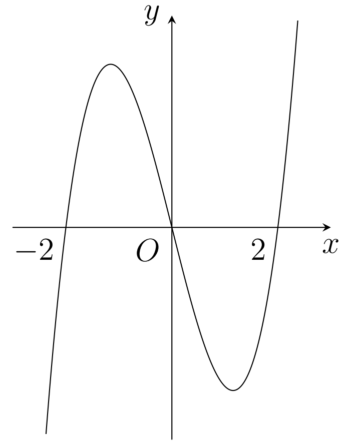
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

KL: Hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Chọn phương án A

Câu 23.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên.
Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.
B Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 1)$.
C Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
D Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Lời giải.
Từ đồ thị của $y = f'(x)$, ta có với $x \in (0; 2)$, $f'(x) < 0$. Suy ra $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
Chọn phương án D

Câu 24. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
B Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
C Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
D Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.
Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Ta có: $y' = \dfrac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathscr{D}$.
Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
Chọn phương án B

Câu 25. Hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 9x + 20$ đồng biến trên các khoảng nào?

A $(-3; 1)$. **B** $(-\infty; 1)$. **C** $(-3; +\infty)$. **D** $(1; 2)$.

Lời giải.
Tập xác định: $D = R$.
$y' = -3x^2 - 6x + 9$
$y' > 0 \Leftrightarrow -3x^2 - 6x + 9 > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1$
Vậy hàm số đồng biến trên $(-3; 1)$.
Chọn phương án A

Câu 26. Cho hàm số $y = -\dfrac{1}{4}x^4 + x^2 + 2$. Tìm khoảng đồng biến của hàm số đã cho?

A $(0; 2)$.
B $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right)$ và $\left(0; \sqrt{2}\right)$.
C $\left(-\sqrt{2}; 0\right)$ và $\left(\sqrt{2}; +\infty\right)$.
D $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Lời giải.
Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = -x^3 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \\ x = 0 \\ x = \sqrt{2} \end{array}\right.$

Bảng xét dấu y':

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right)$ và $\left(0; \sqrt{2}\right)$.

Chọn phương án B

Câu 27. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -\dfrac{1}{3}x^3 - 2\left(2m+3\right)x + 4$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A $-1 \le m \le 3$. **B** $-3 < m < 1$. **C** $-1 < m < 3$. **D** $-3 \le m \le 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = -x^2 + 2mx - 2m - 3$.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' = -x^2 + 2mx - 2m - 3 \le 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta' \le 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 \le 0 \le\Leftrightarrow -1 \le m \le 3$. Chọn A.

Chọn phương án A

Câu 28. Cho các hàm số $f(x) = x^4 + 2018$, $g(x) = 2x^3 - 2018$ và $h(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$. Trong các hàm số đã cho, có tất cả bao nhiêu hàm số ***không có*** khoảng nghịch biến?

A 2. **B** 1. **C** 0. **D** 3.

Lời giải.

$*f(x) = x^4 + 2018$ (TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$) $\Rightarrow f'(x) = 4x^3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$, do đó hàm số không thỏa mãn đề bài.

$*g(x) = x^3 - 2018$ (TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$) $\Rightarrow g'(x) = 6x^2 \ge 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$.

Suy ra hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó hàm số thỏa mãn đề bài.

$*h(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ (TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$) $\Rightarrow h'(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2} > 0$ $(\forall x \in \mathscr{D})$.

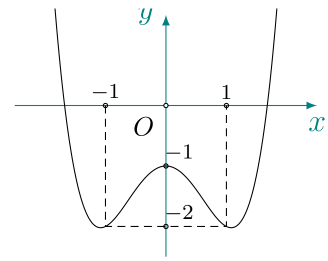
Suy ra hàm số luôn đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$, do đó hàm số thỏa mãn đề bài.

Vậy có hai hàm số ***không có*** khoảng nghịch biến.

Chọn phương án A

Câu 29.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây



A $(0; 1)$. **B** $(-\infty; -1)$. **C** $(-1; 1)$. **D** $(-1; 0)$.

Lời giải.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$, $(1; +\infty)$

Chọn phương án D

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$?

A $m \in (-\infty; -5)$. **B** $m \in [5; 2)$. **C** $m \in (2; +\infty)$. **D** $m \in (-\infty; 2]$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = 4x^3 - 4(m-1)x$.

— **Trường hợp 1**: $m \leq 1$

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$f(0)$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $(1; 3)$.

— **Trường hợp 2**: $m > 1$

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m-1}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{m-1}$		0		$\sqrt{m-1}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-\sqrt{m-1})$	↗	$f(0)$	↘	$f(\sqrt{m-1})$	↗	$+\infty$

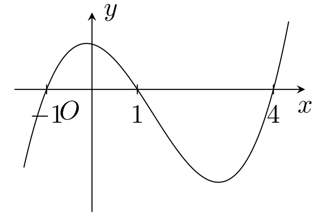
Từ bảng biến thiên ta thấy để hàm số đồng biến trên $(1; 3) \Rightarrow \sqrt{m-1} \leq 1 \Leftrightarrow m \leq 2$.

Suy ra $m \in (1; 2]$ thì hàm số đồng biến trên $(1; 3)$.

Vậy $m \in (-\infty; 1] \cup (1; 2] = (-\infty; 2]$ thì hàm số đã cho đồng biến trên $(1; 3)$.
Chọn phương án D

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$.
Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Hàm số $y = f\left(x^2\right)$ có bao nhiêu khoảng nghịch biến.

A 5. **B** 3. **C** 4. **D** 2.



Lời giải.
Ta có $y' = \left[f\left(x^2\right)\right]^{/} = 2x.f'\left(x^2\right)$. Ta có

$$y' < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x > 0\\ f'\left(x^2\right) < 0\end{cases}\\ \begin{cases}x < 0\\ f'\left(x^2\right) > 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x > 0\\ x^2 < -1 \vee 1 < x^2 < 4\end{cases}\\ \begin{cases}x < 0\\ -1 < x^2 < 1 \vee x^2 > 4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1 < x < 2\\ x < -2 \vee -1 < x < 0\end{array}\right.$$

Vậy hàm số $y = f\left(x^2\right)$ có 3 khoảng nghịch biến.
Chọn phương án B

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(-\infty; +\infty)$, có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề sau đây đúng?

A Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$.
B Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
C Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
D Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Lời giải.
Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ nên đồng biến trên $(-\infty; -3)$.
Chọn phương án A

Câu 33. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. **B** $y = \sin x$. **C** $y = \dfrac{x+2}{x-1}$. **D** $y = -x^3 - 2x$.

Lời giải.
Đáp án A sai vì hàm bậc bốn trùng phương không nghịch biến trên $\mathbb{R}$ (nó luôn có cực trị).
Đáp án B sai vì hàm $y = \sin x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$.
Đáp án C sai và hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
Đáp án D đúng vì hàm số $y = -x^3 - 2x$ có nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn phương án D

Câu 34. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + 4x - 5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A $0 < m < 1$. B $-1 \leq m \leq 1$. C $0 \leq m \leq 1$. D ˇ$1 < m < 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 4mx + 4$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' = (-2m)^2 - 4 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leqslant m \leqslant 1$.

Chọn phương án B

Câu 35. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A $y = x^4 - x^2 + 3$. B $y = \frac{x-2}{2x-3}$. C $y = -x^3 + x - 1$. D $y = \frac{3-x}{x+1}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Tìm các khoảng đồng biến của mỗi hàm số ở các đáp án và đối chiếu kết quả.

Cách giải:

a) Xét hàm số $y = x^4 - x^2 + 3$.

Ta có $y' = 4x^3 - 2x = 2x\left(2x^2 - 1\right)$

Khi đó $y' > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0 \\ x > \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$

Nên hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$ và $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right) \supset (1; +\infty)$, chúng ta nhận hàm số này.

b) Xét hàm số $y = \frac{x-2}{2x-3}$.

$\Rightarrow y' = \frac{1}{(2x-3)^2} > 0, \forall x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

Do đó hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$ và $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

Cả hai khoảng này đều không chứa khoảng $(1; +\infty)$ nên không nhận hàm số này.

c) Xét hàm số $y = -x^3 + x - 1$

$\Rightarrow y' = -3x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Khoảng này không chứa khoảng$(1; +\infty)$ nên loại hàm số này.

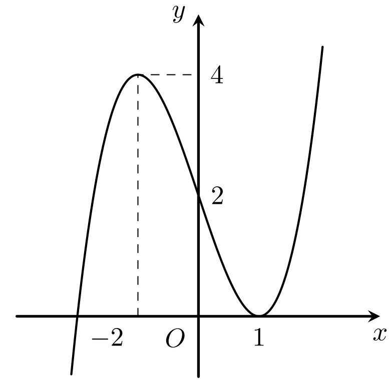
d) Xét hàm số $y = \frac{3-x}{x+1}$

$\Rightarrow y' = \frac{-4}{(x+1)^2} < 0, \forall x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

Do đó hàm số không đồng biến.

Chọn phương án A

Câu 36.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Khẳng định sau đây là **sai**?



A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$.
C. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Lời giải.
Từ đồ thị của hàm $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-2)$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Chọn phương án C

Câu 37. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?
A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
B. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Lời giải.
Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Ta có $y' = -3x^2 + 6x - 3 = -3(x-1)^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Vậy hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
Chọn phương án C

Câu 38. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số

$$y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-3)x - m + 2$$

luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
A. $m \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.
B. $-3 \leq m \leq 1$.
C. $m \leq 1$.
D. $-3 < m < 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Ta có $y' = -x^2 - 2mx + 2m - 3$.
Hàm số đã cho là hàm bậc ba nên hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi chỉ khi

$$\begin{aligned} y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1. \end{aligned}$$

Chọn phương án B

Câu 39. Hàm số $y = \sqrt{4 - x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào?

A $(0; 2)$. **B** $(-2; 0)$. **C** $(0; +\infty)$. **D** $(-2; 2)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = [-2; 2]$.
Ta có $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Bảng biến thiên

x	-2		0		2
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Vậy hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$.
Chọn phương án A

Câu 40. Hàm số nào trong các hàm số sau đây nghịch biến trên tập $\mathbb{R}$?

A $y = -x^3 + x^2 - 10x + 1$. **B** $y = x^4 + 2x^2 - 5$.

C $y = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$. **D** $y = \cot 2x$.

Lời giải.

Ta xét $y = -x^3 + x^2 - 10x + 1$ có $y' = -3x^2 + 2x - 10 < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy $y = -x^3 + x^2 - 10x + 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
Chọn phương án A

C MỨC ĐỘ 3

Câu 41. Cho hàm số $y = \dfrac{mx+4}{x+m}$. Giá trị của m để hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$ là?

(A) $m > 2$. (B) $\left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2 \end{array}\right.$. (C) $m \leq -2$. (D) $m < -2$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số $x \neq m$.

Đạo hàm $y' = \dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi

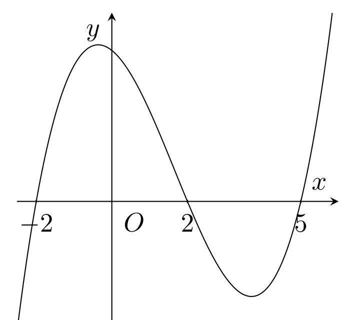
$$y' > 0,\ \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4>0 \\ -m \notin (2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right. \\ -m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right. \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2.$$

Vậy khi $m > 2$ thì hàm số đã cho đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Chọn phương án (A)

Câu 42.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y = f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



(A) $(-1;+\infty)$. (B) $(0;2)$. (C) $(-\infty;-1)$. (D) $(1;3)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ ta thấy $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2;2) \cup (5;+\infty)$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-2) \cup (2;5)$.

Xét hàm số $y = f(3-2x)$ có $y' = -2 \cdot f'(3-2x)$.

Hàm số $y = f(3-2x)$ nghịch biến $\Leftrightarrow -2 \cdot f'(3-2x) < 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) > 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < 3-2x < 2 \\ 3-2x > 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{5}{2} \\ x < -1. \end{array}\right.$$

Vậy hàm số $y = f(3-2x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right)$.

Chọn phương án (C)

Câu 43. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(3m+1)x^2 + 6(2m^2+m)x - 12m^2 + 3m + 1$. Tính tổng tất cả giá trị nguyên dương của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.

(A) 0. (B) 3. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Ta có

$y' = 6x^2 - 6(3m+1)x + 6(2m^2+m)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = 2m+1 \end{array}\right.$

Vì m nguyên dương nên $m < 2m+1$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3) \Leftrightarrow m \leqslant 1 < 3 \leqslant 2m+1 \Leftrightarrow m = 1$.

Chọn phương án C

Câu 44. Gọi S là tập hợp các số nguyên m để hàm số $y = f(x) = \dfrac{x+2m-3}{x-3m+2}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-14)$. Tính tổng T của các phần tử trong S?

A $T = -10$. **B** $T = -9$. **C** $T = -6$. **D** $T = -5$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{3m-2\}$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{-5m+5}{(x-3m+2)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-14) \Leftrightarrow \begin{cases} -5m+5 > 0 \\ 3m-2 \notin (-\infty;-14) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 3m-2 \geq -14 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \geq -4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -4 \leq m < 1$.

Vậy $S = \{-4;-3;-2;-1;0\} \Rightarrow T = -4-3-2-1 = -10$.

Chọn phương án A

Câu 45. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A $y = \tan x$. **B** $y = \dfrac{x}{x+1}$.

C $y = \left(x^2-1\right)^2 - 3x + 2$. **D** $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Hàm số $y = f(x)$ có:

+ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

+ $y' \geq 0, \forall x$ và $y' = 0$ tại hữu hạn điểm.

Cách giải:

$y = \tan x$: loại vì $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$y = \dfrac{x}{x+1}$: loại vì $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$y = \left(x^2-1\right)^2 - 3x + 2$: loại vì $y' = 2.2x\left(x^2-1\right) - 3 = 4x^3 - 4x - 3$ có khoảng mang dấu dương, có khoảng mang dấu âm.

$y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$: thỏa mãn vì $y' = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}\,(x^2+1)} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Chọn phương án D

Câu 46. Cho hàm số $y = \dfrac{mx+2}{2x+m}$, m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$. Tìm số phần tử của S.

A. 1. B. 5. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{m}{2}\right\}$. $y' = \dfrac{m^2-4}{(2x+m)^2}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4<0 \\ \dfrac{-m}{2} \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{-m}{2} \le 0 \\ \dfrac{-m}{2} \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ \left[\begin{array}{l} m \ge 0 \\ m \le -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m < 2.$

Chọn phương án C

Câu 47. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \dfrac{2x+m+1}{x+m+1}$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-4)$ và $(11;+\infty)$?

A. 13. B. 12. C. Vô số. D. 14.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq -m+1$, $y' = \dfrac{m-3}{(x+m-1)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-4)$ và $(11;+\infty)$ thì hàm số phải xác định trên mỗi khoảng $(-\infty;-4)$ và $(11;+\infty)$, $\Rightarrow -4 \le -m+1 \le 11 \Leftrightarrow -10 \le m \le 5$.

Khi đó để hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-4)$ và $(11;+\infty)$ thì $m-3<0 \Leftrightarrow m<3$, lấy giao với $-10 \le m \le 5 \Rightarrow -10 \le m < 3$.

Từ đó có các giá trị nguyên của $m \in \{-10;-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$.

Suy ra đáp án A.

Chọn phương án A

Câu 48. Tập tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $m \in [-1;1]$. B. $m \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$.

C. $m \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$. D. $m \in (-1;1)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho là hàm số bậc ba có $a = 1 > 0$, có $y' = 3x^2 - 6mx + 3$. Do đó y đồng biến trên $\mathbb{R}$ nếu và chỉ nếu phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta' = 9m^2 - 9 \le 0$.

Vậy $m \in [-1;1]$.

Chọn phương án A

Câu 49. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m-9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ là

A. $(-\infty;0]$. B. $\left[-\dfrac{3}{4};+\infty\right)$. C. $\left(-\infty;-\dfrac{3}{4}\right]$. D. $[0;+\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m - 9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ tương đương

$$y' = -3x^2 - 12x + 4m - 9 \leq 0,\ \forall x \in (-\infty; -1)$$
$$\Leftrightarrow\ 4m \leq 3x^2 + 12x + 9,\ \forall x \in (-\infty;\ -1).$$

Đặt $g(x) = 3x^2 + 12x + 9 \Rightarrow g'(x) = 6x + 12$, suy ra $\min\limits_{(-\infty;-1]} g(x) = g(-2) = -3$.

Vậy $4m \leq -3 \Leftrightarrow m \leq -\dfrac{3}{4}$.

Chọn phương án C

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = 3f(x + 2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

A $(1; +\infty)$. **B** $(-\infty; -1)$. **C** $(-1; 0)$. **D** $(0; 2)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3f'(x + 2) - 3x^2 + 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x + 2) - x^2 + 1 = 0 \qquad (1)$

Đặt $t = x + 2$, khi đó $(1) \Leftrightarrow f'(t) + (-t^2 + 4t - 3) = 0$ Để hàm số đồng biến thì $y' > 0$

Ta chọn t saor cho

$$\begin{cases} f'(t) > 0 \\ -t^2 + 4t - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < t < 2 \vee 2 < t < 3 \vee t > 4 \\ 1 < t < 3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < t < 2 \\ 2 < t < 3 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < 0 \\ 0 < x < 1. \end{array}\right.$$

vvhyuuruccc/

Chọn phương án C

Câu 51. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

A 2007. **B** 2030. **C** 2005. **D** 2018.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 12x + m$.

Hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$

$\Leftrightarrow m \leq -3x^2 + 12x, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \geq \max\limits_{(0;+\infty)} (-3x^2 + 12x) \Leftrightarrow m \geq 12$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $-2018 \leq m \leq 2018$ nên $m \in \{12, 13, 14, \cdots, 2018\}$.
Vậy có 2007 số nguên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn phương án A

Câu 52. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019; 2019]$ để hàm số $y = (m-1)x^3 + 3mx^2 + (4m+4)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A 4036. B 2017. C 2018. D 4034.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 3(m-1)x^2 + 6mx + 4m + 4$.
Để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ thì $y' \geq 0, \forall x \in (-\infty; +\infty)$ ($y' = 0$ tại hữu hạn điểm).

- TH1: $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ thì $y' = 6x + 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{4}{3}$ (không thỏa mãn).
- TH2: $\begin{cases} a = m - 1 > 0 \\ \Delta'_{y'} = (3m)^2 - 3(m-1)(4m+4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -3m^2 + 12 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ \left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2.$

Vì m là số nguyên và $m \in [-2019; 2019] \Rightarrow m = \{2; 3; 4; \ldots; 2019\}$.
Vậy có 2018 số nguyên m thuộc khoảng $m \in [-2019; 2019]$.
Chọn phương án C

Câu 53. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 8$. Tính tổng các giá trị nguyên của m để phương trình $f(|x-1|) + m = 2$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

A -2. B -6. C 8. D 4.

Lời giải.

Phương pháp:
- Đặt $t = |x-1|$ $(t \geq 0)$ đưa phương trình về ẩn t.
- Phương trình đã cho có 3 nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình ẩn t có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm dương.

Cách giải:
Đặt $t = |x-1|$ $(t \geq 0)$ ta được $f(t) + m = 2 \Leftrightarrow f(t) = 2 - m$.
Có $f(t) = t^3 - 3t^2 + 8 \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 6t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \in [0; +\infty) \\ t = 2 \in [0; +\infty) \end{array}\right.$
Bảng biến thiên của hàm số $f(t) = t^3 - 3t^2 + 8$

t	0		2		$+\infty$
y'	0	$-$	0	$+$	
y	8	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình đã cho có 3 nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình ẩn t có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm dương $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = 2 - m$ cắt đồ thị hàm số tại một điểm có hoành độ bằng 0 và điểm còn lại có hoành độ dương.
Quan sát bảng biến thiên ta thấy $2 - m = 8 \Leftrightarrow m = -6$.
Vậy tổng các giá trị của m là -6.
Chọn phương án B

Câu 54. Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$ (với m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

(A) 7. (B) 6. (C) 5. (D) 8.

Lời giải.
Ta có $y' = -3x^2 - 2mx + 4m + 9$.
Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ y' \le 0,\ \forall x \in (-\infty; +\infty)\\
&\Leftrightarrow\ -3x^2 - 2mx + 4m + 9 \le 0,\ \forall x \in (-\infty; +\infty)\\
&\Leftrightarrow\ \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < 0 \\ m^2 + 12m + 27 \le 0 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow\ -9 \le m \le -3\\
&\Rightarrow\ m \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3\} \text{ (vì } m \text{ là số nguyên)}
\end{aligned}$$

Chọn phương án A

Câu 55. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{2}m^2x^2 + 2m$ đồng biến trên $(1; +\infty)$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

(A) 0. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.
Do hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ nên nếu hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ thì cũng đồng biến trên $[1; +\infty)$.
Ta có $y' = x^3 - m^2x$.
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' \ge 0,\ \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow m^2 \le \dfrac{x^3}{x},\ \forall x \in [1; +\infty)$.
$\Leftrightarrow m^2 \le f(x) = x^2,\ \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow m^2 \le \min\limits_{x \in [1; +\infty)} f(x)$.
$\Leftrightarrow m^2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le m \le 1$.
Do m nguyên nên $m \in \{-1; 0; 1\} \Rightarrow S = -1 + 0 + 1 = 0$.
Chọn phương án A

Câu 56. Cho hàm số $y = \dfrac{mx+2}{2x+m}$, m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$. Tìm số phần tử của S.

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 5.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{m}{2}\right\}$.

Ta có $y = \dfrac{mx+2}{2x+m} \Rightarrow y' = \dfrac{m^2-4}{(2x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ khi và chỉ khi $y' < 0$, $\forall x \in (0;1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ -\dfrac{m}{2} \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ \left[\begin{array}{l} -\dfrac{m}{2} \leq 0 \\ -\dfrac{m}{2} \geq 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ \left[\begin{array}{l} m \geq 0 \\ m \leq 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 2.$$

Chọn phương án A

Câu 57. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x-m}$ nghịch biến trên $(4;+\infty)$. Tính tổng P của các giá trị m của S.

A $P = 10$. B $P = 9$. C $P = -9$. D $P = -10$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Ta có $y' = \dfrac{1-m}{(x-m)^2}$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(4;+\infty)$ khi chỉ khi

$$\begin{cases} y' < 0, \forall x \in (4;+\infty) \\ m \notin (4;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m < 0 \\ m \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \leq 4.$$

Vì m chỉ nhận giá trị nguyên nên $m = 2;3;4$. Suy ra $P = 2+3+4 = 9$.

Chọn phương án B

Câu 58. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{\sin 2x - 1}{\sin 2x + m}$ đồng biến trên $\left(-\dfrac{\pi}{12}; \dfrac{\pi}{4}\right)$.

A $m \geq -1$. B $m \geq \dfrac{1}{2}$. C $m > -1$. D $m > 1$.

Lời giải.

Vì $-\dfrac{\pi}{12} < x < \dfrac{\pi}{4}$ nên $-\dfrac{\pi}{6} < 2x < \dfrac{\pi}{2}$. Đặt $t = \sin 2x \Rightarrow -\dfrac{1}{2} < t < 1$. Khi đó ta có $y = \dfrac{t-1}{t+m}$.

Điều kiện $t \neq -m$. Do $-\dfrac{1}{2} < t < 1$ nên $\left[\begin{array}{l} -m \leq -\dfrac{1}{2} \\ -m \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq \dfrac{1}{2} \\ m \leq -1. \end{array}\right.$

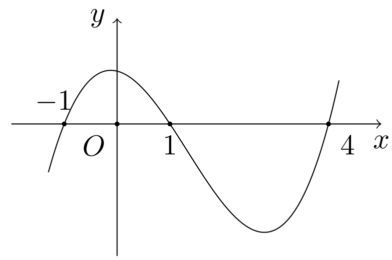
Ta có $y'_x = \dfrac{m+1}{(t+m)^2} \cdot t'_x$. Mà $t'_x = 2\cos 2x > 0$ với mọi $x \in \left(-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên để hàm số $y = \dfrac{t-1}{t+m}$ đồng biến trên $\left(-\dfrac{1}{2}; 1\right)$ thì điều kiện cần và đủ là

$$\begin{cases} \dfrac{m+1}{(t+m)^2} > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m \leq -1 \\ m \geq \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \dfrac{1}{2}.$$

Chọn phương án B

Câu 59.

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = f(|3-x|)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



A $(4;7)$. **B** $(2;3)$. **C** $(-1;2)$. **D** $(-\infty;-1)$.

Lời giải.

— Với $x > 3$, ta có $g(x) = f(x-3) \Rightarrow g'(x) = f'(x-3)$.
Hàm số $g(x)$ đồng biến khi và chỉ khi

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x-3) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x-3 < 1 \\ x-3 > 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < x < 4 \\ x > 7. \end{array}\right.$$

Vì $x > 3$ nên $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;4)$ hoặc $(7;+\infty)$.

— Với $x < 3$, ta có $g(x) = f(3-x) \Rightarrow g'(x) = -f'(3-x)$.
Hàm số $g(x)$ đồng biến khi và chỉ khi

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(3-x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-x < -1 \\ 1 < 3-x < 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 4 \\ -1 < x < 2. \end{array}\right.$$

Vì $x < 3$ nên $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

Chọn phương án C

Câu 60. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^2 + (5-2m)x - \dfrac{1}{x+1} - 3$ đồng biến trên $(-1;+\infty)$.

A $\forall m \in \mathbb{R}$. **B** $m \leq 6$. **C** $m \geq -3$. **D** $m \leq 3$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Khoảng cần xét thuộc vào tập xác định của hàm số với mọi số thực m.

Đạo hàm: $y' = 2x + 5 - 2m + \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} y' \geq 0,\ \forall x \in (-1;+\infty) &\Leftrightarrow 2x + 5 - 2m + \frac{1}{(x+1)^2} \geq 0,\ \forall x \in (-1;+\infty) \\ &\Leftrightarrow 2x + 5 + \frac{1}{(x+1)^2} \geq 2m,\ \forall x \in (-1;+\infty). \end{aligned}$$

Để hàm số đồng biến trên $(-1;+\infty)$ thì $2m \leq \min\limits_{(-1;+\infty)}$ với $g(x) = 2x + 5 + \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Ta xét hàm số $g(x) = 2x + 5 + \dfrac{1}{(x+1)^2}$ trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Đạo hàm: $g'(x) = 2 - \dfrac{2}{(x+1)^3} = \dfrac{2x^3+6x^2+6x}{(x+1)^3}$.
Xét $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3+6x^2+6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow g(0) = 6$.
Bảng biến thiên

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $2m \leq 6 \Leftrightarrow m \leq 3$.
Chọn phương án D

D MỨC ĐỘ 4

Câu 61. Cho phương trình $x^3-3x^2-2x+m-3+2\sqrt[3]{2x^3+3x+m} = 0$. Tập S là tập hợp các giá trị của m nguyên để phương trình có ba nghiệm phân biệt. Tính tổng các phần tử của S.

A. 15. B. 9. C. 0. D. 3.

Lời giải.
Ta có: $x^3-3x^2-2x+m-3+2\sqrt[3]{2x^3+3x+m} = 0 \Leftrightarrow (2x^3+3x+m)+2\sqrt[3]{2x^3+3x+m} = x^3+3x^2+5x+3$
$\Leftrightarrow (2x^3+3x+m)+2\sqrt[3]{2x^3+3x+m} = (x+1)^3+2(x+1)$ (1)
Xét hàm số $f(t) = t^3+2t$, TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$
có $f'(t) = 3t^2+2 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow y = f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Do đó: (1) $\Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{2x^3+3x+m}\right) = f(x+1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x^3+3x+m} = x+1 \Leftrightarrow m = -x^3+3x^2+1$ (2).
Xét hàm số $g(x) = -x^3+3x^2+1, \forall x \in \mathbb{R}$, ta có: $g'(x) = -3x^2+6x$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 1 < m < 5$.
Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in S = \{2;3;4\} \Rightarrow \sum m = 2+3+4 = 9$.
Chọn phương án B

Câu 62. Cho hàm số $y = \left|x^3-mx+1\right|$. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên m sao cho hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$. Tìm số phần tử của S.

A 3. **B** 10. **C** 1. **D** 9.

Lời giải.

Cách giải:

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - mx + 1$, $f'(x) = 3x^2 - m$.

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = |f(x)| = |x^3 - mx + 1|$ được dựng từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ bằng cách giữ lại phần đồ thị hàm số phái trên trục Ox và lấy đối xứng phần phái dưới Ox qua trục Ox (xóa bỏ phần đồ thị của $y = f(x)$ nằm phái dưới Ox).

TH1: Với $m = 0$ ta có hàm số $y = f(x) = x^3 + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Có $f(1) = 2 > 0 \Rightarrow$ Hàm số $y = |f(x)| = |x^3 - mx + 1|$ đồng biến trên $[1; +\infty)$.

$\Rightarrow m = 0$: thỏa mãn.

TH2: Với $m > 0$ ta có:

$f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$.

Bảng biến thiên

$$\begin{array}{c|ccccccc}
x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \\
\hline
y' & & + & 0 & - & 0 & + & \\
\hline
y & & & f(x_1) & & & & +\infty \\
 & -\infty & \nearrow & & \searrow & f(x_2) & \nearrow &
\end{array}$$

Để hàm số $y = |x^3 - mx + 1|$ đồng biến trên $[1; +\infty)$ thì

$$\begin{cases} m > 0 \\ x_1 < x_2 \le 1 \\ f(1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -\dfrac{m}{3} + 1 \ge 0 \\ 2 - m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \le 2.$$

Mà $m \in \mathbb{N} \Rightarrow m \in \{1; 2\}$.

Vậy, $S = \{0; 1; 2\}$. Số phần tử của S là 3.

Chọn phương án A

Câu 63. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-2)(x^2 - 6x + m)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $g(x) = f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

A 2010. **B** 2012. **C** 2011. **D** 2009.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} g'(x) &= -f'(1-x) = -(1-x)^2(1-x-2)\left[(1-x)^2 - 6(1-x) + m\right] \\ &= -(x-1)^2(-1-x)(x^2 + 4x + m - 5) = (x-1)^2(x+1)(x^2 + 4x + m - 5). \end{aligned}$$

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$

$$\Leftrightarrow \quad g'(x) \le 0 \text{ với mọi } x \in (-\infty; -1)$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\quad (x+1)(x^2+4x+m-5)\le 0 \text{ với mọi } x\in(-\infty;-1)\\
&\Leftrightarrow\quad x^2+4x+m-5\ge 0 \text{ với mọi } x\in(-\infty;-1) \text{ (Do } x\in(-\infty;-1)\Rightarrow x+1<0)\\
&\Leftrightarrow\quad h(x)=x^2+4x-5\ge -m \text{ với mọi } x\in(-\infty;-1)\\
&\Leftrightarrow\quad -m\le \min_{x\in(-\infty;-1]} h(x).
\end{aligned}$$

Ta có $h'(x)=2x+4$, $h'(x)=0\Leftrightarrow x=-2$. Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$\searrow$		-9		$\nearrow$

Do đó $-m\le -9\Leftrightarrow m\ge 9$. Mặt khác $m\in[-2019;2019]$ và m nguyên nên $m\in\{9;10;11;\cdots;2019\}$ hay có $2019-9+1=2011$ giá trị của m thỏa mãn.

Chọn phương án C

Câu 64. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Nếu phương trình $f(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt thì phương trình $2f(x)\cdot f''(x)=[f'(x)]^2$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

A 1 nghiệm. **B** 4 nghiệm. **C** 3 nghiệm. **D** 2 nghiệm.

Lời giải.

Xét đa thức bậc 4 $g(x)=2f(x)f''(x)-(f'(x)')^2$.

Ta có $g'(x)=2f(x)f'''(x)=12f(x)$.

Vì $g(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt nên $g(x)=0$ có tối đa bốn nghiệm.

Vậy phương trình $2f(x)f''(x)=[f'(x)]^2$ có tối đa bốn nghiệm.

Giả sử $x_1<x_2<x_3$ là ba nghiệm của $f(x)=0$.

Mà các nghiệm này đều phân biệt nên ta có $f'(x_1), f'(x_2), f'(x_3)$ đều khác 0.

Ta có

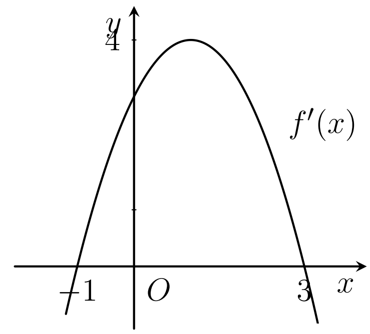
x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(x_1)$	$\nearrow$	$g(x_2)$	$\searrow$	$g(x_3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Nhận thấy:

$$\begin{aligned}
g(x_1)\ &=2f(x_1)f''(x_1)-\left(f'(x_1)\right)^2=-\left(f'(x_1)\right)^2<0\\
g(x_2)\ &=2f(x_2)f''(x_2)-\left(f'(x_2)\right)^2=-\left(f'(x_2)\right)^2<0\\
g(x_3)\ &=2f(x_3)f''(x_3)-\left(f'(x_3)\right)^2=-\left(f'(x_3)\right)^2<0
\end{aligned}$$

Nên từ bảng biến thiên suy ra phương trình $g(x) = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt.
Do đó phương trình $2f(x)f''(x) = [f'(x)]^2$ có đúng hai nghiệm phân biệt.
Chọn phương án B

Câu 65.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f\left(2x^4 - 1\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A $(1; +\infty)$. **B** $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. **C** $(-\infty; -1)$. **D** $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Lời giải.
Ta có $g'(x) = 8x^3 \cdot f'\left(2x^4 - 1\right)$
TH1: $x \geq 0$.
Để hàm số $g(x)$ đồng biến thì
$f'\left(2x^4 - 1\right) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq 2x^4 - 1 \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x^4 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt[4]{2} \leq x \leq \sqrt[4]{2}$
$\Rightarrow 0 \leq x \leq \sqrt[4]{2} \Leftrightarrow x \in \left[0; \sqrt[4]{2}\right]$.
TH2: $x < 0$.
Để hàm số $g(x)$ đồng biến thì
$$f'\left(2x^4 - 1\right) \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^4 - 1 \leq -1 \\ 2x^4 - 1 \geq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0(L) \\ x^2 \geq \sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq \sqrt[4]{2} \\ x \leq -\sqrt[4]{2}. \end{array}\right.$$
So sánh với điều kiện$x < 0 \Rightarrow x \leq -\sqrt[4]{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\sqrt[4]{2}\right]$.
Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left[0; \sqrt[4]{2}\right]$ và $\left(-\infty; -\sqrt[4]{2}\right]$.
Chọn phương án D

Câu 66. Tìm tất cả các giá trị khác nhau của tham số m để hàm số $y = \dfrac{5^{-x} + 2}{5^{-x} - m}$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

A $m < -2$. **B** $m \leq -2$. **C** $-2 < m \leq 1$. **D** $-2 < m < 1$.

Lời giải.
ĐK: $5^{-x} \neq m$. Đặt $t = 5^{-x}$ là hàm nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ (1), suy ra $t \in (1; +\infty)$.
Xét hàm số $y = f(t) = \dfrac{t + 2}{t - m}$, $f'(t) = \dfrac{-m - 2}{(t - m)^2}$.
Do (1), để hàm số $y = \dfrac{5^{-x} + 2}{5^{-x} - m}$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$ thì hàm số $f(t) = \dfrac{t + 2}{t - m}$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$
$$\Leftrightarrow f'(t) < 0, \forall t \in (1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m - 2 < 0 \\ m \notin (1, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq 1.$$
Chọn phương án C

Câu 67. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như bên dưới

x	$-\infty$		-1		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y = 3f(x+3) - x^3 + 12x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-1;0)$. **B** $(0;2)$. **C** $(-\infty;-1)$. **D** $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 3.f'(x+3) - 3x^2 + 12$.

Đặt $t = x+3 \Rightarrow x = t-3$ ta có $y' = 3f'(t) - 3(t-3)^2 + 12 = 3f'(t) - 3t^2 + 18t - 15$.

Để hàm số nghịch biến thì $y' < 0 \Leftrightarrow 3.f'(t) - 3t^2 + 18t - 15 < 0 \Leftrightarrow f'(t) < t^2 - 6t + 5$.

Ta chọn t sao cho $\begin{cases} f'(t) < 0 \\ t^2 - 6t + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < t < 1 \vee t > 5 \\ t < 1 \vee t > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < t < 1 \\ t > 5. \end{array}\right.$

Mà $t = x+3$ nên $\left[\begin{array}{l} -1 < t < 1 \\ t > 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x+3 < 1 \\ x+3 > 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 < x < -2 \\ x > 2. \end{array}\right.$

Vậy hàm số $y = 3f(x+3) - x^3 + 12x$ nghịch biến trên $(-4;2)$ và $(2;+\infty)$.

Chọn phương án D

Câu 68. Cho hai hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (3m^2+4m+5)x + 2019$ và $g(x) = (m^2+2m+5)x^3 - (2m^2+4m+9)x^2 - 3x + 2$ (với m là tham số). Hỏi phương trình $g(f(x)) = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A 9. **B** 0. **C** 3. **D** 1.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} g(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x-2)\left((m^2+2m+5)x^2 + x - 1\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x & = 2 \\ (m^2+2m+5)x^2 + x - 1 & = 0 \quad (*) \end{cases} \end{aligned}$$

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 2 với $\forall m$ vì $\begin{cases} m^2+2m+5 & > 0, \forall m \\ \Delta = 1 + (m^2+2m+5) & > 0, \forall m \\ (m^2+2m+5).2^2 + 2 - 1 & \neq 0, \forall m \end{cases}$

Vậy $g(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt (1).

Mặt khác, xét hàm số $y = f(x)$ ta có :

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 - 2(m+1)x + (3m^2+4m+5) \\ &= (x-(m+1))^2 + 2(m^2+m+2) > 0 \forall m \end{aligned}$$

$\Rightarrow y = f(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ với $\forall m$

Do $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 3 và đồng biến trên nên phương trình $f(x) = k$ luôn có 1 nghiệm duy nhất với mỗi số $k \in \mathbb{R}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $g(f(x)) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn phương án C

Câu 69. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2^{x-y} - 2^y + x = 2y \\ 2^x + 1 = \left(m^2+2\right).2^y.\sqrt{1-y^2} \end{cases}$ (1), m là tham số.

Gọi S là tập các giá trị nguyên để hệ (1) có một nghiệm duy nhất. Tập S có bao nhiêu phần tử?

A 0. **B** 1. **C** 3. **D** 2.

Lời giải.

Phương pháp:

+ Biến đổi phương trình thứ nhất của hệ để đưa về dạng $f(u) = f(v)$ mà f là hàm đơn điệu nên suy ra $u = v$.

Từ đó ta tìm được mối liên hệ giữa x và y.

+ Thay vào phương trình thứ hai ta được phương trình ẩn y. Lập luận phương trình này có nghiệm duy nhất thì hệ ban đầu sẽ có nghiệm duy nhất.

+ Biến đổi để chỉ ra nếu y_0 là nghiệm thì $-y_0$ cũng là nghiệm của phương trình ẩn y, từ đó suy ra $y_0 = 0$.

Thay vào phương trình để tìm m.

+ Sử dụng bất đẳng thức Cô-si để thử lại m.

Cách giải:

Điều kiện $1 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \in [-1;1]$.

+ Xét phương trình $2^{x-y} - 2^y + x = 2y \Leftrightarrow 2^{x-y} + x - y = 2^y + y$.

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t \Rightarrow f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 + 1 > 0; \forall t$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ đó $2^{x-y} + x - y = 2^y + y \Rightarrow f(x-y) = f(y) \Leftrightarrow x - y = y \Leftrightarrow x = 2y$.

+ Thay $x = 2y$ vào phương trình $2^x + 1 = \left(m^2+2\right) \cdot 2^y \cdot \sqrt{1-y^2}$, ta được

$$2^{2y} + 1 = \left(m^2+2\right) \cdot 2^y \cdot \sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow 4^y + 1 = \left(m^2+2\right) \cdot 2^y \cdot \sqrt{1-y^2} (*)$$

Để hệ phương trình (1) có một nghiệm duy nhất thì phương trình (*) có nghiệm duy nhất $y \in [-1;1]$

Giả sử $y_0 \in [-1;1]$ là một nghiệm của phương trình (*) thì ta có

$$4^{y_0} + 1 = \left(m^2+2\right) \cdot 2^{y_0} \cdot sqrt1 - y_0^2 (**)$$

Xét với $-y_0$ ta có $4^{-y_0} + 1 = \left(m^2+2\right) \cdot 2^{-y_0} \cdot \sqrt{1-(-y_0)^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{4^{y_0}} + 1 = \left(m^2+2\right) \dfrac{1}{2^{y_0}} \sqrt{1-y_0^2}$

$\Leftrightarrow 4^{y_0} + 1 = \left(m^2+2\right) \cdot 2^{y_0} \cdot \sqrt{1-y_0^2}$ (đúng do (**) hay $-y_0$ cũng là nghiệm của phương trình (*).

Do vậy để (*) có nghiệm duy nhất thì $y_0 = -y_0 \Leftrightarrow y_0 = 0$.

Thay $y = 0$ vào (*) ta được $4^0 + 1 = \left(m^2+2\right) \cdot 2^0 \sqrt{1-0^2} \Leftrightarrow m^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow m = 0$.

Thử lại: Thay $m = 0$ vào (*) ta được $4^y + 1 = 2 \cdot 2^y \sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow 2^y + \dfrac{1}{2^y} = 2\sqrt{1-y^2}$ (***)

Nhận thấy rằng vế trái (***) $= 2^y + \dfrac{1}{2^y} \overset{\text{Cô-si}}{\geq} 2\sqrt{2^y} \cdot \dfrac{1}{2^y} \Leftrightarrow VT(***) \geq 2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2^y = \dfrac{1}{2^y} \Leftrightarrow y = 0$

Và $VP(***) = 2\sqrt{1-y^2} \leq 2 \Leftrightarrow VP(***) = 2 \Leftrightarrow y = 0$.

Vậy phương trình (***) có nghiệm duy nhất $y = 0$.

Kết luận: Với $m = 0$ thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất nên tập S có một phần tử.

Chú ý:

Các em có thể làm bước thử lại như sau:

Thay $m = 0$ vào (*) ta được

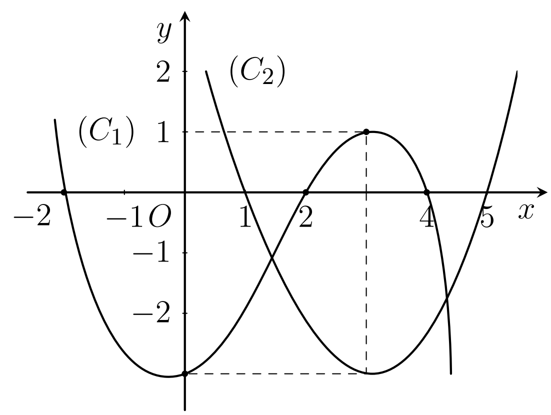
$4^y + 1 = 2.2^y\sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow (2^y)^2 - 2.2^y\sqrt{1-y^2} + 1 - y^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(2^y - \sqrt{1-y^2}\right)^2 + y^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^y - \sqrt{1-y^2} = 0 \\ y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^0 - \sqrt{1-0} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0.$

Chọn phương án B

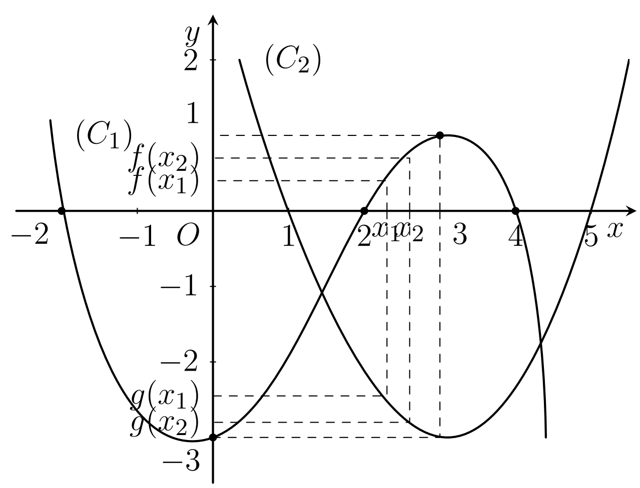
Câu 70.

Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị lần lượt là $(C_1), (C_2)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x).g(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A $(-\infty; 0)$. **B** $(4; 5)$. **C** $(2; 3)$. **D** $(0; 1)$.

Lời giải.



Ta xét khoảng $(2; 3)$, với mọi $x_1, x_2 \in (2; 3), x_1 < x_2$ ta có:

$$\begin{cases} 0 < f(x_1) < f(x_2) \\ 0 > g(x_1) > g(x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < f(x_1) < f(x_2) \\ 0 < -g(x_1) < -g(x_2). \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x_1).[-g(x_1)] < f(x_2).[-g(x_2)] \Rightarrow f(x_1).g(x_1) > f(x_2).g(x_2).$$

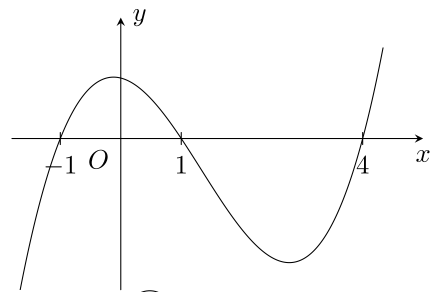
$$\Rightarrow y(x_1) > y(x_2).$$

Hay hàm số nghịch biến trên $(2; 3)$.

Chọn phương án C

Câu 71.

Cho hàm số $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$ trong đó m, n, p, q, $r \in \mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tập nghiệm của phương trình $f(x) = 16m + 8n + 4p + 2q + r$ có tất cả bao nhiêu phần tử?



A 5. **B** 3. **C** 4. **D** 6.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt là -1, 1 và 4. Suy ra $m \neq 0$.
Khi đó $f'(x) = 4m(x+1)(x-1)(x-4) = 4m(x^3 - 4x^2 - x + 4)$. Suy ra

$$f(x) = m\left(x^4 - \frac{16}{3}x^3 - 2x^2 + 16x\right) + C.$$

Đồng nhất với $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$ ta được $\begin{cases} n = -\dfrac{16m}{3} \\ p = -2m \\ q = 16m \\ r = C \end{cases}$.

Từ đó, $f(x) = 16m + 8n + 4p + 2q + r$
$\Leftrightarrow mx^4 - \dfrac{16m}{3}x^3 - 2mx^2 + 16mx + r = 16m + 8 \cdot \left(-\dfrac{16m}{3}\right) + 4 \cdot (-2m) + 2.16m + r$
$\Leftrightarrow mx^4 - \dfrac{16m}{3}x^3 - 2mx^2 + 16mx + \dfrac{8}{3}m = 0 \Leftrightarrow x^4 - \dfrac{16}{3}x^3 - 2x^2 + 16x + \dfrac{8}{3} = 0$ (vì $m \neq 0$).
Xét hàm số $g(x) = x^4 - \dfrac{16}{3}x^3 - 2x^2 + 16x + \dfrac{8}{3}$. Ta có

$$g'(x) = 4(x+1)(x-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = 4. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$\dfrac{37}{3}$	$\searrow$	$-\dfrac{152}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra: $g(x) = 0$ có 4 nghiệm.
Chọn phương án C

Câu 72. Tìm các mối liên hệ giữa các tham số a và b sao cho hàm số $y = f(x) = 2x + a\sin x + b\cos x$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$?

A $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. **B** $a + 2b \geq \frac{1+\sqrt{2}}{3}$. **C** $a^2 + b^2 \leq 4$. **D** $a + 2b = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = f'(x) = 2 + a\cos x - b\sin x$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2 + a\cos x + b\sin x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Mà $2 + a\cos x + b\sin x \geq 2 - \sqrt{a^2+b^2}, \forall x \in \mathbb{R}$ (dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{\cos x} = \frac{b}{\sin x} < 0$).

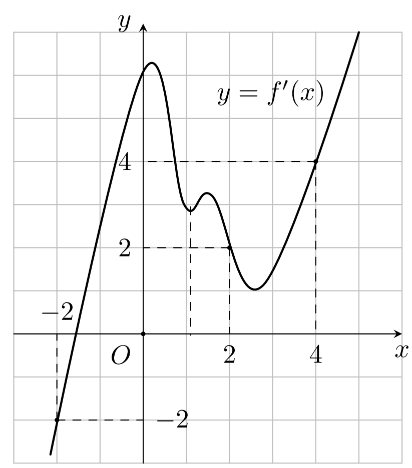
Do đó $\min\limits_{\mathbb{R}} f'(x) = 2 - \sqrt{a^2+b^2}$.

Suy ra $(*) \Leftrightarrow 2 - \sqrt{a^2+b^2} \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 4$.

Chọn phương án C

Câu 73.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xét hàm số $h(x) = 2f(3x+1) - 9x^2 - 6x + 4$. Hãy chọn khẳng định đúng.



A Hàm số $h(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B Hàm số $h(x)$ nghịch biến trên $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$.

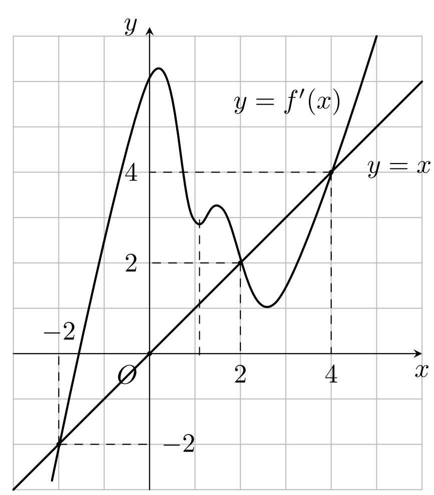
C Hàm số $h(x)$ đồng biến trên $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$.

D Hàm số $h(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $h'(x) = 6f'(3x+1) - 6(3x+1)$. Xét bất phương trình

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow 6f'(3x+1) - 6(3x+1) > 0 \Leftrightarrow f'(3x+1) > 3x + 1 \ (*).$$



Từ đồ thị trên ta vẽ thêm đường thẳng $y = x$.

Quan sát hình vẽ ta thấy:

Xét trên khoảng $(-2; 4)$ thì $f'(x) > x \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

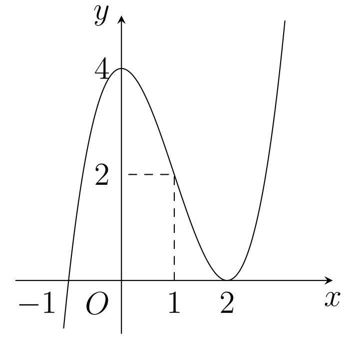
Do đó $(*) \Leftrightarrow -2 < 3x + 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < \frac{1}{3}$.

Vậy hàm số $h(x)$ đồng biến trên $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$.

Chọn phương án C

Câu 74.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ cắt Ox tại điểm $(2;0)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



(A) $(-1;+\infty)$. (B) $(-\infty;0)$. (C) $(-2;0)$. (D) $(-\infty;-1)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Từ đồ thị đã cho ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta nhận thấy hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

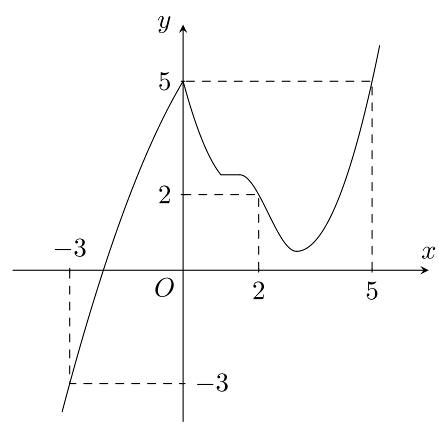
Chọn phương án (A)

Câu 75.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $g(x) = f(-2x+1)+(x+1)(-2x+4)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

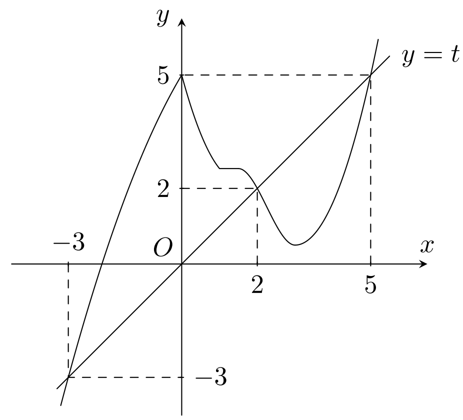
(A) $\left(-2;-\dfrac{1}{2}\right)$. (B) $(-\infty;-2)$.

(C) $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. (D) $\left(-\dfrac{1}{2};2\right)$.



Lời giải.

Ta có $g'(x) = -2f'(-2x+1) - 4x + 2$ nên
$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(-2x+1) < -2x+1 \Leftrightarrow f'(t) < t$.
Xét hàm số $y = f'(t)$ có đồ thị như hình vẽ và đường thẳng $y = t$.



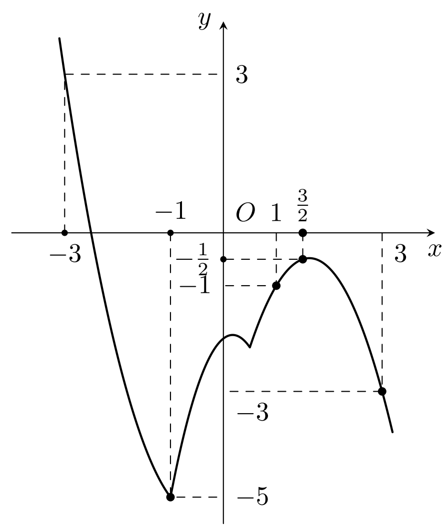
Ta có $f'(t) = t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3 \\ t = 2 \\ t = 5. \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị, ta có $f'(t) < t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < t < 5 \\ t < -3. \end{array}\right.$

Suy ra $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < -2x+1 < 5 \\ -2x+1 < -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < x < -\dfrac{1}{2} \\ x > 2. \end{array}\right.$

Chọn phương án A

Câu 76.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $y = f(1-x) + \dfrac{x^2}{2} - x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



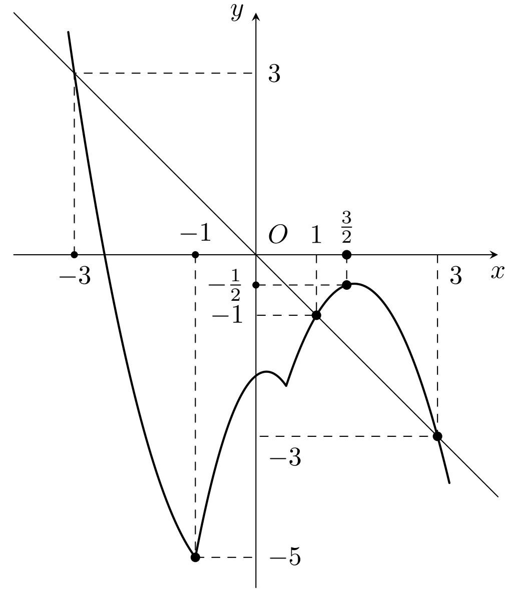
;

A $(-3;1)$. B $(-2;0)$. C $(1;3)$. D $\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có $y' = -f'(1-x) + x - 1$.
Hàm số đã cho nghịch biến khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & y' \le 0 \\ \Leftrightarrow\ & -f'(1-x) + x - 1 \le 0 \\ \Leftrightarrow\ & f'(1-x) \ge -(1-x) \end{aligned}$$



;

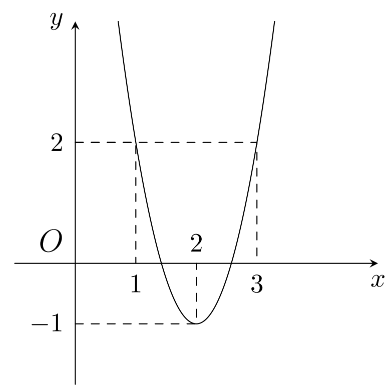
Đặt $t = 1 - x$, ta có $f'(t) \le -t$.
Dựa vào đồ thị $f'(t) \ge -t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \le -3 \\ 1 \le t \le 3. \end{array}\right.$

— $t \le -3 \Rightarrow 1 - x \le -3 \Leftrightarrow x \ge 4$.

— $1 \le t \le 3 \Rightarrow 1 \le 1 - x \le 3 \Leftrightarrow -2 \le x \le 0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên $[-2; 0]$ và $[4; +\infty)$.
Chọn phương án B

Câu 77.
Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x-2) + 2$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



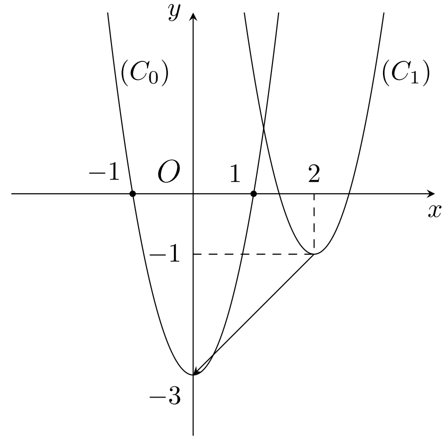
A $(-1; 1)$. **B** $(-\infty; 2)$. **C** $\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$. **D** $(2; +\infty)$.

Lời giải.

a) **Cách 1:**

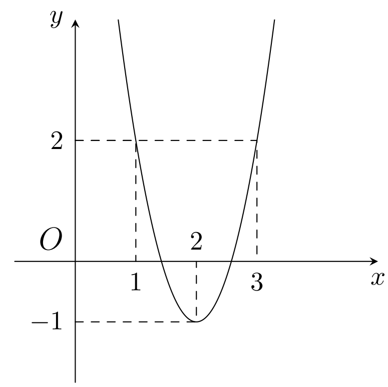
— Từ đồ thị (C_1) của hàm số $y = f'(x-2) + 2$ ta thu được đồ thị đồ thị (C_0) bằng cách tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{u} = (-2; -2)$.

— Từ đồ thị (C_0) của $y = f'(x)$ ta thấy $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.



b) **Cách 2:**

Hàm số nghịch biến khi $f'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x+2-2)+2 < 2 \quad (1)$.
Đặt $t = x+2$ thì (1) trở thành $f'(t-2)+2 < 2 \Leftrightarrow 1 < t < 3$.
Ta được $1 < x+2 < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.



Chọn phương án A

Câu 78. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \frac{1}{5}m^2x^5 - \frac{1}{3}mx^3 + 10x^2 - (m^2 - m - 20)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tổng các giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A $\frac{5}{2}$. **B** -2. **C** $\frac{1}{2}$. **D** $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= m^2x^4 - mx^2 + 20x - m^2 + m + 20 \\ &= (x+1)\left[m^2x^3 - m^2x^2 + (m^2-m)x - m^2 + m + 20\right] \\ &= (x+1)\left[(x+1)(m^2x^2 - 2m^2x + 3m^2 - m) - 4m^2 + 2m + 20\right]. \end{aligned}$$

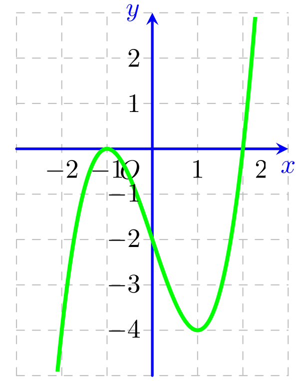
$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x+1=0 & (1) \\ (x+1)(m^2x^2 - 2m^2x + 3m^2 - m) - 4m^2 + 2m + 20 = 0 & (2) \end{array}\right.$.

Hàm số đồng biến trên R tương đương với $y' \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra $x = -1$ là nghiệm kép của $y' = 0$ tức là $x = -1$ là nghiệm của phương trình (2) $\Rightarrow -4m^2 + 2m + 20 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = \frac{5}{2} \end{array}\right.$.

Với $m = -2$, ta có $f'(x) = (x+1)^2 \cdot (4x^2 - 8x + 14) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Với $m = \frac{5}{2}$, ta có $f'(x) = \frac{5}{4}(x+1)^2 \cdot (5x^2 - 10x + 13) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Vậy $m = -2$ và $m = \frac{5}{2}$ đều thỏa yêu cầu bài toán. Do đó tổng cần tìm bằng $\frac{1}{2}$.
Chọn phương án C

Câu 79.

Cho hàm số $y = f(x)$có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Xét hàm số $g(x) = f\left(x^2 - 2\right)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?



(A) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;2)$.
(B) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.
(C) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.
(D) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)$.

Lời giải.

Xét $g(x) = f\left(x^2-2\right)$

$g'(x) = f'\left(x^2-2\right).2x$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'\left(x^2-2\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-2=-1 \\ x^2-2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

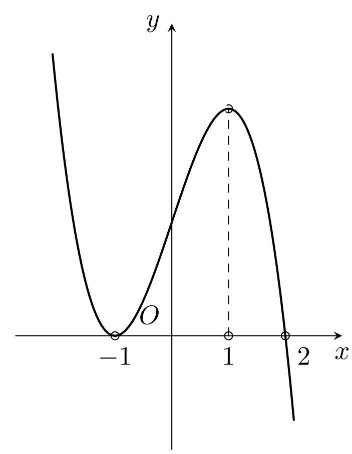
x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$ là sai.

Chọn phương án (D)

Câu 80.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Nhận xét nào đúng về hàm số $g(x) = f^2(x)$?



(A) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.
(B) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.
(C) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.
(D) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có

Phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$ trong đó $x=-1$ là nghiệm kép.

Phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$ và $f'(x) > 0$ khi $-1 < x < 1$.

Xét hàm số $g(x) = f^2(x)$ có $g'(x) = 2f(x).f'(x)$.

Giải phương trình

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f'(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta có $g'(x) > 0$ khi $x \in (-1;1) \cup (2;+\infty)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

Chọn phương án C

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. B	3. A	4. B	5. D	6. B	7. D	8. A	9. C	10. C
11. A	12. B	13. D	14. C	15. D	16. D	17. A	18. C	19. D	20. D
21. A	22. A	23. D	24. B	25. A	26. B	27. A	28. A	29. D	30. D
31. B	32. A	33. D	34. B	35. A	36. C	37. C	38. B	39. A	40. A
41. A	42. C	43. C	44. A	45. D	46. C	47. A	48. A	49. C	50. C
51. A	52. C	53. B	54. A	55. A	56. A	57. B	58. B	59. C	60. D
61. B	62. A	63. C	64. B	65. D	66. C	67. D	68. C	69. B	70. C
71. C	72. C	73. C	74. A	75. A	76. B	77. A	78. C	79. D	80. C

DẠNG 11. RÚT GỌN BIỂU THỨC LÔGARIT

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2\left(a^3\right)$ bằng

Ⓐ $\frac{3}{2}\log_2 a$. Ⓑ $\frac{1}{3}\log_2 a$. Ⓒ $3+\log_2 a$. Ⓓ $3\log_2 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_2\left(a^3\right)=3\log_2 a$.

Chọn phương án D

Câu 1. Giá trị của biểu thức $\log_2 5\cdot\log_5 64$ bằng

Ⓐ 6. Ⓑ 4. Ⓒ 5. Ⓓ 2.

Lời giải.

$\log_2 5\cdot\log_5 64=\log_2 64=\log_2 2^6=6$.

Chọn phương án A

Câu 2. Với a và b là hai số thực dương tùy ý, $\log(ab^2)$ bằng

Ⓐ $2\log a+\log b$. Ⓑ $\log a+2\log b$. Ⓒ $2(\log a+\log b)$. Ⓓ $\log a+\frac{1}{2}\log b$.

Lời giải.

$$\log(ab^2)=\log a+\log b^2=\log a+2\log b.$$

Chọn phương án B

Câu 3. Với a và b là hai số dương tùy ý, $\log_2(a^3b^4)$ bằng

Ⓐ $\frac{1}{3}\log_2 a+\frac{1}{4}\log_2 b$. Ⓑ $3\log_2 a+4\log_2 b$. Ⓒ $2\left(\log_3 a+\log_4 b\right)$. Ⓓ $4\log_2 a+3\log_2 b$.

Lời giải.

Ta có $\log_2\left(a^3b^4\right)=\log_2 a^3+\log_2 b^4=3\log_2 a+4\log_2 b$.

Chọn phương án B

Câu 4. Biết $\log_2 a=x$ và $\log_2 b=y$, biểu thức $\log_2\left(4a^2b^3\right)$ bằng

Ⓐ x^3y^2. Ⓑ $2x+3y+2$. Ⓒ x^2+y^3+4. Ⓓ $6xy$.

Lời giải.

Ta có $\log_2\left(4a^2b^3\right)=\log_2 4+\log_2 a^2+\log_2 b^3=2\log_2 a+3\log_2 b+2=2x+3y+2$.

Chọn phương án B

Câu 5. Cho a là số thực dương tùy ý khác 3, giá trị của $\log_{\frac{a}{3}}\left(\frac{a^2}{9}\right)$ bằng

Ⓐ $\frac{1}{2}$. Ⓑ $-\frac{1}{2}$. Ⓒ 2. Ⓓ -2.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{a}{3}}\left(\frac{a^2}{9}\right)=\log_{\frac{a}{3}}\left(\frac{a}{3}\right)^2=2$.

Chọn phương án C

Câu 6. Cho hai số thực a, b với $a > 0, a \neq 1, b \neq 0$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A $\log_{a^3}|b| = \dfrac{1}{2}\log_a|b|$. **B** $\dfrac{1}{2}\log_a b^2 = \log_a|b|$. **C** $\dfrac{1}{2}\log_a a^2 = 1$. **D** $\dfrac{1}{2}\log_a b^2 = \log_a b$.

Lời giải.

Dễ thấy các phương án A, B, C đều đúng theo tính chất logarit. Đáp án D sai vì chưa biết $b > 0$ hay $b < 0$.

Chọn phương án D

Câu 7. Cho các số thực a, b thỏa mãn $0 < a < 1 < b$. Tìm khẳng định **đúng**

A $\log_a b < 0$. **B** $\ln a > \ln b$. **C** $(0,5)^a < (0,5)^b$. **D** $2^a > 2^b$.

Lời giải.

Phương pháp:

Xét tính đúng sai của từng đáp án dựa vào điều kiện của a, b.

Cách giải:

a) $\log_a b < \log_a 1 = 0$ (vì $0 < a < 1$ và $b > 1$) nên $\log_a b < 0$ đúng.

b) $\ln a < \ln b$ vì $a < b$ nên $\ln a > \ln b$ sai.

c) Vì $0 < 0,5 < 1$ và $a < b$ nên $(0,5)^a > (0,5)^b$ nên $(0,5)^a < (0,5)^b$ sai.

d) Vì $2 > 1$ và $a < b$ nên $2^a < 2^b$ nên $2^a > 2^b$ sai.

Chọn phương án A

Câu 8. Cho a, b là hai số thực dương tùy ý và $b \neq 1$. Tìm kết luận **đúng**.

A $\ln a + \ln b = \ln(a+b)$. **B** $\ln(a+b) = \ln a \cdot \ln b$.

C $\ln a - \ln b = \ln(a-b)$. **D** $\log_b a = \dfrac{\ln a}{\ln b}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng tính chất của logarit nhận xét tính đúng sai của từng đáp án.

Cách giải:

a) $\ln a + \ln b = \ln(ab) \neq \ln(a+b)$ nên $\ln a + \ln b = \ln(a+b)$ sai.

b) $\ln(a+b) \neq \ln a \cdot \ln b$ nên $\ln(a+b) = \ln a \cdot \ln b$ sai.

c) $\ln a - \ln b = \ln\dfrac{a}{b} \neq \ln(a-b)$ nên $\ln a - \ln b = \ln(a-b)$ sai.

d) $\log_b a = \dfrac{\ln a}{\ln b}$ nên $\log_b a = \dfrac{\ln a}{\ln b}$ đúng.

Chọn phương án D

Câu 9. Với a, b là hai số thực dương tùy ý, $\ln\dfrac{a^4 e}{b}$ bằng

A $4\ln a - \ln b + 1$. **B** $4\ln b - \ln a + 1$. **C** $4\ln a + \ln b - 1$. **D** $4\ln a + \ln b + 1$.

Lời giải.

Ta có: $\ln \dfrac{a^4e}{b} = \ln a^4 + \ln e - \ln b = 4\ln a + 1 - \ln b = 4\ln a - \ln b + 1$.

Chọn phương án (A)

Câu 10. Cho $a, b > 0$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

(A) $\log\left(ab^2\right) = 2\log a + 2\log b$.
(B) $\log(ab) = \log a - \log b$.
(C) $\log(ab) = \log a \cdot \log b$.
(D) $\log\left(ab^2\right) = \log a + 2\log b$.

Lời giải.

Ta có $\log\left(ab^2\right) = \log a + \log b^2 = \log a + 2\log b$.

Chọn phương án (D)

Câu 11. Với a, b là các số thực dương tùy ý và a khác 1, đặt $P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $P = 27\log_a b$.
(B) $P = 15\log_a b$.
(C) $P = 9\log_a b$.
(D) $P = 6\log_a b$.

Lời giải.

Ta có $P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6 = 3\log_a b + \dfrac{6}{2}\log_a b = 3\log_a b + 3\log_a b = 6\log_a b$.

Chọn phương án (D)

Câu 12. Cho $a, b, c > 0, a \neq 1; b \neq 1$.Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

(A) $\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$.
(B) $\log_a b.\log_b c = \log_a c$.
(C) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.
(D) $\log_{a^c} b = c\log_a b$.

Lời giải.

Sai, vì $\log_{a^c} b = \dfrac{1}{c}\log_a b$.

Chọn phương án (D)

Câu 13. Tính giá trị của $a^{\log_{\sqrt{a}} 4}$ với $a > 0, a \neq 1$.

(A) 8.
(B) 4.
(C) 16.
(D) 2.

Lời giải.

Ta có $a^{\log_{\sqrt{a}} 4} = a^{2\log_a 4} = a^{\log_a 16} = 16$.

Chọn phương án (C)

Câu 14. Giá trị của biểu thức $P = \log_a\left(a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}\right)$ bằng

(A) 3.
(B) $\dfrac{3}{2}$.
(C) $\dfrac{1}{3}$.
(D) $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \log_a\left(a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}\right) \\ &= \log_a\left(a\sqrt[3]{a\cdot a^{\frac{1}{2}}}\right) \\ &= \log_a\left(a\sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}}\right) \\ &= \log_a\left(a\cdot a^{\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

$$= \log_a a^{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{3}{2}.$$

Chọn phương án C

Câu 15. Với a là số thực dương bất kì, mệnh đề nào dưới đây là đúng?

(A) $\ln 3a = \ln 3 + \ln a$.
(B) $\ln \frac{a}{3} = \frac{1}{3}\ln a$.
(C) $\ln a^5 = \frac{1}{5}\ln a$.
(D) $\ln(3+a) = \ln 3 + \ln a$.

Lời giải.

Ta có $\ln 3a = \ln 3 + \ln a$.

Chọn phương án A

Câu 16. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log a = x$, $\log b = y$. Tính $P = \log\left(a^2b^3\right)$

(A) $P = 6xy$.
(B) $p = x^2y^3$.
(C) $P = x^2 + y^3$.
(D) $P = 2x + 3y$.

Lời giải.

Ta có $\log\left(a^2b^3\right) = \log\left(a^2\right) + \log\left(b^3\right) = 2\log a + 3\log b = 2x + 3y$.

Chọn phương án D

Câu 17. Với các số thực dương x, y. Ta có 8^x, 4^4, 2 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân và các số $\log_2 45$, $\log_2 y$, $\log_2 x$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Khi đó y bằng

(A) 225.
(B) 15.
(C) 105.
(D) $\sqrt{105}$.

Lời giải.

Từ 8^x, 4^4, 2 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân nên công bội $q = \frac{2}{4^4} = \frac{1}{2^7}$

Suy ra $4^4 = 8^x \cdot \frac{1}{2^7} \Rightarrow x = 5$.

Mặt khác $\log_2 45$, $\log_2 y$, $\log_2 x$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng suy ra

$$\log_2 y = (\log_2 45 + \log_2 x) : 2 \Leftrightarrow \log_2 y = (\log_2 45 + \log_2 5) : 2 \Leftrightarrow \log_2 y = \log_2 \sqrt{225} \Leftrightarrow y = 15.$$

Chọn phương án B

Câu 18. Cho $a, b > 0$, $\log_3 a = p$, $\log_3 b = p$. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

(A) $\log_3\left(\frac{3^r}{a^mb^d}\right) = r + pm - qd$.
(B) $\log_3\left(\frac{3^r}{a^mb^d}\right) = r + pm + qd$.
(C) $\log_3\left(\frac{3^r}{a^mb^d}\right) = r - pm - qd$.
(D) $\log_3\left(\frac{3^r}{a^mb^d}\right) = r - pm + qd$.

Lời giải.

Ta có $\log_3\left(\frac{3}{a^mb^d}\right) = \log_3 3^r - \log_3\left(a^mb^d\right) = r - \log_3 a^m - \log_3 b^d = r - m\log_3 a - d\log_3 b$

Chọn phương án C

Câu 19. Cho $a = \log_3 2, b = \log_3 5$. Khi đó $\log 60$ bằng

(A) $\frac{-2a+b-1}{a+b}$.
(B) $\frac{2a+b+1}{a+b}$.
(C) $\frac{2a+b-1}{a+b}$.
(D) $\frac{2a-b-1}{a+b}$.

Lời giải.

Phương pháp: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}, \log_a b^c = c\log_a b$ (các biểu thức trên đều xác định).

Cách giải:

$\log 60 = \dfrac{\log_3 60}{\log_3 10} = \dfrac{\log_3 2^2 + \log_3 3 + \log_3 5}{\log_3 2 + \log_3 5} = \dfrac{2\log_3 2 + 1 + \log_3 5}{\log_3 2 + \log_3 5} = \dfrac{2a+b+1}{a+b}$.

Chọn phương án B

Câu 20. Cho $a, b, c > 0, a \neq 1$. Khẳng định nào **sai**?

(A) $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.
(B) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.
(C) $\log_a c = c \Leftrightarrow b = a^c$.
(D) $\log_a(b+c) = \log_a b + \log_a c$.

Lời giải.

Áp dụng tính chất của Logarit.

Chọn phương án D

B MỨC ĐỘ 2

Câu 21. Cho $a, b, c > 0, a, b \neq 1$. Tình $A = \log_a(b^2).log_b(\sqrt{bc}) - \log_a(c)$.

(A) $\log_a c$.
(B) 1.
(C) $\log_a b$.
(D) $\log_a bc$.

Lời giải.

Có: $A = \log_a(b^2).log_b(\sqrt{bc}) - \log_a(c) = 2log_a b.\dfrac{1}{2}\log_b(bc) - \log_a(c)$

$= 2log_a b.\dfrac{1}{2}(\log_b b + \log_b c) - \log_a(c)$

$= \log_a b.(1 + \log_b c) - \log_a c = \log_a b + \log_a b.\log_b c - \log_a c = \log_a b + \log_a c - \log_a c = \log_a b$.

Chọn phương án C

Câu 22. Cho a, b là hai số thực dương bất kỳ. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

(A) $\log_3(3ab)^3 = 3(1 + \log_3 a + \log_3 b)$.
(B) $\log_3(3ab)^3 = 3 + 3\log_3(ab)$.
(C) $\log_3(3ab)^3 = (1 + \log_3 a + \log_3 b)^3$.
(D) $\log_3(3ab)^3 = 3 + \log_3(ab)^3$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \log_3(3ab)^3 &= 3(\log_3 3 + \log_3 a + \log_3 b) \\ &= 3(1 + \log_3 a + \log_3 b) \\ &= 3 + 3\log_3 ab \\ &= 3 + \log_3(ab)^3. \end{aligned}$$

Chọn phương án C

Câu 23. Cho a là số thực dương khác 5. Tính $I = \log_{\frac{a}{5}}\left(\dfrac{a^3}{125}\right)$.

(A) $I = -\dfrac{1}{3}$.
(B) $I = -3$.
(C) $I = \dfrac{1}{3}$.
(D) $I = 3$.

Lời giải.

Ta có $I = \log_{\frac{a}{5}}\left(\dfrac{a^3}{125}\right) = \log_{\frac{a}{5}}\left(\dfrac{a}{5}\right)^3 = 3\log_{\frac{a}{5}}\left(\dfrac{a}{5}\right) = 3$.

Chọn phương án D

Câu 24. Đặt $\log_3 2 = a$ khi đó $\log_{16} 27$ bằng

Ⓐ $\dfrac{3a}{4}$. Ⓑ $\dfrac{3}{4a}$. Ⓒ $\dfrac{4}{3a}$. Ⓓ $\dfrac{4a}{3}$.

Lời giải.

$$\log_{16} 27 = \log_{2^4} 3^3 = \frac{3}{4}\log_2 3 = \frac{3}{4\log_3 2} = \frac{3}{4a}.$$

Chọn phương án Ⓑ

Câu 25. Cho $\log_2 3 = a$ và $\log_2 5 = b$, khi đó $\log_{15} 8$ bằng

Ⓐ $\dfrac{a+b}{3}$. Ⓑ $\dfrac{1}{3(a+b)}$. Ⓒ $3(a+b)$. Ⓓ $\dfrac{3}{a+b}$.

Lời giải.

$\log_{15} 8 = 3\log_{15} 2 = \dfrac{3}{\log_2 15} = \dfrac{3}{\log_2 3 + \log_2 5} = \dfrac{3}{a+b}$.

Chọn phương án Ⓓ

Câu 26. Rút gọn biểu thức $B = \log_{\frac{1}{a}} \dfrac{a.\sqrt[4]{a^3}.\sqrt[3]{2}}{\sqrt{a}.\sqrt[4]{a}}$, (giả sử tất cả các điều kiện đều được thỏa mãn) ta được kết quả là

Ⓐ $\dfrac{60}{91}$. Ⓑ $-\dfrac{91}{60}$. Ⓒ $\dfrac{3}{5}$. Ⓓ $-\dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

Ta có $B = \log_{\frac{1}{a}} \dfrac{a \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a}} = \log_{a^{-1}} \dfrac{a \cdot a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}}} = \log_{a^{-1}} \dfrac{a^{\frac{29}{12}}}{a^{\frac{3}{4}}} = \log_{a^{-1}} a^{\frac{5}{3}} = -\dfrac{5}{3}$.

Chọn phương án Ⓓ

Câu 27. Cho $\log_a b = 2$; $\log_a c = 3$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_a \left(ab^3c^3\right)$.

Ⓐ $P = 251$. Ⓑ $P = 21$. Ⓒ $P = 22$. Ⓓ $P = 252$.

Lời giải.

Ta có $P = \log_a \left(ab^3c^3\right) = \log_a a + \log_a b^3 + \log_a c^3 = 1 + 3\log_a b + 5\log_a c = 1 + 3\cdot 2 + 5\cdot 3 = 22$.

Chọn phương án Ⓒ

Câu 28. Đặt $a = \log_7 11, b = \log_2 7$. Hãy biểu diễn $\log_{\sqrt[3]{7}} \dfrac{121}{8}$ theo a và b.

Ⓐ $\log_{\sqrt[3]{7}} \dfrac{121}{8} = 6a + \dfrac{9}{b}$. Ⓑ $\log_{\sqrt[3]{7}} \dfrac{121}{8} = 6a - \dfrac{9}{b}$.

Ⓒ $\log_{\sqrt[3]{7}} \dfrac{121}{8} = 6a - 9b$. Ⓓ $\log_{\sqrt[3]{7}} \dfrac{121}{8} = \dfrac{2}{3}a - \dfrac{9}{b}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\sqrt[3]{7}} \dfrac{121}{8} = 3\left(\log_7 121 - \log_7 8\right) = 6\log_7 11 - 9\log_7 2 = 6\cdot\log_7 11 - 9\cdot\dfrac{1}{\log_2 7} = 6a - \dfrac{9}{b}$.

Chọn phương án Ⓑ

Câu 29. Cho số thực $a > 0$, $a \neq 1$. Giá trị của $\log_{a^2}\left(\sqrt[7]{a^3}\right)$ bằng

Ⓐ $\dfrac{3}{14}$. Ⓑ $\dfrac{6}{7}$. Ⓒ $\dfrac{3}{8}$. Ⓓ $\dfrac{7}{6}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{a^2}\left(\sqrt[7]{a^3}\right) = \dfrac{1}{2}\log_a a^{\frac{3}{7}} = \dfrac{3}{14}\log_a a = \dfrac{3}{14}$.

Chọn phương án Ⓐ

Câu 30. Đặt $\log_5 2 = a$. Khi đó $\log_{25} 800$ bằng.

(A) $\dfrac{5a+2}{2}$. (B) $\dfrac{2a-5}{2}$. (C) $\dfrac{5a-2}{2}$. (D) $\dfrac{2a+5}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{25} 800 = \dfrac{\log_5 800}{\log_5 25} = \dfrac{\log_5 2^5 \cdot 5^2}{\log_5 5^2} = \dfrac{5\log_5 2 + 2}{2} = \dfrac{5a+2}{2}$.

Chọn phương án (A)

Câu 31. Đặt $a = \log_3 2$, khi đó $\log_6 48$ bằng

(A) $\dfrac{3a-1}{a-1}$. (B) $\dfrac{3a+1}{a+1}$. (C) $\dfrac{4a-1}{a-1}$. (D) $\dfrac{4a+1}{a+1}$.

Lời giải.

$\log_6 48 = \log_6 3 + \log_6 16 = \dfrac{1}{\log_3 2 + 1} + \dfrac{4}{\log_2 3 + 1} = \dfrac{1}{a+1} + \dfrac{4}{\dfrac{1}{a}+1} = \dfrac{4a+1}{a+1}$.

Chọn phương án (D)

Câu 32. Tính giá trị biểu thức: $P = \log_{a^2} a^{10}b^2 + \log_{\sqrt{a}}\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}\right) + \log_{\sqrt[3]{b}} b^{-2}$ (Với $0 < a \neq 1; 0 < b \neq 1$)

(A) $\sqrt{3}$. (B) 1. (C) $\sqrt{2}$. (D) 2.

Lời giải.

Ta có

$P = \log_{a^2}\left(a^{10}b^2\right) + \log_{\sqrt{a}}\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}\right) + \log_{\sqrt[3]{b}}\left(b^{-2}\right)$.

$= \log_{a^2} a^{10} + \log_{a^2} b^2 + \log_{\sqrt{a}} a - \log_{\sqrt{a}} \sqrt{b} - 2\log_{\frac{1}{3}} b$.

$= 5 + \log_a b + 2 - \log_a b - 6 = 1$.

Chọn phương án (B)

Câu 33. Cho các số thực dương a, b với $a \neq 1$ và $\log_a b > 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\left[\begin{array}{l} 0 < a, b < 1 \\ 0 < a < 1 < b \end{array}\right.$. (B) $\left[\begin{array}{l} 0 < a, b < 1 \\ 1 < a, b \end{array}\right.$. (C) $\left[\begin{array}{l} 0 < a, b < 1 \\ 0 < b < 1 < a \end{array}\right.$. (D) $\left[\begin{array}{l} 0 < b < 1 < a \\ 1 < a, b \end{array}\right.$.

Lời giải.

TH1: $0 < a < 1 \Rightarrow \log_a b > 0 = \log_a 1 \Leftrightarrow 0 < b < 1$.

TH2: $a > 1 \Rightarrow \log_a b > 0 = \log_a 1 \Leftrightarrow b > 1$.

Vậy $\left[\begin{array}{l} 0 < a, b < 1 \\ 1 < a, b. \end{array}\right.$

Chọn phương án (B)

Câu 34. Đặt $a = \log_2 5, b = \log_3 5$. Hãy biểu diễn $\log_6 5$ theo a và b.

(A) $\log_6 5 = \dfrac{1}{a+b}$. (B) $\log_6 5 = \dfrac{ab}{a+b}$. (C) $\log_6 5 = a^2 + b^2$. (D) $\log_6 5 = a + b$.

Lời giải.

Ta có $\log_6 5 = \dfrac{1}{\log_5 6} = \dfrac{1}{\log_5 2 + \log_5 3} = \dfrac{1}{\frac{1}{\log_2 5} + \dfrac{1}{\log_3 5}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} = \dfrac{ab}{a+b}$.

Chọn phương án (B)

Câu 35. Với a là số thực dương bất kì, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log(2018a) = 2018\log a$.
B. $\log a^{2018} = \dfrac{1}{2018}\log a$.
C. $\log(2018a) = \dfrac{1}{2018}\log a$.
D. $\log a^{2018} = 2018\log a$.

Lời giải.

Phương pháp

Sử dụng các công thức: $\log ab = \log a + \log b$; $\log a^n = n\log a$

Cách giải:

Ta có: $\log(2018a) = \log 2018 + \log a$

$\log a^{2018} = 2018\log a$.

Chọn phương án D

Câu 36. Số thực x thỏa mãn $\log_2(\log_4 x) = \log_4(\log_2 x) - a$, với $a \in \mathbb{R}$. Giá trị của $\log_2 x$ bằng bao nhiêu?

A. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^a$.
B. a^2.
C. 2^{1-a}.
D. 4^{1-a}.

Lời giải.

Ta có $\log_2(\log_4 x) = \log_4(\log_2 x) - a \Leftrightarrow \log_2\left(\dfrac{1}{2}\log_2 x\right) = \dfrac{1}{2}\log_2(\log_2 x) - a$

$$\Leftrightarrow \log_2(\log_2 x) - 1 = \frac{1}{2}\log_2(\log_2 x) - a$$
$$\Leftrightarrow \log_2(\log_2 x) = 2 - 2a$$
$$\Leftrightarrow \log_2 x = 2^{2-2a} = 4^{1-a}.$$

Chọn phương án D

Câu 37. Cho $\log_{12} 3 = a$. Tính $\log_{24} 18$ theo a

A. $\dfrac{3a-1}{3-a}$.
B. $\dfrac{3a+1}{3-a}$.
C. $\dfrac{3a+1}{3+a}$.
D. $\dfrac{3a-1}{3+a}$.

Lời giải.

— $a = \log_{12} 3 = \dfrac{\log_2 3}{\log_2 12} = \dfrac{\log_2 3}{\log_2(2^2\cdot 3)} = \dfrac{\log_2 3}{\log_2(2^2) + \log_2 3} = \dfrac{\log_2 3}{2 + \log_2 3} \Rightarrow \log_2 3 = \dfrac{2a}{1-a}$.

— $\log_{24} 18 = \dfrac{\log_2 18}{\log_2 24} = \dfrac{\log_2(2.3^2)}{\log_2(2^2\cdot 3)} = \dfrac{1 + 2\log_2 3}{3 + \log_2 3} = \dfrac{1 + 2\cdot\dfrac{2a}{1-a}}{3 + \dfrac{2a}{1-a}} = \dfrac{3a+1}{3-a}$.

Chọn phương án B

Câu 38. Đặt $a = \log_2 5$ và $b = \log_3 5$. Biểu diễn đúng $\log_6 5$ của theo a, b là

A. $\dfrac{1}{a+b}$.
B. $a+b$.
C. $\dfrac{ab}{a+b}$.
D. $\dfrac{a+b}{ab}$.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng các công thức: $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$; $\log_a b + \log_a c = \log_a bc\ (0 < a, b \neq 1; c > 0)$.

Cách giải: Ta có:

$\log_5 2 = \dfrac{1}{\log_2 5} = \dfrac{1}{a}$.

$\log_5 3 = \dfrac{1}{\log_3 5} = \dfrac{1}{b}$.

$\log_6 5 = \dfrac{1}{\log_5 6} = \dfrac{1}{\log_5 2 + \log_5 3} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} = \dfrac{ab}{a+b}$.

Chọn phương án C

Câu 39. Cho các số thực a, b thỏa mãn $0 < a < 1 < b$. Tìm khẳng định đúng:

A $\ln a > \ln b$. **B** $(0,5)^a < (0,5)^b$. **C** $\log_a b < 0$. **D** $2^a > 2^b$.

Lời giải.

Ta có:

a) $\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b$ (sai vì $0 < a < b < 1$).

b) $(0,5)^a < (0,5)^b \Leftrightarrow a > b$ (sai vì $0 < a < b < 1$).

c) $\log_a b < 0 \Leftrightarrow b > 1$ (đúng vì $0 < a < 1 < b$).

d) $2^a > 2^b \Leftrightarrow a > b$ (sai vì $0 < a < 1 < b$).

Chọn phương án C

Câu 40. Với $a = \log_2 7$, $b = \log_5 7$. Tính giá trị của $\log_{10} 7$.

A $\dfrac{ab}{a+b}$. **B** $\dfrac{1}{a+b}$. **C** $a+b$. **D** $\dfrac{a+b}{ab}$.

Lời giải.

Biến đổi $\log_{10} 7 = \dfrac{1}{\log_7 10} = \dfrac{1}{\log_7 2 + \log_7 5} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} = \dfrac{ab}{a+b}$.

Chọn phương án A

Câu 41. Với a, b là hai số thực dương. Khi đó, $\log\left(a^2 b\right)$ bằng

A $2\log a - \log b$. **B** $2\log a + b$. **C** $2\log a + \log b$. **D** $2\log b + \log a$.

Lời giải.

Ta có $\log\left(a^2 b\right) = \log a^2 + \log b = 2\log a + \log b$.

Chọn phương án C

C MỨC ĐỘ 3

Câu 42. Cho $a > 0$, $b > 0$ thỏa mãn $a^2 + 4b^2 = 5ab$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $2\log(a+2b) = 5(\log a + \log b)$. **B** $\log(a+1) + \log b = 1$.

C $2\log\dfrac{a+2b}{3} = \dfrac{\log a + \log b}{2}$. **D** $\log(a+2b) = \log a - \log b$.

Lời giải.

Ta có $a^2 + 4b^2 = 5ab \Leftrightarrow (a+2b)^2 = 9ab$.

Logarit cơ số 10 hai vế ta được

$$\log(a+2b)^2 = \log(9ab) \quad \Leftrightarrow \quad 2\log(a+2b) = \log 9 + \log a + \log b$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ 2(\log(a+2b)-\log 3)=\log a+\log b\\&\Leftrightarrow\ 2\log\frac{a+2b}{3}=\frac{\log a+\log b}{2}.\end{aligned}$$

Chọn phương án C

Câu 43. Cho a, b là các số dương thỏa mãn $\log_9 a=\log_{16} b=\log_{12}\dfrac{5b-a}{2}$. Tính giá trị $T=\dfrac{a}{b}$.

A $T=\dfrac{3+\sqrt{6}}{4}$. **B** $T=7-2\sqrt{6}$. **C** $T=7+2\sqrt{6}$. **D** $T=\dfrac{3-\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải.

Đặt $\log_9 a=\log_{16} b=\log_{12}\dfrac{5b-a}{2}=t$, ta được $a=9^t$, $b=16^t$, $\dfrac{5b-a}{2}=12^t$.

Suy ra $\dfrac{5\cdot 16^t-9^t}{2}=12^t\Leftrightarrow 5\cdot 16^t-2\cdot 12^t-9^t=0\Leftrightarrow 5-2\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^t-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2t}\Leftrightarrow\left(\dfrac{3}{4}\right)^t=\sqrt{6}-1$.

Do đó $\dfrac{a}{b}=\dfrac{9^t}{16^t}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2t}=(\sqrt{6}-1)^2=7-2\sqrt{6}$.

Chọn phương án B

Câu 44. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log_4(x+y)+\log_4(x-y)\ge 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2x-y$.

A 4. **B** -4. **C** $2\sqrt{3}$. **D** $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x+y>0\\x-y>0\end{cases}$. Từ đó suy ra $x>0$.

$\log_4(x+y)+\log_4(x-y)\ge 1\Leftrightarrow\log_4\left(x^2-y^2\right)\ge 1\Leftrightarrow x^2-y^2\ge 4\Leftrightarrow x\ge\sqrt{y^2+4}$ (do $x>0$).

$P=2x-y\ge 2\sqrt{y^2+4}-y$ với $y\in\mathbb{R}$.

Xét hàm số $f(y)=2\sqrt{y^2+4}-y$ với $y\in\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$f'(y)=\dfrac{2y}{\sqrt{y^2+4}}-1=\dfrac{2y-\sqrt{y^2+4}}{\sqrt{y^2+4}}$; $f'(y)=0\Leftrightarrow 2y=\sqrt{y^2+4}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 0\\y^2=\dfrac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Bảng biến thiên

y	$-\infty$		$\frac{2}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(y)$		$-$	0	$+$	
$f(y)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min\limits_{y\in\mathbb{R}} f(y)=2\sqrt{3}=f\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$

Suy ra $P\ge 2\sqrt{3}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x=\sqrt{y^2+4}\\y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\\y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}.\end{cases}$

Vậy $\min P=2\sqrt{3}$ đạt được khi $(x;y)=\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}};\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Chọn phương án (C)

Câu 45. Cho $a > 0, b > 0$ thoả mãn $\log_{16}(a+3b) = \log_9 a = \log_{12} b$. Giá trị của $\dfrac{a^3 - ab^2 + b^3}{a^3 + a^2b + 3b^3}$ bằng

(A) $\dfrac{6-\sqrt{13}}{11}$. (B) $\dfrac{82-17\sqrt{13}}{69}$. (C) $\dfrac{5-\sqrt{13}}{6}$. (D) $\dfrac{3-\sqrt{13}}{11}$.

Lời giải.

Đặt $t = \log_{16}(a+3b) = \log_9 a = \log_{12} b$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 16^t = a + 3b \\ 9^t = a \\ 12^t = b \end{cases} \Rightarrow 9^t + 3.12^t = 16^t \Rightarrow \left(\frac{9}{16}\right)^t + 3\left(\frac{3}{4}\right)^t = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^t = \frac{-3+\sqrt{13}}{2} = \frac{a}{b}$$

Vậy $\dfrac{a^3 - ab^2 + b^3}{a^3 + a^2b + 3b^3} = \dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^3 - \frac{a}{b} + 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^3 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 3} = \dfrac{5-\sqrt{13}}{6}$.

Chọn phương án (C)

Câu 46. Cho $a, b > 0; a, b \neq 1; a \neq b^2$. Biểu thức $P = \log_{\sqrt{a}} b^2 + \dfrac{2}{\log_{\frac{a}{b^2}} a}$ có giá trị bằng

(A) 6. (B) 4. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Ta có

$P = \log_{\sqrt{a}} b^2 + \dfrac{2}{\log_{\frac{a}{b^2}} a} = 4\log_a b + 2\log_a \dfrac{a}{b^2} = 4\log_a b + 2\left(\log_a a - 2\log_a b\right) = 2$.

Chọn phương án (C)

Câu 47. Cho các số thực a, b thỏa mãn $1 < a < b$ và $\log_a b + \log_b a^2 = 3$. Tính giá trị của biểu thức $T = \log_{ab} \dfrac{a^2+b}{2}$.

(A) $\dfrac{1}{6}$. (B) $\dfrac{3}{2}$. (C) 6. (D) $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\log_a b + \log_b a^2 = 3 \Leftrightarrow \log_a b + 2\log_b a = 3$. (1)

Đặt $t = \log_a b$. Do $1 < a < b \Leftrightarrow t > \log_a b \Rightarrow t > 1$.

Khi đó (1) trở thành: $t + \dfrac{2}{t} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \text{ (không thỏa)} \\ t = 2 \text{ (thỏa)} \end{array}\right.$.

Với $t = 2$ ta có $\log_a b = 2 \Leftrightarrow b = a^2$.

Suy ra $T = \log_{ab} \dfrac{a^2+b}{2} = \log_{a^3} a^2 = \dfrac{2}{3}\log_a a = \dfrac{2}{3}$.

Chọn phương án (D)

Câu 48. Cho tập hợp $A = \{2^k | k = \overline{1..10}\}$ có 10 phần tử là các lũy thừa của 2. Chọn ngẫu nhiên từ tập A hai số khác nhau a và b. Xác suất để $\log_a b$ là một số nguyên bằng

(A) $\dfrac{17}{90}$. (B) $\dfrac{3}{10}$. (C) $\dfrac{1}{5}$. (D) $\dfrac{19}{90}$.

Lời giải.

$n(\Omega) = A_{10}^2 = 90$.
Gọi B: "$\log_a b$ là một số nguyên".
Ta có: $\log_a b$ là một số nguyên $\Leftrightarrow b = a^n$ với $a \neq 1$ và $n \in \mathbb{N}$.
$a = 2$ thì b có 10 cách chọn.
$a = 2^2$ thì b có 5 cách chọn.
$a = 2^3$ thì b có 3 cách chọn.
$a = 2^4$ thì b có 2 cách chọn.
$a = 2^5$ thì b có 2 cách chọn.
$a = 2^6$ thì b có 1 cách chọn.
$a = 2^7$ thì b có 1 cách chọn.
$a = 2^7$ thì b có 1 cách chọn.
$a = 2^8$ thì b có 1 cách chọn.
$a = 2^9$ thì b có 1 cách chọn.
$a = 2^{10}$ thì b có 1 cách chọn.
Suy ra $n(B) = 27$.
$P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{10}$.
Chọn phương án B

Câu 49. Cho $a\log_6 3 + b\log_6 2 + c\log_6 5 = 5$ với a, b, c là các số tự nhiên. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A $a = b$. **B** $a > b > c$. **C** $b < c$. **D** $c = b$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $3^a.2^b.5^c = 5$. Do $a, b, c \in \mathbb{N}$ nên chỉ có 1 bộ số $(a; b; c) = (0; 0; 1)$ thỏa mãn.
Chọn phương án A

Câu 50. Cho x, y là các số dương lớn hơn 1 thỏa mãn $x^2 + 9y^2 = 6xy$. Tính $M = \dfrac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2\log_{12}(x + 3y)}$.

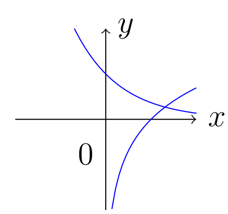
A $M = \dfrac{1}{2}$. **B** $M = \dfrac{1}{3}$. **C** $M = \dfrac{1}{4}$. **D** $M = 1$.

Lời giải.

Ta có $x^2 + 9xy = 6xy \Leftrightarrow (x - 3y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3y$.
Khi đó $M = \dfrac{1 + 2\log_{12} 3y + \log_{12} y}{2\log_{12} 6y} = \dfrac{\log_{12} 12y + \log_{12} 3y}{\log_{12} 36y^2} = \dfrac{\log_{12} 36y^2}{\log_{12} 36y^2} = 1$
Chọn phương án D

Câu 51.

Cho hai hàm số $y = a^x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A $a; b > 1$. **B** $0 < a; b < 1$. **C** $0 < a < 1 < b$. **D** $0 < b < 1 < a$.

Câu 52. Tính giá trị của biểu thức $T = \log_4 \left(2^{-2016}.2^{16}.\sqrt{2}\right)$

A $T = -\dfrac{3999}{4}$. **B** $T = -\dfrac{3999}{2}$. **C** T không xác định. **D** $T = -2016$.

Lời giải.

$T=\log_4\left(2^{-\frac{3999}{2}}\right)=-\dfrac{3999}{4}$.

Chọn phương án A

Câu 53. Đặt $\log_2 60=a$ và $\log_5 15=b$. Tính $P=\log_2 12$ theo a và b.

(A) $P=\dfrac{ab+a-2}{b}$. (B) $P=\dfrac{ab-a+2}{b}$. (C) $P=\dfrac{ab+2a+2}{b}$. (D) $P=\dfrac{ab+a+2}{b}$.

Lời giải.

Ta có: $\log_2 60=2+\log_2 3+\log_2 5=a$ và $\log_5 15=1+\log_5 3=1+\dfrac{\log_2 3}{\log_2 5}=b$

Suy ra $\log_2 3=\dfrac{ab-a-2b+2}{b}$

Vậy $P=\log_2 12=2+\log_2 3=2+\dfrac{ab-a-2b+2}{b}=\dfrac{ab-a+2}{b}$

Chọn phương án B

Câu 54. Đặt $\log_2 3=a$ và $\log_2 5=b$. Tính $P=\log_3 240$ theo a và b.

(A) $P=\dfrac{a+2b+3}{a}$. (B) $P=\dfrac{2a+b+3}{a}$. (C) $P=\dfrac{a+b+3}{a}$. (D) $P=\dfrac{a+b+4}{a}$.

Lời giải.

Ta có: $P=\log_3 240=1+4\log_3 2+\log_3 5=1+4\dfrac{1}{\log_2 3}+\dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}=1+\dfrac{4}{a}+\dfrac{b}{a}=\dfrac{a+b+4}{a}$.

Chọn phương án D

Câu 55. Cho $c=\log_{15}3$. Hãy tính $\log_{25}15$ theo c.

(A) $\log_{25}15=\dfrac{1}{2-c}$. (B) $\log_{25}15=\dfrac{1}{2(c-1)}$. (C) $\log_{25}15=\dfrac{1}{2(1-c)}$. (D) $\log_{25}15=\dfrac{1}{2(1+c)}$.

Lời giải.

$c=\log_{15}3=\dfrac{1}{\log_3 15}=\dfrac{1}{\log_3(3\cdot 5)}=\dfrac{1}{1+\log_3 5}\Rightarrow \log_3 5=\dfrac{1-c}{c}$.

$\log_{25}15=\log_{5^2}15=\dfrac{1}{2}\log_5 15=\dfrac{1}{2}\log_5(5\cdot 3)=\dfrac{1}{2}(1+\log_5 3)=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{c}{1-c}\right)=\dfrac{1}{2(1-c)}$.

Chọn phương án C

Câu 56. Tính giá trị của biểu thức $P=\log(\tan 1^\circ)+\log(\tan 2^\circ)+\log(\tan 3^\circ)+\ldots+\log(\tan 89^\circ)$.

(A) $P=0$. (B) $P=2$. (C) $P=\dfrac{1}{2}$. (D) $P=1$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}P&=\log(\tan 1^\circ)+\log(\tan 2^\circ)+\log(\tan 3^\circ)+\ldots+\log(\tan 89^\circ)\\&=\log(\tan 1^\circ\cdot\tan 2^\circ\cdot\tan 3^\circ\ldots\tan 89^\circ)=\log\left[\tan 1^\circ\cdot\tan 2^\circ\cdot\tan 3^\circ\ldots\tan(90^\circ-2^\circ)\cdot\tan(90^\circ-1^\circ)\right]\\&=\log(\tan 1^\circ\tan 2^\circ\cdot\tan 3^\circ\ldots\cot 2^\circ\cdot\cot 1^\circ)=\log((\tan 1^\circ\cdot\cot 1^\circ)(\tan 2^\circ\cdot\cot 2^\circ)\ldots)\\&=\log 1=0.\end{aligned}$$

Chọn phương án A

Câu 57. Biết a, b là các số nguyên thỏa $\log_{1350}2=1+a\log_{1350}3+b\log_{1350}5$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

(A) $3a-5b=2$. (B) $a^2-b^2=4$. (C) $a-2b=1$. (D) $ab=8$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&\log_{1350} 2 = 1 + a\log_{1350} 3 + b\log_{1350} 5\\
\Leftrightarrow\ & 1350^{\log_{1350} 2} = 1350 \cdot \left(1350^{\log_{1350} 3}\right)^a \cdot \left(1350^{\log_{1350} 5}\right)^b\\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1350 \cdot 3^a \cdot 5^b\\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{675} = 3^a \cdot 5^b\\
\Leftrightarrow\ & 3^{-3} \cdot 5^{-2} = 3^a \cdot 5^b\\
\Leftrightarrow\ & 3^{a+3} \cdot 5^{b+2} = 1\\
\Leftrightarrow\ & \log_3 3^{a+3} + \log_3 5^{b+2} = 0\\
\Leftrightarrow\ & (a+3) + (b+2)\cdot \log_3 5 = 0\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a = -3\\ b = -2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Suy ra $a - 2b = 1$.

Chọn phương án C

Câu 58. Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = 7ab$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

(A) $\log(a+b) = \dfrac{3}{2}(\log a + \log b)$.
(B) $2(\log a + \log b) = \log(7ab)$.
(C) $3\log(a+b) = \dfrac{1}{2}(\log a + \log b)$.
(D) $\log\left(\dfrac{a+b}{3}\right) = \dfrac{1}{2}(\log a + \log b)$.

Lời giải.

Ta có: $a^2 + b^2 = 7ab$

$\Leftrightarrow (a+b)^2 = 9ab$

$\Leftrightarrow 2\log(a+b) = \log(9ab)$

$\Leftrightarrow 2\log(a+b) = 2\log 3 + \log a + \log b$

$\Leftrightarrow \log(a+b) - \log 3 = \dfrac{1}{2}(\log a + \log b)$

$\Leftrightarrow \log\dfrac{a+b}{3} = \dfrac{1}{2}\log ab$

Chọn phương án D

Câu 59. Cho $n > 1$ là một số nguyên. Tính giá trị của biểu thức

$$\frac{1}{\log_2 n!} + \frac{1}{\log_3 n!} + \cdots + \frac{1}{\log_n n!}.$$

(A) n.
(B) 0.
(C) 1.
(D) $n!$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{\log_2 n!} + \dfrac{1}{\log_3 n!} + \cdots + \dfrac{1}{\log_n n!} = \log_{n!} 2 + \log_{n!} 3 + \cdots + \log_{n!} n = \log_{n!} n! = 1$.

Chọn phương án C

Câu 60. Biết $\log_2 7 = a, \log_3 7 = b$, tính $S = \log_2 2016$ theo a, b.

(A) $S = \dfrac{2a + 5b + ab}{b}$.
(B) $S = \dfrac{2b + 5a + ab}{a}$.
(C) $S = \dfrac{5a + 2b + ab}{b}$.
(D) $S = \dfrac{2a + 5b + ab}{a}$.

Lời giải.

Ta có $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \Rightarrow \log_2 2016 = \log_2(2^5 \cdot 3^2 \cdot 7) = 5 + 2\log_2 3 + \log_2 7$

$\Rightarrow S = 5 + \dfrac{2\log_7 3}{\log_7 2} + \log_2 7 = 5 + \dfrac{a}{b} + a = \dfrac{5b + ab + 2a}{b}$

Chọn phương án (A)

D MỨC ĐỘ 4

Câu 61. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a \geq b > 1$. Biết rằng $P = \dfrac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \dfrac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất khi $b = a^k$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $k \in \left(0; \dfrac{3}{2}\right)$. (B) $k \in (-1; 0)$. (C) $k \in \left(\dfrac{3}{2}; 2\right)$. (D) $k \in (2; 3)$.

Lời giải.

Ta có $P = 1 + \log_a b + \sqrt{1 - \log_a b}$. Đặt $t = \sqrt{1 - \log_a b} \Rightarrow t \in (0; 1]$ và $P = f(t) = -t^2 + t + 2$.

Do tam thức $-t^2 + t + 2$ có hoành độ đỉnh $t = \dfrac{1}{2} \in (0; 1]$ nên $\max\limits_{(0;1]} f(t) = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Khi đó $\log_a b = \dfrac{3}{4} \Rightarrow$ $k = \dfrac{3}{4}$.

Chọn phương án (A)

Câu 62. Cho hai số thực $a, b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \dfrac{1}{\log_{(ab)} a} + \dfrac{1}{\log_{\sqrt[4]{ab}} b}$.

(A) $\min S = \dfrac{4}{9}$. (B) $\min S = \dfrac{9}{4}$. (C) $\min S = \dfrac{9}{2}$. (D) $\min S = \dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

$S = \log_a(ab) + \dfrac{1}{4}\log_b(ab) = 1 + \log_a b + \dfrac{1}{4}(1 + \log_b a) = \log_a b + \dfrac{1}{4\log_a b} + \dfrac{5}{4}$

Vì $a > 1, b > 1$ nên $\log_a b > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô - si ta có

$S \geq 2\sqrt{\log_a b . \dfrac{1}{4\log_a b}} + \dfrac{5}{4} = 1 + \dfrac{5}{4} = \dfrac{9}{4}$

Dấu " = " xảy ra khi $\log_a b = \dfrac{1}{4\log_a b} \Leftrightarrow (\log_a b)^2 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_a b = -\dfrac{1}{2}(l) \\ \log_a b = \dfrac{1}{2}(TM) \end{array}\right.$

Với $\log_a b = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow b = a^{\frac{1}{2}}$

Chọn phương án (B)

Câu 63. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} 3^{2x+\sqrt{x+1}} - 3^{2+\sqrt{x+1}} + 2017x \leq 2017 \\ x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \geq 0 \end{cases}$$

(A) $m \geq -3$. (B) $m > -3$. (C) $m \geq -2$. (D) $m \leq -2$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x \geq -1$.

Xét $-1 \leq x \leq 1$ ta có: $2017x \leq 2017$ (1).

Và $2x \le 2 \Leftrightarrow 3^{2x} \le 3^2 \Leftrightarrow 3^{2x}\cdot 3^{\sqrt{x+1}} \le 3^2\cdot 3^{\sqrt{x+1}}$
$\Leftrightarrow 3^{2x+\sqrt{x+1}} \le 3^{2+\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow 3^{2x+\sqrt{x+1}} - 3^{2+\sqrt{x+1}} \le 0 \quad (2)$.
Cộng vế với vế của (1) và (2) ta có: $3^{2x+\sqrt{x+1}} - 3^{2+\sqrt{x+1}} + 2017x \le 2017$
Do đó bất phương trình $3^{2x+\sqrt{x+1}} - 3^{2+\sqrt{x+1}} + 2017x \le 2017$ (I) thỏa mãn $-1 \le x \le 1$.
Xét $x > 1$ tương tự ta có: $2017x > 2017 \quad (3)$.
và $2x > 2 \Leftrightarrow 3^{2x} > 3^2 \Leftrightarrow 3^{2x}\cdot 3^{\sqrt{x+1}} > 3^2\cdot 3^{\sqrt{x+1}}$
$\Leftrightarrow 3^{2x+\sqrt{x+1}} > 3^{2+\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow 3^{2x+\sqrt{x+1}} - 3^{2+\sqrt{x+1}} > 0 \quad (4)$.
Cộng vế với vế của (3) và (4) ta có: $3^{2x+\sqrt{x+1}} - 3^{2+\sqrt{x+1}} + 2017x > 2017$ do đó bất phương trình (I) không thỏa mãn $x > 1$.
Vậy bất phương trình (I) có nghiệm là: $-1 \le x \le 1$.
Để hệ bất phương trình đã cho có nghiệm thì bất phương trình $x^2-(m+2)x+2m+3 \ge 0$ (II) phải có nghiệm thỏa mãn $-1 \le x \le 1$.
Khi đó: $x^2-(m+2)x+2m+3 \ge 0 (II) \Leftrightarrow x^2-2x+3 \ge m(x-2) \Leftrightarrow m \ge \dfrac{x^2-2x+3}{x-2}$.
Xét hàm số $g(x) = \dfrac{x^2-2x+3}{x-2}$ với $-1 \le x \le 1$.
$\Rightarrow g'(x) = \dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2-\sqrt{3} \in [-1;1] \\ x = 2+\sqrt{3} \notin [-1;1] \end{array}\right.$
Ta có bảng biến thiên:

x	-1		$2-\sqrt{3}$		1
y'		$+$	0	$-$	
y	-2	$\nearrow$	$2-2\sqrt{3}$	$\searrow$	-2

Dựa vào bảng biến thiên, hệ bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \ge -2$.
Chọn phương án C

Câu 64. Cho $0 \le x; y \le 1$ thỏa mãn $2017^{1-x-y} = \dfrac{x^2+2018}{y^2-2y+2019}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = (4x^2+3y)(4y^2+3x)+25xy$. Khi đó $M+m$ bằng bao nhiêu?

A $\dfrac{136}{3}$. **B** $\dfrac{391}{16}$. **C** $\dfrac{383}{16}$. **D** $\dfrac{25}{2}$.

Lời giải.
Biến đổi giả thiết $\dfrac{2017^{1-y}}{2017^x} = \dfrac{x^2+2018}{(1-y)^2+2018}$. Xét $f(t) = 2017^t(t^2+2018)$ với $0 \le t \le 1$. Ta thu được $x+y=1$. Xét $S = 16(xy)^2 - 2(xy) + 2$ với $0 \le xy \le \dfrac{1}{4}$. Lập bảng biến thiên ta có giá trị lớn nhất của S là $\dfrac{25}{2}$, giá trị nhỏ nhất là $\dfrac{191}{16}$.
Chọn phương án B

Câu 65. Cho biểu thức $A = \log\left(2017+\log\left(2016+\log\left(2015+\log\left(\cdots+\log\left(3+\log 2\right)\cdots\right)\right)\right)\right)$. Biểu thức A có giá trị thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

(A) $(\log 2017; \log 2018)$. (B) $(\log 2019; \log 2020)$. (C) $(\log 2018; \log 2019)$. (D) $(\log 2020; \log 2021)$.

Lời giải.

Đặt $A_n = \log\left(n + \log\left(n - 1 + \log\left(n - 2 + \log\left(\cdots + \log\left(3 + \log 2\right)\cdots\right)\right)\right)\right)$, khi đó $A_n = \log\left(n + A_{n-1}\right)$.

Ta nhận thấy $0 < \log 2 = A_2 < 1$, từ đó suy ra

$0 < \log 3 < A_3 = \log\left(3 + A_2\right) < \log 4 < A_4 < \cdots < \log 9 < A_9 = \log\left(9 + A_9\right) < \log 10 = 1$.

Tương tự ta có

$1 = \log 10 < A_{10} = \log\left(10 + A_9\right) < \cdots < \log 99 < A_{98} = \log\left(98 + A_{97}\right) < \log 100 = 2$.

$2 = \log 100 < A_{100} = \log\left(100 + A_{99}\right) < \cdots < \log 999 < A_{997} = \log\left(997 + A_{996}\right) < \log 1000 = 3$.

Với mọi k nguyên dương, $1000 < k < 10.000$ ta có $3 < \log k < 4$.

Từ đó suy ra $3 < \log 2020 < A_{2017} = \log\left(2017 + A_{2016}\right) < \log 2021$.

Vậy $A \in (\log 2020; \log 2021)$.

Chọn phương án (D)

Câu 66. Với mọi số thực dương a và b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 8ab$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\log(a+b) = \dfrac{1}{2}(\log a + \log b)$. (B) $\log(a+b) = \dfrac{1}{2}(1 + \log a + \log b)$.

(C) $\log(a+b) = \dfrac{1}{2} + \log a + \log b$. (D) $\log(a+b) = 1 + \log a + \log b$.

Lời giải.

Với $a, b > 0$ ta có

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 = 8ab &\Leftrightarrow (a+b)^2 = 10ab \Leftrightarrow \log(a+b)^2 = \log(10ab) \\ &\Leftrightarrow 2\log(a+b) = \log(10) + \log a + \log b \\ &\Leftrightarrow \log(a+b) = \frac{1}{2}(1 + \log a + \log b). \end{aligned}$$

Vậy với mọi số thực dương a và b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 8ab$, mệnh đề đúng là
"$\log(a+b) = \dfrac{1}{2}(1 + \log a + \log b)$".

Chọn phương án (B)

Câu 67. Cho $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Đặt $u_n = \dfrac{f(1) \cdot f(3) \ldots f(2n-1)}{f(2) \cdot f(4) \ldots f(2n)}$. Tìm số n nguyên dương nhỏ nhất sao cho u_n thỏa mãn điều kiện $\log_2 u_n + u_n < -\dfrac{10239}{1024}$.

(A) $n = 23$. (B) $n = 29$. (C) $n = 21$. (D) $n = 33$.

Lời giải.

Xét $g(n) = \dfrac{f(2n-1)}{f(2n)} = \dfrac{(4n^2 - 2n + 1)^2 + 1}{(4n^2 + 2n + 1)^2 + 1}$.

Đặt $\begin{cases} a = 4n^2 + 1 \\ b = 2n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \pm 2b = (2n \pm 1)^2 \\ a = b^2 + 1 \end{cases}$

$\Rightarrow g(n) = \dfrac{(a-b)^2 + 1}{(a+b)^2 + 1} = \dfrac{a^2 - 2ab + b^2 + 1}{a^2 + 2ab + b^2 + 1} = \dfrac{a^2 - 2ab + a}{a^2 + 2ab + a} = \dfrac{a - 2b + 1}{a + 2b + 1} = \dfrac{(2n-1)^2 + 1}{(2n+1)^2 + 1}$.

$\Rightarrow u_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} g(i) = \frac{2}{10} \cdot \frac{10}{26} \cdot \frac{26}{50} \cdots \frac{(2n-1)^2 + 1}{(2n+1)^2 + 1} = \frac{2}{(2n+1)^2 + 1} = \frac{1}{2n^2 + 2n + 1}$.

Do đó, ta có $\log_2 u_n + u_n < -\dfrac{10239}{1024} \Leftrightarrow \log_2 \dfrac{1}{2n^2+2n+1} + \dfrac{1}{2n^2+2n+1} < -\dfrac{10239}{1024}$.
Thử từng đáp án, ta được kết quả.
Chọn phương án A

Câu 68. Cho $\log_9 x = \log_{12} y = \log_{16}(x+3y)$. Tính giá trị $\dfrac{x}{y}$.

(A) $\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}$. (B) $\dfrac{\sqrt{13}+3}{2}$. (C) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. (D) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Đặt $\log_9 x = \log_{12} y = \log_{16}(x+3y) = t$. Suy ra: $x = 9^t, y = 12^t, x+3y = 16^t$. Khi đó ta có $x(x+3y) = y^2$.
Chia hai vế cho y^2 ta được phương trình $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 3\dfrac{x}{y} - 1 = 0$. Giải ra ta được $\dfrac{x}{y} = \dfrac{\sqrt{13}-3}{2}$.

Chọn phương án A

Câu 69. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x+y+1 = 2\cdot\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}\right)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $M = 3^{x+y-4} + (x+y+1)\cdot 2^{7-x-y} - 3\cdot(x^2+y^2)$ bằng

(A) $-\dfrac{9476}{243}$. (B) -76. (C) $\dfrac{193}{3}$. (D) $\dfrac{148}{3}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq -3. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} & x+y+1 = 2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}\right) \\ \Leftrightarrow\ & (x+y+1)^2 = 4\cdot\left(x+y+1+2\cdot\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{y+3}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Ta thấy $2\cdot\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{y+3} \leq x+y+1$ nên từ (1) ta được

$$\begin{aligned} & (x+y+1)^2 \leq 8\cdot(x+y+1) \\ \Rightarrow\ & x+y+1 \leq 8 \\ \Rightarrow\ & x+y \leq 7. \end{aligned} \tag{2}$$

Ta thấy $2\cdot\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{y+3} \geq 0$ nên từ (1) ta được

$$\begin{aligned} & (x+y+1)^2 \geq 4\cdot(x+y+1) \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x+y+1 \leq 0 \\ x+y+1 \geq 4 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x+y+1 = 0 \text{ (vì } x+y+1 \geq 0) \\ x+y+1 \geq 4 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x+y = -1 \\ x+y \geq 3. \end{array}\right. \end{aligned} \tag{3}$$

Ta thấy $\begin{cases} x^2 \geq 2x \text{ (do } x \geq 2) \\ y^2+1 \geq 2y \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2+1 \geq 2(x+y)$. Khi đó, ta được

$$M \leq 3^{x+y-4} + (x+y+1)\cdot 2^{7-x-y} - 6\cdot(x+y) + 3.$$

Đặt $t = x + y$, từ (2) và (3) ta được $t = -1$ hoặc $3 \leq t \leq 7$.
Xét hàm số $f(t) = 3^{t-4} + (t+1) \cdot 2^{7-t} - 6 \cdot t + 3$.
Ta có $f(-1) = \dfrac{2188}{243}$.
Ta có $f'(t) = 3^{t-1} \cdot \ln 3 + 2^{7-t} - (t+1) \cdot 2^{7-t} \cdot \ln 2 - 6$.
Ta có $f''(t) = 3^{t-4} \cdot \ln^2 3 + [(t+1) \cdot \ln 2 - 2] \cdot 2^{7-t} \cdot \ln 2 > 0, \forall t \in [3; 7]$.
Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên $(3; 7)$.
Ta thấy $f'(t)$ liên tục trên $(3; 7)$ và $f'(3) \cdot f'(7) < 0$ do vậy có duy nhất $t_0 \in (3; 7)$: $f'(t_0) = 0$.
Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

t	3		t_0		7
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\dfrac{148}{3}$	$\searrow$	$f(t_0)$	$\nearrow$	-4

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $M = f(3) = \dfrac{148}{3}$.
Chọn phương án D

Câu 70. Cho các số hạng dương a, b, c lần lượt là số hạng thứ m, n, p của một cấp số cộng và một cấp số nhân. Tính giá trị của biểu thức

$$P = (b-c)\log_3 a + 2(c-a)\log_9 b + 3(a-b)\log_{27} c.$$

A $P = 3$. **B** $P = 1$. **C** $P = 0$. **D** $P = 2$.

Lời giải.
Ta có

— a, b, c lần lượt là số hạng thứ m, n, p của cấp số cộng nên $\begin{cases} a = u_1 + (m-1)d \\ b = u_1 + (n-1)d \\ c = u_1 + (p-1)d \end{cases}$ trong đó u_1, d lần lượt là số hạng đầu và công sai của cấp số cộng.

— a, b, c lần lượt là số hạng thứ m, n, p của cấp số nhân nên $\begin{cases} a = u'_1 \cdot q^{m-1} \\ b = u'_1 \cdot q^{n-1} \\ c = u'_1 \cdot q^{p-1} \end{cases}$ trong đó u'_1, q lần lượt là số hạng đầu và công bội của cấp số nhân.

Do đó,

$$\begin{aligned}P &= (b-c)\log_3 a + 2(c-a)\log_9 b + 3(a-b)\log_{27} c\\ &= (n-p)d\log_3\left(u_1'\cdot q^{m-1}\right) + (p-m)d\log_3\left(u_1'\cdot q^{n-1}\right) + (m-n)d\log_3\left(u_1'\cdot q^{p-1}\right)\\ &= (n-p)(m-1)d\log_3 q + (p-m)(n-1)d\log_3 q + (m-n)(p-1)d\log_3 q\\ &= [mn-n-mp+p+np-p-mn+m+mp-m-np+n]\,d\log_3 q = 0.\end{aligned}$$

Chọn phương án C

Câu 71. Cho x, y là các số thực dương thỏa $\log_9 x = \log_6 y = \log_4\left(\dfrac{x+y}{6}\right)$. Tính tỉ số $\dfrac{x}{y}$.

A $\dfrac{x}{y} = 4$. **B** $\dfrac{x}{y} = 3$. **C** $\dfrac{x}{y} = 5$. **D** $\dfrac{x}{y} = 2$.

Lời giải.

Ta có $\log_9 x = \log_6 y \Leftrightarrow y = 6^{\log_9 x} = (2.3)^{\frac{1}{2}\log_3 x} = 2^{\frac{1}{2}\log_3 x}.3^{\frac{1}{2}\log_3 x} = \left(x.2^{\log_3 x}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Khi đó $\dfrac{y}{x} = \dfrac{\left(x.2^{\log_3 x}\right)^{\frac{1}{2}}}{x} = \left(\dfrac{2^{\log_3 x}}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$ (1)

Ta có $\log_9 x = \log_4\left(\dfrac{x+y}{6}\right) \Rightarrow \dfrac{x+y}{6} = 4^{\log_9 x} = 2^{\log_3 x} \Rightarrow y = 6.2^{\log_3 x} - x$.

Khi đó $\dfrac{y}{x} = \dfrac{6.2^{\log_3 x} - x}{x} = 6\cdot\dfrac{2^{\log_3 x}}{x} - 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $6\cdot\dfrac{2^{\log_3 x}}{x} - 1 = \left(\dfrac{2^{\log_3 x}}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \left(\dfrac{2^{\log_3 x}}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{x}{y} = 2$.

Chọn phương án D

Câu 72. Xét các số thực dương x, y thỏa $\log_3\dfrac{1-y}{x+3xy} = 3xy + x + 3y - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất P_{min} của biểu thức $P = x + y$.

A $P_{min} = \dfrac{3\sqrt{3}+4}{3}$. **B** $P_{min} = \dfrac{3\sqrt{3}-4}{3}$. **C** $P_{min} = \dfrac{3\sqrt{3}+4}{9}$. **D** $P_{min} = \dfrac{3\sqrt{3}-4}{9}$.

Lời giải.

Từ giả thiết: $\log_3\dfrac{1-y}{x+3xy} = 3xy + x + 3y - 4$

$\Leftrightarrow \log_3(1-y) + 1 + 3(1-y) = \log_3(x+3xy) + 3xy + x$

$\Leftrightarrow \log_3[3(1-y)] + 3(1-y) = \log_3(x+3xy) + (3xy+x) \qquad (*)$.

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t \Rightarrow f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 3} + 1 > 0 \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Mặt khác do $x, y > 0$ nên $x + 3xy > 0 \Rightarrow 1 - y > 0 \Rightarrow 3(1-y); 3xy + x \in (0; +\infty)$. Do đó phương trình $(*) \Leftrightarrow 3(1-y) = x + 3xy \Leftrightarrow y = \dfrac{-x+3}{3x+3}$ thế vào P ta được:

$P = x + \dfrac{-x+3}{3x+3}$ với $x > 0 \Rightarrow P' = 1 - \dfrac{12}{(3x+3)^2}; P' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{12}-3}{3} \text{ (thỏa mãn)}\\ x = \dfrac{-\sqrt{12}-3}{3} \text{ (loại)}\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên ta được $\min P = P\left(\dfrac{\sqrt{12}-3}{3}\right) = \dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}$.

Chọn phương án B

Câu 73. Cho n là số nguyên dương, tìm n sao cho

$1^2\log_a 2019 + 2^2\log_{\sqrt{a}} 2019 + \ldots + n^2\log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 1010^2\cdot 2019^2\log_a 2019.$

A 2019. **B** 2018. **C** 2017. **D** 2016.

Lời giải.

$VT = 1^2\log_a 2019 + 2^2\log_{\sqrt{a}} 2019 + \ldots + n^2\log_{\sqrt[n]{a}} 2019.$

$VT = 1^3\log_a 2019 + 2^3\log_a 2019 + \ldots + n^3\log_a 2019.$

$VT = \left(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3\right)\log_a 2019.$

$VP = 1010^2\cdot 2019^2\cdot\log_a 2019.$

$VT = VP \Leftrightarrow \left(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3\right)\log_a 2019 = 1010^2\cdot 2019^2\cdot\log_a 2019$

$\Leftrightarrow \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = 1010^2.2019^2 \Leftrightarrow (n^2+n) = (2020\cdot 2019)^2$

$\Leftrightarrow n^2 + n = 2020\cdot 2019 \Leftrightarrow n = 2019$ vì $n > 0$.

Chọn phương án A

Câu 74. Cho các số thực a, b thỏa mãn $a > \dfrac{1}{3}$, $b > 1$. Khi biểu thức $\log_{3a} b + \log_b\left(a^4 - 9a^2 + 81\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tổng $a + b$ bằng

A $9 + 2^{\sqrt{3}}$. **B** $3 + 9^{\sqrt{2}}$. **C** $3 + 3\sqrt{2}$. **D** $2 + 9\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $3a > 1$, $b > 1$ nên $\log_{3a} b > 0$, $\log_b 3a > 0$. Theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$\log_{3a} b + \log_b\left(a^4 - 9a^2 + 81\right) \ge \log_{3a}b + \log_b\left(18a^2 - 9a^2\right) = \log_{3a} b + 2\log_b 3a \ge 2\sqrt{2}.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 3a > 1,\ b > 1 \\ a^4 = 81 \\ \log_{3a} b = 2\log_b 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 9^{\sqrt{2}}. \end{cases}$

Khi đó ta được $a + b = 3 + 9^{\sqrt{2}}$.

Chọn phương án B

Câu 75. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $2^{2u_1+1} + 2^{3-u_2} = \dfrac{8}{\log_3\left(\dfrac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \ge 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n > 5^{100}$ bằng

A 230. **B** 231. **C** 233. **D** 234.

Lời giải.

Theo giả thiết $u_{n+1} = 2u_n$ nên (u_n) là một cấp số nhân có công bội $q = 2$. Suy ra $u_n = u_1\cdot 2^{n-1}$ với mọi $b \in \mathbb{N}^*, n \ge 2$.

Ta lại có $2^{2u_1+1} + 2^{3-u_2} = \dfrac{8}{\log_3\left(\dfrac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)}$

$\Leftrightarrow 2\cdot 4^{u_1} + \dfrac{8}{4_1^u} = \dfrac{8}{\log_3\left(\dfrac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)}$ (1).

Dễ thấy $2\cdot 4^{u_1} + \dfrac{8}{4^{u_1}} \ge 8$ và $\dfrac{8}{\log_3\left(\dfrac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)} = \dfrac{8}{\log_3\left[\left(\dfrac{1}{2}u_3 - 1\right)^2 + 3\right]} \le 8$ nên (1) tương đương với $2\cdot 4^{u_1}+\dfrac{8}{4^{u_1}}=8$ và $\dfrac{8}{\log_3\left(\dfrac{1}{4}u_3^2-4u_1+4\right)}=8$ hay $u_1=\dfrac{1}{2}$.

Khi đó $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=u_1\dfrac{1-2^n}{1-2}=\dfrac{2^n-1}{2}$.

Do đó, $S_n>5^{100}\Leftrightarrow\dfrac{2^n-1}{2}>5^{100}\Leftrightarrow\log_5\dfrac{2^n-1}{2}>100\Leftrightarrow n>233$.

Chọn phương án D

Câu 76. Xét các số dương a,b,c thỏa mãn $16\log^4 a+4\log^4 b+2\log^2 c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của a.

(A) $10^{\frac{1}{2}}$. (B) 10^{-1}. (C) 1. (D) $10^{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Ta có: $16\log^4 a+4\log^4 b+2\log^2 c=1$

$\Leftrightarrow 16\log^4 a=1-\left(4\log^4 b+2\log^2 c\right)\leqslant 1$

$\Leftrightarrow |2\log a|\leqslant 1\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\leqslant\log a\leqslant\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 10^{-\frac{1}{2}}\leqslant a\leqslant 10^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow a_{\max}=10^{\frac{1}{2}}$ đạt được khi $4\log^4 b+2\log^2 c=0\Leftrightarrow b=c=1$.

Chọn phương án A

Câu 77. Gọi x,y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x=\log_6 y=\log_4(x+y)$ và $\dfrac{x}{y}=\dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a,b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

(A) $a+b=6$. (B) $a+b=11$. (C) $a+b=4$. (D) $a+b=8$.

Lời giải.

Đặt $\log_9 x=t$.

Theo đề ra ta có $\begin{cases}\log_9 x=\log_6 y=t\\ \log_9 x=\log_4(x+y)=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=9^t & (4)\\ y'=6^t & (5)\\ x+y=4^t & (6)\\ \dfrac{x}{y}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^t & (7)\end{cases}$

Từ (10), (11) và (12) ta có $9^t+6^t=4^t\Leftrightarrow(3^t)^2+(3\cdot 2)^t-4^t=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2t}+\left(\dfrac{3}{2}\right)^t-1=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{3}{2}\right)^t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^t=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\ \text{(loại)}\end{array}\right.$$

Thế vào (13) ta được $\dfrac{x}{y}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}\Rightarrow a=1;b=5$.

Chọn phương án A

Câu 78. Cho n là một số nguyên dương và $0<a\neq 1$, tìm n sao cho

$\log_a 2019+2^2\log_{\sqrt{a}}2019+3^2\log_{\sqrt[3]{a}}2019+\cdots+n^2\log_{\sqrt[n]{a}}2019=1008^2\cdot 2017^2\log_a 2019$.

A 2017. **B** 2018. **C** 2019. **D** 2016.

Lời giải.

Dễ dàng chứng bằng quy nạp rằng $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Suy ra

$$\begin{aligned}
&\log_a 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{a}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \cdots + n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 1008^2 \cdot 2017^2 \log_a 2019 \\
\Leftrightarrow\ & (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) \log_a 2019 = 1008^2 \cdot 2017^2 \log_a 2019 \\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 1008^2 \cdot 2017^2 \\
\Leftrightarrow\ & n = 2016.
\end{aligned}$$

Chọn phương án D

Câu 79. Cho cấp số cộng (a_n), cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $a_2 > a_1 \geqslant 0$, $b_2 > b_1 \geqslant 1$ và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(a_2) + 2 = f(a_1)$ và $f(\log_2 b_2) + 2 = f(\log_2 b_1)$. Tìm số nguyên dương $n (n > 1)$ nhỏ nhất sao cho $b_n > 2018a_n$.

A $n = 20$. **B** $n = 10$. **C** $n = 14$. **D** $n = 16$.

Lời giải.

Hàm số $y = x^3 - 3x$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0		$-$		0	$+$	
y	$+\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

+ Với $0 \leq a_1 < a_2$

Từ giả thiết $f(a_2) - f(a_1) = -2 < 0 \Rightarrow f(x)$ giảm trên $(a_1; a_2) \Rightarrow 0 \leq a_1 < a_2 \leq 1$.

Khi đó: $\begin{cases} f(a_1) \leqslant f(0) = 0 \\ f(a_2) \geqslant f(1) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(a_1) \leq 0 \\ f(a_2) + 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(a_1) \leq 0 \\ f(a_1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(a_1) = 0 \Rightarrow a_1 = 0.$

Và $f(a_2) + 2 = 0 \Rightarrow f(a_2) = -2 \Rightarrow a_2 = 1$.

Vậy cấp số cộng (a_n) có $\begin{cases} a_1 = 0 \\ d = 1. \end{cases}$

+ Với $1 \leq b_1 < b_2$

Từ giả thiết: $f(\log_2 b_2) - f(\log_2 b_1) = -2 < 0 \Rightarrow f(x)$ giảm trên $(\log_2 b_1; \log_2 b_2)$

$\Rightarrow 0 \leqslant \log_2 b_1 < \log_2 b_2 \leqslant 1 \Rightarrow 1 \leqslant b_1 < b_2 \leqslant 2$.

Khi đó: $\begin{cases} f(\log_2 b_1) \leqslant f(0) = 0 \\ f(\log_2 b_2) \geqslant f(1) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\log_2 b_1) \leqslant 0 \\ f(\log_2 b_2) + 2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\log_2 b_1) \leqslant 0 \\ f(\log_2 b_1) \geqslant 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f(\log_2 b_1) = 0 \Rightarrow \log_2 b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = 1$.

Và $f(\log_2 b_2) + 2 = 0 \Rightarrow f(\log_2 b_2) = -2 \Rightarrow \log_2 b_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 2$.

Vậy cấp số nhân (b_n) có $\begin{cases} b_1 = 1 \\ q = 2. \end{cases}$

+ Khi đó: $b_n > 2018a_n \Leftrightarrow 1 \cdot 2^{n-1} > 2018\left(0 + (n-1)\right) \Leftrightarrow 2^{n-1} > 2018\left(n-1\right).$
Dùng chức năng Calc của máy tính ta chọn được $n = 16$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa yêu cầu bái toán.
Chọn phương án D

Câu 80. Cho $\log_8|x|+\log_4 y^2 = 5$ và $\log_8|y|+\log_4 x^2 = 7$. Tìm giá trị của biểu thức $P = |x|-|y|$.

A $P = 56$. **B** $P = 16$. **C** $P = 8$. **D** $P = 64$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\log_8|x| + \log_4 y^2 = 5 &\Leftrightarrow \frac{1}{3}\log_2|x| + \frac{1}{2}\log_2 y^2 = 5\\ &\Leftrightarrow \log_2\sqrt[3]{|x|} + \log_2|y| = 5\\ &\Leftrightarrow \sqrt[3]{|x|}\cdot|y| = 2^5\\ &\Leftrightarrow |x|\cdot|y|^3 = \left(2^5\right)^3 = 2^{15} \quad (1).\end{aligned}$$

Tương tự $\log_8|y| + \log_4 x^2 = 7 \Leftrightarrow |y|\cdot|x|^3 = 2^{21} \quad (2)$.
Lấy (1) nhân (2) được $x^4\cdot y^4 = 2^{36} \Leftrightarrow x^2\cdot y^2 = 2^{18} \quad (3)$.
Lấy (1) chia (2) được $\dfrac{y^2}{x^2} = \dfrac{1}{2^6} \Leftrightarrow x^2 = 2^6\cdot y^2 \quad (4)$.
Thay (4) vào (3) được $2^6\cdot y^4 = 2^{18} \Leftrightarrow y^4 = 2^{12} = \left(2^3\right)^4 \Leftrightarrow |y| = 2^3 = 8$.
Thay $|y| = 8$ vào (4) được $x^2 = 2^6\cdot 64 = \left(2^6\right)^2 \Leftrightarrow |x| = 2^6 = 64$. Do đó $P = |x| - |y| = 56$.
Chọn phương án A

BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. B	4. B	5. C	6. D	7. A	8. D	9. A	10. D
11. D	12. D	13. C	14. C	15. A	16. D	17. B	18. C	19. B	20. D
21. C	22. C	23. D	24. B	25. D	26. D	27. C	28. B	29. A	30. A
31. D	32. B	33. B	34. B	35. D	36. D	37. B	38. C	39. C	40. A
41. C	42. C	43. B	44. C	45. C	46. C	47. D	48. B	49. A	50. D
51. C	52. A	53. B	54. D	55. C	56. A	57. C	58. D	59. C	60. A
61. A	62. B	63. C	64. B	65. D	66. B	67. A	68. A	69. D	70. C
71. D	72. B	73. A	74. B	75. D	76. A	77. A	78. D	79. D	80. A

DẠNG 12. DIỆN TÍCH XUNG QUANH HÌNH TRỤ-NÓN

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Diện tích xung quanh của hình trụ có độ dài đường sinh l và bán kính đáy r bằng

A $4\pi rl$. **B** πrl. **C** $\frac{1}{3}\pi rl$. **D** $2\pi rl$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ $S = 2\pi rl$.

Chọn phương án D

Câu 1. Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh bằng 3 và bán kính đáy bằng 2 là

A 4π. **B** 6π. **C** 12π. **D** 5π.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính diện tích xung quanh của hình nón

$$S_{\text{xq}} = \pi rl = \pi \cdot 2 \cdot 3 = 6\pi.$$

Chọn phương án B

Câu 2. Cho hình nón có bán kính đáy $r = 4$ và diện tích xung quanh bằng 20π. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A 4π. **B** 16π. **C** $\frac{16}{3}\pi$. **D** $\frac{80}{3}\pi$.

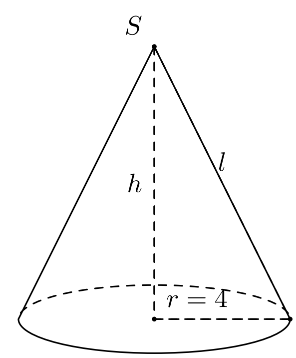
Lời giải.

Áp dụng công thức tính diện tích xung quanh của hình nón ta có

$$S_{xq} = \pi rl \Rightarrow 20\pi = \pi \cdot 4 \cdot l \Rightarrow l = 5.$$

Vì $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ nên $h = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$.

Khối nón có thể tích là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 16\pi$.



Chọn phương án B

Câu 3. Cho hình nón có đường cao $h = a$, bán kính $r = a$. Diện tích xung quanh hình nón là

A $4\pi a^2$. **B** $2\pi a^2$. **C** $2\sqrt{2}\pi a^2$. **D** $\sqrt{2}\pi a^2$.

Lời giải.

Độ dài đường sinh của hình nón trên là $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi rl = \pi \cdot a\sqrt{2} \cdot a = \sqrt{2}\pi a^2$.

Chọn phương án D

Câu 4. Cho hình nón có độ dài đường sinh $l=4a$, bán kính đáy bằng $R=\sqrt{3}a$. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

Ⓐ $8\sqrt{3}\pi a^2$. Ⓑ $\dfrac{4\sqrt{3}\pi a^2}{3}$. Ⓒ $4\sqrt{3}\pi a^2$. Ⓓ $2\sqrt{3}\pi a^2$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh hình nón là: $s_{xq}=\pi Rl=\pi a\sqrt{3}4a=4\sqrt{3}\pi a^2$.

Chọn phương án C

Câu 5. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 5 và chiều cao bằng 7 . Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

Ⓐ $\dfrac{175\pi}{3}$. Ⓑ 175π. Ⓒ 70π. Ⓓ 35π.

Lời giải.

Ta có $S_{xq}=2\pi rl=2\pi\cdot 5\cdot 7=70\pi$.

Chọn phương án C

Câu 6. Gọi l,h,r lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính mặt đáy của hình nón. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón là

Ⓐ $S_{\text{xq}}=\frac{1}{3}\pi r^2h$. Ⓑ $S_{\text{xq}}=\pi rh$. Ⓒ $S_{\text{xq}}=2\pi rl$. Ⓓ $S_{\text{xq}}=\pi rl$.

Lời giải.

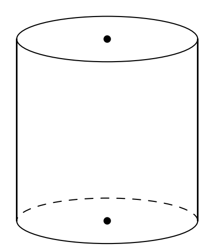
Công thức tính diện tích xung quanh của hình nón là $S_{\text{xq}}=\pi rl$.

Chọn phương án D

Câu 7. Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng S, diện tích đáy bằng diện tích một mặt cầu bán kính a. Khi đó thể tích của hình trụ bằng

Ⓐ Sa. Ⓑ $\dfrac{1}{2}Sa$. Ⓒ $\dfrac{1}{3}Sa$. Ⓓ $\dfrac{1}{4}Sa$.

Lời giải.



Gọi r là bán kính đáy của hình trụ, h là chiều cao của hình trụ.

Theo bài ra ta có $\begin{cases} S=2\pi rh \\ \pi r^2=4\pi a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=2a \\ h=\dfrac{S}{4\pi a}. \end{cases}$

Thể tích khối trụ là $V=\pi r^2h=\pi\cdot 4a^2\cdot\dfrac{S}{4\pi a}=Sa$.

Chọn phương án A

Câu 8. Công thức tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón có đường sinh l, bán kính đáy r là

Ⓐ $S_{\text{xq}}=4\pi rl$. Ⓑ $S_{\text{xq}}=\pi rl$. Ⓒ $S_{\text{xq}}=\pi rl$. Ⓓ $S_{\text{xq}}=3\pi rl$.

Lời giải.

Công thức tính diện tích xung quanh hình nón có bán kính đáy r, chiều cao h và đường sinh l là $S_{\text{xq}}=\pi rl$.

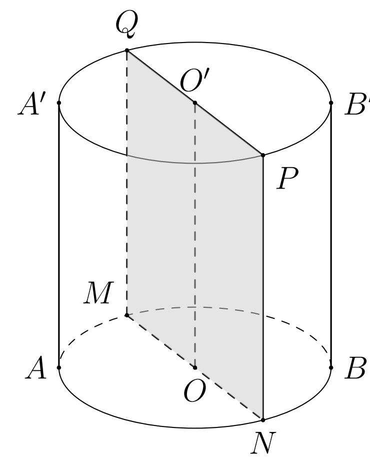
Chọn phương án C

Câu 9. Một hình trụ có bán kính đáy bằng 2cm và có thiết diện qua trục là một hình vuông. Diện tích xung quanh của hình trụ là

Ⓐ $8\pi\text{cm}^2$. Ⓑ $4\pi\text{cm}^2$. Ⓒ $32\pi\text{cm}^2$. Ⓓ $16\pi\text{cm}^2$.

Lời giải.

Vì thiết diện qua trục là hình vuông nên ta có $h = 2r = 4\text{cm} \Rightarrow S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 2.4 = 16\pi\text{cm}^2$.



Chọn phương án D

Câu 10. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 3 cm, độ dài đường cao bằng 4 cm. Tính diện tích xung quanh của hình trụ này.

Ⓐ $24\pi\ (\text{cm}^2)$. Ⓑ $22\pi\ (\text{cm}^2)$. Ⓒ $26\pi\ (\text{cm}^2)$. Ⓓ $20\pi\ (\text{cm}^2)$.

Lời giải.

$S_{\text{xq}} = 2\pi \times r \times h = 2\pi \times 3 \times 4 = 24\ (\text{cm}^2)$.

Chọn phương án A

Câu 11. Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng $4\pi a^2$ và bán kính đáy là a. Tính độ dài đường cao h của hình trụ đó.

Ⓐ a. Ⓑ $2a$. Ⓒ $3a$. Ⓓ $4a$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ có bán kính đáy a và chiều cao h là:

$$S_{xq} = 2\pi ah \Leftrightarrow h = \frac{S_{xq}}{2\pi a} = \frac{4\pi a^2}{2\pi a} = 2a.$$

Vậy độ dài đường cao của hình trụ đó là $h = 2a$.

Chọn phương án B

Câu 12. Cho hình nón có bán kính đáy là $r = \sqrt{3}$ và độ dài đường sinh $l = 4$. Tính diện tích xung quanh S của hình nón đã cho.

Ⓐ $S = 8\sqrt{3}\pi$. Ⓑ $S = 24\pi$. Ⓒ $S = 16\sqrt{3}\pi$. Ⓓ $S = 4\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.

$S_{xq} = \pi Rl = 4\sqrt{3}\pi$ (đvdt).

Chọn phương án D

Câu 13. Viết công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ có chiều cao h bán kính đáy là R.

(A) $S_{xq} = 2\pi Rh$. (B) $S_{xq} = \pi^2 Rh$. (C) $S_{xq} = \pi Rh$. (D) $S_{xq} = 4\pi Rh$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ $S_{xq} = 2\pi Rh$.

Chọn phương án (A)

Câu 14. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 4, diện tích xung quanh bằng 48π. Thể tích của khối trụ bằng

(A) 24π. (B) 96π. (C) 32π. (D) 72π.

Lời giải.

Gọi hình trụ có bán kính và chiều cao lần lượt là R, h.

Theo giả thiết $R = 4$ và $S_{xq} = 2\pi \cdot R \cdot h = 48\pi$ nên $h = 6$.

Do đó thể tích khối trụ $V = \pi \cdot R^2 \cdot h = 96\pi$.

Chọn phương án (B)

Câu 15. Tính diện tích xung quanh của một hình nón tròn xoay có đường cao là 1 và đường kính đáy là 1.

(A) π. (B) $\dfrac{\pi\sqrt{5}}{8}$. (C) 2π. (D) $\dfrac{\pi\sqrt{5}}{4}$.

Lời giải.

Ta có $S_{xq} = \pi r l = \pi r\sqrt{h^2 + r^2} = \pi \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{1^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\pi\sqrt{5}}{4}$ (đvdt).

Chọn phương án (D)

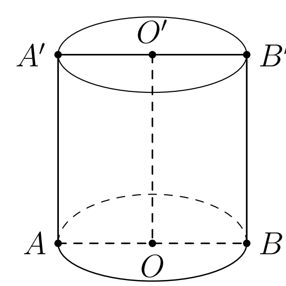
Câu 16. Một hình trụ có bán kính đáy a, có thiết diện qua trục là một hình vuông. Tính theo a diện tích xung quanh của hình trụ.

(A) πa^2. (B) $2\pi a^2$. (C) $3\pi a^2$. (D) $4\pi a^2$.

Lời giải.

Thiết diện qua trục là một hình vuông nên hình trụ có đường sinh bằng đường kính đáy: $l = 2a$.

Vậy diện tích xung quanh hình trụ là $S_{xq} = 2\pi r l = 4\pi a^2$.



Chọn phương án (D)

Câu 17. Cho hình trụ có chiều cao bằng $2a$, bán kính đáy bằng a. Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

(A) πa^2. (B) $2a^2$. (C) $2\pi a^2$. (D) $4\pi a^2$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi \cdot R \cdot h = 4\pi a^2$.

Chọn phương án (D)

Câu 18. Diện tích xung quanh mặt trụ có bán kính đáy R, chiều cao h là

(A) $S_{\mathrm{xq}} = \pi Rh$. (B) $S_{\mathrm{xq}} = 3\pi Rh$. (C) $S_{\mathrm{xq}} = 4\pi Rh$. (D) $S_{\mathrm{xq}} = 2\pi Rh$.

Lời giải.

Ta có diện tích xung quanh mặt trụ $S_{\text{xq}} = 2\pi Rh$.

Chọn phương án D

Câu 19. Cho hình nón có bán kính đáy là $r = \sqrt{3}$ và độ dài đường sinh $\ell = 2$. Tính diện tích xung quanh S của hình nón đã cho.

A $S = 8\sqrt{3}\pi$. B $S = 24\pi$. C $S = 4\sqrt{3}\pi$. D $S = 2\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $S = \pi r\ell = 2\sqrt{3}\pi$.

Chọn phương án D

Câu 20. Tính diện tích xung quanh S của hình trụ có bán kính đáy bằng 3 và chiều cao bằng 4.

A $S = 12\pi$. B $S = 42\pi$. C $S = 36\pi$. D $S = 24\pi$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 3 \cdot 4 = 24\pi$.

Chọn phương án D

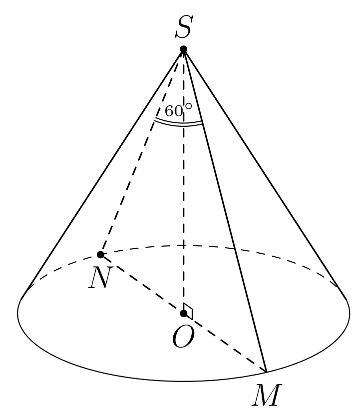
B MỨC ĐỘ 2

Câu 21. Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng $60°$ và bán kính đáy bằng a. Diện tích xung quanh của hình nón bằng bao nhiêu?

A $2\pi a^2$. B $4\pi a^2$. C πa^2. D $\pi a^2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Hình nón đã cho có đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O đường kính MN như hình vẽ.



Ta có bán kính đáy $r = OM = a$, góc $\widehat{MSN} = 60°$ suy ra $\widehat{MSO} = 30°$.

$\triangle SOM$ vuông tại O, ta có

$\sin\widehat{MSO} = \dfrac{OM}{SM}$, suy ra $SM = \dfrac{OM}{\sin\widehat{MSO}} = 2a$, hay đường sinh $l = 2a$.

Vậy diện tích xung quanh hình nón là

$$S_{\text{xq}} = \pi \cdot r \cdot l = 2\pi a^2.$$

Chọn phương án A

Câu 22. Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng a. Tính diện tích xung quanh S của khối trụ đó.

A $S = 2\pi a^2$. B $S = \dfrac{\pi a^2}{2}$. C $S = \pi a^2$. D $S = 4\pi a^2$.

Lời giải.

Do thiết diện là hình vuông cạnh a nên bán kính đáy bằng $\dfrac{a}{2}$ và chiều cao $h = a$.

Diện tích xung quanh: $S = 2\pi \times \dfrac{a}{2} \times a = \pi a^2$.

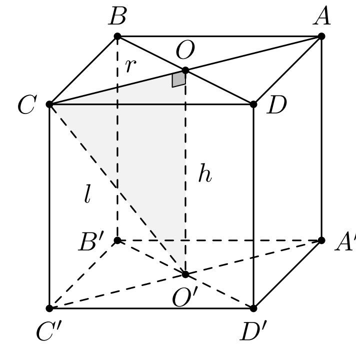
Chọn phương án C

Câu 23. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Một hình nón có đỉnh là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông $ABCD$. Tính diện tích xung quanh của hình nón đó.

A $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$. **B** $\pi a^2\sqrt{3}$. **C** $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{4}$. **D** $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi O, O' lần lượt là tâm hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$.



Hình nón có đáy là đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ có cạnh là a nên đáy của hình nón là đường tròn có bán kính

$$r = OC = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Hình nón có đỉnh là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ nên chiều cao của hình nón bằng độ dài cạnh của hình vuông. Suy ra $h = a$.

Khi đó độ dài đường sinh là $l = O'C = \sqrt{O'O^2 + OC^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy diện tích xung quanh của hình nón đó là $S_{\text{xq}} = \pi rl = \pi \cdot \frac{2\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$.

Chọn phương án D

Câu 24. Hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều và có thể tích $V = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3$. Diện tích xung quanh S của hình nón đó là

A $S = 4\pi a^2$. **B** $S = 2\pi a^2$. **C** $S = \frac{1}{2}\pi a^2$. **D** $S = 3\pi a^2$.

Lời giải.

Gọi R là bán kính đáy của hình nón.

Vì thiết diện qua trục là tam giác đều nên chiều cao của hình nón là $h = R\sqrt{3}$.

Từ đây ta suy ra thể của khối nón $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\pi R^3\sqrt{3}}{3}$. (1)

Theo giả thiết ta có $V = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $R = a$. Do đó diện tích xung quanh là $S = \pi a \cdot 2a = 2\pi a^2$.

Chọn phương án B

Câu 25. Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng 10 và diện tích xung quanh bằng 60π . Thể tích của khối nón đã cho bằng

A 360π. **B** 288π. **C** 120π. **D** 96π.

Lời giải.

Ta có $S_{xq} = \pi rl = 10\pi r = 60\pi \Rightarrow r = 6$.

và $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

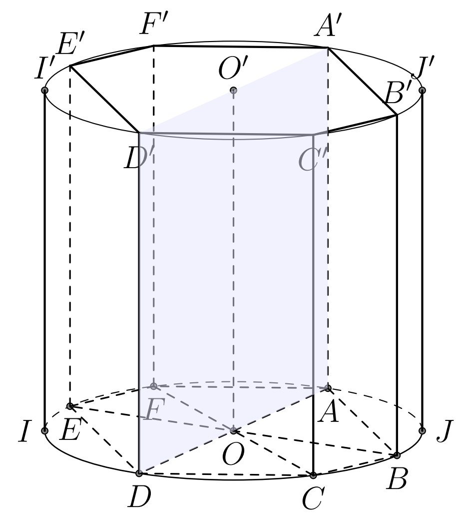
Vậy thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi$.

Chọn phương án D

Câu 26. Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh bằng $36\pi a^2$. Tính thể tích V của lăng trụ lục giác đều nội tiếp hình trụ.

Ⓐ $V = 27\sqrt{3}a^3$. Ⓑ $V = 24\sqrt{3}a^3$. Ⓒ $V = 36\sqrt{3}a^3$. Ⓓ $V = 81\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.



Thiết diện qua trục hình trụ là hình vuông $ADD'A'$. Gọi O, O' lần lượt là hai tâm đường tròn đáy (hình vẽ). Suy ra $l = 2r$.

Theo giả thiết ta có

$S_{xq} = 2\pi rl = 36\pi a^2 \Leftrightarrow 2\pi r \cdot 2r = 36\pi a^2 \Rightarrow r = 3a \Rightarrow l = 6a$.

Lăng trụ lục giác đều $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$ nội tiếp hình trụ có chiều cao là $h = 6a$.

$S_{ABCDEF} = 6S_{\Delta OAB} = 6 \cdot \dfrac{(3a)^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{27a^2\sqrt{3}}{2}$ (vì ΔOAB đều, cạnh bằng $3a$).

Suy ra $V = \dfrac{27a^2\sqrt{3}}{2} \cdot 6a = 81a^3\sqrt{3}$.

Chọn phương án D

Câu 27. Khối nón (N) có bán kính đáy bằng 3 và diện tích xung quanh bằng 15π. Tính thể tích V của khối nón (N).

Ⓐ $V = 36\pi$. Ⓑ $V = 60\pi$. Ⓒ $V = 20\pi$. Ⓓ $V = 12\pi$.

Lời giải.

— Ta có $S_{xq} = \pi rl \Rightarrow l = \dfrac{S_{xq}}{\pi r} = \dfrac{15\pi}{3\pi} = 5$ và chiều cao $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$.

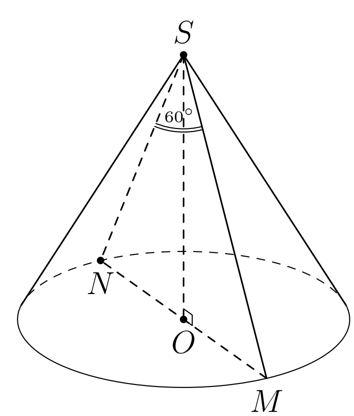
— Vậy $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$.

Chọn phương án D

Câu 28. Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng $60°$ và bán kính đáy bằng a. Diện tích xung quanh của hình nón bằng bao nhiêu?

Ⓐ $2\pi a^2$. Ⓑ $4\pi a^2$. Ⓒ πa^2. Ⓓ $\pi a^2\sqrt{3}$.

Lời giải.



Hình nón đã cho có đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O đường kính MN như hình vẽ.

Ta có bán kính đáy $r = OM = a$, góc $\widehat{MSN} = 60°$ suy ra $\widehat{MSO} = 30°$.

$\triangle SOM$ vuông tại O, ta có

$\sin\widehat{MSO} = \dfrac{OM}{SM}$, suy ra $SM = \dfrac{OM}{\sin\widehat{MSO}} = 2a$, hay đường sinh $l = 2a$.

Vậy diện tích xung quanh hình nón là

$$S_{\text{xq}} = \pi \cdot r \cdot l = 2\pi a^2.$$

Chọn phương án (A)

Câu 29. Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh bằng 4π. Thể tích khối trụ là

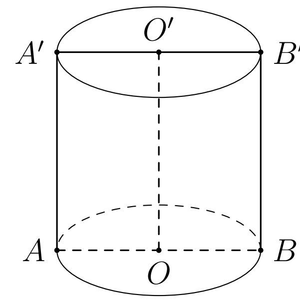
(A) $\frac{2}{3}\pi$. (B) 2π. (C) 4π. (D) $\frac{4}{3}\pi$.

Lời giải.

Ta có $ABB'A'$ là hình vuông $\Rightarrow h = 2r$.

Diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2 = 4\pi \Rightarrow r = 1 \Rightarrow h = 2$.

Thể tích khối trụ $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 = 2\pi$.



Chọn phương án (B)

Câu 30. Cho hình nón tròn xoay có bán kính bằng 3 và diện tích xung quanh bằng $6\sqrt{3}\pi$. Góc ở đỉnh của hình nón đã cho bằng

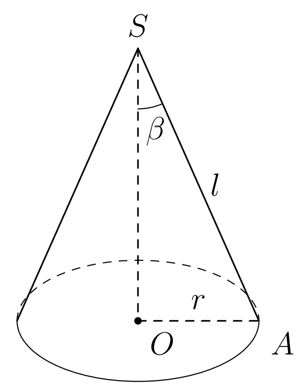
(A) 60°. (B) 150°. (C) 90°. (D) 120°.

Lời giải.

Gọi S, O lần lượt là đỉnh và tâm mặt đáy của hình nón. Lấy A là một điểm nằm trên đường tròn đáy. Gọi góc ở đỉnh của hình nón là 2β suy ra $\beta = \widehat{OSA}$.

Mặt khác $S_{xq} = \pi rl \Leftrightarrow l = \dfrac{S_{xq}}{\pi r} = \dfrac{6\sqrt{3}\pi}{3\pi} = 2\sqrt{3}$. Xét $\triangle SOA$ vuông tại O, ta có $\sin OSA = \dfrac{OA}{SA} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{OSA} = 60^\circ$.

Vậy $2\beta = 2\widehat{OSA} = 120^\circ$.



Chọn phương án (D)

Câu 31. Cho hình nón tròn xoay có bán kính bằng 3 và diện tích xung quanh bằng $6\sqrt{3}\pi$. Góc ở đỉnh của hình nón đã cho bằng

(A) 60°. (B) 150°. (C) 90°. (D) 120°.

Lời giải.

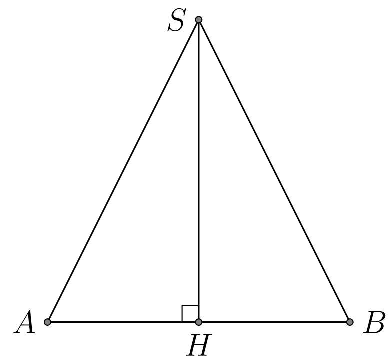
Giả sử thiết diện qua trục của hình nón đã cho là tam giác SAB, gọi H là tâm đường tròn đáy của hình nón.

Ta có $AH = 3$ và $S_{xq} = \pi \cdot AH \cdot SA$

Suy ra $SA = \dfrac{S_{xq}}{\pi AH} = \dfrac{6\sqrt{3}\pi}{3\pi} = 2\sqrt{3}$.

Ta có $\cos\widehat{ASH} = \dfrac{AH}{AS} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{ASH} = 30^\circ$.

Do đó, góc ở đỉnh của hình nón bằng 60°.



Chọn phương án (A)

Câu 32. Cắt mặt xung quanh của một hình trụ dọc theo một đường sinh rồi trải ra trên mặt phẳng ta được hình vuông có chu vi bằng 8π. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

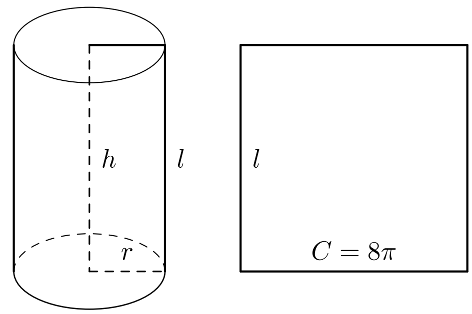
(A) $2\pi^2$. (B) $2\pi^3$. (C) 4π. (D) $4\pi^2$.

Lời giải.

Chu vi hình vuông bằng 8π nên cạnh hình vuông bằng 2π.

Do đó hình trụ có bán kính $R = 1$, đường sinh $l = 2R$.

Vậy thể tích hình trụ là $V = \pi R^2 h = 2\pi^2$.



Chọn phương án (A)

Câu 33. Khối nón (N) có bán kính đáy bằng 3 và diện tích xung quanh bằng 15π. Tính thể tích của khối nón (N).

(A) 36π. (B) 12π. (C) 16π. (D) 45π.

Lời giải.

Gọi SO, SI lần lượt là đường cao và đường sinh của khối nón (N).

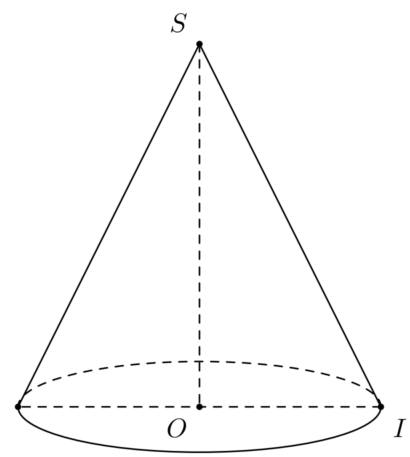
Ta có $S_{xq} = \pi \cdot OI \cdot SI$.

$\Rightarrow SI = \dfrac{S_{xq}}{\pi \cdot OI} = 5$.

Suy ra $SO = \sqrt{SI^2 - OI^2} = 4$.

Thể tích của khối nón (N) bằng

$$V = \frac{1}{3} SO \cdot \pi \cdot OI^2 = \frac{1}{3} \cdot 4\pi 9 = 12\pi$$



Chọn phương án (B)

Câu 34. Cho hình nón tròn xoay có chiều cao là $a\sqrt{3}$, đường kính đáy là $2a$. Tìm diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đã cho.

(A) $S_{xq} = 2\sqrt{3}\pi a^2$. (B) $S_{xq} = 2\pi a^2$. (C) $S_{xq} = \pi a^2$. (D) $S_{xq} = 4\sqrt{3}\pi a^2$.

Lời giải.

Bán kính đáy $r = a$, suy ra đường sinh $l = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = 2a$. Do đó, diện tích xung quanh hình nón là $S_{xq} = 2a^2\pi$.

Chọn phương án (B)

Câu 35. Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng S. Diện tích đáy bằng diện tích một mặt cầu bán kính a. Khi đó thể tích của hình trụ bằng

(A) Sa. (B) $\dfrac{1}{2}Sa$. (C) $\dfrac{1}{3}Sa$. (D) $\dfrac{1}{4}Sa$.

Lời giải.

Gọi bán kính đáy của hình trụ là r, khi đó $\pi r^2 = 4\pi a^2$ nên $r = 2a$.

Chiều cao hình trụ là $h = \dfrac{S}{2\pi r} = \dfrac{S}{4\pi a}$. Thể tích hình trụ là $V = h\pi r^2 = \dfrac{S}{4\pi a}\pi 4a^2 = Sa$.

Chọn phương án A

Câu 36. Tính thể tích V của khối nón có độ dài đường sinh bằng $2a$ và diện tích xung quanh bằng $2\pi a^2$.

A $V = \pi a^3\sqrt{3}$. **B** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **C** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$. **D** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $l = 2a$, $S_{xq} = \pi rl = 2\pi a^2$. Suy ra $r = \dfrac{2\pi a^2}{\pi 2a} = a$.

Mặt khác $h = \sqrt{l^2 - r^2} = a\sqrt{3}$. Vậy $V = \pi a^2 a\sqrt{3} = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Chọn phương án B

Câu 37. Một hình nón có bán kính hình tròn đáy là R và chiều cao bằng $2R$. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

A $\pi R^2(1+\sqrt{5})$. **B** $\pi R^2(1+\sqrt{3})$. **C** $\pi R^2\sqrt{3}$. **D** $\pi R^2\sqrt{5}$.

Lời giải.

Độ dài đường sinh của hình nón là $\ell = \sqrt{h^2 + R^2} = R\sqrt{5}$

Diện tích xung quanh của hình nón là $S = \pi R\ell = \pi R \cdot R\sqrt{5} = \pi R^2\sqrt{5}$.

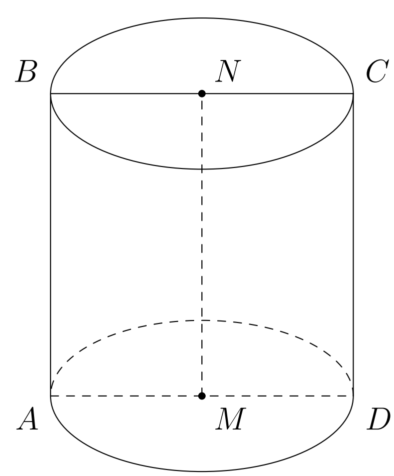
Chọn phương án D

Câu 38. Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1$ và $AD = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN, ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đó.

A $S_{tp} = \dfrac{4\pi}{3}$. **B** $S_{tp} = 4\pi$. **C** $S_{tp=6\pi}$. **D** $S_{tp} = 3\pi$.

Lời giải.

Do quay hình chữ nhật quanh trục MN nên hình trụ tạo thành sẽ có $h = MN = AB = 1$ và $R = \dfrac{AD}{2} = 1$. Từ đó ta tính được $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 4\pi$.



Chọn phương án B

Câu 39. Tính thể tích V của khối nón có đáy là hình tròn bán kính 2, diện tích xung quanh của nón là 12π.

(A) $V = \dfrac{4\sqrt{2}\pi}{3}$. (B) $V = \dfrac{16\sqrt{2}\pi}{9}$. (C) $V = 16\sqrt{2}\pi$. (D) $V = \dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có $S_{xq} = \pi rl \Leftrightarrow 12\pi = \pi 2l \Leftrightarrow l = 6$. suy ra $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$.

$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi 2^2 4\sqrt{2} = \dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$.

Chọn phương án (D)

Câu 40. Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1$ và $AD = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN ta được một hình trụ. Tính thể tích V của hình trụ đó.

(A) $V = \dfrac{\pi}{2}$. (B) $V = \pi$. (C) $V = 2\pi$. (D) $V = 4\pi$.

Lời giải.

Hình trụ tạo thành có chiều cao bằng $AD = 2$ và bán kính bằng $\dfrac{1}{2}AD = \dfrac{1}{2}$. Do đó nó có thể tích $V = \pi r^2 h = \dfrac{\pi}{2}$.

Chọn phương án (A)

C MỨC ĐỘ 3

Câu 41. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R, chiều cao bằng h. Biết rằng hình trụ đó có diện tích toàn phần gấp ba diện tích xung quanh. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $R = 2h$. (B) $h = \sqrt{3}R$. (C) $R = 3h$. (D) $h = 2R$.

Lời giải.

Phương pháp:

Công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq} = 2\pi Rl = 2\pi Rh$.

Công thức tính diện tích toàn phần của hình trụ: $S_{tp} = 2\pi Rl + 2\pi R^2 = 2\pi Rh + 2\pi R^2$.

Cách giải:

Hình trụ đó có diện tích toàn phần gấp ba diện tích xung quanh nên ta có:

$$2\pi Rh + 2\pi R^2 = 3.2\pi Rh \Leftrightarrow 2\pi R^2 = 4\pi Rh \Leftrightarrow R = 2h.$$

Chọn phương án (A)

Câu 42. Một tấm bìa hình tròn có bán kính bằng 5 được cắt thành hai hình quạt, sau đó quấn hai hình quạt đó thành hai hình nón (không có đáy). Biết một trong hai hình nón này có diện tích xung quanh là 15π. Tính thể tích hình nón còn lại. Giả sử chiều rộng các mép dán không đáng kể.

(A) $\dfrac{4\pi\sqrt{21}}{3}$. (B) $2\pi\sqrt{21}$. (C) $\dfrac{2\pi\sqrt{21}}{3}$. (D) $4\pi\sqrt{21}$.

Lời giải.

Phương pháp:

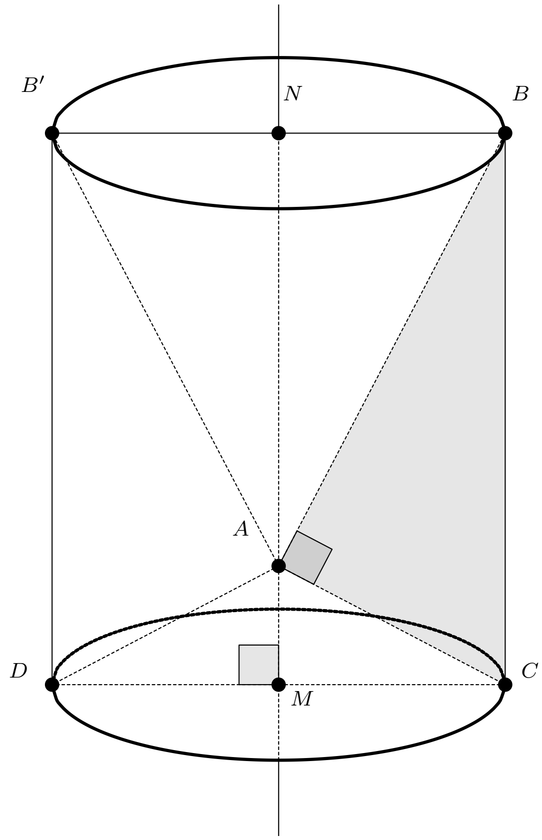
+ Tính diện tích xung quanh hình nón còn lại.

+ Sử dụng công thức $S_{xq} = \pi \cdot R \cdot l$ để tính bán kính đáy của hình nón này.
+ Sử dụng công thức $R^2 + h^2 = l^2$ để tính chiều cao hình nón.
+ Sử dụng công thức $V = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot h$ để tính thể tích hình nón còn lại.
(với R là bán kính đáy hình nón, h là chiều cao hình nón và l là đường sinh hình nón)
Cách giải:
Diện tích hình tròn là $S = \pi \cdot r^2 = 25\pi$.
Diện tích xung quanh hình nón còn lại là $S_2 = 25\pi - 15\pi = 10\pi$.
Nhận xét rằng khi quấn hình quạt được cắt từ hình tròn thành hình nón thì đường sinh của hình nón chính là bán kính của hình tròn.
Từ đó hình nón còn lại có đường sinh $l = 5$.
Lại có diện tích xung quanh hình nón còn lại là 10π nên gọi R là bán kính hình nón này thì $S_{xq} = \pi \cdot R \cdot l \Rightarrow 10\pi = \pi R \cdot 5 \Rightarrow R = 2$.
Ta gọi chiều cao hình nón này là $h, (h > 0)$ thì $h^2 + R^2 = l^2 \Rightarrow h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$.
Thể tích hình nón còn lại là $V = \frac{1}{3}\pi R^2 = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot \sqrt{21} = \frac{4\pi\sqrt{21}}{3}$.
Chọn phương án A

Câu 43. Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường thẳng d đi qua A và song song với BC. Cạnh BC quay xung quanh d tạo thành một mặt xung quanh của hình trụ có thể tích là V_1. Tam giác ABC quay xung quanh trục d được khối tròn xoay có thể tích là V_2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A $\frac{2}{3}$. **B** $\frac{1}{3}$. **C** 3. **D** $\frac{3}{2}$.

Lời giải.
Phương pháp:
Dựng hình, xác định các hình tròn xoay tạo thành khi quay và tính tỉ số thể tích.
Cách giải:



Thể tích khối trụ $V_1 = \pi \cdot R^2 \cdot h = \pi MC^2 \cdot BC$

Tổng thể tích hai khối nón $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi MC^2 \cdot AM + \dfrac{1}{3}\pi NB^2 \cdot AN$

$= \dfrac{1}{3}\pi MC^2 (AM + AN) = \dfrac{1}{3}\pi \cdot MC^2 \cdot BC = \dfrac{1}{3}V_1$.

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = 3$.

Chọn phương án C

Câu 44. Một khối nón có thể tích bằng $9a^3\pi\sqrt{2}$. Tính bán kính R đáy khối nón khi diện tích xung quanh nhỏ nhất.

A $R = 3a$. **B** $R = \dfrac{3a}{\sqrt[6]{2}}$. **C** $R = \sqrt[3]{9}a$. **D** $R = \dfrac{3a}{\sqrt[3]{2}}$.

Lời giải.

Gọi h, l lần lượt là chiều cao và độ dài đường sinh của khối nón.

$V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = 9a^3\pi\sqrt{2} \Rightarrow h = \dfrac{27a^3\sqrt{2}}{R^2} \Rightarrow l = \sqrt{R^2 + h^2} = \sqrt{R^2 + 2 \cdot \dfrac{729a^6}{R^4}}$.

$S_{\text{xq}} = \pi R l = \pi\sqrt{R^4 + \dfrac{729a^6}{R^2} + \dfrac{729a^6}{R^2}} \geq \pi\sqrt{\sqrt[3]{R^4 \cdot \dfrac{729a^6}{R^2} \cdot \dfrac{729a^6}{R^2}}}$.

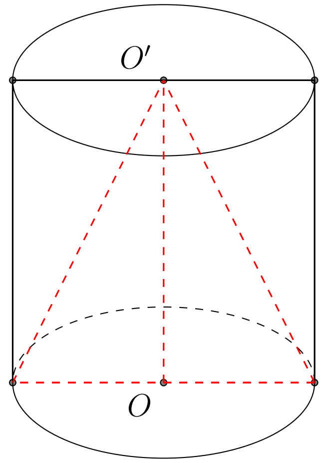
$\Rightarrow S_{\text{xq}} = 9\pi a^2$. Nên $\min S_{\text{xq}} = 9\pi a^2$ khi $R^4 = \dfrac{729a^6}{R^2} \Leftrightarrow R = 3a$.

Chọn phương án A

Câu 45. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O') chiều cao $R\sqrt{3}$ và bán kính đáy R. Một hình nón có đỉnh (O') và đáy là hình tròn $(O; R)$. Tỷ lệ diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón bằng?

(A) 3. (B) $\sqrt{2}$. (C) 2. (D) $\sqrt{3}$.

Lời giải.



+ Diện tích xung quanh hình trụ là: $S_1 = 2\pi Rh = 2\pi R^2\sqrt{3}$.
+ Độ dài đường sinh hình nón là: $l = \sqrt{\left(R\sqrt{3}\right)^2 + R^2} = 2R$.
+ Diện tích xung quanh hình nón là: $S_2 = \pi Rl = \pi R \cdot 2R = 2\pi R^2$.

Suy ra tỉ lệ cần tìm là: $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{2\pi R^2 \cdot \sqrt{3}}{2\pi R^2} = \sqrt{3}$.

Chọn phương án (D)

Câu 46. Một hộp sữa hình trụ có thể tích V (không đổi) được làm từ một tấm tôn có diện tích đủ lớn. Nếu hộp sữa chỉ kín một đáy thì để tốn ít vật liệu nhất, hệ thức giữa bán kính đáy R và đường cao h bằng:

(A) $h = \sqrt{3}R$. (B) $h = \sqrt{2}R$. (C) $h = 2R$. (D) $h = R$.

Lời giải.

Phương pháp: Thể tích khối trụ có bán kính đáy R và chiều cao h là: $V = \pi R^2 h$.

Diện tích xung quanh và 1 đáy của hình trụ là: $S = 2\pi Rh + \pi R^2$.

Cách giải:

Ta có thể tích khối trụ có bán kính đáy R và chiều cao h là: $V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \dfrac{V}{\pi R^2}$.

Diện tích xung quanh và 1 đáy của hình trụ là: $S = 2\pi Rh + \pi R^2 \Rightarrow S = 2\pi.R\dfrac{V}{\pi R^2} + \pi R^2 = \dfrac{2V}{R} + \pi R^2$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương $\dfrac{V}{R}; \dfrac{V}{R}; \pi R^2$ ta có:

$\dfrac{V}{R} + \dfrac{V}{R}\pi R^2 \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{V}{R} + \dfrac{V}{R}\pi R^2} = 3\sqrt[3]{\pi V^2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Rightarrow \dfrac{V}{R} = \pi R^2 \Leftrightarrow R^3 = \dfrac{V}{\pi} \Leftrightarrow V = \pi R^3 \Rightarrow h = \dfrac{\pi R^3}{\pi R^2} = R$.

Chọn phương án (D)

Câu 47. Cho hình trụ có thiết diện đi qua trục là một hình vuông có cạnh bằng $4a$. Diện tích xung quanh S của hình trụ là

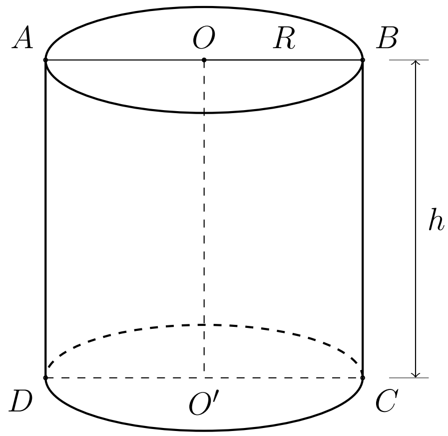
(A) $S = 4\pi a^2$. (B) $S = 8\pi a^2$. (C) $S = 24\pi a^2$. (D) $S = 16\pi a^2$.

Lời giải.

Phương pháp: Công thức tính diện tích xung quanh hình trụ có bán kính đáy R, chiều cao h là

$$S_{xq} = 2\pi Rh.$$

Cách giải:



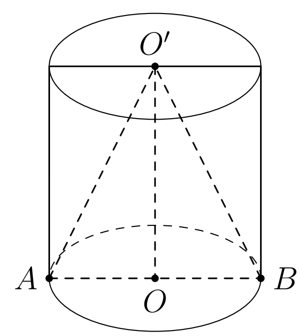
Hình trụ có thiết diện đi qua trục là hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $4a$.
Do đó $h = 2R = 4a \Rightarrow R = 2a$ với R, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ.
Vậy $S = 2\pi Rh = 16\pi a^2$
Chọn phương án D

Câu 48. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$, chiều cao $R\sqrt{3}$. Một hình nón có đỉnh là O' và đáy là hình tròn $(O; R)$. Tỷ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón bằng

A 2. **B** $\sqrt{3}$. **C** 3. **D** $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_1 = 2\pi R^2\sqrt{3}$.
Độ dài đường sinh của hình nón là $l = \sqrt{R^2 + 3R^2} = 2R$ do đó diện tích xung quanh của hình nón là $S_2 = 2\pi R^2$.
Vậy tỷ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón là $\dfrac{S_1}{S_2} = \sqrt{3}$.



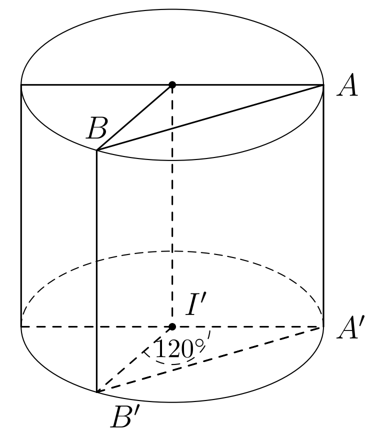
Chọn phương án B

Câu 49. Một hình trụ có diện tích xung quanh là 4π, thiết diện qua trục là hình vuông. Một mặt phẳng (α) song song với trục, cắt hình trụ theo thiết diện $ABB'A'$, biết một cạnh của thiết diện là một dây của đường tròn đáy hình trụ và căng một cung 120°. Diện tích thiết diện $ABB'A'$ là

A $\sqrt{3}$. **B** $2\sqrt{3}$. **C** $2\sqrt{2}$. **D** $3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Vì thiết diện qua trục là hình vuông nên $h = 2r$.
Diện tích xung quanh hình trụ bằng $4\pi \Rightarrow 2\pi rh = 4\pi \Rightarrow 2\pi r.2r = 4\pi \Rightarrow r = 1$.
Theo định lý cosin: $AB^2 = OA^2+OB^2-2OA.OB.\cos 120^\circ = 3 \Rightarrow AB = \sqrt{3}$.
Vậy diện tích của $ABB'A'$ là $2.\sqrt{3}$.



Chọn phương án B

Câu 50. Hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều và có thể tích $V = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3$. Diện tích chung quanh S của hình nón đó là

Ⓐ $S = \dfrac{1}{2}\pi a^2$. Ⓑ $S = 4\pi a^2$. Ⓒ $S = 2\pi a^2$. Ⓓ $S = \pi a^2$.

Lời giải.

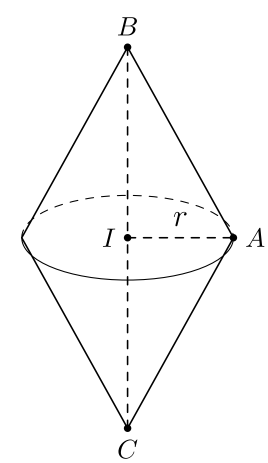
Thiết diện qua trục là tam giác đều nên hình nón đó có $l = 2R \Rightarrow h = R\sqrt{3}$.
Lại có $V = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3 = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{1}{3}\pi R^3\sqrt{3} \Rightarrow R^3 = a^3 \Rightarrow R = a$.
Vậy diện tích xung quanh hình nón là $S_{xq} = \pi Rl = \pi a^2$.
Chọn phương án D

Câu 51. Trong không gian cho tam giác đều ABC cạnh a. Khi quay tam giác đó xung quanh trục BC ta được một hình tròn xoay. Tính diện tích xung quanh của hình tròn xoay đó.

Ⓐ $S_{xq} = 2\pi a^2\sqrt{3}$. Ⓑ $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$. Ⓒ $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{4}$. Ⓓ $S_{xq} = \pi a^2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm BC.
Hình tròn xoay được tạo bởi hai hình nón bằng nhau như hình vẽ.
Khi đó $l = AB; r = IA$.
Do đó
$S_{xq} = 2\pi \cdot r \cdot l = 2\pi\dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \pi a^2\sqrt{3}$.



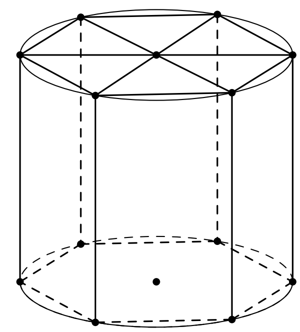
Chọn phương án D

Câu 52. Một đội xây dựng cần hoàn thiện một hệ thống cột tròn của một cửa hàng kinh doanh gồm 10 chiếc. Trước khi hoàn thiện mỗi chiếc cột là một khối bê tông cốt thép hình lăng trụ lục giác đều có cạnh 20 cm; sau khi hoàn thiện (bằng cách trát thêm vữa vào xung quanh) mỗi cột là một khối trụ có đường kính đáy bằng 42 cm. Chiều cao của mỗi cột trước và sau khi hoàn thiện là 4 m. Biết lượng xi măng cần dùng chiếm 80% lượng vữa và cứ một bao xi măng 50 kg thì tương đương với 64000 cm^3 xi măng. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu bao xi măng loại 50 kg để hoàn thiện toàn bộ hệ thống cột?

(A) 25 bao. (B) 17 bao. (C) 18 bao. (D) 22 bao.

Lời giải.

Thể tích khối trụ lục giác đều là $V_1 = 400.6.\frac{1}{2} \cdot 20^2 \cdot \sin 60^\circ = 240000\sqrt{3}$ cm^3.



Thể tích khối trụ sau khi trát là $V_2 = \pi R^2 \cdot h = \pi \cdot 21^2 \cdot 400 = 176400\pi$ cm^3

Thể tích của xi măng cần để trát vào một cột là

$V = (V_2 - V_1) \cdot 0{,}8 = \left(17640\pi - 24000\sqrt{3}\right) \cdot 8$ cm^3

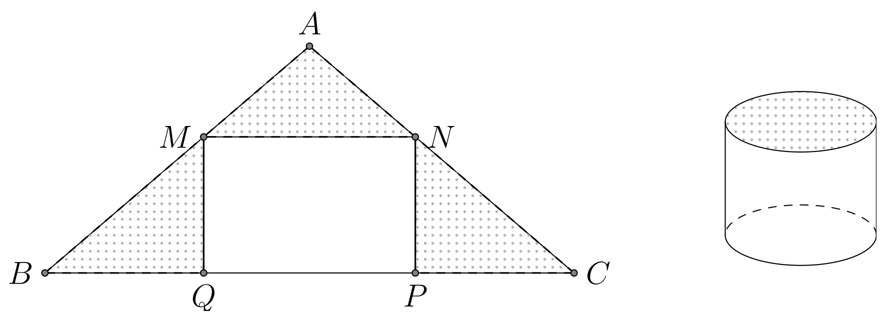
Thể tích của xi măng cần để trát vào 10 cột là

$V = (V_2 - V_1) \cdot 0{,}8 \cdot 10 = \left(176400\pi - 240000\sqrt{3}\right) \cdot 8$ cm^3.

Số bao xi măng cần ít nhất để hoàn thiện toàn bộ hệ thống cột là $\dfrac{\left(176400\pi - 240000\sqrt{3}\right) \cdot 8}{64000} \approx 17{,}3$ bao.

Chọn phương án (C)

Câu 53. Có tấm bìa hình tam giác đều ABC cạnh bằng a. Người ta muốn cắt tấm bìa đó thành hình chữ nhật $MNPQ$ rồi cuộn lại thành một hình trụ không đáy như hình vẽ.



Diện tích hình chữ nhật đó bằng bao nhiêu để diện tích xung quanh của hình trụ là lớn nhất?

(A) $\dfrac{a^2}{2}$. (B) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$. (C) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. (D) $\dfrac{a^2}{8}$.

Lời giải.

Giả sử $PQ = MN = x$ $(0 < x < a)$. Do ABC là tam giác đều nên AMN là tam giác đều. Suy ra $AN = x$, $NC = a - x$ và $PC = \dfrac{a-x}{2}$.

Diện tích xung quanh của hình trụ S_{xq} bằng diện tích hình chữ nhật $MNPQ$.

Suy ra $S_{xq} = MN \cdot NP = x \cdot \sqrt{(a-x)^2 - \left(\dfrac{a-x}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x(a-x) \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{x+a-x}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$ (Theo BĐT Cô - si).

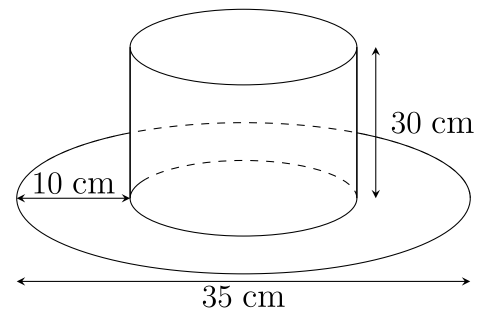
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = a - x \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2}$.

Vậy diện tích hình chữ nhật bằng $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

Chọn phương án (B)

Câu 54.

Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật với các kích thước như hình vẽ dưới đây. Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không kể viền, mép, phần thừa).



(A) $750,25\pi$ cm^2. (B) 700π cm^2.
(C) $756,25\pi$ cm^2. (D) $754,25\pi$ cm^2.

Lời giải.

Tổng diện tích được tính bằng tổng diên tích xung quanh của hình trụ và diện tích một đáy, với diện tích hình vành khăn.

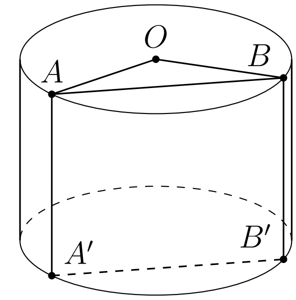
Ta có: $S = 2\pi \cdot 7,5 \cdot 30 + \pi \cdot 7,5^2 + \pi\left(17,5^2 - 7,5^2\right) = 756,25\pi$.

Chọn phương án (C)

Câu 55. Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng 4π, thiết diện qua trục là hình vuông. Một mặt phẳng (α) song song với trục cắt hình trụ theo thiết diện là tứ giác $ABB'A'$, biết một cạnh của thiết diện là dây cung của đường tròn đáy của hình trụ và căng một cung $120°$. Tính diện tích thiết diện $ABB'A'$.

(A) $3\sqrt{2}$. (B) $\sqrt{3}$. (C) $2\sqrt{3}$. (D) $2\sqrt{2}$.

Lời giải.



Gọi r là bán kính đường tròn đáy của hình trụ. Vì thiết diện qua trục của hình trụ là một hình vuông nên chiều cao bằng đường kính đường tròn đáy hay $2r$. Suy ra $2\pi r \cdot 2r = 4\pi$ hay $r = 1$. Do đó

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos 120°} = \sqrt{3}$$

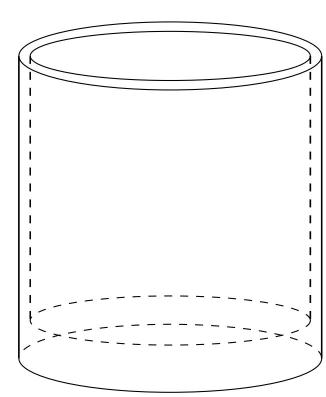
Vậy diện tích thiết diện $ABB'A'$ là $S_{ABB'A'} = AD \cdot AB = 2\sqrt{3}$.

Chọn phương án (C)

Câu 56. Để làm một chiếc cốc bằng thủy tinh dạng hình trụ với đáy cốc dày 1,5 cm, thành xung quanh cốc dày 0,2 cm và có thể tích thật (thể tích nó đựng được) là 480π cm^3 thì người ta cần ít nhất bao nhiêu cm^3 thủy tinh?

(A) $75{,}66\pi$ cm^3. (B) $80{,}16\pi$ cm^3. (C) $85{,}66\pi$ cm^3. (D) $70{,}16\pi$ cm^3.

Lời giải.



Gọi bán kính và chiều cao hình trụ bên trong lần lượt là r và h.

Ta có: $V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \dfrac{V}{\pi r^2} = \dfrac{480}{r^2}$.

Thể tích hình trụ bên ngoài là:

$V = \pi\left(r + 0{,}2\right)^2 \cdot (h + 1,5) = \pi\left(r + 0{,}2\right)^2 \cdot \left(\dfrac{480}{r^2} + 1,5\right)$.

Thể tích thủy tinh là: $\pi\left(r + 0{,}2\right)^2 \cdot \left(\dfrac{480}{r^2} + 1{,}5\right) - 480\pi$.

Xét $f(r) = \pi\left(r + 0{,}2\right)^2 \cdot \left(\dfrac{480}{r^2} + 1{,}5\right), r > 0$.

$$\Rightarrow f'(r) = 2\pi\left(r + 0{,}2\right)\left(\frac{480}{r^2} + 1{,}5\right) + \pi\left(r + 0{,}2\right)^2 \cdot \left(-\frac{960}{r^3}\right).$$

$f'(r) = 0 \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{480}{r^2} + 1{,}5\right) = (r + 0,2) \cdot \dfrac{960}{r^3} \Leftrightarrow 3 = \dfrac{192}{r^3} \Leftrightarrow r = 4.$

Bảng biến thiên của hàm số $f(r)$

r	0		4		$+\infty$
$f'(r)$		$-$	0	$+$	
$f(r)$	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{27783\pi}{50}$	$\nearrow$	$+\infty$

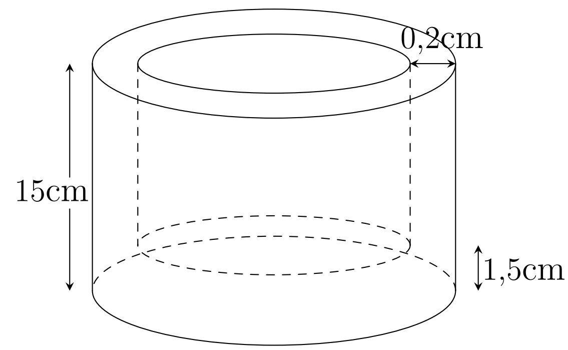
Vậy thể tích thủy tinh người ta cần ít nhất là $\dfrac{27783}{50}\pi - 480\pi \approx 75{,}66\pi\,\mathrm{cm}^3$.

Chọn phương án A

Câu 57.

Người ta cần sản xuất một chiếc cốc thủy tinh có dạng hình trụ không có nắp với đáy cốc và thành cốc làm bằng thủy tinh đặc, phần đáy cốc dày đều $1,5$ cm và thành xung quanh cốc dày đều $0,2$ cm như hình vẽ bên.

Biết rằng chiều cao của chiếc cốc là 15 cm và khi ta đổ 180 ml nước vào thì đầy cốc. Nến giá thủy tinh là 500 đ/1cm^3 thì giá tiền thủy tinh để sản xuất chiếc cốc đó gần nhất với số tiền nào sau đây?



A 25 nghìn đồng. **B** 31 nghìn đồng. **C** 40 nghìn đồng. **D** 20 nghìn đồng.

Lời giải.

Gọi V_1 là thể tích thực của chiếc cốc có bán kính đáy là r, chiều cao h_1;

V_2 là thể tích của khối thủy tinh đặc cần tính;

V là thể tích của chiếc cốc (bao gồm thể tích thực và thể tích phần thủy tinh đặc) có bán kính đáy R và chiều cao h.

Theo đề bài ta có $V_1 = 180 = \pi r^2 h_1 \Rightarrow r = \sqrt{\dfrac{180}{\pi(15 - 1,5)}} = \sqrt{\dfrac{40}{3\pi}}$.

Theo giả thiết suy ra $R = r + 0,2 \Rightarrow V = \pi R^2 h = \pi\left(\sqrt{\dfrac{40}{3\pi}} + 0,2\right)^2 \cdot 15 \approx 240,72\ \mathrm{cm}^3$

$\Rightarrow$ thể tích của khối thủy tinh đặc là $V_2 = V - V_1 \approx 60,72\ \mathrm{cm}^3$.

Suy ra số tiền để sản xuất 1 cốc thủy tinh là $60{,}72 \times 500 \approx 30.360$ đồng.

Vậy số tiền gần nhất là 31 nghìn đồng.

Chọn phương án B

Câu 58. Cho một khối trụ có diện tích xung quanh của khối trụ bằng 80π. Tính thể tích của khối trụ biết khoảng cách giữa hai đáy bằng 10.

A 160π. **B** 400π. **C** 40π. **D** 64π.

Lời giải.

Gọi h là chiều cao, r là bán kính đáy của khối trụ. Khi đó ta có $S_{\text{xq}} = 2\pi rh \Leftrightarrow r = \dfrac{S_{\text{xq}}}{2\pi h}$.

Khi đó thể tích của khối trụ là

$$V = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{S_{\text{xq}}}{2\pi h}\right)^2 \cdot h = \frac{S_{\text{xq}}^2}{4\pi h} = \frac{(80\pi)^2}{4\pi \cdot 10} = 160\pi.$$

Chọn phương án A

Câu 59. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $2a$, diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và đáy là hình tròn nội tiếp $ABCD$ bằng

A $\dfrac{\pi a^2\sqrt{17}}{4}$. **B** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{17}}{2}$. **C** $\pi a^2\sqrt{17}$. **D** $2\pi a^2\sqrt{17}$.

Lời giải.

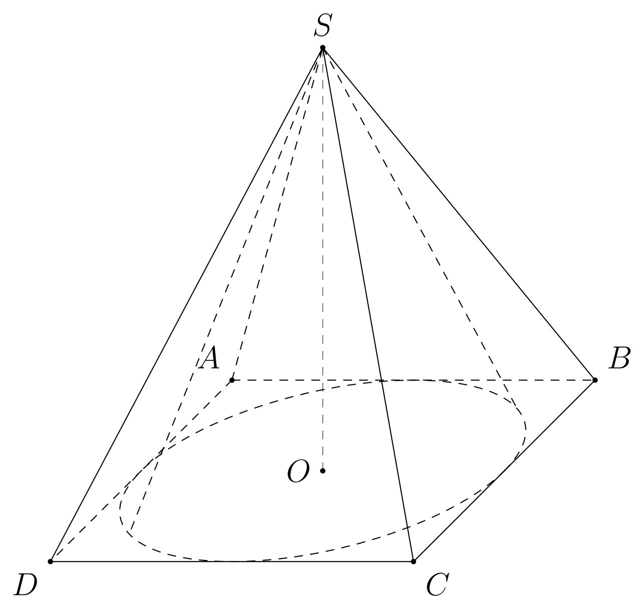
Ta có bán kính của hình nón là $R = \dfrac{a}{2}$.

Chiều cao hình nón bằng chiều cao hình chóp $h = SO = 2a$.

Độ dài đường sinh là $l = \sqrt{h^2 + R^2} = \dfrac{a\sqrt{17}}{2}$.

Suy ra diện tích xung của hình nón là

$$S_{\text{xq}} = \pi Rl = \frac{\pi a^2\sqrt{17}}{4}.$$



Chọn phương án A

Câu 60. Cho một hình trụ và hình vuông $ABCD$ cạnh a có hai đỉnh A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ và hai đỉnh còn lại nằm trên đáy thứ hai của hình trụ sao cho mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với đáy của hình trụ một góc 45°. Diện tích xung quanh S_{xq} và thể tích V của khối trụ là

A $S_{\text{xq}} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{4}$; $V = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{16}$.

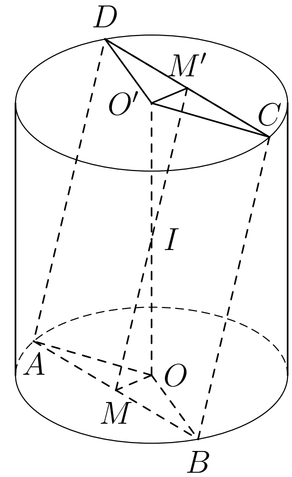
B $S_{\text{xq}} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{3}$; $V = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{32}$.

C $S_{\text{xq}} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$; $V = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{8}$.

D $S_{\text{xq}} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$; $V = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{16}$.

Lời giải.

Gọi O, O' lần lượt là tâm của đường tròn đáy của hình trụ và M, M', I lần lượt là trung điểm của AB, CD, OO'.
Ta có $MM' = AD = a \Rightarrow IM = \dfrac{a}{2}$.
Vì $(ABCD)$ tạo với đáy hình trụ một góc 45° nên $\widehat{IMO} = 45^\circ$
$\Rightarrow IO = OM = \dfrac{a}{2\sqrt{2}} \Rightarrow OO' = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.
Bán kính đường tròn đáy của hình trụ là $R = \sqrt{OM^2 + MB^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.
Diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ là
$S_{\text{xq}} = 2\pi R \cdot OO' = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$; $V = \pi R^2 \cdot OO' = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{16}$.

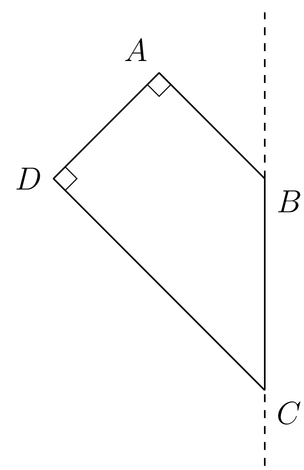


Chọn phương án D

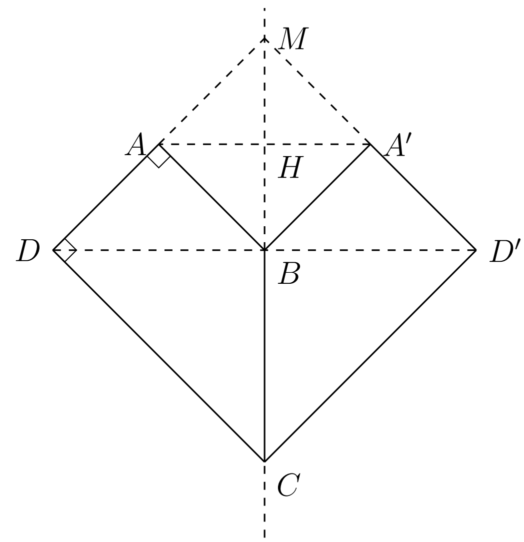
D MỨC ĐỘ 4

Câu 61.
Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D có $CD = 2AB = 2AD = 4$. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra bởi hình thang $ABCD$ khi quay xung quanh đường thẳng BC.

(A) $V = \dfrac{20\pi\sqrt{2}}{3}$. (B) $V = \dfrac{32\pi\sqrt{2}}{3}$. (C) $10\pi\sqrt{2}$. (D) $V = \dfrac{28\pi\sqrt{2}}{3}$.



Lời giải.



Gọi A', D' lần lượt là điểm đối xứng của A, D qua đường thẳng BC.
Gọi M là giao điểm của AD và $A'D'$.
Ta có $AB = AD = 2$, $CD = 4$ suy ra $AH = BH = \sqrt{2}$ và $BD = BC = 2\sqrt{2}$.
Ta có $\dfrac{AA'}{DD'} = \dfrac{1}{2}$ suy ra $MA = AD = 2$ và $MB = 2\sqrt{2}$.
Gọi V_1 là thể tích của khối nón có chiều cao $BC = 2\sqrt{2}$ và bán kính đường tròn đáy là $BD = 2\sqrt{2}$.
Gọi V_2 là thể tích của khối nón có chiều cao $BM = 2\sqrt{2}$ và bán kính đường tròn đáy là $BD = 2\sqrt{2}$.
Gọi V_3 là thể tích của khối nón có chiều cao $BH = \sqrt{2}$ và bán kính đường tròn đáy là $AH = \sqrt{2}$.
Gọi V_4 là thể tích của khối nón có chiều cao $MH = \sqrt{2}$ và bán kính đường tròn đáy là $AH = \sqrt{2}$.
Ta có $V_1 = V_2$ và $V_3 = V_4$.
Khi đó
$V = V_1 + V_2 - V_3 - V_4 = 2V_1 - 2V_3$
$= 2\dfrac{1}{3}\left[(2\sqrt{2})^2\pi \cdot 2\sqrt{2} - (\sqrt{2})^2\pi \cdot \sqrt{2})\right] = \dfrac{28\pi\sqrt{2}}{3}$.

Câu 62. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC), ABC$có tam giác vuông tại B. Biết $BC = 2a, AB = 2a\sqrt{3}, AD = 6a$. Quay tam giác ABC và ABD (bao gồm cả điểm bên trong 2 tam giác) xung quanh đường thẳng AB ta được hai khối tròn xoay. Thể tích phần chung của 2 khối tròn xoay đó bằng:

Ⓐ $\dfrac{5\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. Ⓑ $\dfrac{3\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. Ⓒ $\dfrac{64\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. Ⓓ $\dfrac{4\sqrt{3}\pi a^3}{2}$.

Lời giải.

Phương pháp: Công thức tính thể tích khối nón tròn xoay có chiều cao h và bán kính đáy R là: $V = \dfrac{1}{4}\pi R^2 h$.

Cách giải:

Ta có:
Khối nón (N_1) được sinh bởi ΔABC khi quay quanh AB có chiều cao $h_1 = AB$ và bán kính đáy $R_1 = BC$.
Khối nón (N_2) được sinh bởi ΔADB khi quay quanh AB có chiều cao $h_2 = AB$ và bán kính đáy $R_2 = AD$.
Do hai khối nón cùng có chiều cao AB nên hai đáy của hai khối nón nằm trong hai mặt phẳng song song.
Trong mặt phẳng đáy của hình nón (N_1) kẻ đường kính $GH//DE$. Dễ dàng chứng minh được DEGH là hình thang cân.
Gọi $M = AG \cap BE; N = AH \cap BD, I = AB \cap MN$. Khi đó phần chung giữa hai khối nón (N_1) và (N_2) là hai khối nón: Khối nón (N_3) đỉnh B, đường cao BI, bán kính đáy $IN \Rightarrow V_3 = \dfrac{1}{3}\pi.IN^2.BI$

Khối nón (N_4) đỉnh A, đường cao AI, bán kính đáy $IN \Rightarrow V_4 = \frac{1}{3}\pi.IN^2.AI$

Thể tích phần chung $V = V_3 + V_4 = \frac{1}{3}\pi.IN^2.BI + \frac{1}{3}\pi.IN^2.AI = \frac{1}{3}\pi.IN^2.(AI+BI) = \frac{1}{3}\pi.IN^2.AB$ Áp dụng định lí Ta-lét ta có:

$\frac{MN}{GH} = \frac{AI}{AB}; \frac{MN}{DE} = \frac{BI}{AB} \Rightarrow \frac{MN}{GH} + \frac{MN}{DE} = \frac{AI+BI}{AB} = 1$

$\Rightarrow MN\left(\frac{1}{2BC} + \frac{1}{2AD}\right) = 1 \Leftrightarrow MN.\left(\frac{1}{2.2a} + \frac{1}{2.6a}\right) = 1 \Leftrightarrow MN = 3a$

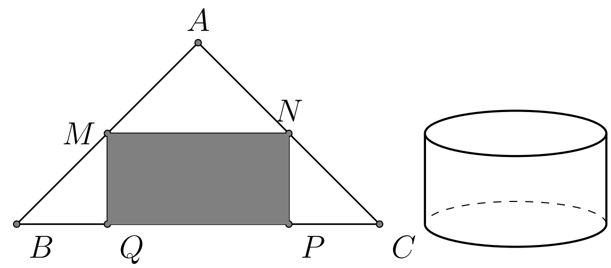
Dễ thấy I là trung điểm của MN $\Rightarrow IN = \frac{MN}{2} = \frac{3a}{2}$.

Vậy $V = \frac{1}{3}\pi.\left(\frac{3a}{2}\right)^2.2a\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}\pi a^3}{2}$.

Chọn phương án B

Câu 63.

Có tấm bìa hình tam giác vuông cân ABC có cạnh huyền bằng a. Người ta muốn cắt tấm bìa đó thành hình chữ nhật $MNPQ$ rồi cuộn lại thành một hình trụ không đáy như hình vẽ. Diện tích hình chữ nhật đó bằng bao nhiêu để diện tích xung quanh của hình trụ là lớn nhất?



A $\frac{a^2}{2}$. **B** $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$. **C** $\frac{a^2}{8}$. **D** $\frac{\sqrt{3}a^2}{8}$.

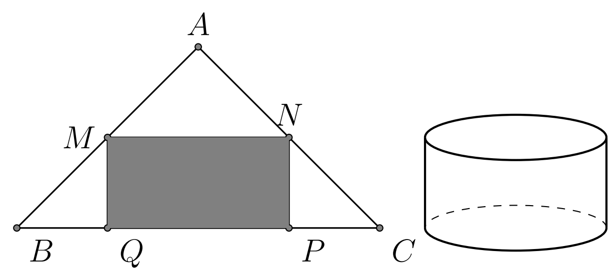
Lời giải.

Đặt $MQ = NP = x \Rightarrow MN = PQ = a - 2x$

với điều kiện $0 < 2x < a$

$S_{xq} = S_{MNPQ} = x(a-2x) = \frac{1}{2}\cdot 2x(a-2x) \leq \frac{a^2}{8}$

Dấu "=" xảy ra khi $a - 2x = 2x \Leftrightarrow x = \frac{a}{4}$

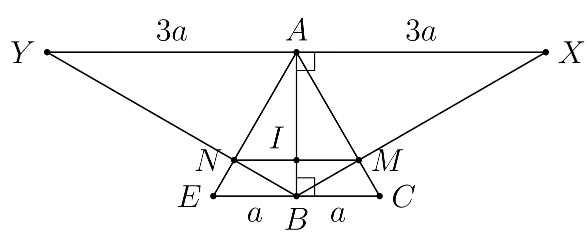


Chọn phương án C

Câu 64. Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$, ABC là tam giác vuông tại B. Biết $BC = a$, $AB = a\sqrt{3}$, $AD = 3a$. Quay các tam giác ABC và ABD (bao gồm cả điểm bên trong hai tam giác) xung quanh đường thẳng AB ta được hai khối trong xoay. Tính thể tích V phần chung của hai khối tròn xoay đó.

A $V = \frac{3\sqrt{3}\pi a^3}{16}$. **B** $V = \frac{8\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **C** $V = \frac{5\sqrt{3}\pi a^3}{16}$. **D** $V = \frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{16}$.

Lời giải.



Cắt khối tròn xoay bởi mặt phẳng (ABC) ta thu được thiết diện như hình vẽ. Áp dụng định lí Thales ta có

$$\frac{BN}{YN}=\frac{NE}{NA}=\frac{BE}{AY}=\frac{1}{3},$$
$$\frac{BM}{XM}=\frac{CM}{AM}=\frac{BC}{AX}=\frac{1}{3}.$$

Suy ra $IM=\frac{1}{4}AX=\frac{3a}{4}$. Phần chung của hai khối tròn xoay thu được gồm hai khối nón khi quay các tam giác AIM và BIM quanh trục AB. Do đó thể tích của nó là

$$V=\frac{1}{3}\pi IM^2\cdot IA+\frac{1}{3}\pi IM^2\cdot IB=\frac{1}{3}\pi IM^2\cdot AB=\frac{3\sqrt{3}\pi a^3}{16}.$$

Chọn phương án A

Câu 65. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi V_a, V_b, V_c tương ứng là thể tích của các hình tròn xoay tạo bởi tam giác ABC khi cho nó lần lượt quay xung quanh các cạnh BC, CA, AB. Hệ thức nào sau đây đúng?

A $\frac{1}{V_a^2}=\frac{1}{V_b^2}+\frac{1}{V_c^2}$. **B** $V_a^2=V_b^2+V_c^2$. **C** $V_a^2=V_b^2V_c^2$. **D** $\frac{1}{V_a^2}=\frac{V_b^2V_c^2}{V_b^2+V_c^2}$.

Lời giải.

Đặt $AB=c, BC=a, AC=b$. Ta có, $V_b=\frac{bc^2\pi}{3}$, $V_c=\frac{cb^2\pi}{3}$, $V_a=\frac{b^2c^2\pi}{3a}$. Khi đó, $\frac{1}{V_a^2}=\frac{1}{V_b^2}+\frac{1}{V_c^2}$.

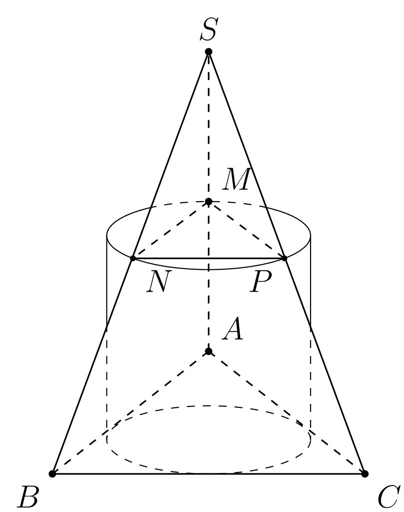
Chọn phương án A

Câu 66. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, M, N, P lần lượt là trung điểm SA, SB, SC. Dựng một hình trụ có một đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP, một đáy thuộc mặt phẳng (ABC). Biết diện tích xung quanh của hình trụ bằng tổng diện tích hai đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A $\frac{1}{4}a^3$. **B** $\frac{1}{12}a^3$. **C** $\frac{1}{8}a^3$. **D** $\frac{1}{6}a^3$.

Lời giải.

Vì MN là đường trung bình của tam giác SAB nên $MN=\frac{AB}{2}=\frac{a}{2}$. Tương tự ta cũng có $NP=MP=\frac{a}{2}$, dẫn tới $\triangle MNP$ đều.



Khi đó bán kính đáy của hình trụ là $r=\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Gọi h là chiều cao của hình trụ, khi đó ta có:

$2r\pi h=2r^2\pi \Rightarrow h=r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Vì M là trung điểm SA nên

$\mathrm{d}\,[S,(ABC)]=2\mathrm{d}\,[M,(ABC)]=2h=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

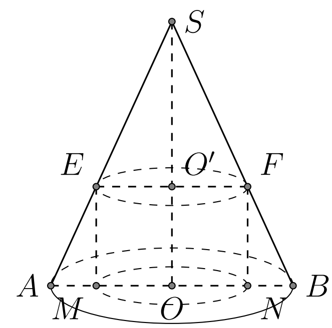
Dẫn tới $V_{S.ABC}=\frac{S_{ABC}\cdot \mathrm{d}\,[S,(ABC)]}{3}=\frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3}}{3}=\frac{a^3}{12}$.

Chọn phương án B

Câu 67. Cho hình nón (N) có bán kính đáy $r = 20(\text{cm})$, chiều cao $h = 60(\text{cm})$ và một hình trụ (T) nội tiếp hình nón (N) (hình trụ (T) có một đáy thuộc hình nón và một đáy nằm trên mặt xung quanh của hình nón). Tính thể tích V của hình trụ (T) có diện tích xung quanh lớn nhất?

A $V = 3000\pi(\text{cm}^3)$. **B** $V = \dfrac{32000}{9}\pi(\text{cm}^3)$. **C** $V = 3600\pi(\text{cm}^3)$. **D** $V = 4000\pi(\text{cm}^3)$.

Lời giải.



Giả sử hình nón (N) có đường tròn đáy tâm O, bán kính r, S là đỉnh và hình trụ (T) có hai đường tròn đáy tâm O, O' bán kính R. Do giả thiết ta có $SO = h = 60\,\text{cm}$.

Xét tam giác SOB vì $FN \parallel SO$ theo định lý Talet ta có

$$\frac{NB}{BO} = \frac{FN}{SO} = \frac{BF}{SB}.$$

Suy ra

$$FN = \frac{NB \cdot SO}{BO} \Leftrightarrow FN = \frac{60\,(20 - R)}{20} \Leftrightarrow FN = 3\,(20 - R)\,.$$

Gọi S_{xq} là diện tích xung quang của hình trụ (T) khi đó
$S_{xq} = 2\pi R \cdot FN = 6\pi R\,(20 - R)$.

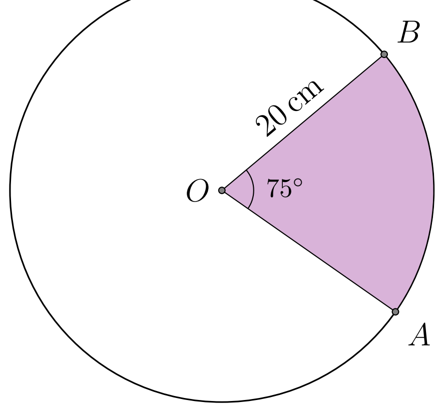
Do giả thiết $0 < R < 20$ nên theo bất đẳng thức Côsi $R\,(20 - R) \le \left(\dfrac{R + 20 - R}{2}\right)^2 \le 100$. Do đó $S_{xq} \le 200\pi$.

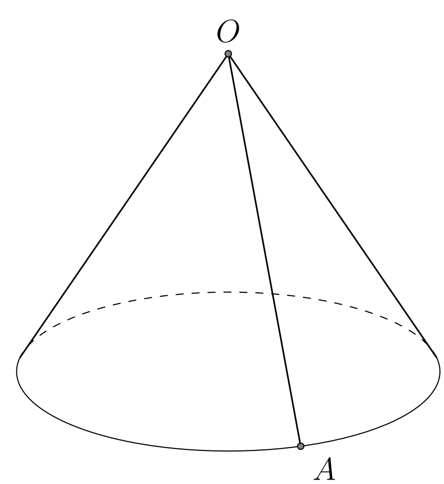
Dấu đẳng thức xảy ra khi $R = 20 - R \Leftrightarrow R = 10\,(\text{cm})$ suy ra $FN = 30.\,(\text{cm})\,$.

Khi đó thể tích hình trụ $V = \pi R^2 \cdot FN = \pi \cdot 100 \cdot 30 = 3000\pi\,\left(\text{cm}^3\right)$.

Chọn phương án A

Câu 68. Nhân dịp Trường THPT Nguyễn Khuyến tổ chức đi học tập ngoại khóa ở Đà Lạt. Đoàn Trường có tổ chức một cuộc thi làm nón để vui chơi Noel. Hưởng ứng cuộc thi đó, tập thể lớp 12A10 làm những chiếc nón theo các bước như sau: Cắt một mảnh giấy hình tròn tâm O bán kính 20 cm. Sau đó cắt bỏ đi phần hình quạt OAB như hình vẽ sao cho góc ở tâm $\widehat{AOB} = 75^\circ$. Tiếp theo dán phần hình quạt còn lại theo hai bán kính OA và OB với nhau thì sẽ được một hình nón có đỉnh là O và đường sinh là OA. Hỏi thể tích V của khối nón được tạo thành bằng bao nhiêu?





(A) $V=\dfrac{3125\pi\sqrt{551}}{648}$. (B) $V=\dfrac{8000\pi}{3}$. (C) $V=\dfrac{45125\pi\sqrt{215}}{648}$. (D) $V=\dfrac{1000\pi\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Diện tích hình quạt OAB bị cắt đi qua là $S=\dfrac{\pi\times 20^2\times 75}{360}=\dfrac{250\pi}{3}$.

Suy ra diện tích xung quanh của hình nón được tạo thành là $S_{\text{xq}}=400\pi-\dfrac{250\pi}{3}=\dfrac{950\pi}{3}$.

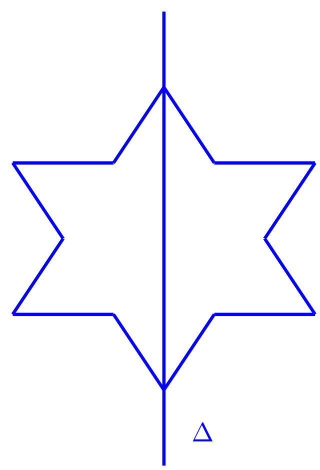
Gọi r là bán kính đường tròn đáy của hình nón, ta có $20\pi r=\dfrac{950\pi}{3}\Rightarrow r=\dfrac{95}{6}$.

Gọi h là đường cao của hình nón, ta có $h^2=20^2-\left(\dfrac{95}{6}\right)^2=\dfrac{5375}{36}\Rightarrow h=\dfrac{5\sqrt{215}}{6}$.

Vậy thể tích khối nón được tạo thành là $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi\times\left(\dfrac{95}{6}\right)^2\times\dfrac{5\sqrt{215}}{6}=\dfrac{45125\pi\sqrt{215}}{648}$.

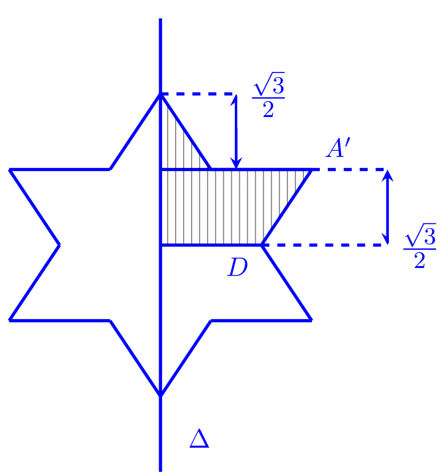
Chọn phương án C

Câu 69. Khi cho hình ngôi sao (xem hình vẽ bên dưới), có tất cả các cạnh đều bằng 1, quay xung quanh trục Δ ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích khối tròn xoay đó.



(A) $\dfrac{5\pi\sqrt{3}}{6}$. (B) $\dfrac{5\pi\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{5\pi\sqrt{3}}{2}$. (D) $\dfrac{5\pi\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



Xét phần hình ngôi sao thuộc góc phần tư thứ nhất. Cắt hình trên bởi hai đường thẳng đi qua A' và D, đồng thời vuông góc với đường thẳng Δ ta được một tam giác vuông với độ dài các cạnh góc vuông là $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và một hình thang vuông với chiều cao bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$, đáy lớn bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$, đáy nhỏ bằng 1.

Quay tam giác vuông trên quanh trục Δ ta được khối nón tròn xoay có thể tích

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi\sqrt{3}}{24}.$$

Quay hình thang vuông trên quanh trục Δ ta được khối nón cụt có thể tích

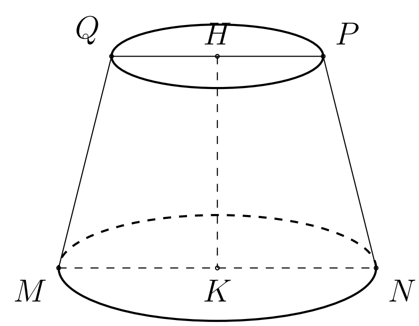
$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{19\pi\sqrt{3}}{24}.$$

Do đó thể tích khối nón tròn xoay cần tìm là $V = 2(V_1 + V_2) = \frac{5\pi\sqrt{3}}{3}$.

Chọn phương án B

Câu 70.

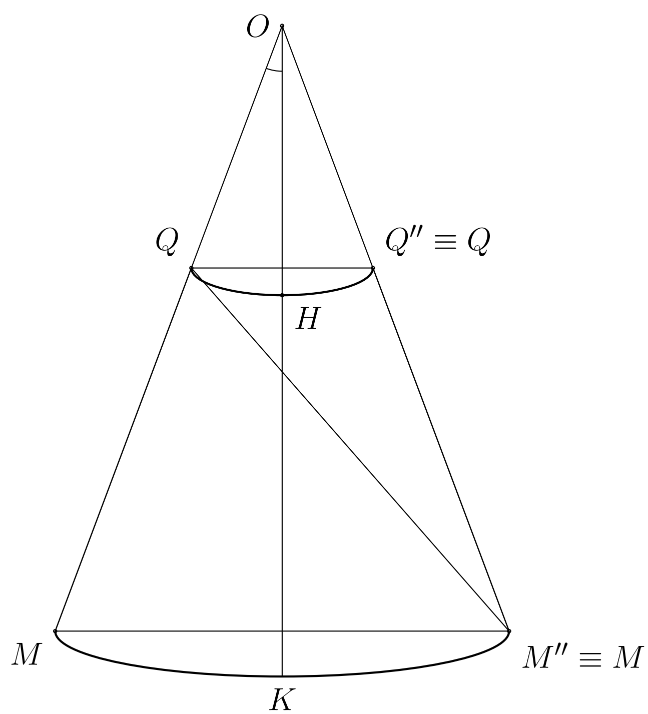
Có một chiếc cốc làm bằng giấy được úp ngược như hình vẽ bên. Chiều cao của chiếc cốc là $HK = 2\sqrt{143}$ cm, bán kính đáy cốc $HP = 1$ cm, bán kính miệng cốc là $KN = 3$ cm. Một con kiến đang đứng ở điểm M của miệng cốc dự định sẽ bò hai vòng quanh thân cốc để lên đến đáy cốc ở đi ểm P. Tính quãng đường ngắn nhất để con kiến có thể thực hiện được dự định của mình.



A $1 + \sqrt{579}$ cm.
B $12\sqrt{7}$ cm.
C $24 + 6(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ cm.
D $\sqrt{579}$ cm.

Lời giải.

Đặt b, a, h lần lượt là bán kính đáy cốc, miệng cốc và chiều cao của cốc, α là góc kí hiệu như trên hình vẽ bên. Ta "trải" hai lần mặt xung quanh cốc lên mặt phẳng sẽ được một hình quạt của một khuyên với cung nhỏ $QQ' = 4\pi b$ và và cung lớn $MM' = 4\pi a$. Độ dài ngắn nhất của đường đi của con kiến là độ dài đoạn thẳng QM". Áp dụng định lí hàm số cosin ta được



$$l = \sqrt{QO^2 + OM''^2 - 2QO \cdot OM'' \cdot \cos 2\alpha}.$$

Ta có $Q''M'' = MQ = \sqrt{(a-b)^2 + h^2}$.

Gọi l_1, l_2 lần lượt là độ dài cung nhỏ QQ'' và MM'', ta có

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{4\pi a}{4\pi b} = \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{OM}{OQ} = \dfrac{OQ + AM}{OQ} = 1 + \dfrac{MQ\alpha}{2\pi b} \Rightarrow \alpha = \dfrac{2\pi(a-b)}{MQ} = \dfrac{2\pi(a-b)}{\sqrt{(a-b)^2 + h^2}} \quad (2)$

$\dfrac{MQ}{OQ} = \dfrac{a}{b} - 1 = \dfrac{a-b}{b} \Rightarrow OQ = \dfrac{b\sqrt{(a-b)^2+h^2}}{a-b} \quad (3)$

$OM'' = OQ + QM = \dfrac{b\sqrt{(a-b)^2+h^2}}{a-b} + \sqrt{(a-b)^2+h^2} \quad (4).$

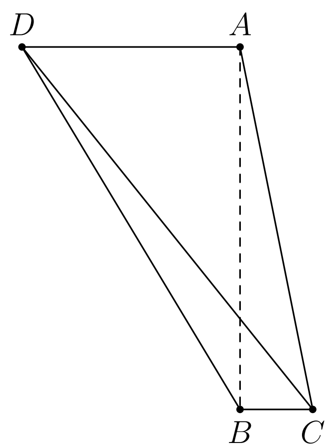
Thay $(2),(3),(4)$ vào (1) ta được $l = 12\sqrt{7}$ cm.

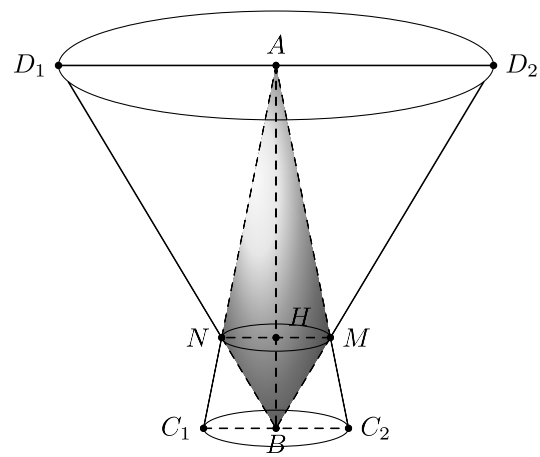
Chọn phương án B

Câu 71. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$, ABC là tam giác vuông tại B. Biết $BC = a$, $AB = a\sqrt{3}$, $AD = 3a$. Quay các tam giác ABC và ABD (bao gồm cả điểm bên trong 2 tam giác) xung quanh đường thẳng AB ta được 2 khối tròn xoay. Thể tích phần chung của 2 khối tròn xoay đó bằng

A $\dfrac{5\sqrt{3}\pi a^3}{16}$. **B** $\dfrac{3\sqrt{3}\pi a^3}{16}$. **C** $\dfrac{8\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **D** $\dfrac{4\sqrt{3}\pi a^3}{16}$.

Lời giải.





Tứ diện $ABCD$ có $\begin{cases} DA \perp (ABC) \\ BC \perp (ABD) \end{cases}$, do đó khi quay hai tam giác ABC và ABD quanh trục AB ta sẽ được hai hình nón tròn xoay, và phần chung của hai hình nón này là phần tô màu xám ở hình trên.

Khi đó xét mặt phẳng qua trục AB của hai hình nón $(C_1C_2D_2D_1)$, gọi $M = BD_2 \cap AC_2$; $N = BD_1 \cap AC_1$.

Ta có $\triangle BMC_2 \backsim \triangle D_2MA$, nên

$$\frac{BM}{D_2M} = \frac{BC_2}{AD_2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{HM}{AD_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{HM}{BC_2} = \frac{3}{4} \Rightarrow HM = \frac{3a}{4}.$$

Suy ra

— Thể tích khối nón (ANM) là $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi HM^2 \cdot AH = \dfrac{1}{3}\pi\dfrac{9a^2}{16} \cdot AH.$

— Thể tích khối nón (BNM) là $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi HM^2 \cdot BH = \dfrac{1}{3}\pi\dfrac{9a^2}{16} \cdot BH.$

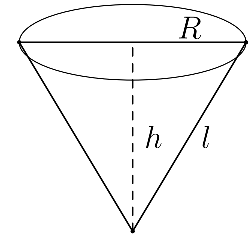
Vậy thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi\frac{9a^2}{16}(AH + BH) = \frac{1}{3}\pi\frac{9a^2}{16} \cdot AH = \frac{3\sqrt{3}\pi a^3}{16}.$$

Chọn phương án B

Câu 72.

Khi sản xuất cái phễu hình nón (không có nắp) bằng nhôm, các nhà thiết kế luôn đạt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm phểu ít nhất, tức là diện tích xung quanh của hình nón là nhỏ nhất. Hỏi nếu ta muốn sản xuất cái phễu có thể tích là 2 dm^3 thì diện tích xung quanh của cái phễu sẽ có giá trị nhỏ nhất gần với giá trị nào sau đây nhất?



A 6,85 dm^2. **B** 6,75 dm^2. **C** 6,65 dm^2. **D** 6,25 dm^2.

Lời giải.

Gọi R, h, l lần lượt là bán kính đáy, chiều cao và độ dài đường sinh của cái phễu.

Khi đó $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h = 2 \Leftrightarrow h = \frac{6}{\pi R^2}$ và $l = \sqrt{h^2 + R^2} = \sqrt{\frac{36}{\pi^2 R^4} + R^2}$.

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi \cdot R \cdot l = \pi R\sqrt{\frac{36}{\pi^2 R^4} + R^2} = \sqrt{\frac{36}{R^2} + \pi^2 R^4}$.

Ta có $\frac{36}{R^2} + \pi^2 R^4 = \frac{18}{R^2} + \frac{18}{R^2} + \pi^2 R^4 \geq 3\sqrt[3]{(18\pi)^2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{18}{R^2} = \pi^2 R^4 \Leftrightarrow R = \sqrt[6]{\frac{18}{\pi^2}}$.

Suy ra $\min S_{xq} = \sqrt{3\sqrt[3]{(18\pi)^2}} \approx 6,65$.

Chọn phương án C

Câu 73. Anh T dự định làm một cái bể đựng nước hình trụ bằng inox có nắp đậy, thể tích 20m^3. Chi phí làm mỗi m^2 đáy là 500 ngàn đồng, mỗi m^2 nắp là 300 ngàn đồng, mỗi m^2 mặt xung quanh là 400 ngàn đồng. Để chi phí làm bể là ít nhất thì anh T cần chọn bán kính bể gần nhất với số nào sau đây? (*Xem độ dày của tấm inox là không đáng kể*)

A 1,45m. **B** 1,47m. **C** 1,08m. **D** 1,50m.

Lời giải.

Gọi bán kính đáy và chiều cao của bể lần lượt là r, h (mét).

Khi đó $\pi r^2 h = 20$.

Tổng chi phí làm bể là $\pi r^2 \cdot 500 + \pi r^2 \cdot 300 + 2\pi rh \cdot 400 = 800\pi(r^2 + rh)$ ngàn đồng.

Áp dụng BĐT AM-GM ta có

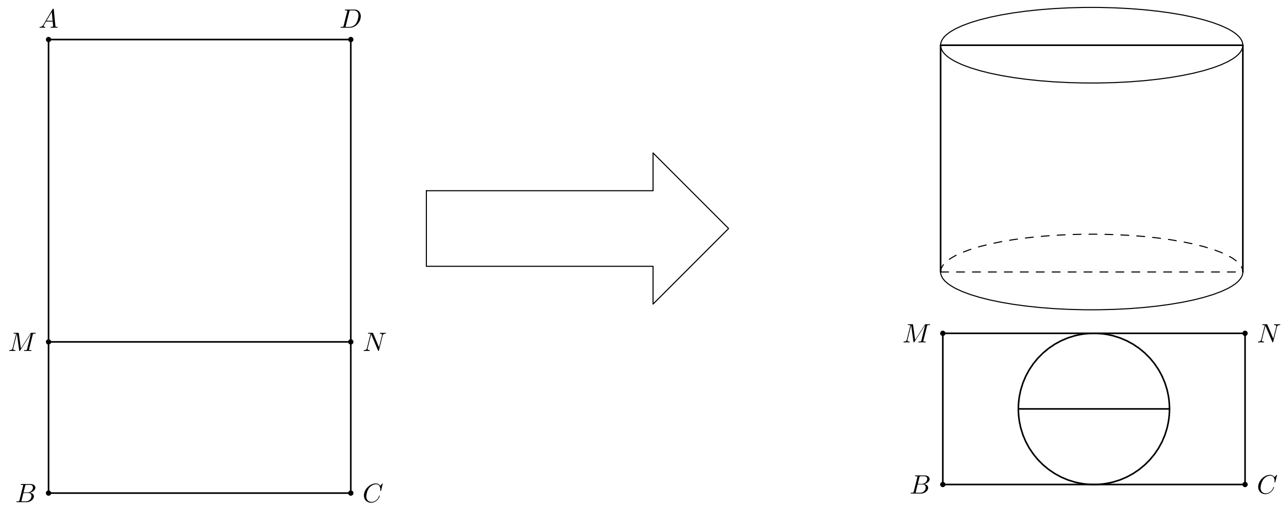
$$r^2 + rh = r^2 + \frac{rh}{2} + \frac{rh}{2} \geq 3\sqrt[3]{r^2 \cdot \frac{rh}{2} \cdot \frac{rh}{2}} = 3\sqrt[3]{\frac{r^4h^2}{4}} = 3\sqrt[3]{\frac{100}{\pi^2}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} r^2 = \frac{rh}{2} \\ \pi r^2 h = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 2r \\ \pi r^2 h = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}} \approx 1,47 \\ h = 2\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}. \end{cases}$

Vậy để chi phí làm bể là ít nhất thì anh T cần chọn bán kính bể là 1,47 mét.

Chọn phương án B

Câu 74. Sử dụng mảnh inox hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 1 (m^2), cạnh $BC = x$ (m) để làm một thùng đựng nước có đáy, không có nắp theo quy trình như sau:



Chia hình chữ nhật $ABCD$ thành 2 hình chữ nhật $ADNM$ và $BCNM$, trong đó phần hình chữ nhật $ADNM$ được gò thành phần xung quanh hình trụ có chiều cao bằng AM; phần hình chữ nhật $BCNM$ được cắt ra một hình tròn để làm đáy của hình trụ trên (phần inox còn thừa được bỏ đi). Tính gần đúng giá trị x để thùng nước trên có thể tích lớn nhất (coi như các mép nối không đáng kể).

A 1,37 m. **B** 1,02 m. **C** 0,97 m. **D** 1 m.

Lời giải.

Ta có $AB \cdot BC = 1 \Rightarrow AB = \dfrac{1}{x}$.

Gọi R (m) là bán kính đáy của hình trụ inox gò được, chu vi hình tròn đáy bằng $BC = x$ (m).

Do đó $2\pi R = x \Leftrightarrow R = \dfrac{x}{2\pi}$, $BM = 2R = \dfrac{x}{\pi} \Rightarrow AM = AB - BM = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{\pi}$.

Thể tích khối trụ inox gò được là $V = \pi R^2 h = \pi \cdot \left(\dfrac{x}{2\pi}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{\pi}\right) = \dfrac{x(\pi - x^2)}{4\pi^2}$.

Xét $f(x) = x(\pi - x^2)$ với $x > 0$.

Ta có $f'(x) = \pi - 3x^2$, giải $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{\pi}{3}}$ (vì $x > 0$). Bảng biến thiên

x	0		$\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{2\pi\sqrt{3\pi}}{9}$	$\searrow$	$-\infty$

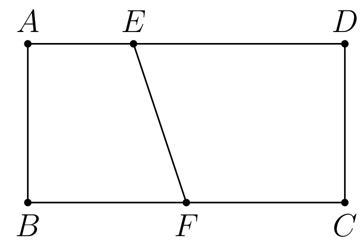
Từ bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}\right) = \dfrac{2\pi\sqrt{3\pi}}{9}$.

Thể tích V lớn nhất khi và chỉ khi $f(x)$ lớn nhất $\Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{\pi}{3}} \approx 1{,}02$ (m).

Chọn phương án B

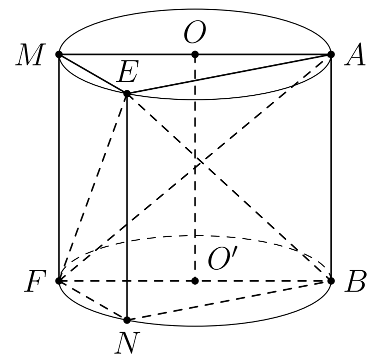
Câu 75.

Có một miếng bìa hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 3$, $AD = 6$. Trên cạnh AD lấy điểm E sao cho $AE = 2$, trên cạnh BC lấy điểm F là trung điểm của BC. Cuốn miếng bìa lại sao cho cạnh AB và DC trùng nhau để tạo mặt xung quanh của một hình trụ. Khi đó tính thể tích V của tứ diện $ABEF$.



A $V = \dfrac{\pi}{3}$. **B** $V = \dfrac{9\sqrt{3}}{2\pi^2}$. **C** $V = \dfrac{2}{3\pi^2}$. **D** $V = \dfrac{3\pi^3}{2}$.

Lời giải.



Vì $AD = 6$ nên suy ra chu vi đáy hình trụ là $2\pi r = 6 \Rightarrow r = \dfrac{3}{\pi}$.

Do F là trung điểm của BC nên BF là đường kính và $BF = \dfrac{6}{\pi}$.

Ta tính được $FE = \sqrt{10}$.

Dựng hình lăng trụ $MAE.FNB$ (như hình vẽ), đáy MEA là tam giác vuông tại E, suy ra $V_{AEBF} = \dfrac{1}{3}V_{MAE.FNB}$.

Ta có

$$AE = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}2\pi r \Rightarrow \widehat{EOA} = \frac{1}{3}2\pi = \frac{2\pi}{3}.$$

Xét trong tam giác cân OEA có

$$EA = \sqrt{2OA^2 - 2OA^2\cos\frac{2\pi}{3}} = OA\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}.$$

Suy ra $ME = \sqrt{\left(\dfrac{6}{\pi}\right)^2 - \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}\right)^2} = \dfrac{3}{\pi}$.

Khi đó

$$V_{MAE.FNB} = \left(\frac{1}{2}ME \cdot EA\right)AB = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{\pi}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\cdot 3 = \frac{27\sqrt{3}}{2\pi^2}.$$

Vậy $V_{AEBF} = \dfrac{1}{3}V_{MAE.FNB} = V = \dfrac{9\sqrt{3}}{2\pi^2}$.

Chọn phương án B

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. B	3. D	4. C	5. C	6. D	7. A	8. C	9. D	10. A
11. B	12. D	13. A	14. B	15. D	16. D	17. D	18. D	19. D	20. D
21. A	22. C	23. D	24. B	25. D	26. D	27. D	28. A	29. B	30. D
31. A	32. A	33. B	34. B	35. A	36. B	37. D	38. B	39. D	40. A
41. A	42. A	43. C	44. A	45. D	46. D	47. D	48. B	49. B	50. D
51. D	52. C	53. B	54. C	55. C	56. A	57. B	58. A	59. A	60. D
62. B	63. C	64. A	65. A	66. B	67. A	68. C	69. B	70. B	71. B
72. C	73. B	74. B	75. B						

DẠNG 13. TÌM ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

A. $x=-2$. B. $x=2$. C. $x=1$. D. $x=-1$.

Lời giải.

Hàm số đạt cực đại tại điểm mà đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm.

Từ bảng biến hàm số đạt cực tại $x=-1$.

Chọn phương án D

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa x_0. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **đúng**?

A. Nếu $f'(x_0)=0$ thì hàm số đạt cực trị tại $x=x_0$.

B. Nếu hàm số đạt cực tiểu tại $x=x_0$ thì $f''(x_0)<0$.

C. Nếu hàm số đạt cực trị tại $x=x_0$ thì $f'(x_0)=0$.

D. Hàm số đạt cực trị tại $x=x_0$ khi và chỉ khi $f'(x_0)=0$.

Lời giải.

Đáp án "Nếu $f'(x_0)=0$ thì hàm số đạt cực trị tại $x=x_0$" và "Hàm số đạt cực trị tại $x=x_0$ khi và chỉ khi $f'(x_0)=0$" cùng **sai**. Chẳng hạn xét hàm số $f(x)=x^3$ có $f'(x)=3x^2, f'(0)=0 \Leftrightarrow x=0$ nhưng hàm số không đạt cực trị tại $x=0$.

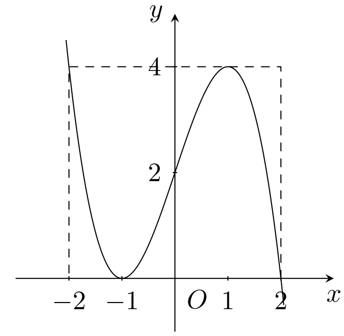
Đáp án "Nếu hàm số đạt cực tiểu tại $x=x_0$ thì $f''(x_0)<0$" **sai** vì ít nhất ta cần có $f'(x)=0$ hoặc $f'(x_0)$ không xác địnhchứ không phải $f''(x)<0$.

Chọn phương án C

Câu 2.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm

A $x = 1$. **B** $x = -2$. **C** $x = 2$. **D** $x = -1$.



Lời giải.

Căn cứ vào đồ thị, ta có

$f'(x) < 0,\ \forall x \in (-2; -1)$ và $f'(x) > 0,\ \forall x \in (-1, 0)$ suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

$f'(x) > 0,\ \forall x \in (0; 1)$ và $f'(x) < 0,\ \forall x \in (1; 2)$ suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

Chọn phương án D

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{3}{2}x^4 - 2mx^2 + \dfrac{7}{3}$ có cực tiểu mà không có cực đại.

A $m \geq 0$. **B** $m \leq 0$. **C** $m \geq 1$. **D** $m = -1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 6x^3 - 4mx = 2x(3x^2 - 2m)$.

Do đó hàm số trùng phương có cực tiểu mà không có cực đại khi phương trình $y' = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0$, tương đương $m \leq 0$.

Chọn phương án B

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số.

A 3. **B** 0. **C** 1. **D** 2.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	

Lời giải.

Dựa vào BBT suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Chọn phương án A

Câu 5. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A Hàm số đã cho có hai điểm cực trị. **B** Hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị.
C Hàm số đã cho không có giá trị cực tiểu. **D** Hàm số đã cho không có giá trị cực đại.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.
Vậy hàm số có hai điểm cực trị.
Chọn phương án **A**

Câu 6. Điểm cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ là

A $x = 25$. **B** $x = 3$. **C** $x = 7$. **D** $x = -1$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Do đó điểm cực tiểu của hàm số là $x = 3$.

Chọn phương án **B**

Câu 7. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 1. **B** 2. **C** 0. **D** 3.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 3 = 3\left(x-1\right)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Hàm số đã cho có đạo hàm không đổi dấu trên $\mathbb{R}$ nên nó không có cực trị.
Chọn phương án **C**

Câu 8. Tìm cực trị của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 + 4$?

A $x_{\text{CĐ}} = -1$, $x_{\text{CT}} = 0$. **B** $x_{\text{CĐ}} = 5$, $x_{\text{CT}} = 4$. **C** $x_{\text{CĐ}} = 0$, $x_{\text{CT}} = -1$. **D** $x_{\text{CĐ}} = 4$, $x_{\text{CT}} = 5$.

Lời giải.

+Ta có $y' = 6x^2 + 6x = 6x\left(x+1\right) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

+Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $y_{\text{CĐ}} = 5$; $y_{\text{CT}} = 4$.
Trắc nghiệm: Bài toán hỏi cực trị hàm số nên loại A, C. Mặt khác $y_{\text{CĐ}} > y_{\text{CT}}$.
Chọn phương án **B**

Câu 9.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Giá trị cực đại của hàm số bằng

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 5.

Lời giải.

Giá trị cực đại của hàm số bằng 5.

Chọn phương án (D)

Câu 10. Cho hàm số $y = x^4 - x^2 + 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.

(B) Hàm số có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

(C) Hàm số có 1 điểm cực trị.

(D) Hàm số có 2 điểm cực trị.

Lời giải.

Do hàm số trùng phương có hệ số $a > 0$ và $ab < 0$, suy ra hàm số có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.

Chọn phương án (A)

Câu 11. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ là điểm

(A) $M(1; 3)$. (B) $N(-1; 7)$. (C) $Q(3; 1)$. (D) $P(7; -1)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$. $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

$y'' = 6x$. Ta có $y''(1) = 6 > 0$ và $y(1) = 3$.

Do đó điểm cực tiểu của đồ thị là $M(1; 3)$.

Chọn phương án (A)

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm giá trị cực đại $y_{\text{CĐ}}$ và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho

(A) $y_{\text{CĐ}} = -2$ và $y_{\text{CT}} = 2$.

(B) $y_{\text{CĐ}} = 3$ và $y_{\text{CT}} = 0$.

(C) $y_{\text{CĐ}} = 2$ và $y_{\text{CT}} = 0$.

(D) $y_{\text{CĐ}} = 3$ và $y_{\text{CT}} = -2$.

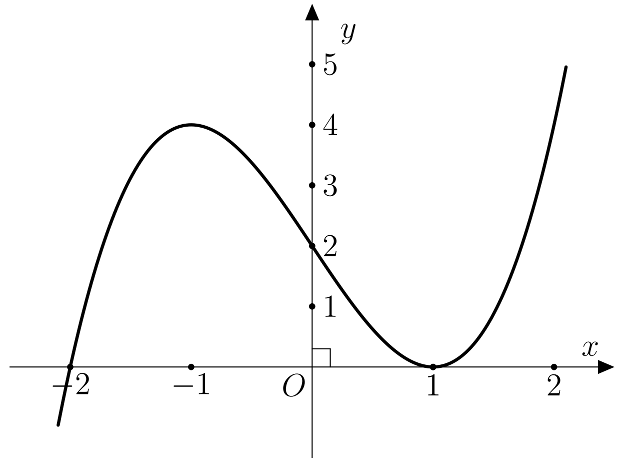
Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có $y_{\text{CĐ}} = 3$ và $y_{\text{CT}} = 0$.

Chọn phương án (B)

Câu 13.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm kết luận **đúng**



Ⓐ Hàm số $y = f(x)$ có điểm cực tiểu là $x = 2$. Ⓑ Hàm số $y = f(x)$ có giá trị cực đại là -1.
Ⓒ Hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại là $x = 4$. Ⓓ Hàm số $y = f(x)$ có giá trị cực tiểu là 0.

Lời giải.

Phương pháp:

Dựa vào cách đọc đồ thị hàm số để tìm điểm cực trị.

Ở đây cần lưu ý giá trị cực trị của hàm số là trung độ điểm cực trị của đồ thị hàm số, điểm cực trị của hàm số là hoành độ điểm cực trị của đồ thị hàm số.

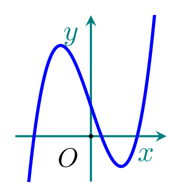
Cách giải:

Từ hình vẽ ta thấy đồ thị hàm số nhận $(1; 0)$ làm điểm cực tiểu và điểm $(-1; 4)$ làm điểm cực đại.
Nên hàm số $y = f(x)$ có giá trị cực tiểu là $y_{\text{CT}} = 0$.

Chọn phương án D

Câu 14.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?



Ⓐ Hàm số không có cực trị. Ⓑ Giá trị cực đại dương.
Ⓒ Điểm cực tiểu âm. Ⓓ Giá trị cực tiểu dương.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy:

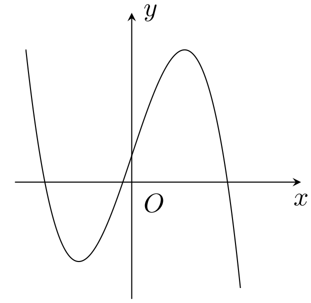
- Hàm số có hai cực trị $\Rightarrow A$ sai.
- Điểm cực đại nằm phía trên trục hoành $\Rightarrow$ Giá trị cực đại dương $\Rightarrow B$ đúng.
- Điểm cực tiểu nằm phía bên phải trục tung $\Rightarrow$ Điểm cực tiểu dương $\Rightarrow C$ sai.
- Điểm cực tiểu nằm phía dưới trục hoành $\Rightarrow$ Giá trị cực tiểu âm $\Rightarrow D$ sai.

Chọn phương án B

Câu 15.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho có mấy điểm cực trị?

A 0. **B** 4. **C** 2. **D** 1.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có 2 điểm cực trị.

Chọn phương án C

Câu 16.

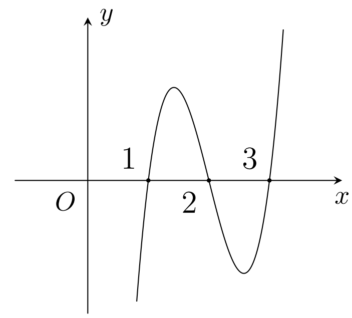
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

B Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.

C Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bốn điểm cực trị.

D Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị.



Lời giải.

Vì phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm và khi qua 3 nghiệm $f'(x)$ đều đổi dấu nên nên đồ thị hàm số có ba điểm cực trị.

Chọn phương án B

Câu 17.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

A Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

B Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$.

C Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$.

D Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.

Lời giải.

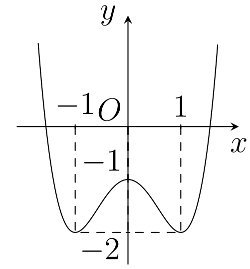
Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ và đạt cực tiểu tại $x = 4$.

Chọn phương án A

Câu 18.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Giá trị cực đại của hàm số bằng

(A) -2. (B) 0. (C) -1. (D) 1.



Lời giải.

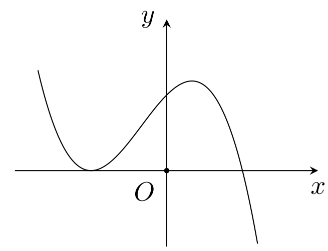
Dựa vào đồ thị hàm số ta suy ra giá trị cực đại bằng -1.

Chọn phương án (C)

Câu 19.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

(A) 2. (B) 1. (C) 0. (D) 3.

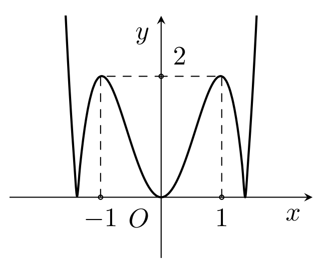


Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số, số điểm cực trị của hàm số đã cho là 2.

Chọn phương án (A)

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi đồ thị hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 4. (B) 5. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có 5 cực trị.

Chọn phương án (B)

B MỨC ĐỘ 2

Câu 21. Tìm tập nghiệm của phương trình $\sin 3x + 1 = 0$.

(A) $\left\{-\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$. (B) $\left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(C) $\left\{-\frac{\pi}{6} + k2\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$. (D) $\left\{-\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Xét phương trình: $\sin 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = -1 \Leftrightarrow 3x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Chọn phương án D

Câu 22. Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 - 2x + 1$. Hàm số có điểm cực đại tại $x = -1$, khi đó giá trị của tham số m thỏa mãn

(A) $m \in (-1; 0)$. (B) $m \in (0; 1)$. (C) $m \in (-3; -1)$. (D) $m \in (1; 3)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y = x^3 + 3mx^2 - 2x + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 + 6mx - 2$, $y'' = 6x + 6m$.

Hàm số có điểm cực đại tại $x = -1 \Rightarrow y'(-1) = 0 \Rightarrow 1 - 6m = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{6}$.

Với $m = \dfrac{1}{6} \Rightarrow \begin{cases} y'(-1) = 0 \\ y''(-1) < 0 \end{cases} \Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

Chọn phương án B

Câu 23. Cho hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - (m+1)x^2 + mx - 2$. Tìm m để hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

(A) $m = -1$. (B) $m = 1$. (C) không có m. (D) $m = -2$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = x^2 - 2(m+1)x + m$; $y'' = 2x - 2(m+1)$.

Vì hàm số đã cho là hàm số bậc ba nên

Hàm số có điểm cực đại là $x = -1$ khi và chỉ khi $\begin{cases} y'(-1) = 0 \\ y''(-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2(m+1) + m = 0 \\ -2 - 2(m+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} m = -1 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$.

Chọn phương án A

Câu 24. Giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ là:

(A) $y_{\text{CT}} = 3$. (B) $y_{\text{CT}} = -3$. (C) $y_{\text{CT}} = 4$. (D) $y_{\text{CT}} = -4$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 4x^3 - 4x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Dấu y'

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

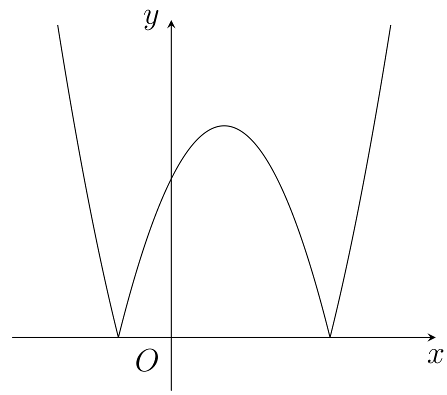
Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ và $x = 1$; $y_{\text{CT}} = -4$.

Chọn phương án D

Câu 25.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 1. **B** 2. **C** 3. **D** 4.



Lời giải.

Dựa vào hình vẽ ta có đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị.

Chọn phương án C

Câu 26. Tìm điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x + \frac{2}{x}$.

A $N(-2;-2)$. **B** $x = -2$. **C** $M(2;-2)$. **D** $x = 2$.

Lời giải.

$y = \frac{1}{2}x + \frac{2}{x}$ (TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

$\Rightarrow y' = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2-4}{2x^2}$.

Có $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$; y' không xác định $\Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y		↗	-2	↘	‖	↘		↗	

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -2 \Rightarrow y = -2$.

Vậy đồ thị hàm số có điểm cực đại là $N(-2;2)$.

Chọn phương án A

Câu 27. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + (6m-4)x^2 + 1 - m$ có 3 điểm cực trị

A $m \geq \frac{2}{3}$. **B** $m \leq \frac{2}{3}$. **C** $m > \frac{2}{3}$. **D** $m < \frac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $y = x^4 + (6m-4)x^2 + 1 - m$ (1)

Để đồ thị hàm số (1) có 3 điểm cực trị khi: $6m - 4 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{2}{3}$.

Chọn phương án D

Câu 28. Hàm số nào sau đây không có điểm cực trị?

A $y = x^3 + 3x + 1$. **B** $y = x^2 - 2x$. **C** $y = x^4 + 4x^2 + 1$. **D** $y = x^3 - 3x - 1$.

Lời giải.
Xét hàm số $y = x^3 + 3x + 1$. Ta có $y' = 3x^2 + 3 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số không có cực trị.
Chọn phương án A

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A 3. **B** 5. **C** 2. **D** 4.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \\ x = 4. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Vậy số điểm cực trị của hàm số đã cho là 2.
Chọn phương án C

Câu 30. Trong các hàm số sau đây hàm số nào có cực trị?

A $y = \sqrt{x}$.
B $y = x^4 - 2x^2 + 3$.
C $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 3x - 1$.
D $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$.

Lời giải.
Do hàm số trùng phương $y = x^4 - 2x^2 + 3$ có hệ số $a = 1 > 0$ và $ab = -2 < 0$, suy ra hàm số có cực trị.
Chọn phương án B

Câu 31. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$, mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

A $f(x)$ có giá trị cực đại là -3.
B $f(x)$ đạt cực đại tại $x = -2$.
C $M(-2; -2)$ là điểm cực đại.
D $M(0; 1)$ là điểm cực tiểu.

Lời giải.

— Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

— Đạo hàm $y' = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$.

— $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \Rightarrow y = -3 \\ x = 0 \Rightarrow y = 1 \end{array}\right.$

— Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty \ \| \ +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy mệnh đề sai là $M(-2;-2)$ là điểm cực đại.

Chọn phương án C

Câu 32. Gọi M, N là các điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^4 - 8x^2 + 3$. Độ dài đoạn thẳng MN bằng

A 10. **B** 6. **C** 8. **D** 4.

Lời giải.

— Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

— Đạo hàm $y' = x^3 - 16x$.

— $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 3 \\ x = \pm 4 \Rightarrow y = -61 \end{array}\right.$

— Giới hạn $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = +\infty$.

— Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-61	$\nearrow$	3	$\searrow$	-61	$\nearrow$	$+\infty$

— Ta có $M(-4;-61)$, $N(4;-61)$ suy ra $\overrightarrow{MN} = (8;0)$ nên $MN = 8$.

Chọn phương án C

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x+2)^3(2x-3)$. Tìm số điểm cực trị của $f(x)$.

A 3. **B** 2. **C** 0. **D** 1.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -2 \vee x = \dfrac{3}{2}$.

Chọn phương án B

Câu 34. Giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-x^3+mx^2+\left(m^2-12\right)x+2$ đạt cực tiểu tại $x=-1$ thuộc khoảng nào dưới đây?

(A) $(-4;0)$. (B) $(5;9)$. (C) $(0;3)$. (D) $(3;6)$.

Lời giải.

Ta có $y'=-3x^2+2mx+m^2-12$ và $y''=-6x+2m$.

Điều kiện cần để hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ là

$$y'(-1)=0\Leftrightarrow -3-2m+m^2-12=0\Leftrightarrow m^2-2m-15=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=5\\ m=-3.\end{array}\right.$$

Với $m=-3$ thì $y'=-3x^2-6x-3=-3(x+1)^2\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số không đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Với $m=5$ thì $y''(-1)=16>0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m=5\in(3;6)$.

Chọn phương án (D)

Câu 35. Đồ thị hàm số nào sau đây có 3 điểm cực trị?

(A) $y=x^3-6x^2+9x-5$. (B) $y=\left(x^2+1\right)^2$.

(C) $y=2x^4-4x^2+1$. (D) $y=-x^4-3x^2+4$.

Lời giải.

— Đáp án A: $y'=3x^2-6x+9=0$ vô nghiệm nên hàm số không có cực trị. Loại A.

— Đáp án B: $y'=4x\left(x^2+1\right)=0\Leftrightarrow x=0$ nên hàm số có 1 cực trị. Loại B.

— Đáp án C: Đây là hàm trùng phương có $ab=-8<0$ nên hàm số có 3 cực trị. Chọn C.

— Đáp án D: Đây là hàm trùng phương có $ab=3>0$ nên hàm số có 1 cực trị. Loại D.

Chọn phương án (C)

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)^3(x+2)$. Hàm số $f(x)$ có mấy điểm cực trị?

(A) 3. (B) 2. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

Do $f'(x)=x^2(x+1)^3(x+2)$ có các nghiệm $x=0$ (bội 2) nên loại.

Ngoài ra $f'(x)=0$ có hai nghiệm bội lẻ, đó là $x_1=-1; x_2=-2$.

Vậy hàm số có có 2 điểm cực trị.

Chọn phương án (B)

Câu 37. Hàm số $y=2x^3-x^2+5$ có điểm cực đại là

(A) $x=\dfrac{1}{3}$. (B) $x=5$. (C) $x=3$. (D) $x=0$.

Lời giải.

Phương pháp:

- Tính y' tìm nghiệm của $y'=0$.

- Tính y'' và tìm giá trị của y'' tại các điểm vừa tìm được.
Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai tại điểm x_0 thì điểm x_0 là điểm cực đại của hàm số trên nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0. \end{cases}$

Cách giải:

Ta có $y' = 6x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$

$y'' = 12x - 2 \Rightarrow y''(0) = -2 < 0;\ y''\left(\dfrac{1}{3}\right) = 2 > 0.$

Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$.

Chọn phương án D

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Lời giải.

Phương pháp:

Xét phương trình $f'(x) = 0$, nếu x_0 là nghiệm bội bậc chẵn của phương trình thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số, nếu x_0 là nghiệm bội bậc lẻ của phương trình thì x_0 là điểm cực trị của hàm số.

Cách giải:

Xét phương trình $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Trong đó $x = 0$, $x = 2$ là các nghiệm bội bậc lẻ nên hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.
(còn $x = 1$; $x = 3$ là các nghiệm bội bậc chẵn nên không phải là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$).

Chú ý: Các em có thể lập bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ rồi kết luận số điểm cực trị.

Chọn phương án A

Câu 39. Hàm số $y = x^3 - (m+2)x + m$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ khi:

A. $m = -1$. B. $m = 2$. C. $m = -2$. D. $m = 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - m - 2, y'' = 6x$.

Vì hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ nên $y'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 - m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Với $m = 1$ ta có $y''(1) = 6 > 0$. Vậy hàm số $y = x^3 - (m+2)x + m$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ khi $m = 1$

Chọn phương án D

Câu 40. Cho hàm số $y = x^3 = 3x^2 - 9x + 2$. Chọn kết luận đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$.
B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.
C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.
D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6x - 9$, cho $y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	-25	$\nearrow$	$+\infty$

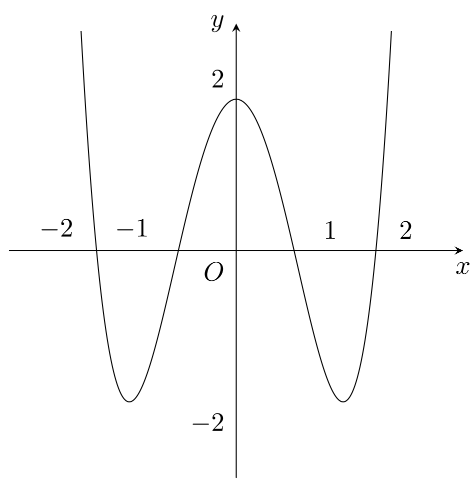
Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Chọn phương án (A)

C MỨC ĐỘ 3

Câu 41. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có dạng hình vẽ bên. Tính tổng tất cả giá trị nguyên của m để hàm số $y = |f(x) - 2m + 5|$ có 7 điểm cực trị.

(A) 6. (B) 3. (C) 5. (D) 2.



Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = f(x) - 2m + 5$ có được bằng cách tịnh tiến theo trục Oy là $-2m + 5$ đơn vị.

Muốn đồ thị $y = |f(x) - 2m + 5|$ có đủ 7 cực trị thì đồ thị hàm số $y = f(x) - 2m + 5$ phải cắt Ox như vậy thì $-2 < -2m + 5 < 2 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} < m < \dfrac{7}{2}$ do m nguyên nên chọn $m = 2; m = 3$. Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn.

Chọn phương án (C)

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x-2)^4(x-1)(x+3)\sqrt{x^2+3}$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

(A) 1. (B) 2. (C) 6. (D) 3.

Lời giải.

$$f'(x) = (x-2)^4(x-1)(x+3)\sqrt{x^2+3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2(nghiemboichan) \\ x = 1(nghiemdon) \\ x = -3(nghiemdon) \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Hàm số có hai điểm cực trị.

Chọn phương án B

Câu 43. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+2)x^2 + 3(m+2)^2$. Đồ thị của hàm số trên có ba cực trị tạo thành tam giác đều. Tìm mệnh đề đúng.

A $m \in (-1; 0)$. **B** $m \in (0; 1)$. **C** $m \in (1; 2)$. **D** $m \in (-2; -1)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 4(m+2)x$.

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 4x^3 - 4(m+2)x = 0$ có 3 nghiệm phân biệt(1)

Lại có $4x^3 - 4(m+2)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m+2 \end{array}\right.$

Do đó (1) $\Leftrightarrow m+2 > 0 \Leftrightarrow m > -2$ (*)

Khi đó $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m+2} \end{array}\right.$

Gọi ba điểm cực trị đó là $A(0; 3(m+2)^2), B\left(\sqrt{m+2}; 2(m+2)^2\right), C\left(-\sqrt{m+2}; 2(m+2)^2\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{m+2}; -(m+2)^2\right) \\ \overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{m+2}; -(m+2)^2\right) \\ \overrightarrow{BC} = \left(-2\sqrt{m+2}; 0\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = \sqrt{m+2+(m+2)^4} \\ AC = \sqrt{m+2+(m+2)^4} \\ BC = 2\sqrt{m+2} \end{cases}$$

Như vậy $AB = AC$ nên ta chỉ cần ép cho $AB = BC$

$$\Rightarrow m+2+(m+2)^4 = 4(m+2) \Leftrightarrow (m+2)^4 = 3(m+2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = \sqrt[3]{3} - 2 \end{array}\right.$$

Kết hợp với (*) ta được $m = \sqrt[3]{3} - 2$ thỏa mãn.

Chọn phương án A

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m+3)x + m - 4$. Tìm m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

A $-3 < m < -1$. **B** $m > 1$. **C** $m > 4$. **D** $m > 0$.

Lời giải.

Có $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn. Nên đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Xét $y = f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m+3)x + m - 4$. Có $f'(x) = x^2 - 2(m+1)x + (m+3)$.

Hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow y = f(x)$ có 2 điểm cực trị có hoành độ dương.

$\Leftrightarrow f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1 > 0; x_2 > 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 2 > 0 \\ m + 1 > 0 \\ m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty) \\ m > -1 \\ m > -3. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m > 1$.

Chọn phương án B

Câu 45. Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $m_0 \in (-1; 7)$. **B** $m_0 \in (-15; -7)$. **C** $m_0 \in (7; 10)$. **D** $m_0 \in (-7; -1)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m$.

Hàm số có 2 điểm cực trị khi và chỉ khi y' có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Khi đó x_1, x_2 là 2 nghiệm của y'. Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = \dfrac{m}{3}. \end{cases}$

Theo đề bài ra $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 13 \Leftrightarrow 4 - m = 13 \Leftrightarrow m = -9$.

Vậy $m_0 = -9$.

Chọn phương án B

Câu 46. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương nhỏ hơn 5 của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 + (m - 1)x^2 + (2m - 3)x - \dfrac{2}{3}$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A 5. **B** 3. **C** 6. **D** 4.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (2m-3)x - \dfrac{2}{3}$ đồng biến trên $(1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow y' = x^2 + 2(m-1)x + (2m-3) \geq 0,\ \forall x \in (1; +\infty)$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \geq -2mx - 2m,\ \forall x \in (1; +\infty)$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \geq -2m(x+1),\ \forall x \in (1; +\infty)$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} \geq -2m,\ \forall x \in (1; +\infty)$$
$$\Leftrightarrow x - 3 \geq -2m,\ \forall x \in (1; +\infty)$$
$$\Leftrightarrow m \geq 1.$$

Mà $m \in \mathbb{Z}, m < 5 \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4\}$. Suy ra có 4 giá trị của tham số m.

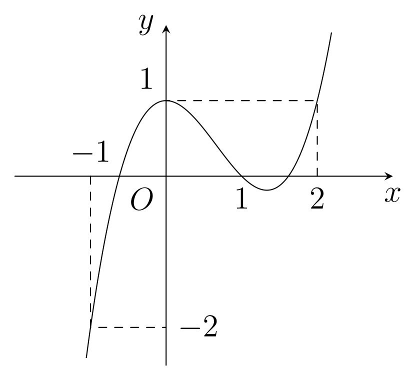
Chọn phương án D

Câu 47.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Hàm số $g(x) = f(x) - \dfrac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$ đạt cực đại tại điểm nào?

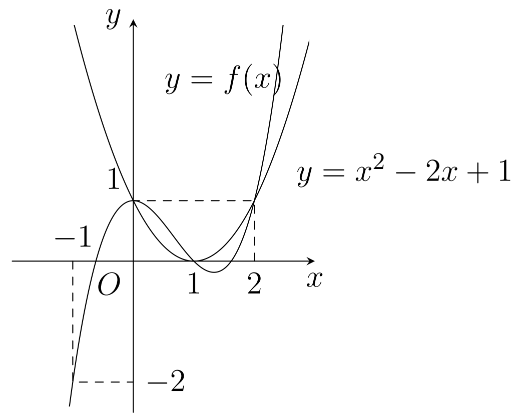
A $x = 2$. **B** $x = 0$. **C** $x = 1$. **D** $x = -1$.



Lời giải.

Ta có: $g'(x) = f'(x) - x^2 + 2x - 1$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$. (như hình vẽ).



Bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu của $g'(x)$ suy ra hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.

Chọn phương án C

Câu 48. Giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + \left(m^2 - 3m + 2\right)x + 5$ đạt cực đại tại 0 là

A $m = 1$. B $m = 1$ hoặc $m = 2$. C $m = 6$. D $m = 2$.

Lời giải.

Phương pháp:

Tính y' và y''.

Hàm số đạt cực trị tại x_0 thì $y'(x_0) = 0 \Leftrightarrow m = m_i, i = 1, 2, \ldots$

Với các giá trị m_i tính $y''(x_0)$.

+ Nếu $y''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.

+ Nếu $y''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu.

+ Nếu $y''(x_0) = 0$ chưa kết luận gì, ta sẽ thay giá trị $m = m_i$ tương ứng vào hàm số kiểm tra.

Cách giải:

$y = \frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + \left(m^2 - 3m + 2\right)x + 5$.

$\Rightarrow y' = x^2 - 2(m-1)\mathrm{x} + m^2 - 3m + 2$.

$\Rightarrow y'' = 2x - 2(m-1)$.

Ta có $y'(0) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2 \end{array}\right.$.

+) Với $m = 1$ ta có $y''(0) = 0$ chưa thể kết luận nên ta thay $m = 1$ vào đề bài được $y = \frac{1}{3}x^3 + 5$ hàm này không có cực trị nên $m = 1$ loại.

+) Với $m = 2$ ta có $y''(0) = -2 < 0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = 0$. Vậy $m = 2$ nhận.

Chọn phương án D

Câu 49. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?

A Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ có cực đại, cực tiểu.

(B) Hàm số $y = x^3 + 3x + 1$ có cực trị.

(C) Hàm số $y = -2x + 1 + \dfrac{1}{x+2}$ không có cực trị.

(D) Hàm số $y = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$ có 2 cực trị.

Lời giải.

Phương pháp:

Quy tắc 1:

- Tìm TXĐ của hàm số.
- Tính $f'(x)$. Tìm các điểm mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc không xác định.
- Lập bảng xét dấu $f'(x)$.
- Đưa ra kết luận về cực trị.

Quy tắc 2:

- Tìm TXĐ của hàm số.
- Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm các nghiệm $x_i, i = 1, 2, 3, \ldots$
- Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.
- Dựa vào dấu $f''(x_i)$ đưa ra kết luận về cực trị.

Cách giải:

+) $y = -x^3 + 3x^2 + 1 \Rightarrow y' = -3x^2 + 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ có cực đại, cực tiểu.

+) $y = x^3 + 3x + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 + 3 > 0, \forall x \Rightarrow$ Hàm số $y = x^3 + 3x + 1$ không có cực trị.

Vậy, khẳng định ở câu B là sai.

+) $y = -2x+1+\dfrac{1}{x+2}, (\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{-2\}) \Rightarrow y' = -2-\dfrac{1}{(x+2)^2} < 0, \forall x \in \mathscr{D} \Rightarrow$ Hàm số $y = -2x+1+\dfrac{1}{x+1}$ không có cực trị.

+) $y = x - 1 + \frac{1}{x-1}, (\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{-1\}) \Rightarrow y' = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in \mathscr{D} \\ x = 2 \in \mathscr{D}. \end{array}\right.$

Dễ dàng kiểm tra $y' = 0$ đổi dấu tại $x = 0; x = 2$. Suy ra hàm số $y = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$ có 2 cực trị.

Chọn phương án (B)

Câu 50. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 5$ có ba cực trị, đồng thời ba điểm cực trị với gốc tọa độ tạo thành một tứ giác nội tiếp. Tìm số phần tử của S.

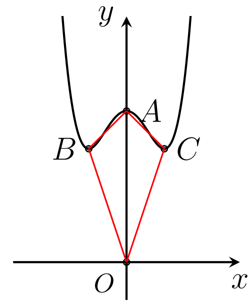
(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng dấu hiệu nhận biết của tứ giác nội tiếp.

Cách giải:



Ta có: $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 5 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4m^2x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = m \\ x = -m. \end{array}\right.$

Để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị thì $m \neq 0$.

Khi đó, tọa độ ba điểm cực trị là: $A(0; m^4 + 5), B(-m; 5), C(m; 5)$.

Dễ dàng chứng minh: $\Delta ABO = \Delta ACO \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C}$.

Mà tứ giác $ABOC$ nội tiếp, nên $\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ$.

Khi đó

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow (-m).(-m) + (-m^4).5 = 0 - 5m^4 + m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2(1 - 5m^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \,(\text{ktm}) \\ m = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}} \,(\text{tm}). \end{array}\right.$$

Vậy tập hợp S tất cả các giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu đề bài có 2 phần tử là $\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Chọn phương án B

Câu 51. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{(3m+2)x^2}{2} + (2m^2 + 3m + 1)x + m - 2$ (1). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số (1) có cực đại, cực tiểu $x_{\text{CĐ}}$, x_{CT} sao cho $3x_{\text{CĐ}}^2 = 4x_{\text{CT}}$. Khi đó, tổng các phần tử của tập S bằng

A $S = \dfrac{-4 - \sqrt{7}}{6}$. **B** $S = \dfrac{4 + \sqrt{7}}{6}$. **C** $S = \dfrac{-4 + \sqrt{7}}{6}$. **D** $S = \dfrac{4 - \sqrt{7}}{6}$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - (3m+2)x + (2m^2 + 3m + 1)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2m + 1 \\ x = m + 1 \end{array}\right.$.

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi chỉ khi $m \neq 0$.

— Trường hợp $m > 0$. Khi đó, $x_{\text{CĐ}} = m + 1$, $x_{\text{CT}} = 2m + 1$.

Ta có $3x_{\text{CĐ}}^2 = 4x_{\text{CT}} \Leftrightarrow 3(m+1)^2 = 4(2m+1) \Leftrightarrow 3m^2 - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \text{ (nhận)} \\ m = -\dfrac{1}{3} \text{ (loại)} \end{array}\right.$.

— Trường hợp $m < 0$. Khi đó, $x_{\text{CĐ}} = 2m + 1$, $x_{\text{CT}} = m + 1$.

Ta có $3x_{\text{CĐ}}^2 = 4x_{\text{CT}} \Leftrightarrow 3(2m+1)^2 = 4(m+1) \Leftrightarrow 12m^2 + 8m - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{-2 + \sqrt{7}}{6} \text{ (loại)} \\ m = \dfrac{-2 - \sqrt{7}}{6} \text{ (nhận)} \end{array}\right.$.

Vậy $S = \{1; \dfrac{-2-\sqrt{7}}{6}\}$. Do đó, tổng $1 + \dfrac{-2-\sqrt{7}}{6} = \dfrac{4-\sqrt{7}}{6}$.
Chọn phương án D

Câu 52. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thỏa mãn $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; $a > 0$ và $\begin{cases} d > 2019 \\ 8a + 4b + 2c + d - 2019 < 0 \end{cases}$
Số cực trị của hàm số $y = |f(x) - 2019|$ bằng

A 3. B 2. C 1. D 5.

Lời giải.

Ta có hàm số $g(x) = f(x) - 2019$ là hàm số bậc ba liên tục trên $\mathbb{R}$.
Do $a > 0$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
Để ý $g(0) = d - 2019 > 0$; $g(2) = 8a + 4b + 2c + d - 2019 < 0$.
Nên phương trình $g(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt trên $\mathbb{R}$.
Khi đó đồ thị hàm số $g(x) = f(x) - 2019$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt nên hàm số $y = |f(x) - 2019|$ có đúng 5 cực trị.
Chọn phương án D

Câu 53. Tìm các số thực m để hàm số $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$ có cực trị.

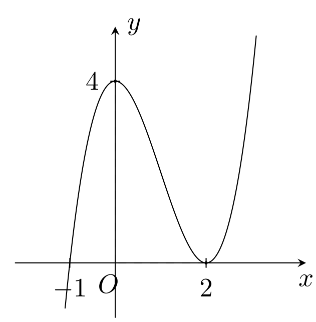
A $\left[\begin{array}{l} m \neq 2 \\ -3 < m < 1 \end{array}\right.$. B $-3 < m < 1$. C $\left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 1 \end{array}\right.$. D $-2 < m < 1$.

Lời giải.

Với $m = -2$, hàm số trở thành $y = 3x^2 - 2x - 5$.
$y' = 6x - 2, y' = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{3}$.
Vì $y' = 0$ có nghiệm và đổi dấu khi đi qua nghiệm nên với $m = -2$ hàm số có cực trị.
Với $m \neq -2$, $y' = 3(m+2)x^2 + 6x + m$.
Để hàm số có cực trị thì $\Delta' > 0 \Rightarrow 9 - 3m(m+2) > 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1$.
Kết hợp cả hai trường hợp suy ra $-3 < m < 1$.
Chọn phương án B

Câu 54.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trên khoảng $(-1; 3)$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A 0. B 2. C 3. D 1.



Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có trên khoảng $(-1; 3)$ có hai điểm cực trị.
Chọn phương án B

Câu 55. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x-5)(3x+2)$. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ là

(A) 4 . (B) 3 . (C) 1 . (D) 2 .

Lời giải.

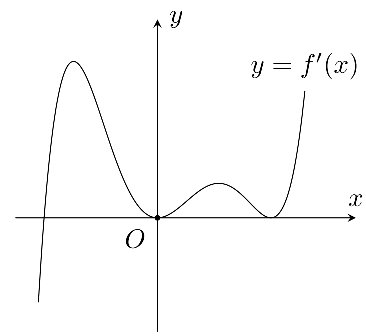
$f'(x) = (x-1)^2(x-5)(3x+2)$. Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu tại các điểm có hoành độ là $x = 5$ và $x = -\dfrac{2}{3}$ nên số điểm cực trị của hàm số là 2.

Chọn phương án (D)

Câu 56.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ bằng

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 1.



Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm lần lượt là x_1, x_2, x_3 (với $x_1 < x_2 < x_3$).

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	

Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu từ âm qua dương khi qua điểm x_1 này nên số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ bằng 1.

Chọn phương án (D)

Câu 57. Cho hàm số $f(x) = (m-2)\,x^3 - 2(2m-3)x^2 + (5m-3)\,x - 2m - 2$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị?

(A) 0. (B) 3. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Trường hợp 1: $m = 2$ thì hàm số $f(x) = -2x^2 + 7x - 6$ thì rõ ràng hàm số $y = |f(x)|$ có nhiều nhất 3 cực trị. Ta loại trường hợp này.

Trường hợp 2: $m \neq 2$ thì hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc 3. Do đó, hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

$\Leftrightarrow f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow (x-2)\left[(m-2)\,x^2 + (2-2m)\,x + m + 1\right] = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow (m-2)\,x^2 + (2-2m)\,x + m + 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - (m-2)(m+1) > 0 \\ (m-2)2^2 + (2-2m)2 + m + 1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m < 3 \end{cases}.$$

Kết hợp cả 2 trường hợp trên và điều kiện m nguyên dương ta suy ra $m = 1$.

Chọn phương án (C)

Câu 58. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m-2)x + 2m - 3$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 18$. Tính tổng P của tất cả các giá trị m trong S.

(A) $P = -4$.
(B) $P = 1$.
(C) $P = -\frac{3}{2}$.
(D) $P = -5$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 2(m+1)x + (m-2)$, $\Delta' = (m+1)^2 - (m-2) = m^2 + m + 3$.

Hàm số đã cho là hàm bậc ba nên có hai điểm cực trị khi chỉ khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 + m + 3 > 0$ (luôn đúng với mọi $m \in \mathbb{R}$).

Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = 2(m+1)$, $x_1x_2 = m - 2$.

Mà $x_1^2 + x_2^2 = 18 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 18 \Leftrightarrow 4m^2 + 6m - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\frac{5}{2} \end{array}\right.$.

Vì m chỉ nhận giá trị nguyên nên $m = 1$. Vậy $P = 1$.

Chọn phương án (B)

Câu 59. Giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

(A) 1.
(B) -1.
(C) 3.
(D) -3.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m = 0$. (1)

Để hàm số có hai cực trị x_1, x_2 thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Theo Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = \frac{m}{3}. \end{cases}$

Mà $x_1^2 + x_2^2 = 6 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 6 \Leftrightarrow 4 - 2 \cdot \frac{m}{3} = 6 \Leftrightarrow m = -3$ (thỏa mãn điều kiện $m < 3$).

Vậy $m = -3$.

Chọn phương án (D)

Câu 60. Cho đồ thị (C) của hàm số $y' = (1+x)(x+2)^2(x-3)^3\left(1 - x^2\right)$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai.

(A) (C) có một điểm cực trị.
(B) (C) có ba điểm cực trị.
(C) (C) có hai điểm cực trị.
(D) (C) có bốn điểm cực trị.

Lời giải.

Ta có $y' = (1+x)^2(x+2)^2(x-3)^3(1-x)$ nên $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

50 DẠNG TOÁN PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA LẦN 2

x	$-\infty$		-2		-1		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Ta thấy đạo hàm đổi dấu hai lần nên hàm số có hai điểm cực trị suy ra đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.
Trắc nghiệm: Ta thấy phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm đơn hoặc bội lẻ nên đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.
Chọn phương án C

D MỨC ĐỘ 4

Câu 61. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2\left(x^4-1\right)+m\left(x^2-1\right)-6\left(x-1\right)\geq 0$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A $-\dfrac{3}{2}$. B 1. C $-\dfrac{1}{2}$. D $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.
Bất phương trình

$$\begin{aligned}&m^2\left(x^4-1\right)+m\left(x^2-1\right)-6\left(x-1\right)\geq 0\\ \Leftrightarrow\ &\left(x-1\right)\left[m^2\left(x^3+x^2+x+1\right)+m\left(x+1\right)-6\right]\geq 0.\end{aligned}$$

Đặt $f\left(x\right)=\left(x-1\right)\left[m^2\left(x^3+x^2+x+1\right)+m\left(x+1\right)-6\right]$.
Ta có $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ m^2\left(x^3+x^2+x+1\right)+m\left(x+1\right)-6=0\quad(1).\end{array}\right.$
Nếu $x=1$ không là nghiệm của phương trình (1) thì $x=1$ là nghiệm đơn của phương trình $f\left(x\right)=0$. Do vậy $f\left(x\right)$ đổi dấu khi qua nghiệm $x=1$.
Suy ra mệnh đề $f\left(x\right)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ là mệnh đề sai.
Do đó điều kiện cần để $f\left(x\right)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ là $x=1$ là nghiệm của phương trình (1).
Khi đó ta có $4m^2+2m-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-\dfrac{3}{2}.\end{array}\right.$

— Với $m=1$, ta có $f\left(x\right)=\left(x-1\right)^2\left(x^2+2x+4\right)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow m=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

— Với $m=-\dfrac{3}{2}$, ta có $f\left(x\right)=\dfrac{3}{4}(x-1)^2\left(3x^2+6x+7\right)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow m=-\dfrac{3}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $S=\left\{1;-\dfrac{3}{2}\right\}\Rightarrow$ Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng $-\dfrac{1}{2}$.
Chọn phương án C

Câu 62. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)$, với $\forall x\in\mathbb{R}$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x^2+m\right)$ có 8 điểm cực trị là

A 1. B 4. C 3. D 2.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = \left(3x^2 - 6x\right)\left(x^3 - 3x^2 + m - 1\right)\left(x^3 - 3x^2 + m\right)\left(x^3 - 3x62 + m - 2\right)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, x = 2 \\ x^3 - 3x^2 = -2 \quad (1) \\ x^3 - 3x^2 = -m + 1 \quad (2) \\ x^3 - 3x^2 = -m + 2 \quad (3) \end{array}\right..$$

Ta thấy (1), (2), (3) không có nghiệm chung và $\left(x^3 - 3x^2 + m - 1\right)^2 \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Để hàm số $g(x)$ có 8 cực trị thì (1), (3) đều có ba nghiệm phân biệt khác 0 và 2.

Xét hàm số $h(x) = x^3 - 3x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$ có $h'(x) = 3x^2 - 6x$.

$$h(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên để (1), (3) đều có ba nghiệm phân biệt khác 0 và 2

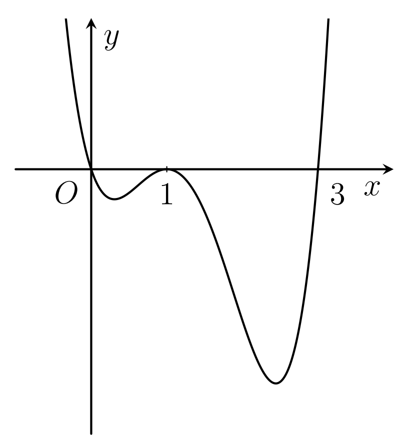
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < 0 \\ -4 < -m + 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 4 \\ 2 < m < 6 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m < 4.$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 3$.

Chọn phương án A

Câu 63.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tìm m để hàm số $y = f(x^2 - 2m)$ có ba điểm cực trị.



A $m \in \left(-\dfrac{3}{2}; 0\right]$. **B** $m \in (3; +\infty)$. **C** $m \in \left[0; \dfrac{3}{2}\right]$. **D** $m \in (-\infty; 0)$.

Lời giải.

Theo đồ thị ta có $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 3 \end{array}\right.$, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0; 3) \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \left[f\left(x^2-2m\right)\right]' = 2x\cdot f'(x^2-2m)$.

Cho $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2-2m)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-2m=0 \\ x^2-2m=1 \\ x^2-2m=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=2m \\ x^2=2m+1 \\ x^2=2m+3. \end{array}\right.$

Để hàm số có 3 điểm cực trị thì phương trình $y'=0$ phải có 3 nghiệm bội lẻ.

Ta thấy $x=0$ là một nghiệm bội lẻ. Dựa vào đồ thị của $y=f'(x)$ ta thấy $x=1$ là nghiệm bội lẻ (không đổi dấu), do đó ta không xét trường hợp $x^2-2m=1$. Suy ra để hàm số có 3 điểm cực trị thì

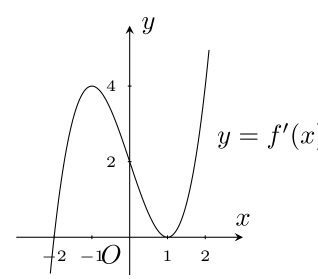
a) $x^2=2m$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 và $x^2=2m+3$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép bằng 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m\le -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing$.

b) $x^2=2m+3$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 và $x^2=2m$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép bằng 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} m>\dfrac{3}{2} \\ m\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2}<m\le 0$.

Vậy hàm số có 3 điểm cực trị khi $m\in\left(-\dfrac{3}{2};0\right]$.

Chọn phương án A

Câu 64. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-3\right)$.



A 4. B 2.

C 5. D 3.

Lời giải.

Quan sát đồ thị ta có $y=f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x=-2$ nên hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực trị là $x=-2$.

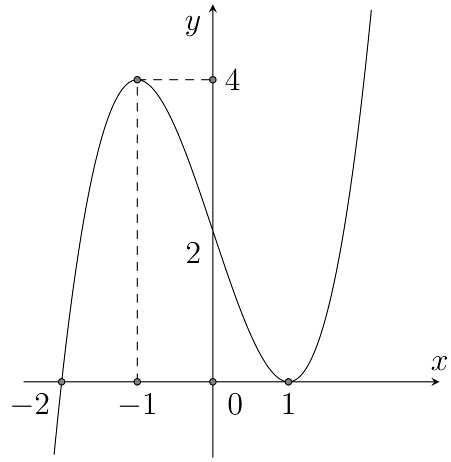
Ta có $y'=\left[f\left(x^2-3\right)\right]^{/} = 2x.f'\left(x^2-3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-3=-2 \\ x^2-3=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1. \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$

Mà $x=\pm 2$ là nghiệm kép, còn các nghiệm còn lại là nghiệm đơn nên hàm số $y=f\left(x^2-3\right)$ có ba cực trị

Chọn phương án D

Câu 65.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Khí đó, số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \left|f^2(x) - 2f(x) - 8\right|$ là



(A) 9. (B) 10. (C) 11. (D) 7.

Lời giải.

Ta xét hàm $y = h(x) = f^2(x) - 2f(x) - 8 \Rightarrow y' = 2f(x)f'(x) - 2f'(x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f(x) = 1. \end{array}\right.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1. \end{array}\right.$

$f(x) = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \text{ với } -2 < x_1 < -1 \\ x = x_2 \text{ với } 0 < x < 1 \\ x = x_3 \text{ với } x_3 > 1. \end{array}\right.$

Ta có $y = h(x) = (f(x) - 4)(f(x) + 2)$

$\Rightarrow h(x_1) = h(x_2) = h(x_3) = (1 - 4) \cdot 3 = -9$ và $h(-1) = 0$, $h(1) = -8$.

Ta có bảng biến thiên hàm $y = h(x) = f^2(x) - 2f(x) - 8$

x	$-\infty$		x_1		-1		x_2		1		x_3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	-9	↗	0	↘	-9	↗	-8	↘	-9	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy số điểm cực trị của hàm $y = g(x) = |h(x)|$ là 7.

Chọn phương án (D)

Câu 66. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2(x^4 - 1) + m(x^2 - 1) - (x - 1) \geq 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

(A) $-\dfrac{3}{2}$. (B) 1. (C) $-\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Bất phương trình

$$m^2(x^4 - 1) + m(x^2 - 1) - 6(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)[m^2(x^3 + x^2 + x + 1) + m(x + 1) - 6] \geq 0. \qquad (*)$$

Ta thấy $x = 1$ là một nghiệm của bất phương trình $(*)$, với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Do đó, để bất phương trình $(*)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì ta phải có

$x = 1$ là một nghiệm bội lẻ của $g(x) = m^2(x^3 + x^2 + x + 1) + m(x + 1) - 6$.

Từ đó suy ra $\begin{cases} g(1) = 0 \\ g'(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 + 2m - 6 = 0 \\ 6m^2 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1 \vee m = -\dfrac{3}{2}$.

Thử lại ta thấy $m = 1$ và $m = -\dfrac{3}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy $S = \left\{1; -\dfrac{3}{2}\right\}$.

Chọn phương án C

Câu 67. Cho hàm số $y = x^4 - 2(1 - m^2)x^2 + m + 1$. Tìm tất các giá trị của tham số m để hàm số cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị lập thành một tam giác có diện tích lớn nhất.

A $m = \dfrac{1}{2}$. **B** $m = 0$. **C** $m = 1$. **D** $m = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

Ta có $y' = 4x^3 - 4(1 - m^2)x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 1 - m^2 \end{array}\right.$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 = 1 - m^2$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m^2 > 0 \\ 1 - m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 1$

Khi đó gọi ba điểm cực trị là $A(0; 1+m)$, $B\left(\sqrt{1 - m^2}; m + 2m^2 - m^4\right)$, $C\left(-\sqrt{1 - m^2}; m + 2m^2 - m^4\right)$

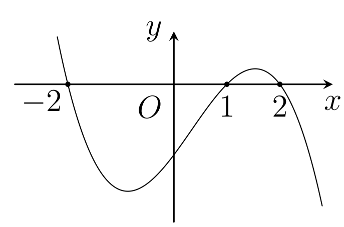
Ta có $BC = |x_C - x_B| = 2\sqrt{1 - m^2}$; $\mathrm{d}(A, BC) = (1 - m^2)^2$

Lại có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} BC \cdot \mathrm{d}(A, BC) = (1 - m^2)^2\sqrt{1 - m^2} \leq 1 \Rightarrow S_{\max} = 1$ khi $m = 0$.

Chọn phương án B

Câu 68.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thoả $f(2) = f(-2) = 0$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ có dạng như hình bên. Hàm số $y = [f(x)]^2$ đạt cực đại tại điểm nào?



A 2. **B** -2. **C** 1. **D** 0.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$; $f(2) = f(-2) = 0$. Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$\Rightarrow f(x) < 0; \forall x \neq \pm 2$.

Xét $y = (f(x))^2 \Rightarrow y' = 2f(x) \cdot f'(x)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 2 \\ x = 1; x = \pm 2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$-$		$-$	0	$-$	
$y=(f(x))^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=[f(x)]^2$ đạt cực đại tại $x=1$.

Chọn phương án C

Câu 69. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\left(m^2-1\right)x^4+mx^2+m-2$ chỉ có một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.

A $-1,5<m\le 0$. **B** $m\le -1$. **C** $-1\le m\le 0$. **D** $-1<m<0,5$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

— Xét $m^2-1=0\Leftrightarrow m=\pm 1$.

- Với $m=1$, hàm số đã cho trở thành: $y=x^2-1$.
  Hàm số này đạt cực tiểu tại điểm $A(0;-1)$ nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- Với $m=-1$, hàm số đã cho trở thành: $y=-x^2-3$.
  Hàm số này đạt cực đại tại điểm B(0;-3) nên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

— Xét $m\ne\pm 1$, ta có $y'=4\left(m^2-1\right)x^3+2mx$.

Xét $y'=0\Leftrightarrow 4\left(m^2-1\right)x^3+2mx=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=-\dfrac{m}{2\left(m^2-1\right)}\end{array}\right.$.

- Với $m=0$ phương trình $y'=0$ có nghiệm bội 3 và $m^2-1=0^2-1=-1<0$ nên hàm số đạt cực đại tại điểm $C(0;-1)$ nên thỏa mãn yêu cầu bào toán.
- Với $m\ne 0$, hàm số đã cho chỉ có một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu khi và chỉ khi $\begin{cases}-\dfrac{m}{2\left(m^2-1\right)}<0\\ m^2-1<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ m^2-1<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ -1<m<1\end{cases}\Leftrightarrow -1<m<0$.

Chọn phương án C

Câu 70. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = 3f^3(x) + 4f^2(x) + 1$ là

A 4. **B** 9. **C** 5. **D** 3.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = 9f^2(x) \cdot f'(x) + 8f(x)f'(x)$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = -\dfrac{8}{9}. \end{array}\right.$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 < -1 \\ x = x_2 > 1 \end{array}\right.$; $f(x) = -\dfrac{8}{9} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = x_3, & x_1 < x_3 < -1 \\ x = x_4, & 1 < x_4 < x_2 \end{array}\right.$.

Vì $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ nên ta có bảng biến thiên cho $g(x)$ như sau

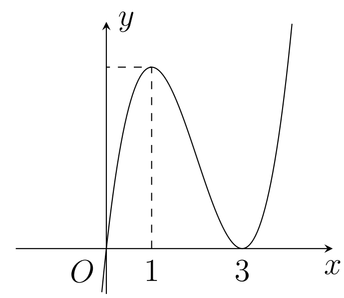
x	$-\infty$		x_1		x_3		-1		0		1		x_4		x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(x_1)$	$\nearrow$	$g(x_3)$	$\searrow$	$g(-1)$	$\nearrow$	$g(0)$	$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	$g(x_4)$	$\searrow$	$g(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đây ta suy ra được số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)$ là 4.

Chọn phương án **A**

Câu 71.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x) = |f^2(x) + f(x) + m|$ có đúng 3 điểm cực trị.



A $m \leq 1$. **B** $m > \dfrac{1}{4}$. **C** $m < 1$. **D** $m \geq \dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Xét $g(x) = f^2(x) + f(x) + m$ có $g'(x) = 2f(x)f'(x) + f'(x) = f'(x)[2f(x) + 1]$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ 2f(x) + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \\ x = a (a < 0) \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} g(1) = f^2(1) + f(1) + m \\ g(3) = m \\ g(a) = m - \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$

x	$-\infty$		a		1		3		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$g(a)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Suy ra đồ thị hàm số $h(x) = |f^2(x) + f(x) + m|$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = g(x)$ nằm hoàn toàn phía trên trục Ox (kể cả tiếp xúc). Do đó $g(a) \geq 0 \Leftrightarrow m - \dfrac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \dfrac{1}{4}$.

Chọn phương án D

Câu 72. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. $m \geq 0$. B. $m \leq 0$. C. $m \geq 12$. D. $m \leq 12$.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 12x + m$. Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty) \Leftrightarrow m \geq 12x - 3x^2 = g(x), \forall x \in (0; +\infty)$

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(0; +\infty)$

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	12	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m \geq \max\limits_{(0;+\infty)} g(x) \Leftrightarrow m \geq 12$.

Chọn phương án C

Câu 73.

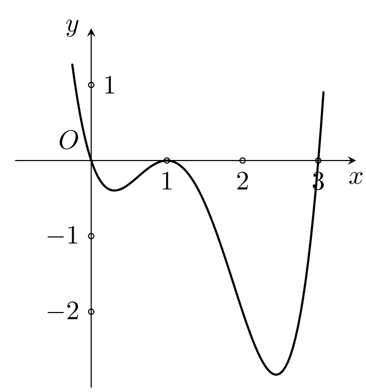
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị của hàm số $y = f^2(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại, cực tiểu?

A. 1 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

B. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

C. 3 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

D. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.



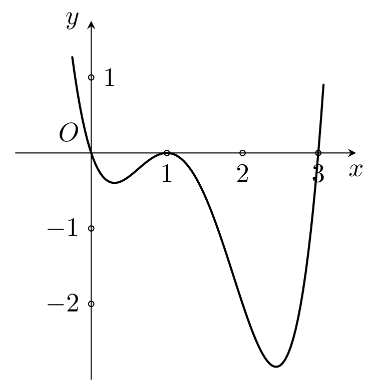
Lời giải.

a) Ta có $y = f^2(x) \Rightarrow y' = 2f(x)f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right.$.

b) Từ đồ thị ta có

(a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1, \text{ trong đó } x = 1 \text{ là nghiệm kép.} \\ x = 3 \end{array}\right.$

(b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \text{ (với } 0 < a < 1) \\ x = 1 \\ x = b \text{ (với } 1 < b < 3) \end{array}\right.$



c) Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f^2(x)$ như sau

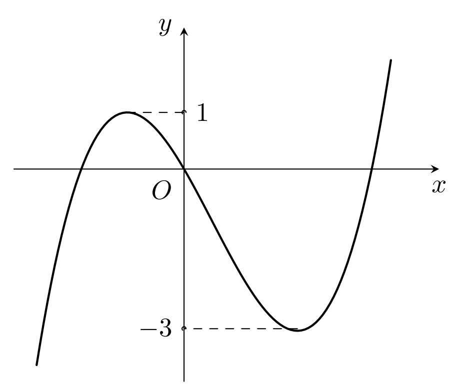
x	$-\infty$		0		m		1		n		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số $y = f^2(x)$ có 2 điểm cực đại và 3 điểm cực tiểu

Chọn phương án B

Câu 74.

Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị.



A $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$.
B $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$.
C $m = -1$ hoặc $m = 3$.
D $1 \leq m \leq 3$.

Lời giải.

a) Ta có số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) + m|$ "=" số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) + m$ "+" số nghiệm của phương trình $f(x) + m = 0$ (không tính nghiệm kép).

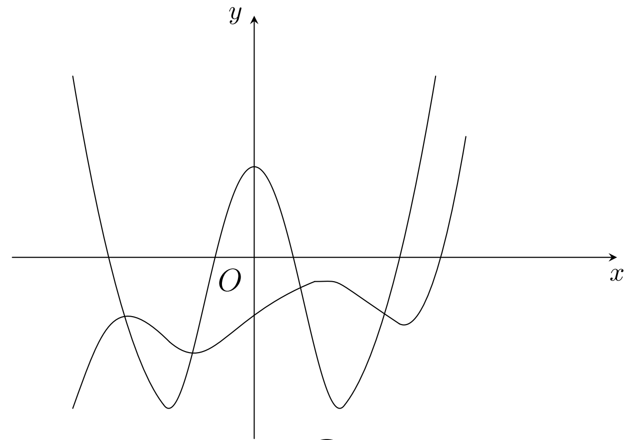
b) Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) + m$ "=" số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$. Từ đồ thị ta thấy hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

c) Như vậy, để hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị thì phương trình $f(x) = -m$ phải có một nghiệm đơn hoặc một nghiệm đơn và một nghiệm kép.

Suy ra, $\left[\begin{aligned}&-m \geq 1\\&-m \leq -3\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&m \leq -1\\&m \geq 3\end{aligned}\right.$.

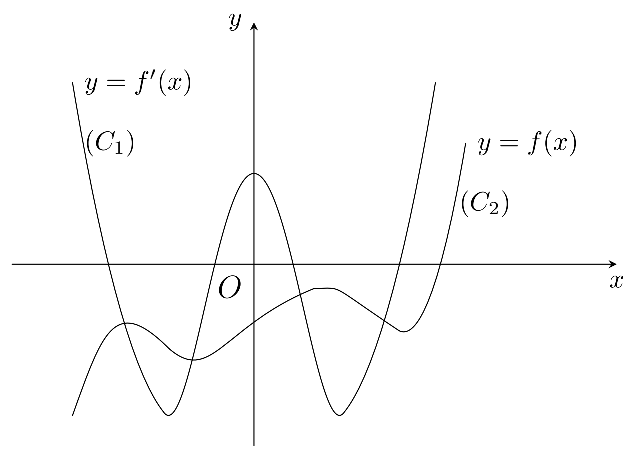
Chọn phương án (A)

Câu 75.
Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của $f(x)$; $f'(x)$ như hình vẽ.
Mệnh đề nào sau đây **đúng**?



(A) $f'(-1) \geq f''(1)$. (B) $f'(-1) > f''(1)$. (C) $f'(-1) < f''(1)$. (D) $f'(-1) = f''(1)$.

Lời giải.



— Nếu (C_2) là đồ thi của $f'(x)$ thì ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 1 lần nên hàm số $f(x)$ có 1 cực trị. Đồ thị còn lại (C_1) là của hàm số $f(x)$ có 3 cực trị nên vô lí.

— Do đó từ hình vẽ, ta có (C_1) là đồ thị của $f'(x)$ và (C_2) là đồ thị của $f(x)$.

— Từ đồ thị ta thấy hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0$.

— hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0$ và $f''(1) < 0$.

— Do đó $f'(-1) > f''(1)$.

Chọn phương án (B)

Câu 76. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 2)$. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x^2 + m)$ có 5 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là

(A) 4. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x = 2\\&x = \pm 1\end{aligned}\right.$.

Xét $g(x) = f(x^2 + m)$, $g'(x) = 2xf'(x^2 + m)$. Ta có

$$\begin{aligned} & g'(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{aligned} & x = 0 \\ & x^2 + m = 2 \\ & x^2 + m = 1 \\ & x^2 + m = -1 \end{aligned}\right. \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{aligned} & x = 0 \\ & x^2 = 2 - m \\ & x^2 = 1 - m \\ & x^2 = -1 - m. \end{aligned}\right. \quad (*) \end{aligned}$$

Hàm số $y = g(x)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow g'(x) = 0$ có 5 nghiệm bội lẻ phân biệt.

a) Trường hợp 1: $m = 2$ thì $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & x = 0 \\ & x^2 = 0 \\ & x^2 = 1 \\ & x^2 = -1 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & x = 0 \\ & x = \pm 1. \end{aligned}\right.$ (loại)

b) Trường hợp 2: $m = 1$ thì $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & x = 0 \\ & x^2 = 1 \\ & x^2 = 0 \\ & x^2 = -2 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & x = 0 \\ & x = \pm 1. \end{aligned}\right.$ (loại)

c) Trường hợp 3: $m = -1$ thì $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & x = 0 \\ & x^2 = 3 \\ & x^2 = 2 \\ & x^2 = 0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & x = 0 \\ & x = \pm\sqrt{3} \\ & x = \pm\sqrt{2}. \end{aligned}\right.$ (thỏa yêu cầu bài toán)

d) Trường hợp 4: $m > 2$ thì $\begin{cases} 2 - m < 0 \\ 1 - m < 0 \\ -1 - m < 0 \end{cases}$ nên $g'(x) = 0$ chỉ có 1 nghiệm $x = 0$ (loại).

e) Trường hợp 5: $1 < m < 2$ thì
+ Phương trình $x^2 = 2 - m$ có 2 nghiệm phân biệt.
+ Phương trình $x^2 = 1 - m$ và $x^2 = -1 - m$ vô nghiệm.
Do đó $g'(x) = 0$ không có đủ 5 nghiệm phân biệt (loại).

f) Trường hợp 6: $-1 < m < 1$
+ phương trình $x^2 = 2 - m$ có hai nghiệm phân biệt.
+ phương trình $x^2 = 1 - m$ có hai nghiệm phân biệt.

+ phương trình $x^2 = -1 - m$ vô nghiệm.
Do đó $g'(x) = 0$ có đủ 5 nghiệm đơn phân biệt (thỏa yêu cầu bài toán).

g) Trường hợp 7: $m < -1$ thì các phương trình $x^2 = 2 - m, x^2 = 1 - m, x^2 = -1 - m$ đều có hai nghiệm phân biệt.
Do đó $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm phân biệt và hàm số đã cho không có 5 điểm cực trị (loại).

Vậy tập hợp các giá trị của m để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị là $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ -1 < m < 1 \end{array}\right.$ hay $-1 \leq m < 1$.

Do m nguyên nên $m = -1, m = 0$ nên có 2 giá trị thỏa đề bài.
Chọn phương án D

Câu 77. Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2(m-1)x^2 + 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác vuông.

A $m = -1$. B $m = 0$. C $m = 1$. D $m = 2$.

Lời giải.
Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4(m-1)x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2 - m + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m - 1 \end{array}\right.$

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$. $(*)$
Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0;1)$, $B\left(\sqrt{m-1}; 2m - m^2\right)$, $C\left(-\sqrt{m-1}; 2m - m^2\right)$.
Hàm số đã cho là hàm số chẵn nên đồ thị hàm số nhận Oy làm trục đối xứng
$\Rightarrow \Delta ABC$ cân tại $A \Rightarrow \Delta ABC$ vuông khi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
$\overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{m-1}; 2m - m^2 - 1\right), \overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{m-1}; 2m - m^2 - 1\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -(m-1) + \left(2m - m^2 - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow (m-1)^4 - (m-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2. \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện $(*) \Rightarrow m = 2$.
Chọn phương án D

Câu 78. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - (2m+1)x^2 + (3-m)x + 2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị.

A $\mathrm{m} \geq 3$. B $\mathrm{m} > 3$. C $-\dfrac{1}{2} < m$. D $-\dfrac{1}{2} < m \leq 3$.

Lời giải.
Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - (2m+1)x^2 + (3-m)x + 2$.

— Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ và $y' = 3x^2 - 2(2m+1)x + (3-m)$.

— Hàm số $y = f(|x|)$ có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa $x_1 \leq 0 < x_2$.

  – *Trường hợp 1.* Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm $x_1 \leq 0 < x_2 \Leftrightarrow 3(3-m) < 0 \Leftrightarrow m > 3$.

– *Trường hợp 2.* Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 0 < x_2$. Ta có $y'(0) = 0 \Rightarrow m = 3$.

Với $m = 3$ thì $y' = 3x^2 - 14x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{14}{3} > 0 \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

— Vậy $m \leq 3$ thì hàm số $y = f(|x|)$ có ba điểm cực trị.

Chọn phương án A

Câu 79. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số: $y = x^8 + (m+1)x^5 - (m^2-1)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A Vô số. B 3. C 2. D 4.

Lời giải.

Phương pháp:

Nếu $x = x_0$ là điểm cực trị của hàm số thì $f'(x_0) = 0$.

Nếu $x = x_0$ là điểm cực tiểu của hàm số thì $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$.

Cách giải: Ta có $y' = 8x^7 + 5(m+1)x^4 - 4(m^2-1)x^3; y'' = 56x^6 + 20(m+1)x^3 - 12(m^2-1)x^2$

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 8x^7 + 5(m+1)x^4 - 4(m^2-1)x^3 = 0$

$\Leftrightarrow x^3\left[8x^4 + 5(m+1)x - 4(m^2-1)\right] = 0$

TH1: Xét $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$ +) Khi $m = 1$ ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x^3(8x^4 + 10x) = x^4(8x^3 + 10) \Rightarrow x = 0$ là nghiệm bội 4 $\Rightarrow x = 0$ không là cực trị của hàm số. +) Khi $m = -1$ ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x^3.8x^4 = 0 \Leftrightarrow 8x^7 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ là nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow x = 0$ là điểm cực trị của hàm số. Hơn nữa qua điểm $x = 0$ thì y' đổi dấu từ âm sang dương nên $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số.

TH2: Xét $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$ ta có:

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2\left[8x^5 + 5(m+1)x^2 - 4(m^2-1)x\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ 8x^5 + 5(m+1)x^2 - 4(m^2-1)x = 0 \end{array}\right.$

Vì $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ là nghiệm bội chẵn không là cực trị của hàm số, do đó cực trị của hàm số ban đầu là nghiệm của phương trình $g(x) = 8x^5 + 5(m+1)x^2 - 4(m^2-1)x = 0$.

Ta có $g'(x) = 40x^4 + 10(m+1)x - 4(m^2-1)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0 \Leftrightarrow g'(0) > 0 \Leftrightarrow g'(0) > 0 \Leftrightarrow -4(m^2-1) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 < 0$

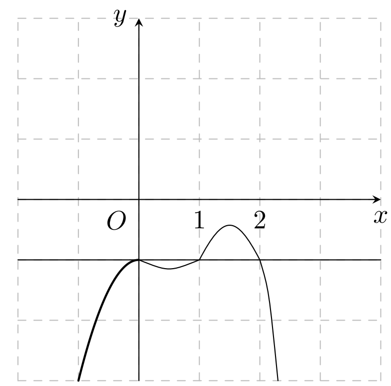
$\Leftrightarrow -1 < m < 1$.

Vậy kết hợp 2 trường hợp ta có $-1 \leq m < 1$. Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 0\}$ có 2 giá trị m nguyên thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn phương án C

Câu 80.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)$. Biết rằng đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Xác định điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x) + x$.



A Không có giá trị. **B** $x = 0$.
C $x = 1$. **D** $x = 2$.

Lời giải.

Phương pháp: Giải phương trình $g'(x) = 0$, lập BBT của đồ thị hàm số $y = g(x)$ và kết luận.

Cách giải:

Ta có $g'(x) = f'(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

BBT

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào BBT ta thấy hàm số $y = g(x)$ có 1 điểm cực đại là $x = 2$.

Chọn phương án D

BẢNG ĐÁP ÁN

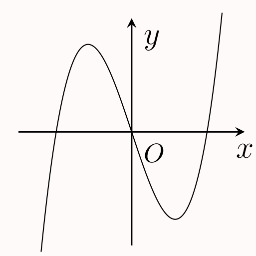
1. C	2. D	3. B	4. A	5. A	6. B	7. C	8. B	9. D	10. A
11. A	12. B	13. D	14. B	15. C	16. B	17. A	18. C	19. A	20. B
21. D	22. B	23. A	24. D	25. C	26. A	27. D	28. A	29. C	30. B
31. C	32. C	33. B	34. D	35. C	36. B	37. D	38. A	39. D	40. A
41. C	42. B	43. A	44. B	45. B	46. D	47. C	48. D	49. B	50. B
51. D	52. D	53. B	54. B	55. D	56. D	57. C	58. B	59. D	60. C
61. C	62. A	63. A	64. D	65. D	66. C	67. B	68. C	69. C	70. A
71. D	72. C	73. B	74. A	75. B	76. D	77. D	78. A	79. C	80. D

DẠNG 14. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

(A) $y = x^3 - 3x$. (B) $y = -x^3 + 3x$.
(C) $y = x^4 - 2x^2$. (D) $y = -x^4 + 2x^2$.



Lời giải.

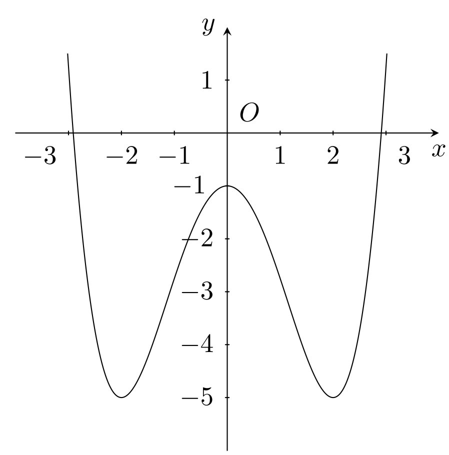
Đường cong có dạng của đồ thị hàm số bậc 3 với hệ số $a > 0$ nên chỉ có hàm số $y = x^3 - 3x$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn phương án (A)

Câu 1.

Đồ thị trong hình vẽ bên là của hàm số

(A) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 1$. (B) $y = \frac{1}{4}x^4 - x^2 - 1$.
(C) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 1$. (D) $y = -\frac{1}{4}x^4 + x^2 - 1$.



Lời giải.

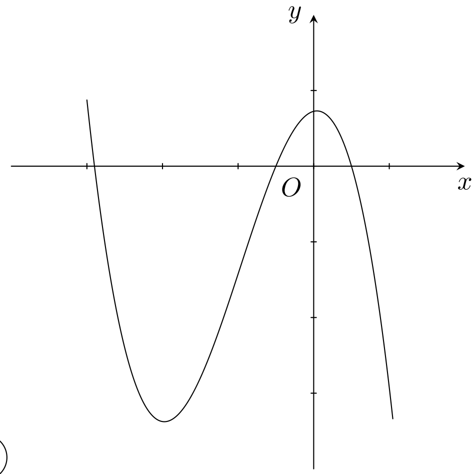
Nhìn vào đồ thị có dạng là đồ thị hàm số trùng phương có hệ số $a > 0$, có điểm cực đại $(0; -1)$ và điểm cực tiểu $(-2; -5)$ và $(2; -5)$.

Vì $a > 0$ nên loại đáp án $y = -\frac{1}{4}x^4 + x^2 - 1$.

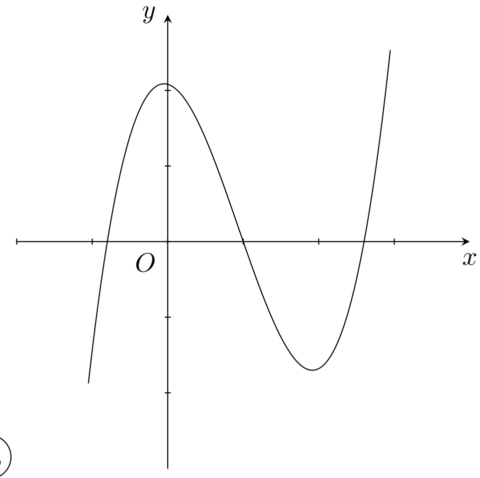
Thay điểm cực tiểu vào các đáp án còn lại ta được kết quả.

Chọn phương án (C)

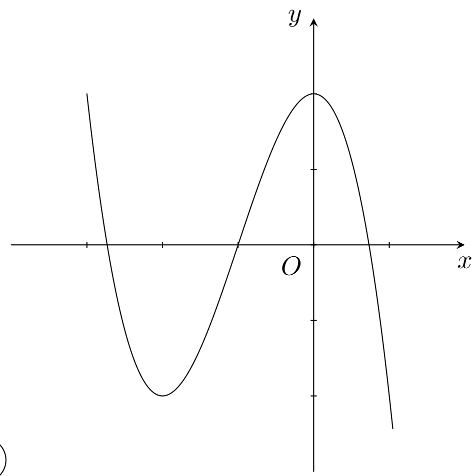
Câu 2. Đồ thị hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 2$ có dạng

A 

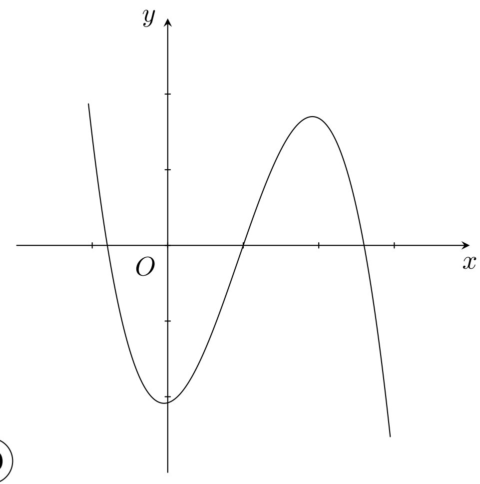
.

B 

.

C 

.

D 

.

Lời giải.

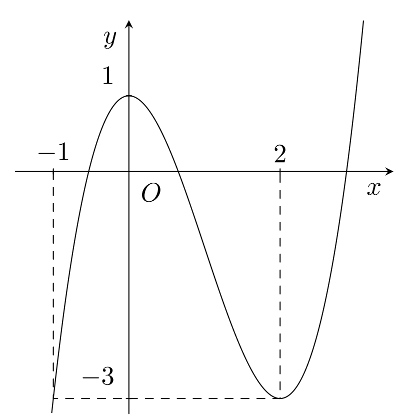
Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$ nên chọn hình đồ thị có nhánh bên phải hướng xuống.

Chọn đồ thị đi qua điểm $(0;2)$.

Chọn phương án C

Câu 3.

Đồ thị hình bên là của hàm số nào sau đây



A $y = -\dfrac{x^3}{3} + x^2 + 1$.

B $y = x^3 + 3x^2 + 1$.

C $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

D $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

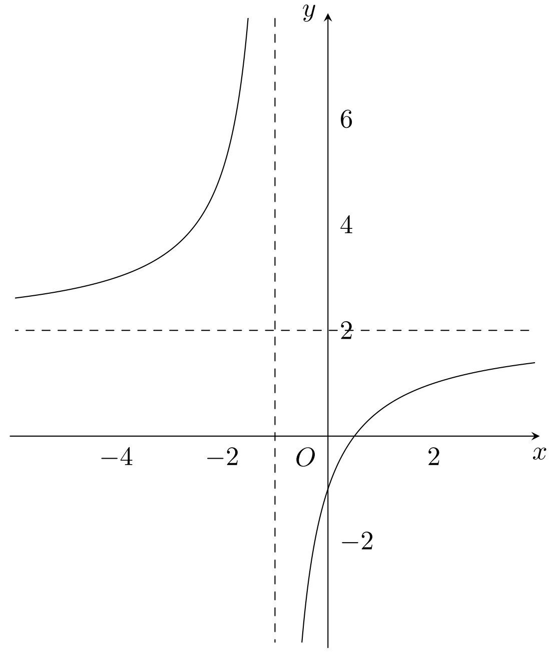
Lời giải.

Đồ thị hàm số là đồ thị hàm bậc ba với $a > 0$. Mặt khác, đồ thị đi qua điểm có tọa độ $(2;-3)$ nên đáp án là $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Chọn phương án D

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xác định hàm số trên.

(A) $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$. (B) $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$. (C) $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$. (D) $y = \dfrac{3x+1}{2x+2}$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số nhận đường $x = -1$ là tiệm cận đứng nên ta loại ngay đáp án A và B vì đồ thị của hai hàm số này đều nhận đường $x = 1$ là tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số nhận đường $y = 2$ là tiệm cận ngang.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-1}{x+1} = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-1}{x+1} = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$.

Vậy hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ thỏa mãn bài toán.

Chọn phương án (C)

Câu 5. Cho hàm số $y = (x-2)\left(x^2 - 5x + 6\right)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) (C) không cắt trục hoành.

(B) (C) cắt trục hoành tại 3 điểm.

(C) (C) cắt trục hoành tại 1 điểm.

(D) (C) cắt trục hoành tại 2 điểm.

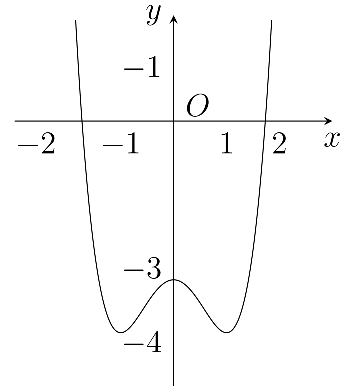
Lời giải.

Ta có $(x-2)\left(x^2 - 5x + 6\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right.$. Suy ra đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 2 điểm.

Chọn phương án (D)

Câu 6.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong 4 hàm số dưới đây. Tìm hàm số đó.



A $y = -x^3 + x^2 - 2$. **B** $y = -x^4 + 3x^2 - 2$.
C $y = x^4 - 2x^2 - 3$. **D** $y = -x^2 + x - 1$.

Lời giải.

Đồ thị đi qua điểm $M(0; -3)$, suy ra loại các phương án A, B, D.

Chọn phương án C

Câu 7. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ tại điểm $M(1; 0)$ là

A $y = -x + 1$. **B** $y = -4x - 4$. **C** $y = -4x + 4$. **D** $y = -4x + 1$.

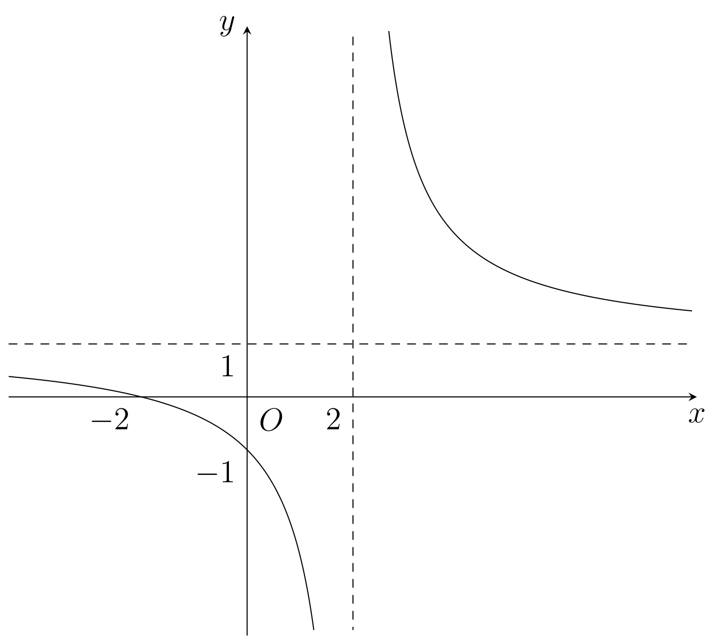
Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 1 \Rightarrow y'(1) = -4$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(1; 0)$ là $y = -4(x - 1) \Leftrightarrow y = -4x + 4$.

Chọn phương án C

Câu 8. Đồ thị sau đây là của một trong 4 hàm số nào dưới đây?



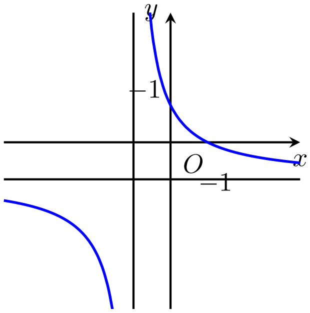
A $y = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$. **B** $y = \dfrac{x + 2}{x - 2}$. **C** $y = \dfrac{x + 2}{x + 1}$. **D** $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$.

Lời giải.

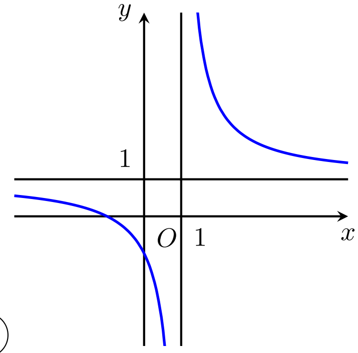
Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 2$. Vậy hàm số cần tìm là $y = \dfrac{x + 2}{x - 2}$.

Chọn phương án B

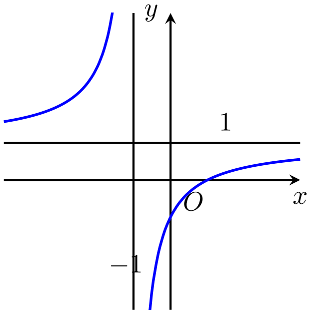
Câu 9. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{1-x}$ có dạng

Ⓐ 

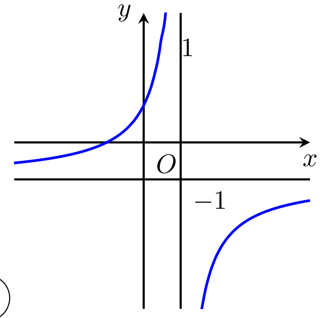
.

Ⓑ 

.

Ⓒ 

.

Ⓓ 

.

Lời giải.

Phương pháp:

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}, (ad - bc \neq 0, c \neq 0)$ có TCĐ: $x = -\dfrac{d}{c}$ và TCN: $y = \dfrac{a}{c}$.

Nếu $ad - bc > 0$ thì hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Nếu $ad - bc < 0$ thì hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Cách giải:

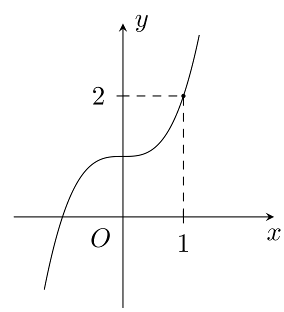
Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{1-x}$ có TCĐ: $x = 1$ và TCN $y = -1$ và đồng biến trên từng khoảng xác định do $1.1 - 1.(-1) = 2 > 0$.

Vậy chọn đồ thị ở câu D.

Chọn phương án Ⓓ

Câu 10.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số được cho bởi các phương án A, B, C, D dưới đây.



Ⓐ $y = 2x^3 + 1$. Ⓑ $y = x^3 + x + 1$.

Ⓒ $y = x^3 + 1$. Ⓓ $y = -x^3 + 2x + 1$.

Lời giải.

Nhìn vào đồ thị ta thấy đồ thị là dạng đồ thị hàm số bậc 3 có hệ số $a > 0$ nên ta loại đáp D.

Mặt khác đồ thị đi qua điểm có tọa độ $(1; 2)$, thay vào hàm số ở các đáp án A, B, C thì chỉ có C thỏa mãn.

Chọn phương án Ⓒ

Câu 11. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$ với trục hoành là

(A) 3. (B) 2. (C) 4. (D) 1.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\begin{aligned} & x^4 - x^2 + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x^2-4)(x^2-1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 2 \\ x = \pm 1. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục hoành là 4.

Chọn phương án (C)

Câu 12.

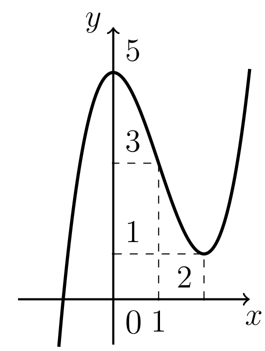
Đường cong như hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào?

(A) $y = -x^3 + 3x^2 + 5$.

(B) $y = 2x^3 - 6x^2 + 5$.

(C) $y = x^3 - 3x^2 + 5$.

(D) $y = x^3 - 3x + 5$.



Lời giải.

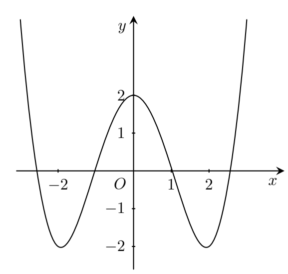
Đồ thị hàm số đã cho là hàm đa thức bậc ba có $a > 0$ do $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty \Rightarrow$ Loại đáp án A. Đồ thị hàm số đi qua điểm $(2;1) \Rightarrow$ loại các đáp án B và D.

Chọn phương án (C)

Câu 13.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(0;1)$. (B) $(-1;0)$. (C) $(-2;-1)$. (D) $(-1;1)$.



Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Chọn phương án (A)

Câu 14. Cho hàm $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm

(A) $x = 4$. (B) $x = 3$. (C) $x = 2$. (D) $x = 1$.

Lời giải.

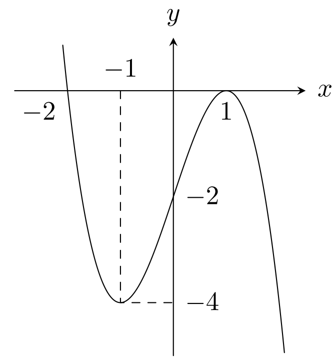
Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.

Chọn phương án (B)

Câu 15. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

(A) $y = x^3 - 3x - 2$. (B) $y = -x^3 + 3x + 2$.

(C) $y = x^3 - 3x + 2$. (D) $y = -x^3 + 3x - 2$.



Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy đây là đồ thị của hàm số bậc 3 có hệ số $a < 0$ và đồ thị cắt trục Oy tại điểm -2 nên hàm số có hệ số tự do bằng -2.

Do đó đáp án đúng là $y = -x^3 + 3x - 2$.

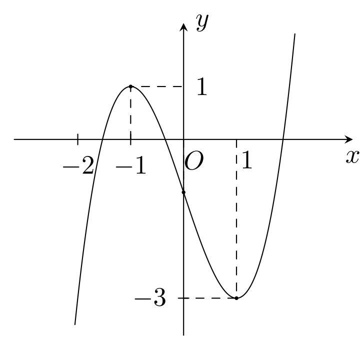
Chọn phương án (D)

Câu 16.

Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị như hình bên?

(A) $y = x^3 - 3x - 1$. (B) $y = x^3 - 3x^2 - 3x - 1$.

(C) $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x - 1$. (D) $y = x^3 + 3x^2 - 3x + 1$.



Lời giải.

Đồ thị đi qua điểm $(0; -1)$ nên phương án D bị loại và đồ thị đi qua điểm $(2; 1)$ nên B loại.

Đồ thị có hai điểm cực trị nên phương án C bị loại (có $y' = x^2 + 3 > 0$).

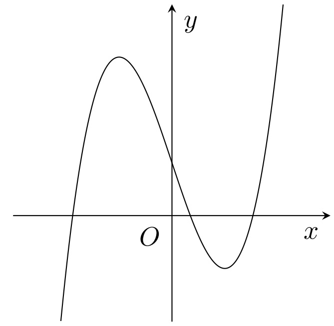
Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1; 3)$, thay vào phương án A thấy thỏa mãn.

Chọn phương án (A)

Câu 17.

Hàm số nào dưới đây có đồ thị như trong hình bên ?

(A) $y = x^3 - 3x + 1$. (B) $y = -x^2 + x - 1$.
(C) $y = -x^3 + 3x + 1$. (D) $y = x^4 - x^2 + 1$.



Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta thấy đây là hàm bậc ba và có hệ số $a > 0$ nên đáp án là hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.

Chọn phương án (A)

Câu 18. Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số dưới đây. Tìm hàm số đó.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

(A) $y = x^3 - 5x^2 + x + 6$. (B) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.
(C) $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 7$. (D) $y = x^4 + x^2 - 3$.

Lời giải.

Phương pháp:

Dựa vào cách đọc Bảng biến thiên để xác định hàm số.

Tìm ra các điểm thuộc đồ thị hàm số rồi thay tọa độ vào các hàm số ở đáp án để loại trừ.

Cách giải:

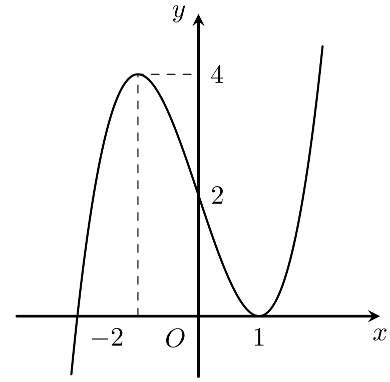
Từ bảng biến thiên, ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ nên loại $y = -x^3 + 6x^2 - 9x+$ và$y = x^4 + x^2 - 3$.

Ta thấy điểm $(3; -1)$ thuộc đồ thị hàm số $f(x)$ nên thay $x = 3$; $y = -1$ vào hai hàm số ở phương án $y = x^3 - 5x^2 + x + 6$ và phương án $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ ta thấy chỉ có hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ thỏa mãn nên hàm số cần tìm là $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

Chọn phương án (B)

Câu 19.

Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ sau. Hàm số đó là hàm số nào?



Ⓐ $y = x^3 - x^2 + 1$. Ⓑ $y = x^3 + x^2 + 1$.

Ⓒ $y = x^3 - 3x + 2$. Ⓓ $y = -x^3 + 3x + 2$.

Lời giải.

Từ đồ thị thấy hệ số $a > 0$ và đi qua điểm $A(0; 2)$.

Chọn phương án Ⓒ

Câu 20. Bảng biến thiên sau là bảng biến thiên của hàm số nào sau đây?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Ⓐ $y = -x^3 - 3x - 2$. Ⓑ $y = x^3 - 3x^2 - 1$. Ⓒ $y = -x^3 + 3x^2 - 2$. Ⓓ $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

Lời giải.

Cách 1: Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $a > 0$ nên hàm số có bảng biến thiên là $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

Cách 2: Ta có $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

BBT:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Chọn phương án Ⓑ

B MỨC ĐỘ 2

Câu 21. Bảng biến thiên sau là của hàm số nào?

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

A $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. **B** $y = x^4 + 2x^2 + 3$. **C** $y = -x^4 + 2x^2 + 3$. **D** $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Lời giải.

Bảng biến thiên của đồ thị hàm số trùng phương với hệ số $a < 0$. Mặt khác điểm $(0; 1)$ thuộc đồ thị hàm số nên chọn $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

Chọn phương án A

Câu 22. Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số trên tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$.

A $y = 3x - 2$. **B** $y = -3x - 2$. **C** $y = 3x - 3$. **D** $y = 3x + 2$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$y = \dfrac{x-2}{x+1} \Rightarrow y' = \dfrac{3}{(x+1)^2}$.

$y(0) = -2$, $y'(0) = 3$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số trên tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ là $y = 3(x - 0) - 2$ $\Leftrightarrow y = 3x - 2$.

Chọn phương án A

Câu 23. Cho hai hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-1}$. Đồ thị hàm số trên cắt hai trục tọa độ tại hai điểm A, B phân biệt. Tính độ dài đoạn AB.

A $\sqrt{2}$. **B** 2. **C** 4. **D** $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số cắt trục Ox tại $A(-2; 0)$

Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại $B(0; -2)$

$\overrightarrow{AB} = (2; -2)$. Độ dài đoạn AB là $AB = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$.

Chọn phương án D

Câu 24. Cho hàm số $y = \dfrac{2x}{x+2}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đó tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\dfrac{1}{18}$?

A $y = \dfrac{9}{4}x + \dfrac{1}{2}$; $y = \dfrac{4}{9}x + \dfrac{2}{9}$. **B** $y = \dfrac{9}{4}x + \dfrac{1}{2}$; $y = \dfrac{4}{9}x + \dfrac{4}{9}$.

(C) $y = \dfrac{9}{4}x + \dfrac{31}{2}$; $y = \dfrac{4}{9}x + \dfrac{2}{9}$.
(D) $y = \dfrac{9}{4}x + \dfrac{1}{2}$; $y = \dfrac{4}{9}x + \dfrac{1}{9}$.

Lời giải.

Ta có: $y' = \dfrac{4}{(x+2)^2}$. Gọi $M(x_0; y_0)\ (x_0 \neq -2)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm với đồ thị (C).

Khi đó phương trình tiếp tuyến là $y = \dfrac{4}{(x_0+2)^2}(x - x_0) + \dfrac{2x_0}{x_0+2} = \dfrac{4x}{(x_0+2)^2} + \dfrac{2x_0^2}{(x_0+2)^2}$ (d).

(d) cắt hai trục tọa độ tại $A\left(0; \dfrac{2x_0^2}{(x_0+2)^2}\right)$; $B\left(-\dfrac{x_0^2}{2}; 0\right)$.

Vì tam giác OAB có diện tích $\dfrac{1}{18}$ nên $\dfrac{x_0^4}{(x_0+2)^2} = \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow \left(3x_0^2\right)^2 = (x_0+2)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = -\dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$

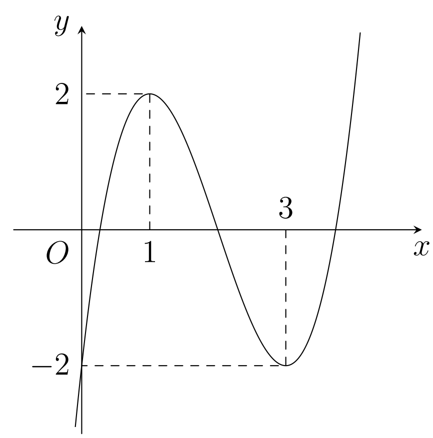
Do đó phương trình tiếp tuyến: $y = \dfrac{4}{9}x + \dfrac{2}{9}$; $y = \dfrac{9}{4}x + \dfrac{1}{2}$.

Chọn phương án (A)

Câu 25.

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ có đồ thị (C) như hình vẽ.

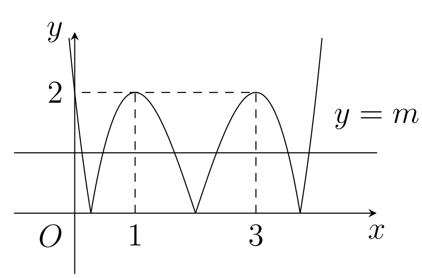
Khi đó phương trình $|f(x)| = m$ (m là tham số) có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi



(A) $-2 \le m \le 2$.
(B) $0 < m < 2$.
(C) $0 \le m \le 2$.
(D) $-2 < m < 2$.

Lời giải.

+ Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có được bằng cách biến đổi đồ thị (C): $y = f(x)$ như sau:



- Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành.
- Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm dưới trục hoành qua trục hoành.
- Xóa phần đồ thị (C) nằm dưới trục hoành.

+ Số nghiệm của phương trình $|f(x)| = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = m$.

Vậy phương trình có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 2$.

Chọn phương án (B)

Câu 26. Phương trình đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ và song song với đường thẳng Δ: $2x + y + 1 = 0$ là

A $2x+y-7=0$. **B** $2x+y=0$. **C** $-2x-y-1=0$. **D** $2x+y+7=0$.

Lời giải.

$y=\dfrac{x+1}{x-1} \Rightarrow y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

Đường thẳng Δ: $2x+y+1=0 \Leftrightarrow y=-2x-1$ có hệ số góc bằng -2.

Gọi d là tiếp tuyến cần tìm và x_0 là hoành độ tiếp điểm.

Vì d song song với Δ nên

$$\dfrac{-2}{(x-1)^2}=-2 \Leftrightarrow (x-1)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=1 \\ x-1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0. \end{array}\right.$$

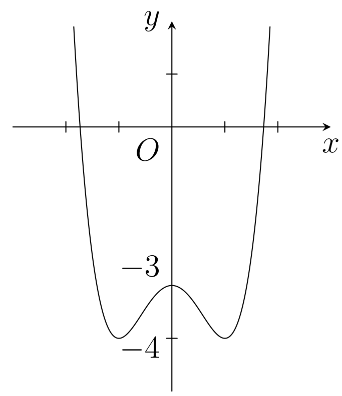
Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $A(2;3)$ là: $2x+y-7=0$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $B(0;-1)$ là: $2x+y+1=0$ (loại vì trùng với Δ).

Chọn phương án A

Câu 27.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)=m+2$ có bốn nghiệm phân biệt.



A $-4<m<-3$. **B** $-4 \le m \le -3$.
C $-6 \le m \le -5$. **D** $-6<m<-5$.

Lời giải.

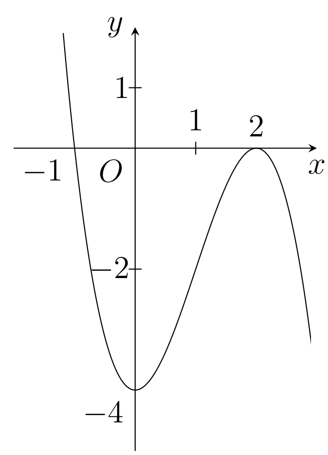
Để phương trình $f(x)=m+2$ có 4 nghiệm phân biệt thì đường thẳng $y=m+2$ phải cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 4 điểm phân biệt.

Dựa vào đồ thị ta được $-4<m+2<-3 \Leftrightarrow -6<m<-5$.

Chọn phương án D

Câu 28.

Đồ thị ở hình bên là của hàm số nào dưới đây?



A $y=-x^3-3x^2-4$. **B** $y=x^3-3x-4$.
C $y=-x^3+3x^2-4$. **D** $y=x^3-3x-4$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta suy ra hệ số cao nhất $a<0$, loại được đáp án B và D.

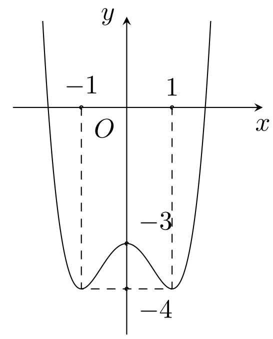
Đồ thị đi qua điểm $(2;0)$ nên C là đáp án đúng.

Chọn phương án C

Câu 29.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m + 1$ có bốn nghiệm phân biệt.

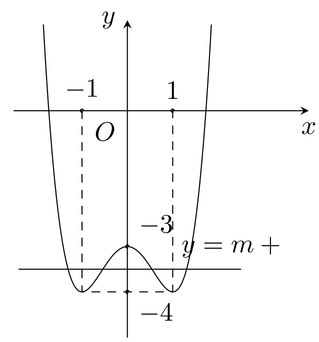
A $-5 \leq m \leq -4$. **B** $-4 < m < -3$. **C** $-4 \leq m \leq -3$. **D** $-5 < m < -4$.



Lời giải.

Phương trình $f(x) = m + 1$ có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại bốn điểm phân biệt. Điều này tương đương với

$$\begin{aligned} & -4 < m + 1 < -3 \\ \Leftrightarrow\ & -5 < m < -4. \end{aligned}$$

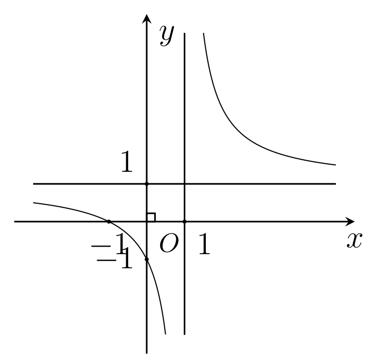


Chọn phương án D

Câu 30.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

A $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$. **B** $y = \dfrac{x-1}{x+1}$. **C** $y = \dfrac{x+1}{x-1}$. **D** $y = \dfrac{x+1}{1-x}$.



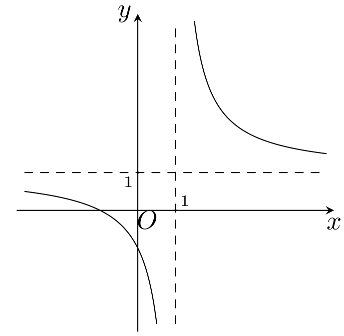
Lời giải.

Dựa và đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 1$ và đường tiệm cận ngang $y = 1$.

Chọn phương án C

Câu 31.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây ?



(A) $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$. (B) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

(C) $y = x^4 + x^2 + 1$. (D) $y = x^3 - 3x - 1$.

Lời giải.

Đồ thị là của hàm số nhất biến có tiệm cân đứng $x = 1$ và tiệm cận ngang $y = 1$ nên là hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

Chọn phương án (B)

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+2)^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

(A) 3. (B) 2. (C) 5. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = x(x-1)(x+2)^3$ đổi dấu 3 lần khi x qua -2, 0, 1 nên hàm số có 3 điểm cực trị.

Chọn phương án (A)

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

$2f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\dfrac{3}{2}$.

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -\dfrac{3}{2}$.

Mà $-2 < -\dfrac{3}{2} < 1$ nên số nghiệm thực của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là 4.

Chọn phương án (A)

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm số nghiệm của phương trình $2\left|f(x)\right|-1=0$.

A 0. **B** 3. **C** 4. **D** 6.

Lời giải.

Ta có $2\left|f(x)\right|-1=0\ (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{1}{2} \\ f(x)=-\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình (1) có 6 nghiệm.

Chọn phương án D

Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên mỗi nửa khoảng $(-\infty;-2]$ và $[2;+\infty)$, có bảng biến thiên như hình trên.

Tìm tập hợp các giá trị của m để phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm phân biệt.

A $\left(\dfrac{7}{4};2\right)\cup(22;+\infty)$. **B** $[22;+\infty)$. **C** $\left(\dfrac{7}{4};+\infty\right)$. **D** $\left(\dfrac{7}{4};2\right]\cup[22;+\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, $f(x)=m$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \dfrac{7}{4}<m\leq 2 \vee m\geq 22$.

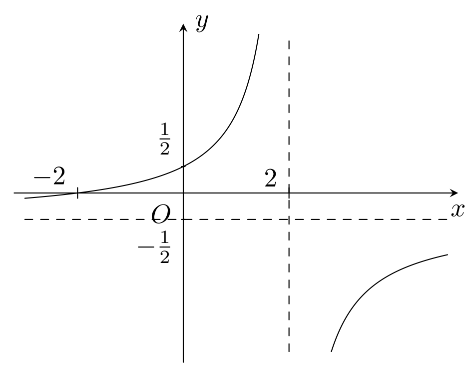
Chọn phương án D

Câu 36.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A $y=\dfrac{x+2}{-2x+4}$. **B** $y=\dfrac{-x+1}{x-2}$.

C $y=\dfrac{2x-3}{x+2}$. **D** $y=\dfrac{-x+3}{2x-4}$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=2$ (loại phương án C), tiệm cận ngang $y=-\dfrac{1}{2}$ (loại phương án B) và đi qua điểm $(-2;0)$ (loại phương án D).

Chọn phương án A

Câu 37. Bảng biến thiên trong hình dưới là của hàm số nào trong các hàm số đã cho?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$-$	
y	-1	$\searrow$	$-\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	-1

A $y=\dfrac{-x-3}{x-1}$. **B** $y=\dfrac{-x+3}{x-1}$. **C** $y=\dfrac{x+3}{x-1}$. **D** $y=\dfrac{-x-2}{x-1}$.

Lời giải.
Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -1$ (loại phương án C và D) và nghịch biến trên mỗi khoảng xác định (loại phương án A).
Chọn phương án B

Câu 38. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2 + 6mx + 4}{mx + 2}$ đi qua điểm $A(-1; 4)$.

A $m = 1$. **B** $m = -1$. **C** $m = \dfrac{1}{2}$. **D** $m = 2$.

Lời giải.
Ta có $A(-1; 4) \in (C)\colon \dfrac{2x^2 + 6mx + 4}{mx + 2} \Leftrightarrow \dfrac{2 - 6m + 4}{-m + 2} = 4 \Leftrightarrow -6m + 6 = -4m + 8 \Leftrightarrow m = -1$.
Chọn phương án B

Câu 39. Biết hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$, $f(1) = -3$ và đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2. Tính giá trị của hàm số tại $x = 3$.

A $f(3) = 81$. **B** $f(3) = 27$. **C** $f(3) = 29$. **D** $f(3) = -29$.

Lời giải.
Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.
Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$ nên $f'(1) = 3 + 2a + b = 0 \Leftrightarrow 2a + b = -3$.
$f(1) = -3 \Leftrightarrow 1 + a + b + c = -3 \Leftrightarrow a + b + c = -4$.
Mặt khác đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 nên $2 = c$.
Ta có $\begin{cases} 2a + b = -3 \\ c = 2 \\ a + b + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -9. \\ c = 2 \end{cases}$
Thử lại $f''(x) = 6x + 6$, $f''(1) = 12 > 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.
Vậy $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$ suy ra $f(3) = 29$.
Chọn phương án C

Câu 40. Cho hàm số $y = (x + 2)\left(x^2 - 3x + 3\right)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A (C) cắt trục hoành tại 3 điểm. **B** (C) cắt trục hoành tại 1 điểm.
C (C) cắt trục hoành tại 2 điểm. **D** (C) không cắt trục hoành.

Lời giải.
Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox: $(x + 2)(x^2 - 3x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = -2$.
Chọn phương án B

C MỨC ĐỘ 3

Câu 41. Biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\dfrac{3|x| + 1}{|x| + 2} - m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt là khoảng $(a; b)$. Tính $a + b$.

A $\dfrac{7}{2}$. **B** $\dfrac{3}{2}$. **C** $\dfrac{5}{2}$. **D** $\dfrac{9}{2}$.

Lời giải.

Nhóm: PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA

Nhận xét: Nếu phương trình có nghiệm $x = a$ thì nó cũng có nghiệm $x = -a$.
Từ nhận xét trên, ta chỉ cần xét phương trình với $x \geq 0$.
Với $x \geq 0$, phương trình đã cho trở thành:

$$\frac{3x+1}{x+2} - m = 0 \Leftrightarrow (3-m)x = 2m-1 \Leftrightarrow x = \frac{2m-1}{3-m} \qquad (2)$$

(do $m = 3$ không thỏa mãn).
Do đó để phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt thì phương trình (2) phải có đúng 1 nghiệm dương $\Leftrightarrow \frac{2m-1}{3-m} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < 3$.
Khi đó $a = \frac{1}{2}, b = 3$. Vậy $a + b = \frac{7}{2}$.
Nhận xét: Ta có thể giải bằng phương pháp đồ thị.
Chọn phương án A

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $2\sqrt{x+1} = x + m$ có nghiệm thực.

A $m \leq 3$. **B** $m \leq 2$. **C** $m \geq 3$. **D** $m \geq 2$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = [-1; +\infty)$

$$2\sqrt{x+1} = x + m \Leftrightarrow x + 1 - 2\sqrt{x+1} + m - 1 = 0 \qquad (8)$$

Đặt $t = \sqrt{x+1},\ t \geq 0$, khi đó phương trình (8) trở thành

$$t^2 - 2t + m - 1 = 0 \qquad (9)$$

Để (8) có nghiệm thực thì (9) phải có nghiệm thực không âm. Giả sử (9) có hai nghiệm phân biệt thì ta thấy tổng hai nghiệm $S = 2$ luôn dương nên (9) không thể có hai nghiệm đều âm. Suy ra để (9) có nghiệm thực không âm thì $\Delta' = 2 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2$.
Chọn phương án B

Câu 43. Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2 + \frac{3}{2}$. Giá trị thực của m để phương trình $\left|2x^4 - 4x^2 + \frac{3}{2}\right| = m^2 - m + \frac{1}{2}$ có đúng 8 nghiệm thực phân biệt là

A $0 \leq m \leq 1$. **B** $0 < m < 1$. **C** $0 < m \leq 1$. **D** $0 \leq m < 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 8x^3 - 8x,\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$. Ta có bảng biến thiên của hàm số sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy, phương trình $\left|2x^4-4x^3+\frac{2}{3}\right|=m^2-m+\frac{1}{2}$ có đúng 8 nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m+\frac{1}{2}>0 \\ m^2-m+\frac{1}{2}<\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m^2-m<0 \Leftrightarrow 0<m<1.$

Chọn phương án B

Câu 44. Cho hàm số $y=\frac{x+2}{2x+1}$. Xác định m để đường thẳng $y=mx+m-1$ luôn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh của đồ thị.

A $m<1$. **B** $m>0$. **C** $m<0$. **D** $m=0$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x+2}{2x+1}=mx+m-1 \Rightarrow 2mx^2+3(m-1)x+m-3=0$ (1).

Để đường thẳng luôn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh của đồ thị thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1<-\frac{1}{2}<x_2$ (2).

(1) có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m\neq 0 \\ m^2+6m+9>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq -3. \end{cases}$

Theo định lý Vi-et, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{3(m-1)}{2m} \\ x_1x_2=\frac{m-3}{2m}. \end{cases}$

Do đó

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow (2x_1+1)(2x_2+1)<0 \\ &\Leftrightarrow 4x_1x_2+2(x_1+x_2)+1<0 \\ &\Leftrightarrow 4\cdot\frac{m-3}{2m}+2\cdot\left(-\frac{3(m-1)}{2m}\right)+1<0 \\ &\Leftrightarrow \frac{4m-12-6m+6+2m}{2m}<0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{6}{2m}<0 \\ &\Leftrightarrow m>0. \end{aligned}$$

Chọn phương án B

Câu 45. Cho hàm số $y=x^3+x^2+(m+1)x+1$ và $y=2x+1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in(-10;10)$ để hai đồ thị của hai hàm số trên cắt nhau tại ba điểm phân biệt.

A 9. **B** 10. **C** 1. **D** 11.

Lời giải.

Giả sử hàm số $y=x^3+x^2+(m+1)x+1$ có đồ thị (C) và $d: y=2x+1$

Hoành độ giao điểm của (C) và d là nghiệm PT: $x^3+x^2+(m+1)x+1=2x+1$ (1)

$\Leftrightarrow x^3+x^2+(m-1)x=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+x+m-1=0(2) \end{array}\right.$

Đặt $f(x) = x^2 + x + m - 1$

d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt $x \neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 4m > 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{5}{4} \\ m \neq 1 \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện $m \in (-10; 10)$ ta được $m \in \left(-10; \dfrac{5}{4}\right) \setminus \{1\}$

Do m nguyên nên có 10 giá trị thỏa mãn.

Chọn phương án B

Câu 46. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3(m+3)x^2 + 18mx - 8$ tiếp xúc với trục hoành?

A 2. **B** 1. **C** 3. **D** 0.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$\begin{cases} 2x^3 - 3(m+3)x^2 + 18mx - 8 = 0 \ (1) \\ 6x^2 - 6(m+3)x + 18m = 0 \ (2). \end{cases}$

Từ (2) ta có: $x^2 - (m+3)x + 3m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = m. \end{array}\right.$

Với $x = 3$ ta thay vào (1) ta có $54 - 27(m+3) + 54m - 8 = 0 \Leftrightarrow 27m = 35 \Leftrightarrow m = \dfrac{35}{27}$.

Với $x = m$ ta thay vào (1) ta có $2m^3 - 3m^2(m+3) + 18m^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow m^3 - 9m^2 + 8 = 0$

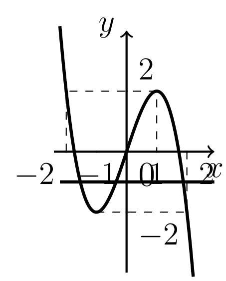
$\Leftrightarrow (m-1)\left(m^2 - 8m - 8\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 4 - 2\sqrt{6} \\ m = 4 + 2\sqrt{6}. \end{array}\right.$

Vậy chỉ có một giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn điều kiện đề bài là $m = 1$.

Chọn phương án B

Câu 47.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây **sai**?



A Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

B Nếu $|m| > 2$ thì phương trình $f(x) = m$ có nghiệm duy nhất.

C Hàm số $y = f(x)$ có cực tiểu bằng -1.

D Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$ bằng 2.

Lời giải.

Đáp án A: đúng.

Đáp án B: Với $m > 2$ hoặc $m < -2$ thì đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số tại một điểm duy nhất nên B đúng.

Đáp án C: Hàm số đạt cực tiểu tại chứ không phải đạt cực tiểu bằng -1 nên C sai.

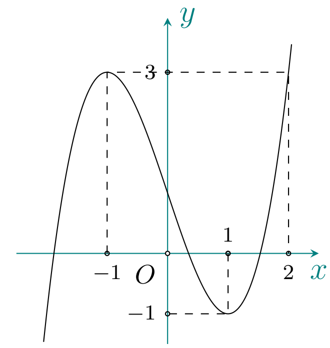
Đáp án D: Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-2; 2]$ đạt được bằng 2 tại $x = -2$ nên D đúng.

Chọn phương án (C)

Câu 48.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sin x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ là

A $[-1; 3)$. **B** $(-1; 1)$. **C** $(-1; 3)$. **D** $[-1; 1)$.



Lời giải.

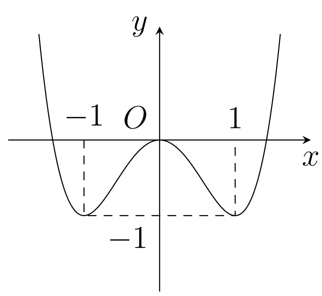
Đặt $t = \sin x$, với $x \in (0; \pi)$ thì $t \in (0; 1]$.

Do đó phương trình $f(\sin x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $(0; 1]$.

Quan sát đồ thị ta suy ra điều kiện của tham số m là $m \in [-1; 1)$.

Chọn phương án (D)

Câu 49. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm của phương trình $2019f(x) + 1 = 0$ là

A 1. **B** 3. **C** 2. **D** 4.

Lời giải.

Ta có $2019f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\dfrac{1}{2019}$.

Số nghiệm phương trình $2019f(x) + 1 = 0$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $d\colon y = -\dfrac{1}{2019}$ (cùng phương với trục Ox).

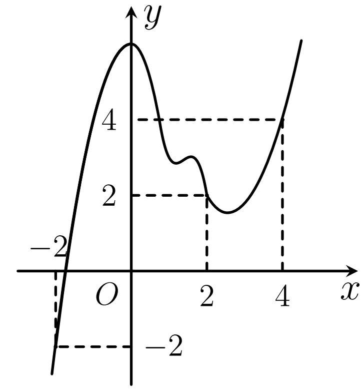
Dựa vào đồ thị như hình vẽ ta có d cắt đồ thị tại 4 điểm phân biệt.

Vậy phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn phương án (D)

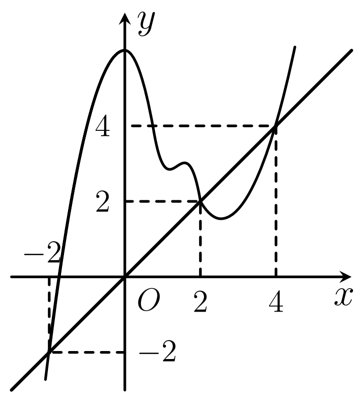
Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.

Đồ thị hàm số $g(x) = \left|2f(x) - x^2\right|$ có tối đa bao nhiêu cực trị?



(A) 7. (B) 5. (C) 6. (D) 3.

Lời giải.



Xét hàm số $h(x) = 2f(x) - x^2 \Rightarrow h'(x) = 2f'(x) - 2x = 2\left(f'(x) - x\right)$.

Từ đồ thì hàm số $f'(x)$ ta có $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \\ x = 4. \end{array}\right.$

Vậy $\displaystyle\int_{-2}^{2} (2f'(x) - 2x)\,\mathrm{d}x > \int_{2}^{4} (2x - 2f'(x))\,\mathrm{d}x > 0 \Leftrightarrow h(x)\Big|_{-2}^{2} > -h(x)\Big|_{2}^{4} \Leftrightarrow h(2) - h(-2) > -\left(h(4) - h(2)\right)$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		2		4		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$h(-2)$	$\nearrow$	$h(2)$	$\searrow$	$h(4)$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $g(x) = \left|2f(x) - x^2\right|$ có tối đa 7 cực trị.

Chọn phương án (A)

Câu 51. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$\sqrt[3]{\frac{m}{2} + \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}m + \frac{4}{3}\sin(x^2 + 2019)}} = \sin(x^2 + 2019)$$

có nghiệm thực?

A. 3. B. 2. C. 7. D. 6.

Lời giải.

Đặt $\sin\left(x^2+2019\right)=a,(a\in[-1;1])\Rightarrow\sqrt[3]{\dfrac{m}{2}+\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}m+\dfrac{4}{3}a}}=a.$

Đặt $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}m+\dfrac{4}{3}a}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{\dfrac{m}{2}+\dfrac{4}{3}t}=a\\ \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}m+\dfrac{4}{3}a}=t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{m}{2}+\dfrac{4}{3}t=a^3\\ \dfrac{m}{2}+\dfrac{4}{3}a=t^3\end{cases}\Rightarrow a^3+\dfrac{4}{3}a=t^3+\dfrac{4}{3}t.\quad(*)$

Xét hàm $f(x)=x^3+\dfrac{4}{3}x$ với $x\in\mathbb{R}$. Ta có $f'(x)=3x^2+\dfrac{4}{3}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ $(*)$ suy ra $f(a)=f(t)\Leftrightarrow a=t$.

Do đó $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}m+\dfrac{4}{3}a}=a\Leftrightarrow m=2a^3-\dfrac{8}{3}a=f(a)$ với $a\in[-1;1]$.

Ta có $f'(a)=6a^2-\dfrac{8}{3}=0\Leftrightarrow a=\pm\dfrac{2}{3}\in[-1;1]$.

Khi đó $f(-1)=\dfrac{2}{3};\ f\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{32}{27};\ f\left(\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{32}{27};\ f(1)=-\dfrac{2}{3}$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow\min\limits_{[-1;1]}f(a)\le m\le\max\limits_{[-1;1]}f(a)\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{32}{27}\le m\le\dfrac{32}{27}\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow m\in\{-1;0;1\}$.

Chọn phương án A

Câu 52. Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm của tham số m sao cho hàm số $y=-x^4+(2m-3)x^2+m$ nghịch biến trên đoạn $[1;2]$?

A. 1. B. 2. C. 4. D. Vô số.

Lời giải.

Ta có $y'=x[-x^2+2(2m-3)]$. Do đó, hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn $[1;2]$ khi và chỉ khi

$$-x^2+2(2m-3)\le 0,\ \forall x\in[1;2].$$

Trường hợp 1: $\Delta'=2(2m-3)<0$. Chỉ có giá trị $m=1$ thỏa mãn. Trường hợp 2: $\begin{cases}\Delta'=2(2m-3)\ge 0\\ -1+2(2m-3)<0\end{cases}$.

Không có giá trị m nguyên dương thỏa mãn.

Vậy có duy nhất 1 giá trị $m=1$ thỏa yêu cầu.

Chọn phương án A

Câu 53. Cho hàm số $y=2x^4-8x^2$ có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số song song với trục hoành?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Tiếp tuyến song song với trục hoành suy ra tiếp tuyến có hệ số góc $k=0$.

Ta có $y'=8x^3-16x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=0 & \Rightarrow y=0\\ x=\pm\sqrt{2} & \Rightarrow y=-8.\end{array}\right.$

Vậy có một tiếp tuyến là $y=-8$ (loại $y=0$ do trùng với trục hoành).

Chọn phương án B

Câu 54. Cho hàm số $y = mx^3 - x^2 - 2x + 8m$ có đồ thị (C_m). Tìm tất cả giá trị tham số m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

A $m \in \left[-\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right]$.
B $m \in \left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)$.
C $m \in \left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right) \setminus \{0\}$.
D $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \setminus \{0\}$.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với trục hoành là

$$mx^3 - x^2 - 2x + 8m = 0 \Leftrightarrow (x+2)[mx^2 - (2m+1)x + 4m] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2 = 0 \\ mx^2 - (2m+1)x + 4m = 0 \quad (1) \end{array}\right.$$

Để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt thì (1) có hai nghiệm phân biệt khác -2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = -12m^2 + 4m + 1 > 0 \\ 4m + (2m+1)2 + 4m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\frac{1}{6} < m < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Chọn phương án C

Câu 55. Trên đồ thị của hàm số $y = \frac{2x-5}{3x-1}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ là các số nguyên?

A Vô số. B 4. C 0. D 2.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

Ta có $y = \frac{2x-5}{3x-1} = 1 - \frac{x+4}{3x-1}$.

Để $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x+4) \vdots (3x-1) \Rightarrow (3x-1+13) \vdots (3x-1) \Rightarrow 13 \vdots (3x-1)$

$$\text{Nên} \left[\begin{array}{l} 3x - 1 = 1 \\ 3x - 1 = -1 \\ 3x - 1 = 13 \\ 3x - 1 = -13 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2}{3} \text{ (loại)} \\ x = 0 \\ x = \frac{14}{3} \text{ (loại)} \\ x = -4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 5 \\ y = 1 \end{array}\right.$$

Vậy trên đồ thị hàm số có hai điểm có tọa độ nguyên là $(0;5)$ và $(-4;1)$.

Chọn phương án D

Câu 56. Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B và $AB \leq 4$?

A 1. B 6. C 2. D 7.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{2x-1}{x+1} = x + m \Leftrightarrow 2x - 1 = (x+1)(x+m) \Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + m + 1 = 0 \ (1).$$

(Ta có $x = -1$ không là nghiệm phương trình (1).)

Đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \neq 0 \\ \Delta = (m-1)^2 - 4(m+1) = m^2 - 6m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 + 2\sqrt{3} \\ m < 3 - 2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3 + 2\sqrt{3} \\ m < 3 - 2\sqrt{3} \end{array}\right. (*).$$

Gọi tọa độ giao điểm $A(x_1; x_1 + m), B(x_2; x_2 + m)$ với x_1, x_2 là nghiệm của (1).

Khi đó $AB = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 6m - 3} \leq 4 \Leftrightarrow m^2 - 6m - 19 \leq 0 \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{7} \leq m \leq 3 + 2\sqrt{7}$.

Kết hợp với điều kiện (∗), ta được $\left[\begin{array}{l} 3 + 2\sqrt{3} < m < 3 + 2\sqrt{7} \\ 3 - 2\sqrt{7} \leq m \leq 3 - 2\sqrt{3}. \end{array}\right.$

Mà m nguyên dương nên $m = 7 \vee m = 8$.

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án A

Câu 57. Cho hàm số $f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$. Tìm tất cá các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 cực trị.

A $-2 < m < \dfrac{5}{4}$. **B** $-\dfrac{5}{4} < m < 2$. **C** $\dfrac{5}{4} \leq m \leq 2$. **D** $\dfrac{5}{4} < m < 2$.

Lời giải.

Nhận thấy rằng nếu $x_0 \geq 0$ là điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ cũng là điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ (1)

Lại thấy vì đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ nhận trục Oy làm trục đối xứng mà $f(x)$ là hàm đa thứ bậc ba nên $x = 0$ luôn là một điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị thì hàm số $f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$ có hai điểm cực trị dương phân biệt.

Hay phương trình $f'(x) = 3x^2 - 2(2m-1)x + 2 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt dương.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - m - 5 > 0 \\ \dfrac{2m-1}{3} > 0 \\ 2 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \vee m > \dfrac{5}{4} \\ \dfrac{1}{2} < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{5}{4} < m < 2.$$

Chọn phương án D

Câu 58. Đường thẳng $y = m$ tiếp xúc với đồ thị $(C)\colon y = -2x^4 + 4x^2 - 1$ tại hai điểm phân biệt $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Giá trị biểu thức $y_A + y_B$ bằng

A 2. **B** -1. **C** 1. **D** 0.

Lời giải.

Xét hàm số $(C)\colon y = -2x^4 + 4x^2 - 1$, tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = -8x^3 + 8x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1. \end{array}\right.$ Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để đường thẳng $y = m$ tiếp xúc với đồ thị $(C)\colon y = -2x^4 + 4x^2 - 1$ tại hai điểm phân biệt thì đường thẳng đó phải đi qua hai điểm cực đại, hay $m = 1$.
Khi đó hai tiếp điểm là $A(-1; 1)$ và $B(1; 1)$. Vậy $y_A + y_B = 2$.
Chọn phương án A

Câu 59. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d_m\colon y = mx+1$ cắt đồ thị $(C)\colon y = x^3 - x^2 + 1$ tại 3 điểm A, $B(0; 1)$ và C phân biệt sao cho tam giác AOC vuông tại O.

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.
Phương trình hoành độ giao điểm của d_m và (C) là:

$$x^3 - x^2 + 1 = mx + 1 \Leftrightarrow x(x^2 - x - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - x - m = 0. \end{array}\right.$$

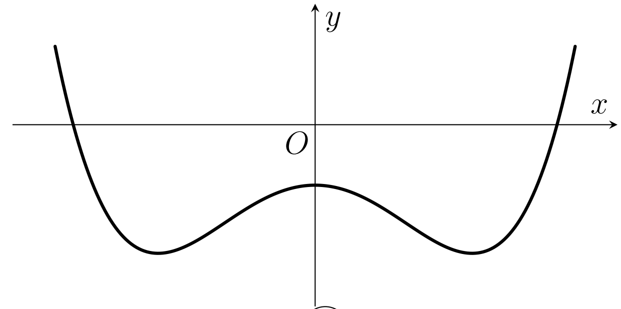
Đường thẳng d_m cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt A, $B(0; 1)$ và C.
$\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2 - x - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.
$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 + 4m > 0 \\ -m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{4} \\ m \neq 0. \end{cases}$
Khi đó: $A(x_1; mx_1 + 1)$ và $C(x_2; mx_2 + 1)$ Theo Vi-et: x_1 và x_2 là nghiệm phương trình $x^2 - x - m = 0$ nên ta có : $x_1 + x_2 = 1$ và $x - 1x_2 = -m$.
$\triangle AOC$ vuông tại O.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0 \\
&\Leftrightarrow x_1x_2 + (mx_1 + 1)(mx_2 + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow (m^2 + 1)x_1x_2 + m(x_1 + x_2) + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow (m^2 + 1)(-m) + m + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow -m^3 + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow m = 1.(\text{Thỏa mãn điều kiện})
\end{aligned}$$

Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn bài toán.
Chọn phương án B

Câu 60.

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm kết luận **đúng**



Ⓐ $a + b > 0$. Ⓑ $bc > 0$. Ⓒ $ab > 0$. Ⓓ $ac > 0$.

Lời giải.

Phương pháp:

Dựa vào cách đọc đồ thị hàm số trùng phương bậc bốn $y = ax^4 + bx^2 + c$.

+ Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị khi $ab < 0$, có một điểm cực trị khi $ab \geq 0$.

+ Xác định dấu của hệ số tự do c dựa vào giao của đồ thị với trục tung.

+ Xác định dấu của a dựa vào $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$,.

Nếu $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ thì $a > 0$.

Nếu $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$ thì $a < 0$.

Cách giải:

Từ hình vẽ ta thấy:

+ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ nên $a > 0$.

+ Đồ thị hàm số có ba cực trị nên $ab < 0$ mà $a > 0 \Rightarrow b < 0$.

+ Đồ thị cắt trục tung tại điểm nằm dưới trục Ox nên $c < 0$.

Từ đó ta có $a > 0; b > 0; c > 0 \Rightarrow bc > 0$.

Chọn phương án B

D MỨC ĐỘ 4

Câu 61. Cho hàm số $y = x^3 - 2018x$ có đồ thị (C). M_1 thuộc (C) và có hoành độ là 1, tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại M_2, tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại $M_3, \ldots$. Cứ như thế mãi và tiếp tuyến của (C) tại $M_n(x_n; y_n)$ thỏa mãn $2018x_n + y_n + 2^{2019} = 0$. Tìm n.

Ⓐ 675. Ⓑ 672. Ⓒ 674. Ⓓ 673.

Lời giải.

Có: $y' = 3x^2 - 2018$.

Gọi d_n là tiếp tuyến của (C) tại điểm M_n.

Có điểm $M_1(1; -2017) \Rightarrow d_1 \colon y + 2017 = y'(1).(x - 1) \Leftrightarrow d_1 \colon y = -2015x - 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và (C) là: $x^3 - 2018x = -2015x - 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow$
$\left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{array}\right.$.

Có điểm $M_2(-2; 4028) \Rightarrow d_2 \colon y - 4028 = y'(-2).(x + 2) \Leftrightarrow d_2 \colon y = -2006x + 16$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d_2 và (C) là: $x^3 - 2018x = -2006x + 16 \Leftrightarrow x^3 - 12x - 16 = 0 \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l}x_2 = -2\\ x_3 = 4\end{array}\right.$.

Có điểm $M_3(4; -8008) \Rightarrow d_3\colon y + 8008 = y'(4).(x-4) \Leftrightarrow d_3\colon y = -1970x - 128$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d_3 và (C) là: $x^3 - 2018x = -1970x - 128 \Leftrightarrow x^3 - 48x + 128 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_3 = 4\\ x_4 = -8\end{array}\right.$.

Suy ra ta có dãy (x_n): $\begin{cases}x_1 = 1\\ x_2 = -2\\ x_3 = 4\\ x_4 = -8\\ \ldots\end{cases} \Rightarrow x_n = (-2)^{n-1} = -\dfrac{1}{2}.(-2)^n \Rightarrow y_n = x_n^3 - 2018x_n$.

Giả thiết: $2018x_n + y_n + 2^{2019} = 0 \Leftrightarrow 2018x_n + x_n^3 - 2018x_n + 2^{2019} = 0 \Leftrightarrow x_n^3 = -2^{2019} \Leftrightarrow x_n^3 = (-2)^{2019} \Leftrightarrow (-2)^{3n-3} = (-2)^{2019} \Leftrightarrow 3n - 3 = 2019 \Leftrightarrow n = 674$.

Chọn phương án D

Câu 62. Cho hàm số $y = \dfrac{x}{1-x}(C)$. Tìm m để đường thẳng $d: y = mx - m - 1$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt M, N sao cho $AM^2 + AN^2$ đạt giá trị nhỏ nhất với $A(-1; 1)$.

A $m = 2$. **B** $m = 0$. **C** $m = 1$. **D** $m = -1$.

Lời giải.

Phương pháp:

Xét phương trình hoành độ giao điểm, áp dụng định lí Vi-ét.

Cách giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$\begin{aligned}\frac{x}{1-x} = mx - m - 1, (x \neq 1) &\Leftrightarrow x = mx - m - 1 - mx^2 + mx + x\\ &\Leftrightarrow mx^2 - 2mx + m + 1 = 0 \qquad (1)\end{aligned}$$

Để (C) cắt d tại 2 điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases}m \neq 0\\ \Delta' > 0\\ m \cdot 1^2 - 2m.1 + m + 1 \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m \neq 0\\ m^2 - m(m+1) > 0\\ 1 \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow m < 0$.

Khi đó, giả sử x_1, x_2 là nghiệm của (1), áp dụng định lsy Vi-ét ta có: $\begin{cases}x_1 + x_2 = 2,\\ x_1x_2 = \dfrac{m+1}{m}.\end{cases}$

Tọa độ giao điểm là: $A\left(x_1; mx_1 - m - 1\right), B\left(x_2; mx_2 - m - 1\right) \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AM} = (x_1 + 1; mx_1 - m - 2)\\ \overrightarrow{AN} = (x_2 + 1; mx_2 - m - 2).\end{cases}$

Gọi I là trung điểm của $MN \Rightarrow \begin{cases}x_I = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{2}{2} = 1\\ y_I = \dfrac{mx_1 - m - 1 + mx_2 - m - 1}{2} = -1\end{cases} \Rightarrow I(1; -1)$.

Ta có:

$$\begin{aligned} AM^2 + AN^2 &= \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IN}\right)^2 \\ &= 2AI^2 + 2\overrightarrow{AI}.\left(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN}\right) + IM^2 + IN^2 \\ &= 2AI^2 + \frac{1}{2}MN^2. \end{aligned}$$

Do vậy, $(AM^2 + AN^2)_{\min}$ khi và chỉ khi $MN_{\min}$.
Ta có: $\overrightarrow{MN} = (x_2 - x_1; mx_2 - mx_1)$, suy ra

$$\begin{aligned} \sqrt{(1+m^2)(x_2-x_1)^2} &= \sqrt{(1+m)^2\left((x_2+x_1)^2 - 4x_1x_2\right)} \\ &= \sqrt{(1+m^2)\left(4 - \frac{4(m+1)}{n}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{-4(1+m^2)}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{4}{(-m)} + (-4m)} \\ &\geq \sqrt{2.\sqrt{\frac{4}{-m}.(-4m)}} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Suy ra $MN_{\min} = 2\sqrt{2}$ khi và chỉ khi $\dfrac{4}{-m} = -4m \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1\,(\text{ktm}). \\ m = -1\,(\text{tm}). \end{array}\right.$

Vậy để $(AM^2 + AN^2)_{\min}$ thì $m = -1$.
Chọn phương án D

Câu 63. Cho hàm số $y = f(x) = 2^{2018}x^3 + 3.2^{2018}x^2 - 2018$ có đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3. Tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{1}{f'(x_1)} + \dfrac{1}{f'(x_2)} + \dfrac{1}{f'(x_3)}$.

A $P = 0$. **B** $P = 2^{2018}$. **C** $P = -2018$. **D** $P = 3.2^{2018} - 1$.

Lời giải.

Phương pháp:

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Cách giải:

Đồ thị hàm số $y = f(x) = 2^{2018}x^3 + 3.2^{2018}x^2 - 2018$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3.

$\Rightarrow f(x) = 2^{2018}(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

$f'(x) = 2^{2018}\left[(x - x_2)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_2)\right]$.

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(x_1) = 2^{2018}(x - x_2)(x - x_3) \\ f'(x_2) = 2^{2018}(x - x_1)(x - x_3) \\ f'(x_3) = 2^{2018}(x - x_1)(x - x_2). \end{cases}$$

Ta có $P = \dfrac{1}{f'(x_1)} + \dfrac{1}{f'(x_2)} + \dfrac{1}{f'(x_3)}$.

$= \dfrac{1}{2^{2018}}\left(\dfrac{1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\dfrac{1}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\dfrac{1}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right).$

$= \dfrac{1}{2^{2018}}\cdot\dfrac{-(x_2-x_3)-(x_3-x_1)-(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)} = \dfrac{1}{2^{2018}.}\cdot\dfrac{0}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)} = 0.$

Vậy $P = 0$.

Chọn phương án A

Câu 64. Cho hàm số $y = x^4 - (3m+4)x^2 + m^2$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

A $\begin{cases} m > -\dfrac{4}{5} \\ m \neq 0 \end{cases}$.
B $m > 0$.
C $m = 12$.
D $\left[\begin{array}{l} m = 12 \\ m = -\dfrac{12}{19} \end{array}\right.$.

Lời giải.

Phương pháp:

Ba số a, b, c lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi $a + c = 2b$.

Cách giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với Ox: $x^4 - (3m+4)x^2 + m^2 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2 (t \geq 0)$, phương trình (1) trở thành $t^2 - (3m+4)t + m^2 = 0$ (2)

Để (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt thì (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S = 3m+4 > 0 \\ P = m^2 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m+4)^2 - 4m^2 > 0 \\ m > -\frac{4}{3} \\ m \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m^2 + 24m + 16 > 0 \\ m > -\frac{4}{3} \\ m \neq 0. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > -\dfrac{4}{5} \\ m < -4 \end{array}\right. \\ m > -\dfrac{4}{3} \\ m \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{4}{5} \\ m \neq 0. \end{cases}$

Khi đó, phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt $t_1, t_2 (t_1 < t_2)$, dẫn tới (1) có 4 nghiệm phân biệt sắp xếp tăng dần như sau: $-\sqrt{t_2}, -\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}$.

Để dãy số trên là dãy cấp số cộng thì $\begin{cases} -\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1} = -2\sqrt{t_1} \\ -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = 2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow 3\sqrt{t_1} = \sqrt{t_2} \Leftrightarrow 9t_1 = t_2$.

Theo hệ thức Vi – ét ta có:

$\begin{cases} t_1 + t_2 = 3m+4 \\ t_1t_2 = m^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 9t_1 = 3m+4 \\ t_1.9t_2 = m^2. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{3m+4}{10} \\ t_1 = \dfrac{|m|}{3} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{3m+4}{10} = \dfrac{|m|}{3}.$ (3)

+) Với $m > 0$: (3) $\Leftrightarrow 9m + 12 = 10m \Leftrightarrow m = 12$ (tm).

+) Với $m < 0$: (3) $\Leftrightarrow 9m + 12 = -10m \Leftrightarrow m = -\dfrac{12}{19}$ (tm).

Vậy $m = 12$ hoặc $m = -\dfrac{12}{19}$.

Chọn phương án D

Câu 65. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2 (C)$. Biết rằng đường thẳng $d : y = ax + b$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt M, N, P. Tiếp tuyến tại ba điểm M, N, P của đồ thị (C) cắt (C) tại các điểm M', N', P' (tương ứng khác M, N, P). Khi đó đường thẳng đi qua ba điểm M', N', P' có phương trình là

A $y = (4a + 9)x + 18 - 8b$. **B** $y = (4a + 9)x + 14 - 8b$.
C $y = ax + b$. **D** $y = -(8a + 18)x + 18 - 8b$.

Lời giải.

Giả sử $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$.

Ta có phương trình tiếp tuyến tại A của đồ thị (C) là:

$\Delta_1 : y = \left(3x_1^2 - 3\right)(x - x_1) + x_1^3 - 3x_1 + 2$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và Δ_1 là:

$\left(3x_1^2 - 3\right)(x - x_1) + x_1^3 - 3x_1 + 2 = x_3 - x + 2 \Leftrightarrow (x - x_1)^2 (x + 2x_1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = -2x_1 \end{array}\right.$

Do đó $A'\left(-2x_1; -8x_1^3 + 6x_1 + 2\right)$.

Lại có: $-8x_1^3 + 6x_1 + 2 = -8\left(x_1^3 - 3x_1 + 2\right) - 18x_1 + 18 = -8(ax_1 + b) - 18x_1 + 18$

$= -8(ax_1 + b) - 18x_1 + 18 = -2x_1(4a + 9) + 18 - 8b$.

Khi đó $y_{A'} = x_{A'}(4a + 9) + 18 - 8b$.

Vậy phương trình đường thẳng đi qua 3 điểm A', B', C' là $y = x(4a + 9) + 18 - 8b$.

Chọn phương án A

Câu 66. Cho phương trình: $\sin^3 x + 2\sin x + 3 = \left(2\cos^3 x + m\right)\sqrt{2\cos^3 x + m - 2} + 2\cos^3 x + \cos^2 x + m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có đúng 1 nghiệm $x \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right)$?

A 2. **B** 1. **C** 3. **D** 4.

Lời giải.

Ta có: $\sin^3 x + \sin^2 x + 2\sin x = \left(\sqrt{2\cos^3 x + m - 2}\right)^3 + \left(2\cos^3 x + m - 2\right) + 2\sqrt{2\cos^3 x + m - 2}$ (1).

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + 2t$ có $f'(t) = 6t^2 + 2t + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bởi vậy: (1) $\Leftrightarrow f(\sin x) = f\left(\sqrt{2\cos^3 x + m - 2}\right) \Leftrightarrow \sin x = \sqrt{2\cos^3 x + m - 2}$ (2).

Với $x \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right)$ thì (2)$\Leftrightarrow \sin^2 x = 2\cos^3 x + m - 2 \Leftrightarrow -2\cos^3 x - \cos^2 x + 3 = m$ (3).

Đặt $t = \cos x$, phương trình (3) trở thành $-2t^3 - t^2 - 1 = m$ (4).

Ta thấy, với mỗi $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$ thì phương trình $\cos x = t$ cho ta một nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$.

Xét hàm số $g(t) = -2t^3 - t^2 + 3$ với $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Ta có $g'(t) = -6t^2 - 2t, g'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		0		1
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	3	$\searrow$	$\frac{80}{27}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

Do đó, để phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$ điều kiện cần và đủ là phương trình (4) có đúng một nghiệm $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m \in \left[0; \frac{80}{27}\right] \end{array}\right. \Rightarrow m \in \{3; 2; 1; 0\}$ (Do m nguyên).

Chọn phương án D

Câu 67. Cho hàm số $y = x^3 - 11x$ có đồ thị là (C). Gọi M_1 là điểm trên (C) có hoành độ $x = 2$. Tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại điểm M_2 khác M_1, tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại điểm M_3 khác M_2,..., tiếp tuyến của (C) tại M_{n-1} cắt (C) tại điểm M_n khác M_{n-1} M_{n-1} $(n \in \mathbb{N}, n \geq 4)$. Gọi $(x_n; y_n)$ là tọa độ của điểm M_n. Tìm n sao cho $11x_n + y_n + 2^{2019} = 0$.

A $n = 675$. **B** $n = 673$. **C** $n = 674$. **D** $n = 672$.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 11$.

Lấy $M_0\left(x_0; x_0^3 - 11x_0\right) \in (C)$, phương trình tiếp tuyến của (C) tại M_0 là $y = \left(3x_0^2 - 11\right)(x - x_0) + x_0^3 - 11x_0$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 11x = \left(3x_0^2 - 11\right)(x - x_0) + x_0^3 - 11x_0 \Leftrightarrow \left(x^3 - x_0^3\right) - 11(x - x_0) - \left(3x_0^2 - 11\right)(x - x_0) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_0 \\ x^2 + x_0 x - 2x_0^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_0 \\ x = -2x_0 \end{array}\right.$.

Cho $M_0 \equiv M_1(x_1; y_1) \Rightarrow M_2\left(-2x_1; (-2x_1)^3 - 11(-2x_1)\right)$.

Bằng cách lập luận tương tự $M_n\left((-2)^{n-1}x_1; \left[(-2)^{n-1}x_1\right]^3 - 11\left((-2)^{n-1}x_1\right)\right)$.

$11x_n + y_n + 2^{2019} = 0 \Leftrightarrow 11\left((-2)^{n-1}x_1\right) + \left[(-2)^{n-1}x_1\right]^3 - 11\left((-2)^{n-1}x_1\right) + 2^{2019} = 0$

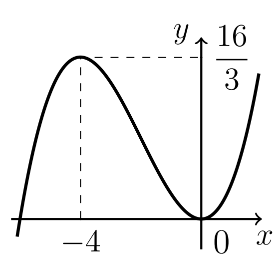
$\Leftrightarrow \left[(-2)^{n-1}x_1\right]^3 = -2^{2019}$.

Thay $x_1 = -2 \Rightarrow (-2)^{3n} = (-2)^{2019} \Leftrightarrow 3n = 2019 \Leftrightarrow n = 673$. Suy ra đáp án B.

Chọn phương án B

Câu 68.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|\frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right|\right) = f(m^2 + 4m + 4)$ có nghiệm?



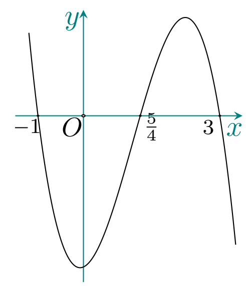
A 4. **B** 5. **C** Vô số. **D** 3.

Lời giải.

Vì $-1 \leq \sin x \leq 1$; $-1 \leq \cos x \leq 1$ nên $2\cos x - \sin x > -3 \Rightarrow 2\cos x - \sin x + 4 > 0$.

Đặt $\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}=t\Leftrightarrow(2t+1)\cos x-(t+3)\sin x=-4t-1$.
Phương trình trên có nghiệm khi
$(2t+1)^2+(t+3)^2\geq(-4t-1)^2\Leftrightarrow 11t^2-2t-9\leq 0\Leftrightarrow\dfrac{9}{11}\leq t\leq 1\Rightarrow 0\leq|t|\leq 1$.
Từ đồ thị hàm số ta thấy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;1)$, nên phương trình $f(x)=f(|t|)$ với $t\in[0;1]$ có nghiệm duy nhất khi $x=|t|\Rightarrow x\geq 0$.
Do đó phương trình $f\left(\left|\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|\right)=f(m^2+4m+4)$ có nghiệm
$\Leftrightarrow|t|=m^2+4m+4$ có nghiệm với $0\leq|t|\leq 1$
$\Leftrightarrow 0\leq m^2+4m+4\leq 1\Leftrightarrow-3\leq m\leq-1$.
Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-3;-2;-1\}$. Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu.
Chọn phương án D

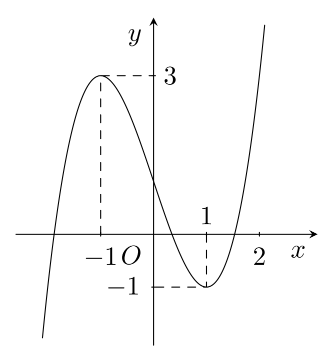
Câu 69.
Cho hàm số $f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$, $(m,n,p,q,r\in\mathbb{R})$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tập nghiệm của phương trình $f(x)=r$ có số phần tử là



A) 4. B) 3. C) 1. D) 2.

Lời giải.
Ta có $f'(x)=4mx^3+3nx^2+2px+q$ (1).
Dựa vào đồ thị $y=f'(x)$ ta thấy phương trình $f'(x)=0$ có ba nghiệm đơn là -1, $\dfrac{5}{4}$, 3.
Do đó $f'(x)=m(x+1)(4x-5)(x-3)$ và $m\neq 0$. Hay $f'(x)=4mx^3-13mx^2-2mx+15m$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $n=-\dfrac{13}{3}m$, $p=-m$ và $q=15m$.
Khi đó phương trình $f(x)=r\Leftrightarrow mx^4+nx^3+px^2+qx=0\Leftrightarrow m(x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x)=0$
$\Leftrightarrow 3x^4-13x^3-3x^2+45x=0\Leftrightarrow x(3x+5)(x-3)^2=0$
Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x)=r$ là $S=\left\{-\dfrac{5}{3};0;3\right\}$.
Chọn phương án B

Câu 70.
Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\pi^x)-\dfrac{m^2-1}{8}=0$ có hai nghiệm phân biệt là



A) 7. B) 6. C) 5. D) 4.

Lời giải.
Đặt $t=\pi^x,(t>0)$, khi đó: $f(\pi^x)-\dfrac{m^2-1}{8}=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow f(t)=\dfrac{m^2-1}{8}$ có hai nghiệm dương phân biệt.

$\Leftrightarrow -1<\dfrac{m^2-1}{8}<1 \Leftrightarrow -3<m<3$.

Vì m là số nguyên nên $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$.

Chọn phương án C

Câu 71. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y=f(x^2-2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(2;+\infty)$. B $(0;2)$. C $(-\infty;-2)$. D $(-2;0)$.

Lời giải.

Ta có $y'=2xf'\left(x^2-2\right)$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(x^2-2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2-2=-2\\ x^2-2=0\\ x^2-2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\sqrt{2}\\ x=\pm 2\end{array}\right..$$

Do các nghiệm của phương trình $y'=0$ đều là nghiệm bội lẻ, mà $y'(3)=6f'(7)<0$ nên ta có bảng xét dấu y'

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số $y=f\left(x^2-2\right)$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Chọn phương án A

Câu 72. Cho (P) là đường parabol đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=mx^4-\left(m^2+1\right)x^2+m^2-m+1$ và A,B là giao điểm của (P) với trục hoành. Khi $AB=2$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $m\in(4;6)$. B $m\in(2;4)$. C $m\in(-3;-1)$. D $m\in(-1;2)$.

Lời giải.

Ta có: $y'=4mx^3-2\left(m^2+1\right)x$.

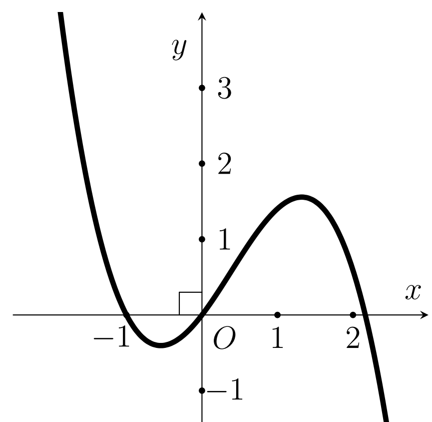
$y'=0\Leftrightarrow 4mx^3-2\left(m^2+1\right)x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ 2mx^2-m^2-1=0(*)\end{array}\right..$

Để đồ thị hàm số $y=mx^4-\left(m^2+1\right)x^2+m^2-m+1$ có ba điểm cực trị M,N,P thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow -2m\left(m^2+1\right)<0\Leftrightarrow m>0$. (**)

Ta có ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=mx^4-\left(m^2+1\right)x^2+m^2-m+1$:

$M\left(0;m^2-m+1\right), N\left(\sqrt{\dfrac{m^2+1}{2m}};-\dfrac{\left(m^2+1\right)^2}{4m}+m^2-m+1\right)$,
$P\left(-\sqrt{\dfrac{m^2+1}{2m}};-\dfrac{\left(m^2+1\right)^2}{4m}+m^2-m+1\right)$.
Parabol đi qua ba điểm M,N,P nên có đỉnh là $M\left(0;m^2-m+1\right)\Rightarrow(P):y=ax^2+m^2-m+1$.
Vì $N\in(P)\Rightarrow-\dfrac{\left(m^2+1\right)^2}{4m}+m^2-m+1=a\cdot\dfrac{m^2+1}{2m}+m^2-m+1\Leftrightarrow a=-\dfrac{m^2+1}{2}$.
$\Rightarrow(P):y=-\dfrac{m^2+1}{2}.x^2+m^2-m+1$.
Vì (P) cắt Ox tại hai điểm A,B nên ta có x_A,x_B là hai nghiệm phân biệt của phương trình $-\dfrac{m^2+1}{2}.x^2+m^2-m+1=0\Leftrightarrow\left(m^2+1\right)x^2-2\left(m^2-m+1\right)=0$.
Ta có: $AB=2\Leftrightarrow|x_B-x_A|=2\Leftrightarrow\sqrt{\left(x_B+x_A\right)^2-4x_Ax_B}=2\Leftrightarrow\sqrt{\dfrac{8\left(m^2-m+1\right)}{m^2+1}}=2$
$\Leftrightarrow\sqrt{\dfrac{2\left(m^2-m+1\right)}{m^2+1}}=1\Leftrightarrow m^2-2m+1=0\Leftrightarrow m=1$. (nhận)
Chọn phương án D

Câu 73.
Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?



Ⓐ $a+c>0$. Ⓑ $a+b+c+d<0$. Ⓒ $a+c<b+d$. Ⓓ $b+d-c>0$.

Lời giải.
Phương pháp:
$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ Quan sát đồ thị và sử dụng công thức $\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\Big|_a^b=f(b)-f(a)$ từ đó tìm ra mối quan hệ giữa các hệ số.
Cách giải:
Ta có $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$.
Từ đồ thị hàm $f'(x)$ ta có $f'(0)=0\Rightarrow d=0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=-\infty;\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=+\infty\Rightarrow a<0$
Ta xét $\int\limits_{-1}^{0}f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\Big|_{-1}^{0}=e-(a-b+c-d+e)=-a+b-c+d$,

Mà $\int\limits_{-1}^{0} f'(x)\,\mathrm{d}x < 0 \Rightarrow -a+b-c+d<0 \Leftrightarrow a+c>b+d$.

Nên $a+c<b+d$ sai.

Lại có $d=0 \Rightarrow a+c>b \Leftrightarrow a>b-c$

Mà $a<0 \Rightarrow b-c<0$

Do đó $d+d-c<0$ nên $b+d-c>0$ sai.

Lại xét $\int\limits_{0}^{1} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\Big|_0^1 = a+b+c+d+e-e=a+b+c+d$

Mà $\int\limits_{0}^{1} f'(x)\,\mathrm{d}x > 0 \Rightarrow a+b+c+d>0$ nên $a+b+c+d<0$ sai.

Theo trên ta có $\begin{cases} a+b+c+d>0 \\ -a+b-c+d<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a-b-c-d<0 \\ -a+b-c+d<0 \end{cases} \Rightarrow -2(a+c)<0 \Leftrightarrow a+c>0$ nên $a+c>0$ đúng.

Chọn phương án (A)

Câu 74. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi M là điểm bất kì thuộc đồ thị (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M cắt hai tiệm cận của đồ thị (C) tại P và Q. Giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng PQ bằng

A $3\sqrt{2}$. **B** $4\sqrt{2}$. **C** $2\sqrt{2}$. **D** $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Giả sử $M\left(a;2+\dfrac{1}{a-1}\right)$ thuộc đồ thị (C) (với $a\neq 1$).

$y'=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M có dạng

$$y=-\frac{1}{(a-1)^2}(x-a)+2+\frac{1}{a-1}.$$

Tiếp tuyến này cắt đường tiệm cận đứng $x=1$ và đường tiệm cận ngang $y=2$ lần lượt tại $P\left(1;\dfrac{2a}{a-1}\right)$ và $Q(2a-1;2)$.

Khi đó $PQ=\sqrt{(2a-2)^2+\left(2-\dfrac{2a}{a-1}\right)^2}=2\sqrt{(a-1)^2+\dfrac{1}{(a-1)^2}}\geq 2\sqrt{2}$.

Dấu "$=$" xảy ra khi $(a-1)^2=\dfrac{1}{(a-1)^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-1=1 \\ a-1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=0. \end{array}\right.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của PQ bằng $2\sqrt{2}$.

Chọn phương án (C)

Câu 75. Cho Parabol $(P_1)\colon y=f(x)=\dfrac{1}{4}x^2-x$ và $(P_2)\colon y=g(x)=ax^2-4ax+b$ $(a>0)$. Gọi I_1, I_2 lần lượt là các đỉnh của (P_1), (P_2) và A, B là giao điểm của (P_1) với trục Ox. Biết rằng bốn điểm A, B, I_1, I_2 tạo thành tứ giác lồi có diện tích bằng 10. Tính diện tích S của tam giác IAB với I là đỉnh của Parabol $(P)\colon y=h(x)=f(x)+g(x)$.

A $S = 6$. **B** $S = 4$. **C** $S = 9$. **D** $S = 7$.

Lời giải.

$(P_1)\colon y = f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - x$ có đỉnh $I_1(2;-1)$.

$(P_2)\colon y = g(x) = ax^2 - 4ax + b$ $(a > 0)$ có đỉnh $I_2(2; b - 4a)$.

$(P) : y = h(x) = f(x) + g(x) = \left(\dfrac{1}{4} + a\right)x^2 - (1 + 4a)x + b$ có đỉnh $I(2; b - 4a - 1)$.

Suy ra I_1, I_2, I cùng nằm trên đường thẳng $x = 2$.

Mà giao điểm của (P_1) và Ox là $A(4;0)$ và $B(0;0)$

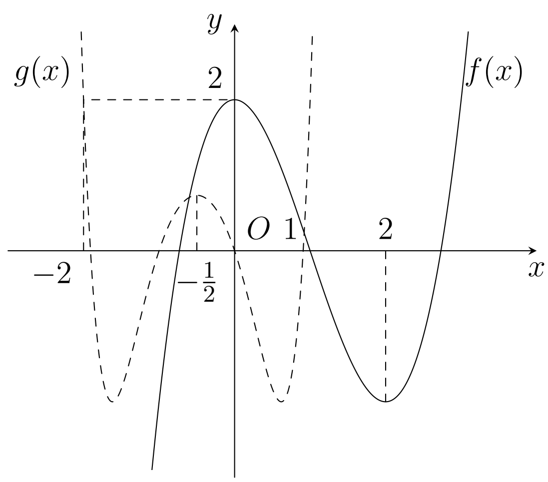
Suy ra tứ giác lồi AI_1BI_2 có hai đường chéo vuông góc và $b - 4a > 0$

$S_{AI_1BI_2} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot I_1I_2 \Leftrightarrow 10 = \dfrac{1}{2}4 \cdot |b - 4a + 1| = 10 \Leftrightarrow b - 4a + 1 = 5 \Leftrightarrow b - 4a = 4$.

Tam giác IAB có diện tích là $S = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot \mathrm{d}(I, Ox) = \dfrac{1}{2} \cdot 4|b - 4a - 1| = 6$.

Chọn phương án A

Câu 76. Cho hàm số bậc ba $f(x)$ và $g(x) = f(mx^2 + nx + p)$ $(m, n, p \in \mathbb{Q})$ có đồ thị như hình dưới (Đường nét liền là đồ thị hàm số $f(x)$, nét đứt là đồ thị của hàm $g(x)$, đường thẳng $x = -\dfrac{1}{2}$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số $g(x)$).



Giá trị của biểu thức $P = (n + m)(m + p)(p + 2n)$ bằng bao nhiêu?

A 12. **B** 16. **C** 24. **D** .

Lời giải.

Ta có $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Hàm số đạt cực trị tại $x = 0$; $x = 2$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;0)$, $(0;2)$ nên

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(2) = 0 \\ f(1) = 0 \\ f(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 2.$$

Ta có $g(x) = \left(mx^2 + nx + p\right)^3 - 3\left(\mathrm{m}x^2 + nx + p\right)^2 + 2$. Hệ số tự do bằng $p^3 - 3p^2 + 2$.

Đồ thị hàm số $g(x)$ đi qua điểm $(0;0)$ nên $p^3 - 3p^2 = 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p = 1 \\ p = 1 - \sqrt{3} \\ p = 1 + \sqrt{3} \end{array}\right.$.

Vì $p \in \mathbb{Q}$ nên $p = 1$.

Đồ thị hàm số $g(x) = f\left(mx^2 + nx + p\right)$ có trục đối xứng là $x = -\dfrac{1}{2}$ nên đồ thị hàm số $y = mx^2 + nx + p$ cũng có trục đối xứng là $x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow -\dfrac{n}{2m} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow m = n$.

Đồ thị hàm số $g(x)$ qua điểm $(-2;2)$ nên $g(-2) = 0 \Rightarrow g(x) = (2m+1)^3 - 3(2m+1)^2 + 2 = 2$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = n = 1 \\ m = n = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Do đồ thị có hướng quay lên trên, suy ra $m > 0 \Rightarrow m = n = p = 1$.

$\Rightarrow P = (n+m)(m+p)(p+2n) = 12$.

Chọn phương án A

Câu 77. Cho hàm số $y = x^3 - x^2 - mx + 1$ có đồ thị (C). Tìm tham số m để (C) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt.

A $m < 0$. B $m > 1$. C $m \leq 1$. D $m \geq 0$.

Lời giải.

Cách 1:

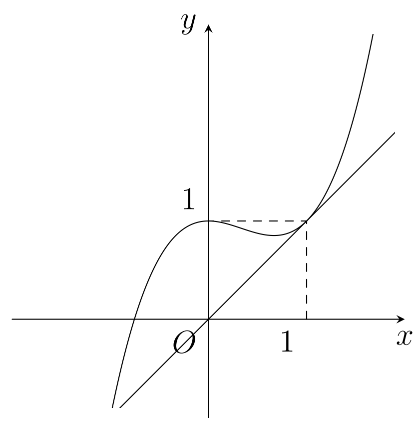
Để (C) cắt Ox tại ba điểm phân biệt thì p.trình $x^3 - x^2 - mx + 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt, hay phương trình $x^3 - x^2 + 1 = mx$ có ba nghiệm phân biệt.

Điều này tương đương với đường thẳng $y = mx$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + 1$ tại ba điểm phân biệt.

Đường thẳng $y = mx$ đi qua gốc tọa độ.

Đường thẳng $y = x$ là tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + 1$ (như hình minh họa bên).

Do đó với $m > 1$ thì đường thẳng $y = mx$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + 1$ tại ba điểm phân biệt



Cách 2:

Để (C) cắt Ox tại ba điểm phân biệt thì phương trình $x^3 - x^2 - mx + 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

Dễ thấy $x = 0$ không thể là nghiệm nên $x^3 - x^2 - mx + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x}$.

Xét hàm số $y = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x}$ trên tập $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		0			1		$+\infty$
y'		$-$	‖		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$		↘	1	↗	$+\infty$

Để phương trình $m = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x}$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m > 1$.

Chọn phương án B

Câu 78. Cho hàm số $y = \dfrac{x^4}{2} - 3x^2 + \dfrac{5}{2}$, có đồ thị (C) và điểm $M \in (C)$ có hoành độ $x_M = a$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại hai điểm phân biệt khác M.

A 0. **B** 3. **C** 2. **D** 1.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \dfrac{x^4}{2} - 3x^2 + \dfrac{5}{2}$, ta có: $y' = 2x^3 - 6x$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M: $y = \left(2a^3 - 6a\right)(x - a) + \dfrac{a^4}{2} - 3a^2 + \dfrac{5}{2}$ (d).

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C):

$$\begin{aligned}
& \left(2a^3 - 6a\right)(x - a) + \frac{a^4}{2} - 3a^2 + \frac{5}{2} = \frac{x^4}{2} - 3a^2 + \frac{5}{2} \\
\Leftrightarrow\ & (x-a)^2\left(x^2 + 2ax + 3a^2 - 6\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-a)^2\left(x^2 + 2ax + 3a^2 - 6\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = a \\ x^2 + 2ax + 3a^2 - 6 = 0\,(2). \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Đường thẳng (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt khác M khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác $a \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 6 - 2a^2 > 0 \\ a^2 + 2a^2 + 3a^3 - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} < a < \sqrt{3} \\ a \neq \pm 1. \end{cases}$

Mà a nguyên nên $a = 0$.

Chọn phương án D

Câu 79. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị (C). Biết rằng (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x_1 > x_2 > x_3 > 0$ và trung điểm nối hai điểm cực trị của (C) có hoành độ $x_0 = \dfrac{1}{3}$. Biết rằng $(3x_1 + 4x_2 + 5x_3)^2 = 44\left(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1\right)$. Hãy xác định tổng $S = x_1 + x_2^2 + x_3^2$.

A $\dfrac{137}{216}$. **B** $\dfrac{45}{157}$. **C** $\dfrac{133}{216}$. **D** 1.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y = 3ax^2 + 2bx + c$.

Do đồ thị (C)có hai điểm cực trị nên ta có phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt hay là phương trình $3ax^2 + 2bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_i, x_j và hai nghiệm này cũng chính là hoành độ của hai điểm cực trị của đồ thị (C).

Theo vi-ét ta có $x_i + x_j = -\dfrac{2b}{3a}$.

Suy ra hoành độ giao điểm nối hai điểm cực trị là

$x_0 = \dfrac{x_i + x_j}{2} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow -\dfrac{2b}{3a} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow b = -a.$

Mặt khác, do giả thiết ta có phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 nên theo vi-ét ta có

$x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{a}{a} = 1.$

Ta có:

$$\begin{aligned}
& (3x_1 + 4x_2 + 5x_3)^2 = 44\left(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1\right) \\
\Leftrightarrow\ & 9x_1^2 + 16x_2^2 + 25x_3^2 = 20x_1x_2 + 4x_2x_3 + 14x_3x_1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{20}{3}x_1^2 + \frac{40}{3}x_2^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + \frac{7}{3}x_1^2 + 21x_3^2 = 20x_1x_2 + 4x_2x_3 + 14x_3x_1
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

— $\dfrac{5}{3}\left(4x_1^2 + 9x_2^2\right) \geq \dfrac{5}{3} \cdot 2\sqrt{4x_1^1 \cdot 9x_2^2} = 20x_1x_2$ (1) .

— $x_2^2 + 4x_3^2 \geq 2\sqrt{x_2^2 \cdot 4x_3^2} = 4x_1x_2$ (2).

— $\dfrac{7}{12}\left(4x_1^2 + 36x_3^2\right) \geq \dfrac{7}{12} \cdot 2\sqrt{4x_1^2 \cdot 36x_3^2} = 14x_3x_1$ (3) .

Lấy $(1) + (2) + (3)$ vế theo vế ta có: $9x_1^2 + 16x_2^2 + 25x_3^2 \geq 20x_1x_2 + 4x_2x_3 + 14x_3x_1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} 4x_1^2 = 9x_2^2 \\ x_2^2 = 4x_3^2 \\ 4x_1^2 = 36x_3^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2}x_2 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_3 = \dfrac{1}{3}x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{1}{3} \\ x_3 = \dfrac{1}{6} \end{cases}.$

Vậy $S = x_1 + x_2^2 + x_3^2 = \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{6}\right)^3 = \dfrac{133}{216}$.

Chọn phương án C

Câu 80. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2019	$\searrow$	-2019	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = |f(x-2018)+2019|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 5. **B** 4. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = f(x-2018)+2019$.

$g'(x) = (x-2018)'f'(x-2018) = f'(x-2018)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2018=-1 \\ x-2018=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2017 \\ x=2021. \end{array}\right.$

Ta có $g(2017) = f(2017-2018)+2019 = 4038$; $g(2021) = f(2021-2018)+2019 = 0$;

Bảng biến thiên hàm $g(x)$

x	$-\infty$		2017		2021		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4038	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó bảng biến thiên $|g(x)|$ là:

x	$-\infty$		x_0		2017		2021		$+\infty$
$\lvert g(x)\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4038	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $y = |f(x-2018)+2019|$ có ba điểm cực trị.

Chọn phương án D

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. D	4. C	5. D	6. C	7. C	8. B	9. D	10. C
11. C	12. C	13. A	14. B	15. D	16. A	17. A	18. B	19. C	20. B
21. A	22. A	23. D	24. A	25. B	26. A	27. D	28. C	29. D	30. C
31. B	32. A	33. A	34. D	35. D	36. A	37. B	38. B	39. C	40. B
41. A	42. B	43. B	44. B	45. B	46. B	47. C	48. D	49. D	50. A
51. A	52. A	53. B	54. C	55. D	56. A	57. D	58. A	59. B	60. B
61. D	62. D	63. A	64. D	65. A	66. D	67. B	68. D	69. B	70. C
71. A	72. D	73. A	74. C	75. A	76. A	77. B	78. D	79. C	80. D

DẠNG 15. TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ là

(A) $y=-2$. (B) $y=1$. (C) $x=-1$. (D) $x=2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+1}=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-2}{x+1}=1$.

Suy ra $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn phương án (B)

Câu 1. Tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ là

(A) $y=2; x=1$. (B) $y=1; x=1$. (C) $y=-2; x=1$. (D) $y=1; x=-2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}=1$ suy ra đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Do $\lim\limits_{x\to1^+}(x+2)=3>0$; $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0, x-1>0\,\forall x>1$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to1^+}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{x-1}=+\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn phương án (B)

Câu 2. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x+4}$. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số trên là:

(A) $x=-4$. (B) $y=2$. (C) $x=4$. (D) $y=\dfrac{-3}{4}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-3}{x+4}=2$, $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{x+4}=2$.

Vậy $y=2$ là đường tiệm cận ngang.

Chọn phương án (B)

Câu 3. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng

(A) $y=2$. (B) $x=2$. (C) $y=1$. (D) $x=1$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}y=2$; $\lim\limits_{x\to-\infty}y=2$.

Do đó tiệm cận ngang của đồ thị đã cho là $y=2$.

Chọn phương án (A)

Câu 4. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình?

(A) $y=5$. (B) $y=0$. (C) $x=1$. (D) $y=1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-3}{x-1} = 1 \Rightarrow$ đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Chọn phương án B

Câu 5. Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2-2x}{x+1}$.

(A) $y=-2$. (B) $x=-1$. (C) $x=-2$. (D) $y=2$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim_x \to \pm\infty \dfrac{2-2x}{x+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\dfrac{2}{x}-2}{1+\dfrac{1}{x}} = -2 \Rightarrow y=-2$ là đường tiệm cận ngang của hàm số.

Chọn phương án A

Câu 6. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x+4}{x^2+2x+1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

(A) 2. (B) 0. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4x+4}{x^2+2x+1} = 0$ nên đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x+4}{x^2+2x+1}$ có tiệm cận ngang $y=0$.

$\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{4x+4}{x^2+2x+1} = \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{4(x+1)}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{4}{x+1} = +\infty$ nên đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x+4}{x^2+2x+1}$ có tiệm cận đứng $x=-1$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x+4}{x^2+2x+1}$ có tất cả hai đường tiệm cận. Chọn đáp án A.

Chọn phương án A

Câu 7. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2017x-2018}{x+1}$ có đường tiệm cận đứng là

(A) $x=2017$. (B) $x=-1$. (C) $y=-1$. (D) $y=2017$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{2017x-2018}{x+1} = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{2017x-2018}{x+1} = +\infty$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x=-1$.

Chọn phương án B

Câu 8. Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2-2x}{x+1}$.

(A) $x=-1$. (B) $x=-2$. (C) $y=2$. (D) $y=-2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-2x}{x+1} = -2 \Rightarrow y=-2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn phương án D

Câu 9. Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3-2x}{x+1}$ là

(A) $x=-2$. (B) $x=-1$. (C) $y=-2$. (D) $y=3$.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\left(x\neq -\dfrac{d}{c}\right)$ nhận đường thẳng $y=\dfrac{a}{c}$ làm tiệm cận ngang và đường thẳng $x=-\dfrac{d}{c}$ làm tiệm cận đứng.

Cách giải:

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{3-2x}{x+1}$ nhận đường thẳng $y=-2$ làm tiệm cận ngang.

Chọn phương án C

Câu 10. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình nào dưới đây?

A $x=1$. **B** $y=5$. **C** $x=0$. **D** $y=0$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{x-1}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{x-1}=0\end{cases}\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$.

Chọn phương án D

Câu 11. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$ có các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang lần lượt là

A $x=1$ và $y=2$. **B** $x=2$ và $y=1$. **C** $x=1$ và $y=-3$. **D** $x=-1$ và $y=2$.

Lời giải.

Hàm số đã cho là hàm nhất biến nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=1$, đường tiệm cận ngang là $y=2$.

Chọn phương án A

Câu 12. Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-4x}{2x-1}$?

A $y=2$. **B** $y=\dfrac{1}{2}$. **C** $y=4$. **D** $y=-2$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}y=-2$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}y=-2$ nên đường thẳng $y=-2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn phương án D

Câu 13. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-5}{x-2}$ là

A $x=2$. **B** $y=2$. **C** $x=3$. **D** $y=3$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{3x-5}{x-2}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{3x-5}{x-2}=-\infty$ nên $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Chọn phương án A

Câu 14.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1 || $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -2$ và tiệm cận đứng $x = 0$.

Chọn phương án D

Câu 15. Phương trình các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1-3x}{x+2}$ lần lượt là

Ⓐ $x = -2$ và $y = -3$. Ⓑ $y = -2$ và $x = -3$. Ⓒ $x = -2$ và $y = 1$. Ⓓ $x = 2$ và $y = 1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to(-2)^+} \dfrac{1-3x}{x+2} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-2)^-} \dfrac{1-3x}{x+2} = -\infty$

Nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -2$

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1-3x}{x+2} = -3$

Nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = -3$.

Chọn phương án A

Câu 16. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực $\mathbb{R}$?

Ⓐ $y = \log_\pi\left(4x^2+1\right)$. Ⓑ $y = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$. Ⓒ $y = \log_{\frac{1}{3}} x$. Ⓓ $y = \left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^x$.

Lời giải.

Ta có: $0 < \dfrac{2}{\mathrm{e}} < 1 \Rightarrow$ hàm số $y = \left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^x$ nghịch biến trên tập số thực $\mathbb{R}$.

Chọn phương án D

Câu 17. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{7-2x}{x-2}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng?

Ⓐ $x = -3$. Ⓑ $x = 2$. Ⓒ $x = -2$. Ⓓ $x = 3$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} y = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{7-2x}{x-2} = +\infty$, nên tiệm cận đứng của đồ thị hàm số trên là $x = 2$.

Chọn phương án B

Câu 18. Hàm số nào có đồ thị nhận đường thẳng $x = 2$ làm đường tiệm cận?

Ⓐ $y = \dfrac{1}{x+1}$. Ⓑ $y = \dfrac{5x}{2-x}$. Ⓒ $y = x - 2 + \dfrac{1}{x+1}$. Ⓓ $y = \dfrac{1}{x+2}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{5x}{2-x}$ nhận $x = 2$ làm tiệm cận đứng nên chọn B.

Chọn phương án B

Câu 19. Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ là

(A) $x = 1$; $y = -2$. (B) $x = 1$; $y = 2$. (C) $x = 1$; $y = 0$. (D) $x = -1$; $y = 2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 2$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$. Mặt khác $\lim\limits_{x\to 1^+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.

Chọn phương án (B)

Câu 20. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là

(A) $x = 1$ và $y = 2$. (B) $x = 2$ và $y = 1$. (C) $x = 1$ và $y = -3$. (D) $x = -1$ và $y = 2$.

Lời giải.

— $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x-3}{x-1} = 2$ nên $y = 2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị.

— $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x-3}{x-1} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x-3}{x-1} = +\infty$ nên $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn phương án (A)

B MỨC ĐỘ 2

Câu 21. Biết rằng đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+1}{bx-2}$ có đường tiệm cận đứng là $x = 2$ và đường tiệm cận ngang là $y = 3$. Tính giá trị của $a + b$?

(A) 1. (B) 5. (C) 4. (D) 0.

Lời giải.

Với $b \neq 0$ và $b \neq -2a$, đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+1}{bx-2}$ nhận đường thẳng $x = \dfrac{2}{b}$ làm tiệm cận đứng.

Theo đề bài $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị nên $2 = \dfrac{2}{b} \Leftrightarrow b = 1$.

Với $b \neq 0$ đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+1}{bx-2}$ nhận đường thẳng $y = \dfrac{a}{b}$ làm tiệm cận ngang.

Theo đề bài $y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nên $\dfrac{a}{b} = 3 \Leftrightarrow a = 3b \Leftrightarrow a = 3$.

Vậy $a + b = 4$.

Chọn phương án (C)

Câu 22. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2-2x+3}{2x-4}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng

(A) $y = 1$. (B) $x = 1$. (C) $x = 2$. (D) $x = -1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-2x+3}{2x-4} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-2x+3}{2x-4} = -\infty$. Vậy đường tiệm cận đứng của hàm số là đường thẳng $x = 2$.

Chọn phương án (C)

Câu 23. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ là

(A) 2. (B) 3. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4} = 1 \Rightarrow y=1$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to 2^{\pm}} y = \lim\limits_{x\to 2^{\pm}} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2^{\pm}} \dfrac{x-1}{x+2} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow x=2$ không là đường tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to (-2)^{\pm}} y = \lim\limits_{x\to (-2)^{\pm}} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to (-2)^{\pm}} \dfrac{x-1}{x+2} = \mp\infty \Rightarrow x=-2$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 2 đường tiệm cận.

Chọn phương án A

Câu 24. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-1}$ là

A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.

Lời giải.

Phương pháp:

- Định nghĩa tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$.
  Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a \Rightarrow y=a$ là TCN của đồ thị hàm số.
- Định nghĩa tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.
  Nếu $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ thì $x=a$ là TCĐ của đồ thị hàm số.

Cách giải:

TXĐ: $\mathscr{D} = (-1;+\infty)\setminus\{1\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1+x}}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{x^4}+\frac{1}{x^3}}}{\frac{1}{x^2}-1} = 0$. Suy ra đồ thị hàm số có TCN là $y=0$.

$\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{\sqrt{1+x}}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1+x}} = +\infty$. Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{1+x}}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1+x}} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{1+x}}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1+x}} = +\infty$. Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 3 đường tiệm cận.

Chọn phương án A

Câu 25. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2} (C)$, đồ thị (C) có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R}\setminus\{1;2\}$.

Ta có $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=1$ và tiệm cận đứng là $x=2$.

Chọn phương án C

Câu 26.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ || 3	$\nearrow$	5

Ⓐ 4. . Ⓑ 1.
Ⓒ 3. Ⓓ 2.

Lời giải.

$\lim_{x\to-\infty} y = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang

$\lim_{x\to+\infty} y = 5 \Rightarrow y = 5$ là tiệm cận ngang

$\lim_{x\to1^+} y = +\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng là 3.

Chọn phương án Ⓒ

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng có phương trình

Ⓐ $x = 2$. Ⓑ $y = 2$. Ⓒ $x = 1$. Ⓓ $y = 1$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số không xác định tại $x = 1$ và $\lim\limits_{x\to1^+} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to1^-} y = -\infty$ nên tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng có phương trình $x = 1$.

Chọn phương án Ⓒ

Câu 28. Tìm tất cả các đường tiệm cận đứng của đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2-1}{3-2x-5x^2}$.

Ⓐ $x = 1$ và $x = \dfrac{3}{5}$. Ⓑ $x = -1$ và $x = \dfrac{3}{5}$. Ⓒ $x = -1$. Ⓓ $x = \dfrac{3}{5}$.

Lời giải.

Ta có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-1; \dfrac{3}{5}\right\}$ và

$$\lim_{x\to(-1)^+} y = -\frac{19}{75} \text{ và } \lim_{x\to\frac{3}{5}^+} y = +\infty.$$

Do đó đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là $x = \dfrac{3}{5}$.

Chọn phương án Ⓓ

Câu 29. Đồ thị hàm số nào dưới đây có tiệm cận ngang?

Ⓐ $y = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x+1}$. Ⓑ $y = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. Ⓒ $y = \dfrac{2x^2+1}{x}$. Ⓓ $y = \sqrt{x^2-1}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{x+1}$ với $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0$.

Do đó đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{x+1}$ có tiệm cận ngang $y=0$.

Chọn phương án A

Câu 30. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{ax^2+1}}$ có đồ thị (C). Tìm a để đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đó cách đường tiếp tuyến của (C) một khoảng bằng $\sqrt{2}-1$.

A $a>0$. **B** $a=2$. **C** $a=3$. **D** $a=1$.

Lời giải.

Điều kiện cần để đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $a>0$.

Khi đó đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $TCN\colon y=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm x_0 là $\Delta\colon y=\dfrac{1-ax_0}{\sqrt{ax_0^2+1}^3}(x-x_0)+\dfrac{x_0+1}{\sqrt{ax_0^2+1}}$.

Do $\mathrm{d}(TCN,\Delta)=\sqrt{2}-1\Rightarrow TCN\parallel\Delta\Rightarrow 1-ax_0=0\Leftrightarrow x_0=\dfrac{1}{a}$.

Khi đó $\mathrm{d}(TCN,\Delta)=\left|\sqrt{1+\dfrac{1}{a}}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right|=\sqrt{2}-1\Leftrightarrow a=1$.

Chọn phương án D

Câu 31. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x}+5}{x^2-x-6}$ là

A 3 . **B** 1 . **C** 2 . **D** 4 .

Lời giải.

Hàm số có tập xác định là $\mathscr{D}=[0;+\infty)\setminus\{3\}$.

Có $\lim\limits_{x\to3^+}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to3^-}=-\infty$.

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng $x=3$.

Chọn phương án B

Câu 32. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x+4}{x^2+2x+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A 1. **B** 2. **C** 3. **D** 0.

Lời giải.

TXĐ $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Ta có $y=\dfrac{4x+4}{x^2+2x+1}=\dfrac{4(x+1)}{(x+1)^2}=\dfrac{4}{x+1}$.

Do đó đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=-1$ và tiệm cận ngang $y=0$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận.

Chọn phương án B

Câu 33. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{|x|-2x+1}$ là

A 4. **B** 3. **C** 2. **D** 1.

Lời giải.

— Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{|x|-2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x-2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{-x+1} = -1$.
Suy ra đường thẳng $y=-1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{|x|-2x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{-x-2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{-3x+1} = -\dfrac{1}{3}$.
Suy ra đường thẳng $y=-\dfrac{1}{3}$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

— Ta có $|x|-2x+1=0 \Leftrightarrow |x|=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ x^2=(2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=1$.
Ta có $\lim\limits_{x\to1^+} y = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x+1}{|x|-2x+1} = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x+1}{-x+1} = -\infty$.
Suy ra đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.
Chọn phương án B

Câu 34. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-6}$ có bao nhiêu tiệm cận?

A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

Lời giải.
TXĐ: $\mathscr{D}=[3;+\infty)$.

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{3}{x^4}}}{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{6}{x^2}} = 0.$$

$\Rightarrow$ Đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận.
Chọn phương án B

Câu 35. Đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của hàm số nào sau đây?

A. $y=\dfrac{2x^2+1}{2-x}$. B. $y=\dfrac{x^2+2x+1}{1+x}$. C. $y=\dfrac{x+1}{1-2x}$. D. $y=\dfrac{2x-2}{x+2}$.

Lời giải.
Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-2}{x+2}=2$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-2}{x+2}=2$.
Vậy $y=2$ là tiệm cận ngang của hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+2}$.
Chọn phương án D

Câu 36. Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-4}$ là

A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{R} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-4}$ có $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-4} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-4} = -\infty$ nên đồ thị có hai tiệm cận đứng là $x = 2$ và $x = -2$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-4} = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 0$.

Do đó đồ thị có 3 tiệm cận.

Chọn phương án B

Câu 37. Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x^2-4}$ là

A 2. **B** 1. **C** 4. **D** 3.

Lời giải.

Ta có

— $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = 0$, suy ra đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y = 0$.

— $\lim\limits_{x \to 2^+} y = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-1}{x^2-4} = +\infty$, suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 2$.

— $\lim\limits_{x \to -2^+} y = \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x-1}{x^2-4} = +\infty$, suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -2$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Chọn phương án D

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-m}{mx-1}$ không có đường tiệm cận đứng?

A 3. **B** 2. **C** 1. **D** 0.

Lời giải.

— Trường hợp $m = 0$: hàm số đã cho trở thành $y = -x$, là hàm số không có tiệm cận đứng nên $m = 0$ thỏa yêu cầu bài toán.

— Trường hợp $m \neq 0$: hàm số đã cho có tập xác định là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{m}\right\}$.

Hàm số không có tiệm cận đứng khi chỉ khi $x = \dfrac{1}{m}$ là nghiệm của phương trình $x - m = 0$ hay $\dfrac{1}{m} - m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1 \end{array}\right.$.

Vậy có 3 giá trị tham số m để hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.

Chọn phương án A

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) và $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A (C) không có tiệm cận ngang.

B (C) có tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 2$ và $x = -2$.

C (C) có đúng một tiệm cận ngang.

D (C) có tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 2$ và $y = -2$.

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$ nên (C) có tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 2$ và $y = -2$.

Chọn phương án D

Câu 40. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{-3x^2 + 2x + 1}}{x}$ là

A 3. **B** 1. **C** 0. **D** 2.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = \left[-\dfrac{1}{3}; 1\right] \setminus \{0\}$, do đó đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Lại có $\lim\limits_{x \to 0^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 0^-} y = -\infty$ nên $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn phương án B

C MỨC ĐỘ 3

Câu 41. Biết rằng đồ thị hàm số $y = \dfrac{(n-3)x + n - 2017}{x + m + 3}$ (m, n là tham số) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung làm tiệm cận đứng. Tính tổng $m - 2n$.

A 0. **B** -3. **C** -9. **D** 6.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} = \dfrac{(n-3)x - n - 2017}{x + m + 3} = n - 3$, $\lim\limits_{x \to -\infty} = \dfrac{(n-3)x - n - 2017}{x + m + 3} = n - 3$.

Do đó để đồ thị hàm số nhận trục Ox làm tiệm cận ngang thì $n - 3 = 0 \Leftrightarrow n = 3$.

Khi đó hàm số đã cho trở thành $y = \dfrac{-2014}{x + m + 3}$, ta có $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-2014}{x + m + 3}$ không xác định khi

$$m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -3.$$

Suy ra $m - 2n = -9$.

Chọn phương án C

Câu 42. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x-1}(\sqrt{x+1} - 2)}{x^2 - 4x + 3}$.

A 3. **B** 1. **C** 4. **D** 2.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = (1; +\infty) \setminus \{3\}$

Dễ thấy: $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x-1}(\sqrt{x+1} - 2)}{x^2 - 4x + 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x+1} + 2\right)} = 0$ Nên hs có 1 tiệm cận ngang

Lại có

$$\lim_{x \to 1^+} y = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}(\sqrt{x+1} - 2)}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x+1} + 2\right)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 3^\pm} y = \lim_{x \to 3^\pm} \frac{\sqrt{x-1}(\sqrt{x+1} - 2)}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \to 3^\pm} \frac{1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x+1} + 2\right)} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

Nên đt hàm số có 1 tiệm cận đứng. Vậy đồ thị hs có 2 tiệm cận.
Chọn phương án D

Câu 43. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

(A) 3. (B) 0. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Tập xác định: $D=[-1;+\infty)\setminus\{0\}$.

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}-\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}}{1+\frac{2}{x}}=0$$

$\Rightarrow y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x\to0} y=\lim_{x\to0}\frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}=\lim_{x\to0}\frac{(5x+1)^2-x-1}{(x^2+2x)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{25x^2+9x}{(x^2+2x)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)}=$$
$$\lim_{x\to0}\frac{25x+9}{(x-2)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)}=\frac{-9}{4}$$

$\Rightarrow x=0$ không là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 1 đường tiệm cận.

Chọn phương án D

Câu 44. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2-x-2}$ là

(A) 4. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-x+1}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=1$.

Do đó hàm số có tiệm cận ngang là $y=1$.

$\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2-x+1}{x^2-x-2}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-x+1}{x^2-x-2}=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2-x+1}{x^2-x-2}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-x+1}{x^2-x-2}=+\infty$.

Do đó hàm số có hai tiệm cận ngang là $x=1$ và $x=2$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Chọn phương án C

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-mx+1}$ có đúng 3 đường tiệm cận.

(A) $-2<m<2$.

(B) $\begin{cases} m>2 \\ \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m\neq-\frac{5}{2}\end{array}\right.\end{cases}$.

(C) $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2\end{array}\right.$.

(D) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} m>2 \\ m\neq-\frac{5}{2}\end{cases} \\ m<-2\end{array}\right.$.

Lời giải.

Điều kiện: $x^2 - mx + 1 \neq 0$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x-2}{x^2 - mx + 1} = 0 \Rightarrow$ đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x^2 - mx + 1}$ có đúng 3 đường tiệm cận.

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x^2 - mx + 1}$ có hai đường tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 - mx + 1 = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt khác 2.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4 > 0 \\ 2^2 - 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m > 2 \\ m \neq \dfrac{5}{2} \end{cases} \\ m < -2. \end{array}\right.$

Chọn phương án D

Câu 46. Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y = x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}$ có tiệm cận ngang.

A $m = 1$. **B** $m = -1$. **C** $m \pm 1$. **D** Không có m.

Lời giải.

Cách 1: Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang.

$\Rightarrow$ Hàm số xác định trên một trong các miền $(-\infty, a), (-\infty; a], (a, +\infty)$ hoặc $[a; +\infty) \Rightarrow m \geq 0$

TH1: $m = 0 \Rightarrow y = x - \sqrt{-3x + 7}$ đồ thị hàm số không tiệm cận ngang.

TH2: $m > 0 \Rightarrow y = x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}$.

Khi $x \to +\infty, y = x - x\sqrt{m - \dfrac{3}{x} + \dfrac{7}{x}^2}$, đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi và chỉ khi $m = 1$.

Khi $x \to -\infty, y = x + x\sqrt{m - \dfrac{3}{x} + \dfrac{7}{x}^2} \to -\infty$, đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

KL: $m = 1$.

Cách 2: Với $m < 0$, ta có hàm số $y = x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}$ không tồn tại giới hạn tại dương vô cùng.

— Với $m \in (0; 1)$, ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}) = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} (x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}) = -\infty$.

— Với $m > 1$, ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}) = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} (x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}) = -\infty$.

— Với $m = 1$, ta có

$$\lim_{x\to+\infty} (x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x - 7}{x + \sqrt{x^2 - 3x + 7}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3 - \dfrac{7}{x}}{1 + \sqrt{1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{7}{x}^2}} = \frac{3}{2},$$

đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = \dfrac{3}{2}$.

Chọn phương án A

Câu 47. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2-x}{1+|x|}$ là

Ⓐ 2. Ⓑ 0. Ⓒ 3. Ⓓ 1.

Lời giải.

TXĐ $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-x}{1+|x|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-x}{1+x}=-1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-x}{1+|x|}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-x}{1-x}=1$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2-x}{1+|x|}$ có 2 đường TCN $y=1, y=-1$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 tiệm cận.

Chọn phương án A

Câu 48. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 0.

Lời giải.

Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ có tập xác định là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$.

Ta có

— $\lim\limits_{x\to-1^+}y=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}=+\infty$ (do $\lim\limits_{x\to-1^+}(\sqrt{x+9}-3)=-3+2\sqrt{2}<0$, $\lim\limits_{x\to-1^+}(x^2+x)=0$ và $x^2+x<0$ khi $x\to-1^+$).
Suy ra $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

— $\lim\limits_{x\to0^\pm}y=\lim\limits_{x\to0^\pm}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to0^\pm}\dfrac{1}{(x+1)(\sqrt{x+9}+3)}=\dfrac{1}{6}$.
Suy ra $x=0$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 1 đường tiệm cận đứng là $x=-1$.

Chọn phương án A

Câu 49. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in(-3;3)$ sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang?

Ⓐ 2. Ⓑ 0. Ⓒ 1. Ⓓ 3.

Lời giải.

— Trường hợp $m=0$: hàm số trở thành $y=x+1$, đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang nên $m=0$ không thỏa yêu cầu bài toán.

— Trường hợp $m<0$: tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\left(-\sqrt{-\dfrac{1}{m}};\sqrt{-\dfrac{1}{m}}\right)$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

— Trường hợp $m>0$: tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}y=-1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}y=1$. Suy ra đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.

Vì $m \in \mathbb{Z} \cap (-3;3)$ nên $m = 1; 2$.
Chọn phương án A

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x^3 - 3x^2 - m}$ có đúng một tiệm cận đứng.

A $\left[\begin{array}{l} m \geq 0 \\ m \leq -4 \end{array}\right.$. **B** $\left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m \leq -4 \end{array}\right.$. **C** $\left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -4 \end{array}\right.$. **D** $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Xét phương trình $x^3 - 3x^2 - m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = m$. (*)

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$, có $f'(x) = 3x^2 - 6x$. Do đó $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = 2$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	-4	0		-4		$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x^3 - 3x^2 - m}$ có đúng một tiệm cận đứng khi thỏa mãn một trong các trường hợp sau

TH1. Phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x \neq -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -4 \\ m > 0. \end{array}\right.$

TH2. Phương trình (*) có hai nghiệm, trong đó một nghiệm $x = -1$ và một nghiệm $x \neq -1$ $\Leftrightarrow m = -4$.

Kết luận với $\left[\begin{array}{l} m \leq -4 \\ m > 0 \end{array}\right.$ thì đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận đứng.

Chọn phương án B

Câu 51. Đồ thị hàm số nào sau đây không có tiệm cận ngang?

A $y = \dfrac{3}{x^2 - 1}$. **B** $y = \dfrac{\sqrt{x^4 + 3x^2 + 7}}{2x - 1}$. **C** $y = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$. **D** $y = \dfrac{3}{x - 2} + 1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cân ngang của hàm số $y = \dfrac{3}{x^2 - 1}$.

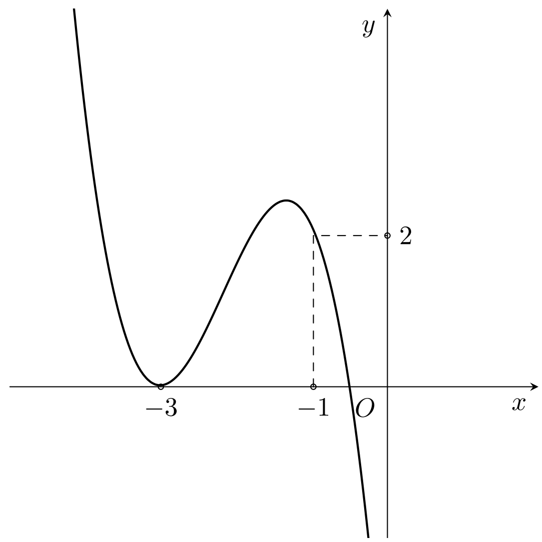
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^4 + 3x^2 + 7}}{2x - 1} = \pm\infty \Rightarrow$ hàm số $y = \dfrac{3}{x^2 - 1}$ không có tiệm cân ngang.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x - 3}{x + 1} = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cân ngang của hàm số $y = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{3}{x - 2} + 1\right) = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cân ngang của hàm số $y = \dfrac{3}{x - 2} + 1$.

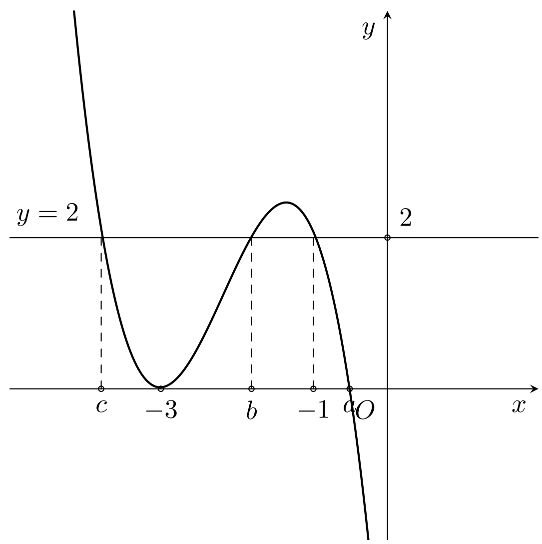
Chọn phương án B

Câu 52. Cho hàm bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(x^2+4x+3\right)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2\left(x\right)-2f\left(x\right)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ 6.

Lời giải.



Ta thấy phương trình bậc ba $f(x)=2$ có 3 nghiệm phân biệt là $x_1=c<-3, x_2=b$, với $-3<b<-1$ và $x_3=-1$.

Phương trình bậc ba $f(x)=0$ có nghiệm kép $x=-3$ và nghiệm đơn $x=a$ với $-1<a<0$.

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ nên không mất tính tổng quát, ta giả sử $f(x)=0 \Leftrightarrow -(x+3)^2(x-a)=0$ và $f(x)=2 \Leftrightarrow -(x-c)(x-b)(x+1)=0$.

Ta có: $y=\dfrac{\left(x^2+4x+3\right)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]}=\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{xf(x)[f(x)-2]}$.

Khi đó: $\lim\limits_{x\to0^+} y=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}f(x)[f(x)-2]}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-3^+} y=\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{(x+1)\sqrt{x(x+1)}}{-x(x+3)(x-a)[f(x)-2]}=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to c^+} y = \lim\limits_{x\to c^+} \dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{-xf(x)(x-c)(x-b)(x+1)} = +\infty.$

$\lim\limits_{x\to b^+} y = \lim\limits_{x\to b^+} \dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{-xf(x)(x-c)(x-b)(x+1)} = +\infty.$

$\lim\limits_{x\to -1^-} y = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{(x+3)\sqrt{x}(x+1)}{-xf(x)(x-c)(x-b)} = 0.$

$\lim\limits_{x\to -1^+} y$ không tồn tại.

Vậy đồ thị hàm số $y = \dfrac{\left(x^2+4x+3\right)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]}$ có 4 đường tiệm cận đứng là $x=0$, $x=-3$, $x=c$ và $x=b$.

Chọn phương án C

Câu 53. Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{mx^2-2x+3}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận?

A 0. B 1. C 2. D 3.

Lời giải.

$f(x) = mx^2-2x+3$ nên đồ thị hàm số luôn có 1 tiệm cận ngang.

Do đó đồ thị hàm số cần có đúng 1 tiệm cận đứng.

Với $m=0$ đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x=\dfrac{3}{2} \Rightarrow m=0$ thỏa mãn bài toán.

Với $m\neq 0$ đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $mx^2-2x+3=0$ có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có nghiệm $x=1$ hay:

$$\left[\begin{array}{l}\Delta_f=0\\ \begin{cases}\Delta_f>0\\ f(1)=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-3m=0\\ \begin{cases}1-3m>0\\ m+1=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=\dfrac{1}{3}\\ m=-1\end{array}\right.$$

Vậy $m\in\left\{0;\dfrac{1}{3};-1\right\}$.

Chọn phương án D

Câu 54. Tìm giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019;2019]$ của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A 2008. B 2010. C 2009. D 2007.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m} = 0$ suy ra đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang với mọi m.

Để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}$ có đúng hai đường tiệm cận thì phương trình $x^2+x-m=0$ có nghiệm kép $x\geq 3$ hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó $x_1\geq 3$ và $x_2<3$.

— $\Delta = 1+4m=0 \Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{4}$ (loại).

— $\Delta = 1+4m>0 \Leftrightarrow m>-\dfrac{1}{4}$.

Khi đó phương trình $x^2+x-m=0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó $x_1\geq 3$ và $x_2<3$ khi

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1 = 3\\ -1 < 3\end{cases}\\ (x_1-3)(x_2-3) < 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 12\\ m > 12\end{array}\right. \Leftrightarrow m \geq 12.$$

Vậy số giá trị m thỏa mãn là 2008.

Chọn phương án A

Câu 55. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+m}$ có ba đường tiệm cận.

A) $m < 1$. B) $m \neq 1$ và $m \neq -8$. C) $m \leq 1$ và $m \neq -8$. D) $m < 1$ và $m \neq -8$.

Lời giải.

a) Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} y = 1$ nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là $y = 1$.

b) Để đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có hai đường tiệm cận đứng, tức là phương trình $x^2 - 2x + m = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1 và -2. Từ đó, ta có

$$\begin{cases}\Delta' = 1 - m > 0\\ 1 - 2 + m \neq 0\\ 4 + 4 + m \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1\\ m \neq 1\\ m \neq -8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1\\ m \neq -8.\end{cases}$$

Chọn phương án D

Câu 56. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x - \sqrt{x^2+x+1}}{x^3+x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A) 2. B) 1. C) 4. D) 3.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)}{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x^2}} = 0.$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)}{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x^2}} = 0.$$

Đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta lại có $\lim\limits_{x\to0^-} y = \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2x-\sqrt{x^2+x+1}}{x^3+x} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to0^+} y = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x-\sqrt{x^2+x+1}}{x^3+x} = -\infty$.

Đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận.

Chọn phương án A

Câu 57. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{2f(x) - 5}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

(A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $2f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{5}{2}$. (1)

Dựa vào BBT ta suy ra phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $x_1; x_2; x_3; x_4$ trong đó

$$x_1 < -2 < x_2 < 1 < x_3 < 2 < x_4.$$

Mặt khác hàm số $y = \dfrac{1}{2f(x) - 5} = g(x)$ có tử thức là hằng số nên ta suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 4 tiệm cận đứng.

Chọn phương án (D)

Câu 58. Tập hợp các giá trị m để hàm số $y = \dfrac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$ có tiệm cận đứng là

(A) $\left\{\dfrac{7}{2}\right\}$. (B) $\mathbb{R}$. (C) $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{7}{2}\right\}$. (D) $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{7}{2}\right\}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$ có tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $mx^2 + 6x - 2 = 0$ không có nghiệm $x = -2 \Leftrightarrow m \cdot (-2)^2 + 6 \cdot (-2) - 2 \neq 0 \Leftrightarrow 4m - 14 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \dfrac{7}{2}$.

Chọn phương án (D)

Câu 59. Cho hàm số $y = \dfrac{x - 1}{mx^2 - 2x + 3}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số đã cho có đúng hai đường tiệm cận.

(A) 2. (B) 3. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho luôn có 1 tiệm cận ngang với mọi m.

Do đó bài toán trở thành tìm m để đồ thị hàm số đã cho có đúng 1 tiệm cận đứng.

— Với $m = 0$, $y = \dfrac{x - 1}{-2x + 3}$. Đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng $x = \dfrac{3}{2}$.

— Với $m \neq 0$. Đồ thị hàm số đã cho có đúng 1 tiệm cận đứng khi phương trình $mx^2 - 2x + 3 = 0$ có nghiệm kép hoặc nghiệm $x = 1$.

Điều đó tương đương với

$$\left[\begin{array}{l} 1 - 3m = 0 \\ m - 2 + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1}{3} \\ m = -1. \end{array}\right.$$

Vậy có 3 giá trị m thỏa mãn đề bài là $-1,\ 0,\ \dfrac{1}{3}$.

Chọn phương án (B)

Câu 60.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2018}{f(x)}$ là

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải.

Do hàm số $y = \dfrac{2018}{f(x)}$ suy ra số tiệm cận đứng của hàm số sẽ tương ứng với số nghiệm phân biệt của phương trình $f(x) = 0 \quad (*)$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ suy ra số nghiệm phân biệt của phương trình $(*)$ là 3. Nên số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2018}{f(x)}$ là 3.

Chọn phương án (C)

D MỨC ĐỘ 4

Câu 61. Các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{mx^2 - 3mx + 2}}$ có bốn đường tiệm cận phân biệt là

(A) $m > 0$. (B) $m > \dfrac{9}{8}$. (C) $m > \dfrac{8}{9}$. (D) $m > \dfrac{8}{9}$, $m \neq 1$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{mx^2 - 3mx + 2}}$ có 4 đường tiệm cận phân biệt $\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng và 2 đường tiệm cận ngang phân biệt.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{mx^2 - 3mx + 2}}$ có 2 đường tiệm cận ngang phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim\limits_{x\to-\infty} y, \exists \lim\limits_{x\to+\infty} y \\ \lim\limits_{x\to-\infty} y \neq \lim\limits_{x\to+\infty} y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} y \neq \lim\limits_{x\to+\infty} y \end{cases}.$$

Với $m > 0$ ta có

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{m-\frac{3m}{x}+\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{m-\frac{3m}{x}+\frac{2}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{m-\frac{3m}{x}+\frac{2}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{m-\frac{3m}{x}+\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{m-\frac{3m}{x}+\frac{2}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)}{-\sqrt{m-\frac{3m}{x}+\frac{2}{x^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{m}}.$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} y \neq \lim\limits_{x\to+\infty} y$ luôn đúng $\Rightarrow m > 0 \quad (1)$.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{mx^2-3mx+2}}$ có 2 đường tiệm cận đứng phân biệt

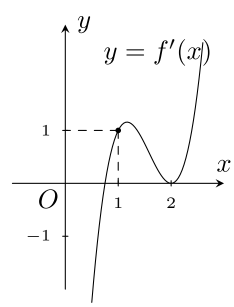
$\Leftrightarrow mx^2 - 3mx + 2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 9m^2 - 8m > 0 \\ m - 3m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > \frac{8}{9} \end{array}\right. \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > \frac{8}{9} \\ m \neq 1 \end{cases} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta được $\begin{cases} m > \frac{8}{9} \\ m \neq 1 \end{cases}$.

Chọn phương án D

Câu 62. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên . Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{2x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A 5. B 4. C 6. D 3.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$; $f(x) \neq 0$; $f(x) \neq 1$.

Nhóm: PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA

Xét phương trình $x\left[f^2(x)-f(x)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=a\,(a\in(0;5;1)) \\ x=2 \\ x=1 \\ x=b\,(b\in(1;2)) \\ x=c\,(c\in(2;3)) \end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận đứng $x=a; x=b; x=c; x=2$

Chọn phương án A

Câu 63. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{-x^2+2018x+2019}-24\sqrt{14}}{x^2-(m+1)x+m}$ có đúng hai đường tiệm cận?

(A) 2020. (B) 2019. (C) 2018. (D) 2021.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases} -x^2+2018x+2019\geq 0 \\ x^2-(m+1)x+m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\leq x\leq 2019 \\ x\neq 1; x\neq m \end{cases}$.

Suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang vì $-1\leq x\leq 2019$.

Ta có

$$\begin{aligned} y=\frac{\sqrt{-x^2+2018x+2019}-24\sqrt{14}}{x^2-(m+1)x+m} &= \frac{(-x^2+2018x+2019)-(24\sqrt{14})^2}{(x-1)(x-m)(\sqrt{-x^2+2018x+2019}+24\sqrt{14})} \\ &= \frac{-x^2+2018x-6045}{(x-1)(x-m)(\sqrt{-x^2+2018x+2019}+24\sqrt{14})} \\ &= \frac{-(x-3)(x-2015)}{(x-1)(x-m)(\sqrt{-x^2+2018x+2019}+24\sqrt{14})} \end{aligned}$$

Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận đứng khi chỉ khi $\begin{cases} -1\leq m\leq 2019 \\ m\neq 1; m\neq 3; m\neq 2015 \end{cases}$.

Mặt khác, m là số nguyên nên ta có $2021-3=2018$ giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án C

Câu 64. Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-6;6]$ của tham số m để đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận?

(A) 12. (B) 9. (C) 8. (D) 11.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m}=\lim\limits_{x\Rightarrow\infty}\dfrac{\dfrac{x}{x^3}-\dfrac{3}{x^3}}{1-3m\dfrac{x^2}{x^3}+(2m^2+1)\dfrac{x}{x^3}-\dfrac{m}{x^3}}=0$.

Suy ra $y=0$ là tiệm ngang của đồ thị hàm số.

Vậy để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có 3 đường tiệm cận đứng.

Hay phương trình $x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m=0$ (1) có ba nghiệm phân biệt $x\neq 3$. Ta có

$(1) \Leftrightarrow (x-m)(x^2-2mx+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x^2-2mx+1=0(*). \end{array}\right.$

Để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt khác 3 thì $m \neq 3$ và phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác m và khác 3. Do đó

$$\begin{cases} \Delta' = m^2-1>0 \\ 3^2-2m3+1 \neq 0 \\ m^2-2m^2+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>1 \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{5}{3} \\ m \neq -1 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>1 \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện $\begin{cases} m \neq 3 \\ -6 \leq m \leq 6 \end{cases} \Rightarrow m \in \{-6;-5;-4;-3;-2;2;4;5;6\}$.

Vậy có 9 giá trị của m thỏa mãn điều kiện.

Chọn phương án B

Câu 65. Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}$ có đúng ba đường tiệm cận?

(A) 12. (B) 11. (C) 0. (D) 10.

Lời giải.

Phương pháp:

Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số, từ đó suy ra điều kiện để bài toán thỏa.

Cách giải:

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt{1-\dfrac{m}{x}}-1}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1-\dfrac{m}{x}}-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{2}{x}} = 1$ hay $y=1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x\sqrt{1-\dfrac{m}{x}}-1}{x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-\sqrt{1-\dfrac{m}{x}}-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{2}{x}} = -1$ hay $y=-1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Do đó bài toán thỏa $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số chỉ có duy nhất một tiệm cận đứng.

Ta lại có $y=\dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2} = \dfrac{x^2-mx-1}{(x+2)\left(\sqrt{x(x-m)}+1\right)}$

Để đồ thị hàm số chỉ có duy nhất một đường TCĐ thì $x=-2$ không là nghiệm của tử và $x=-2$ thuộc tập xác định của hàm số.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2(-2-m) \geq 0 \\ (-2)^2-m\cdot(-2)-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ 2m+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ m \neq -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Do $m \in (-10;10), m \in \mathbb{Z}$.

Nên $m \in \{-2;-1;0;1;\ldots;8;9\}$ và có 12 giá trị thỏa mãn.

Chọn phương án A

Câu 66. Biết đồ thị hàm số $y = \dfrac{(2m-n)\,x^2 + mx + 1}{x^2 + mx + n - 6}$ (m, n là tham số) nhận trục hoành và trục tung làm hai đường tiệm cận. Tính $m + n$.

(A) -6. (B) 9. (C) 6. (D) 8.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2m-n)\,x^2 + mx + 1}{x^2 + mx + n - 6} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2m-n) + \dfrac{m}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{1 + \dfrac{m}{x} + \dfrac{n-6}{x^2}} = 2m - n.$

Tương tự, ta cũng có $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(2m-n)\,x^2 + mx + 1}{x^2 + mx + n - 6} = 2m - n.$

Vậy $y = 2m - n$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Theo giả thiết, ta có $2m - n = 0$ (1).

Để hàm số nhận trục tung làm tiệm cận đứng thì điều kiện cần là phương trình $x^2 + mx + n - 6 = 0$ có một nghiệm $x = 0$ hay $n - 6 = 0 \Leftrightarrow n = 6$ (2).

Do $x = 0$ không là nghiệm của phương trình $(2m-n)\,x^2 + mx + 1 = 0$ nên với $n = 6$ thì đồ thị hàm số nhận trục tung làm tiệm cận đứng.

Từ (1) và (2) suy ra $m = 3$. Vậy $m + n = 9$.

Chọn phương án B

Câu 67. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-2}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Tiếp tuyến Δ của (C) tại M cắt các đường tiệm cận tại A và B sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất. Khi đó tiếp tuyến Δ của (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích lớn nhất thuộc khoảng nào?

(A) $(29; 30)$. (B) $(27; 28)$. (C) $(26; 27)$. (D) $(28; 29)$.

Lời giải.

Ta có $IA \cdot IB = 6$.

Tam giác IAB vuông tại $I \Rightarrow$ bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có

$$R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{IA^2 + IB^2} \geq \frac{1}{2}\sqrt{2IA \cdot IB} = \sqrt{3}.$$

Đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi $R_{\min} \Leftrightarrow IA = IB$ tức là hệ số góc của tiếp tuyến bằng ± 1.

Hệ số góc $k = \dfrac{-3}{(x-2)^2} = -1 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 2 + \sqrt{3}$ là

$$y = -(x - 2 - \sqrt{3}) + \frac{3 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -x + 2\sqrt{3} + 4\,(\Delta_1).$$

Diện tích tam giác tạo bởi 2 trục tọa độ tiếp tuyến (Δ_1) là $\dfrac{\left|2\sqrt{3} + 4\right|^2}{2} \approx 27,86$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 2 - \sqrt{3}$ là

$$y = -(x - 2 + \sqrt{3}) + \frac{3 - 2\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = -x - 2\sqrt{3} + 4\,(\Delta_2).$$

Diện tích tam giác tạo bởi 2 trục tọa độ tiếp tuyến (Δ_2) là $\dfrac{\left|-2\sqrt{3}+4\right|^2}{2} \approx 0,26$.
Khi đó tiếp tuyến Δ của (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích lớn nhất thuộc khoảng $(27;28)$.
Chọn phương án B

Câu 68. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 - 3x^2 + m - 1}}$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

A $1 < m < 5$. **B** $-1 < m < 2$. **C** $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right.$. **D** $\left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 5 \end{array}\right.$.

Lời giải.
Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^3 - 3x^2 + m - 1}} = 0$ nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y = 0$.
Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - 3x^2 + m - 1 = -\infty$ nên không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^3 - 3x^2 + m - 1}}$.
Do vậy đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận ngang $y = 0$.
Để đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận thì phương trình $x^3 - 3x^2 + m - 1 = 0$ (1) có ba nghiệm phân biệt.
Ta có (1) $\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 1 - m$. (2)
Số nghiệm của (2) là giao điểm của đường thẳng y = 1 −m và đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$.
Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Ta có $y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy (2) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -4 < 1 - m < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 5$.
Chọn phương án A

Câu 69. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + a}{x^3 + ax^2}$ có 3 đường tiệm cận.

A $a > 0$. **B** $a \neq 0, a \neq -1$. **C** $a \neq 0, a \neq \pm 1$. **D** $a < 0, a \neq -1$.

Lời giải.
$y = \dfrac{x^2 + a}{x^2(x + a)}$.
Để đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận thì $x^3 + ax^2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác nghiệm của $x^2 + a = 0$. Do đó 0 và $-a$ không là nghiệm của $x^2 + a$ và $0 \neq -a$.

Suy ra $\begin{cases} a \neq 0 \\ a^2 + a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -1 \end{cases}$.

Chọn phương án B

Câu 70. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{\sqrt{2x^2 - 2x + m} - (x+1)}$ có đúng hai tiệm cận đứng.

A $m \in [-4; 5) \backslash \{1\}$. B $m \in [-4; 5]$. C $m \in (-4; 5] \backslash \{1\}$. D $m \in (-5; 4] \backslash \{1\}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{2x^2 - 2x + m} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x^2 - 2x + m = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ m = -x^2 + 4x + 1 \end{cases}$.

Ta thấy rằng phương trình $\sqrt{2x^2 - 2x + m} - (x+1) = 0$ có nhiều nhất 2 nghiệm. Do đó đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng khi $\sqrt{2x^2 - 2x + m} - (x+1) = 0$ có hai nghiệm khác 0 và lớn hơn hoặc bằng -1.

Đặt $f(x) = -x^2 + 4x + 1,\ x \geq -1$. Ta có $f'(x) = -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Bảng biến thiên của $f(x)$ như sau

x	-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	4	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Suy ra $\sqrt{2x^2 - 2x + m} - (x+1) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi $-4 \leq m < 5$.

Phương trình $\sqrt{2x^2 - 2x + m} - (x+1) = 0$ có nghiệm khác 0 khi $m \neq 1$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng khi $m \in [-4; 5) \backslash \{1\}$.

Chọn phương án A

Câu 71. Tìm giá trị lớn nhất của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{mx + m^2 + 2}{x + 2}$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 2.

A $m = 0$. B $m = 1$. C $m = \dfrac{-1 + \sqrt{17}}{2}$. D $m = \dfrac{-1 - \sqrt{17}}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $y' = \dfrac{2m - m^2 - 2}{(x+2)^2} = \dfrac{-(m-1)^2 - 1}{(x+2)^2} < 0 \Rightarrow$

$\min y = y(1) = \dfrac{m^2 + m + 2}{3} = 2 \Leftrightarrow m^2 + m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Chọn phương án C

Câu 72. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x + y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{2y + 2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4 - x - y}$. Tính giá trị $M + m$.

A 41. B 42. C 43. D 44.

Lời giải.

$P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4 - x - y} = (x+y)^2 + 2(x+y) + 2 + 8\sqrt{4 - x - y}$ Đặt $t = x + y \Rightarrow$
$P = t^2 + 2t + 2 + 8\sqrt{4 - t}$

Theo giả thiết: $x+y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}$
$\Leftrightarrow (x+y)^2=x+2y+1+2\sqrt{2(x-1)(y+1)}\le x+2y+1+2(x-1)+y+1=3(x+y)$
$\Rightarrow t\le 3t\Leftrightarrow t^2-3t\le 0\Leftrightarrow 0\le t\le 3$
Xét $f(t)=t^2+2t+2+8\sqrt{4-t}$ trên $[0;3]$
$f'(t)=2t+2-\frac{4}{\sqrt{4-t}}\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow (2t+2)\sqrt{4-t}=4\Leftrightarrow (t+1)\sqrt{4-t}=2$
$\Leftrightarrow \left(t^2+2t+1\right)(4-t)=4\Leftrightarrow -t^3+2t^2+7t=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1+2\sqrt{2}\notin[0;3] \\ t=1-2\sqrt{2}\notin[0;3]\end{array}\right.$
Ta có $f(0)=18; f(3)=25\Rightarrow \min P=18, \max P=25\Rightarrow M+m=25+18=43$
Chọn phương án C

Câu 73. Cho hàm số $y=\dfrac{(4a-b)x^2+ax+1}{x^2+ax+b-12}(C)$ biết (C) nhận trục hoành và trục tung làm hai đường tiệm cận. Tính giá trị $P=a+b$.

(A) -1. (B) 10. (C) 15. (D) 2.

Lời giải.
TCN: $y=4a-b=0\Rightarrow b=4a$.
(C) nhận $x=0$ làm tiệm cận đứng $\Rightarrow 0^2+a.0+b-12=0\Rightarrow b=12\Rightarrow a=3\Rightarrow a+b=15$.
Chọn phương án C

Câu 74. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{m^2x^2+m-1}}$ có bốn đường tiệm cận.

(A) $m>0$.
(B) Với mọi giá trị của m.
(C) $m<1, m\neq 0$ và $m\neq\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.
(D) $m<-1$ hoặc $m>1$.

Lời giải.
Với $m=0$ hàm số không xác định. Do đó $m\neq 0$
Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{m^2x^2+m-1}}=\dfrac{1}{|m|}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{m^2x^2+m-1}}=\dfrac{-1}{|m|}$
$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang.
Để đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận thì cần tìm m để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng, nghĩa là cần tìm m để phương trình $g(x)=m^2x^2+m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1.

Điều kiện $\begin{cases}\Delta=-4m^2(m-1)>0\\ g(-1)=m^2+m-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\ m\neq 0\\ m\neq\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{cases}$ (2)

Kết hợp (1) và (2) ta có $\begin{cases}m<1\\ m\neq 0\\ m\neq\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{cases}$.

Chọn phương án C

Câu 75. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2-3x}}{x-1}$ là

Ⓐ 2. Ⓑ 4. Ⓒ 3. Ⓓ 1.

Lời giải.

Tập xác định $(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = -1$. $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 1$.

Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang, và không có tiệm cận đứng.

Chọn phương án (A)

Câu 76. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \dfrac{3x-6}{\sqrt{x^2+2mx+2m+8}}$ có đúng hai đường tiệm cận.

Ⓐ $-2 < m < 5$. Ⓑ $-2 < m < 4$. Ⓒ $-1 < m < 4$. Ⓓ $-1 < m < 5$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(3-\dfrac{6}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\dfrac{2m}{x}+\dfrac{2m+8}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3-\dfrac{6}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{2m}{x}+\dfrac{2m+8}{x^2}}} = 3$, tương tự ta cũng tính được $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -3$ nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là: $y = 3$ và $y = -3$.

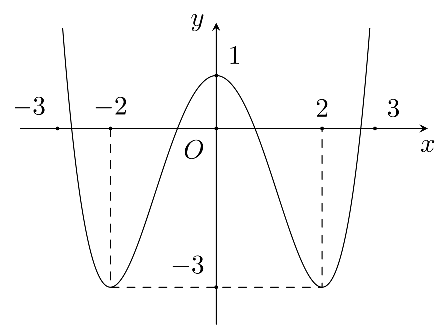
Do đó để thoả yêu cầu bài toán thì đồ thị hàm số phải không có đường tiệm cận đứng, tức là $x^2+2mx+2m+8 = 0$ vô nghiệm, điều này dẫn đến $-2 < m < 4$.

Chọn phương án (B)

Câu 77.

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{(x^2-4)(x^2+2x)}{[f(x)]^2+2f(x)-3}$ là

Ⓐ 4. Ⓑ 5. Ⓒ 3. Ⓓ 2.



Lời giải.

Ta có $y = \dfrac{(x^2-4)(x^2+2x)}{[f(x)]^2+2f(x)-3}$ có các nghiệm ở tử là $x = 0$ (bội 1), $x = 2$ (bội 1), $x = -2$ (bội 2).

Mặt khác, từ đồ thị $f(x)$ ta thấy hàm số $y = \dfrac{(x^2-4)(x^2+2x)}{[f(x)]^2+2f(x)-3}$ có các nghiệm ở mẫu là $f^2(x) + 2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 1 \\ f(x) = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, x = x_1, x = x_2 \\ x = -2, x = 2. \end{array}\right.$

Trong đó nghiệm $x = 0$, $x = -2$, $x = 2$ đều có bội 2 và x_1, x_2 khác các nghiệm của tử.

So sánh bội nghiệm ở mẫu và bội nghiệm ở tử thì thấy đồ thị có các tiệm cận đứng là $x = 0$, $x = 2$; $x = x_1$; $x = x_2$.

Chọn phương án (A)

Câu 78. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x^3+3x^2+m+1}$ có đúng một tiệm cận đứng?

A $\left[\begin{array}{l} m < -5 \\ m > -1 \end{array}\right.$. **B** $-5 \le m < -1$. **C** $\left[\begin{array}{l} m \le -5 \\ m > -1 \end{array}\right.$. **D** $\left[\begin{array}{l} m \le -4 \\ m > 0 \end{array}\right.$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng suy ra mẫu thức có đúng một nghiệm khác 1 hoặc mẫu thức có hai nghiệm trong đó có một nghiệm bằng 1 và nghiệm kia khác 1.

◦ Trường hợp 1: $x = 1$ là nghiệm của mẫu, suy ra $m = -5$. Khi đó:

$y = \dfrac{x-1}{x^3+3x^2+m+1} = \dfrac{1}{(x+2)^2}$. Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x = -2$.

◦ Trường hợp 2: $x = -1$ không là nghiệm của mẫu, suy ra $m \neq -5$.

Xét hàm số $g(x) = x^3 + 3x^2 + m + 1; g'(x) = 3x^2 + 6x; g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$m+5$	$\searrow$	$m+1$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra mẫu số có đúng một nghiệm khi $\left[\begin{array}{l} m+5 < 0 \\ m+1 > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -5 \\ m > -1 \end{array}\right.$.

Từ hai trường hợp ta có đáp số $\left[\begin{array}{l} m \le -5 \\ m > -1 \end{array}\right.$.

Chọn phương án C

Câu 79. Các giá trị của tham số a để đồ thị hàm số $y = ax + \sqrt{4x^2+1}$ có tiệm cận ngang là

A $a = \pm 2$. **B** $a = -2$ và $a = \dfrac{1}{2}$. **C** $a = \pm\dfrac{1}{2}$. **D** $a = \pm 1$.

Lời giải.

Ta có $y = ax + \sqrt{4x^2+1} = \dfrac{(a^2-4)x^2-1}{ax - \sqrt{4x^2+1}}$.

Đồ thị có tiệm cận ngang khi tồn tại $\lim\limits_{x\to-\infty} y$ hữu hạn hoặc $\lim\limits_{x\to+\infty} y$ hữu hạn.

Do đó $a = \pm 2$.

Chọn phương án A

Câu 80. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ có đồ thị (C). Tìm tọa độ điểm M có hoành độ dương thuộc (C) sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận là nhỏ nhất.

A $M(2;2)$. **B** $M(4;3)$. **C** $M(0;-1)$. **D** $M(1;-3)$.

Lời giải.

Gọi $M\left(m, \dfrac{m+2}{m-2}\right) \in (C)$, với $m \neq 2$.
Tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận là: $d = |x_M - 2| + |y_M - 1|$.
Ta có $d = |m-2| + \left|\dfrac{m+2}{m-2} - 1\right| = |m-2| + \dfrac{4}{|m-2|} \geq 4$.
Đẳng thức xảy ra khi $m = 4$ hoặc $m = 0$. Vậy $M(4;3)$.
Chọn phương án B

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. B	3. A	4. B	5. A	6. A	7. B	8. D	9. C	10. D
11. A	12. D	13. A	14. D	15. A	16. D	17. B	18. B	19. B	20. A
21. C	22. C	23. A	24. A	25. C	26. C	27. C	28. D	29. A	30. D
31. B	32. B	33. B	34. B	35. D	36. B	37. D	38. A	39. D	40. B
41. C	42. D	43. D	44. C	45. D	46. A	47. A	48. A	49. A	50. B
51. B	52. C	53. D	54. A	55. D	56. A	57. D	58. D	59. B	60. C
61. D	62. A	63. C	64. B	65. A	66. B	67. B	68. A	69. B	70. A
71. C	72. C	73. C	74. C	75. A	76. B	77. A	78. C	79. A	80. B

DẠNG 16. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ-LOGARIT

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Tập nghiệm của bất phương trình $\log x \geq 1$ là

A $(10; +\infty)$. **B** $(0; +\infty)$. **C** $[10; +\infty)$. **D** $(-\infty; 10)$.

Lời giải.

$\log x \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 10 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 10.$

Chọn phương án C

Câu 1. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 (3x + 1) < 2$ là

A $\left[-\frac{1}{3}; 1\right)$. **B** $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. **C** $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$. **D** $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

ĐK: $x > -\frac{1}{3}$

$$\log_2 (3x + 1) < 2 \Leftrightarrow 3x + 1 < 4 \Leftrightarrow x < 1.$$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình là $-\frac{1}{3} < x < 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$.

Chọn phương án C

Câu 2. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 (3 - x) < 2$ là

A $(-\infty; 1)$. **B** $(-1; 3)$. **C** $(1; 3)$. **D** $(3; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $3 - x > 0 \Leftrightarrow x < 3$.

$$\log_2 (3 - x) < 2 \Leftrightarrow 3 - x < 4 \Leftrightarrow x > -1.$$

Kết hợp điều kiện ta được tập nghiệm $S = (-1; 3)$.

Chọn phương án B

Câu 3. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} > \left(\frac{3}{4}\right)^{-x+3}$.

A $(2; +\infty)$. **B** $(-\infty; 2)$. **C** $[2; +\infty)$. **D** $(-\infty; 2]$.

Lời giải.

$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} > \left(\frac{3}{4}\right)^{-x+3} \Leftrightarrow x - 1 < -x + 3 \Leftrightarrow x < 2.$

Chọn phương án B

Câu 4. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_3(2x - 3) > 1$.

A $S = (1; +\infty)$. **B** $S = \left(\frac{1}{6}; +\infty\right)$. **C** $S = (2; +\infty)$. **D** $S = (3; +\infty)$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với $2x-3>3$ hay $x>3$.

Chọn phương án D

Câu 5. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A $\log x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.
B $\log_5 x \leq 0 \Leftrightarrow 0<x\leq 1$.
C $\log_{\frac{1}{5}} a > \log_{\frac{1}{5}} b \Leftrightarrow a>b>0$.
D $\log_{\frac{1}{5}} a = \log_{\frac{1}{5}} b \Leftrightarrow a=b>0$.

Lời giải.

$\log_{\frac{1}{5}} a > \log_{\frac{1}{5}} b \Leftrightarrow b>a>0$ (do $\frac{1}{5}<1$).

Chọn phương án C

Câu 6. Nghiệm của bất phương trình $3^{x-2} \leq 243$ là

A $x<7$.
B $x\leq 7$.
C $x\geq 7$.
D $2\leq x\leq 7$.

Lời giải.

Ta có $3^{x-2}\leq 243 \Leftrightarrow 3^{x-2}\leq 3^5 \Leftrightarrow x-2\leq 5 \Leftrightarrow x\leq 7$

Chọn phương án B

Câu 7. Nghiệm của bất phương trình $3^{2x+1}>3^{3-x}$ là

A $x>-\frac{2}{3}$.
B $x<\frac{2}{3}$.
C $x>\frac{2}{3}$.
D $x>\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $3^{2x+1}>3^{3-x} \Leftrightarrow 2x+1<3-x \Leftrightarrow x>\frac{2}{3}$.

Chọn phương án C

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x\cdot 5^{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A $f(x)>1 \Leftrightarrow x^2+x\log_2 5>0$.
B $f(x)>1 \Leftrightarrow x-x^2\log_2 5<0$.
C $f(x)>1 \Leftrightarrow x^2-x\log_5 2>0$.
D $f(x)>1 \Leftrightarrow -x\ln 2+x^2\ln 5>0$.

Lời giải.

Dễ thấy $x=-1$ là nghiệm của bất phương trình $f(x)>1$ nhưng không là nghiệm của bất phương trình $x^2+x\log_2 5>0$.

Chọn phương án A

Câu 9. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^x<8$ là.

A $S=(-\infty;-3)$.
B $S=\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$.
C $S=(-3;+\infty)$.
D $S=\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Lời giải.

$\left(\frac{1}{2}\right)^x<8 \Leftrightarrow x>\log_{\frac{1}{2}} 8 \Leftrightarrow x>-3$.

Chọn phương án C

Câu 10. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{2x-1}>27$ là

A $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.
B $(3;+\infty)$.
C $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.
D $(2;+\infty)$.

Lời giải.

$3^{2x-1}>27 \Leftrightarrow 2x-1>3 \Leftrightarrow x>2$.

Chọn phương án D

Câu 11. Bất phương trình $\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x)$ có tập nghiệm là

A $(-3;1)$. **B** $\left(1;\dfrac{6}{5}\right)$. **C** $\left(\dfrac{1}{2};3\right)$. **D** $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x) \Leftrightarrow \begin{cases} 6-5x>0 \\ 3x-2>6-5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\dfrac{6}{5} \\ 8x>8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\dfrac{6}{5} \\ x>1. \end{cases}$

Chọn phương án B

Câu 12. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x > \log_2(8-x)$ là

A $(8;+\infty)$. **B** $(-\infty;4)$. **C** $(4;8)$. **D** $(0;4)$.

Lời giải.

Điều kiện $0<x<8$.

Do $2>1$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$x>8-x \Leftrightarrow 2x>8 \Leftrightarrow x>4$.

Kết hợp với điều kiện $0<x<8$ ta được tập nghiệm của bất phương trình là $(4;8)$

Chọn phương án C

Câu 13. Nghiệm của bất phương trình $3^{2x+1} > 3^{3-x}$ là

A $x>-\dfrac{2}{3}$. **B** $x>\dfrac{3}{2}$. **C** $x>\dfrac{2}{3}$. **D** $x<\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $3^{2x+1} > 3^{3-x} \Leftrightarrow 2x+1>3-x \Leftrightarrow x>\dfrac{2}{3}$.

Chọn phương án C

Câu 14. Tìm tập nghiệm $\mathcal{S}$ của bất phương trình $3^{2x} > 3^{x+4}$.

A $\mathcal{S}=(0;4)$. **B** $\mathcal{S}=(-\infty;4)$. **C** $\mathcal{S}=(4;+\infty)$. **D** $\mathcal{S}=(-4;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $3^{2x} > 3^{x+4} \Leftrightarrow 2x>x+4 \Leftrightarrow x>4$.

Chọn phương án C

Câu 15. Xét phương trình: $a^x > b\,(1)$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A Nếu $0<a<1, b>0$ thì tập nghiệm của bất phương trình (1) là $S=(-\infty;\log_b a)$.

B Nếu $a>1, b\leqslant 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình (1) là $S=\mathbb{R}$.

C Nếu $0<a<1, b\leqslant 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình (1) là $S=\mathbb{R}$.

D Nếu $a>1, b>0$ thì tập nghiệm của bất phương trình (1) là $S=(\log_a b;+\infty)$.

Lời giải.

Nếu $0<a<1, b>0$ thì tập nghiệm của bất phương trình (1) là $S=(-\infty;\log_a b)$.

Chọn phương án A

Câu 16. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x<0$ là

A $(0;1)$. **B** $(-\infty;1)$. **C** $(1;+\infty)$. **D** $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.
Phương trình đã cho tương đương với $x < 1$.
Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $0 < x < 1$.
Chọn phương án (A)

Câu 17. Tập nghiệm bất phương trình $(0,5)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$ là

(A) $(1; +\infty)$. **(B)** $(-\infty; 1)$. **(C)** $(-\infty; -1)$. **(D)** $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $(0,5)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} \Leftrightarrow 3x < 3 \Leftrightarrow x < 1$.
Vậy tập nghiệm là $(-\infty; 1)$.
Chọn phương án (B)

Câu 18. Giải bất phương trình $\left(\sqrt{10}-3\right)^x > \sqrt{10}+3$ ta được kết quả nào sau đây?

(A) $x < 1$. **(B)** $x > 1$. **(C)** $x < -1$. **(D)** $x > -1$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{10}+3 = \left(\sqrt{10}-3\right)^{-1}$, vậy bất phương trình trên trở thành

$$\left(\sqrt{10}-3\right)^x > \left(\sqrt{10}-3\right)^{-1}$$
$$\Leftrightarrow x < -1.$$

Chọn phương án (C)

Câu 19. Bất phương trình $\log_{\frac{1}{5}} f(x) > \log_{\frac{1}{5}} g(x)$ tương đương với điều nào sau đây?

(A) $f(x) < g(x)$. **(B)** $g(x) > f(x) \geq 0$. **(C)** $g(x) > f(x) > 0$. **(D)** $f(x) > g(x)$.

Lời giải.

Do cơ số là $\frac{1}{5} < 1$ nên ta phải đổi chiều bất phương trình, đồng thời chú ý đến điều kiện xác định.
Chọn phương án (C)

Câu 20. Tập nghiệm của phương trình $2^{x+2} < \left(\frac{1}{4}\right)^{-x}$ là

(A) $S = (-\infty; 2)$. **(B)** $S = (1; +\infty)$. **(C)** $S = (2; +\infty)$. **(D)** $S = (-\infty; 1)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & 2^{x+2} < \left(\frac{1}{4}\right)^{-x} \\ \Leftrightarrow\ & 2^{x+2} < 2^{2x} \\ \Leftrightarrow\ & 2x > x+2 \Leftrightarrow x > 2. \end{aligned}$$

Chọn phương án (C)

B MỨC ĐỘ 2

Câu 21. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-2x} < 27$ là

A $(-\infty;-1)$.
B $(3;+\infty)$.
C $(-1;3)$.
D $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

Lời giải.

$$3^{x^2-2x}<27\Leftrightarrow 3^{x^2-2x}<3^3\Leftrightarrow x^2-2x<3\Leftrightarrow x^2-2x-3<0\Leftrightarrow -1<x<3.$$

Chọn phương án C

Câu 22. Tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{2}{5}\right)^{1-3x}\geq\frac{25}{4}$.

A $S=[1;+\infty)$.
B $S=\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$.
C $S=\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$.
D $S=(-\infty;1]$.

Lời giải.

Ta có $\left(\frac{2}{5}\right)^{1-3x}\geq\frac{25}{4}\Leftrightarrow 1-3x\leq\log_{\frac{2}{5}}\frac{25}{4}\Leftrightarrow 1-3x\leq-2\Leftrightarrow -3x\leq-3\Leftrightarrow x\geq 1$.

Chọn phương án A

Câu 23. Nghiệm của bất phương trình $\log_{2-\sqrt{3}}(2x-5)\geq\log_{2-\sqrt{3}}(x-1)$ là

A $\frac{5}{2}<x\leq 4$.
B $1<x\leq 4$.
C $\frac{5}{2}\leq x\leq 4$.
D $x\geq 4$.

Lời giải.

$$\log_{2-\sqrt{3}}(2x-5)\geq\log_{2-\sqrt{3}}(x-1)\Leftrightarrow\begin{cases}2x-5\leq x-1\\2x-5>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 4\\x>\frac{5}{2}.\end{cases}$$

Vậy nghiệm của bất phương trinh là $\frac{5}{2}<x\leq 4$.

Chọn phương án A

Câu 24. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>-3$ là

A 6.
B 7.
C 8.
D 9.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>-3\Leftrightarrow\begin{cases}x-1>0\\x-1<\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x<9\end{cases}$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S=(1;9)$, suy ra có 7 nghiệm nguyên.

Chọn phương án B

Câu 25. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\geq 0$ là

A $(-\infty;4)$.
B $(1;4]$.
C $(1;4)$.
D $\left[4;\frac{11}{2}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện: $1<x<\frac{11}{2}$.

Bất phương trình tương đương $-\log_3(x-1)+\log_3(11-2x)\geq 0$

$\Leftrightarrow\log_3\frac{11-2x}{x-1}\geq 0\Leftrightarrow\frac{11-2x}{x-1}\geq 1\Leftrightarrow\frac{12-3x}{x-1}\geq 0\Leftrightarrow 1<x\leq 4$.

Chọn phương án B

Câu 26. Tập nghiệm của bất phương trình $4^{x+1}\leq 8^{x-2}$ là

A $[8;+\infty)$.
B $\varnothing$.
C $(0;8)$.
D $(-\infty;8]$.

Lời giải.

Ta có: $4^{x+1} \leq 8^{x-2} \Leftrightarrow 2^{2x+2} \leq 2^{3x-6} \Leftrightarrow 2x+2 \leq 3x-6 \Leftrightarrow 8 \leq x$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[8;+\infty)$.

Chọn phương án (A)

Câu 27. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{2}{5}}(x-4)+1>0$.

(A) $\left[\frac{13}{2};+\infty\right)$. (B) $\left(-\infty;\frac{13}{2}\right)$. (C) $(4;+\infty)$. (D) $\left(4;\frac{13}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{2}{5}}(x-4)+1>0 \Leftrightarrow \log_{\frac{2}{5}}(x-4)>-1 \Leftrightarrow 0<x-4<\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} \Leftrightarrow 4<x<\frac{13}{2}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(4;\frac{13}{2}\right)$.

Chọn phương án (D)

Câu 28. Cho $\left(\sqrt{2019}-\sqrt{2018}\right)^a > \left(\sqrt{2019}-\sqrt{2018}\right)^b$. Kết luận nào sau đây đúng?

(A) $a>b$. (B) $a<b$. (C) $a=b$. (D) $a \geq b$.

Lời giải.

Phương pháp

Với $0<a<1 \Rightarrow a^m > a^m \Leftrightarrow n<m$

Cách giải:

Ta có: $0<\sqrt{2019}-\sqrt{2018}<1 \Rightarrow \left(\sqrt{2019}-\sqrt{2018}\right)^a > \left(\sqrt{2019}-\sqrt{2018}\right)^b \Leftrightarrow a<b$

Chọn phương án (B)

Câu 29. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x+1)>\log_3(2-x)$ là $S=(a;b)\cup(c;d)$ với a,b,c,d là các số thực. Khi đó $a+b+c+d$ bằng:

(A) 4. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Phương pháp

— Tìm điều kiện xác định của bất phương trình.

— Giải bất phương trình.

Cách giải:

Ta có:

$$\begin{cases} x+1>0 \\ 2-x>0 \\ \log_{\frac{1}{3}}(x+1)>\log_3(2-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x<2 \\ -\log_3(x+1)>\log_3(2-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<2 \\ \log_3(2-x)+\log_3(x+1)<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<2 \\ x^2+x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<2 \\ \left[\begin{array}{l} x>\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x<\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

$\Rightarrow S = \left(-1; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; 2\right)$

$a + b + c + d = -1 + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + 2 = 2.$

Chọn phương án D

Câu 30. Tập hợp tất cả các số thực x thỏa mãn $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{4x} \leqslant \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2-x}$ là

A $\left[-\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$. **B** $\left[\dfrac{2}{5}; +\infty\right)$. **C** $\left(-\infty; \dfrac{2}{5}\right]$. **D** $\left(-\infty; \dfrac{2}{3}\right]$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x} &\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{-4x} \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x} \\ &\Leftrightarrow -4x \leqslant 2 - x \\ &\Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leqslant x. \end{aligned}$$

Chọn phương án A

Câu 31. Bất phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-2x} \geq \dfrac{1}{8}$ có tập nghiệm là

A $[3; +\infty)$. **B** $(-\infty; -1]$. **C** $[-1; 3]$. **D** $(-1; 3)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} && \geq \frac{1}{8} \\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} && \geq \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 2x && \leq 3 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 2x - 3 && \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & -1 \leq x \leq 3. \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = [-1; 3]$.

Chọn phương án C

Câu 32. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 3x + 2\right) \geq -1$ là

A $S = [0; 3]$. **B** $S = [0; 2) \cup (3; 7]$. **C** $S = [0; 1] \cup (2; 3]$. **D** $S = (1; +\infty)$.

Lời giải.

Phương pháp: $\log_a f(x) \geq b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) \leq a^b. \end{cases}$

Cách giải: Ta có:

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 3x + 2\right) \geq -1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0 \\ x^2 - 3x + 2 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 1 \end{array}\right. \\ 0 \le x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0;1) \cup (2;3].$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = [0;1] \cup (2;3]$.

Chú ý: Học sinh cần chú ý Điều kiện xác định của hàm logarit.

Chọn phương án C

Câu 33. Biết tập hợp nghiệm của bất phương trình $2^x < 3 - \dfrac{2}{2^x}$ là khoảng $(a;b)$. Giá trị $a+b$ là

(A) 3. (B) 2. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

Ta có: $2^x < 3 - \dfrac{2}{2^x} \Leftrightarrow (2^x)^2 < 3 \cdot 2^x - 2 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < 2^x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

Vậy tập hợp nghiệm của bất phương trình là khoảng $(0;1)$. Suy ra $a+b=1$.

Chọn phương án D

Câu 34. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{1+a^2}\right)^{2x+1} > 1$ (với a là tham số, $a \neq 0$) là

(A) $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right)$. (B) $(-\infty;0)$. (C) $\left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$. (D) $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Vì $0 < \dfrac{1}{1+a^2} < 1$ nên $\left(\dfrac{1}{1+a^2}\right)^{2x+1} > 1 \Leftrightarrow 2x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{1}{2}$.

Chọn phương án A

Câu 35. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-2x} < 27$ là

(A) $(-\infty;-1)$. (B) $(3;+\infty)$.
(C) $(-1;3)$. (D) $(-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$.

Lời giải.

$3^{x^2-2x} < 27 \Leftrightarrow 3^{x^2-2x} < 3^3 \Leftrightarrow x^2 - 2x < 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$.

Chọn phương án C

Câu 36. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 > 0$.

(A) $(1;8)$. (B) $(-\infty;1) \cup (8;+\infty)$. (C) $(8;+\infty)$. (D) $(0;2) \cup (8;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$

BPT $\Leftrightarrow \log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 > 0 \Leftrightarrow \log_2 x \in (-\infty;1) \cup (3;+\infty) \Leftrightarrow x \in (0;2) \cup (8;+\infty)$.

Chọn phương án D

Câu 37. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{0.2}(4x+11) < \log_{0.2}(x^2+6x+8)$ là

(A) $S = (-2;4)$. (B) $S = (-3;1)$. (C) $S = (-2;1)$. (D) $S = (-4;-2)$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_{0.2}(4x+11) < \log_{0.2}(x^2+6x+8)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x+8>0 \\ 4x+11>x^2+6x+8 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x+8>0 \\ x^2+2x-3<0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<-4 \vee x>-2 \\ -3<x<1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow -2<x<1.$$

Chọn phương án C

Câu 38. Bất phương trình $6\cdot 4^x-13\cdot 6^x+6\cdot 9^x>0$ có tập nghiệm là

(A) $S=(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$.
(B) $S=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.
(C) $S=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.
(D) $S=(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$.

Lời giải.

Chia cả 2 vế của bất phương trình cho 9^x ta được $6\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-13\left(\frac{2}{3}\right)^{x}+6>0$.

Đặt $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t\,(t>0)$. Ta được $6t^2-13t+6>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<\frac{2}{3} \\ t>\frac{3}{2}. \end{array}\right.$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x<\frac{2}{3} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x>\frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-1. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Chọn phương án B

Câu 39. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x-8)\geq -4$.

(A) $(-4;2)$.
(B) $[-6;4)$.
(C) $[-6;-4]\cup[2;4]$.
(D) $[-6;-4)\cup(2;4]$.

Lời giải.

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-8>0 \\ x^2+2x-8\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-4 \text{ hoặc } x>2 \\ x^2+2x-24\leq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<-4 \text{ hoặc } x>2 \\ -6\leq x\leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6\leq x<-4 \\ 2<x\leq 4 \end{array}\right..$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[-6;-4)\cup(2;4]$.

Chọn phương án D

Câu 40. Mệnh đề nào dưới đây sai?

(A) $\log x<1 \Leftrightarrow 0<x<10$.
(B) $\log_{\frac{1}{\pi}} x<\log_{\frac{1}{\pi}} y \Leftrightarrow x>y>0$.
(C) $\ln x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$.
(D) $\log_4 x^2>\log_2 y \Leftrightarrow x>y>0$.

Lời giải.

Chọn $x=-4$, $y=1$, $\log_4(-4)^2>\log_2 1$.

Chọn phương án D

C MỨC ĐỘ 3

Câu 41. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\geq 0$ là

(A) $S=\left(3;\dfrac{11}{2}\right)$. (B) $S=(-\infty;4]$. (C) $S=(1;4]$. (D) $S=(1;4)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x-1>0\\11-2x>0\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<\dfrac{11}{2}$. Ta có

$$\begin{aligned}&\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\geq 0\Leftrightarrow -\log_3(x-1)+\log_3(11-2x)\geq 0\\ \Leftrightarrow\ &\log_3\frac{11-2x}{x-1}\geq 0\Leftrightarrow\frac{11-2x}{x-1}\geq 1\Leftrightarrow\frac{11-2x}{x-1}-1\geq 0(\text{vì } x-1>0)\\ \Leftrightarrow\ &12-3x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 4.\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta có $1<x\leq 4$.

Vậy $S=(1;4]$.

Chọn phương án C

Câu 42. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Bất phương trình $f(x)<\mathrm{e}^x+m$ đúng với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi

(A) $m\geq f(1)-\mathrm{e}$. (B) $m>f(-1)-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. (C) $m\geq f(-1)-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. (D) $m>f(1)-\mathrm{e}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)<\mathrm{e}^x+m\Leftrightarrow f(x)-\mathrm{e}^x<m$.

Xét $h(x)=f(x)-\mathrm{e}^x,\ x\in(-1;1)$.

Khi đó $h'(x)=f'(x)-\mathrm{e}^x<0,\ \forall x\in(-1;1)$ $\big($Vì $f'(x)<0,\ \forall x\in(-1;1)$ và $\mathrm{e}^x>0,\ \forall x\in(-1;1)\big)$.

$\Rightarrow h(x)$ nghịch biến trên $(-1;1)\Rightarrow h(-1)>h(x)>h(1),\ \forall x\in(-1;1)$.

Để bất phương trình $f(x)<\mathrm{e}^x+m$ đúng với mọi $x\in(-1;1)\Leftrightarrow m\geq h(-1)\Leftrightarrow m\geq f(-1)-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Chọn phương án C

Câu 43. Giải bất phương trình $\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)$ được tập nghiệm là $(a;b)$. Hãy tính tổng $S=a+b$.

(A) $S=\dfrac{8}{3}$. (B) $S=\dfrac{28}{15}$. (C) $S=\dfrac{11}{5}$. (D) $S=\dfrac{31}{6}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases}6-5x>0\\3x-2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\dfrac{6}{5}\\x>\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{6}{5}$.

$\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)\Leftrightarrow 3x-2>6-5x\Leftrightarrow x>1$.

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $1 < x < \dfrac{6}{5} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{6}{5}. \end{cases}$

Vậy $S = a + b = 1 + \dfrac{6}{5} = \dfrac{11}{5}$.

Chọn phương án C

Câu 44. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để bất phương trình

$$\left(6+2\sqrt{7}\right)^x + (2-m)\left(3-\sqrt{7}\right)^x - (m+1)2^x \geq 0$$

nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$?

A 10. **B** 9. **C** 12. **D** 11.

Lời giải.

Chia cả 2 vế của bất phương trình cho $2^x > 0$ ta được

$$\left(3+\sqrt{7}\right)^x + (2-m)\left(\frac{3-\sqrt{7}}{2}\right)^x - (m+1) \geq 0.$$

Nhận thấy $\left(3+\sqrt{7}\right)^x \cdot \left(\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}\right)^x = 1$, do đó đặt $t = \left(3+\sqrt{7}\right)^x\ (t > 0) \Rightarrow \left(\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}\right)^x = \dfrac{1}{t}$.

Phương trình trở thành

$$\begin{aligned} t + (2-m)\frac{1}{t} - (m+1) \geq 0 \quad &\Leftrightarrow t^2 - (m+1)t + 2 - m \geq 0 \\ &\Leftrightarrow t^2 - t + 2 \geq m(t+1) \\ &\Leftrightarrow m \leq \frac{t^2 - t + 2}{t+1}. \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2 - t + 2}{t+1}$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{(2t-1)(t+1) - t^2 + t - 2}{(t+1)^2} = \dfrac{t^2 + 2t - 3}{(t+1)^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $m \leq 1$.

Kết hợp điều kiện đề bài có 12 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án C

Câu 45. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(1; 20)$ để $\forall x \in \left(\dfrac{1}{3}; 1\right)$ đều là nghiệm của bất phương trình $\log_m x > \log_x m$?

A 18. **B** 16. **C** 17. **D** 0.

Lời giải.

ĐK $0 < x \neq 1$. BPT $\Leftrightarrow \log_m x > \dfrac{1}{\log_m x} \Leftrightarrow \dfrac{(\log_m x)^2 - 1}{\log_m x} > 0$. $(*)$

Do $x \in \left(\dfrac{1}{3}; 1\right) \Rightarrow \log_m x < 0$. Do đó $(*) \Leftrightarrow -1 < \log_m x < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{m} < x < m$

Để mọi $x \in \left(\dfrac{1}{3}; 1\right)$ đều là nghiệm của BPT thì $\dfrac{1}{m} \leq \dfrac{1}{3} < 1 \leq m \Leftrightarrow m \geq 3 \Rightarrow m \in \{3; 4; \ldots; 19\}$.

Chọn phương án C

Câu 46. Bất phương trình $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x > 0$ có tập nghiệm là?

A $S = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$. **B** $S = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

C $S = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. **D** $S = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải.

Chia cả hai vế của bất phương trình cho 9^x ta được $6 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x} + 6 > 0$.

Đặt $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x} = t$ $(t > 0)$. Ta được bất phương trình mới $6t^2 - 13t + 6 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < \dfrac{3}{2} \\ t > \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x} < \dfrac{2}{3} \\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x} > \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -1. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Chọn phương án B

Câu 47. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\log\left(2x^2 + 3\right) < \log\left(x^2 + mx + 1\right)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A Vô số. **B** 2. **C** 5. **D** 0.

Lời giải.

Phương pháp: Tìm điều kiện xác định của bất phương trình. Giải bất phương trình logarit: $\log f(x) < \log g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x)$.

Cách giải:

$$\begin{array}{l} \log\left(2x^2 + 3\right) < \log\left(x^2 + mx + 1\right), \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow 0 < 2x^2 + 3 < x^2 + mx + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx + 2 < 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 < 0 \\ \Delta = m^2 - 8 < 0 \end{cases} (\text{vô nghiệm}) \end{array}.$$

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án D

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $f(4x - x^2) = \log_2 m$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

A $m \in (0; 8)$. **B** $m \in \left(\dfrac{1}{2}; 8\right)$. **C** $m \in (-1; 3)$. **D** $m \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, suy ra

$$f'(4x - x^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x - x^2 = 0 \\ 4x - x^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \\ x = 2. \quad \text{(bội hai)} \end{array}\right.$$

$$f'(4x - x^2) > 0 \Leftrightarrow 0 < 4x - x^2 < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 4 \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Đặt $g(x) = f(4x - x^2)$, suy ra $g'(x) = (4 - 2x) \cdot f'(4x - x^2)$. Lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$4 - 2x$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
$f'(4x - x^2)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$	$g(2)$	$\searrow$	$g(4)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $g(x)$, suy ra phương trình $f(4x - x^2) = \log_2 m$ có 4 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $\max\{g(0); g(4)\} < \log_2 m < g(2)$.

Ta có $g(0) = f(0) = -1$, $g(4) = f(0) = -1$ và $g(2) = f(4) = 3$.

Vậy $-1 < \log_2 m < 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < m < 8$.

Chọn phương án B

Câu 49. Số nghiệm của phương trình $\log_4 x^2 + \log_8 (x-6)^3 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{7}$:

A 0. **B** 1. **C** 3. **D** 2.

Lời giải.

ĐK: $x > 6$.

Ta có $\log_4 x^2 + \log_8 (x-6)^3 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{7} \Leftrightarrow \log_2 x + \log_2 (x-6) = \log_2 7$.

$\Leftrightarrow \log_2 x(x-6) = \log_2 7 \Leftrightarrow x(x-6) = 7 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -1 & (l) \\ x = 7 \end{array}\right.$.

Chọn phương án B

Câu 50. Bất phương trình $\left(x^3-9x\right)\ln(x+5)\le 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên ?

(A) 4 . (B) 7. (C) 6. (D) Vô số.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x>-5$ (*).

Xét $\left(x^3-9x\right)\ln(x+5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^3-9x=0\\ \ln(x+5)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm 3\\ x=-4\end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện (*)).

Bảng xét dấu của biểu thức $f(x)=\left(x^3-9x\right)\ln(x+5)$ trên khoảng $(-5;+\infty)$.

x	-5		-4		-3		0		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Khi đó $f(x)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-4\le x\le -3\\ 0\le x\le 3.\end{array}\right.$

Vì $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-4;-3;0;1;2;3\}$.

Chọn phương án (C)

Câu 51. Tìm m để bất phương trình $\log^2 x+3\log x+m\ge 0$ nghiệm đúng với mọi x thuộc tập xác định.

(A) $m\ge\dfrac{9}{4}$. (B) $m\le\dfrac{9}{4}$. (C) $m<\dfrac{9}{4}$. (D) $m>-\dfrac{9}{4}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x>0$. Đặt $t=\log x, t\in\mathbb{R}$.

Bất phương trình trở thành $t^2+3t+m\ge 0$

$\Leftrightarrow m\ge -t^2-3t\,(2)$.

Bất phương trình đã cho có nghiệm đúng với mọi x thuộc tập xác định $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm đúng với mọi $t\in\mathbb{R}$.

Xét $f(t)=-t^2-3t$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có: $f(t)'=-2t-3$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{3}{2}$.

t	$-\infty$		$-\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{9}{4}$	$\searrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $m\ge\dfrac{9}{4}$.

Chọn phương án (A)

Câu 52. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $2\log_{\frac{1}{2}}|x-1|<\log_{\frac{1}{2}}x-1$ là

(A) 3. (B) Vô số. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Điều kiện $0<x\ne 1$.

$$\begin{aligned}2\log_{\frac{1}{2}}|x-1|<\log_{\frac{1}{2}}x-1 &\Leftrightarrow -2\log_2|x-1|<-\log_2 x-1\\ &\Leftrightarrow \log_2(x-1)^2>\log_2 2x\Leftrightarrow (x-1)^2>2x\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\ x^2-4x+1>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2+\sqrt{3} \\ x<2-\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Kết hợp với điều kiện ta được $\left[\begin{array}{l} 0<x<2-\sqrt{3} \\ x>2+\sqrt{3} \end{array}\right.$. Do $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{4;5;\cdots\}$.

Vậy bất phương trình có vô số nghiệm.

Chọn phương án B

Câu 53. Tập hợp tất cả các số thực x không thỏa mãn bất phương trình $9^{x^2-4}+(x^2-4)\cdot 2019^{x-2}\geq 1$ là khoảng $(a;b)$. Tính $b-a$.

A. 5. B. 4. C. -5. D. -1.

Lời giải.

— Trường hợp 1. $x^2-4<0$ ta có $9^{x^2-4}+(x^2-4)\cdot 2019^{x-2}<9^0+0\cdot 2019^{x-2}=1$.

— Trường hợp 2. $x^2-4\geq 0$ ta có $9^{x^2-4}+(x^2-4)\cdot 2019^{x-2}\geq 9^0+0\cdot 2019^{x-2}=1$.

Vậy tập hợp các giá trị của x không thỏa mãn bất phương trình là $x\in(-2;2)\Rightarrow a=-2$, $b=2\Rightarrow b-a=4$.

Chọn phương án B

Câu 54. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$ ↘	-3 ↗	0 ↘	$-\infty$

Bất phương trình $f(x)<\mathrm{e}^x+m$ đúng với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi

A. $m\geq f(1)-\mathrm{e}$. B. $m>f(-1)-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. C. $m\geq f(-1)-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. D. $m>f(1)-\mathrm{e}$.

Lời giải.

$f(x)<\mathrm{e}^x+m\Leftrightarrow f(x)-\mathrm{e}^x<m$.

Xét $h(x)=f(x)-\mathrm{e}^x, \forall x\in(-1;1)$.

$h'(x)=f'(x)-\mathrm{e}^x<0, \forall x\in(-1;1)$ (Vì $f'(x)<0,\forall x\in(-1;1)$ và $\mathrm{e}^x>0,\forall x\in(-1;1)$).

$\Rightarrow h(x)$ nghịch biến trên $(-1;1)\Rightarrow h(-1)>h(x)>h(1), \forall x\in(-1;1)$.

Bất phương trình $f(x)<\mathrm{e}^x+m$ đúng với mọi $x\in(-1;1)\Leftrightarrow m\geq h(-1)\Leftrightarrow m\geq f(-1)-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Chọn phương án C

Câu 55. Tất cả các giá trị của m để bất phương trình $(3m+1).18^x+(2-m).6^x+2^x<0$ có nghiệm đúng $\forall x>0$ là:

A. $(-\infty;2)$. B. $\left(-2;-\dfrac{1}{3}\right)$. C. $\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)$. D. $(-\infty;-2]$.

Lời giải.

$(3m+1).18^x+(2-m).6^x+2^x<0$

Chia 2 vế cho $2^x>0$, ta được: $(3m+1).9^x+(2-m).3^x+1<0$

Đặt $t=3^x$, có $x>0\Rightarrow t>1$

BPT $\Leftrightarrow (3m+1)t^2+(2-m)t+1<0\Leftrightarrow m(3t^2-t)+t^2+2t+1<0\Leftrightarrow m<-\dfrac{t^2+2t+1}{3t^2-t}$

Xét $f(t)=-\dfrac{t^2+2t+1}{3t^2-t}$ trên $[1;\infty)$

Có $f'(t)=\dfrac{7t^2+6t-1}{(3t^2-t)^2}>0\ \forall t>1$

$\Rightarrow y=f(t)$ đồng biến trên $[1;\infty)$

$\Rightarrow \min\limits_{[1;+\infty)} f(t)=f(1)=-2$

Vậy $m\le -2$.

Chọn phương án D

Câu 56. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{2018}x\le\log_x 2018$.

(A) $S=(0;2018]$.
(B) $S=\left[\dfrac{1}{2018};2018\right]$.
(C) $S=\left(0;\dfrac{1}{2018}\right]\cup(1;2018]$.
(D) $S=\left(-\infty;\dfrac{1}{2018}\right]\cup(1;2018]$.

Lời giải.

Điều kiện: $x>0,x\neq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với $\log_{2018}x\le\dfrac{1}{\log_{2018}x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(\log_{2018}x)^2-1}{\log_{2018}x}\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<\log_{2018}x\le 1\\ \log_{2018}x\le -1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1<x\le 2018\\ 0<x\le\dfrac{1}{2018}\end{array}\right.$

Chọn phương án C

Câu 57. Tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình

$$\left(\sqrt{10}+1\right)^x-m\left(\sqrt{10}-1\right)^x>3^{x+1}$$

nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ là

(A) $m<-\dfrac{7}{4}$.
(B) $m<-\dfrac{9}{4}$.
(C) $m<-2$.
(D) $m<-\dfrac{11}{4}$.

Lời giải.

Xét bất phương trình $\left(\sqrt{10}+1\right)^x-m\left(\sqrt{10}-1\right)^x>3^{x+1}$. (1)

Ta có (1) $\Leftrightarrow\left(\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^x-m\left(\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^x>3$.

Nhận thấy $\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}=1\Rightarrow\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}=\left(\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{-1}$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow\left(\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^x-m\left(\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{-x}>3$.

Đặt $t=\left(\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^x$, $t>0$. Khi đó (1) trở thành: $t-\dfrac{m}{t}>3\Leftrightarrow t^2-3t>m$. (2)

Ta có (1) nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi (2) nghiệm đúng với mọi $t>0$.

Đặt $f(t) = t^2 - 3t \Rightarrow f'(t) = 2t - 3; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{3}{2}$.

Ta có bảng biến thiên:

t	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $m < -\dfrac{9}{4}$.

Chọn phương án B

Câu 58. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{x+1}(-2x) > 2$.

A $S = (-1, 0)$. **B** $S = (-\infty, 0)$. **C** $S = \left(\sqrt{3} - 2, 0\right)$. **D** $S = \left(\sqrt{3} - 2, +\infty\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x + 1 \neq 1 \\ -2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 0.$

Vì $-1 < x < 0 \Rightarrow 0 < x + 1 < 1$

Khi đó $\log_{x+1}(-2x) > 2 \Leftrightarrow -2x < (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 - \sqrt{3} \\ x > -2 + \sqrt{3} \end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện, suy ra $S = \left(\sqrt{3} - 2, 0\right)$.

Chọn phương án C

Câu 59. Giải bất phương trình sau $\log_{\frac{1}{5}}(3x - 5) > \log_{\frac{1}{5}}(x + 1)$.

A $\dfrac{5}{3} < x < 3$. **B** $-1 < x < 3$. **C** $-1 < x < \dfrac{5}{3}$. **D** $x > 3$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình $0 < 3x - 5 < x + 1 \Leftrightarrow \dfrac{5}{3} < x < 3$.

Chọn phương án A

Câu 60. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $4^{x+1} - m(2^x + 1) > 0$ có nghiệm với $\forall x \in \mathbb{R}$.

A $m \in (-\infty; 0]$. **B** $m \in (-\infty; 0)$.

C $m \in (-\infty; 1)$. **D** $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải.

Biến đổi bất phương trình đã cho về dạng $m < \dfrac{4 \cdot 4^x}{2^x + 1}$.

Xét hàm số $y = f(t)$ với $t > 0$, ta có

Đạo hàm: $f'(t) = 4 \cdot \dfrac{t^2 + 2t}{(t+1)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 0; t = -2$. Mặt khác, $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = 0$. Bảng biến thiên

t	0		$+\infty$
$f'(t)$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thu được $m \leq 0$.
Chọn phương án (A)

D MỨC ĐỘ 4

Câu 61. Cho bất phương trình $8^x - 3.2^{2x+1} + 9.2^x + m - 5 > 0$ (1) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x \in [1;2]$?

(A) Vô số. (B) 4. (C) 5. (D) 6.

Lời giải.
Đặt $t = 2^x$ vì $x \in [1;2] \Rightarrow t \in [2;4]$.
Bất phương trình đã cho trở thành $t^3 - 6t^2 + 9t - 5 > -m$ có nghiệm đúng với $t \in [2;4]$.
Đặt $g(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 5 \Rightarrow g'(t) = 3t^2 - 12t + 9 > 0\, \forall t \in [2;4]$.
$\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra $-m < Min\, g(t) = g(2) = -5 \Leftrightarrow m > 5$.
Vậy có vô số giá trị của m.

Chọn phương án (A)

Câu 62. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(x\sqrt{x^2+2} + 4 - x^2\right) + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1$ là $\left(-\sqrt{a}; -\sqrt{b}\right]$. Khi đó ab bằng

(A) $\dfrac{12}{5}$. (B) $\dfrac{5}{12}$. (C) $\dfrac{15}{16}$. (D) $\dfrac{16}{15}$.

Lời giải.
Điều kiện:

$$x\sqrt{x^2+2} + 4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x\left(\sqrt{x^2+2} - x\right) + 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \cdot \frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x} + 4 > 0 \Leftrightarrow \frac{2x + 4\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)}{\sqrt{x^2+2}+x} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\sqrt{x^2+2} + 6x > 0 \text{ (vì } \sqrt{x^2+2} + x > 0, \forall x)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{x^2+2} > -3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3x < 0 \\ \begin{cases} -3x \geq 0 \\ 4(x^2+2) > (-3x)^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ \begin{cases} x \leq 0 \\ 5x^2 < 8 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x > 0 \\ -\dfrac{40}{5} < x \leq 0. \end{array}\right.$$

Khi đó ta có

$$\log_2\left(x\sqrt{x^2+2} + 4 - x^2\right) + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{6x+4\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}+x}\right)+2x+\sqrt{x^2+2}\le 1\\
&\Leftrightarrow \log_2(6x+4\sqrt{x^2+2})-\log_2(\sqrt{x^2+2}+x)+2x+\sqrt{x^2+2}\le 1\\
&\Leftrightarrow \log_2\left[2\left(3x+2\sqrt{x^2+2}\right)\right]-\log_2(\sqrt{x^2+2}+x)+2x+\sqrt{x^2+2}\le 1\\
&\Leftrightarrow \log_2 2+\log_2(3x+2\sqrt{x^2+2})-\log_2(\sqrt{x^2+2}+x)+2x+\sqrt{x^2+2}\le 1\\
&\Leftrightarrow \log_2(3x+2\sqrt{x^2+2})+3x+2\sqrt{x^2+2}\le \log_2(\sqrt{x^2+2}+x)+x+\sqrt{x^2+2}(*)
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=t+\log_2 t$ với $t>0$ ta có $f'(t)=1+\dfrac{1}{t\ln 2}>0$ với mọi $t>0$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Từ đó

$$\begin{aligned}
(*)\Leftrightarrow\ & f(3x+2\sqrt{x^2+2})\le f(x+\sqrt{x^2+2})\\
\Leftrightarrow\ & 3x+2\sqrt{x^2+2}\le x+\sqrt{x^2+2}\\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{x^2+2}\le -2x\Leftrightarrow\begin{cases}-2x\ge 0\\ x^2+2\le 4x^2\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases}x\le 0\\ 3x^2\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\ \left[\begin{array}{l}x\ge \dfrac{\sqrt6}{3}\\ x\le -\dfrac{\sqrt6}{3}\end{array}\right.\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ & x\le -\frac{\sqrt6}{3}.
\end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện $\left[\begin{array}{l}x>0\\ -\dfrac{\sqrt{40}}{5}<x\le 0\end{array}\right.$ ta có $-\dfrac{\sqrt{40}}{5}<x\le-\dfrac{\sqrt6}{3}$ hay $-\sqrt{\dfrac85}<x\le-\sqrt{\dfrac23}$.

Tập nghiệm bất phương trình $S=\left(-\sqrt{\dfrac85};-\sqrt{\dfrac23}\right]$ nên $a=\dfrac85$; $b=\dfrac23\Rightarrow ab=\dfrac{16}{15}$.

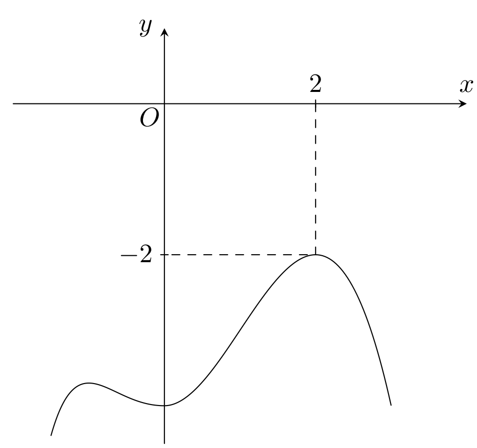
Chọn phương án D

Câu 63.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$$9\cdot 6^{f(x)}+\left(4-f^2(x)\right)\cdot 9^{f(x)}\le(-m^2+5m)\cdot 4^{f(x)}$$

nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.



A 10.
B 4.
C 5.
D 9.

Lời giải.

Ta có

$9\cdot 6^{f(x)}+\left(4-f^2(x)\right)\cdot 9^{f(x)}\le\left(-m^2+5m\right)\cdot 4^{f(x)}\Leftrightarrow -m^2+5m\ge 9\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)}+\left[4-f^2(x)\right]\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)}.(1)$

Từ đồ thị suy ra $f(x)\le -2\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\begin{cases}9\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)}\le 4, & \forall x\in\mathbb{R}\\ \left[4-f^2(x)\right]\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)}\le 0, & \forall x\in\mathbb{R}.\end{cases}$

Do đó $g(x)=9\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)}+\left[4-f^2(x)\right]\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)}\le 4,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\max\limits_{\mathbb{R}} g(x)=4.$

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow -m^2+5m\ge 4\Leftrightarrow 1\le m\le 4.$

Vậy $m\in\{1;2;3;4\}$.

Chọn phương án B

Câu 64. Tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$

$$\left(\sqrt{10}+1\right)^x-m\left(\sqrt{10}-1\right)^x>3^{x+1}.$$

A $m<-\frac{7}{4}$. **B** $m<-\frac{9}{4}$. **C** m < -2. **D** $m<-\frac{11}{4}$.

Lời giải.

Xét bất phương trình $(\sqrt{10}+1)^8-m(\sqrt{10}-1)^8>3^{x+1}\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^x-m\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^x>3.$

Nhận xét $\frac{\sqrt{10}+1}{3}\cdot\frac{\sqrt{10}-1}{3}=1\Rightarrow\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{-1}$

Do đó (1) $\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^x-m\left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{-x}>3.$

Đặt $t=\left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^x, t>0.$

Khi đó (1) trở thành $t-\frac{m}{t}>3\Leftrightarrow t^2-3t>m$ (2).

Ta có bảng biến thiên hàm số $y=t^2-3t$.

t	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $m<-\frac{4}{9}$.

Chọn phương án B

Câu 65. Cho x, y là số thực dương thỏa mãn $\log_2 x+\log_2 y+1\ge\log_2\left(x^2+2y\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x+2y$.

A $P=9$. **B** $P=2\sqrt{2}+3$. **C** $P=2+3\sqrt{2}$. **D** $P=3+\sqrt{3}$.

Lời giải.

$\log_2 x + \log_2 y + 1 \geq \log_2\left(x^2+2y\right) \Leftrightarrow 2xy \geq x^2+2y \Leftrightarrow 2y(1-x)+x^2 \leq 0 \quad (1)$

Vì $P = x+2y \Rightarrow 2y = P-x$, thay vào (1) ta được:

$(P-x)(1-x)+x^2 \leq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x(P+1)+P \leq 0$

Phương trình có nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow (P+1)^2 - 8P \geq 0$

$\Leftrightarrow P^2 - 6P + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P \geq 3+2\sqrt{2} \\ P \leq 3-2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Chọn phương án B

Câu 66. Có bao nhiêu số nguyên dương a (a là tham số) để phương trình

$$(3a^2+12a+15)\log_{27}(2x-x^2) + \left(\frac{9}{2}a^2-3a+1\right)\log_{\sqrt{11}}\left(1-\frac{x^2}{2}\right) = 2\log_9(2x-x^2) + \log_{11}\frac{2-x^2}{2}$$

có nghiệm duy nhất?

(A) 2. (B) 0. (C) Vô số. (D) 1.

Lời giải.

Điều kiện $0 < x < \sqrt{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$(a^2+4a+5)\log_3(2x-x^2) + (9a^2-6a+2)\log_{11}\left(\frac{2-x^2}{2}\right) = \log_3(2x-x^2) + \log_{11}\left(\frac{2-x^2}{2}\right)$.

$\Leftrightarrow (a+2)^2\log_3(2x-x^2) + (3a-1)^2\log_{11}\left(\frac{2-x^2}{2}\right) = 0 \ (*)$

Đặt $u = \log_3(2x-x^2)$ và $v = \log_{11}\left(\frac{2-x^2}{2}\right)$. Phương trình $(*)$ trở thành

$$(u+9v)a^2 + 2(2u-3v)a + 4u + v = 0 \ (**)$$

Phương trình $(*)$ có nghiệm thì phải tồn tại a, tức là phương trình $(**)$ phải có nghiệm a. Do đó $\Delta' = (2u-3v)^2 - (u+9v)(4u+v) = -49uv \geq 0 \Leftrightarrow uv \leq 0$ hay $\log_3(2x-x^2)\cdot\log_{11}\left(\frac{2-x^2}{2}\right) \leq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_3(2x-x^2) \leq 0 \\ \log_{11}\left(\dfrac{2-x^2}{2}\right) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_3(2x-x^2) \geq 0 \\ \log_{11}\left(\dfrac{2-x^2}{2}\right) \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < 2x-x^2 \leq 1 \\ \dfrac{2-x^2}{2} \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-x^2 \geq 1 \\ 0 < \dfrac{2-x^2}{2} \leq 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < 2x-x^2 \leq 1 \\ x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ 0 < \dfrac{2-x^2}{2} \leq 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1.$$

Với $x = 1$, ta thay lại vào phương trình $(*)$ ta được $a = \frac{1}{3}$ (loại)

Vậy không có số nguyên dương a để phương trình đã cho cho nghiệm duy nhất.

Chọn phương án B

Câu 67. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $9^x - 2(x+5)3^x + 9(2x+1) \geq 0$.

(A) $[0;1] \cup [2;+\infty)$. (B) $(-\infty;1] \cup [2;+\infty)$. (C) $[1;2]$. (D) $(-\infty;0] \cup [2;+\infty)$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương

$$(3^x - 9)(3^x - 2x - 1) \geq 0.$$

Dễ thấy $x = 1$ và $x = 2$ thỏa mãn bất phương trình.

Đặt $g(x) = (3^x - 9)(3^x - 2x - 1)$, $f(x) = 3^x - 2x - 1$. Ta có $f'(x) = 3^x \ln 3 - 2$. Suy ra

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = \log_3\left(\frac{2}{\ln 3}\right).$$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		x_0		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	$f(x_0)$	$-$	0	$+$		$+$	
$3^x - 9$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $g(x) = (3^x - 9) f(x) \geq 0$ nếu $x \in [0; 1] \cup [2; +\infty)$.

Chọn phương án A

Câu 68. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $5x^2 + 12x + 16 = m(x+2)\sqrt{x^2+2}$ có hai nghiệm thực phân biệt thỏa mãn điều kiện $2017^{2x+\sqrt{x+1}} - 2017^{2+\sqrt{x+1}} + 2018x \leq 2018$.

A. $m \in (2\sqrt{6}; 3\sqrt{3}]$.

B. $m \in [2\sqrt{6}; 3\sqrt{3}]$.

C. $m \in \left(3\sqrt{3}; \frac{11}{3}\sqrt{3}\right) \cup \{2\sqrt{6}\}$.

D. $m \in \left(2\sqrt{6}; \frac{11\sqrt{3}}{3}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq -1$.

$$\begin{aligned}
2017^{2x+\sqrt{x+1}} - 2017^{2+\sqrt{x+1}} + 2018x \leq 2018 &\Leftrightarrow 2017^{\sqrt{x+1}}(2017^{2x} - 2017^2) + 2018(x-1) \leq 0\\
&\Leftrightarrow 2017^{\sqrt{x+1}}(2017^x + 2017)(2017^x - 2017) + 2018(x-1) \leq 0\\
&\Leftrightarrow x - 1 \leq 0\\
&\Leftrightarrow x \leq 1.
\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện, bất phương trình có nghiệm $-1 \leq x \leq 1$. $(*)$

Lại có

$$\begin{aligned}
5x^2 + 12x + 16 = m(x+2)\sqrt{x^2+2} &\Leftrightarrow 3(x+2)^2 + 2(x^2+2) = m(x+2)\sqrt{x^2+2}\\
&\Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{(x+2)^2}{x^2+2}} + 2\sqrt{\frac{x^2+2}{(x+2)^2}} = m. \ (2)
\end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{\frac{(x+2)^2}{x^2+2}} = t$, phương trình (2) trở thành $3t + \frac{2}{t} = m$. (3)

Xét hàm số $g(x) = \frac{(x+2)^2}{x^2+2}$, với $-1 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow g'(x) = \dfrac{-4x^2 - 4x + 8}{(x^2+2)^2}$; $g'(x) = 0 \Rightarrow x = 1; x = -2$. Suy ra $g'(x) \geq 0,\ \ \forall x \in [-1;1]$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3} \leq g(x) \leq 3 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq \sqrt{3}$.

Xét hàm số $f(t) = 3t + \dfrac{2}{t}$, với $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq \sqrt{3}$. Ta có $f'(t) = \dfrac{3t^2-2}{t^2}$; $f'(t) = 0$ khi $t = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Ta có bảng biến thiên

t	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$		$\sqrt{3}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$3\sqrt{3}$	$\searrow$	$2\sqrt{6}$	$\nearrow$	$\dfrac{11\sqrt{3}}{3}$

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (3) có hai nghiệm t phân biệt thỏa mãn $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq \sqrt{3}$. Dựa vào bảng biến thiên, ta có $2\sqrt{6} < m \leq 3\sqrt{3}$.

Chọn phương án A

Câu 69. Tìm giá trị gần đúng của tổng các nghiệm của bất phương trình sau

$$\left(\sqrt{2\log_x^2 \frac{22}{3} - 2\log_x \frac{22}{3} + 5} - \sqrt{13} + \sqrt{\frac{2}{\log_{\frac{22}{3}}^2 x} - \frac{4}{\log_{\frac{22}{3}} x} + 4}\right)\left(24x^6 - 2x^5 + 27x^4 - 2x^3 + 1997x^2 + 2016\right) \leq 0.$$

A. 12,3. B. 12. C. 12,1. D. 1,2.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$. Ta có

$$\begin{aligned} 24x^6 - 2x^5 + 27x^4 - 2x^3 + 1997x^2 + 2016 &= \left(24x^6 - 2x^5 + 27x^4 - 2x^3 + 24x^2\right) + 1973x^2 + 2016 \\ &= x^4\left[24\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 27\right] + 1973x^2 + 2016 \\ &= x^4\left[24\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 75\right] + 1973x^2 + 2016. \end{aligned}$$

Suy ra $24x^6 - 2x^5 + 27x^4 - 2x^3 + 1997x^2 + 2016 > 0$ với mọi x thỏa mãn điều kiện của phương trình. Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2\log_x^2 \frac{22}{3} - 2\log_x \frac{22}{3} + 5} + \sqrt{\frac{2}{\log_{\frac{22}{3}}^2 x} - \frac{4}{\log_{\frac{22}{3}} x} + 4} \leq \sqrt{13}.$$

Đặt $\log_x \dfrac{22}{3} = t$, ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{2t^2-2t+5}+\sqrt{2t^2-4t+4} &= \sqrt{\left(\sqrt{2}t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}t\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}\\ &\geq \sqrt{\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{13}.\end{aligned}$$

(Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u}|+|\vec{v}| \geq |\vec{u}+\vec{v}|$; dấu bằng xảy ra khi hai véc tơ cùng hướng).

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{\sqrt{2}t-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2}t}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow t = \dfrac{4}{5}$.

Như vậy $\sqrt{2t^2-2t+5}+\sqrt{2t^2-4t+4} \leq \sqrt{13} \Leftrightarrow \sqrt{2t^2-2t+5}+\sqrt{2t^2-4t+4} = \sqrt{13} \Leftrightarrow t = \dfrac{4}{5}$.

Với $t = \dfrac{4}{5} \Rightarrow \log_x \dfrac{22}{3} = \dfrac{4}{5} \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{\left(\dfrac{22}{3}\right)^5} \approx 12{,}1$.

Chọn phương án C

Câu 70. Cho bất phương trình $2^{-x^2+2x+1}+2^{x^2-2x} \geq m$. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A $m \leq 3$. **B** $m \geq 3\sqrt{2}$. **C** $m \leq 2\sqrt{2}$. **D** $m \leq 3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Đặt $t = 2^{x^2-2x}$, vì $x^2-2x \geq -1 \Rightarrow t \geq \dfrac{1}{2}$, khi đó bài toán trở thành: Tìm m để bất phương trình $m \leq \dfrac{2}{t}+t$ nghiệm đúng với mọi $t \geq \dfrac{1}{2}$.

Xét $f(t) = \dfrac{2}{t}+t$ với $t \geq \dfrac{1}{2}$. Ta có $f'(t) = -\dfrac{2}{t^2}+1 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2} \text{ (loại)}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

t	$\frac{1}{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $m \leq 2\sqrt{2}$ thì thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn phương án C

Câu 71. Gọi S là tổng các nghiệm của bất phương trình

$$\left(\frac{4\sqrt{2\log_x^2 \frac{22}{3}-2\log_x \frac{22}{3}+5}}{9^{4\log_{81} 2}}-\sqrt{13}+\sqrt{\frac{2}{\log^2_{\frac{22}{3}} x}-\frac{4}{\log_{\frac{22}{3}} x}+4}\right)(24x^6-2x^5+27x^4-2x^3+2017x^2+$$

2018) $\leqslant 0$. Giá trị gần đúng của S là

A. 12,3. B. 12,2. C. 12,1. D. 12.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} 2\log_x^2 \dfrac{22}{3} - 2\log_x \dfrac{22}{3} + 5 \geqslant 0 \\ \dfrac{2}{\log^2_{\frac{22}{3}} x} - \dfrac{4}{\log_{\frac{22}{3}} x} + 4 \geqslant 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Ta có: $24x^6 - 2x^5 + 27x^4 - 2x^3 + 2017x^2 + 2018 = 23x^6 + x^4(x-1)^2 + 25x^4 + x^2(x-1)^2 + 2016x^2 + 2018 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{4\sqrt{2\log_x^2 \dfrac{22}{3} - 2\log_x \dfrac{22}{3} + 5}}{9^{4\log_{81} 2}} - \sqrt{13} + \sqrt{\frac{2}{\log^2_{\frac{22}{3}} x} - \frac{4}{\log_{\frac{22}{3}} x} + 4} \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2\log_x^2 \frac{22}{3} - 2\log_x \frac{22}{3} + 5} - \sqrt{13} + \sqrt{2\log_x^2 \frac{22}{3} - 4\log_x \frac{22}{3} + 4} \leqslant 0$$

Đặt $t = \log_x \dfrac{22}{3}$, ta được:

$$\sqrt{2t^2 - 2t + 5} + \sqrt{2t^2 - 4t + 4} \leqslant \sqrt{13}\ (*)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{2}t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}} + \sqrt{\left(-\sqrt{2}t + \sqrt{2}\right)^2 + 2} \leqslant \sqrt{13}$$

Đặt $\vec{u}\left(\sqrt{2}t - \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$ và $\vec{v}\left(-\sqrt{2}t + \sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$. Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u}| + |\vec{u}| \geqslant |\vec{u} + \vec{v}|$, ta có:

$\sqrt{\left(\sqrt{2}t - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{2}} + \sqrt{\left(-\sqrt{2}t + \sqrt{2}\right)^2 + 2} \geqslant \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{25}{2}} = \sqrt{13}$

Do đó (*) xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\sqrt{2}t - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\left(-\sqrt{2}t + \sqrt{2}\right) \Leftrightarrow t = \dfrac{4}{5}$.

Suy ra $\log_x \dfrac{22}{3} = \dfrac{4}{5} \Leftrightarrow x^{\frac{4}{5}} = \dfrac{22}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{\left(\dfrac{22}{3}\right)^5} \simeq 12,1$.

Chọn phương án C

Câu 72. Bất phương trình $5x + \sqrt{6x^2 + x^3 - x^4}\log_2 x > (x^2 - x)\log_2 x + 5 + 5\sqrt{6 + x - x^2}$ có tập nghiệm là $S = (a; b]$. Khi đó $b - a$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. B. $\dfrac{7}{2}$. C. $\dfrac{5}{2}$. D. 2.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ 6 + x - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq 3$.

Với điều kiện $0 < x \leq 3$ ta có

$$\begin{aligned}
& 5x + \sqrt{6x^2 + x^3 - x^4} \cdot \log_2 x > (x^2 - x) \cdot \log_2 x + 5 + 5\sqrt{6 + x - x^2} \\
\Leftrightarrow\ & \left(\sqrt{6 + x - x^2} - x + 1\right) \cdot (x \cdot \log_2 x - 5) > 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{6 + x - x^2} < x - 1 \text{ (vì } \max_{(0;3]} (x \cdot \log_2 x - 5) < 0) \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x - 1 > 0 \\ 6 + x - x^2 \geq 0 \\ 6 + x - x^2 < (x-1)^2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{5}{2} < x \leq 3.
\end{aligned}$$

Ta chứng minh $\max\limits_{(0;3]} (x \cdot \log_2 x - 5) < 0$.

Xét $f(x) = x \cdot \log_2 x - 5$ với $x \in (0; 3]$.

Ta có $f'(x) = \log_2 x + \dfrac{1}{\ln 2}$.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2^{-\frac{1}{\ln 2}}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to 0^+} (x \cdot \log_2 x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\log_2 x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x \ln 2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-x}{\ln 2} = 0$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	0		$2^{-\frac{1}{\ln 2}}$		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-5	$\searrow$	$f(2^{-\frac{1}{\ln 2}})$	$\nearrow$	$f(3) \approx -0{,}25$

Do vậy, $\max\limits_{(0;3]} f(x) = f(3) < 0$.

Chọn phương án A

Câu 73. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương nhỏ hơn 10 của tham số m để bất phương trình $m9^x + (m-1)3^{x+2} + m - 1 > 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$?

A. 3. B. 9. C. 8. D. 2.

Lời giải.

Đặt $t = 3^x$ $(t > 0)$, bất phương trình tương đương $m(t^2 + 9t + 1) > 9t + 1 \Leftrightarrow m > \dfrac{9t+1}{t^2 + 9t + 1}, \forall t > 0$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(t) = \dfrac{9t+1}{t^2+9t+1}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

x	0		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	1	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên suy ra $1 \leq m < 10$.
Chọn phương án B

Câu 74. Cho bất phương trình $\log_{3a} 11 + \log_{\frac{1}{7}}\left(\sqrt{x^2+3ax+10}+4\right)\cdot\log_{3a}\left(x^2+3ax+12\right) \geq 0$. Giá trị thực của tham số a để bất phương trình trên có nghiệm duy nhất thuộc khoảng nào sau đây?

A $(-1;0)$. **B** $(1;2)$. **C** $(0;1)$. **D** $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Đặt $m = 3a$ khi đó bất phương trình đã cho trở thành

$$\log_m 11 + \log_{\frac{1}{7}}\left(\sqrt{x^2+mx+10}+4\right)\cdot\log_m\left(x^2+mx+12\right) \geq 0. \qquad (1)$$

Điều kiện của bất phương trình là $m > 0;\ m \neq 1;\ x^2+mx+10 \geq 0$.
Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1-\log_7(\sqrt{x^2+mx+10}+4)\cdot\log_{11}(x^2+mx+12)}{\log_{11} m} \geq 0. \qquad (2)$$

Đặt $u = x^2+mx+10,\ u \geq 0$.

— Với $0 < m < 1$.Ta có

$$(2) \Leftrightarrow f(u) = \log_7(\sqrt{u}+4)\cdot\log_{11}(u+2) \geq 1 = f(9). \qquad (3)$$

Vì $f(u)$ là hàm tăng trên $(0;+\infty)$ nên từ (3) ta có

$$f(u) \geq f(9) \Leftrightarrow u \geq 9 \Leftrightarrow x^2+mx+1 \geq 0. \qquad (4)$$

(4) vô số nghiệm vì $\Delta = m^2-4 < 0$ với $\forall m \in (0;1)$. Suy ra $0 < m < 1$ không thỏa bài toán.

— Với $m > 1$. Ta có

$$(2) \Leftrightarrow f(u) \leq f(9) \Leftrightarrow 0 \leq u \leq 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+mx+10 \geq 0 & (5)\\ x^2+mx+1 \leq 0. & (6)\end{cases}$$

Xét (6), ta có $\Delta = m^2-4$.

+ $m^2-4 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$ thì (6) vô nghiệm. Không thỏa bài toán.

+ $m^2-4 > 0 \Leftrightarrow m > 2$ thì (6) có nghiệm là đoạn $[x_1;x_2]$, lúc này (5) nhận hơn 1 số của $[x_1;x_2]$ làm nghiệm. Không thỏa bài toán.

+ $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2$ thì (6) có nghiệm duy nhất $x = -1$ và $x = -1$ thỏa (5). Do đó bất phương trình có nghiệm duy nhất là $x = -1$.

Vậy $m = 2 \Leftrightarrow a = \dfrac{2}{3}$.

Chọn phương án C

Câu 75. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $3^x \geqslant 5 - 2x$.

A $[1; +\infty)$. **B** $(-\infty; 1]$. **C** $(1; +\infty)$. **D** $\varnothing$.

Lời giải.

Ta có $3^x \geqslant 5 - 2x \Leftrightarrow 3^x + 2x - 5 \geqslant 0$.

Xét hàm số $f(x) = 3^x + 2x - 5$, suy ra $f'(x) = 3^x \ln 3 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $f(x) \geqslant 0 = f(1) \Leftrightarrow x \geqslant 1$.

Chọn phương án A

Câu 76. Cho bất phương trình $m \cdot 3^{x+1} + (3m+2) \cdot \left(4 - \sqrt{7}\right)^x + \left(4 + \sqrt{7}\right)^x > 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (-\infty; 0]$.

A $m > \dfrac{2 - 2\sqrt{3}}{3}$. **B** $m > \dfrac{2 + 2\sqrt{3}}{3}$. **C** $m \geq \dfrac{2 - 2\sqrt{3}}{3}$. **D** $m \geq -\dfrac{2 - 2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Do $3^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ nên

$$m \cdot 3^{x+1} + (3m+2) \cdot \left(4 - \sqrt{7}\right)^x + \left(4 + \sqrt{7}\right)^x > 0$$

$$\Leftrightarrow 3m + (3m+2) \cdot \left(\frac{4 - \sqrt{7}}{3}\right)^x + \left(\frac{4 + \sqrt{7}}{3}\right)^x > 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \left(\dfrac{4 + \sqrt{7}}{3}\right)^x$ để $x \in (-\infty; 0]$ suy ra $0 < t \leq 1$. Khi đó bất phương trình (1) trở thành

$$\Leftrightarrow 3m + (3m+2) \cdot \frac{1}{t} + t > 0 \quad (2)$$

Để thỏa mãn bài toán khi (2) đúng với mọi $t \in (0; 1]$. Khi đó với $t \in (0; 1]$ ta có

$$(2) \Leftrightarrow m \cdot \left(3 + \frac{3}{t}\right) + t + \frac{2}{t} > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{t^2 + 2}{3t + 3}.$$

Xét hàm $f(t) = -\dfrac{t^2 + 2}{3t + 3}$ trên khoảng $(0; 1]$, ta có $f'(t) = \dfrac{6 - 6t - 3t^2}{(3t+3)^2}$.

Khi $f'(t) = 0$ suy ra $6 - 6t - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{3} - 1 \\ t = -\sqrt{3} - 1. \end{array}\right.$

Xét dấu $f'(t)$

t	0		$\sqrt{3} - 1$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu suy ra $\max\limits_{t\in(0;1]} f(t) = f\left(\sqrt{3}-1\right) = \dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

Do đó để bất phương trình (2) đúng với mọi $t \in (0;1]$ khi $m > \dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

Chọn phương án A

Câu 77. Tất cả các giá trị thực của m để bất phương trình $x\sqrt{x}+\sqrt{x+12} \le m\log_{5-\sqrt{4-x}} 3$ có nghiệm là

A. $m > 2\sqrt{3}$. B. $m > 12\log_3 5$. C. $m \ge 2\sqrt{3}$. D. $2 < m < 12\log_2 5$.

Lời giải.

• Điều kiện: $0 \le x \le 4$.

• $(*) \Leftrightarrow x\sqrt{x}+\sqrt{x+12} \le \dfrac{m}{\log_3(5-\sqrt{4-x})} \Leftrightarrow (x\sqrt{x}+\sqrt{x+12})\log_3(5-\sqrt{4-x}) \le m$.

(do $\log_3(5-\sqrt{4-x}) > 0$).

• Ta có $x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}$ và $\log_3(5-\sqrt{4-x})$ đồng biến trên $(0;4]$ nên

$f(x) = (x\sqrt{x}+\sqrt{x+12})\log_3(5-\sqrt{4-x})$ đồng biến trên $[0;4]$.

• Bất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \ge \min\limits_{[0,4]} f(x) = f(0) = 2\sqrt{3}$.

Chọn phương án C

Câu 78. Tìm giá trị của tham số m để bất phương trình

$$\log_2\left(2x^2-5x+1\right) - m > m\cdot\sqrt{\log_4\left(2x^2-5x+1\right)}$$

có nghiệm với mọi $x \ge 3$.

A. $m < 1$. B. $m \ge 1$. C. $m > 1$. D. $m \le 1$.

Lời giải.

Để bất phương trình xác định:

$$\begin{cases}2x^2-5x+1>0\\ \log_4\left(2x^2-5x+1\right)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-5x+1>0\\ 2x^2-5x+1\ge 1\end{cases} \Leftrightarrow 2x^2-5x\ge 0 \left[\begin{aligned}&x\le 0\\ &x\ge\frac{5}{2}\end{aligned}\right. \quad (*)$$

Xét $x \ge 3$, ta đặt $t = \sqrt{\log_4\left(2x^2-5x+1\right)}$. Vì $2x^2-3x+1 \ge 4\ \forall x \ge 3$ suy ra $t \ge 1$. Khi đó bất phương trình trở thành

$$2t^2 - m > mt \Leftrightarrow 2t^2 - mt - m > 0 \quad (1)$$

Bài toán trở thành tìm m để bất phương trình (1) đúng với mọi $t \ge 1$.

Xét $t \ge 1$ ta có

$$(1) \Leftrightarrow 2t^2 > m\left(t+1\right) \Leftrightarrow \frac{2t^2}{t+1} > m$$

Xét hàm số $f\left(t\right) = \dfrac{2t^2}{t+1}$ trên $[1;+\infty)$. Ta có $f'\left(t\right) = \dfrac{2t^2+4t}{\left(t+1\right)^2}$, dễ thấy $f'\left(t\right) > 0\ \forall t \ge 1$ suy ra hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$ nên $\min\limits_{t\in[1;+\infty)} f\left(t\right) = f\left(1\right) = 1$.

Do đó để (1) đúng với mọi $t \ge 1$ khi $m < \min\limits_{t\in[1;+\infty)} f\left(t\right) \Leftrightarrow m < 1$.

Chọn phương án A

Câu 79. Giải bất phương trình $\log_3 \dfrac{5x+1}{(x-1)^2} \geq 3x^2 - 11x + 3$ ta được tập nghiệm S. Biết rằng S có dạng $[a;b]\backslash\{1\}$. Hãy tính $T = (a+b) - ab$.

A $\dfrac{23}{3}$. **B** $\dfrac{11}{3}$. **C** 3. **D** $\dfrac{10}{3}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x > -\dfrac{1}{5} \\ x \neq 1 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} & \log_3 \frac{5x+1}{(x-1)^2} \geq 3x^2 - 11x + 3 \\ \Leftrightarrow\ & \log_3(5x+1) - \log_3(x-1) \geq 3(x-1)^2 - (5x+1) + 1 \\ \Leftrightarrow\ & \log_3(5x+1) + (5x+1) \geq \log_3(x-1)^2 + 3(x-1)^2 + \log_3 3 \\ \Leftrightarrow\ & \log_3(5x+1) + (5x+1) \geq \log_3\left[3(x-1)^2\right] + 3(x-1)^2 \\ \Leftrightarrow\ & f(5x+1) \geq f\left[3(x-1)^2\right]. \end{aligned}$$

Xét hàm $f(t) = \log_3 t + t$, tới $t > 0$.

$f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 3} + 1 > 0$, với $\forall t > 0$ nên hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Nên

$$\begin{aligned} & f(5x+1) \geq f\left[3(x-1)^2\right] \\ \Leftrightarrow\ & 5x+1 > 3(x-1)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 3x^2 - 11x + 2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{11-\sqrt{97}}{6} \leq x \leq \frac{11+\sqrt{97}}{6}. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $\left[\dfrac{11-\sqrt{97}}{6}; \dfrac{11+\sqrt{97}}{6}\right]\backslash\{1\}$.

Vậy $T = (a+b) - ab = 3$.

Chọn phương án C

Câu 80. Trong các nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 2x + y$ bằng

A $\dfrac{9}{4}$. **B** $\dfrac{9}{2}$. **C** $\dfrac{9}{8}$. **D** 9.

Lời giải.

TH1: $x^2 + 2y^2 > 1$. Đặt $z = y\sqrt{2}$, suy ra $x^2 + z^2 > 1$ (1). Khi đó:

$\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1 \Leftrightarrow 2x + y \geq x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow 2x + \dfrac{z}{\sqrt{2}} \geq x^2 + z^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(z - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \geq \dfrac{9}{8}$ (2).

Tập hợp các điểm $M(x;y)$ là miền (H) bao gồm miền ngoài của hình tròn $(\mathscr{C}_1): x^2 + z^2 = 1$ và miền trong của hình tròn $(\mathscr{C}_2): (x-1)^2 + \left(z - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{9}{8}$.

Hệ $\begin{cases} T = 2x + \dfrac{z}{\sqrt{2}} \\ (x-1)^2 + \left(z - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \geq \dfrac{9}{8} \\ x^2 + z^2 > 1 \end{cases}$ có nghiệm khi đường thẳng $d : 2x + \dfrac{z}{\sqrt{2}} - T = 0$ có điểm chung với miền (H).

Để T đạt giá trị lớn nhất thì đường thẳng d phải tiếp xúc với đường tròn $(\mathscr{C}_2)$, nghĩa là ta có $\mathrm{d}(I, d) = \dfrac{3}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left|T - \dfrac{9}{4}\right| = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow T = \dfrac{9}{2}$ với $I\left(1; \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ là tâm của đường tròn $(\mathscr{C}_2)$.

TH2: $0 < x^2 + 2y^2 < 1$ ta có

$\log_{x^2+2y^2}(2x + y) \geq 1 \Leftrightarrow 2x + y \leq x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow T = 2x + y < 1$ (loại).

Vậy $\max T = \dfrac{9}{2}$.

Chọn phương án B

BẢNG ĐÁP ÁN

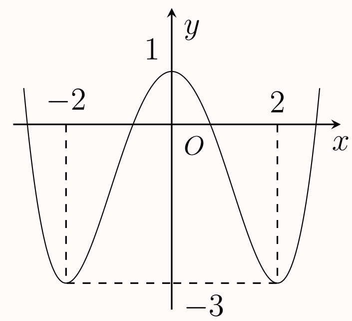
1. C	2. B	3. B	4. D	5. C	6. B	7. C	8. A	9. C	10. D
11. B	12. C	13. C	14. C	15. A	16. A	17. B	18. C	19. C	20. C
21. C	22. A	23. A	24. B	25. B	26. A	27. D	28. B	29. D	30. A
31. C	32. C	33. D	34. A	35. C	36. D	37. C	38. B	39. D	40. D
41. C	42. C	43. C	44. C	45. C	46. B	47. D	48. B	49. B	50. C
51. A	52. B	53. B	54. C	55. D	56. C	57. B	58. C	59. A	60. A
61. A	62. D	63. B	64. B	65. B	66. B	67. A	68. A	69. C	70. C
71. C	72. A	73. B	74. C	75. A	76. A	77. C	78. A	79. C	80. B

DẠNG 17. SỰ TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ

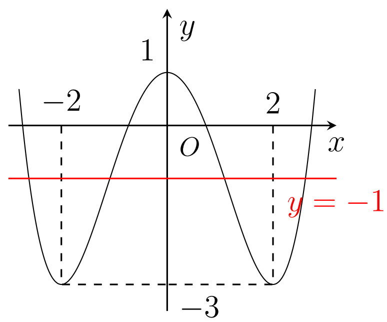
A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị trong hình bên.
Số nghiệm của phương trình $f(x) = -1$ là

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 4.



Lời giải.



Dựa vào đồ thị ta thấy có 4 giao điểm. Vậy phương trình có 4 nghiệm.
Chọn phương án (D)

Câu 1. Số giao điểm của đường cong $y = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$ và đường thẳng $y = 1 - x$ bằng.

(A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.
Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 1 - x \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2x + 3 = 0 \quad \text{(vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0.$$

Chọn phương án (C)

Câu 2. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$ với trục Ox là:

(A) 1. (B) 0. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.
Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-2x^3 - 3x^2 + 1 = 0$.
Phương trình này có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow$ Số giao điểm là 2.
Chọn phương án (D)

Câu 3. Tìm số giao điểm của đường cong $y = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$ và đường thẳng $y = 1 - x$.

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 0.

Lời giải.

Số giao điểm cần tìm là số nghiệm của phương trình

$$x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 1 - x \Leftrightarrow x\left[(x+1)^2 + 2\right] = 0.$$

Phương trình hoành độ giao điểm chỉ có một nghiệm nên số giao điểm cần tìm là 1.

Chọn phương án (A)

Câu 4. Số giao điểm phân biệt của đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 - x - 1$ và trục hoành là

(A) 2. (B) 1. (C) 0 . (D) 3.

Lời giải.

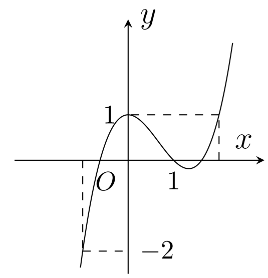
Số giao điểm là số nghiệm phân biệt của phương trình $x^3 + x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$

Chọn phương án (A)

Câu 5.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt.

(A) 0. (B) 3. (C) 1. (D) 2.



Lời giải.

Số nghiệm của phương trình $f(x) = m$ là số giao điểm của hai đồ thị hàm số $(C)\colon y = f(x)$ với đường thẳng $y = m$. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt khi chỉ khi m nhận giá trị nguyên bằng 0.

Chọn phương án (C)

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	5	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm m để phương trình $f(x) = 2 - 3m$ có bốn nghiệm phân biệt.

(A) $m < -1$ hoặc $m > -\dfrac{1}{3}$. (B) $-1 < m < -\dfrac{1}{3}$.

(C) $m = -\dfrac{1}{3}$. (D) $m \leqslant -1$.

Lời giải.

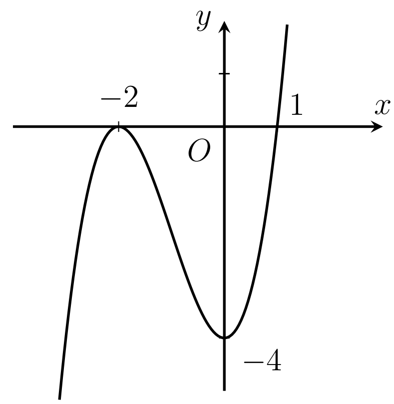
Số nghiệm của phương trình $f(x) = 2 - 3m$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 2 - 3m$.

Để phương trình $f(x) = 2 - 3m$ có bốn nghiệm phân biệt thì $3 < 2 - 3m < 5 \Leftrightarrow -1 < m < -\dfrac{1}{3}$.

Chọn phương án B

Câu 7.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x) = 1$.



A 2. **B** 1. **C** 0. **D** 3.

Lời giải.

Số nghiệm của phương trình $f(x) = 1$ là số giao điểm của đường thẳng $y = 1$ với đồ thị hàm số $y = f(x)$. Đường thẳng $y = 1$ qua điểm $(0; 1)$ song song với Ox nên cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại đúng 1 điểm. Do đó phương trình $f(x) = 1$ có đúng 1 nghiệm.

Chọn phương án B

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x) + 7 = 0$ là

A 2. **B** 3. **C** 0. **D** 1.

Lời giải.

Ta nhận thấy hàm số nhận giá trị -7 tại đúng một điểm trong mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$ nhưng không nhận giá trị -7 trong $(-1; 1)$. Do đó, phương trình $f(x) + 7 = 0$ có 2 nghiệm.

Chọn phương án A

Câu 9. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = (x - 1)(x^2 - 3x + 2)$ và trục hoành là

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

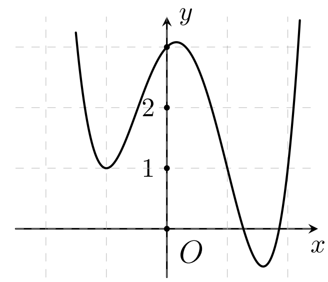
Lời giải.

Phương trình $y = 0$ có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = 2$.

Chọn phương án C

Câu 10.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như đường cong hình bên. Phương trình $f(x) = 2$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 2. (B) 4. (C) 1. (D) 3.



Lời giải.
Số nghiệm phương trình $f(x) = 2$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 2$.
Dựa vào đồ thị suy ra phương trình $f(x) = 2$ có 4 nghiệm phân biệt.
Chọn phương án B

Câu 11. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 + x^2 - 2$ với trục hoành là

(A) 0. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.
Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 + x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = -2 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$
Vậy có 2 giao điểm.
Chọn phương án C

Câu 12. Cho hàm số $y = \left(x^2 - 2\right)\left(x^3 + 1\right)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) (C) cắt trục hoành tại 2 điểm. (B) (C) cắt trục hoành tại 5 điểm.
(C) (C) cắt trục hoành tại 4 điểm. (D) (C) cắt trục hoành tại 3 điểm.

Lời giải.
Số giao điểm của (C) với trục hoành là số nghiệm của phương trình

$$\left(x^2 - 2\right)\left(x^3 + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{2} \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Chọn phương án D

Câu 13. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d\colon y = x - 1$. Số giao điểm của d và (C) là

(A) 1. (B) 3. (C) 0. (D) 2.

Lời giải.
Xét phương trình $2x^3 - 3x^2 + 1 = x - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 2x^2 - x - 2 = 0. \quad (1) \end{array}\right.$
Mà (1) có hai nghiệm trái dấu khác 1 nên d và (C) có 3 giao điểm.
Chọn phương án B

Câu 14. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$ với trục hoành là

(A) 3. (B) 4. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$ với trục hoành là số nghiệm của phương trình:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm 2. \end{array}\right.$$

Suy ra đồ thị hàm số có bốn giao điểm với trục hoành.

Chọn phương án B

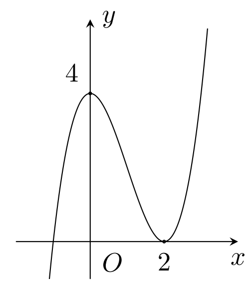
Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $4f(x) - 7 = 0$ là

(A) 2.

(B) 4.

(C) 3.

(D) 1.

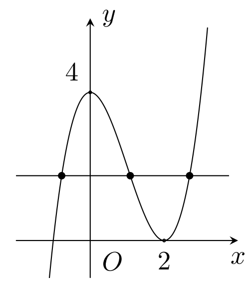


Lời giải.

Phương trình tương đương với $f(x) = \dfrac{7}{4}$.

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đường thẳng $y = \dfrac{7}{4}$ và đồ thị (C).

Số giao điểm bằng $3 \Rightarrow$ phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

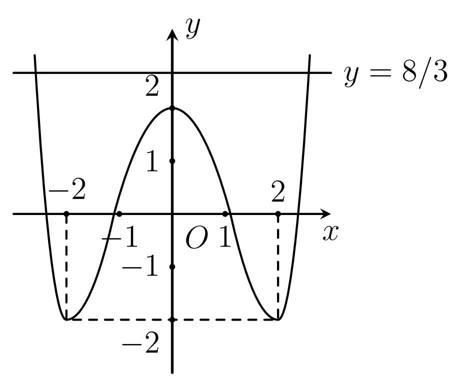


Chọn phương án C

Câu 16.

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 8 = 0$ bằng

(A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 4.



Lời giải.

Ta có $3f(x) - 8 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{8}{3}$. Số nghiệm thực của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \dfrac{8}{3}$.

Quan sát hình vẽ ta thấy, đường thẳng $y = \dfrac{8}{3}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 2 điểm phân biệt.

Vậy phương trình $3f(x) - 8 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Chọn phương án C

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2f(x) - 5 = 0$ là

A 4. **B** 0. **C** 3. **D** 2.

Lời giải.

Ta có $2f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{5}{2}$. (1)

Số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \dfrac{5}{2}$.

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có 4 nghiệm.

Chọn phương án A

Câu 18.

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 4$ là

A 2. **B** 3. **C** 4. **D** 1.

x	$-\infty$		-3		4		5		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải.

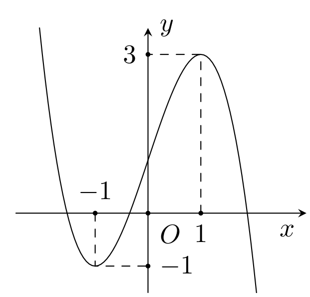
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số, suy ra phương trình $f(x) = 4$ có hai nghiệm phân biệt.

Chọn phương án A

Câu 19.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $3f(x) - 4 = 0$ là

A 1. **B** 3. **C** 0. **D** 2.



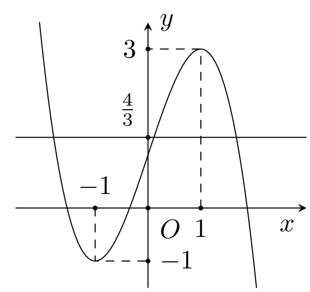
Lời giải.

Ta có

$$3f(x) - 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{4}{3}.$$

Suy ra số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \dfrac{4}{3}$.

Vậy số nghiệm của phương trình đã cho là 3.



Chọn phương án B

Câu 20.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Số nghiệm của phương trình $f(x)+3 = 0$ là

(A) 2. (B) 4. (C) 1. (D) 3.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -3$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $f(x) + 3 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn phương án (D)

B MỨC ĐỘ 2

Câu 21. Cho hai hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-1}$. Đồ thị hàm số trên cắt hai trục tọa độ tại hai điểm A, B phân biệt. Tính độ dài đoạn AB.

(A) $\sqrt{2}$. (B) 2. (C) 4. (D) $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số cắt trục Ox tại $A(-2; 0)$

Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại $B(0; -2)$

$\overrightarrow{AB} = (2; -2)$. Độ dài đoạn AB là $AB = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$.

Chọn phương án (D)

Câu 22. Tìm tọa độ giao điểm I của đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 3x$ với đường thẳng $y = -x + 2$.

(A) $I\,(2; 2)$. (B) $I\,(2; 1)$. (C) $I\,(1; 1)$. (D) $I\,(1; 2)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d: $4x^3 - 3x = -x + 2 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$.

Vậy tọa độ giao điểm $I(1; 1)$.

Chọn phương án (C)

Câu 23. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ cắt đường thẳng $y = m - 1$ tại 3 điểm phân biệt.

(A) $1 \leq m < 5$. (B) $1 < m < 5$. (C) $1 < m \leq 5$. (D) $0 < m < 4$.

Lời giải.

⋆ Đạo hàm $y' = 3x^2 - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow y = 4 \\ x = 1 \Rightarrow y = 0. \end{array}\right.$

⋆ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, theo đề, ta có $0 < m - 1 < 4 \Leftrightarrow 1 < m < 5$.
Chọn phương án B

Câu 24. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ và trục Ox bằng

A 2. **B** 1. **C** 3. **D** 4.

Lời giải.

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ và trục Ox $(y = 0)$ bằng số nghiệm của phương trình

$$x^3 - 3x + 1 = 0.$$

Phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt.
Chọn phương án C

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 + 2 - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

A $0 < m < 1$. **B** $1 < m < 2$. **C** $-2 < m < 0$. **D** $-2 < m < 2$.

Lời giải.

Ta có $x^3 - 3x^2 + 2 - m = 0 \Leftrightarrow m = x^3 - 3x^2 + 2$ (1).
Xét hàm $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x$; $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow -2 < m < 2$.
Chọn phương án D

Câu 26. Đồ thị hàm số $y = -\dfrac{x^4}{2} + x^2 + \dfrac{3}{2}$ cắt trục hoành tại mấy điểm?

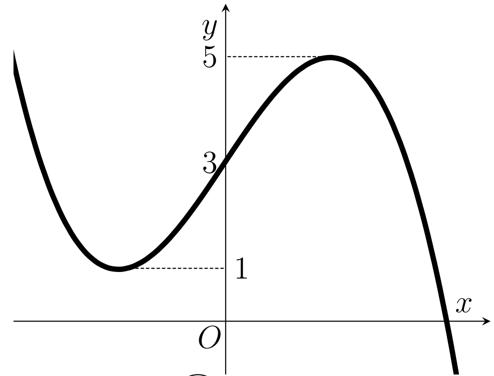
A 0. **B** 2. **C** 4. **D** 3.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm là $-\dfrac{x^4}{2} + x^2 + \dfrac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3$ hoặc $x^2 = -1$ (vô nghiệm).
$x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$. Vậy đồ thị hàm số $y = -\dfrac{x^4}{2} + x^2 + \dfrac{3}{2}$ cắt trục hoành tại hai điểm.
Chọn phương án B

Câu 27.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Phương trình $2f(x) - 5 = 0$ có bao nhiêu nghiệm âm?



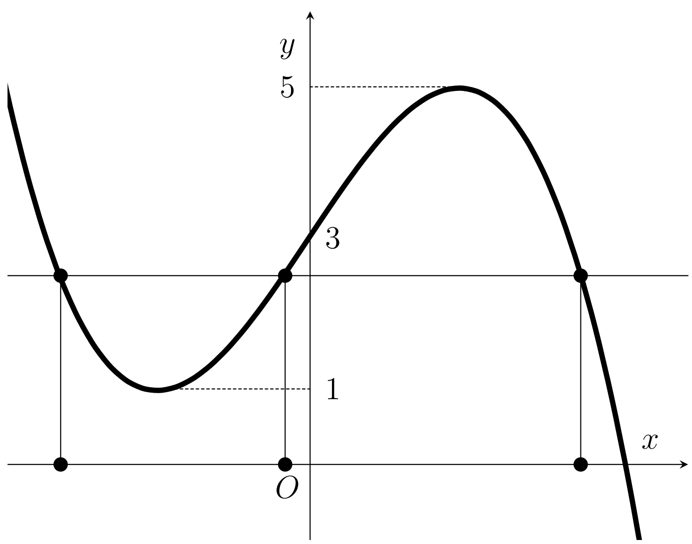
(A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Phương pháp:

Tìm giao điểm của đường thẳng $y = \dfrac{5}{2}$ với đồ thị hàm số và nhận xét tính chất nghiệm.

Cách giải:



Ta có $2f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{5}{2}$.

Nghiệm của phương trình chính là hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = \dfrac{5}{2}$ với đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Quan sát đồ thị ta thấy đường thẳng $y = \dfrac{5}{2}$ cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm phân biệt, trong đó có 2 điểm có hoành độ âm và 1 điểm có hoành độ dương.

Vậy phương trình có 2 nghiệm âm.

Chọn phương án B

Câu 28. Số giao điểm của đường cong $y = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$ và đường thẳng $y = 1 - x$ là

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 0.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường trên là

$$x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 1 - x \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Phương trình có một nghiệm nên đường cong và đường thẳng có một giao điểm.

Chọn phương án (A)

Câu 29. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ và đường thẳng $y = -2x + 1$ là

(A) 3. (B) 0. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^3 + x + 2 = -2x + 1 \Leftrightarrow x^3 + 3x + 1 = 0$.

Xét $f(x) = x^3 + 3x + 1$, ta có $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$. Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

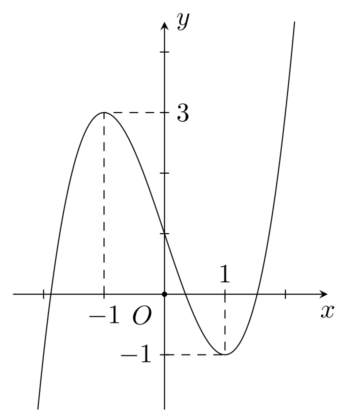
Do đó phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm.

Chọn phương án (D)

Câu 30.

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

(A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 0.



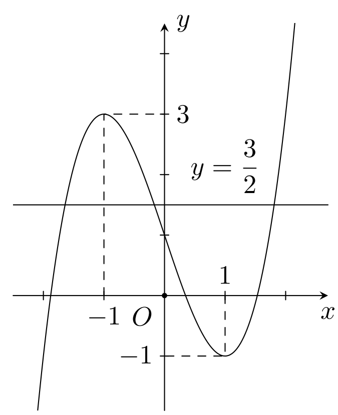
Lời giải.

Ta có $2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{3}{2} \quad (*)$.

Số nghiệm của phương trình $(*)$ bằng số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \dfrac{3}{2}$.

Dựa vào hình vẽ, hai đồ thị cắt nhau tại 3 điểm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.



Chọn phương án (A)

Câu 31. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $(d): y = x + 1$ và đường cong $(C): y = \dfrac{2x+4}{x-1}$.
Hoành độ trung điểm I của đoạn thẳng MN bằng?

(A) 1. (B) 2. (C) $\dfrac{5}{2}$. (D) $-\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$x+1=\dfrac{2x+4}{x-1} \Leftrightarrow x^2-2x-5x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{6} \\ x=1-\sqrt{6} \end{array}\right.$.

Suy ra hoành độ trung điểm của đoạn MN là $x_I=\dfrac{1+\sqrt{6}+1-\sqrt{6}}{2}=1$.

Chọn phương án A

Câu 32. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Với giá trị nào của m để đường thẳng $y=-x+m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt?

A. $m<-8$. B. $-8<m<8$. C. $\forall m \in \mathbb{R}$. D. $m>8$.

Lời giải.

ĐKXĐ : $x \neq -1$

Xét phương trình có hoành độ giao điểm $\dfrac{x-1}{x+1}=-x+m \qquad (*)$

Với $x \neq -1$ thì $(*) \Leftrightarrow x-1=(x+1)(-x+m)$

$x-1=-x^2+(m-1)x+m \Leftrightarrow x^2-(m-2)x-m-1=0 \qquad (**)$

Đường thẳng $y=-x+m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(**)$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=(m-2)^2+4(m+1)>0 \\ (-1)^2-(m-2)(-1)-m-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+8>0 \\ -2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m \in \mathbb{R}$.

Vậy $m \in \mathbb{R}$.

Chọn phương án C

Câu 33. Cho hàm số $y=2x^3-3x^2+1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=x-1$. Số giao điểm của (C) và d là

A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$2x^3-3x^2+1=x-1 \Leftrightarrow (x-1)\left(2x^2-x-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{4} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{4} \end{array}\right.$$

Vậy số giao điểm là 3.

Chọn phương án B

Câu 34. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ với đường thẳng $y=2x+3$ là

A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\begin{aligned}&\frac{2x+1}{x-1}=2x+3\\&\Leftrightarrow 2x+1=(2x+3)(x-1)\,(\text{do } x=1 \text{ không là nghiệm của phương trình})\\&\Leftrightarrow 2x^2-x-4=0\\&\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}x&=\frac{1+\sqrt{33}}{4}\\x&=\frac{1-\sqrt{33}}{4}.\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Vậy đường thẳng $y=2x+3$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm.

Chọn phương án A

Câu 35. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^2\left|x^2-4\right|$ với đường thẳng $y=3$ là

A 8. **B** 2 . **C** 4. **D** 6 .

Lời giải.

Phương tình hoành độ giao điểm $x^2\left|x^2-4\right|=3\,(1)$

nếu $x^2-4\geq 0\Leftrightarrow x\leq -2\cup 2\leq x$.

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^2(x^2-4)=3\Leftrightarrow x^4-4x^2-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x^2=2+\sqrt{7}\\&x^2=2-\sqrt{7}\,(\text{ loại })\end{aligned}\right.\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2+\sqrt{7}}$.

nếu $x^2-4<0\Leftrightarrow -2<x<2$.

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^2(x^2-4)=-3\Leftrightarrow x^4-4x^2+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x^2=3\\&x^2=1\end{aligned}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x=\pm\sqrt{3}\\&x=\pm 1\end{aligned}\right.$.

Vậy phương trình có 6 nghiệm.

Chọn phương án D

Câu 36. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\sqrt{3-x}+\sqrt{x+1}=m$ có hai nghiệm phân biệt?

A 1. **B** vô số. **C** 0. **D** 2.

Lời giải.

Ta xét hàm số $y=\sqrt{3-x}+\sqrt{x+1}$ xác định trên đoạn $[-1;3]$. Ta có $y'=\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}\sqrt{3-x}}=0$ $\Leftrightarrow x=2$. ta có bảng biến thiên:

x	-1		2		3
y'		$+$	0	$-$	
y	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$1+\sqrt{3}$	$\searrow$	2

Từ đó suy ra $2\leq m\leq 1+\sqrt{3}$ nên $m=2$.

Chọn phương án A

Câu 37. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+5}$ và đường thẳng $y=x-1$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Gọi $I(a;b)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB. Tính giá trị của biểu thức $T=2a^2+b$.

(A) $T=9$. (B) $T=5$. (C) $T=0$. (D) $T=2$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\begin{aligned}\frac{2x-1}{x+5}=x-1 &\Leftrightarrow 2x-1=(x-1)(x+5)\\ &\Leftrightarrow 2x-1=x^2+4x-5\\ &\Leftrightarrow x^2+2x-4=0 \qquad (*)\end{aligned}$$

Gọi $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, với x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình $(*)$.

Tọa độ trung điểm $I(a;b)$ của đoạn AB là: $\begin{cases}a=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{S}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1\\ b=a-1=-2\end{cases}$.

Do đó: $T=2a^2+b=2(-1)^2-2=0$.

Chọn phương án (C)

Câu 38. Tìm hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-4}{3x+1}$ và đường thẳng $y=x-2$.

(A) $x=\dfrac{3}{2}$; $x=1$. (B) $x=2$; $x=\dfrac{1}{2}$. (C) $x=2$; $x=\dfrac{3}{2}$. (D) $x=3$; $x=\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{x^2-4}{3x+1}=x-2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-4=3x^2-6x+x-2\\ 3x+1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-5x+2=0\\ x\neq -\dfrac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right..$$

Chọn phương án (B)

Câu 39. Biết rằng đường thẳng $d: y=3x+m$ (với m là số thực) tiếp xúc với đồ thị hàm số $(C): y=x^2-5x-8$. Tìm tọa độ tiếp điểm của d và (C).

(A) $(4;-12)$. (B) $(-4;28)$. (C) $(1;-12)$. (D) $(-1;-2)$.

Lời giải.

$y=3x+m \Rightarrow y'=3$.

$y=x^2-5x-8 \Rightarrow y'=2x-5$.

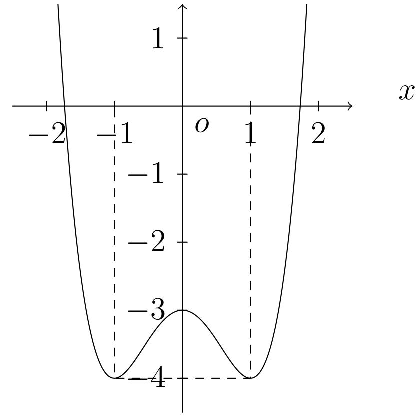
d tiếp xúc $(C) \Leftrightarrow \begin{cases}2x-5=3\\ x^2-5x-8=3x+m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\ m=-24\end{cases}$.

Vậy tọa độ tiếp điểm là $(4;-12)$.

Chọn phương án (A)

Câu 40.

Cho đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ có đồ thị như hình bên. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $x^4 - 2x^2 - 3 = 2m - 4$ có hai nghiệm phân biệt?



Ⓐ $m \le \dfrac{1}{2}$. Ⓑ $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$. Ⓒ $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m > \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$. Ⓓ $0 < m < \dfrac{1}{2}$.

C MỨC ĐỘ 3

Câu 41. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x+1}$. Xác định m để đường thẳng $y = mx + m - 1$ luôn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh của đồ thị.

Ⓐ $m < 1$. Ⓑ $m > 0$. Ⓒ $m < 0$. Ⓓ $m = 0$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x+2}{2x+1} = mx + m - 1 \Rightarrow 2mx^2 + 3(m-1)x + m - 3 = 0$ (1).

Để đường thẳng luôn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh của đồ thị thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < -\dfrac{1}{2} < x_2$ (2).

(1) có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \neq 0 \\ m^2 + 6m + 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -3. \end{cases}$

Theo định lý Vi-et, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{3(m-1)}{2m} \\ x_1x_2 = \dfrac{m-3}{2m}. \end{cases}$

Do đó

$$\begin{aligned}
(2) &\Leftrightarrow (2x_1+1)(2x_2+1) < 0 \\
&\Leftrightarrow 4x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 1 < 0 \\
&\Leftrightarrow 4 \cdot \frac{m-3}{2m} + 2 \cdot \left(-\frac{3(m-1)}{2m}\right) + 1 < 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{4m - 12 - 6m + 6 + 2m}{2m} < 0 \\
&\Leftrightarrow -\frac{6}{2m} < 0 \\
&\Leftrightarrow m > 0.
\end{aligned}$$

Chọn phương án B

Câu 42. Cho hàm số $y = x^3 + x^2 + (m+1)x + 1$ và $y = 2x + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-10; 10)$ để hai đồ thị của hai hàm số trên cắt nhau tại ba điểm phân biệt.

Ⓐ 9. Ⓑ 10. Ⓒ 1. Ⓓ 11.

Lời giải.

Giả sử hàm số $y = x^3 + x^2 + (m+1)x + 1$ có đồ thị (C) và $d : y = 2x + 1$
Hoành độ giao điểm của (C) và d là nghiệm PT: $x^3 + x^2 + (m+1)x + 1 = 2x + 1$ (1)
$\Leftrightarrow x^3 + x^2 + (m-1)x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + x + m - 1 = 0 (2) \end{array}\right.$$

Đặt $f(x) = x^2 + x + m - 1$
d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt
$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt $x \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 4m > 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{5}{4} \\ m \neq 1 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $m \in (-10; 10)$ ta được $m \in \left(-10; \dfrac{5}{4}\right) \setminus \{1\}$
Do m nguyên nên có 10 giá trị thỏa mãn.
Chọn phương án B

Câu 43. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3(m+3)x^2 + 18mx - 8$ tiếp xúc với trục hoành?

A 2. B 1. C 3. D 0.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 2x^3 - 3(m+3)x^2 + 18mx - 8 = 0 \ (1) \\ 6x^2 - 6(m+3)x + 18m = 0 \ (2). \end{cases}$$

Từ (2) ta có: $x^2 - (m+3)x + 3m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = m. \end{array}\right.$

Với $x = 3$ ta thay vào (1) ta có $54 - 27(m+3) + 54m - 8 = 0 \Leftrightarrow 27m = 35 \Leftrightarrow m = \dfrac{35}{27}$.
Với $x = m$ ta thay vào (1) ta có $2m^3 - 3m^2(m+3) + 18m^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow m^3 - 9m^2 + 8 = 0$

$$\Leftrightarrow (m-1)\left(m^2 - 8m - 8\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 4 - 2\sqrt{6} \\ m = 4 + 2\sqrt{6}. \end{array}\right.$$

Vậy chỉ có một giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn điều kiện đề bài là $m = 1$.
Chọn phương án B

Câu 44. Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm của tham số m sao cho hàm số $y = -x^4 + (2m-3)x^2 + m$ nghịch biến trên đoạn $[1; 2]$?

A 1. B 2. C 4. D Vô số.

Lời giải.

Ta có $y' = x[-x^2 + 2(2m-3)]$. Do đó, hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn $[1; 2]$ khi và chỉ khi

$$-x^2 + 2(2m-3) \leq 0, \ \forall x \in [1; 2].$$

Trường hợp 1: $\Delta' = 2(2m-3) < 0$. Chỉ có giá trị $m = 1$ thỏa mãn. Trường hợp 2: $\begin{cases} \Delta' = 2(2m-3) \geq 0 \\ -1 + 2(2m-3) < 0 \end{cases}$.

Không có giá trị m nguyên dương thỏa mãn.
Vậy có duy nhất 1 giá trị $m=1$ thỏa yêu cầu.
Chọn phương án A

Câu 45. Cho hàm số $y=mx^3-x^2-2x+8m$ có đồ thị (C_m). Tìm tất cả giá trị tham số m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

A $m\in\left[-\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right]$. **B** $m\in\left(-\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right)$.
C $m\in\left(-\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right)\setminus\{0\}$. **D** $m\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\setminus\{0\}$.

Lời giải.
Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với trục hoành là
$mx^3-x^2-2x+8m=0\Leftrightarrow(x+2)[mx^2-(2m+1)x+4m]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+2=0\\mx^2-(2m+1)x+4m=0\quad(1)\end{array}\right.$
Để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt thì (1) có hai nghiệm phân biệt khác -2.
$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq0\\\Delta=-12m^2+4m+1>0\\4m+(2m+1)2+4m\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq0\\-\frac{1}{6}<m<\frac{1}{2}\end{cases}$
Chọn phương án C

Câu 46. Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho đường thẳng $y=x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B và $AB\leq4$?

A 1. **B** 6. **C** 2. **D** 7.

Lời giải.
Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{2x-1}{x+1}=x+m\Leftrightarrow2x-1=(x+1)(x+m)\Leftrightarrow x^2+(m-1)x+m+1=0\ (1).$$

(Ta có $x=-1$ không là nghiệm phương trình (1).)
Đường thẳng $y=x+m$ cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\neq0\\\Delta=(m-1)^2-4(m+1)=m^2-6m-3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>3+2\sqrt{3}\\m<3-2\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>3+2\sqrt{3}\\m<3-2\sqrt{3}\end{array}\right.(*).$$

Gọi tọa độ giao điểm $A(x_1;x_1+m),B(x_2;x_2+m)$ với x_1,x_2 là nghiệm của (1).
Khi đó $AB=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\leq4\Leftrightarrow\sqrt{m^2-6m-3}\leq4\Leftrightarrow m^2-6m-19\leq0\Leftrightarrow3-2\sqrt{7}\leq m\leq3+2\sqrt{7}$.
Kết hợp với điều kiện $(*)$, ta được $\left[\begin{array}{l}3+2\sqrt{3}<m<3+2\sqrt{7}\\3-2\sqrt{7}\leq m\leq3-2\sqrt{3}.\end{array}\right.$
Mà m nguyên dương nên $m=7\vee m=8$.
Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn phương án A

Câu 47. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d_m\colon y = mx+1$ cắt đồ thị $(C)\colon y = x^3 - x^2 + 1$ tại 3 điểm A, $B(0;1)$ và C phân biệt sao cho tam giác AOC vuông tại O.

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của d_m và (C) là:

$$x^3 - x^2 + 1 = mx + 1 \Leftrightarrow x(x^2 - x - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - x - m = 0. \end{array}\right.$$

Đường thẳng d_m cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt A, $B(0;1)$ và C.

$\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2 - x - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 + 4m > 0 \\ -m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{4} \\ m \neq 0. \end{cases}$

Khi đó: $A(x_1; mx_1+1)$ và $C(x_2; mx_2+1)$ Theo Vi-et: x_1 và x_2 là nghiệm phương trình $x^2 - x - m = 0$ nên ta có : $x_1 + x_2 = 1$ và $x - 1x_2 = -m$.

$\triangle AOC$ vuông tại O.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x_1x_2 + (mx_1 + 1)(mx_2 + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (m^2 + 1)x_1x_2 + m(x_1 + x_2) + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (m^2 + 1)(-m) + m + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -m^3 + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad m = 1.\text{(Thỏa mãn điều kiện)}
\end{aligned}$$

Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Chọn phương án (B)

Câu 48. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt.

(A) $m \in (-\infty; -4)$. (B) $m \in (-4; 0)$.
(C) $m \in (0; +\infty)$. (D) $m \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2$. Ta có

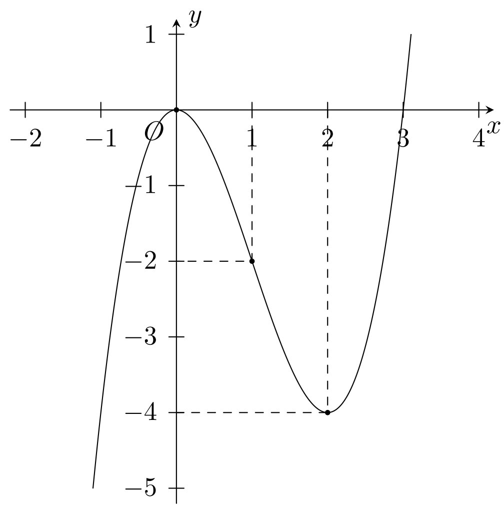
$f'(x) = 3x^2 - 6x$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$



Đồ thị hàm số $y = m$ là đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng m.

Dựa vào đồ thị ta thấy, hai đồ thị cắt nhau tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi $-4 < m < 0$.

Chọn phương án B

Câu 49. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d : y = x + m$. Giá trị của tham số m để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = \sqrt{10}$ là

A $m = -1$ hoặc $m = 6$.

B $0 \le m \le 5$.

C $m = 0$ hoặc $m = 6$.

D $m = 0$ hoặc $m = 7$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d là:

$$\frac{2x+1}{x+1} = x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 + (m-1)x + m - 1 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Khi đó d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - 4(m-1) > 0 \\ (-1)^2 - (m-1) + m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 5 \end{array}\right. (*)$

Ta có:

$A(x_1; x_1 + m), B(x_2; x_2 + m) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; x_2 - x_1) \Rightarrow AB = \sqrt{2(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{2}\,|x_2 - x_1|$

Và $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - m \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases}$. Từ đây ta có:

$AB = \sqrt{10} \Leftrightarrow |x_2 - x_1| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2 = 5$

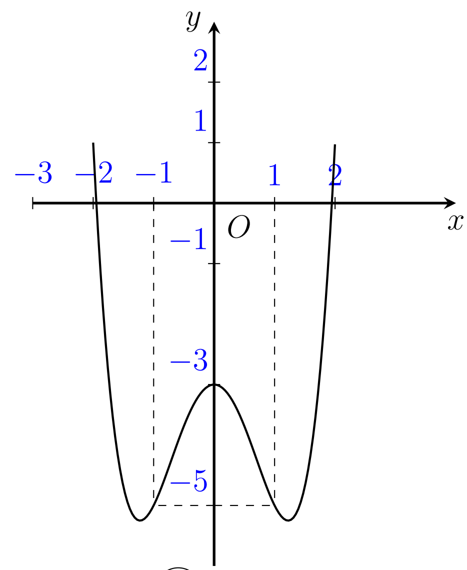
$\Leftrightarrow (1-m)^2 - 4(m-1) = 5 \Leftrightarrow m^2 - 6m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 6 \end{array}\right.$ (thỏa mãn) $(*)$.

Vậy $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 6 \end{array}\right.$

Chọn phương án C

Câu 50.

Đồ thị sau đây là của hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 3$. Với giá trị nào của m thì phương trình $x^4 - 3x^2 - 3 = m$ có 3 nghiệm phân biệt



(A) $m = -4$. (B) $m = -3$. (C) $m = 0$. (D) $m = -5$.

Lời giải.

Phương pháp

Số nghiệm của phương trình đã cho là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 3$ và đường thẳng $y = m$. Dựa vào đồ thị hàm số để xác định m thỏa mãn bài toán.

Cách giải:

Số nghiệm của phương trình đã cho là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 3$ và đường thẳng $y = m$. Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 3$ tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m = -3$.

Chọn phương án B

Câu 51. Đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 2x - 1$ và đồ thị hàm số $y = 3x^2 - 2x - 1$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

(A) 0. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

Phương pháp

Số nghiệm của hai đồ thị hàm số là số giao điểm của phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị.

Giải phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số.

Cách giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là:

$-x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 3x^2 - 2x - 1$

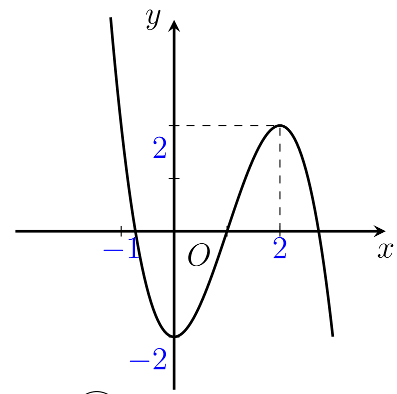
$\Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Hai đồ thị hàm số có 3 điểm chung.

Chọn phương án C

Câu 52.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình bên. Phương trình $f(x) = 1$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt nhỏ hơn 2?



A 0. B 1. C 2. D 3.

Lời giải.

Phương pháp

Số nghiệm của phương trình $f(x) = 1$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 1$.

Dựa vào đồ thị hàm số để biện luận số nghiệm của phương trình.

Cách giải:

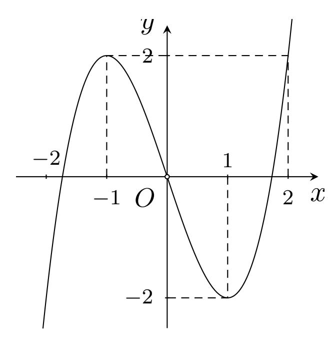
Số nghiệm của phương trình $f(x) = 1$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 1$.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt trong đó có hai điểm có hoành độ nhỏ hơn 2.

Chọn phương án C

Câu 53.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right) = m$ có nghiệm $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$.



A 5. B 3.

C 2. D 4.

Lời giải.

Ta có với $x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right) \Rightarrow \cos x \in (-1;0] \Rightarrow f(\cos x) \in (0;2] \Rightarrow \sqrt{2f(\cos x]} \in [0;2)$
khi đó $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right) \in [-2;2)$.
Do vậy phương trình đã cho có nghiệm $x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right)$ khi và chỉ khi $m \in [-2;2)$.
Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.
Chọn phương án D

Câu 54. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = 2x^3 - (2+m)x + m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

A $m > -\frac{1}{2}$. **B** $m > -\frac{1}{2}, m \neq 4$. **C** $m > \frac{1}{2}$. **D** $m \leq \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$\begin{aligned} & 2x^3 - (2+m)x + m = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)\left(2x^2 + 2x - m\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 2x^2 + 2x - m = 0 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ 2x^2 + 2x - m = 0. \quad (1) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Đặt $f(x) = 2x^2 + 2x - m = 0$.
Để đồ thị của hàm số $y = 2x^3 - (2+m)x + m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1.

Tức là $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2m > 0 \\ 4 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{2} \\ m \neq 4. \end{cases}$

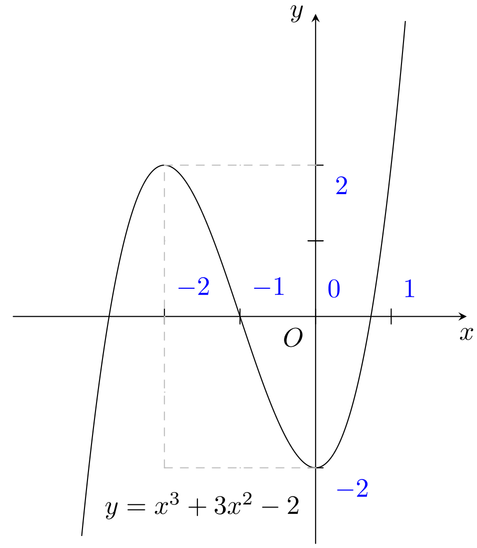
Chọn phương án B

Câu 55. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 + 3x^2 - 2 = m$ có hai nghiệm phân biệt.

A $m \in (-\infty;-2]$. **B** $m \notin [-2;2]$. **C** $m \in [2;+\infty)$. **D** $m \in \{-2;2\}$.

Lời giải.

Phương pháp:
+) Số nghiệm của phương trình $f(x) = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m$.
+) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$ sau đó suy ra giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Cách giải:
Số nghiệm của phương trình $x^3 + 3x^2 - 2 = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ và đường thẳng $y = m$.
Ta có: $y' = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$. Ta có đồ thị hàm số như hình vẽ:



Quan sát đồ thị hàm số ta có: đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -2 \end{array}\right.$.
Chú ý khi giải: Để làm bài nhanh hơn, các em có thể vẽ BTT thay cho đồ thị hàm số.
Chọn phương án D

Câu 56. Đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiếp xúc với trục hoành tại gốc tọa độ và cắt đường thẳng $x = 1$ tại điểm có tung độ bằng 3 khi

A $a = b = 0,\ c = 2$. B $a = c = 0,\ b = 2$. C $a = 2,\ b = c = 0$. D $a = 2,\ b = 1,\ c = 0$.

Lời giải.
Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.
Gọi (C) là đồ thị hàm số $f(x)$. Vì $M(1;3) \in (C)$ nên $3 = 1 + a + b + c \Leftrightarrow a + b + c = 2$ (1).
Vì (C) tiếp xúc với Ox tại O nên hệ $\begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$ có nghiệm $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 0. \end{cases}$
Từ (1) suy ra $a = 2$.
Chọn phương án C

Câu 57. Cho hàm số $y = x^3 - 5x^2$ có đồ thị (C). Hỏi có bao nhiêu điểm trên đường thẳng $d : y = 2x - 6$ sao cho từ đó kẻ được đúng hai tiếp tuyến đến (C)?

A 2 điểm. B 3 điểm. C 4 điểm. D vô số điểm.

Lời giải.
Cách 1: Gọi $M(a; 2a-6) \in d$. Phương trình đường thẳng d đi qua$M(a; 2a-6) \in d$ có hệ số góc k là: $y = k(x-a) + 2a - 6$ d tiếp xúc với (C) khi hệ $\begin{cases} x^3 - 5x^2 = k(x-a) + 2a - 6 \\ 3x^2 - 10x = k \end{cases}$ có nghiệm Theo yêu cầu bài toán thì $x^3 - 5x^2 = \left(3x^2 - 10x\right)(x-a) + 2a - 6$ có hai nghiệm phân biệt. Xét hàm số $f(x) = \left(3x^2 - 10x\right)(x-a) + 2a - 6 - x^3 + 5x^2 = 2x^3 - (3a+5)x^2 + 10ax + 2a - 6$ Có $f'(x) = 6x^2 - 2(3a+5)x + 10a = (6x-10)(x-a)$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \Rightarrow f(a) = -a^3 + 9a^2 + 2a - 6 \\ x = \dfrac{5}{3} \Rightarrow f\left(\dfrac{5}{3}\right) = \dfrac{31}{3}a + \dfrac{71}{9} \end{array}\right.$ $f(x) = 0$ có hai

nghiệm phân biệt khi: $\begin{cases} a \neq \dfrac{5}{3} \\ f(a).f\left(\dfrac{5}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq \dfrac{5}{3} \\ \left(-a^3+9a^2-2a-6\right).\left(\dfrac{31}{3}a+\dfrac{71}{9}\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{71}{31} \\ a=-1 \\ a=4\pm\sqrt{22} \end{cases}$

Đáp án có 4 điểm thỏa mãn bài toán. Cách 2: Gọi $M(a;2a-6)\in d$. Phương trình đường thẳng d đi qua$M(a;2a-6)\in d$ có hệ số góc k là: $y=k(x-a)+2a-6$ d tiếp xúc với (C) khi hệ $\begin{cases} x^3-5x^2=k(x-a)+2a-6 \\ 3x^2-10x=k \end{cases}$ có nghiệm Theo yêu cầu bài toán thì $x^3-5x^2=\left(3x^2-10x\right)(x-a)+2a-6$ có hai nghiệm phân biệt. Đến đây ta có thể cô lập a, xét hàm số. Chú ý tính cực trị bằng công thức: $y=u'/v'$

Chọn phương án C

Câu 58. Tìm m để đường thẳng $y=2x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ tại hai điểm M,N sao cho độ dài MN nhỏ nhất

A 3. B -1. C 2. D 1.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị hàm số là

$2x+m=\dfrac{x+3}{x+1}\,(x\neq 1)\Leftrightarrow 2x^2+(m+1)x+m-3=0 \quad (*)$

Ta có: $\Delta=(m+1)^2-8(m-3)=m^2-6m+25=(m-3)^2+16>0,\forall m$.

$\Rightarrow$ (*) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 với mọi m.

Áp dụng hệ thức Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{m+1}{2} \\ x_1x_2=\dfrac{m-3}{2} \end{cases}$.

Gọi $M(x_1;2x_1+m),N(x_2;2x_2+m)$ là hai giao điểm của 2 đồ thị hàm số.

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} MN^2&=(x_2-x_1)^2+(2x_2-2x_1)^2=5(x_2-x_1)^2 \\ &=5\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]=5\left[\dfrac{(m+1)^2}{4}-4\cdot\dfrac{m-3}{2}\right] \\ &=\dfrac{5}{4}\left(m^2+2m+1-8m+24\right)=\dfrac{5}{4}\left(m^2-6m+25\right) \\ &=\dfrac{5}{4}(m-3)^2+20\geq 20,\forall m. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m-3=0\Leftrightarrow m=3$.

Chọn phương án A

Câu 59. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d\colon y=-2x+m-1$ (m là tham số thực). Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của d và (C). Tính tích $k_1\cdot k_2$.

A $k_1\cdot k_2=3$. B $k_1\cdot k_2=4$. C $k_1\cdot k_2=\dfrac{1}{4}$. D $k_1\cdot k_2=2$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{1}{(x+2)^2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là $\dfrac{x+1}{x+2} = -2x + m - 1$ với $x \neq 2$. Phương trình này tương đương $2x^2 - (m-6)x - 2m + 3 = 0$.

Ta có $\Delta = m^2 + 4m + 12 > 0\, \forall m$. Suy ra d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2.

Hệ số góc của các tiếp tuyến tại các giao điểm lần lượt là $k_1 = \dfrac{1}{(x_1+2)^2}$ và $k_2 = \dfrac{1}{(x_2+2)^2}$.

Theo Vi-et ta có $x_1 + x_2 = \dfrac{m-6}{2}$ và $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{-2m+3}{2}$.

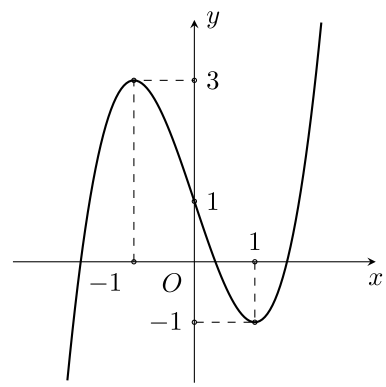
Do đó $k_1 \cdot k_2 = \dfrac{1}{[(x_1+2)(x_2+2)]^2} = \dfrac{1}{\left[\dfrac{-2m+3}{2} + 2\dfrac{m-6}{2} + 4\right]^2} = 4$.

Chọn phương án B

Câu 60.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sin x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ là

A $[-1;3)$. **B** $(-1;3)$. **C** $(-1;3)$. **D** $[-1;1)$.

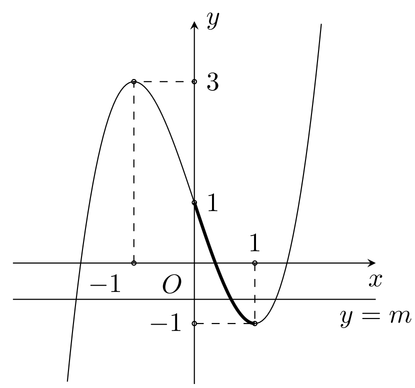


Lời giải.

Đặt $t = \sin x$. Với $x \in (0;\pi)$ thì $t \in (0;1]$.

Do đó phương trình $f(\sin x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $(0;1]$.

Quan sát đồ thị ta suy ra điều kiện của tham số m là $m \in [-1;1)$.



Chọn phương án D

D MỨC ĐỘ 4

Câu 61. Cho hàm số $y = \dfrac{x}{1-x}(C)$. Tìm m để đường thẳng $d: y = mx - m - 1$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt M, N sao cho $AM^2 + AN^2$ đạt giá trị nhỏ nhất với $A(-1;1)$.

A $m = 2$. **B** $m = 0$. **C** $m = 1$. **D** $m = -1$.

Lời giải.

Phương pháp:
Xét phương trình hoành độ giao điểm, áp dụng định lí Vi-ét.
Cách giải:
Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$\frac{x}{1-x} = mx - m - 1, (x \neq 1) \Leftrightarrow x = mx - m - 1 - mx^2 + mx + x$$
$$\Leftrightarrow mx^2 - 2mx + m + 1 = 0 \qquad (1)$$

Để (C) cắt d tại 2 điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1
$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ m \cdot 1^2 - 2m.1 + m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - m(m+1) > 0 \\ 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$

Khi đó, giả sử x_1, x_2 là nghiệm của (1), áp dụng định lsy Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1x_2 = \dfrac{m+1}{m}. \end{cases}$

Tọa độ giao điểm là: $A(x_1; mx_1 - m - 1), B(x_2; mx_2 - m - 1) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} = (x_1 + 1; mx_1 - m - 2) \\ \overrightarrow{AN} = (x_2 + 1; mx_2 - m - 2). \end{cases}$

Gọi I là trung điểm của $MN \Rightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ y_I = \dfrac{mx_1 - m - 1 + mx_2 - m - 1}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow I(1; -1).$

Ta có:

$$\begin{aligned} AM^2 + AN^2 &= \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IN}\right)^2 \\ &= 2AI^2 + 2\overrightarrow{AI}.\left(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN}\right) + IM^2 + IN^2 \\ &= 2AI^2 + \frac{1}{2}MN^2. \end{aligned}$$

Do vậy, $(AM^2 + AN^2)_{\min}$ khi và chỉ khi $MN_{\min}$.
Ta có: $\overrightarrow{MN} = (x_2 - x_1; mx_2 - mx_1)$, suy ra

$$\begin{aligned} \sqrt{(1+m^2)(x_2 - x_1)^2} &= \sqrt{(1+m)^2\left((x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2\right)} \\ &= \sqrt{(1+m^2)\left(4 - \frac{4(m+1)}{n}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{-4(1+m^2)}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{4}{(-m)} + (-4m)} \\ &\geq \sqrt{2.\sqrt{\frac{4}{-m}.(-4m)}} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Suy ra $MN_{\min} = 2\sqrt{2}$ khi và chỉ khi $\dfrac{4}{-m} = -4m \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \text{ (ktm)}. \\ m = -1 \text{ (tm)}. \end{array}\right.$

Vậy để $(AM^2 + AN^2)_{\min}$ thì $m = -1$.
Chọn phương án D

Câu 62. Cho hàm số $y = f(x) = 2^{2018}x^3 + 3.2^{2018}x^2 - 2018$ có đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3. Tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{1}{f'(x_1)} + \dfrac{1}{f'(x_2)} + \dfrac{1}{f'(x_3)}$.

A $P = 0$. **B** $P = 2^{2018}$. **C** $P = -2018$. **D** $P = 3.2^{2018} - 1$.

Lời giải.

Phương pháp:

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Cách giải:

Đồ thị hàm số $y = f(x) = 2^{2018}x^3 + 3.2^{2018}x^2 - 2018$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3.

$\Rightarrow f(x) = 2^{2018}(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

$f'(x) = 2^{2018}[(x - x_2)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_2)]$.

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(x_1) = 2^{2018}(x - x_2)(x - x_3) \\ f'(x_2) = 2^{2018}(x - x_1)(x - x_3) \\ f'(x_3) = 2^{2018}(x - x_1)(x - x_2). \end{cases}$$

Ta có $P = \dfrac{1}{f'(x_1)} + \dfrac{1}{f'(x_2)} + \dfrac{1}{f'(x_3)}$.

$$= \frac{1}{2^{2018}}\left(\frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \frac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}\right).$$

$$= \frac{1}{2^{2018}} \cdot \frac{-(x_2 - x_3) - (x_3 - x_1) - (x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)} = \frac{1}{2^{2018}.} \cdot \frac{0}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)} = 0.$$

Vậy $P = 0$.

Chọn phương án A

Câu 63. Cho hàm số $y = x^4 - (3m + 4)x^2 + m^2$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

A $\begin{cases} m > -\dfrac{4}{5} \\ m \neq 0 \end{cases}$. **B** $m > 0$. **C** $m = 12$. **D** $\left[\begin{array}{l} m = 12 \\ m = -\dfrac{12}{19} \end{array}\right.$.

Lời giải.

Phương pháp:

Ba số a, b, c lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi $a + c = 2b$.

Cách giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với Ox: $x^4 - (3m + 4)x^2 + m^2 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2 (t \geq 0)$, phương trình (1) trở thành $t^2 - (3m + 4)t + m^2 = 0$ (2)

Để (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt thì (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S = 3m + 4 > 0 \\ P = m^2 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m + 4)^2 - 4m^2 > 0 \\ m > -\frac{4}{3} \\ m \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m^2 + 24m + 16 > 0 \\ m > -\frac{4}{3} \\ m \neq 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > -\dfrac{4}{5} \\ m < -4 \end{array}\right. \\ m > -\dfrac{4}{3} \\ m \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{4}{5} \\ m \neq 0. \end{cases}$$

Khi đó, phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt $t_1, t_2 (t_1 < t_2)$, dẫn tới (1) có 4 nghiệm phân biệt sắp xếp tăng dần như sau: $-\sqrt{t_2}, -\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}$.

Để dãy số trên là dãy cấp số cộng thì $\begin{cases} -\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1} = -2\sqrt{t_1} \\ -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = 2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow 3\sqrt{t_1} = \sqrt{t_2} \Leftrightarrow 9t_1 = t_2$.

Theo hệ thức Vi – ét ta có:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 3m + 4 \\ t_1 t_2 = m^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 9t_1 = 3m + 4 \\ t_1 . 9t_2 = m^2. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{3m+4}{10} \\ t_1 = \dfrac{|m|}{3} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{3m+4}{10} = \dfrac{|m|}{3}. \quad (3)$$

+) Với $m > 0$: (3) $\Leftrightarrow 9m + 12 = 10m \Leftrightarrow m = 12$ (tm).

+) Với $m < 0$: (3) $\Leftrightarrow 9m + 12 = -10m \Leftrightarrow m = -\dfrac{12}{19}$ (tm).

Vậy $m = 12$ hoặc $m = -\dfrac{12}{19}$.

Chọn phương án D

Câu 64. Cho phương trình: $\sin^3 x + 2\sin x + 3 = \left(2\cos^3 x + m\right)\sqrt{2\cos^3 x + m - 2} + 2\cos^3 x + \cos^2 x + m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có đúng 1 nghiệm $x \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right)$?

A 2. B 1. C 3. D 4.

Lời giải.

Ta có: $\sin^3 x + \sin^2 x + 2\sin x = \left(\sqrt{2\cos^3 x + m - 2}\right)^3 + \left(2\cos^3 x + m - 2\right) + 2\sqrt{2\cos^3 x + m - 2}$ (1).

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + 2t$ có $f'(t) = 6t^2 + 2t + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bởi vậy: (1) $\Leftrightarrow f(\sin x) = f\left(\sqrt{2\cos^3 x + m - 2}\right) \Leftrightarrow \sin x = \sqrt{2\cos^3 x + m - 2}$ (2).

Với $x \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right)$ thì (2)$\Leftrightarrow \sin^2 x = 2\cos^3 x + m - 2 \Leftrightarrow -2\cos^3 x - \cos^2 x + 3 = m$ (3).

Đặt $t = \cos x$, phương trình (3) trở thành $-2t^3 - t^2 - 1 = m$ (4).

Ta thấy, với mỗi $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$ thì phương trình $\cos x = t$ cho ta một nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$.

Xét hàm số $g(t) = -2t^3 - t^2 + 3$ với $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Ta có $g'(t) = -6t^2 - 2t, g'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

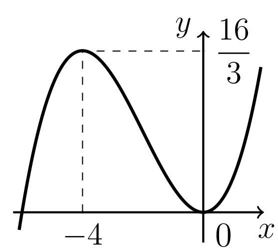
x	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		0		1
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	3	$\searrow$	$\frac{80}{27}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

Do đó, để phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$ điều kiện cần và đủ là phương trình (4) có đúng một nghiệm $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m \in \left[0; \frac{80}{27}\right] \end{array}\right. \Rightarrow m \in \{3; 2; 1; 0\}$ (Do m nguyên).

Chọn phương án D

Câu 65.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|\dfrac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right|\right) = f(m^2 + 4m + 4)$ có nghiệm?



A 4. **B** 5. **C** Vô số. **D** 3.

Lời giải.

Vì $-1 \le \sin x \le 1$; $-1 \le \cos x \le 1$ nên $2\cos x - \sin x > -3 \Rightarrow 2\cos x - \sin x + 4 > 0$.

Đặt $\dfrac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4} = t \Leftrightarrow (2t+1)\cos x - (t+3)\sin x = -4t - 1$.

Phương trình trên có nghiệm khi

$(2t+1)^2 + (t+3)^2 \ge (-4t-1)^2 \Leftrightarrow 11t^2 - 2t - 9 \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{9}{11} \le t \le 1 \Rightarrow 0 \le |t| \le 1$.

Từ đồ thị hàm số ta thấy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; 1)$, nên phương trình $f(x) = f(|t|)$ với $t \in [0; 1]$ có nghiệm duy nhất khi $x = |t| \Rightarrow x \ge 0$.

Do đó phương trình $f\left(\left|\dfrac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right|\right) = f(m^2 + 4m + 4)$ có nghiệm

$\Leftrightarrow |t| = m^2 + 4m + 4$ có nghiệm với $0 \le |t| \le 1$

$\Leftrightarrow 0 \le m^2 + 4m + 4 \le 1 \Leftrightarrow -3 \le m \le -1$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-3; -2; -1\}$. Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu.

Chọn phương án D

Câu 66. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y = f(x^2 - 2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(2; +\infty)$. **B** $(0; 2)$. **C** $(-\infty; -2)$. **D** $(-2; 0)$.

Lời giải.
Ta có $y' = 2xf'\left(x^2-2\right)$.

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'\left(x^2-2\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-2=-2 \\ x^2-2=0 \\ x^2-2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \\ x=\pm 2 \end{array}\right..$$

Do các nghiệm của phương trình $y'=0$ đều là nghiệm bội lẻ, mà $y'(3)=6f'(7)<0$ nên ta có bảng xét dấu y'

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số $y=f\left(x^2-2\right)$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.
Chọn phương án A

Câu 67. Cho Parabol $(P_1)\colon y=f(x)=\dfrac{1}{4}x^2-x$ và $(P_2)\colon y=g(x)=ax^2-4ax+b$ $(a>0)$. Gọi I_1, I_2 lần lượt là các đỉnh của (P_1), (P_2) và A, B là giao điểm của (P_1) với trục Ox. Biết rằng bốn điểm A, B, I_1, I_2 tạo thành tứ giác lồi có diện tích bằng 10. Tính diện tích S của tam giác IAB với I là đỉnh của Parabol $(P)\colon y=h(x)=f(x)+g(x)$.

A $S=6$. **B** $S=4$. **C** $S=9$. **D** $S=7$.

Lời giải.
$(P_1)\colon y=f(x)=\dfrac{1}{4}x^2-x$ có đỉnh $I_1(2;-1)$.
$(P_2)\colon y=g(x)=ax^2-4ax+b$ $(a>0)$ có đỉnh $I_2(2;b-4a)$.
$(P)\colon y=h\left(x\right)=f\left(x\right)+g\left(x\right)=\left(\dfrac{1}{4}+a\right)x^2-(1+4a)\,x+b$ có đỉnh $I(2;b-4a-1)$.
Suy ra I_1, I_2, I cùng nằm trên đường thẳng $x=2$.
Mà giao điểm của (P_1) và Ox là $A\left(4;0\right)$ và $B\left(0;0\right)$
Suy ra tứ giác lồi AI_1BI_2 có hai đường chéo vuông góc và $b-4a>0$
$S_{AI_1BI_2}=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot I_1I_2 \Leftrightarrow 10=\dfrac{1}{2}4\cdot|b-4a+1|=10 \Leftrightarrow b-4a+1=5 \Leftrightarrow b-4a=4$.
Tam giác IAB có diện tích là $S=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot \mathrm{d}(I,Ox)=\dfrac{1}{2}\cdot 4|b-4a-1|=6$.
Chọn phương án A

Câu 68. Cho hàm số $y=\dfrac{x^4}{2}-3x^2+\dfrac{5}{2}$, có đồ thị (C) và điểm $M\in(C)$ có hoành độ $x_M=a$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại hai điểm phân biệt khác M.

A 0. **B** 3. **C** 2. **D** 1.

Lời giải.
Xét hàm số $y=\dfrac{x^4}{2}-3x^2+\dfrac{5}{2}$, ta có: $y'=2x^3-6x$.
Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M: $y=\left(2a^3-6a\right)(x-a)+\dfrac{a^4}{2}-3a^2+\dfrac{5}{2}$ (d).

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C):

$$\begin{aligned}&\left(2a^3-6a\right)(x-a)+\frac{a^4}{2}-3a^2+\frac{5}{2}=\frac{x^4}{2}-3a^2+\frac{5}{2}\\ \Leftrightarrow\ &(x-a)^2\left(x^2+2ax+3a^2-6\right)=0\\ \Leftrightarrow\ &(x-a)^2\left(x^2+2ax+3a^2-6\right)=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}&x=a\\&x^2+2ax+3a^2-6=0\,(2).\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Đường thẳng (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt khác M khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác $a \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=6-2a^2>0\\ a^2+2a^2+3a^3-6\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}\\ a\neq \pm 1.\end{cases}$

Mà a nguyên nên $a=0$.

Chọn phương án D

Câu 69. Cho hàm số $y=x^4+ax^3+bx^2+cx+4$ có đồ thị (C). Biết (C) cắt trục hoành tại ít nhất 1 điểm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=20a^2+20b^2+5c^2$.

A 32. **B** 64. **C** 16. **D** 8.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+4=0 \Leftrightarrow ax^3+bx^2+cx=-x^4-4. \quad (1)$$

Nhận thấy $x=0$ không phải nghiệm của (1).

Do đó theo giả thiết $\exists x_0\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ sao cho $ax_0^3+bx_0^2+cx_0=-x_0^4-4$.

Bình phương hai vế ta có

$$x_0^2\left(ax_0^2+bx_0+c\right)^2=\left(x_0^2+4\right)^2 \Leftrightarrow \left(ax_0^2+bx_0+c\right)^2=\frac{\left(x_0^2+4\right)^2}{x_0^2}.$$

Theo bất đẳng thức Buniakovsky, ta có

$$\left(ax_0^2+bx_0+c\right)^2\le\left(20a^2+20b^2+5c^2\right)\left(\frac{x_0^4}{20}+\frac{x_0^2}{20}+\frac{1}{5}\right)=\frac{T}{20}\left(x_0^4+x_0^2+4\right).$$

Từ đó suy ra

$$\frac{T}{20}\ge\frac{\left(ax_0^2+bx_0+c\right)^2}{x_0^4+x_0^2+4}=\frac{\left(x_0^2+4\right)^2}{x_0^2\left(x_0^4+x_0^2+4\right)}.$$

Đặt $x_0^2=t>0$, ta có $\dfrac{T}{20}\ge\dfrac{\left(t^2+4\right)^2}{t^3+t^2+4t}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{\left(t^2+4\right)^2}{t^3+t^2+4t}$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{4t\left(t^2+4\right)\left(t^3+t^2+4t\right)-\left(t^2+4\right)^2\left(3t^2+2t+4\right)}{\left(t^3+t^2+4t\right)^2}=\dfrac{\left(t^2+4\right)(t+2)\left(t^3-8\right)}{\left(t^3+t^2+4t\right)^2}$.

Vì $t>0$ nên $f'(t)=0\Leftrightarrow t=2$, ta có bảng biến thiên

t	0		2		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{64}{20}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{(0;+\infty)} f(t) = f(2) = \dfrac{64}{20}$. Suy ra $\dfrac{T}{20} \geq \dfrac{64}{20} \Leftrightarrow T \geq 64$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x_0^2 = 2 \\ ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 = -x_0^4 - 4 \\ \dfrac{20a}{x_0^2} = \dfrac{20b}{x_0} = 5c \end{cases}$. (2)

TH1: $x_0 = \sqrt{2}$, ta có (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2a\sqrt{2} + 2b + \sqrt{2}c = -8 \\ a = \sqrt{2}b \\ c = 2\sqrt{2}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{4\sqrt{2}}{5} \\ b = -\dfrac{4}{5} \\ c = -\dfrac{8\sqrt{2}}{5} \end{cases} \Rightarrow T = 64$ (TM).

TH2: $x_0 = -\sqrt{2}$, ta có (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} -2a\sqrt{2} + 2b - \sqrt{2}c = -8 \\ a = -\sqrt{2}b \\ c = -2\sqrt{2}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{4\sqrt{2}}{5} \\ b = -\dfrac{4}{5} \\ c = \dfrac{8\sqrt{2}}{5} \end{cases} \Rightarrow T = 64$ (TM).

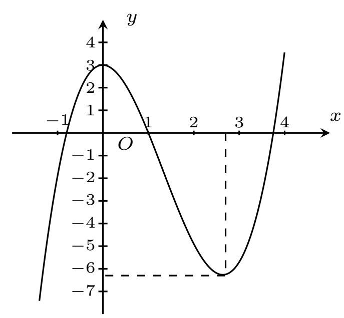
Vậy T có giá trị nhỏ nhất bằng 64.

Nhận xét: Đây là một bài toán phức tạp, không phù hợp là một bài tập trắc nghiệm.

Chọn phương án B

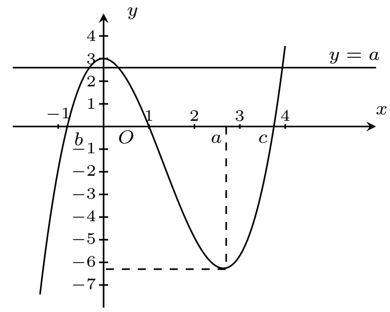
Câu 70.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới. Đặt $g(x) = f[f(x)]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.



A 8. B 4. C 6. D 2.

Lời giải.



Ký hiệu a, b, c như hình vẽ.

Ta có $g'(x) = f'[f(x)] \cdot f'(x)$, từ đó suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'[f(x)] = 0 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right.$.

Từ đồ thị của hàm $y = f(x)$ ta suy ra phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 0$ và $x_2 = a \in (2; 3)$, (a là hoành độ của điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$).

$f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x) = a \end{array}\right.$.

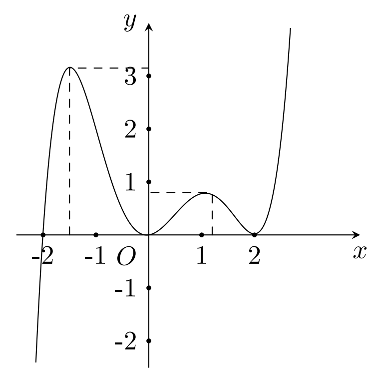
Phương trình $f(x) = 0$ có tập nghiệm $\{x_3; x_4; x_5\} = \{b, 1; c\}$, ($b < 1 < c$ là hoành độ giao điểm của hàm số $y = f(x)$ và trục hoành).

Phương trình $f(x) = 0$ có tập nghiệm $\{x_6; x_7; x_8\}$, ở đó $x_6; x_7; x_8$ là hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = a$ với đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Dễ thấy các nghiệm x_i, $i = \overline{1; 8}$ đôi một phân biệt. Từ đó suy ra phương trình $g'(x) = 0$ có đúng 8 nghiệm.

Chọn phương án A

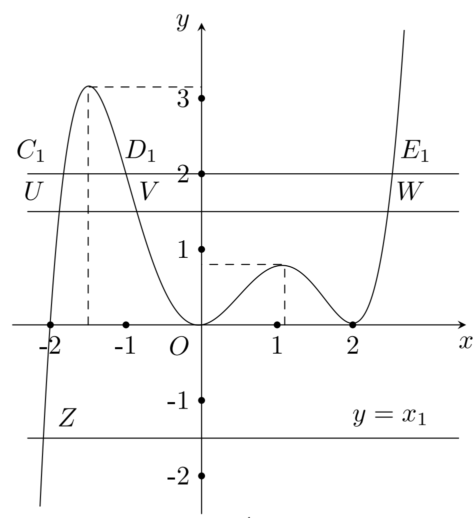
Câu 71.



Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trơn (không bị gãy khúc), hình vẽ bên. Gọi hàm $g(x) = f\left[f(x)\right]$. Hỏi phương trình $g'(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

A 14. **B** 10. **C** 12. **D** 8.

Lời giải.



Ta có: $g'(x) = f'\left[f(x)\right] \cdot f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'\left[f(x)\right].f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \ \ (1) \\ f'\left[f(x)\right] = 0 \ (2). \end{array}\right.$

Từ đồ thị có thể thấy:

(1) có các nghiệm nghiệm:

$x = x_1 \in (-2; -1), x = 0, x = x_2 \in (1; 2), x = 2$.

Xét phương trình (2) ta có: (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = x_1 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = x_2 \\ f(x) = 2. \end{array}\right.$

Phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $x = -2, x = 0, x = 2$ (trùng mất hai nghiệm với (1)).

Dựng các đường thẳng $y = 2, y = x_1 \in (-2; -1), y = x_2 \in (1; 2)$ ta thấy:

— $f(x) = 2$ có 3 nghiệm x_3, x_4, x_5 tương ứng là hoành độ các điểm C_1, D_1, E_1 (xem hình)

— $f(x) = x_1$ có nghiệm duy nhất x_6 ứng với hoành độ điểm Z (Xem hình).

— $f(x) = x_2$ có 3 nghiệm x_7, x_8, x_9 tương ứng là hoành độ các điểm U, V, W (Xem hình).

Từ đồ thị có thể thấy các nghiệm $-2, 0, 2, x_1, x_2, \cdots, x_9$ hoàn toàn phân biệt nên phương trình $g'(x) = 0$ có tổng cộng 12 nghiệm phân biệt.
Chọn phương án C

Câu 72. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C). Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(1; 5)$ và B là giao điểm thứ hai của Δ và (C). Tính diện tích tam giác OAB.

A 12. **B** 15. **C** 24. **D** 6.

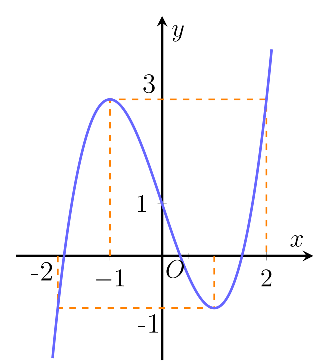
Lời giải.
Với $y = x^3 + 3x^2 + 1$, ta có $y' = 3x^2 + 6x$, $y'(1) = 9$.
Phương trình tiếp tuyến Δ: $y - 5 = 9(x - 1) \Leftrightarrow y = 9x - 4$.
Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 + 3x^2 + 1 = 9x - 4 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -5 \Rightarrow y = -49 \Rightarrow B(-5; -49) \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Ta có: $OA = \sqrt{26}$, $OB = \sqrt{2426}$, $AB = 6\sqrt{82}$.
Theo công thức Hê-rông, ta có $S_{\triangle OAB} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 12$.
Chọn phương án A

Câu 73.
Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số liệt kê ở bốn phương án A,B,C,D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A $y = -x^3 - 3x^2 - 1$. **B** $y = x^3 - 3x + 1$.
C $y = x^3 - 3x - 1$. **D** $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.



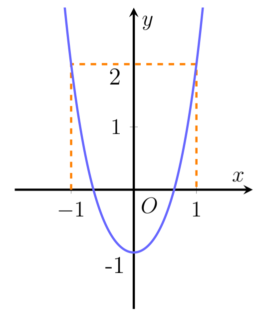
Câu 74. Cho hàm số xác định, liên tục trên R và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?
A Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.
B Hàm số có đúng một cực trị.

(C) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.
(D) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và có giá trị nhỏ nhất bằng -1.

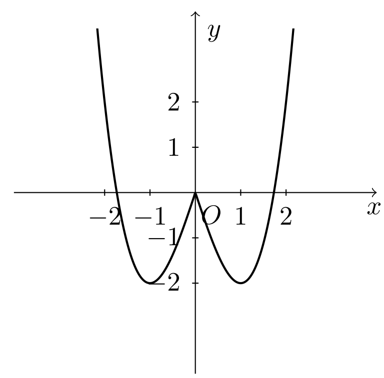
Câu 75.
Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



(A) $y = x^3 - 3x^2 - 1$. (B) $y = x^4 + 2x^2 - 1$.
(C) $y = x^2 - 1$. (D) $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

Câu 76. Cho phương trình $|x|\left(x^2 - 3\right) - m = 0$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-5; 5]$ để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm?
(A) 5. (B) 11. (C) 6. (D) 9.

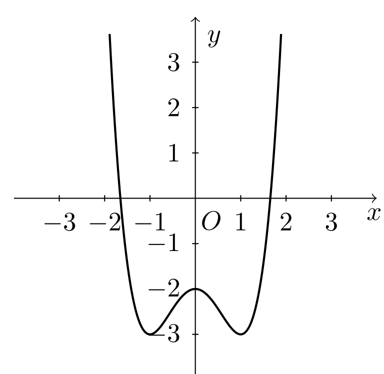
Lời giải.



Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |x|\left(x^2 - 3\right)$ và $y = m$.
Dựa vào đồ thị, phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $m = -2$ hoặc $m > 0$.
Trên đoạn $[-5; 5]$ phương trình đã cho có đúng hai nghiệm khi $m \in \{-2; 1; 2; 3; 4; 5\}$ tức là có 6 giá trị của m.

Chọn phương án (C)

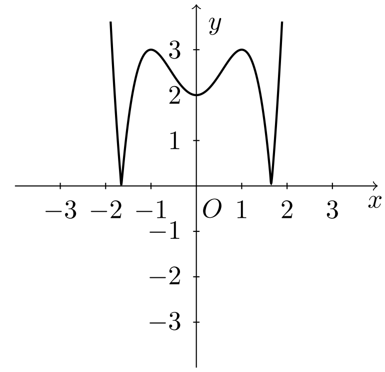
Câu 77.
Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Tìm m để phương trình $|f(x)| - 2m = 0$ có số nghiệm nhiều nhất.



(A) $3 < m < 4$. (B) $3 \leq m \leq 4$. (C) $1 < m < \dfrac{3}{2}$. (D) $1 \leq m \leq \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có được bằng cách giữ lại phần đồ thị phía trên Ox và lấy đối xứng phần đồ thị phía dưới Ox qua Ox.
Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $|f(x)| - 2m = 0$ có số nghiệm nhiều nhất khi $2 < 2m < 3$ hay $1 < m < \dfrac{3}{2}$.



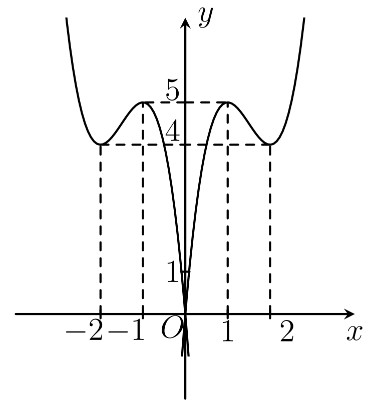
Chọn phương án (C)

Câu 78. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x|$ tại 6 điểm phân biệt.

(A) $4 < m < 5$. (B) $m \leq 4$. (C) $m \geq 5$. (D) $m = 1$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ ta suy ra đồ thị hàm số $(C): y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x|$ như hình vẽ.
Dựa vào đồ thị (C), đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x|$ tại 6 điểm phân biệt khi và chỉ khi $4 < m < 5$.



Chọn phương án (A)

Câu 79. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-2}{x+1}$ (1). Tìm các giá trị của tham số m sao cho đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số tại hai điểm A và B phân biệt sao cho tma giác OAB vuông tại O.

(A) $m = -\dfrac{4}{3}$. (B) $m = 2$. (C) $m = \dfrac{4}{3}$. (D) $m = -2$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (1) và đường thẳng $y = x + m$ là $\dfrac{2x-2}{x+1} = x + m \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 + (m-1)x + 2 + m = 0 \quad (2) \end{cases}.$$

Đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - 4(2+m) > 0 \\ 1 + 1 - m + m + 2 \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow m^2 - 6m - 7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 7 \end{array}\right..$$

Suy ra tọa độ điểm A và B là $A(x_1; x_1 + m), B(x_2; x_2 + m)$, trong đó $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình (2) và $x_1 + x_2 = 1 - m$, $x_1 x_2 = m + 2$.

$\overrightarrow{OA} = (x_1; x_1 + m); \overrightarrow{OB} = (x_2; x_2 + m)$. Tam giác OAB vuông tại O suy ra $\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB} = 0$.
$x_1x_2 + x_1x_2 + m(x_1 + x_2) + m^2 = 0 \Leftrightarrow 2(m+2) + m(1-m) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{4}{3}$.
Chọn phương án A

Câu 80. Tìm tất cả các giá trị số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thõa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$.

A $m \in \left(\dfrac{1}{4}; 0\right)$.
B $m \in (0; 1)$.
C $m \in \left(-\dfrac{1}{4}; 0\right) \cup (0; 1)$.
D $m = 0$.

Lời giải.
Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\begin{aligned} & x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m = 0 \quad (1) \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)\left(x^2 - x - m\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - x - m = 0 \quad (2) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1.
Kí hiệu $g(x) = x^2 - x - m$, $x_1 = 1$, x_2 và x_3 là các nghiệm của (2).
Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta > 0 \\ g(1) \neq 0 \\ x_2^2 + x_3^2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\dfrac{1}{4}; 0\right) \cup (0; 1)$.
Chọn phương án C

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. A	4. A	5. C	6. B	7. B	8. A	9. C	10. B
11. C	12. D	13. B	14. B	15. C	16. C	17. A	18. A	19. B	20. D
21. D	22. C	23. B	24. C	25. D	26. B	27. B	28. A	29. D	30. A
31. A	32. C	33. B	34. A	35. D	36. A	37. C	38. B	39. A	40. C
41. B	42. B	43. B	44. A	45. C	46. A	47. B	48. B	49. C	50. B
51. C	52. C	53. D	54. B	55. D	56. C	57. C	58. A	59. B	60. D
61. D	62. A	63. D	64. D	65. D	66. A	67. A	68. D	69. B	70. A
71. C	72. A	73. B	74. D	75. B	76. C	77. C	78. A	79. A	80. C

DẠNG 18. NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Nếu $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 4$ thì $\int\limits_0^1 2f(x)\mathrm{d}x = 4$ bằng

(A) 16. (B) 4. (C) 2. (D) 8.

Lời giải.

Ta có: $\int\limits_0^1 2f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2.4 = 8.$

Chọn phương án (D)

Câu 1. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x + \sin x)\,\mathrm{d}x$

(A) $I = 5$. (B) $I = 3$. (C) $I = 4$. (D) $I = 2$.

Lời giải.

Ta có: $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x + \sin x)\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{2}\cdot\cos 2x - \cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$

Chọn phương án (D)

Câu 2. Nếu $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$, $\int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$ thì $\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) -2. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 5 + (-1) = 4.$

Chọn phương án (D)

Câu 3. Tính tích phân $I = \int\limits_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{1-2x}$.

(A) $I = -\ln 9$. (B) $I = \ln 9$. (C) $I = -\ln 3$. (D) $I = \ln 3$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{1-2x} = -\frac{1}{2}\int\limits_1^5 \frac{\mathrm{d}(1-2x)}{1-2x} = -\frac{1}{2}\ln|1-2x|\Big|_1^5 = -\ln 3.$

Chọn phương án (C)

Nhóm: PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ biết $f(0)=1$, $f'(x)$ liên tục trên $[0;3]$ và $\int\limits_0^3 f'(x)\,\mathrm{d}x=9$. Tính $f(3)$.

(A) $f(3)=9$. (B) $f(3)=10$. (C) $f(3)=8$. (D) $f(3)=7$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^3 f'(x)\,\mathrm{d}x=9 \Leftrightarrow f(x)\big|_0^3=9 \Leftrightarrow f(3)-f(0)=9 \Leftrightarrow f(3)=9+f(0)=9+1=10$.

Vậy $f(3)=10$.

Chọn phương án (B)

Câu 5. Giá trị của $\int\limits_{-1}^0 \mathrm{e}^{x+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $1-\mathrm{e}$. (B) $\mathrm{e}-1$. (C) $-\mathrm{e}$. (D) e.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{-1}^0 \mathrm{e}^{x+1}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x+1}\Big|_{-1}^0=\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^0=\mathrm{e}-1$.

Chọn phương án (B)

Câu 6. Cho các hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

(A) $\int\limits_a^a kf(x)\,\mathrm{d}x=0$.

(B) $\int\limits_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x=x\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(C) $\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

(D) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Dựa vào các đáp án ta dễ dàng nhận thấy các đáp án A, C, D đúng, đáp án B sai.

Chọn phương án (B)

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x=7$, $\int\limits_3^{10} f(x)\,\mathrm{d}x=8$, $\int\limits_3^6 f(x)\,\mathrm{d}x=9$.

Giá trị của $I=\int\limits_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $I = 5$. (B) $I = 6$. (C) $I = 7$. (D) $I = 8$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_3^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_3^{6} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_3^{10} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_3^{6} f(x)\,\mathrm{d}x = 8 - 9 = -1$

Khi đó $\displaystyle I = \int\limits_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{6} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = 7 - 1 = 6$.

Chọn phương án (B)

Câu 8. Giả sử $f(x)$ là một hàm số bất kì liên tục trên khoảng $(\alpha;\beta)$ và a, b, c, $b+c \in (\alpha;\beta)$. Mệnh đề nào sau đây sai?

(A) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(B) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

(C) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

(D) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Dựa vào tính chất của tích phân, với $f(x)$ là một hàm số bất kì liên tục trên khoảng $(\alpha;\beta)$ và $a,b,c,b+c \in (\alpha;\beta)$ ta có:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b+c}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vậy mệnh đề sai là $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x$

Chọn phương án (B)

Câu 9. Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số bất kỳ liên tục trên $\mathbb{R}$ và a, b, c là các số thực. Mệnh đề nào sau đây **sai** ?

(A) $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(B) $\displaystyle\int\limits_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(C) $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

(D) $\displaystyle\int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo tính chất tích phân ta có:

— $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

— $\displaystyle\int\limits_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, với $c \in \mathbb{R}$.

— $\int\limits_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

Chọn phương án C

Câu 10. Tính tích phân $I = \int\limits_1^2 \frac{x-1}{x}\,\mathrm{d}x$

A $I = 1 - \ln 2$. **B** $I = \frac{7}{4}$. **C** $I = 1 + \ln 2$. **D** $I = 2\ln 2$.

Lời giải.

Ta có

$$I = \int\limits_1^2 \frac{x-1}{x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = (x - \ln|x|)\Big|_1^2 = (2-\ln 2) - (1 - \ln 1) = 1 - \ln 2$$

Chọn phương án A

Câu 11. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

A $F(x) = x^3 + \sin x + C$. **B** $F(x) = x^3 - \cos x + C$.
C $F(x) = 3x^3 - \sin x + C$. **D** $F(x) = x^3 + \cos x + C$.

Lời giải.

Ta có: $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(3x^2 + \sin x\right)\,\mathrm{d}x = x^3 - \cos x + C$.

Chọn phương án B

Câu 12. Tích phân $\int\limits_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$ có giá trị bằng

A $\ln 2 - 1$. **B** $-\ln 2$. **C** $\ln 2$. **D** $1 - \ln 2$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}(x+1)}{x+1} = \ln|x+1|\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

Chọn phương án C

Câu 13. Tích phân $I = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$ bằng

A $\cot\frac{\pi}{3} - \cot\frac{\pi}{4}$. **B** $\cot\frac{\pi}{3} + \cot\frac{\pi}{4}$. **C** $-\cot\frac{\pi}{3} + \cot\frac{\pi}{4}$. **D** $-\cot\frac{\pi}{3} - \cot\frac{\pi}{4}$.

Lời giải.

$$I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2x}=-\cot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=-\left(\cot\frac{\pi}{3}-\cot\frac{\pi}{4}\right)=-\cot\frac{\pi}{3}+\cot\frac{\pi}{4}.$$

Chọn phương án C

Câu 14. Cho $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Khi đó, tích phân $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A 6. **B** 2. **C** 1. **D** 3.

Lời giải.

$\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=6.$

Chọn phương án A

Câu 15. Đặt $I=\int\limits_1^2(2mx+1)\,\mathrm{d}x$ (m là tham số thực). Tìm m để $I=4$.

A $m=-1$. **B** $m=-2$. **C** $m=1$. **D** $m=2$.

Lời giải.

Ta có $I=(mx^2+x)\Big|_1^2=3m+1=4\Leftrightarrow m=1$.

Chọn phương án C

Câu 16. Tích phân $\int\limits_1^8\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\frac{45}{4}$. **B** $\frac{47}{4}$. **C** $\frac{25}{4}$. **D** 2.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^8\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\Big|_1^8=\frac{45}{4}$.

Chọn phương án A

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có một nguyên hàm là hàm số $F(x)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$. **B** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.

C $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(a)-F(b)$. **D** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)+F(a)$.

Lời giải.

Nhóm: PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA

Theo định nghĩa tích phân ta có $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Chọn phương án B

Câu 18. Tích phân $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{7}{5}$. **B** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{7}$. **C** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{7}{5}$. **D** $-\dfrac{4}{35}$.

Lời giải.

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}\left(2x+5\right) = \frac{1}{2}\ln\left(2x+5\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln\frac{7}{5}$$

Chọn phương án C

Câu 19. Tính tích phân $I = \int\limits_0^2 2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

A e^4. **B** $3\mathrm{e}^4$. **C** $4\mathrm{e}^4$. **D** $\mathrm{e}^4 - 1$.

Lời giải.

Ta có $I = \mathrm{e}^{2x}\Big|_0^2 = \mathrm{e}^4 - 1$.

Chọn phương án D

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên K và $a, b \in K$, $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

A $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b$. **B** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)\Big|_a^b$.

C $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. **D** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b)$.

Lời giải.

Công thức tích phân $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Chọn phương án D

B MỨC ĐỘ 2

Câu 21. Cho $\int\limits_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_{-1}^2 g(x)\mathrm{d}x = -1$, khi đó $\int\limits_{-1}^2 \left[x + 2f(x) + 3g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A $\dfrac{5}{2}$. **B** $\dfrac{7}{2}$. **C** $\dfrac{17}{2}$. **D** $\dfrac{11}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $\int\limits_{-1}^{2}[x+2f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}x\mathrm{d}x+2\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x+3\int\limits_{-1}^{2}g(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}+4-3=\frac{5}{2}$.

Chọn phương án A

Câu 22. Cho $\int_0^2 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$ với a,b,c là các số thực. Giá trị của $a+b^2-c^3$ bằng

(A) 3. (B) 6. (C) 5. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{2}^{3}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)}=\int\limits_{2}^{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\Big|_2^3=\ln\frac{4}{5}-\ln\frac{3}{4}=4\ln 2-\ln 3-\ln 5$.

Suy ra $a=4, b=-1, c=-1$. Vậy $a+b^2-c^3=6$.

Chọn phương án B

Câu 23. Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=3$, $\int\limits_0^2[f(x)-3g(x)]\,\mathrm{d}x=4$ và $\int\limits_0^2[2f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=8$. Tính $I=\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I=1$. (B) $I=2$. (C) $I=3$. (D) $I=0$.

Lời giải.

Đặt $a=\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, $b=\int\limits_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases}a-3b=4\\2a+b=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=0.\end{cases}$

Ta có $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=4-3=1$.

Chọn phương án A

Câu 24. Cho $\int\limits_0^1\frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3$, với a,b là các số hữu tỷ. Khi đó $a+b$ bằng

(A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) -1.

Lời giải.

Xét $\int\limits_0^1\frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\frac{1}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x=\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\Big|_0^1=2\ln 2-\ln 3$.

Vậy $a=2, b=-1\Rightarrow a+b=1$.

Chọn phương án C

Câu 25. Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số liên tục trên $[1;3]$ và thỏa mãn $\int\limits_1^3 [f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x = 10$; $\int\limits_1^3 [2f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = 6$. Tính tích phân $I = \int\limits_1^3 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $I = 6$. Ⓑ $I = 7$. Ⓒ $I = 8$. Ⓓ $I = 9$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \int\limits_1^3 [f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x = 10 \\ \int\limits_1^3 [2f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 10 \\ 2\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4 \\ \int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 2. \end{cases}$

Vậy $I = \int\limits_1^3 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 4+2 = 6$.

Chọn phương án Ⓐ

Câu 26. Cho $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_0^2 g(x)\mathrm{d}x = -1$. Giá trị của $\int\limits_0^2 [f(x)-5g(x)+x]\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 12. Ⓑ 0. Ⓒ 8. Ⓓ 10.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^2 [f(x)-5g(x)+x]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x - 5\int\limits_0^2 g(x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^2 x\mathrm{d}x = 3 - 5\cdot(-1) + \frac{1}{2}(2^2-0) = 10$.

Chọn phương án Ⓓ

Câu 27. Cho $\int\limits_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = 8$ và $\int\limits_{5}^{-2} g(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $I = \int\limits_{-2}^{5} [f(x)-4g(x)-1]\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ $I = 13$. Ⓑ $I = 27$. Ⓒ $I = -11$. Ⓓ $I = 3$.

Lời giải.

Theo tính chất của tích phân ta có

$$I = \int\limits_{-2}^{5} [f(x)-4g(x)-1]\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x - 4\int\limits_{-2}^{5} g(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-2}^{5} \mathrm{d}x = 8\cdot 4\cdot(-3) - x\Big|_{-2}^{5} = 13.$$

Chọn phương án Ⓐ

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để tích phân $\int\limits_1^{1+a} \frac{\mathrm{d}x}{x(x-5)(x-4)}$ tồn tại.

(A) $-1 < a < 3$. (B) $a < -1$. (C) $a \neq 4, a \neq 5$. (D) $a < 3$.

Lời giải.

Tích phân $\displaystyle\int\limits_1^{1+a} \frac{\mathrm{d}x}{x(x-5)(x-4)}$ tồn tại khi và chỉ khi hàm số $y = \dfrac{1}{x(x-5)(x-4)}$ liên tục trên $[1; 1+a]$ hoặc $[1+a; a]$.

Mà hàm số $y = \dfrac{1}{x(x-5)(x-4)}$ liên tục trên khoảng $(-\infty; 0)$; $(0; 4)$; $(4; 5)$; $(5; +\infty)$.

Nên hàm số liên tục trên $[1; 1+a]$ hoặc $[1+a; 1] \Leftrightarrow 0 < 1+a < 4 \Leftrightarrow -1 < a < 3$.

Vậy $-1 < a < 3$.

Chọn phương án (A)

Câu 29. Cho f, g là hai hàm liên tục trên $[1; 3]$ thoả: $\displaystyle\int\limits_1^3 [f(x) + 3g(x)]\, \mathrm{d}x = 10$, $\displaystyle\int\limits_1^3 [2f(x) - g(x)]\, \mathrm{d}x = 6$. Tính $\displaystyle\int\limits_1^3 [f(x) + g(x)]\, \mathrm{d}x$

(A) 7. (B) 6. (C) 8. (D) 9.

Lời giải.

Đặt $I_1 = \displaystyle\int\limits_1^3 f(x)\, \mathrm{d}x$, $I_2 = \displaystyle\int\limits_1^3 g(x)\, \mathrm{d}x$. Theo bài ra ta có

$$\begin{cases} \displaystyle\int\limits_1^3 [f(x) + 3g(x)]\, \mathrm{d}x = 10 \\ \displaystyle\int\limits_1^3 [2f(x) - g(x)]\, \mathrm{d}x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int\limits_1^3 f(x)\, \mathrm{d}x + 3\int\limits_1^3 g(x)\, \mathrm{d}x = 10 \\ 2\displaystyle\int\limits_1^3 f(x)\, \mathrm{d}x - \int\limits_1^3 g(x)\, \mathrm{d}x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_1 + 3I_2 = 10 \\ 2I_1 - I_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_1 = 4 \\ I_2 = 2. \end{cases}$$

Vậy $\displaystyle\int\limits_1^3 [f(x) + g(x)]\, \mathrm{d}x = I_1 + I_2 = 6$.

Chọn phương án (B)

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị thực m thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_0^m (2x+1)\, \mathrm{d}x < 2$.

(A) $m < -2$. (B) $-2 < m < 1$. (C) $m \geq 1$. (D) $m > 2$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_0^m (2x+1)dx < 2 \Leftrightarrow \left(x^2 + x\right)\Big|_0^m < 2 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 1$.

Chọn phương án (B)

Câu 31 (2D3B2-1). Tích phân $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{7}{5}$. **B** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{7}$. **C** $-\dfrac{4}{35}$. **D** $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{7}{5}$.

Lời giải.

Sử dụng công thức $\int \dfrac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\ln|ax+b|+C$.

Chọn phương án A

Câu 32. Giả sử $f(x)$ là một hàm số bất kì liên tục trên khoảng $(\alpha;\beta)$ và a, b, c, $b+c \in (\alpha;\beta)$. Mệnh đề nào sau đây **sai** ?

A $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

B $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

C $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{b+c}^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

D $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Dựa vào tính chất của tích phân, với $f(x)$ là một hàm số bất kì liên tục trên khoảng $(\alpha;\beta)$ và a, b, c, $b+c \in (\alpha;\beta)$ ta luôn có

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int\limits_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{b+c}^b f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Vậy mệnh đề sai là $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn phương án B

Câu 33. Cho $\int 2x(3x-2)^6\mathrm{d}x = A(3x-2)^8 + B(3x-2)^7 + C$ với $A, B, C \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $12A+7B$.

A $\dfrac{23}{252}$. **B** $\dfrac{241}{252}$. **C** $\dfrac{52}{9}$. **D** $\dfrac{7}{9}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\int 2x(3x-2)^6\mathrm{d}x\\
=\ &\frac{2}{3}\int 3x(3x-2)^6\mathrm{d}x\\
=\ &\frac{2}{3}\int \left[(3x-2)^7+2(3x-2)^6\right]\mathrm{d}x\\
=\ &\frac{2}{3}\left[\frac{1}{3\cdot 8}\cdot(3x-2)^8+\frac{2}{3\cdot 7}\cdot(3x-2)^7\right]+C\\
=\ &\frac{1}{36}\cdot(3x-2)^8+\frac{4}{63}\cdot(3x-2)^7+C.
\end{aligned}$$

Suy ra $A=\dfrac{1}{36}, B=\dfrac{4}{63}$ nên $12A+7B=\dfrac{7}{9}$.

Chọn phương án D

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ và $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x=7$ và $\displaystyle\int_2^{6} f(x)\,\mathrm{d}x=3$. Tính $P=\displaystyle\int_0^{2} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $P=-4$. (B) $P=10$. (C) $P=7$. (D) $P=4$.

Lời giải.

Ta có: $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{2} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_2^{6} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow P=\displaystyle\int_0^{2} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_2^{6} f(x)\,\mathrm{d}x=7-3=4$.

Chọn phương án D

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\displaystyle\int_0^{2}\left(f(x)+3x^2\right)\,\mathrm{d}x=10$. Tính $\displaystyle\int_0^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) -18. (B) -2. (C) 18. (D) 2.

Lời giải.

Ta có: $\displaystyle\int_0^{2}\left(f(x)+3x^2\right)\,\mathrm{d}x=10\Leftrightarrow\int_0^{2} f(x)\,\mathrm{d}x=10-\int_0^{2}3x^2\,\mathrm{d}x=10-x^2\Big|_0^2=2$.

Chọn phương án D

Câu 36. Cho $\displaystyle\int_0^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=2$ và $\displaystyle\int_0^{1} g(x)\,\mathrm{d}x=5$, khi đó $\displaystyle\int_0^{1}\left[f(x)-2g(x)\right]\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) -3. (B) 12. (C) -8. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^{1}\left[f(x)-2g(x)\right]\,\mathrm{d}x=\int_0^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-2\int_0^{1} g(x)\,\mathrm{d}x=2-2\cdot 5=-8$.

Chọn phương án C

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 7$, $\int\limits_3^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = 8$, $\int\limits_3^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 9$. Giá trị của $I = \int\limits_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A 5. **B** 6. **C** 7. **D** 8.

Lời giải.

$I = \int\limits_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_6^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_3^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = 7 - 9 + 8 = 6.$

Chọn phương án B

Câu 38. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để tích phân $\int\limits_a^{1+a} \dfrac{\mathrm{d}x}{x(x-5)(x-4)}$ tồn tại.

A $-1 < a < 3$. **B** $a < -1$. **C** $a \neq 4, a \neq 5$. **D** $a < 3$.

Lời giải.

Để tích phân của đề bài xác định thì $1, 1+a$ phải thuộc vào cùng một khoảng xác định của hàm số $\dfrac{1}{x(x-5)(x-4)}$. Khoảng xác định chứa 1 là khoảng $(0;4)$. Nên $1+a \in (0;4)$ hay $a \in (-1;3)$.

Chọn phương án A

Câu 39. Tìm giá trị của a để $\int\limits_1^2 \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x = \ln a$.

A 12. **B** $\dfrac{4}{3}$. **C** $\dfrac{1}{3}$. **D** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

$\int\limits_3^4 \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_3^4 \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x = (\ln|x-2| - \ln|x-1|)\big|_3^4 = \ln\dfrac{4}{3}.$

Suy ra $a = \dfrac{4}{3}$.

Chọn phương án B

Câu 40. Cho $\int\limits_1^2 \mathrm{e}^{3x-1}\mathrm{d}x = m(\mathrm{e}^p - \mathrm{e}^q)$ với $m, p, q \in \mathbb{Q}$ và là các phân số tối giản. Giá trị $m + p + q$ bằng

A 10. **B** 6. **C** $\dfrac{22}{3}$. **D** 8.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^2 \mathrm{e}^{3x-1}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\int\limits_1^2 \mathrm{e}^{3x-1}\mathrm{d}(3x-1) = \dfrac{1}{3}\cdot \mathrm{e}^{3x-1}\Big|_1^2 = \dfrac{1}{3}(\mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^2).$

Suy ra $m = \dfrac{1}{3}, p = 5$ và $q = 2$.

Vậy $m + p + q = \dfrac{22}{3}$.

Chọn phương án C

C MỨC ĐỘ 3

Câu 41. Cho $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+2)^2} = a + b\ln 2 + c\ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng

(A) -2. (B) -1. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+2)^2} &= \int\limits_0^1 \frac{x+2-2}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int\limits_0^1 \frac{x+2}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 \frac{2}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int\limits_0^1 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 \frac{2}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \ln|x+2|\Big|_0^1 + \frac{2}{x+2}\Big|_0^1\\ &= \ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Nên $a = -\dfrac{1}{3}$, $b = -1$, $c = 1$, suy ra $3a + b + c = -1$.

Chọn phương án B

Câu 42. Giá trị của $\displaystyle\int\limits_0^1 (2019x^{2018} - 1)\mathrm{d}x$ bằng

(A) 0. (B) $2^{2017} + 1$. (C) $2^{2017} - 1$. (D) 1.

Lời giải.

$\displaystyle\int\limits_0^1 (2019x^{2018} - 1)\mathrm{d}x = 2019\int\limits_0^1 x^{2018}\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 \mathrm{d}x = (x^{2019} - x + C)\Big|_0^1 = 0$

Chọn phương án A

Câu 43. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến và có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $2[f(x)]^2 - f(x)\cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$ với $\forall x \in [0;2]$. Biết $f(0) = 1$; $f(2) = e^6$.

Tích phân $I = \displaystyle\int\limits_{-2}^0 (2x+1)f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A $1+e$. **B** $1-e^2$. **C** $1-e$. **D** $1-e^{-1}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&2[f(x)]^2 - f(x)\cdot f''(x) + \left[f'(x)\right]^2 = 0 \Leftrightarrow f(x)\cdot f''(x) - \left[f'(x)\right]^2 = 2[f(x)]^2\\
\Leftrightarrow\ & \frac{f(x)\cdot f''(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2} = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = 2\\
\Leftrightarrow\ & \int \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' dx = \int 2dx \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 2x + \mathrm{C}_1\\
\Leftrightarrow\ & \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int 2x + C_1 \Leftrightarrow \ln|f(x)| = x^2 + C_1x + C_2
\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1 \Rightarrow \ln 1 = C_2 \Rightarrow C_2 = 0\\
f(2) &= e^6 \Rightarrow 6 = 4 + 2C_1 \Rightarrow C_1 = 1\\
\Rightarrow\ \ln|f(x)| &= x^2 + x \Rightarrow f(x) = e^{x^2+x}\\
\Rightarrow\ I &= \int\limits_{-2}^{0} (2x+1)e^{x^2+x}dx = e^{x^2+x}\Big|_{-2}^{0} = 1 - e^2
\end{aligned}$$

Chọn phương án B

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x^2-3)(x^4-1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. So sánh $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$ ta được

A $f(2) < f(0) < f(-2)$. **B** $f(0) < f(-2) < f(2)$.
C $f(-2) < f(2) < f(0)$. **D** $f(-2) < f(0) < f(2)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = (x-1)(x^2-3)(x^4-1) = x^7 - x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 + x^2 + 3x - 3$.

— $I_1 = \displaystyle\int_{-2}^{0} f'(x)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} (x^7 - x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 + x^2 + 3x - 3)\mathrm{d}x = -\frac{464}{105} < 0$.
$\Rightarrow f(0) - f(-2) < 0 \Rightarrow f(0) < f(-2)$.

— $I_2 = \displaystyle\int_{0}^{2} f'(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{2} (x^7 - x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 + x^2 + 3x - 3)\mathrm{d}x = -\frac{44}{105} < 0$.
$\Rightarrow f(2) - f(0) < 0 \Rightarrow f(2) < f(0)$.

Vậy $f(2) < f(0) < f(-2)$.

Chọn phương án A

Câu 45. Tìm tất cả giá trị thực của tham số k để có $\displaystyle\int\limits_{1}^{k} (2x-1)\,\mathrm{d}x = 4\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

A $\left[\begin{array}{l} k=-1\\ k=2 \end{array}\right.$. **B** $\left[\begin{array}{l} k=1\\ k=-2 \end{array}\right.$. **C** $\left[\begin{array}{l} k=1\\ k=2 \end{array}\right.$. **D** $\left[\begin{array}{l} k=-1\\ k=-2 \end{array}\right.$.

Lời giải.

$\int\limits_1^k (2x-1)\,\mathrm{d}x = (x^2-x)\Big|_1^k = k^2-k$

$4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{\sqrt{x+1}+1} = 2$. Ta có $k^2-k=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=-1 \\ k=2. \end{array}\right.$

Chọn phương án A

Câu 46. Cho $\int\limits_0^1 \dfrac{x\,\mathrm{d}x}{(x+2)^2} = a+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng

A -2. **B** -1. **C** 2. **D** 1.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+2)^2} &= \int\limits_0^1 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 \frac{2}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln|x+2|\Big|_0^1 + \frac{2}{x+2}\Big|_0^1 = \ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Nên $a=-\dfrac{1}{3}$, $b=-1$, $c=1$. Suy ra $3a+b+c=-1$.

Chọn phương án B

Câu 47. Cho $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Tính $\int\limits_1^4 \dfrac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

A $I=1$. **B** $I=2$. **C** $I=4$. **D** $I=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{x} \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Khi $x=1\Rightarrow t=1$; khi $x=4\Rightarrow t=2$.

Do đó $I=\int\limits_1^2 f(t)\cdot 2\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$

Chọn phương án C

Câu 48. Cho các số thực $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{a}{(x+1)^3}+bx\mathrm{e}^x$ với mọi $x\neq -1$. Biết $f'(0)=-22$ và $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$. Tính $a+b$.

A $a+b=19$. **B** $a+b=7$. **C** $a+b=8$. **D** $a+b=10$.

Lời giải.

Nhóm: PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA

Ta có: $f'(x) = -\dfrac{3a}{(x+1)^4} + b\mathrm{e}^x + bx\mathrm{e}^x \Rightarrow f'(0) = -22 \Rightarrow -3a + b = -22$.

Ta có: $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left(-\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{1}{(x+1)^2} + b(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x)\right)\Big|_0^1 = \dfrac{3}{8}a + b \Rightarrow \dfrac{3}{8}a + b = 5$.

Ta có hệ: $\begin{cases}\dfrac{3}{8}a + b = 5\\ -3a + b = -22\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = 8\\ b = 2\end{cases} \Rightarrow a + b = 10.$

Chọn phương án D

Câu 49. Tập nghiệm S của bất phương trình $\displaystyle\int\limits_0^x \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t > 0$ (ẩn x) là

A $S = (-\infty; 0)$. **B** $S = (0; +\infty)$. **C** $S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. **D** $S = \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^x \frac{1}{2\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}(t^2+1) = \sqrt{t^2+1}\Big|_0^x = \sqrt{x^2+1} - 1.$$

Khi đó

$$\int\limits_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 > 1 \Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0.$$

Vậy $S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Chọn phương án C

Câu 50. Tìm các số a, b để hàm số $f(x) = a\sin(\pi x) + b$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 4$.

A $a = \dfrac{\pi}{2}, b = 2$. **B** $a = -\dfrac{\pi}{2}, b = 2$. **C** $a = -\pi, b = 2$. **D** $a = \pi, b = 2$.

Lời giải.

Ta có $2 = f(1) = a\sin\pi + b = b$, do đó

$$4 = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (a\sin(\pi x) + 2)\,\mathrm{d}x = -\frac{a}{\pi}\cos(\pi x)\Big|_0^1 + 2x\Big|_0^1 = \frac{2a}{\pi} + 2 \Rightarrow a = \pi.$$

Chọn phương án D

Câu 51. Tính tích phân $I = \displaystyle\int\limits_0^3 \max\{x^2, 4\}\,\mathrm{d}x$.

A $I = 9$. **B** $I = 12$. **C** $I = \dfrac{43}{3}$. **D** $I = 21$.

Lời giải.

50 DẠNG TOÁN PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA LẦN 2

$$I=\int\limits_0^2 \max\{x^2,4\}\,\mathrm{d}x+\int\limits_2^3 \max\{x^2,4\}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 4\,\mathrm{d}x+\int\limits_2^3 x^2\,\mathrm{d}x=8+\frac{19}{3}=\frac{43}{3}.$$

Chọn phương án C

Câu 52. Biết $\int\limits_1^2 \frac{4\mathrm{d}x}{(x+4)\sqrt{x}+x\sqrt{x+4}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-d$ với a,b,c,d là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c+d$.

A 48. B 46. C 54. D 52.

Lời giải.

Ta có

$$I=\int\limits_1^2 \frac{4\mathrm{d}x}{(x+4)\sqrt{x}+x\sqrt{x+4}}=\int\limits_1^2 \frac{4}{\sqrt{x(x+4)}\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x}\right)}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+4)}}\mathrm{d}x$$

Khi đó,

$$I=\int\limits_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+4}}\right)\mathrm{d}x=\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x+4}\right)\Big|_1^2=2\sqrt{2}-2\sqrt{6}-2+2\sqrt{5}=\sqrt{8}+\sqrt{20}-\sqrt{24}-2.$$

Suy ra, $a=8$, $b=20$, $c=24$, $d=2$. Do đó, $P=54$.

Chọn phương án C

Câu 53. Cho $\int\limits_0^1 \frac{x^2+1}{x+1}\,\mathrm{d}x=a+b\ln c$, với $a\in\mathbb{Q};b,c\in\mathbb{Z}$. Ta có $2a+b+c$ bằng

A 2. B 5. C 4. D 3.

Lời giải.

$$I=\int\limits_0^1 \frac{x^2+1}{x+1}dx=\int\limits_0^1 \left(x-1+\frac{2}{x+1}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-x+2\ln|x+1|\right)\Big|_0^1=-\frac{1}{2}+2\ln 2\ .$$

Suy ra

$$2a+b+c=2\left(-\frac{1}{2}\right)+2+2=3.$$

Chọn phương án D

Câu 54. Cho $I=\int\limits_0^2 \left(2x^2-x-m\right)\mathrm{d}x$ và $J=\int\limits_0^1 \left(x^2-2mx\right)\mathrm{d}x$. Tìm điều kiện của m để $I\le J$.

A $m\ge 3$. B $m\ge 2$. C $m\ge 1$. D $m\ge 0$.

Lời giải.

Ta có:

$$I=\int\limits_0^2 \left(2x^2-x-m\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-mx\right)\Big|_0^2=\frac{10}{3}-2m.$$

$J=\int\limits_0^1\left(x^2-2mx\right)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{3}x^3-mx^2\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}-m.$

Khi đó: $I\le J\Leftrightarrow\frac{10}{3}-2m\le\frac{1}{3}-m\Leftrightarrow m\ge 3.$

Chọn phương án A

Câu 55. Cho $\int\limits_1^2\frac{1}{x^2+5x+6}\,\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$, với a,b,c là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $a+b+c=4$. **B** $a+b+c=-3$. **C** $a+b+c=2$. **D** $a+b+c=6$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}\int\limits_1^2\frac{1}{x^2+5x+6}\,\mathrm{d}x&=\int\limits_1^2\frac{1}{(x+2)(x+3)}\,\mathrm{d}x\\&=\int\limits_1^2\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x\\&=\int\limits_1^2\frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x-\int\limits_1^2\frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x\\&=\ln(x+2)\Big|_1^2-\ln(x+3)\Big|_1^2\\&=\ln 4-\ln 3-(\ln 5-\ln 4)\\&=2\ln 4-\ln 3-\ln 5=4\ln 2-\ln 3-\ln 5.\end{aligned}$$

Suy ra $a=4$, $b=-1$, $c=-1$. Nên $a+b+c=4+(-1)+(-1)=2$.

Chọn phương án C

Câu 56. Biết rằng $\int\limits_2^3\frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x=\frac{a-4\sqrt{b}}{c}$, với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $T=a+b+c$.

A 31. **B** 29. **C** 33. **D** 27.

Lời giải.

$$\int\limits_2^3\frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x=\int\limits_2^3\frac{\left(x-\sqrt{x-1}\right)\left(x^2-x+1\right)}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_2^3\left(x-\sqrt{x-1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}\right)\Big|_2^3=\frac{19-4\sqrt{8}}{6}\Rightarrow\begin{cases}a=19\\b=8\\c=6.\end{cases}$$

Vậy $T = a + b + c = 33$.

Chọn phương án C

Câu 57. Biết $\int\limits_{-2}^{2} \dfrac{x+1}{x^2-9}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{a}{b}\ln 5$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị $a + b$.

A 10. **B** 4. **C** 8. **D** 7.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{-2}^{2} \dfrac{x+1}{x^2-9}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{2} \left(\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{x+3}\right) \mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}\ln|x-3| + \dfrac{1}{3}\ln|x+3| \Big|_{-2}^{2}$

$= \dfrac{2}{3}(\ln 1 - \ln 5) + \dfrac{1}{3}(\ln 5 - \ln 1) = -\dfrac{1}{3}\ln 5$ hay $a = 1, b = 3$. Khi đó $a + b = 4$

Chọn phương án B

Câu 58. $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{2x+1}$. Biết $F(0) = 0$, $F(1) = a + \dfrac{b}{c}\ln 3$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó giá trị biểu thức $a + b + c$ bằng

A 4. **B** 3. **C** 12. **D** 9.

Lời giải.

Ta có $F(1) - F(0) = \int\limits_{0}^{1} \left(3x^2 + \dfrac{1}{2x+1}\right) \mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} 3x^2\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} \dfrac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \left(x^3 + \dfrac{1}{2}\ln(2x+1)\right)\Big|_{0}^{1} =$ $1 + \dfrac{1}{2}\ln 3$. Suy ra $a = 1, b = 1, c = 2$, do đó $a + b + c = 4$.

Chọn phương án A

Câu 59. Cho hàm số $g(x) = \int\limits_{x}^{x^2} \dfrac{1}{\ln t}\mathrm{d}t$ với $x > 0$. Đạo hàm của hàm số $g(x)$ bằng

A $g'(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$. **B** $g'(x) = \dfrac{1-x}{\ln x}$. **C** $g'(x) = \dfrac{1}{\ln x}$. **D** $g'(x) = \ln x$.

Lời giải.

Gọi $F(t)$ là nguyên hàm của hàm số $f(t) = \dfrac{1}{\ln t}$, ta có $g(x) = F(x^2) - F(x)$.

Áp dụng công thức đạo hàm của hàm số hợp $g'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = \dfrac{2x}{\ln x^2} - \dfrac{1}{\ln x} = \dfrac{x-1}{\ln x}$.

Chọn phương án A

Câu 60. Giá trị của tích phân $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \max\{\sin x, \cos x\}\mathrm{d}x$ bằng

A 0. **B** 1. **C** $\sqrt{2}$. **D** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \max\{\sin x, \cos x\}\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \max\{\sin x, \cos x\}\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \max\{\sin x, \cos x\}\mathrm{d}x$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = \sqrt{2}.$$

Chọn phương án C

D MỨC ĐỘ 4

Câu 61. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = 2$. Tính $I = \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{f(x)}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$.

A $I = 1$. B $I = 3$. C $I = 2$. D $I = 4$.

Lời giải.

$I = \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{f(x)}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} \dfrac{f(x)}{1+e^x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} \dfrac{f(x)}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2$

Xét $I_1 = \int\limits_{-1}^{0} \dfrac{f(x)}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$. Đặt $x = -t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$, đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = -1 \Rightarrow t = 1$

$I_1 = \int\limits_{1}^{0} \dfrac{f(-t)}{1+e^{-t}}(-\mathrm{d}t) = \int\limits_{0}^{1} \dfrac{e^t.f(t)}{1+e^t}\,\mathrm{d}t.$

Ta có: $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{e^t\cdot f(t)}{1+e^t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{1} \dfrac{e^x\cdot f(x)}{1+e^x}\,\mathrm{d}x.$

Suy ra: $I = \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{f(x)}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} \dfrac{e^t\cdot f(t)}{1+e^t}\,\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{1} \dfrac{f(t)}{1+e^t}\,\mathrm{d}t$

$\Rightarrow I = \int\limits_{0}^{1} \dfrac{\left(1+e^t\right)\cdot f(t)}{1+e^t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$

Chọn phương án A

Câu 62. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trong đoạn $[1;e]$, biết $\int\limits_{1}^{e} \dfrac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = 1, f(e) = 1$.

Tính $I = \int\limits_{1}^{e} f'(x).\ln x\,\mathrm{d}x.$

A $I=4$. **B** $I=3$. **C** $I=1$. **D** $I=0$.

Lời giải.

Xét $\int\limits_1^e f'(x)\cdot\ln x\,\mathrm{d}x$, đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$

Khi đó $\int\limits_1^e f'(x)\cdot\ln x\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot\ln x\big|_1^e - \int\limits_1^e \dfrac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = 1-1=0$

Chọn phương án D

Câu 63. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ thỏa mãn $\int\limits_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x=10$ và $\int\limits_1^2 \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\ln 2$. Biết rằng $f(x)>0, \forall x\in[1;2]$. Tính $f(2)$.

A $f(2)=-10$. **B** $f(2)=10$. **C** $f(2)=-20$. **D** $f(2)=20$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x=10 \Leftrightarrow f(x)\Big|_1^2=10 \Leftrightarrow f(2)-f(1)=10$ (1).

Ta có

$$\int\limits_1^2 \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\ln 2 \Leftrightarrow \ln|f(x)|\Big|_1^2=\ln 2 \Leftrightarrow \ln|f(2)|-\ln|f(1)|=\ln 2$$

$$\Leftrightarrow \ln f(2)-\ln f(1)=\ln 2 \quad \text{vì} \quad f(2)>0, f(1)>0$$

$$\Leftrightarrow \ln\dfrac{f(2)}{f(1)}=\ln 2 \Leftrightarrow \dfrac{f(2)}{f(1)}=2 \quad (2).$$

Từ (1), (2) ta có $f(2)-\dfrac{f(2)}{2}=10 \Leftrightarrow f(2)=20$.

Chọn phương án D

Câu 64. Tính tổng $T=\dfrac{\mathrm{C}_{2018}^0}{3}-\dfrac{\mathrm{C}_{2018}^1}{4}+\dfrac{\mathrm{C}_{2018}^2}{5}-\dfrac{\mathrm{C}_{2018}^3}{6}+\cdots-\dfrac{\mathrm{C}_{2018}^{2017}}{2020}+\dfrac{\mathrm{C}_{2018}^{2018}}{2021}$.

A $\dfrac{1}{4121202989}$. **B** $\dfrac{1}{4121202990}$. **C** $\dfrac{1}{4121202992}$. **D** $\dfrac{1}{4121202991}$.

Lời giải.

Ta có $x^2(1-x)^{2018}=x^2\cdot\sum\limits_{k=0}^{2018}\mathrm{C}_{2018}^k x^k(-1)^k=\sum\limits_{k=0}^{2018}\mathrm{C}_{2018}^k x^{k+2}(-1)^k$.

Do đó $\int\limits_0^1 x^2(1-x)^{2018}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\sum\limits_{k=0}^{2018}\mathrm{C}_{2018}^k x^{k+2}(-1)^k\,\mathrm{d}x$.

Mặt khác $\int\limits_0^1\sum\limits_{k=0}^{2018}\mathrm{C}_{2018}^k x^{k+2}(-1)^k\,\mathrm{d}x=\sum\limits_{k=0}^{2018}\mathrm{C}_{2018}^k\dfrac{x^{k+3}}{k+3}(-1)^k\Bigg|_0^1=\sum\limits_{k=0}^{2018}\mathrm{C}_{2018}^k\cdot\dfrac{(-1)^k}{k+3}=T$.

Đặt $t = 1 - x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1$ và $x = 1 \Rightarrow t = 0$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2(1-x)^{2018}\,\mathrm{d}x &= \int_1^0 t^{2018}(1-t)^2(-\mathrm{d}t)\\
&= \int_0^1 t^{2018}(t^2-2t+1)\,\mathrm{d}t\\
&= \left(\frac{t^{2021}}{2021} - 2\cdot\frac{t^{2020}}{2020} + \frac{t^{2019}}{2019}\right)\Bigg|_0^1\\
&= \frac{1}{2021} - \frac{2}{2020} + \frac{1}{2019}\\
&= \frac{1}{1010\cdot 2019\cdot 2021} = \frac{1}{4121202990}.
\end{aligned}$$

Chọn phương án (B)

Câu 65. Có bao nhiêu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn

$$\int_0^1 (f(x))^{2018}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (f(x))^{2019}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (f(x))^{2020}\,\mathrm{d}x.$$

(A) 3 . (B) 2. (C) 4. (D) 5.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\int_0^1 (f(x))^{2018}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (f(x))^{2020}\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 (f(x))^{2019}\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f(x))^{2018}(f(x)-1)^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

Do đó hoặc $f(x) = 0$ hoặc $f(x) = 1$. Vì $f(x)$ liên tục nên $f(x) = 0, \forall x \in [0;1]$ hoặc $f(x) = 1, \forall x \in [0;1]$.

Chọn phương án (B)

Câu 66. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa $f'(x) - 2018f(x) = 2018\cdot x^{2017}\cdot \mathrm{e}^{2018x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2018$. Giá trị $f(1)$ là

(A) $2019e^{2018}$. (B) $2018\mathrm{e}^{-2018}$. (C) $2018\mathrm{e}^{2018}$. (D) $2017\mathrm{e}^{2018}$.

Lời giải.

Theo đề bài, ta có

$$\begin{aligned}
& f'(x) - 2018\cdot f(x) = 2018\cdot x^{2017}\cdot \mathrm{e}^{2018x}\\
\Leftrightarrow & \mathrm{e}^{-2018x}\cdot f'(x) - 2018\cdot \mathrm{e}^{-2018x}\cdot f(x) = 2018\cdot x^{2017}\\
\Leftrightarrow & \left[\mathrm{e}^{-2018x}\cdot f'(x)\right] = 2018\cdot x^{2017}\\
\Leftrightarrow & \mathrm{e}^{-2018x}\cdot f(x) + C = \int 2018x^{2017}\,\mathrm{d}x\\
\Leftrightarrow & \mathrm{e}^{-2018x}\cdot f(x) + C = x^{2018}
\end{aligned}$$

Thay $x = 0$ ta được $f(0) + C = 0 \Leftrightarrow 2018 + C = 0 \Leftrightarrow C = -2018$
Từ đó ta được $\mathrm{e}^{-2018x} \cdot f(x) - 2018 = x^{2018}$
Thay $x = 1$ ta được

$$\mathrm{e}^{-2018} \cdot f(1) - 2018 = 1 \Leftrightarrow \frac{f(1)}{\mathrm{e}^{2018}} = 2019 \Leftrightarrow f(1) = 2019\mathrm{e}^{2018}.$$

Chọn phương án (A)

Câu 67. Cho số thực $a > 0$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0; a]$ thỏa mãn $f(x) \cdot f(a - x) = 1$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^a \frac{1}{1 + f(x)} \mathrm{d}x$?

(A) $I = \frac{2a}{3}$. (B) $I = \frac{a}{2}$. (C) $I = \frac{a}{3}$. (D) $I = a$.

Lời giải.
Đặt $t = a - x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$.
Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = a; x = a \Rightarrow t = 0$.
Ta có $f(x) \cdot f(a - x) = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{f(a - x)}$.
Vậy $I = \int\limits_a^0 \frac{-\mathrm{d}t}{1 + \frac{1}{f(t)}} = -\int\limits_a^0 \frac{f(t)}{1 + f(t)} \mathrm{d}t = -\int\limits_a^0 \frac{1 + f(t) - 1}{1 + f(t)} \mathrm{d}t$
$= \int\limits_0^a \frac{1 + f(t) - 1}{1 + f(t)} \mathrm{d}t = \int\limits_0^a \left(1 - \frac{1}{1 + f(t)}\right) \mathrm{d}t = \int\limits_0^a \left(1 - \frac{1}{1 + f(x)}\right) \mathrm{d}x = x\big|_0^a - I = a - I$.
Do đó ta có $I = a - I \Leftrightarrow I = \frac{a}{2}$.
Chọn phương án (B)

Câu 68. Cho $I_n = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$, $n \in \mathbb{N}$. Đặt $u_n = 1\left(I_1 + I_2\right) + 2\left(I_2 + I_3\right) + \cdots + n\left(I_n + I_{n+1}\right) - n$. Biết $\lim u_n = L$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) $L \in (-1; 0)$. (B) $L \in (-2; -1)$. (C) $L \in (0; 1)$. (D) $L \in (1; 2)$.

Lời giải.
Ta có

$$I_n + I_{n-1} = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx} + \mathrm{e}^{-(n-1)x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}} \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-(n-1)x} \mathrm{d}x = -\frac{1}{n-1} \mathrm{e}^{-(n-1)x}\Big|_0^1 = -\frac{1}{n-1}\left(\mathrm{e}^{-(n-1)} - 1\right).$$

Do đó $(n - 1)\left(I_{n-1} + I_n\right) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{n-1}}$. Suy ra

$$u_n = -\left[\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n + \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n-1} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{e}}\right].$$

Nên $-u_n = \frac{\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{\mathrm{e}} - 1} - 1$ và $\lim u_n = \frac{1}{1 - \mathrm{e}}$. Vậy $L \in (-1; 0)$.

Chọn phương án A

Câu 69. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $f(0)=2017$, $f(2)=2018$. Tính $S=[f(3)-2018]\cdot[f(-1)-2017]$.

A $S=1$. **B** $S=1+\ln^2 2$. **C** $S=2\ln 2$. **D** $S=\ln^2 2$.

Lời giải.

Ta có

— $f(3)-2018=f(3)-f(2)=\displaystyle\int_2^3 f'(x)\,\mathrm{d}x=\int_2^3 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x=\ln(x-1)|_2^3=\ln 2.$

— $2017-f(-1)=f(0)-f(-1)=\displaystyle\int_{-1}^0 f'(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x=\ln|x-1||_{-1}^0=-\ln 2.$

Do đó $f(-1)-2017=\ln 2$.

Vậy $S=[f(3)-2018]\cdot[f(-1)-2017]=(\ln 2)\cdot(\ln 2)=\ln^2 2$.

Chọn phương án D

Câu 70. Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $\begin{cases} f(x).f(a-x)=1\\ f(x)>0,\forall x\in[0;a]\end{cases}$ và $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)}=\frac{ba}{c}$, trong đó b,c là hai số nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó $b+c$ có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

A $(11;22)$. **B** $(0;9)$. **C** $(7;21)$. **D** $(2017;2020)$.

Lời giải.

Đặt $t=a-x\Rightarrow dt=-dx$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=a; x=a\Rightarrow t=0$.

Lúc đó $I=\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)}=\int_a^0 \frac{-dt}{1+f(a-t)}=\int_0^a \frac{dx}{1+f(a-x)}=\int_0^a \frac{dx}{1+\frac{1}{f(x)}}=\int_0^a \frac{f(x)dx}{1+f(x)}$.

Suy ra $2I=I+I=\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)}+\int_0^a \frac{f(x)dx}{1+f(x)}=\int_0^a 1dx=a$.

Do đó $I=\dfrac{1}{2}a\Rightarrow b=1;c=2\Rightarrow b+c=3$.

Chọn phương án B

Câu 71. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y=F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0;4\pi)$?

A 2. **B** 1. **C** 3. **D** 0.

Lời giải.

Ta có $F'(x) = f(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ trên $(0; 4\pi)$.

$F'(x) = f(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x\cos x - \sin x = 0$ trên $(0; 4\pi)$.

Đặt $g(x) = x\cos x - \sin x$ trên $(0; 4\pi)$.

Ta có $g'(x) = -x \cdot \sin x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi \\ x = 2\pi \\ x = 3\pi \end{array}\right.$ trên $(0; 4\pi)$.

Từ đó có bảng biến thiên của $g(x)$:

x	0		π	x_1	2π	x_2	3π	x_3	4π
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0		$-\pi$	0	2π	0	-3π	0	4π

Vì $g(x)$ liên tục và đồng biến trên $[\pi; 2\pi]$ và $g(\pi) \cdot g(2\pi) < 0$ nên tồn tại duy nhất $x_1 \in (\pi; 2\pi)$ sao cho $g(x_1) = 0$.

Tương tự ta có $g(x_2) = 0$, $g(x_3) = 0$ với $x_2 \in (2\pi; 3\pi)$, $x_3 \in (3\pi; 4\pi)$.

Từ bảng biến thiên của $g(x)$ ta thấy $g(x) < 0$ khi $x \in (0; x_1)$ và $x \in (x_2; x_3)$; $g(x) > 0$ khi $x \in (x_1; x_2)$ và $x \in (x_3; 4\pi)$.

Dấu của $f(x)$ là dấu của $g(x)$ trên $(0; 4\pi)$. Do đó ta có bảng biến thiên của $F(x)$:

x	0		x_1		x_2		x_3		4π
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$			CT		CĐ		CT		

Vậy hàm số $y = F(x)$ có 3 cực trị.

Chọn phương án C

Câu 72. Số điểm cực trị của hàm số $f(x) = \displaystyle\int\limits_{2x}^{x^2} \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ là

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Gọi $F(t)$ là nguyên hàm của hàm số $y = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

Khi đó $f(x) = F(t)\Big|_{2x}^{x^2} = F(x^2) - F(2x)$.

$\Rightarrow f'(x) = 2xF'(x^2) - 2F'(2x) = 2x \cdot \dfrac{2x^2}{1+x^4} - 2 \cdot \dfrac{4x}{1+4x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{8x^5 + 4x^3 - 8x}{(1+x^4)(1+4x^2)}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x^5 + 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow 4x(2x^4 + x^2 - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = 0\\ &x^2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\\ &x^2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4} < 0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = 0\\ &x = x_1 = \frac{\sqrt{-1+\sqrt{17}}}{2}\\ &x = x_2 = -\frac{\sqrt{-1+\sqrt{17}}}{2}. \end{aligned}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_2		0		x_1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$+\infty$

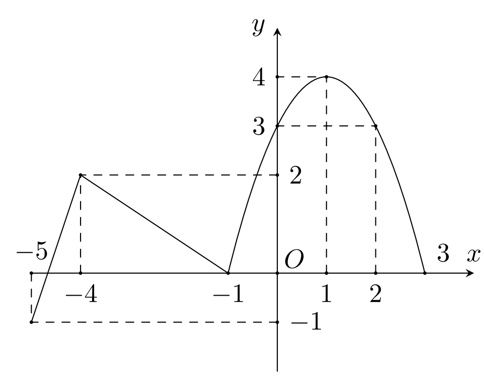
Từ bảng biến thiên suy ra: Hàm số có 3 điểm cực trị.

Chọn phương án D

Câu 73.

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[-5;3]$ như hình vẽ bên (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y = ax^2+bx+c$). Biết $f(0) = 0$, giá trị của $2f(-5)+3f(2)$ bằng

A 33. **B** $\frac{109}{3}$. **C** $\frac{35}{3}$. **D** 11.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị đã cho ta tính được $f'(x) = \begin{cases} 3x+14 & \text{nếu } -5 \le x \le -4\\ -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3} & \text{nếu } -4 \le x \le -1\\ -x^2+2x+3 & \text{nếu } x \ge -1. \end{cases}$

Ta có

— $f(-4) - f(-5) = \displaystyle\int_{-5}^{-4} f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-5}^{-4} (3x+14)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Suy ra $f(-4) - f(-5) = -\frac{1}{2}$. (1)

— $f(-1) - f(-4) = \displaystyle\int_{-4}^{-1} f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-4}^{-1} \left(-\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right)\,\mathrm{d}x = 3$. Suy ra $f(-1) - f(-4) = 3$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $f(-1) - f(-5) = \frac{7}{2}$. (3)

Mặt khác,

— $f(0) - f(-1) = \displaystyle\int_{-1}^{0} f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (-x^2+2x+3)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{3}$. Suy ra $f(0) - f(-1) = \frac{5}{3}$. (4)

— $f(2)-f(0)=\int\limits_0^2 f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^2(-x^2+2x+3)\,\mathrm{d}x=\dfrac{22}{3}$. Suy ra $f(2)-f(0)=\dfrac{22}{3}$. (5)

Mà $f(0)=0$, từ (4) và (5) suy ra $f(-1)=-\dfrac{5}{3}$, $f(2)=\dfrac{22}{3}$.

Do đó, từ (3) suy ra $f(-5)=f(-1)-\dfrac{7}{2}=-\dfrac{5}{3}-\dfrac{7}{2}=-\dfrac{31}{6}$.

Vậy $2f(-5)+3f(2)=2\cdot\left(-\dfrac{31}{6}\right)+3\cdot\dfrac{22}{3}=\dfrac{35}{3}$.

Chọn phương án C

Câu 74. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $[-1;0]$. Biết $f'(x)=\left(3x^2+2x\right)\mathrm{e}^{-f(x)}$, $\forall x\in[-1;0]$. Tính giá trị biểu thức $A=f(0)-f(-1)$.

A $A=-1$. **B** $A=1$. **C** $A=0$. **D** $A=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Lời giải.

Vì $f'(x)=\left(3x^2+2x\right)\mathrm{e}^{-f(x)}$ nên $f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}=3x^2+2x$

$$\Rightarrow \int f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x=\int\left(3x^2+2x\right)\,\mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{f(x)}=x^3+x^2+C.$$

Ta có $\mathrm{e}^{f(0)}=C$ và $\mathrm{e}^{f(-1)}=C$.

Khi đó $\mathrm{e}^{f(0)}=\mathrm{e}^{f(-1)}\Leftrightarrow \mathrm{e}^{f(0)-f(-1)}=1\Leftrightarrow f(0)-f(-1)=0$.

Vậy $A=0$.

Chọn phương án C

Câu 75. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]\,\mathrm{d}x=2-\dfrac{\pi}{2}$. Tính $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $\dfrac{\pi}{4}$. **B** 1. **C** 0. **D** $\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\,\mathrm{d}x=\frac{2-\pi}{2}$$
$$\Leftrightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\,\mathrm{d}x=\frac{2-\pi}{2}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\,\mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2\,\mathrm{d}x=\frac{2-\pi}{2}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\,\mathrm{d}x.$$

Mặt khác ta có $\dfrac{2-\pi}{2}+\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\,\mathrm{d}x=\dfrac{2-\pi}{2}+\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos(2x-\dfrac{\pi}{2})\right)\,\mathrm{d}x=0.$

Vậy $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^2\,\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0.$

Nên ta có $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\,\mathrm{d}x=-\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0.$

Chọn phương án C

BẢNG ĐÁP ÁN

1. D	2. D	3. C	4. B	5. B	6. B	7. B	8. B	9. C	10. A
11. B	12. C	13. C	14. A	15. C	16. A	17. B	18. C	19. D	20. D
21. A	22. B	23. A	24. C	25. A	26. D	27. A	28. A	29. B	30. B
31. A	32. B	33. D	34. D	35. D	36. C	37. B	38. A	39. B	40. C
41. B	42. A	43. B	44. A	45. A	46. B	47. C	48. D	49. C	50. D
51. C	52. C	53. D	54. A	55. C	56. C	57. B	58. A	59. A	60. C
61. A	62. D	63. D	64. B	65. B	66. A	67. B	68. A	69. D	70. B
71. C	72. D	73. C	74. C	75. C					

DẠNG 19. XÁC ĐỊNH SỐ PHỨC LIÊN HỢP KHI ĐÃ BIẾT SỐ PHỨC

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Số phức liên hợp của số phức $z = 2 + i$ là

A $\overline{z} = -2 + i$. . **B** $\overline{z} = -2 - i$. **C** $\overline{z} = 2 - i$. **D** $\overline{z} = 2 + i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức $z = 2 + i$ và $\overline{z} = 2 - i$.

Chọn phương án C

Câu 1. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Số phức liên hợp của số phức z là:

A $\overline{z} = 3 - 2i$. **B** $\overline{z} = 3 + 2i$. **C** $\overline{z} = -2 - 3i$. **D** $\overline{z} = 2 + 3i$.

Lời giải.

Do định nghĩa số phức liên hợp nên số phức liên hợp của $z = 2 - 3i$ là $\overline{z} = 2 + 3i$.

Chọn phương án D

Câu 2. Số phức liên hợp của $z = 4 + 3i$ là

A $\overline{z} = -3 + 4i$. **B** $\overline{z} = 4 - 3i$. **C** $\overline{z} = 3 + 4i$. **D** $\overline{z} = 3 - 4i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của $z = 4 + 3i$ là $\overline{z} = 4 - 3i$.

Chọn phương án B

Câu 3. Tìm phần thực và phần ảo của số phức liên hợp của số phức $z = 1 + i$.

A Phần thực là 1, phần ảo là -1. **B** Phần thực là 1, phần ảo là $-i$.

C Phần thực là 1, phần ảo là 1. **D** Phần thực là 1, phần ảo là i.

Lời giải.

$\bar{z} = 1 - i$, phần thực bằng 1, phần ảo bằng -1.

Chọn phương án A

Câu 4. Cho số phức $z = 2018 - 2017i$. Điểm M biểu diễn của số phức liên hợp của z là

A $M(-2018; 2017)$. **B** $M(2018; -2017)$. **C** $M(-2018; -2017)$. **D** $M(2018; 2017)$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của $z = 2018 - 2017i$ là $\overline{z} = 2018 + 2017i$.

Suy ra điểm biểu diễn của $\overline{z}$ là $M(2018; 2017)$.

Chọn phương án D

Câu 5. Tìm số phức liên hợp của của số $z = 5 + i$.

A $\overline{z} = 5 - i$. **B** $\overline{z} = -5 - i$. **C** $\overline{z} = 5 + i$. **D** $\overline{z} = -5 + i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của của số $a + bi$ là $a - bi$. Do đó $\overline{z} = 5 - i$.

Chọn phương án A

Câu 6. Số phức liên hợp của số phức $z = 6 - 4i$ là

A $\bar{z} = -6 + 4i$. **B** $\bar{z} = 4 + 6i$. **C** $\bar{z} = 6 + 4i$. **D** $\bar{z} = -6 - 4i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức $6 - 4i$ là $6 + 4i$.

Chọn phương án C

Câu 7. Cho số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A $|z| = \sqrt{a + b}$ là mô-đun của z. **B** $\bar{z} = a - bi$ là số phức liên hợp của z.

C a là phần thực của z. **D** b là phần ảo của z.

Lời giải.

Theo định nghĩa có $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Vậy $|z| = \sqrt{a + b}$ là mô-đun của z là mệnh đề sai.

Chọn phương án A

Câu 8. Cho số phức $z = 2 + i$. Số phức liên hợp $\bar{z}$ có phần thực, phần ảo lần lượt là

A 2 và 1. **B** -2 và -1. **C** -2 và 1. **D** 2 và -1.

Lời giải.

$z = 2 + i \Rightarrow \bar{z} = 2 - i$. Vậy $\bar{z}$ có phần thực, phần ảo lần lượt là 2 và -1.

Chọn phương án D

Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn $(1 + 2i)z = 4 - 3i + 2z$. Số phức liên hợp của số phức z là

A $\bar{z} = 2 + i$. **B** $\bar{z} = -2 + i$. **C** $\bar{z} = -2 - i$. **D** $\bar{z} = 2 - i$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$.

Ta có: $(1 + 2i)z = 4 - 3i + 2z \Leftrightarrow (-1 + 2i)z = 4 - 3i \Leftrightarrow z = -2 - i$.

Vậy $\bar{z} = -2 + i$.

Chọn phương án B

Câu 10. Số phức liên hợp của số phức $z = 7i + 2$ là

A $\bar{z} = 7i - 2$. **B** $\bar{z} = 2 - 7i$. **C** $\bar{z} = -2 - 7i$. **D** $\bar{z} = 2 + 7i$.

Lời giải.

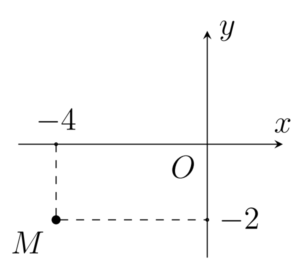
Số phức liên hợp của $z = a + bi$ là $\bar{z} = a - bi$ với $(a, b \in \mathbb{R})$.

Chọn phương án B

Câu 11.

Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z. Số phức liên hợp của iz là

A $2 + 4i$. **B** $-4 + 2i$. **C** $-4 - 2i$. **D** $2 - 4i$.



Lời giải.

Từ hình vẽ, ta thấy $z = -4 - 2i \Rightarrow iz = 2 - 4i \Rightarrow \overline{iz} = 2 + 4i$.

Chọn phương án A

Nhóm: PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA

Câu 12. Cho số phức $z = 2 + i$. Tìm số phức liên hợp của z.

(A) $\overline{z} = -2 - i$. (B) $\overline{z} = 1 - 2i$. (C) $\overline{z} = 2 - i$. (D) $\overline{z} = 1 + 2i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của z là $\overline{z} = 2 - i$.

Chọn phương án (C)

Câu 13. Cho số phức $z = 2 + i$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn của số phức liên hợp của số phức z.

(A) $(-2; -1)$. (B) $(-2; 1)$. (C) $(2; 1)$. (D) $(2; -1)$.

Lời giải.

Dễ thấy $\overline{z} = 2 - i$, điểm biểu diễn tương ứng có tọa độ là $(2; -1)$.

Chọn phương án (D)

Câu 14. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Số phức liên hợp $\overline{z}$ của số phức z là

(A) $\overline{z} = -3 + 2i$. (B) $\overline{z} = 2 + 3i$. (C) $\overline{z} = -2 + 3i$. (D) $\overline{z} = -2 - 3i$.

Lời giải.

$z = 2 - 3i \Rightarrow \overline{z} = 2 + 3i$.

Chọn phương án (B)

Câu 15. Số phức liên hợp của số phức $z = i(1 - 2i)$ có điểm biểu diễn là điểm nào dưới đây?

(A) $E(2; -1)$. (B) $B(-1; 2)$. (C) $A(1; 2)$. (D) $F(-2; 1)$.

Lời giải.

Ta có: $z = i(1 - 2i) = 2 + i \Rightarrow \overline{z} = 2 - i$ nên điểm biểu diễn của số phức $\overline{z}$ là $E(2; -1)$.

Chọn phương án (A)

Câu 16. Cho số phức $z = 6 - 7i$. Tìm số phức liên hợp của số phức z.

(A) $\overline{z} = -6 + 7i$. (B) $\overline{z} = -6 - 7i$. (C) $\overline{z} = 6 + 7i$. (D) $\overline{z} = -i$.

Lời giải.

Ta có $\overline{z} = 6 + 7i$.

Chọn phương án (C)

Câu 17. Cho số phức $z = 1 + 3i$. Gọi M là điểm biểu diễn của số phức liên hợp $\overline{z}$. Tọa độ điểm M là

(A) $M(-1; -3)$. (B) $M(1; 3)$. (C) $M(1; -3)$. (D) $M(-1; 3)$.

Lời giải.

Số phức liên hợp $\overline{z} = 1 - 3i$ nên $M(1; -3)$.

Chọn phương án (C)

Câu 18. Số phức $z = 2 - 3i$ có số phức liên hợp là

(A) $3 - 2i$. (B) $2 + 3i$. (C) $-2 + 3i$. (D) $3 + 2i$.

Lời giải.

$\overline{z} = \overline{2 - 3i} = 2 + 3i$.

Chọn phương án (B)

Câu 19. Cho số phức $z = 5 + 8i$. Số phức liên hợp của z là

A $\overline{z} = 5 + 8i$. **B** $\overline{z} = -5 - 8i$. **C** $\overline{z} = -5 + 8i$. **D** $\overline{z} = 5 - 8i$.

Lời giải.

Ta có $z = x + yi \Rightarrow \overline{z} = x - yi$. Suy ra số phức liên hợp của $z = 5 + 8i$ là $\overline{z} = 5 - 8i$

Chọn phương án D

Câu 20. Số phức liên hợp của số phức $z = a + bi$ là số phức

A $\overline{z} = -a + bi$. **B** $\overline{z} = b - ai$. **C** $\overline{z} = -a - bi$. **D** $\overline{z} = a - bi$.

Lời giải.

Chọn phương án D

B MỨC ĐỘ 2

Câu 21. Tìm các số thực a và b thỏa mãn $2a + (b + i)i = 1 + 2i$ với i là đơn vị ảo.

A $a = 0,\ b = 2$. **B** $a = \frac{1}{2},\ b = 1$. **C** $a = 0,\ b = 1$. **D** $a = 1,\ b = 2$.

Lời giải.

Ta có $2a + (b + i)i = 1 + 2i \Leftrightarrow (2a - 1) + bi = 1 + 2i \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2. \end{cases}$

Chọn phương án D

Câu 22. Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x + 2yi) + (3 - i) = 4x - 3i$ với i là đơn vị ảo.

A $x = 3; y = -1$. **B** $x = \frac{2}{3}; y = -1$. **C** $x = 3; y = -3$. **D** $x = -3; y = -1$.

Lời giải.

Ta có

$$(3x + 2yi) + (3 - i) = 4x - 3i \Leftrightarrow (3x + 3) + (2y - 1)i = 4x - 3i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3 = 4x \\ 2y - 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1. \end{cases}$$

Chọn phương án A

Câu 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z biết $|z - (2 - 3i)| \leq 2$.

A Một đường thẳng. **B** Một hình tròn. **C** Một đường tròn. **D** Một đường elip.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$, $|z - (2 - 3i)| = |(x - 2) + (y + 3)\,i| = \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 3)^2}$.

Do đó $|z - (2 - 3i)| \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 3)^2} \leq 2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 \leq 4$.

Vậy điểm biểu diễn số phức z nằm trên hình tròn có bán kính $r = 2$.

Chọn phương án B

Câu 24 (2D4B1-2). Cho số phức $z = 2 + 5i$. Điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng Oxy có tọa độ là

A $(5; 2)$. **B** $(2; 5)$. **C** $(-2; 5)$. **D** $(2; -5)$.

Lời giải.

Phương pháp: Số phức $z = a + bi, (a; b \in \mathbb{R})$ có điểm biểu diễn số phức trong mặt phẳng Oxy là $(a; b)$.

Cách giải: Điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng Oxy có tọa độ là $(2; 5)$.

Chọn phương án B

Câu 25. Cho số phức z thỏa mãn $(1 - \sqrt{3}i)^2 z = 4 - 3i$. Môđun của z bằng

A. $\frac{5}{4}$. B. $\frac{5}{2}$. C. $\frac{2}{5}$. D. $\frac{4}{5}$.

Lời giải.

Cách 1: Ta có $z = \frac{4 - 3i}{(1 - \sqrt{3}i)^2} = \frac{-4 + 3\sqrt{3}}{8} + \frac{3 + 4\sqrt{3}}{8}i$

Suy ra $|z| = \left|\frac{-4 + 3\sqrt{3}}{8} + \frac{3 + 4\sqrt{3}}{8}i\right| = \sqrt{\left(\frac{-4 + 3\sqrt{3}}{8}\right)^2 + \left(\frac{3 + 4\sqrt{3}}{8}\right)^2} = \frac{5}{4}$

Cách 2: Ta có $z = \frac{4 - 3i}{(1 - \sqrt{3}i)^2}$ Suy ra $|z| = \frac{|4 - 3i|}{(1 - \sqrt{3}i)^2|} = \frac{|4 - 3i|}{|-2 - 2\sqrt{3}i|} = \frac{5}{4}$

Chọn phương án A

Câu 26. Cho số phức $z = \frac{(2 - 3i)(4 - i)}{3 + 2i}$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng Oxy.

A. $(1; 4)$. B. $(-1; 4)$. C. $(-1; -4)$. D. $(1; -4)$.

Lời giải.

Ta có

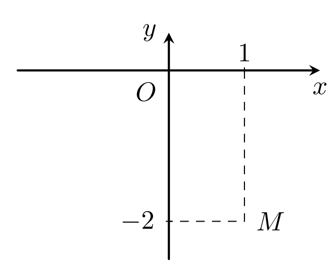
$$\begin{aligned} z = \frac{(2 - 3i)(4 - i)}{3 + 2i} &= \frac{(8 - 3) - (2 + 12)i}{3 + 2i} \\ &= \frac{5 - 14i}{3 + 2i} \\ &= \frac{(5 - 14i)(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} \\ &= \frac{(15 - 28) - (10 + 42)i}{9 + 4} \\ &= \frac{-13 - 52i}{13} = -1 - 4i. \end{aligned}$$

Vậy điểm biểu diễn số phức $z$trên mặt phẳng Oxy là $M(-1; -4)$.

Chọn phương án C

Câu 27.

Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.



A. Phần thực là -2 và phần ảo là i.

B. Phần thực là 1 và phần ảo là -2.

C. Phần thực là 1 và phần ảo là $-2i$.

D. Phần thực là -2 và phần ảo là 1.

Lời giải.

Điểm M có tọa độ $M(1;-2)$ nên $z=1-2i$.
Vậy phần thực là 1 và phần ảo là -2.
Chọn phương án (B)

Câu 28. Cho 4 điểm M, N, P, Q là các điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số $-i, 2+i, 5, 1+4i$. Hỏi điểm nào là trọng tâm của tam giác tạo bởi ba điểm còn lại?

(A) M. **(B)** N. **(C)** P. **(D)** Q.

Lời giải.
Ta có: $M(0;-1), N(2;1), P(5;0), Q(1;4)$ nên điểm N là trọng tâm của tam giác MPQ.
Chọn phương án (B)

Câu 29. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn cho số phức z trong mặt phẳng phức thỏa mãn điều kiện $|z-i|=|z+i|$ là

(A) một đường thẳng. **(B)** một đường tròn. **(C)** một đường elip. **(D)** một đoạn thẳng.

Lời giải.
Giả sử $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$.
$|z-i|=|z+i| \Leftrightarrow |x+(y-1)i|=|x+(y+1)i| \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=x^2+(y+1)^2 \Leftrightarrow y=0$.
Chọn phương án (A)

Câu 30. Cho số phức z thay đổi, thỏa mãn $|z-i|=|z-1+2i|$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $\omega=z+2i$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Phương trình đường thẳng đó là

(A) $x-4y+3=0$. **(B)** $x+3y+4=0$. **(C)** $x-3y+4=0$. **(D)** $-x+3y+4=0$.

Lời giải.
Đặt $\omega=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$. Khi đó, $z=\omega-2i=x+(y-2)i$. Suy ra $|z-i|=|z-1+2i| \Leftrightarrow |x+(y-3)i|=|x-1+yi|$, hay tương đương với $x^2+(y-3)^2=(x-1)^2+y^2 \Leftrightarrow x-3y+4=0$.
Chọn phương án (C)

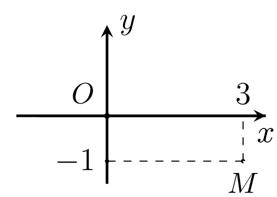
Câu 31. Cho số phức z thỏa mãn $\overline{z}-3+i=0$. Môđun của z bằng bao nhiêu?

(A) $\sqrt{10}$. **(B)** 10. **(C)** $\sqrt{3}$. **(D)** 4.

Lời giải.
Ta có $|z|=|\overline{z}|=|3-i|=\sqrt{10}$.
Chọn phương án (A)

Câu 32.
Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức

(A) $z=1-3i$. **(B)** $z=-1+3i$. **(C)** $z=3+i$. **(D)** $z=3-i$.



Lời giải.
Điểm $M(3;-1)$ là biểu diễn cho số phức $z=3-i$.
Chọn phương án (D)

Câu 33. Cho số phức $z = 2i - 8$. Số phức liên hợp của z là

A $\overline{z} = 2i + 8$. **B** $\overline{z} = -2i + 8$. **C** $\overline{z} = 2i + 8$. **D** $\overline{z} = -2i - 8$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của z là $\overline{z} = -2i - 8$.

Chọn phương án D

Câu 34. Trong mặt phẳng phức cho các điểm $A(-4;1)$, $B(1;3)$, $C(-6;0)$ lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2, z_3. Trọng tâm G của tam giác ABC là điểm biểu diễn của số phức nào sau đây?

A $-3 + \frac{4}{3}i$. **B** $3 + \frac{4}{3}i$. **C** $3 - \frac{4}{3}i$. **D** $-3 - \frac{4}{3}i$.

Lời giải.

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $\begin{cases} x_G = -3 \\ y_G = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(-3; \frac{4}{3}\right)$ là điểm biểu diễn của số phức $-3 + \frac{4}{3}i$.

Chọn phương án A

Câu 35. Cho số phức $z = \sqrt{7} - 3i$. Tính $|z|$.

A $|z| = 5$. **B** $|z| = 3$. **C** $|z| = 4$. **D** $|z| = 16$.

Lời giải.

Ta có $|z| = \sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2 + (3)^2} = 4$.

Chọn phương án C

Câu 36. Cho số phức $z = 3 - 2\mathrm{i}$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $w = z + \mathrm{i}\overline{z}$.

A $M(1;1)$. **B** $M(1;-5)$. **C** $M(5;-5)$. **D** $M(5;1)$.

Lời giải.

Ta có $w = 3 - 2\mathrm{i} + \mathrm{i}(3 + 2\mathrm{i}) \Leftrightarrow w = 3 - 2\mathrm{i} + 3\mathrm{i} - 2 \Leftrightarrow w = 1 + \mathrm{i}$.

Chọn phương án A

Câu 37. Điểm $M(3;-1)$ là điểm biểu diễn số phức nào sau đây?

A $z = -1 + 3i$. **B** $z = 1 - 3i$. **C** $z = 3 - i$. **D** $z = -3 + i$.

Lời giải.

Số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$ có điểm biểu diễn là $M(a;b)$.

Chọn phương án C

Câu 38. Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = 2$, $z_2 = 4i$, $z_3 = 2 + 4i$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Tính diện tích tam giác ABC.

A 8. **B** 2. **C** 6. **D** 4.

Lời giải.

Ta có $A(2;0)$, $B(0;4)$, $C(2;4)$ suy ra $AB = 2\sqrt{5}$, $AC = 4$, $BC = 2$ suy ra tam giác ABC vuông tại C nên $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = 4$.

Chọn phương án D

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị thực x, y sao cho: $x-1-yi=y+(2x-5)i$.

(A) $x=3, y=2$. (B) $x=2, y=1$. (C) $x=-2, y=-1$. (D) $x=-2, y=9$.

Lời giải.

$x-1-yi=y+(2x-5)i \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 & =y \\ -y & =2x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y & =1 \\ 2x+y & =5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1. \end{cases}$

Chọn phương án (B)

Câu 40. Cho số phức $z=a+(a-5)\mathrm{i}$ với $a \in \mathbb{R}$. Tìm a để điểm biểu diễn của số phức nằm trên đường phân giác của góc phần tư thứ hai và thứ tư

(A) $a=-\dfrac{1}{2}$. (B) $a=\dfrac{5}{2}$. (C) $a=0$. (D) $a=\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Để thỏa mãn bài toán suy ra $a-5=-a \Leftrightarrow 2a-5=0 \Leftrightarrow a=\dfrac{5}{2}$.

Chọn phương án (B)

C MỨC ĐỘ 3

Câu 41. Xét các số phức z thỏa mãn $(z+2i)(\overline{z}+2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn, tâm của đường tròn đó có tọa độ là

(A) $(1;-1)$. (B) $(1;1)$. (C) $(-1;1)$. (D) $(-1;-1)$.

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi,\ (a,b \in \mathbb{R})$, ta được

$$\begin{aligned}(z+2i)(\overline{z}+2) &= [a+(b+2)i][(a+2)-bi] \\ &= [a(a+2)+b(b+2)]+[(a+2)(b+2)-ab]i.\end{aligned}$$

$(z+2i)(\overline{z}+2)$ là số thuần ảo khi và chỉ khi

$$a(a+2)+b(b+2)=0 \Leftrightarrow (a+1)^2+(b+1)^2=2$$

nên tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn phương trình

$$(x+1)^2+(y+1)^2=2$$

có tâm $I(-1;-1)$.

Chọn phương án (D)

Câu 42. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2=2|z+\overline{z}|+4$ và $|z-1-i|=|z-3+3i|$?

(A) 4. (B) 3. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$ $(x;y \in \mathbb{R})$.

Ta có

$$\begin{aligned} & |z|^2 = 2|z+\overline{z}|+4 \\ \Leftrightarrow\ & x^2+y^2 = 4|x|+4 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x^2+y^2-4x-4=0,\ x\geq 0 \quad (1) \\ x^2+y^2+4x-4=0,\ x<0. \quad (2) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} & |z-1-i| = |z-3+3i| \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)^2+(y-1)^2 = (x-3)^2+(y+3)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 4x = 8y+16 \\ \Leftrightarrow\ & x = 2y+4 \quad (3) \end{aligned}$$

+ Thay (3) vào (1) ta được

$$\begin{aligned} & (2y+4)^2+y^2-4(2y+4)-4=0 \\ \Leftrightarrow\ & 5y^2+8y-4=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{2}{5} \Rightarrow x=\dfrac{24}{5}\ \text{(nhận)} \\ y=-2 \Rightarrow x=0\ \text{(nhận)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

+ Thay (3) vào (2) ta được

$$\begin{aligned} & (2y+4)^2+y^2+4(2y+4)-4=0 \\ \Leftrightarrow & 5y^2+24y+28=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} y=-2 \Rightarrow x=0\ \text{(loại)} \\ y=-\dfrac{14}{5} \Rightarrow x=-\dfrac{8}{5}\ \text{(nhận)} \end{array}\right.. \end{aligned}$$

Vậy có 3 số phức thỏa điều kiện.

Chọn phương án B

Câu 43. Tính tổng của tất cả các giá trị của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn đồng thời $|z|=m$ và $|z-4m+3mi|=m^2$.

A 4. **B** 6. **C** 9. **D** 10.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$. Khi đó, điểm biểu diễn của z là $M(x;y)$.

Với $m=0$, ta có $z=0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m>0$, ta có

— $|z|=m \Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn (C_1) tâm $I(0;0)$, bán kính $R=m$.

— $|z-4m+3mi|=m^2 \Leftrightarrow (x-4m)^2+(y+3m)^2=m^4 \Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn (C_2) tâm $I'(4m;-3m)$, bán kính $R'=m^2$.

— Có duy nhất một số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ khi (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} II' = R + R' \\ II' = |R - R'| \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 5m = m^2 + m \\ 5m = |m^2 - m| \end{array}\right. \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = 6 \end{array}\right.$.

Suy ra, tập giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là $\{0; 4; 6\}$. Do đó, tổng tất cả các giá trị của m là 10.
Chọn phương án D

Câu 44. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|(1+i)z - 5 + i| = 2$ là một đường tròn tâm I và bán kính R lần lượt là

(A) $I(2; -3), R = \sqrt{2}$. (B) $I(2; -3), R = 2$. (C) $I(-2; 3), R = \sqrt{2}$. (D) $I(-2; 3), R = 2$.

Lời giải.

Gọi số phức $z = x + yi$.

$$\begin{aligned} & |(1+i)z - 5 + i| = 2 \\ \Leftrightarrow\ & |(1+i)(x+yi) - 5 + i| = 2 \\ \Leftrightarrow\ & |(x-y-5) + (x+y+1)i| = 2 \\ \Leftrightarrow\ & (x-y-5)^2 + (x+y+1)^2 = 4 \\ \Leftrightarrow\ & (x-y)^2 - 10(x-y) + 25 + (x+y)^2 + 2(x+y) + 1 = 4 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2 + 2y^2 - 8x + 12y + 22 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + y^2 - 4x + 6y + 11 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-2)^2 + (y+3)^2 = 2 \end{aligned}$$

. Vậy đường tròn biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện bài toán có tâm $I(2; -3), R = \sqrt{2}$.
Chọn phương án A

Câu 45. Trong hệ tọa độ Oxy, cho điểm M biểu diễn số phức $z = -2 + 3\mathrm{i}$. Gọi N là điểm thuộc đường thẳng $y = 3$ sao cho tam giác OMN cân tại O. Điểm N là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?

(A) $z = 3 - 2\mathrm{i}$. (B) $z = -2 - 3\mathrm{i}$. (C) $z = 2 + 3\mathrm{i}$. (D) $z = -2 + \mathrm{i}$.

Lời giải.

Do giả thiết suy ra tọa độ $M(-2; 3)$ nên M thuộc đường thẳng $y = 3$. Vì tam giác OMN cân tại O suy ra N đối xứng với M qua Oy nên tọa độ điểm $N(2; 3)$. Khi đó điểm N là biểu diễn của số phức $z = 2 + \mathrm{i}$.

Chọn phương án C

Câu 46. Giả sử z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên hệ tọa độ Oxy. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng MN là

(A) $(1; 0)$. (B) $(1; 1)$. (C) $(0; 0)$. (D) $(0; 1)$.

Lời giải.

Ta có $z^2 - 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 + 2\mathrm{i} \\ z = 1 - 2\mathrm{i} \end{array}\right.$. Không mất tính tổng quát giả sử $z_1 = 1 + 2\mathrm{i}$ và $z_2 = 1 - 2\mathrm{i}$ do đó tọa độ điểm $M(1;2)$ và $N(1;-2)$. Gọi I là trung điểm của MN ta suy ra tọa độ $I(1;0)$.
Chọn phương án A

Câu 47. Cho số phức z thoả mãn $z - 4 = (1+i)|z| - (4+3z)i$. Môđun của số phức z bằng

A 2. **B** 1. **C** 16. **D** 4.

Lời giải.

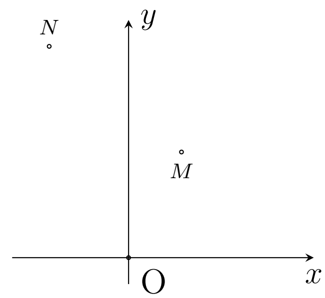
Đặt $z = a + bi$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
& a + bi - 4 = (1+i)\sqrt{a^2+b^2} - (4 + 3a + 3bi)i \\
\Leftrightarrow\ & a - 4 + bi = \sqrt{a^2+b^2} + i\sqrt{a^2+b^2} - (4+3a)i + 3b \\
\Leftrightarrow\ & a - 3b - \sqrt{a^2+b^2} - 4 + (b - \sqrt{a^2+b^2} + 3a + 4)i = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a - 3b - \sqrt{a^2+b^2} - 4 = 0 \\ 3a + b - \sqrt{a^2+b^2} + 4 = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a - 3b - \sqrt{a^2+b^2} - 4 = 0 \\ 2a + 4b + 8 = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} -2b - 4 - 3b - \sqrt{(-2b-4)^2+b^2} - 4 = 0 \\ a = -2b - 4 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} \sqrt{(-2b-4)^2+b^2} = 5b + 8 \\ a = -2b - 4 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} 5b^2 + 16b + 16 = 25b^2 + 80b + 64 \\ a = -2b - 4 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} 20b^2 + 64b + 48 = 0 \\ a = -2b - 4 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = -\dfrac{6}{5} \\ a = -\dfrac{8}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} b = -2 \\ a = 0 \end{cases} \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

Với cả hai trường hợp ta đều có $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = 2$.
Chọn phương án A

Câu 48.

Cho số phức z có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là M, biết z^2 có điểm biểu diễn là N như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A $|z| < 1$. **B** $1 < |z| < 3$. **C** $3 < |z| < 5$. **D** $|z| > 5$.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}^+$ và $a < b$. Khi đó $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$.

Từ hình vẽ ta thấy

$$\begin{cases} a^2 - b^2 & < 0 \\ 2ab & > 2b \\ a^2 - b^2 & > -a \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ b < \sqrt{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 < a < b < \sqrt{2}$$

Vậy $1 < |z| < 3$.

Chọn phương án B

Câu 49. Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 trong mặt phẳng phức, I là trung điểm MN, O là gốc tọa độ (3 điểm O, M, N phân biệt và không thẳng hàng). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $|z_1 + z_2| = 2OI$. **B** $|z_1 + z_2| = OI$.
C $|z_1 - z_2| = OM + ON$. **D** $|z_1 - z_2| = 2(OM + ON)$.

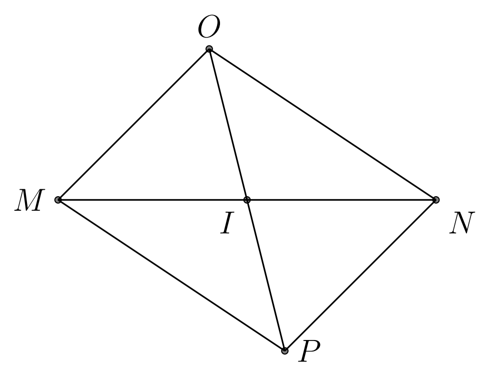
Lời giải.

Gọi P là điểm biểu diễn của số phức $z_1 + z_2$.

Khi đó $OMPN$ là hình bình hành nên $2OI = OP = |z_1 + z_2|$.

$|z_1 - z_2| = MN$ và $MN \neq OM + ON$, $MN \neq 2(OM + ON)$.

Vậy đáp số đúng là $|z_1 + z_2| = 2OI$.



Chọn phương án A

Câu 50. Gọi A, B, C là các điểm trong mặt phẳng Oxy theo thứ tự biểu diễn các số phức $2 + 3i$, $3 + i$, $1 + 2i$. Trọng tâm G của tam giác ABC biểu diễn số phức z. Tìm z.

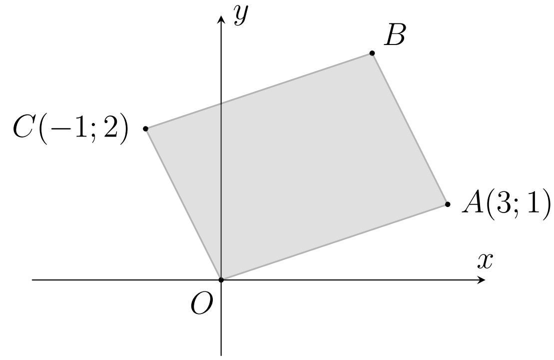
A $z = 1 + i$. **B** $z = 1 - i$. **C** $z = 2 - 2i$. **D** $z = 2 + 2i$.

Lời giải.

Ta có: $A(2;\,3)$, $B(3;\,1)$, $C(1;\,2) \Rightarrow G(2;\,2)$ là điểm biểu diễn số phức $z = 2 + 2i$.

Chọn phương án D

Câu 51.
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành $OABC$ có tọa độ điểm $A(3;1)$, $C(-1;2)$ (như hình vẽ bên). Số phức nào sau đây có điểm biểu diễn là điểm B?



A $w_1 = -2 + 3i$. **B** $w_2 = 2 + 3i$.
C $w_3 = 4 - i$. **D** $w_4 = -4 + i$.

Lời giải.
Do $OABC$ là hình bình hành nên

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}. \qquad (1)$$

Mà $\overrightarrow{OA} = (3;1)$ và $\overrightarrow{OC} = (-1;2)$ nên từ (1) suy ra

$$\overrightarrow{OB} = (2;3). \qquad (2)$$

Từ (2) suy ra điểm $B(2;3)$ hay điểm B là điểm biểu diễn của số phức $w_2 = 2 + 3i$.
Chọn phương án B

Câu 52. Cho tập $X = \{1;3;5;7;9\}$. Có bao nhiêu số phức $z = x + yi$ có phần thực, phần ảo đều thuộc X và có tổng $x + y \leq 10$?

A 20. **B** 10. **C** 15. **D** 24.

Lời giải.
Xét số phức $z = x + yi$ $(x,\ y \in X)$.
Vì số phức $z = x + yi$ thỏa mãn $x + y \leq 10$ nên ta xét các trường hợp sau

a) $(x;y) \in \{(1;3),(1;5),(1;7),(1;9),(3;5),(3;7)\}$, có $2 \times 6 = 12$ số phức thỏa mãn.

b) $(x;y) \in \{(1;1),(3;3),(5;5)\}$, có 3 số phức thỏa mãn.

Vậy có $12 + 3 = 15$ số phức thỏa mãn đề bài.
Chọn phương án C

Câu 53. Cho số phức z có môđun bằng 2018 và w là số phức thỏa mãn biểu thức $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{w} = \dfrac{1}{z+w}$. Môđun của số phức w bằng

A 2018. **B** 2019. **C** 2017. **D** $\sqrt{2019}$.

Lời giải.
Từ giả thiết ta có $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{w} = \dfrac{1}{z+w} \Rightarrow \dfrac{(z+w)^2 - zw}{zw(z+w)} = 0$, suy ra $\left(z + \dfrac{1}{2}w\right)^2 = \left(-\dfrac{i\sqrt{3}w}{2}\right)^2$.
Khi đó $z = \left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)w$ hoặc $z = \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)w \Rightarrow |w| = -\dfrac{2018}{\sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}}} = 2018$.

Chọn phương án A

Câu 54. Xét các điểm A, B, C trong mặt phẳng phức theo thứ tự là điểm biểu diễn các số phức $\dfrac{4i}{-1+i}$, $(1-i)(1+2i)$, $\dfrac{2+6i}{3-i}$. Gọi $I(a;b)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$.

A $P=0$. **B** $P=1$. **C** $P=2$. **D** $P=-1$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{4i}{-1+i}=2-2i\Rightarrow A(2;-2)$, $(1-i)(1+2i)=3+i\Rightarrow B(3;1)$, $\dfrac{2+6i}{3-i}=2i\Rightarrow C(0;2)$.

Lại có

$$\begin{cases}IA=IB\\IA=IC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-2)^2+(b+2)^2=(a-3)^2+(b-1)^2\\(a-2)^2+(b+2)^2=a^2+(b-2)^2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+3b=1\\a-2b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}\Rightarrow P=1.$$

Chọn phương án B

Câu 55. Tìm tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện số phức $w=z(1+i)+(2-i)$ là một số thuần ảo.

A Đường tròn $x^2+y^2=2$. **B** Đường thẳng $y=x+2$.
C Đường thẳng $y=x$. **D** Đường parabol $2x=y^2$.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có

$$\begin{aligned}&w=z(1+i)+(2-i)\\\Leftrightarrow\ &w=(x+yi)(1+i)+(2-i)\\\Leftrightarrow\ &w=(x+2-y)+(x+y-1)iw=z(1+i)+(2-i).\end{aligned}$$

Khi đó w là một số thuần ảo khi và chỉ khi $x+2-y=0\Leftrightarrow y=x+2$.

Chọn phương án B

Câu 56. Trên mặt phẳng tập hợp các số phức $z=x+yi$ thỏa mãn $|z+2+i|=|\overline{z}-3i|$ là đường thẳng có phương trình

A $y=x+1$. **B** $y=-x+1$. **C** $y=-x-1$. **D** $y=x-1$.

Lời giải.

Ta có $|z+2+i|=|\overline{z}-3i|\Leftrightarrow|(x+2)+(y+1)i|=|x-(y+3)i|\Leftrightarrow(x+2)^2+(y+1)^2=x^2+(y+3)^2$
$\Leftrightarrow 4x+4+2y+1=6y+9\Leftrightarrow x-y-1=0$.

Chọn phương án D

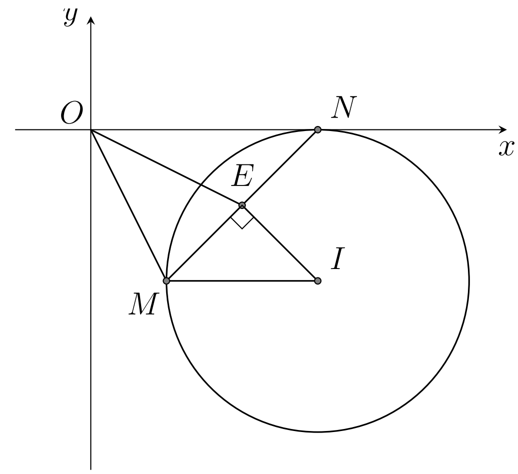
Câu 57. Cho hai số phức z_1,z_2 thuộc tập hợp $S=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|iz-2-3i\right|=2\right\}$ và thỏa mãn $z_1+z_2=4-2i$. Tính $A=|z_1|^2+|z_2|^2$.

A $A=6$. **B** $A=14$. **C** $A=8$. **D** $A=12$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2.
Gọi E là trung điểm MN.
Ta có

$$\begin{aligned} & \left|iz - 2 - 3i\right| = 2 \\ \Leftrightarrow\ & \left|i \cdot (z - 3 + 2i)\right| = 2 \\ \Leftrightarrow\ & \left|z - 3 + 2i\right| = 2. \end{aligned} \qquad (1)$$



Từ (1) ta thấy M, N thuộc đường tròn tâm $I(3; -2)$ bán kính $R = 2$.

Ta có $E(2; -1) \Rightarrow \overrightarrow{EI} = (1; -1) \Rightarrow EI = \sqrt{2} \Rightarrow MN = 2\sqrt{2}$.
Trong $\triangle OMN$, ta có

$$\begin{aligned} & OE^2 = \frac{OM^2 + ON^2}{2} - \frac{MN^2}{4} \\ \Rightarrow\ & OM^2 + ON^2 = 14. \end{aligned}$$

Chọn phương án (B)

Câu 58. Tìm số phức z thỏa mãn $|z - 2| = |z|$ và $(z + 1)(\overline{z} - i)$ là số thực.

(A) $z = 1 - 2i$. **(B)** $z = -1 - 2i$. **(C)** $z = 2 - i$. **(D)** $z = 1 + 2i$.

Lời giải.
Đặt $z = a + bi$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} |z - 2| = |z| \\ (z + 1)(\overline{z} - i) \text{ là số thực} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |(a - 2) + bi| = |a + bi| \\ (a + bi + 1)(a - bi - i) \text{ là số thực} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a - 2)^2 + b^2 = a^2 + b^2 \\ a^2 + a + b^2 + b - (a + b + 1)i \text{ là số thực} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a + 4 = 0 \\ a + b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

Vậy $z = 1 - 2i$ là số phức cần tìm.
Chọn phương án (A)

Câu 59. Trong mặt phẳng Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - 2| = 5$ là một đường tròn. Khi đó số phức $w = (3 + 4i)z + i$ có điểm biểu diễn thuộc đường tròn bán kính

(A) 5. **(B)** 7. **(C)** 35. **(D)** 25.

Lời giải.
$w = (3 + 4i)z + i \Leftrightarrow \dfrac{w - i}{3 + 4i} = z \Leftrightarrow \dfrac{w - i}{3 + 4i} - 2 = z - 2 \Leftrightarrow \dfrac{w - 6 - 9i}{3 + 4i} = z - 2$

Suy ra: $\left|\dfrac{w - 6 - 9i}{3 + 4i}\right| = |z - 2| \Leftrightarrow \dfrac{|w - (6 + 9i)|}{5} = 5 \Leftrightarrow |w - (6 + 9i)| = 25$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(6; 9)$, bán kính $R = 25$.
Cách 2:
$w = (3 + 4i)z + i = (3 + 4i)(z - 2) + 6 + 9i \Leftrightarrow w - (6 + 9i) = (3 + 4i)(z - 2)$.

Suy ra: $|w-(6+9i)| = |(3+4i)||(z-2)|$ hay $|w-(6+9i)| = 25$.
Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(6;9)$, bán kính $R = 25$.
Chọn phương án D

Câu 60. Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C, D lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $z_1 = -1+i$, $z_2 = 1+2i$, $z_3 = 2-i$, $z_4 = -3i$. Gọi S diện tích tứ giác $ABCD$. Tính S.

A $S = \dfrac{17}{2}$. **B** $S = \dfrac{19}{2}$. **C** $S = \dfrac{23}{2}$. **D** $S = \dfrac{21}{2}$.

Lời giải.

Ta có $z_1 = -1+i \Rightarrow A(-1;1)$;
$z_2 = 1+2i \Rightarrow B(1;2)$;
$z_3 = 2-i \Rightarrow C(2;-1)$;
$z_4 = -3i \Rightarrow D(0;-3)$.
$AB = \sqrt{5}$, $AC = \sqrt{13}$, $BC = \sqrt{10}$, $AD = \sqrt{17}$, $CD = 2\sqrt{2}$.
Do đó: $p_1 = \dfrac{AB+AC+BC}{2} = \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{13}+\sqrt{10}}{2}$.
Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \dfrac{\sqrt{p_1(p_1-AB)(p_1-BC)(p_1-AC)}}{2} = \dfrac{7}{2}$.
$p_2 = \dfrac{AD+CD+AC}{2} = \dfrac{\sqrt{17}+2\sqrt{2}+\sqrt{13}}{2}$.
Diện tích tam giác ACD là $S_{\triangle ACD} = \sqrt{p_2(p_2-AC)(p_2-AD)(p_2-CD)} = 5$.
Vậy diện tích tứ giác $ABCD$ là $S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = \dfrac{7}{2} + 5 = \dfrac{17}{2}$.
Chọn phương án A

D MỨC ĐỘ 4

Câu 61. Cho số phức z thỏa mãn $|z+m| = |z-1+m|$ và số phức $z' = 1+i$. Định tham số m để $|z-z'|$ là nhỏ nhất.

A $m = \dfrac{1}{2}$. **B** $m = -\dfrac{1}{2}$. **C** $m = \dfrac{1}{3}$. **D** $m = 1$.

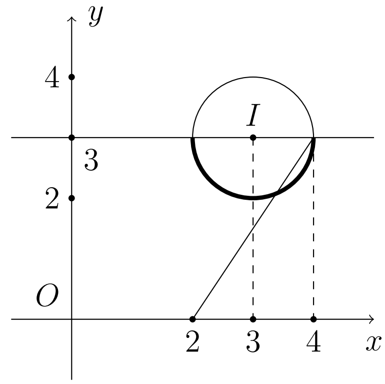
Lời giải.

Giả sử $z = a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$, Khi đó $|z+m| = |z-1+m| \Leftrightarrow 2a+2m = 1$.
Ta có $|z-z'| = \sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2} \geq 0$ dấu bằng xảy ra khi $a = b = 1$.
Với $a = 1 \Rightarrow m = -\dfrac{1}{2}$
Chọn phương án B

Câu 62. Cho số phức thỏa mãn $|z-2i| \leq |z-4i|$ và $|z-3-3i| = 1$. Giá trị lớn nhất của $|z-2|$ là

A $\sqrt{10}+1$. **B** $\sqrt{13}+1$. **C** $\sqrt{10}$. **D** $\sqrt{13}$.

Lời giải.



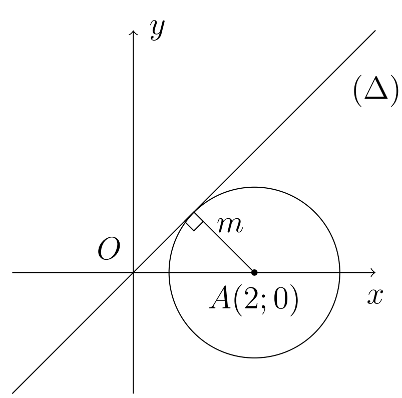
Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng Oxy. Điểm $A(0;2)$ biểu diễn số phức $2i$, điểm $B(0;4)$ biểu diễn số phức $4i$, điểm $I(3;3)$ biểu diễn số phức $3+3i$.
Bất đẳng thức $|z-2i| \leq |z-4i|$ tương đương với $MA \leq MB$, tức là M "gần" A hơn "gần" B. Vậy tập hợp số phức z thỏa mãn $|z-2i| \leq |z-4i|$ được biểu diễn trong mặt phẳng Oxy là nửa mặt phẳng bờ là đường trung trực của AB (đường $y=3$) chứa điểm A.
Còn $|z-3-3i| = 1$ dẫn đến $MI = 1$, nghĩa là M thuộc đường tròn (C) tâm $I(3;3)$, bán kính $R=1$.
Tóm lại, tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn yêu cầu đề bài là nửa dưới của đường tròn (C). Ta gọi tập hợp điểm này là T.
Đề bài yêu cầu tìm giá trị lớn nhất của $|z-2|$, nghĩa là tìm khoảng cách lớn nhất từ điểm $D(2;0)$ đến những điểm thuộc T. Dễ dàng nhận ra khoảng cách lớn nhất này chính là khoảng cách từ D đến điểm có tọa độ $(4;3)$ thuộc T, và bằng $\sqrt{13}$.

Chọn phương án D

Câu 63. Cho số phức z thỏa mãn $\dfrac{1+i}{z}$ là số thực và $|z-2| = m$ với $m \in \mathbb{R}$. Gọi m_0 là một giá trị của m để có đúng một số phức thỏa mãn bài toán. Khi đó

A $m_0 \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **B** $m_0 \in \left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **C** $m_0 \in \left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **D** $m_0 \in \left(\dfrac{3}{2};2\right)$.

Lời giải.



Đặt số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.
Ta có:

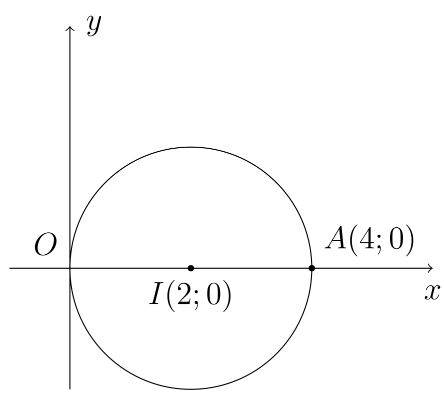
$$\frac{1+i}{z} = \frac{(1+i)\overline{z}}{z.\overline{z}} = \frac{(1+i)(x-yi)}{x^2+y^2} = \frac{x+y+(x-y)i}{x^2+y^2} = \frac{x+y}{x^2+y^2} + \frac{x-y}{x^2+y^2}i.$$

Vậy $\dfrac{1+i}{z}$ là số thực khi và chỉ khi $\dfrac{x-y}{x^2+y^2}=0$ hay $x=y\neq 0$.
Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn một số phức z như trên trong mặt phẳng Oxy. Khi đó tập hợp điểm M là đường thẳng $(\Delta): x-y=0$ (bỏ đi điểm O).
Còn tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-2|=m$ là đường tròn (C_m) tâm $A(2;0)$, bán kính m.
Khi đó, yêu cầu bài toán tương đương với tìm m sao cho đường thẳng (Δ) và (C_m) có đúng một điểm chung, hay (Δ) tiếp xúc với (C_m).
(Δ) tiếp xúc với $(C_m) \Leftrightarrow d(A,(\Delta))=m \Leftrightarrow m=\dfrac{|2-0|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$.
Vậy $m_0=\sqrt{2}$.
Chọn phương án C

Câu 64. Gọi S là tập hợp các số thực m sao cho với mỗi $m\in S$ có đúng một số phức thỏa mãn $|z-m|=6$ và $\dfrac{z}{z-4}$ là số thuần ảo. Tính tổng của các phần tử của tập S.

A 0. B 8. C 10. D 16.

Lời giải.



Đặt số phức $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$.
Ta có: $\dfrac{z}{z-4}=\dfrac{z(\overline{z}-4)}{(z-4)(\overline{z}-4)}=\dfrac{|z|^2-4z}{|z-4|^2}=\dfrac{x^2+y^2-4x-4yi}{(x-4)^2+y^2}=\dfrac{x^2+y^2-4x}{(x-4)^2+y^2}-\dfrac{4y}{(x-4)^2+y^2}i$.
Vậy $\dfrac{z}{z-4}$ là số thuần ảo (*)
$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4x=0\\ y\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2+y^2=4\\ y\neq 0\end{cases}$.
Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn (*) trong mặt phẳng Oxy, thì tập hợp điểm M là đường tròn

$$(C):(x-2)^2+y^2=4$$

tâm $I(2;0)$ bán kính $R=2$, bỏ đi hai điểm $A(4;0)$ và $O(0;0)$. Ta gọi tập hợp điểm này là T.
Còn tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-m|=6$ trong mặt phẳng Oxy là đường tròn (C_m) tâm $J(m;0)$ bán kính $R=6$.
Vậy số thực m thỏa mãn yêu cầu đề bài là số thực m sao cho đường tròn (C_m) tiếp xúc với tập hợp điểm T.
Tuy nhiên, ta thấy rằng nếu (C_m) tiếp xúc với (C) thì hai tiếp điểm sẽ nằm trên đường nối tâm

IJ, nghĩa là trục Ox. Mặt khác, tập hợp T lại là đường tròn (C) bỏ đi 2 giao điểm với trục Ox. Như vậy thì (C_m) không thể tiếp xúc với T, dẫn đến tập hợp S không có phần tử.

Chọn phương án A

Câu 65. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$. Tính $S=M^2+m^2$.

A 1256. B 1258. C 1233. D 1236.

Lời giải.

Cách 1: *Sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai.*

Gọi $z=x+yi,(x,y\in R)$.

Ta có $|z-3-4i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow|x-3+(y-4)i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-4)^2=5\,(*)$.

Ta có $P=|z+2|^2-|z-i|^2=(x+2)^2+y^2-[x^2+(y-1)^2]=4x+2y+3\Rightarrow y=\dfrac{P-4x-3}{2}$

Thế vào $(*)$ và rút gọn ta có: $20x^2-8(P-8)x+P^2-22P+137=0$

Phương trình bậc hai này có nghiệm$\Leftrightarrow\Delta'=-4P^2+184P-1716\ge0\Leftrightarrow13\le P\le33$.

Từ đó ta có $M=33;m=13\Rightarrow M^2+m^2=1258$.

Cách 2: *Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki.*

Gọi $z=x+yi,\ (x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có $|z-3-4i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow|x-3+(y-4)i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-4)^2=5$.

Ta có $P=|z+2|^2-|z-i|^2=(x+2)^2+y^2-[x^2+(y-1)^2]=4x+2y+3=4(x-3)+2(y-4)+23$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki ta có:

$|4(x-3)+2(y-4)|\le\sqrt{(16+4)[(x-3)^2+(y-4)^2]}=10$

$\Leftrightarrow-10\le4(x-3)+2(y-4)\le10\Leftrightarrow13\le4(x-3)+2(y-4)+23\le33\Leftrightarrow13\le P\le33$.

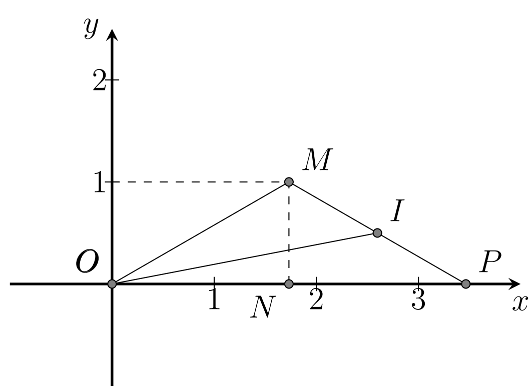
Từ đó ta có $M=33;\ m=13\Rightarrow M^2+m^2=1258$.

Chọn phương án B

Câu 66. Cho hai số phức $z_1,\ z_2$ thỏa mãn $|z_1|=2,\ |z_2|=\sqrt{3}$. Gọi $M,\ N$ là các điểm biểu diễn cho z_1 và iz_2. Biết $\widehat{MON}=30°$. Tính $S=\left|z_1^2+4z_2^2\right|$.

A $5\sqrt{2}$. B $3\sqrt{3}$. C $4\sqrt{7}$. D $\sqrt{5}$.

Lời giải.



Ta có $S=\left|z_1^2+4z_2^2\right|=\left|z_1^2-(2iz_2)^2\right|=|z_1-2iz_2|\cdot|z_1+2iz_2|$.

Gọi P là điểm biểu diễn của số phức $2iz_2$. Khi đó ta có

$$|z_1 - 2iz_2| \cdot |z_1 + 2iz_2| = \left|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP}\right| = \left|\overrightarrow{PM}\right| \cdot \left|2\overrightarrow{OI}\right| = 2PM \cdot OI.$$

Vì $\widehat{MON} = 30^\circ$ nên áp dụng định lí côsin cho $\triangle OMN$ với $OM = 2$, $ON = \sqrt{3}$ ta có

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2OM \cdot ON \cos \widehat{MON} = 4 + 3 - 4\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 1 \Rightarrow MN = 1.$$

Khi đó theo Pitago ta có $\triangle OMN$ vuông tại N. Khi đó $\triangle OMP$ có MN là đường cao đồng thời là trung tuyến, tức là $\triangle OMP$ cân tại $M \Rightarrow PM = OM = 2$.

Áp dụng định lý đường trung tuyến cho $\triangle OMN$ ta có $OI^2 = \dfrac{OM^2 + OP^2}{2} - \dfrac{MP^2}{4} = 7$.

Vậy $S = 2 \cdot PM \cdot OI = 4\sqrt{7}$.

Chọn phương án C

Câu 67. Đặt $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1$. Xét dãy (u_n): $u_n = \dfrac{f(1) \cdot f(3) \cdot f(5) \cdots f(2n-1)}{f(2) \cdot f(4) \cdot f(6) \cdots f(2n)}$. Tính $\lim n\sqrt{u_n}$.

A $\lim n\sqrt{u_n} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B** $\lim n\sqrt{u_n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C** $\lim n\sqrt{u_n} = \sqrt{3}$. **D** $\lim n\sqrt{u_n} = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $f(n) = (n^2+1)^2 + 2n(n^2+1) + (n^2+1) = (n^2+1)[(n+1)^2+1]$. Do đó

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2(2^2+1)(3^2+1)(4^2+1)(5^2+1)(6^2+1)\cdots[(2n-1)^2+1][(2n)^2+1]}{(2^2+1)(3^2+1)(4^2+1)(5^2+1)(6^2+1)(7^2+1)\cdots[(2n)^2+1][(2n+1)^2+1]} \\ &= \frac{2}{(2n+1)^2+1}. \end{aligned}$$

Vậy $\lim n\sqrt{u_n} = \lim \dfrac{n\sqrt{2}}{\sqrt{(2n+1)^2+1}} = \lim \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\left(2 + \dfrac{1}{n}\right)^2 + \dfrac{1}{n^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Chọn phương án B

Câu 68. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-2| = 6 - |z+2|$ là elip có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Tổng $a^2 + b^2$ bằng

A 5. **B** 14. **C** 41. **D** 13.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$, x, $y \in \mathbb{R}$. Điểm $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z.

Đặt $F_1(-2; 0)$ và $F_2(2; 0)$. Ta có $F_1F_2 = 4$ và

$$|z-2| = 6 - |z+2| \Leftrightarrow |z-2| + |z+2| = 6 \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 6.$$

Như vậy, tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là elip có độ dài trục lớn $2a = 6$, tiêu cự $2c = 4$. Từ đó suy ra $a = 3$, $c = 2$ nên $b = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$. Vậy $a^2 + b^2 = 9 + 5 = 14$.

Chọn phương án B

Câu 69. Có bao nhiêu số thức thỏa mãn $z+|z|^2i-1-\frac{3}{4}i=0$?

(A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$. Thay vào biểu thức của bài toán ta có:

$$(a-1)+\left(a^2+b^2+b-\frac{3}{4}\right)i=0\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b^2+b+\frac{1}{4}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Vậy chỉ có đúng một số phức thỏa mãn bài toán.

Chọn phương án (A)

Câu 70. Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=m^2-2m+2$, với m là tham số thực. Biết rằng điểm biểu diễn của số phức $w=(6+8i)z+i$ thuộc đường tròn (C_m). Tìm bán kính nhỏ nhất của đường tròn (C_m).

(A) $\frac{1}{10}$. (B) 1. (C) 10. (D) $\sqrt{10}$.

Lời giải.

Ta có $w=(6+8i)z+i\Leftrightarrow\frac{w-i}{6+8i}=z\Leftrightarrow\left|\frac{w-i}{6+8i}\right|=|z|\Leftrightarrow|w-i|=|z|\cdot|6+8i|=10\left(m^2-2m+2\right)$.

Giả sử $w=x+yi$ với $x;y\in\mathbb{R}$, khi đó $|w-i|=10\left(m^2-2m+2\right)\Rightarrow(x)^2+(y-1)^2=100\left(m^2-2m+2\right)^2$.

$\Rightarrow$ tập hợp biểu diễn w là đường tròn có bán kính $R=10\left(m^2-2m+2\right)$.

Ta có $m^2-2m+2=(m-1)^2+1\geq 1\Rightarrow R\geq 10\Rightarrow R_{\min}=10$.

Chọn phương án (C)

BẢNG ĐÁP ÁN

1. D	2. B	3. A	4. D	5. A	6. C	7. A	8. D	9. B	10. B
11. A	12. C	13. D	14. B	15. A	16. C	17. C	18. B	19. D	20. D
21. D	22. A	23. B	24. B	25. A	26. C	27. B	28. B	29. A	30. C
31. A	32. D	33. D	34. A	35. C	36. A	37. C	38. D	39. B	40. B
41. D	42. B	43. D	44. A	45. C	46. A	47. A	48. B	49. A	50. D
51. B	52. C	53. A	54. B	55. B	56. D	57. B	58. A	59. D	60. A
61. B	62. D	63. C	64. A	65. B	66. C	67. B	68. B	69. A	70. C

DẠNG 20. SỐ PHỨC (TỔNG HAI SỐ PHỨC)

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Cho hai số phức $z_1 = 2 + i$ và $z_2 = 1 + 3i$. Phần thực của số phức $z_1 + z_2$ bằng

(A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) -2.

Lời giải.

Ta có $z_1 + z_2 = 3 + 4i$.

Chọn phương án (B)

Câu 1. Cho hai số phức $z = a + bi, z' = a' + b'i$ $(a, b, a', b' \in \mathbb{R})$. Tìm phần ảo của số phức zz'.

(A) $(ab' + a'b)i$. (B) $ab' + a'b$. (C) $ab' - a'b$. (D) $aa' - bb'$.

Lời giải.

Ta có $zz' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$, suy ra phần ảo của số phức zz' là $ab' + a'b$.

Chọn phương án (B)

Câu 2. Tìm phần ảo của số phức $z = (a + bi)(1 - 2i)$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

(A) $2a + b$. (B) $2a - b$. (C) $a + 2b$. (D) $b - 2a$.

Lời giải.

$z = (a + bi)(1 - 2i) = (a + 2b) + (b - 2a)i$.

Chọn phương án (D)

Câu 3. Cho hai số phức $z_1 = 1 - i, z_2 = 2 + 3i$. Tính mô-đun của số phức $z = z_1 + z_2$.

(A) $|z| = 1$. (B) $|z| = \sqrt{5}$. (C) $|z| = 5$. (D) $|z| = \sqrt{13}$.

Lời giải.

$z = z_1 + z_2 = 3 + 2i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

Chọn phương án (D)

Câu 4. Cho các số thực x và y thỏa mãn x+2+yi=-2+5i. Giá trị của $x + y$ bằng

(A) -1. (B) 1. (C) 5. (D) 9.

Lời giải.

Từ phương trình đã cho, ta có:

$$\begin{cases} x + 2 = -2 \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow x + y = 1.$$

Chọn phương án (B)

Câu 5. Cho hai số phức $z_1 = 2 - 7i$ và $z_2 = -4 + i$. Điểm biểu diễn số phức $z_1 + z_2$ trên mặt phẳng tọa độ là điểm nào dưới đây?

(A) $Q(-2; -6)$. (B) $P(-5; -3)$. (C) $N(6; -8)$. (D) $M(3; -11)$.

Lời giải.

Ta có $z_1 + z_2 = -2 - 6i$. Vậy điểm biểu diễn $z_1 + z_2$ trên mặt phẳng tọa độ là điểm $Q(-2; -6)$.

Chọn phương án (A)

Câu 6. Cho hai số phức $z_1 = 2 + i$ và $z_2 = 1 - i$. Tìm số phức $z = z_1 + 2z_2$.

(A) $1 + i$. (B) 1. (C) $4 - i$. (D) $2i$.

Lời giải.

$z = z_1 + 2z_2 = 2 + i + 2(1 - i) = 4 - i$.

Chọn phương án (C)

Câu 7. Cho hai số phức $z_1 = 4 - 3i$ và $z_2 = 7 + 3i$. Tìm số phức $z = z_1 - z_2$.

(A) $z = 3 + 6i$. (B) $z = 11$. (C) $z = -1 - 10i$. (D) $z = -3 - 6i$.

Lời giải.

Ta có $z = z_1 - z_2 = (4 - 3i) - (7 + 3i) = -3 - 6i$.

Chọn phương án (D)

Câu 8. Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Phần ảo của số phức $w = 3z_1 - 2z_2$ là

(A) 11. (B) 12. (C) 1. (D) $12i$.

Lời giải.

Ta có $w = 3z_1 - 2z_2 = 3(1 + 2i) - 2(2 - 3i) = -1 + 12i$.

Vậy phần ảo của số phức w là 12.

Chọn phương án (B)

Câu 9. Cho hai số phức $z_1 = 2 + 3i$ và $z_2 = -3 - 5i$. Tính tổng phần thực và phần ảo của số phức $w = z_1 + z_2$.

(A) -3. (B) 0. (C) $-1 - 2i$. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $w = z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (-3 - 5i) = -1 - 2i$.

Phần thực $a = -1$ và phần ảo $b = -2$.

Suy ra $a + b = -1 + (-2) = -3$.

Chọn phương án (A)

Câu 10. Cho hai số phức $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -4 - 5i$. Tính $z = z_1 + z_2$.

(A) $z = -2 - 2i$. (B) $z = -2 + 2i$. (C) $z = 2 + 2i$. (D) $z = 2 - 2i$.

Lời giải.

$z = z_1 + z_2 = 2 + 3i - 4 - 5i = -2 - 2i$.

Chọn phương án (A)

Câu 11. Cho hai số phức $z_1 = 5 - 7i$, $z_2 = 2 - i$. Mô-đun của hiệu hai số phức đã cho bằng

(A) $|z_1 - z_2| = 3\sqrt{5}$. (B) $|z_1 - z_2| = 45$.

(C) $|z_1 - z_2| = \sqrt{113}$. (D) $|z_1 - z_2| = \sqrt{74} - \sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có $z_1 - z_2 = 3 - 6i \Rightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt{9 + 36} = 3\sqrt{5}$.

Chọn phương án (A)

Câu 12. Cho hai số phức $z_1 = 2 + 3i$ và $z_2 = -4 - 5i$. Tìm số phức $z = z_1 + z_2$.

(A) $z = 2 + 2i$. (B) $z = -2 - 2i$. (C) $z = 2 - 2i$. (D) $z = -2 + 2i$.

Lời giải.

Ta có $z_1 + z_2 = (2+3i) + (-4-5i) = -2-2i$.

Chọn phương án (B)

Câu 13. Cho hai số phức: $z_1 = 1-2i$, $z_2 = 2+3i$. Tìm số phức $w = z_1 - 2z_2$.

(A) $w = -3+8i$. (B) $w = -5+i$. (C) $w = -3-8i$. (D) $w = -3+i$.

Lời giải.

Ta có $w = z_1 - 2z_2 = (1-2i) - 2(2+3i) = -3-8i$.

Chọn phương án (C)

Câu 14. Cho hai số phức $z = 3-5i$ và $w = -1+2i$. Điểm biểu diễn số phức $z' = \overline{z} - w \cdot z$ trong mặt phẳng Oxy có tọa độ là

(A) $(-4;-6)$. (B) $(4;6)$. (C) $(4;-6)$. (D) $(-6;-4)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} z' &= \overline{z} - w \cdot z \\ &= 3+5i - (-1+2i)\cdot(3-5i) \\ &= 3+5i-(7+11i) \\ &= -4-6i. \end{aligned}$$

Chọn phương án (A)

Câu 15. Cho hai số phức $z_1 = 3-7i$ và $z_2 = 2+3i$. Tìm số phức $z = z_1 + z_2$.

(A) $z = 1-10i$. (B) $z = 5-4i$. (C) $z = 3-10i$. (D) $z = 3+3i$.

Lời giải.

Ta có $z = z_1 + z_2 = 3-7i+2+3i = 5-4i$.

Chọn phương án (B)

Câu 16. Cho hai số phức $z_1 = 2+3i, z_2 = 1+i$. Tính $|z_1 + 3z_2|$.

(A) $|z_1+3z_2| = \sqrt{11}$. (B) $|z_1+3z_2| = 11$. (C) $|z_1+3z_2| = \sqrt{61}$. (D) $|z_1+3z_2| = 61$.

Lời giải.

Ta có $z_1 + 3z_2 = (2+3i) + 3(1+i) = 5+6i \Rightarrow |z_1+3z_2| = \sqrt{5^2+6^2} = \sqrt{61}$.

Chọn phương án (C)

Câu 17. Cho z_1, z_2 là hai số phức tùy ý. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

(A) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$. (B) $|z_1+z_2| = |z_1| + |z_2|$.

(C) $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$. (D) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Lời giải.

Khẳng định $|z_1+z_2| = |z_1| + |z_2|$ sai vì $|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Chọn phương án (B)

Câu 18. Cho hai số phức $z_1 = 2+3i$ và $z_2 = -3-5i$. Tính tổng phần thực và phần ảo của số phức $w = z_1 + z_2$.

(A) 3. (B) -3. (C) 0. (D) $-1-2i$.

Lời giải.

Ta có $w = -1 - 2i \Rightarrow$ tổng phần thực và phần ảo của số phức w là -3.
Chọn phương án B

Câu 19. Cho hai số phức $z_1 = 2 - 2i, z_2 = -3 + 3i$. Khi đó số phức $z_1 - z_2$ là

A $-5 + 5i$. **B** $-5i$. **C** $5 - 5i$. **D** $-1 + i$.

Lời giải.

Ta có $z_1 - z_2 = (2 - 2i) - (-3 + 3i) = 5 - 5i$.
Chọn phương án C

Câu 20. Cho hai số phức $z = 5 + 2i$ và $z' = 1 - i$. Tính mô-đun của số phức $w = z - z'$.

A 5. **B** $3\sqrt{5}$. **C** $\sqrt{17}$. **D** $\sqrt{37}$.

Lời giải.

Ta có $|w| = |z - z'| = |5 + 2i - (1 - i)| = |4 + 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.
Chọn phương án A

B MỨC ĐỘ 2

Câu 21. Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = \sqrt{3}$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Môđun $|z_1 + z_2|$ bằng

A 2. **B** 3. **C** $\sqrt{2}$. **D** $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

a) **Cách 1:** Gọi các số phức $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$, $(a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R})$.
Ta có $|z_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{3} \Rightarrow a_1^2 + b_1^2 = 3$, $|z_2| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \sqrt{3} \Rightarrow a_2^2 + b_2^2 = 3$.
Do đó

$$\begin{aligned} & |z_1 - z_2| = 2 && \Leftrightarrow \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} = 2 \\ \Leftrightarrow\ & (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 4 && \Leftrightarrow a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 - 2a_1a_2 - 2b_1b_2 = 4 \\ \Leftrightarrow\ & 2a_1a_2 + 2b_1b_2 = 2. \end{aligned}$$

Do đó $|z_1 + z_2| = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + 2a_1a_2 + 2b_1b_2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

b) **Cách 2:** Ta có $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}) = 4$
$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + (z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}) = 8$
$\Rightarrow |z_1 + z_2| = 2\sqrt{2}$.

Chọn phương án D

Câu 22. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a + 6i = 2 - 2bi$, với i là đơn vị ảo. Giá trị của $a + b$ bằng

A -1. **B** 1. **C** -4. **D** 5.

Lời giải.

Ta có $a + 6i = 2 - 2bi \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 6 = -2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow a + b = -1$.

Chọn phương án A

Câu 23. Cho số phức z thỏa mãn $(2+3i)z+4-3i=13+4i$. Mô-đun của z bằng

(A) 20. (B) 4. (C) $2\sqrt{2}$. (D) $\sqrt{10}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
& (2+3i)z+4-3i=13+4i \\
\Leftrightarrow\ & (2+3i)z=13+4i-4+3i \\
\Leftrightarrow\ & (2+3i)z=9+7i \\
\Leftrightarrow\ & z=\frac{9+7i}{2+3i} \\
\Leftrightarrow\ & z=\frac{(9+7i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} \\
\Leftrightarrow\ & z=\frac{18-21.i^2+14i-27i}{2^2+3^2} \\
\Leftrightarrow\ & z=\frac{39-13i}{13} \\
\Leftrightarrow\ & z=3-i \\
\Rightarrow\ & |z|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}
\end{aligned}$$

.

Chọn phương án (D)

Câu 24. Trong các số phức $(1+i)^3, (1+i)^4, (1+i)^5, (1+i)^6$ số phức nào là số thuần ảo?

(A) $(1+i)^3$. (B) $(1+i)^4$. (C) $(1+i)^5$. (D) $(1+i)^6$.

Lời giải.

Ta có $(1+i)^3=-2+2i, (1+i)^4=-4, (1+i)^5=-4-4i, (1+i)^6=-8i$

Chọn phương án (D)

Câu 25. Cho số phức z thỏa mãn $(3+2i)z+(2-i)^2=4+i$. Hiệu phần thực và phần ảo của số phức z là

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

Ta có $(3+2i)z+(2-i)^2=4+i \Leftrightarrow (3+2i)z+(3-4i)=4+i \Leftrightarrow (3+2i)z=1+5i \Leftrightarrow z=1+i$.

Vậy hiệu phần thực và phần ảo của số phức z là 0.

Chọn phương án (D)

Câu 26. Cho số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+7+i-|z|(2+i)=0$ và $|z|<3$. Tính $P=a+b$.

(A) $P=5$. (B) $P=-\dfrac{1}{2}$. (C) $P=7$. (D) $P=\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

$z+7+i-|z|(2+i)=0 \Leftrightarrow a+7+(b+1)i-2\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+b^2}i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+7=2\sqrt{a^2+b^2}\ (1) \\ \sqrt{a^2+b^2}=b+1\ (2) \end{cases}$.

Suy ra $a+7=2(b+1) \Rightarrow a=2b-5$ thế vào (2) ta được

$$\sqrt{(2b-5)^2+b^2}=b+1 \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq -1 \\ 4b^2-22b+24=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq -1 \\ \left[\begin{array}{l} b=4 \\ b=\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \end{cases}.$$

Với $b=4 \Rightarrow a=3 \Rightarrow |z|=5>3$ (không thỏa mãn).
Với $b=\dfrac{3}{2} \Rightarrow a=-2 \Rightarrow |z|=\dfrac{5}{2}<3$.
Vậy $z=-2+\dfrac{3}{2}i \Rightarrow P=a+b=-\dfrac{1}{2}$.
Chọn phương án B

Câu 27. Cho số phức $z=2-3i$. Tính mô-đun của số phức $w=(1+i)z$.

A $|w|=\sqrt{26}$. **B** $|w|=\sqrt{37}$. **C** $|w|=5$. **D** $|w|=4$.

Lời giải.
Ta có $|w|=|(1+i)z|=|1+i|\cdot|2-3i|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}=\sqrt{26}$.
Chọn phương án A

Câu 28. Tìm mô-đun của số phức z biết $z-4=(1+\mathrm{i})|z|-(4+3z)\,\mathrm{i}$.

A $|z|=4$. **B** $|z|=1$. **C** $|z|=\dfrac{1}{2}$. **D** $|z|=2$.

Lời giải.
Ta có

$$z-4=(1+\mathrm{i})|z|-(4+3z)\,\mathrm{i} \Leftrightarrow (1+3\mathrm{i})\,z=(1+\mathrm{i})|z|+4(1-\mathrm{i})$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{1+\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}}\cdot|z|+4\cdot\frac{1-\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}} \Leftrightarrow z=\frac{(1+\mathrm{i})(1-3\mathrm{i})}{(1+3\mathrm{i})(1-3\mathrm{i})}\cdot|z|+4\cdot\frac{(1-\mathrm{i})(1-3\mathrm{i})}{(1+3\mathrm{i})(1-3\mathrm{i})}$$
$$\Leftrightarrow z=\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\mathrm{i}\right)\cdot|z|-4\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i}\right)=\Leftrightarrow z=\left(\frac{2}{5}|z|-\frac{4}{5}\right)-\left(\frac{|z|}{5}+\frac{8}{5}\right)\mathrm{i}.$$

Khi đó

$$|z|^2=\left(\frac{2}{5}|z|-\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{|z|}{5}+\frac{8}{5}\right)^2 \Leftrightarrow 25|z|^2=(2|z|-4)^2+(|z|+8)^2$$
$$\Leftrightarrow 25|z|^2=4|z|^2-16|z|+16+|z|^2+16|z|+64 \Leftrightarrow 20|z|^2=80 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |z|=2 \\ |z|=-2. \end{array}\right.$$

Suy ra $|z|=2$.
Chọn phương án D

Câu 29. Tìm phần ảo của số phức z, biết $(1+i)z=3-i$.

A 2. **B** -2. **C** 1. **D** -1.

Lời giải.
Ta có $(1+i)z=3-i \Leftrightarrow z=\dfrac{3-i}{1+i}=\dfrac{(3-i)(1-i)}{2}=2-2i$.
Vậy phần ảo của số phức z là -2.
Chọn phương án B

Câu 30. Cho số phức $z = (1-i)^2(3+2i)$. Số phức z có phần ảo là

(A) 6. (B) $-6i$. (C) -6. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $z = (1-i)^2(3+2i) = 4-6i$. Do đó $\mathrm{Im}(z) = -6$.

Chọn phương án (C)

Câu 31. Cho số phức z, biết số phức liên hợp $\overline{z} = (1-2i)(1+i)^3$. Điểm biểu diễn z trên mặt phẳng phức Oxy là điểm nào dưới đây?

(A) $P(6;-2)$. (B) $M(2;6)$. (C) $Q(6;2)$. (D) $N(2;-6)$.

Lời giải.

Có $\overline{z} = (1-2i)(1+i)^3 = (1-2i)(1+3i+3i^2+i^3) = (1-2i)(-2+2i) = 2+6i \Rightarrow z = 2-6i$. Vậy điểm biểu diễn của z là $N(2;-6)$.

Chọn phương án (D)

Câu 32. Nếu mô-đun của số phức z là r $(r>0)$ thì mô-đun của số phức $(1-\mathrm{i})^3 \cdot z$ bằng

(A) $\sqrt{2}r$. (B) $3r$. (C) $2r$. (D) $2\sqrt{2}r$.

Lời giải.

Do $\left|(1-\mathrm{i})^3 \cdot z\right| = \left|(1-\mathrm{i})^3\right| |z| = |2-2\mathrm{i}|\,|z| = 2\sqrt{2}\,|z| = 2\sqrt{2}r$.

Chọn phương án (D)

Câu 33. Cho hai số phức $z = 6+5i$ và $z' = 5-4i+z$. Tìm mô-đun của số phức $w = z \cdot z'$.

(A) $|w| = 612$. (B) $|w| = 61$. (C) $|w| = 61\sqrt{2}$. (D) $|w| = 6\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $z' = 5-4i+6+5i = 11+i \Rightarrow z \cdot z' = 61+61i$. Do đó $|w| = 61\sqrt{2}$.

Chọn phương án (C)

Câu 34. Cho số phức $z = 3-2i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $w = z + i \cdot \overline{z}$.

(A) $M(5;-5)$. (B) $M(1;-5)$. (C) $M(1;1)$. (D) $M(5;1)$.

Lời giải.

Ta có: $\overline{z} = 3+2i$.

Khi đó $w = z + i \cdot \overline{z} = 3-2i+i(3+2i) = 1+i$.

Vậy điểm biểu diễn số phức w là $M(1;1)$.

Chọn phương án (C)

Câu 35. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = i(3i+1)$.

(A) $\overline{z} = 3-i$. (B) $\overline{z} = -3-i$. (C) $\overline{z} = -3+i$. (D) $\overline{z} = 3+i$.

Lời giải.

Ta có: $z = i(3i+1) = -3+i \Rightarrow \overline{z} = -3-i$.

Chọn phương án (B)

Câu 36. Cho số phức $z = (2-3i)(3-4i)$. Điểm biểu diễn số phức z là

(A) $M(6;17)$. (B) $M(17;6)$. (C) $M(-17;-6)$. (D) $M(-6;-17)$.

Lời giải.

Ta có $z = (2-3i)(3-4i) = -6-17i$. Do đó, điểm biểu diễn cho số phức z là $M(-6;-17)$.

Chọn phương án D

Câu 37. Cho hai số phức $z_1 = 2 + 4i, z_2 = -1 + 3i$. Tính môđun của số phức $w = z_1\overline{z_2} - 2\overline{z_1}$.

A $|w| = 2\sqrt{2}$. **B** $|w| = 2\sqrt{10}$. **C** $|w| = 4\sqrt{2}$. **D** $|w| = 2$.

Lời giải.

Ta có $w = (2+4i)(-1-3i) - 2(2-4i) = (10-10i) - (4-8i) = 6-2i$. Do đó $|w| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{10}$.

Chọn phương án B

Câu 38. Tìm số thực m sao cho $m^2 - 1 + (m+1)i$ là số ảo.

A $m = 0$. **B** $m = 1$. **C** $m = \pm 1$. **D** $m = -1$.

Lời giải.

$m^2 - 1 + (m+1)i$ là số ảo khi $m^2 - 1 = 0$ hay $m = \pm 1$.

Chọn phương án C

Câu 39. Cho hai số phức $z_1 = m + 3i$, $z_2 = 2 - (m+1)i$, với $m \in \mathbb{R}$. Tìm các giá trị của m để $w = z_1 \cdot z_2$ là số thực.

A $m = 1$ hoặc $m = -2$. **B** $m = 2$ hoặc $m = -1$.

C $m = 2$ hoặc $m = -3$. **D** $m = -2$ hoặc $m = -3$.

Lời giải.

Ta có $w = z_1 \cdot z_2 = (m+3i)\left(2-(m+1)i\right) = 5m + 3 + \left(6 - m - m^2\right) i$.

Để w là số thực thì $6 - m - m^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = 2. \end{array}\right.$

Chọn phương án C

Câu 40. Cho hai số phức $z = m + 3i$ và $z' = 2 - (m+1)i$. Tích các giá trị của m để zz' là số thực là

A 6. **B** -6. **C** 10. **D** 12.

Lời giải.

Ta có $zz' = (m+3i)\left(2-(m+1)i\right) = 5m + 3 + i(-m^2 - m + 6)$.

Do đó zz' là số thực khi và chỉ khi $-m^2 - m + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -3. \end{array}\right.$

Chọn phương án B

C MỨC ĐỘ 3

Câu 41. Tính môđun của số phức z thoả mãn $3z \cdot \bar{z} + 2017\left(z - \bar{z}\right) = 48 - 2016i$

A $|z| = 4$. **B** $|z| = \sqrt{2016}$. **C** $|z| = \sqrt{2017}$. **D** $|z| = 2$.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$, từ giả thiết ta có $3|z|^2 = 48 - 2016i - 2b \cdot 2017i = 48$ (vì $|z|^2 \in \mathbb{R}$), suy ra $|z| = 4$.

Chọn phương án A

Câu 42. Cho số phức $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $(2+i)|z| = \dfrac{\sqrt{17}}{z} + 1 - 3i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $2 < |z| < 3$. **B** $\dfrac{1}{2} < |z| < \dfrac{3}{2}$. **C** $\dfrac{1}{2} < |z| < \dfrac{3}{4}$. **D** $0 < |z| < \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}
& (2+i)|z| = \frac{\sqrt{17}}{z} + 1 - 3i \\
\Leftrightarrow\ & (2|z|-1) + (|z|+3)i = \frac{\sqrt{17}}{z} \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{(2|z|-1)^2 + (|z|+3)^2} = \frac{\sqrt{17}}{|z|} \\
\Leftrightarrow\ & (2|z|-1)^2 + (|z|+3)^2 = \frac{17}{|z|^2} \\
\Leftrightarrow\ & 5|z|^4 + 2|z|^3 + 10|z|^2 - 17 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & |z| = 1.
\end{aligned}$$

Chọn phương án B

Câu 43. Cho số phức $z = a + bi$ thỏa mãn $z(1+2i)^2 + \overline{z} = -20 + 4i$. Giá trị của $a^2 - b^2$ bằng

A 16. **B** 1. **C** 5. **D** 7.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}
& z(1+2i)^2 + \overline{z} = -20 + 4i \\
\Leftrightarrow\ & (a+bi)(-3+4i) + (a-bi) = -20 + 4i \\
\Leftrightarrow\ & (-3a-4b) + (4a-3b)i + (a-bi) = -20 + 4i \\
\Leftrightarrow\ & (-2a-4b) + (4a-4b)i = -20 + 4i \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} -2a - 4b = -20 \\ 4a - 4b = 4 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a = 4 \\ b = 3. \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy $a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7$.
Chọn phương án D

Câu 44. Trong tập các số phức, cho phương trình $z^2 - 6z + m = 0$, $m \in \mathbb{R}$ (1). Gọi m_0 là một giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $z_1.\overline{z_1} = z_2.\overline{z_2}$. Hỏi trong khoảng $(0; 20)$ có bao nhiêu giá trị $m_0 \in \mathbb{N}$?

A 10. **B** 11. **C** 12. **D** 13.

Lời giải.
Đề bài yêu cầu ta tìm các giá trị nguyên của m trong khoảng $(0; 20)$, sao cho phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $z_1.\overline{z_1} = z_2.\overline{z_2}$, hay $|z_1| = |z_2|$ (*).
Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt là $\Delta' > 0$ hoặc $\Delta' < 0$.
Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm thực phân biệt. Khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow z_1 = -z_2 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0.$$

50 DẠNG TOÁN PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA LẦN 2

Điều này không thể xảy ra do theo Định lý Vi-ét, $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} = 6 \neq 0$. Vậy nếu $\Delta' > 0$ ta không tìm được m thỏa mãn yêu cầu đề bài.
Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 là hai số phức liên hợp. Khi đó hiển nhiêu ta sẽ có $|z_1| = |z_2|$.
Vậy phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa (*) $\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow 9 - m < 0 \Leftrightarrow m > 9$.
Suy ra trong khoảng $(0; 20)$ có 10 giá trị $m_0 \in \mathbb{N}$.
Chọn phương án A

Câu 45. Số phức z thõa mãn điều kiện: $z + |z| = 8 + 4i$. Tổng phần thực và ảo của số phức z là

A 4. **B** 5. **C** 6. **D** 7.

Lời giải.

$z + |z| = 8 + 4i \Leftrightarrow z = 8 - |z| + 4i$.
Lấy mô-đun hai vế ta được: $|z| = \sqrt{(8 - |z|)^2 + 16} \Leftrightarrow |z|^2 = |z|^2 - 16|z| + 80 \Leftrightarrow |z| = 5$
nên $z + |z| = 8 + 4i \Leftrightarrow z + 5 = 8 + 4i \Rightarrow z = 3 + 4i \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow a + b = 7$.
Chọn phương án D

Câu 46. Cho số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $\left|\dfrac{z-1}{z-i}\right| = 1$ và $\left|\dfrac{z-3i}{z+i}\right| = 1$. Tính $P = a + b$.

A $P = 7$. **B** $P = -1$. **C** $P = 1$. **D** $P = 2$.

Lời giải.

Ta có $\left|\dfrac{z-1}{z-i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z - 1| = |z - i| \Leftrightarrow |a - 1 + bi| = |a + (b - 1)i| \Leftrightarrow 2a - 2b = 0$ (1).
$\left|\dfrac{z-3i}{z+i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z - 3i| = |z + i| \Leftrightarrow |a + (b - 3)i| = |a + (b + 1)i| \Leftrightarrow b = 1$ (2).
Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$. Vậy $P = 2$.
Chọn phương án D

Câu 47. Cho số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn phương trình $\dfrac{(|z| - 1)(1 + iz)}{z - \frac{1}{\bar{z}}} = i$. Tính $P = a + b$.

A $P = 1 - \sqrt{2}$. **B** $P = 1$. **C** $P = 1 + \sqrt{2}$. **D** $P = 0$.

Lời giải.

$$\frac{(|z|-1)(1+iz)}{z-\frac{1}{\overline{z}}}=i\Leftrightarrow\frac{(|z|-1)(1+iz)\overline{z}}{z\overline{z}-1}=i\quad(|z|\neq 1)$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{(|z|-1)(1+iz)\overline{z}}{|z|^2-1}=i\Leftrightarrow\frac{(1+iz)\overline{z}}{|z|+1}=i$$

$$\Leftrightarrow\ \overline{z}+i|z|^2=i(|z|+1)\Leftrightarrow a-bi+(a^2+b^2)i=i(\sqrt{a^2+b^2}+1)$$

$$\Leftrightarrow\ a+(-b+a^2+b^2)i=i(\sqrt{a^2+b^2}+1)\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b^2-b=|b|+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}a=0\\\left[\begin{array}{l}\begin{cases}b<0\\b=\pm1\end{cases}\quad\text{(loại)}\\\begin{cases}b>0\\b^2-2b-1=0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\\left[\begin{array}{ll}b=1+\sqrt{2}&\text{(nhận)}\\b=1-\sqrt{2}&\text{(loại).}\end{array}\right.\end{cases}$$

Vậy $P=a+b=1+\sqrt{2}$.

Chọn phương án C

Câu 48. Cho số phức z. Gọi A, B lần lượt là các điểm trong mặt phẳng Oxy biểu diễn các số phức z và $(1+i)z$. Tính $|z|$ biết diện tích tam giác OAB bằng 8.

A. $|z|=4$. B. $|z|=2\sqrt{2}$. C. $|z|=4\sqrt{2}$. D. $|z|=2$.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$ với $z\neq 0$.

$(1+i)z=(1+i)(a+bi)=a-b+(a+b)i$.

Suy ra $A(a;b)$, $B(a-b;a+b)$, $\overrightarrow{AB}=(-b;a)$, $AB=\sqrt{a^2+b^2}$

Đường thẳng $AB: a(x-a)+b(y-b)=0\Leftrightarrow ax+by-a^2-b^2=0$.

Chiều cao hạ từ O của tam giác OAB là $h=\mathrm{d}(O,AB)=\dfrac{\left|-a^2-b^2\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{a^2+b^2}$.

Diện tích tam giác OAB bằng 8 nên

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=8\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}=4\Leftrightarrow|z|=4.$$

Chọn phương án A

Câu 49. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,\ b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z|=5$ và $z(2+i)(1-2i)$ là một số thực. Tính $P=|a|+|b|$.

A. $P=8$. B. $P=4$. C. $P=5$. D. $P=7$.

Lời giải.

Ta có

$$z(2+i)(1-2i)=(a+bi)(4-3i)=4a+3b+(-3a+4b)i.\qquad(1)$$

Do $z(2+i)(1-2i)$ là một số thực nên từ (1) suy ra $-3a+4b=0\Leftrightarrow b=\dfrac{3}{4}a.\qquad(2)$

Mặt khác $|z|=5\Leftrightarrow a^2+b^2=25.\qquad(3)$

Thế (2) vào (3) ta được phương trình

$$a^2+\left(\frac{3}{4}a\right)^2=25\Leftrightarrow a^2=16\Leftrightarrow a=\pm 4.$$

Với $a=4\Rightarrow b=3$ và $a=-4\Rightarrow b=-3$.

Vậy $P=|a|+|b|=3+4=7$.

Chọn phương án D

Câu 50. Số phức z có phần ảo lớn nhất thoả mãn $|z-1-i|=1$ là

A $z=2+2i$. **B** $z=1+2i$. **C** $z=2i$. **D** $z=-1+3i$.

Lời giải.

Giả sử $z=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$, theo bài ra ta có

$$|(x-1)+(y-1)i|=1\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=1.$$

Mà $(x-1)^2\geq 0$ nên $(y-1)^2\leq 1\Leftrightarrow -1\leq y-1\leq 1\Leftrightarrow 0\leq y\leq 2$.

Vậy phần ảo của z có giá trị lớn nhất bằng 2.

Dấu bằng xảy ra khi $x=1; y=2$, hay $z=1+2i$.

Chọn phương án B

Câu 51. Tính môđun của số phức z thoả mãn $3z\cdot\overline{z}+2017\,(z-\overline{z})=48-2016i$

A $|z|=4$. **B** $|z|=\sqrt{2016}$. **C** $|z|=\sqrt{2017}$. **D** $|z|=2$.

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi$, từ giả thiết ta có $3|z|^2=48-2016i-2b\cdot 2017i=48$ (vì $|z|^2\in\mathbb{R}$), suy ra $|z|=4$.

Chọn phương án A

Câu 52. Cho số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i)=0$ và $|z|>1$. Tính $P=a+b$.

A $P=3$. **B** $P=-1$. **C** $P=-5$. **D** $P=7$.

Lời giải.

Ta có $z+2+i-|z|(1+i)=0\Leftrightarrow z=(|z|-2)+(|z|-1)\,i$.

Lấy mô-đun hai vế, ta được $|z|=\sqrt{(|z|-2)^2+(|z|-1)^2}$

$\Rightarrow |z|^2=2|z|^2-6|z|^2+5\Rightarrow \left[\begin{array}{ll}|z|=1 & \text{loại do } |z|>1\\ |z|=5 & \text{thỏa } |z|>1\end{array}\right.$.

Với $|z|=5\Rightarrow z=(|z|-2)+(|z|-1)\,i=3+4i$.

Suy ra $a=3$, $b=4$.

Vậy $a+b=7$.

Chọn phương án D

Câu 53. Cho số phức z có phần thực là số nguyên và z thỏa mãn $|z|-2\overline{z}=-7+3i+z$. Mô-đun của số phức $w=1-z+z^2$.

A $|w|=\sqrt{37}$. **B** $|w|=\sqrt{425}$. **C** $|w|=\sqrt{457}$. **D** $|w|=\sqrt{445}$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi\,(a; b \in \mathbb{R})$.
Ta có:

$$\begin{aligned} & |z| - 2\overline{z} = -7 + 3i + z \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} - 2(a - bit) = -7 + 3i + a + bi \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{a^2+b^2} - 2a + 2bi = a - 7 + (b+3)i \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} 2b = b + 3 \Rightarrow b = 3 & (1) \\ \sqrt{a^2+b^2} - 2a = a - 7. & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Thay (1) vào (2) ta được $\sqrt{a^2+9} = 3a - 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 7 \geq 0 \\ a^2 + 9 = (3a-7)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \dfrac{7}{3} \\ \left[\begin{array}{l} a = 4 \\ a = \dfrac{5}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow a = 4.$

Vậy $z = 4 + 3i \Rightarrow w = 1 - z + z^2 = 4 + 21i \Rightarrow |w| = \sqrt{457}$.
Chọn phương án C

Câu 54. Gọi z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 5i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 6$. Tìm mô-đun của số phức $w = z_1 + z_2 - 6 + 10i$.

A $|w| = 10$.
B $|w| = 32$.
C $|w| = 16$.
D $|w| = 8$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} w_1 = z_1 - 3 + 5i \\ w_2 = z_2 - 3 + 5i \end{cases} \Rightarrow w_1 + w_2 = z_1 + z_2 - 6 + 10i = w$.

Mà $\begin{cases} |w_1| = |w_2| = 5 \\ |w_1 - w_2| = |z_1 - z_2| = 6. \end{cases}$

Mặt khác $|w_1 + w_2|^2 + |w_1 - w_2|^2 = 2\left(|w_1|^2 + |w_2|^2\right) \Rightarrow |w_1 + w_2|^2 = 64$.
Vậy $|w| = |w_1 + w_2| = 8$.
Chọn phương án D

Câu 55. Cho số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ và $|z+2|^2 - |z-i|^2 = 33$. Môđun của số phức $z - 2 - i$ bằng

A $\sqrt{5}$.
B 9.
C 25.
D 5.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

Khi đó

$$\begin{cases}|z-3-4i|=\sqrt{5}\\ |z+2|^2-|z-i|^2=33\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)^2+(y-4)^2=5\\ (x+2)^2+y^2-[x^2+(y-1)^2]=33\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)^2+(y-4)^2=5\\ y=15-2x\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)^2+(11-2x)^2=5\\ y=15-2x\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\ y=5.\end{cases}$$

Do đó $z=5+5i \Rightarrow |z-2-i|=|3+4i|=5$.
Chọn phương án D

Câu 56. Cho số phức $z=a+bi (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $(z+1+i)(\overline{z}-i)+3i=9$ và $|\overline{z}|>2$. Tính $P=a+b$.

A 2. **B** 1 . **C** -3 . **D** -1.

Lời giải.

Phương trình tương đương $|z|^2-iz+(1+i)\overline{z}+2i-8=0 \quad (1)$.
Thay $z=a+bi$ vào (1) và biến đổi ta được

$$a^2+b^2+a+2b-8+(2-b)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2+a+2b-8=0\\ b=2\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\ b=2\end{cases}\\ \begin{cases}a=-1\\ b=2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Vì $|\overline{z}|>2$ nên ta chọn $\begin{cases}a=-1\\ b=2\end{cases}$. Vậy $P=a+b=1$.

Chọn phương án B

Câu 57. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R}, a>0)$ thỏa mãn $z\cdot\overline{z}-12|z|+(z-\overline{z})=13+10i$. Tính $S=a+b$.

A $S=7$. **B** $S=17$. **C** $S=-17$. **D** $S=5$.

Lời giải.

Ta có $z\cdot\overline{z}=|z|^2=a^2+b^2$ và $z-\overline{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$. Khi đó

$$z\cdot\overline{z}-12|z|+(z-\overline{z})=13+10i$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2-12\sqrt{a^2+b^2}+2bi=13+10i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2-12\sqrt{a^2+b^2}=13\\ 2b=10\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}a^2-12\sqrt{a^2+25}+12=0 \quad (1)\\ b=5.\end{cases}$$

Đặt $t = \sqrt{a^2+25}$ với $t \geq 25$ và $t^2 = a^2 + 25$. Phương trình (1) trở thành

$$t^2 - 12t - 13 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = -1 & \text{(loại)} \\ t = 13. & \end{array}\right.$$

Với $t = 13 \Rightarrow \sqrt{a^2+25} = 13 \Leftrightarrow a^2 = 144 \Leftrightarrow a = 12$ vì $a > 0$.

Vậy $S = a + b = 12 + 5 = 17$.

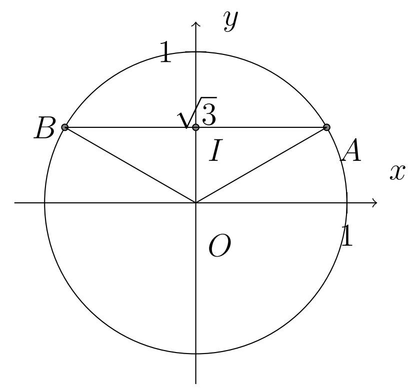
Chọn phương án B

Câu 58. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|3z - i| = |3 + iz|$. Biết rằng $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$. Tính giá trị biểu thức $P = |z_1 + z_2|$.

A $P = 2\sqrt{2}$. **B** $P = \dfrac{1}{2}$. **C** $P = \dfrac{3}{2}$. **D** $P = 1$.

Lời giải.

Gọi A, B là hai điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 trong mặt phẳng tọa độ Oxy.



Gọi $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $|3z - i| = |3 + iz| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.

Suy ra A, B nằm trên đường tròn tâm O bán kính 1.

Từ $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$ ta có khoảng cách $AB = \sqrt{3}$.

Không mất tính tổng quát, ta vẽ hai điểm A, B đối xứng nhau qua trục tung thỏa $AB = \sqrt{3}$.

Gọi I là trung điểm AB suy ra $A = (\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1}{2})$ và $B(\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1}{2})$.

Vậy $|z_1 + z_2| = 1$.

Cách khác. $|z_1 - z_2| = \sqrt{3} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 3 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Khi đó $|z_1 + z_2| = \sqrt{(x_1+x_2)^2 + (y_1+y_2)^2} = \sqrt{(x_1^2+y_1^2) + (x_2^2+y_2^2) + 2(x_1x_2+y_1y_2)} = 1$.

Chọn phương án D

Câu 59. Số phức $z = a + bi \quad (a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 2| = |z|$ và $(z+1)(\overline{z} - i)$ là số thực. Giá trị của biểu thức $S = a + 2b$ bằng bao nhiêu?

A $S = -3$. **B** $S = 0$. **C** $S = -1$. **D** $S = 1$.

Lời giải.

$|z - 2| = |z| \Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2 + b^2} = \sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow (a-2)^2 = a^2 \Leftrightarrow a = 1$.

$(z+1)(\overline{z} - i) = (a + 1 + bi)(a - bi - i) = a(a+1) + b(b+1) - (a+b+1)i$.

Vì $(z+1)(\overline{z} - i)$ là số thực nên $a + b + 1 = 0 \Rightarrow b = -2$.

Vậy $S = a + 2b = -3$.

Chọn phương án A

Câu 60. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| = |z - i|$. Tìm mô-đun nhỏ nhất của số phức $w = 2z + 2 - i$.

A $\dfrac{3}{2}$. **B** $3\sqrt{2}$. **C** $\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$. **D** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Ta có

$$|z-1| = |z-i| \Leftrightarrow |a-1+bi| = |a+(b-1)i| \Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 = a^2 + (b-1)^2 \Leftrightarrow a - b = 0.$$

Khi đó $w = 2(a+ai) + 2 - i = 2a + 2 + (a-1)i$.

Suy ra $|w| = \sqrt{(2a+2)^2 + (2a-1)^2} = \sqrt{8a^2+4a+5} = \sqrt{8\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{2}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Vậy mô-đun nhỏ nhất của số phức w là $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn phương án D

D MỨC ĐỘ 4

Câu 61. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z_1 + z_2|$.

A. $P = 4\sqrt{6}$. B. $P = 2\sqrt{26}$. C. $P = 5 + 3\sqrt{5}$. D. $P = 34 + 3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Đặt $z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di$ với $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$.

Ta có $z_1 + z_2 = 8 + 6i \Leftrightarrow (a+c) + (b+d)i = 8 + 6i \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 8 \\ b + d = 6. \end{cases}$

$|z_1 - z_2| = |(a-c) + (b-d)i| = 2 \Leftrightarrow (a-c)^2 + (b-d)^2 = 4$.

Do đó, $(a-c)^2 + (b-d)^2 + (a+c)^2 + (b+d)^2 = 4 + 8^2 + 6^2 = 104 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 52$.

Suy ra $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 52$.

Ta có

$$\begin{aligned} & (|z_1| + |z_2|)^2 \leq 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) = 104 \\ \Leftrightarrow\ & |z_1| + |z_2| \leq \sqrt{104} = 2\sqrt{26}. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $|z_1| = |z_2|$.

Chọn phương án B

Câu 62. Cho số phức z, biết rằng các điểm biểu diễn hình học của các số phức $z; iz$ và $z + iz$ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 18. Tính mô-đun của số phức z.

A. $2\sqrt{3}$. B. $3\sqrt{2}$. C. 6. D. 9.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$, với a, b là số thực. Gọi M, N, P lần lượt là điểm biểu diễn số phức z, iz và $z + iz$.

Khi đó $M(a;b); N(-b;a); P(a-b;a+b)$. Suy ra $MN = \sqrt{2(a^2+b^2)}; NP = PM = \sqrt{a^2+b^2}$.

Suy ra tam giác MNP vuông cân tại P.

Ta có $S_{\Delta MNP} = 18 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot NP \cdot PM = 18 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 36 \Leftrightarrow |z| = \sqrt{a^2+b^2} = 6$.

Chọn phương án C

Câu 63. Cho z_1, z_2 là các số phức thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$ và $|z_1 - 2z_2| = \sqrt{6}$. Tính giá trị của biểu thức $P = |2z_1 + z_2|$.

A. $P = 2$. B. $P = \sqrt{3}$. C. $P = 3$. D. $P = 1$.

Lời giải.

Đặt $z_1 = a_1 + b_1 i$; $z_2 = a_2 + b_2 i$. Suy ra $a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1$.
Và $|z_1 - 2z_2| = \sqrt{6} \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 = -\dfrac{1}{4}$.
Suy ra $P = |2z_1 + z_2| = 2$.
Chọn phương án A

Câu 64. Khai triển của biểu thức $(x^2+x+1)^{2018}$ được viết thành $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{4036} x^{4036}$. Tổng $S = a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \cdots - a_{4034} + a_{4036}$ bằng

A. -2^{1009}. B. 0. C. 2^{1009}. D. -1.

Lời giải.

Ta có $i^2 = -1$, $i^4 = 1 \Rightarrow i^{4m+2} = -1$, $i^{4m} = 1$ với mọi m nguyên dương.
Theo giả thiết thì $(x^2+x+1)^{2018} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{4036} x^{4036}$.
Cho $x = i$, thu được

$$\left[(i)^2 + i + 1\right]^{2018} = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + a_3 i^3 + a_4 i^4 + \cdots + a_{4034} i^{4034} + a_{4035} i^{4035} + a_{4036} i^{4036}$$

$\Leftrightarrow i^{2018} = a_0 + a_1 i - a_2 + a_3 i^3 + a_4 + \cdots - a_{4034} + a_{4035} i^{4035} + a_{4036}$

$\Leftrightarrow -1 = (a_0 - a_2 + a_4 + \cdots - a_{4034} + a_{4036}) + \left(a_1 i + a_3 i^3 + \cdots + a_{4035} i^{4035}\right)$. (1)

Chú ý rằng với mọi $n = 2m+1$ lẻ thì $i^n = i^{2m+1} = i^{2m} i = (-1)^m i$ là số thuần ảo, nên
(1) $\Leftrightarrow -1 = a_0 - a_2 + a_4 - \cdots - a_{4034} + a_{4036}$.
Chọn phương án D

Câu 65. Cho số phức $z = \left(\sqrt{3} + \sqrt{5} i\right)^{2018}$. Biết phần ảo của z có dạng $z = a + b\sqrt{3} + c\sqrt{5} + d\sqrt{15}$, trong các số a, b, c, d có đúng bao nhiêu số bằng 0?

A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Lời giải.

$$z = \left(\sqrt{3} + \sqrt{5} i\right)^{2018} = \left(-2 + 2\sqrt{15} i\right)^{1009} = 2^{1009} \sum_{k=0}^{1009} \mathrm{C}_{1009}^{k} (-1)^{1009-k} \sqrt{15^k} i^k.$$

Phần ảo của z ứng với giá trị k là số lẻ nên $a = b = c = 0$.
Chọn phương án D

Câu 66. Cho hai số phức z_1, z_2 biết $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$ và $|z_1| = |z_2| = 1$. Tính $|z_1 - z_2|$.

A. $|z_1 - z_2| = 1$. B. $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$. C. $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$. D. $|z_1 - z_2| = 3$.

Lời giải.

Gọi $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
Ta có $|z_1 + z_2| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{(a^2+b^2) + (c^2+d^2) + 2(ac+bd)} = \sqrt{3}$.
$|z_1| = |z_2| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{c^2+d^2} = 1$.
Suy ra $ac + bd = \dfrac{1}{2}$.
Từ đó ta có $|z_1 - z_2| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} = \sqrt{(a^2+b^2) + (c^2+d^2) - 2(ac+bd)} = 1$.
Chọn phương án A

Câu 67. Xét các số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5}$. Tìm $P = 16a + 8b$ biết $|z + 1 + i| + |z - 1 + 4i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. -36. B. $\sqrt{58}$. C. 58. D. 40.

Lời giải.

Ta có $|z-1+2i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow(a-1)^2+(b+2)^2=5\Leftrightarrow a^2+b^2=2a-4b$.
$M=|z+1+i|+|z-1+4i|=\sqrt{(a+1)^2+(b+1)^2}+\sqrt{(a-1)^2+(b+4)^2}$.
Ta có

$$\begin{aligned}M^2&\le 2\left[(a+1)^2+(b+1)^2+(a-1)^2+(b+4)^2\right]\\&\le 2\left[2\left(a^2+b^2\right)+10b+19\right]\\&\le 2\left[2\left(2a-4b\right)+10b+19\right]\\&\le 2\left[4a+2b+19\right]\\&\le 2\left[4(a-1)+2(b+2)+19\right].\end{aligned}$$

Mặt khác $4(a-1)+2(b+2)+19\le\sqrt{\left(4^2+2^2\right)\left[(a-1)^2+(b+2)^2\right]}+19=29$ nên $M^2\le 58$.

Do đó M đạt giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{58}$ khi $\begin{cases}4a+b=10\\\sqrt{58}=\sqrt{4a-2b+2}+\sqrt{4b+17}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{45}{16}\\b=-\dfrac{5}{8}\end{cases}$.

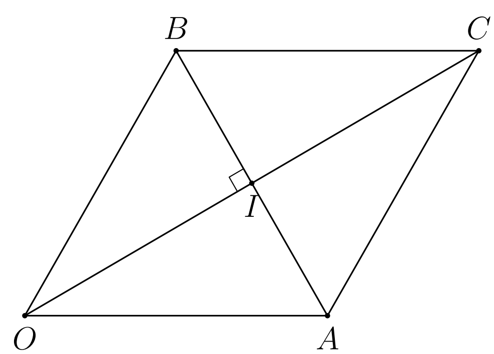
Suy ra $P=16a+8b=40$.
Chọn phương án (D)

Câu 68. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=2$, $|z_1+z_2|=2\sqrt{3}$. Tính $|z_1-z_2|$.

(A) $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$. (B) $|z_1-z_2|=2$. (C) $|z_1-z_2|=3$. (D) $|z_1-z_2|=0$.

Lời giải.

Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn sác số phức z_1, z_2. Khi đó $OA=|z_1|=2$, $OB=|z_2|=2$.
Dựng hình thoi $OACB$, khi đó C là điểm biểu diễn số phức z_1+z_2. Do đó $OC=|z_1+z_2|=2\sqrt{3}$.
Gọi I là tâm hình thoi $OACB$, ta có $OI=\dfrac{OC}{2}=\sqrt{3}$.
Từ đó $IA=\sqrt{OA^2-OI^2}=1$. Suy ra $AB=2IA=2$.
Bởi vậy $|z_1-z_2|=AB=2$.



Chọn phương án (B)

Câu 69. Cho ba số phức z_1,z_2,z_3 thỏa mãn: $\begin{cases}|z_1|=|z_2|=|z_3|=1\\z_1^2=z_2\cdot z_3\\|z_1-z_2|=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\end{cases}$. Tính giá trị của biểu thức $M=|z_2-z_3|-|z_3-z_1|$.

(A) $-\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3}$. (B) $-\sqrt{6}-\sqrt{2}+\sqrt{3}$. (C) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-2}{2}$. (D) $\dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}{2}$.

Lời giải.

Đặt $z_1=a_1+b_1i$; $z_2=a_2+b_2i$.
Theo giả thiết ta có:

— $|z_1|=|z_2|=1\Leftrightarrow a_1^2+b_1^2=a_2^2+b_2^2=1$.

— $|z_1 - z_2| = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow (a_1-a_2)^2 + (b_1-b_2)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2+\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 2 - 2(a_1a_2+b_1b_2) = 2+\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 2(a_1a_2+b_1b_2) = -\sqrt{3}.$

Suy ra $|z_1+z_2| = \sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2} = \sqrt{2+2(a_1a_2+b_1b_2)} = \sqrt{2-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.$

Ta có:

$$\begin{aligned} M &= |z_2 - z_3| - |z_3 - z_1| = \left|z_2 - \frac{z_1^2}{z_2}\right| - \left|\frac{z_1^2}{z_2} - z_1\right| \\ &= \frac{|z_2 - z_1|\cdot|z_2+z_1|}{|z_2|} - \frac{|z_1||z_1-z_2|}{|z_2|} \\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - 1\right) = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}{2}. \end{aligned}$$

Chọn phương án D

Câu 70. Cho số phức z. Gọi A, B lần lượt là các điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy biểu diễn số phức z và $(1+i)z$. Tính mô-đun của z, biết diện tích $\triangle OAB$ bằng 32.

A $|z| = 4\sqrt{2}$. **B** $|z| = 4$. **C** $|z| = 8$. **D** $|z| = 2$.

Lời giải.

Giả sử $z = a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$ ta có

$$(1+i)z = (1+i)(a+bi) = a-b+(a+b)i.$$

Ta có $OA = \sqrt{a^2+b^2}; OB = \sqrt{2(a^2+b^2)}$.

$$\cos\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) = \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{2(a^2+b^2)}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} S_{\triangle OAB} = 32 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot\sin\widehat{AOB} = 32 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{2(a^2+b^2)}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 32 \\ &\Leftrightarrow a^2+b^2 = 64 \Rightarrow |z| = 8. \end{aligned}$$

Chọn phương án C

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. D	3. D	4. B	5. A	6. C	7. D	8. B	9. A	10. A
11. A	12. B	13. C	14. A	15. B	16. C	17. B	18. B	19. C	20. A
21. D	22. A	23. D	24. D	25. D	26. B	27. A	28. D	29. B	30. C
31. D	32. D	33. C	34. C	35. B	36. D	37. B	38. C	39. C	40. B
41. A	42. B	43. D	44. A	45. D	46. D	47. C	48. A	49. D	50. B
51. A	52. D	53. C	54. D	55. D	56. B	57. B	58. D	59. A	60. D
61. B	62. C	63. A	64. D	65. D	66. A	67. D	68. B	69. D	70. C

DẠNG 21. TÌM ĐIỂM BIỂU DIỄN CỦA SỐ PHỨC

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$ là điểm nào dưới đây?

A $Q(1;2)$. **B** $P(-1;2)$. **C** $N(1;-2)$. **D** $M(-1;-2)$.

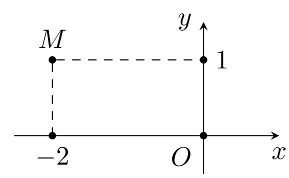
Lời giải.

Điểm biểu diễn của số phức $z = -1 + 2i$ là điểm $P(-1;2)$.

Chọn phương án B

Câu 1. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức nào?

A $z = 1 + 2i$. **B** $z = 1 - 2i$. **C** $z = -2 + i$. **D** $z = 2 + i$.



Lời giải.

Ta có $M(-2;1)$ là điểm biểu diễn của số phức có phần thực bằng -2 và phần ảo bằng 1.

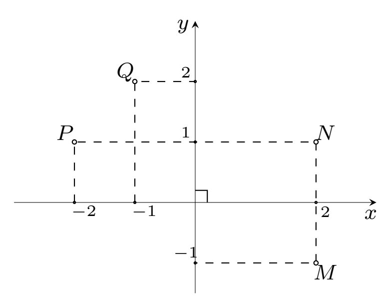
Suy ra điểm biểu diễn của M là số phức $z = -2 + i$.

Chọn phương án C

Câu 2.

Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$

A N. **B** P. **C** M. **D** Q.



Lời giải.

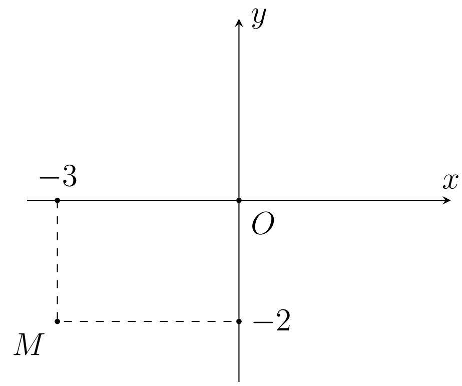
Số phức $z = -1 + 2i$ có phần thực -1, phần ảo 2 nên có điểm biểu diễn tọa độ $(-1;2)$ chính là Q.

Chọn phương án D

Câu 3. Điểm M trong hình vẽ bên dưới là điểm biểu diễn của số phức

50 DẠNG TOÁN PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA LẦN 2

(A) $z=-3+2i$. (B) $z=3+2i$.
(C) $z=-3-2i$. (D) $z=3-2i$.



Lời giải.

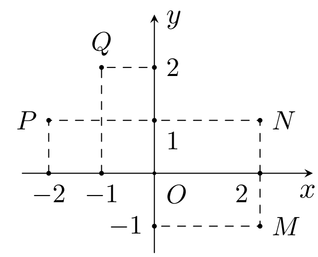
Điểm M trong hình vẽ là điểm biểu diễn của số phức $z=-3-2i$.

Chọn phương án (C)

Câu 4.

Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức $z=-1+2i$?

(A) N. (B) P. (C) M. (D) Q.



Lời giải.

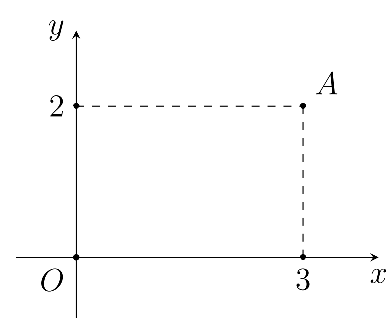
Vì $z=-1+2i$ nên điểm biểu diễn của số phức z có tọa độ $(-1;2)$.

Chọn phương án (D)

Câu 5.

Điểm A trong hình vẽ biểu diễn cho số phức z. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) Phần thực là 3, phần ảo là 2.
(B) Phần thực là 3, phần ảo là $2i$.
(C) Phần thực là -3, phần ảo là $2i$.
(D) Phần thực là -3, phần ảo là 2.



Lời giải.

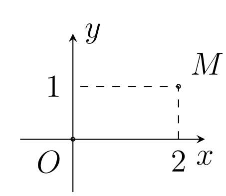
Điểm A biểu diễn số phức $z=3+2i$, có phần thực là 3, phần ảo là 2.

Chọn phương án (A)

Câu 6.

Trong hình vẽ bên, điểm M biểu diễn số phức z. Số phức $\overline{z}$ là

(A) $2-i$. (B) $1+2i$. (C) $1-2i$. (D) $2+i$.



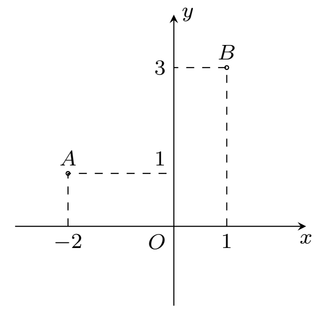
Lời giải.

Từ hình vẽ suy ra $M(2;1)$ nên $z=2+i$. Vậy $\overline{z}=2-i$.

Chọn phương án (A)

Câu 7.
Trong mặt phẳng Oxy, cho các điểm A, B như hình vẽ bên. Trung điểm của đoạn thẳng AB biểu diễn số phức

Ⓐ $-1+2i$. Ⓑ $-\dfrac{1}{2}+2i$. Ⓒ $2-i$. Ⓓ $2-\dfrac{1}{2}i$.

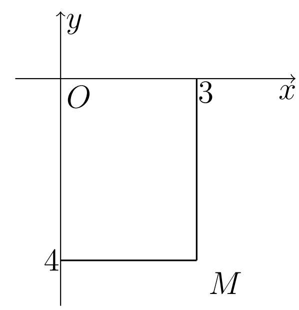


Lời giải.
Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là $\left(\dfrac{-1}{2};2\right)$. Khi đó $z=-\dfrac{1}{2}+2i$.

Chọn phương án Ⓑ

Câu 8. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.

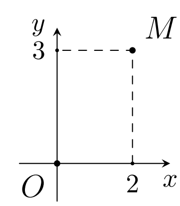
Ⓐ Phần thực là -4 và phần ảo là 3.
Ⓑ Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.
Ⓒ Phần thực là 3 và phần ảo là -4.
Ⓓ Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.



Lời giải.
Dựa vào hình vẽ ta được số phức $z=3-4i$. Vậy số phức z có phần thực là 3 và phần ảo là -4.
Chọn phương án Ⓒ

Câu 9.
Điểm M trong hình vẽ dưới đây biểu diễn số phức $\overline{z}$. Số phức z bằng

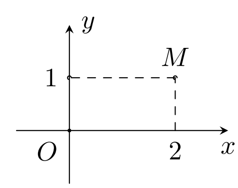
Ⓐ $3-2i$. Ⓑ $2-3i$. Ⓒ $2+3i$. Ⓓ $3+2i$.



Lời giải.
Theo hình vẽ ta có $\overline{z}=2+3i \Rightarrow z=2-3i$.
Chọn phương án Ⓑ

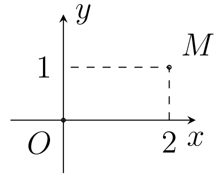
Câu 10.
Trong hình vẽ bên, điểm M biểu diễn số phức z. Số phức $\overline{z}$ là

Ⓐ $\overline{z}=2-i$. Ⓑ $\overline{z}=1+2i$. Ⓒ $\overline{z}=1-2i$. Ⓓ $\overline{z}=2+i$.



Lời giải.
Dựa vào hình vẽ ta có $z=2+i$, suy ra $\overline{z}=2-i$.
Chọn phương án Ⓐ

Câu 11. Trong hình vẽ bên, điểm M biểu diễn số phức z. Số phức $\overline{z}$ là



(A) $2-i$. (B) $1+2i$. (C) $1-2i$. (D) $2+i$.

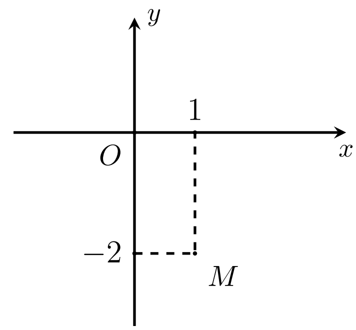
Lời giải.

Dựa vào hình vẽ ta có $z=2+i$, suy ra $\overline{z}=2-i$.

Chọn phương án (A)

Câu 12.

Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức.



(A) Phần thực là 1 và phần ảo là $-2i$.

(B) Phần thực là -2 và phần ảo là 1.

(C) Phần thực là -2 và phần ảo là i.

(D) Phần thực là 1 và phần ảo là -2.

Lời giải.

Số phức z có phần thực là 1 và phần ảo là -2.

Chọn phương án (D)

Câu 13.

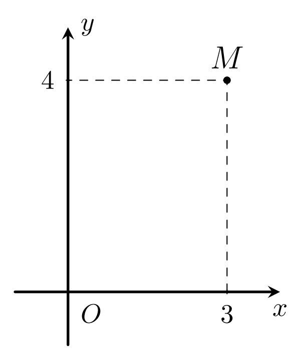
Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.

(A) Phần thực là 3 và phần ảo là 4.

(B) Phần thực là 3 và phần ảo là $4i$.

(C) Phần thực là 4 và phần ảo là 3.

(D) Phần thực là 4 và phần ảo là $3i$.



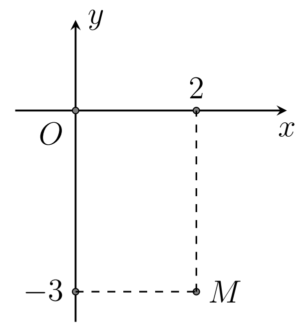
Lời giải.

Theo ý nghĩa hình học của số phức thì điểm $M(3;4)$ sẽ biểu diễn số phức có phần thực là 3 và phần ảo là 4.

Chọn phương án (A)

Câu 14.

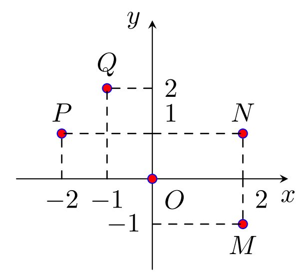
Điểm M trong hình bên là biểu diễn của số phức z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.



(A) Phần thực là 2 và phần ảo là $-3i$.
(B) Phần thực là -3 và phần ảo là 2.
(C) Phần thực là -3 và phần ảo là $2i$.
(D) Phần thực là 2 và phần ảo là -3.

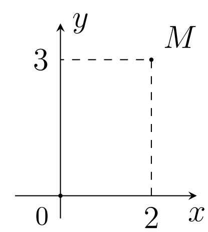
Lời giải.
Điểm $M(a;b)$ trong hệ trục Oxy là điểm biểu diễn của số phức $z = a + bi$. Do đó, điểm $M(2;-3)$ biểu diễn cho số phức $z = 2 - 3i$ có phần thực là 2 và phần ảo là -3.
Chọn phương án (D)

Câu 15. Điểm nào trong hình vẽ bên dưới là điểm biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$?
(A) N. (B) P. (C) M. (D) Q.



Lời giải.
Số phức $z = -1 + 2i$ có điểm biểu diễn là điểm $Q(-1;2)$.
Chọn phương án (D)

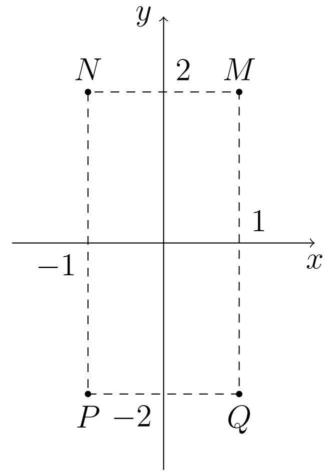
Câu 16.
Điểm M trong hình vẽ bên biểu diễn số phức $\overline{z}$.
Số phức z bằng



(A) $2 + 3i$. (B) $3 + 2i$.
(C) $2 - 3i$. (D) $3 - 2i$.

Lời giải.
Từ hình vẽ, ta thấy điểm M biểu diễn của số phức $2 + 3i$, do đó từ giả thiết suy ra $\overline{z} = 2 + 3i$.
Vậy, $z = 2 - 3i$.
Chọn phương án (C)

Câu 17. Giả sử M, N, P, Q được cho ở hình vẽ bên là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2, z_3, z_4 trên mặt phẳng tọa độ.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) Điểm N là điểm biểu diễn số phức $z_2 = 2 - i$.

(B) Điểm Q là điểm biểu diễn số phức $z_4 = -1 + 2i$.

(C) Điểm P là điểm biểu diễn số phức $z_3 = -1 - 2i$.

(D) Điểm M là điểm biểu diễn số phức $z_1 = 2 + i$.

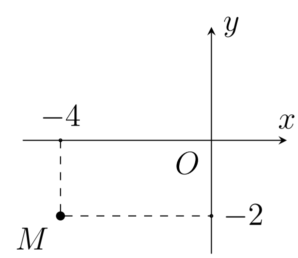
Lời giải.

M, N, P, Q được cho ở hình vẽ bên là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2, z_3, z_4 nên $z_1 = 1 + 2i$; $z_2 = -1 + 2i$; $z_3 = -1 - 2i$; $z_4 = 1 - 2i$.

Chọn phương án (C)

Câu 18.

Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z. Số phức liên hợp của iz là



(A) $2 + 4i$. (B) $-4 + 2i$. (C) $-4 - 2i$. (D) $2 - 4i$.

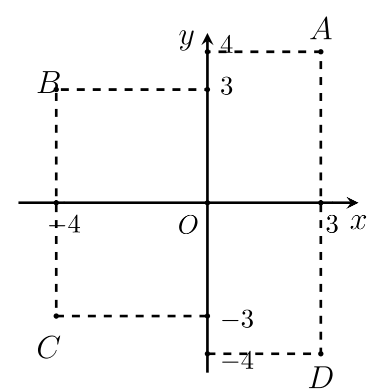
Lời giải.

Từ hình vẽ, ta thấy $z = -4 - 2i \Rightarrow iz = 2 - 4i \Rightarrow \overline{iz} = 2 + 4i$.

Chọn phương án (A)

Câu 19.

Trong mặt phẳng tọa độ (hình vẽ bên), số phức $z = 3 - 4i$ được biểu diễn bởi điểm nào trong các điểm A, B, C, D?

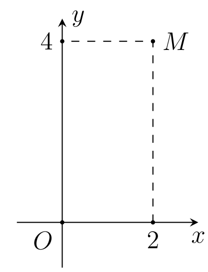


(A) Điểm A. (B) Điểm B. (C) Điểm C. (D) Điểm D.

Lời giải.

Điểm biểu diễn số phức $z = 3 - 4i$ là điểm $D(3; -4)$.
Chọn phương án D

Câu 20.
Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn cho số phức nào trong 4 số phức được liệt kê dưới đây?



A $z = 4 - 2i$. **B** $z = 2 + 4i$. **C** $z = 4 + 2i$. **D** $z = 2 - 4i$.

Lời giải.
Ta có tọa độ $M(2; 4)$, suy ra số phức biểu diễn bởi M là $z = 2 + 4i$.
Chọn phương án B

B MỨC ĐỘ 2

Câu 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z biết $|z-(2-3i)| \leq 2$.

A Một đường thẳng. **B** Một hình tròn. **C** Một đường tròn. **D** Một đường elip.

Lời giải.
Đặt $z = x + yi$, $|z - (2 - 3i)| = |(x - 2) + (y + 3)\,i| = \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2}$.
Do đó $|z - (2 - 3i)| \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2} \leq 2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 \leq 4$.
Vậy điểm biểu diễn số phức z nằm trên hình tròn có bán kính $r = 2$.
Chọn phương án B

Câu 22 (2D4B1-2). Cho số phức $z = 2 + 5i$. Điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng Oxy có tọa độ là

A $(5; 2)$. **B** $(2; 5)$. **C** $(-2; 5)$. **D** $(2; -5)$.

Lời giải.
Phương pháp: Số phức $z = a + bi, (a; b \in \mathbb{R})$ có điểm biểu diễn số phức trong mặt phẳng Oxy là $(a; b)$.
Cách giải: Điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng Oxy có tọa độ là $(2; 5)$.
Chọn phương án B

Câu 23. Cho số phức $z = \dfrac{(2-3i)(4-i)}{3+2i}$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng Oxy.

A $(1; 4)$. **B** $(-1; 4)$. **C** $(-1; -4)$. **D** $(1; -4)$.

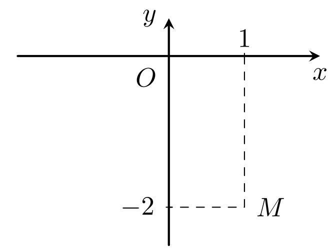
Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned} z = \frac{(2-3i)(4-i)}{3+2i} &= \frac{(8-3)-(2+12)\,i}{3+2i} \\ &= \frac{5-14i}{3+2i} \end{aligned}$$

$$= \frac{(5-14i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$$
$$= \frac{(15-28)-(10+42)\,i}{9+4}$$
$$= \frac{-13-52i}{13} = -1-4i.$$

Vậy điểm biểu diễn số phức $z$trên mặt phẳng Oxy là $M(-1;-4)$.
Chọn phương án (C)

Câu 24.
Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.



(A) Phần thực là -2 và phần ảo là i.
(B) Phần thực là 1 và phần ảo là -2.
(C) Phần thực là 1 và phần ảo là $-2i$.
(D) Phần thực là -2 và phần ảo là 1.

Lời giải.
Điểm M có tọa độ $M(1;-2)$ nên $z = 1-2i$.
Vậy phần thực là 1 và phần ảo là -2.
Chọn phương án (B)

Câu 25. Cho 4 điểm M, N, P, Q là các điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số $-i, 2+i, 5, 1+4i$. Hỏi điểm nào là trọng tâm của tam giác tạo bởi ba điểm còn lại?

(A) M. (B) N. (C) P. (D) Q.

Lời giải.
Ta có: $M(0;-1), N(2;1), P(5;0), Q(1;4)$ nên điểm N là trọng tâm của tam giác MPQ.
Chọn phương án (B)

Câu 26. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn cho số phức z trong mặt phẳng phức thỏa mãn điều kiện $|z-i| = |z+i|$ là

(A) một đường thẳng. (B) một đường tròn. (C) một đường elip. (D) một đoạn thẳng.

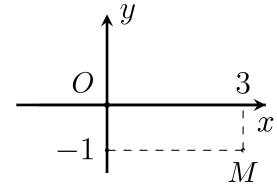
Lời giải.
Giả sử $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$.
$|z-i| = |z+i| \Leftrightarrow |x+(y-1)i| = |x+(y+1)i| \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2 = x^2+(y+1)^2 \Leftrightarrow y = 0.$
Chọn phương án (A)

Câu 27. Cho số phức z thay đổi, thỏa mãn $|z-i| = |z-1+2i|$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $\omega = z+2i$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Phương trình đường thẳng đó là

(A) $x-4y+3=0$. (B) $x+3y+4=0$. (C) $x-3y+4=0$. (D) $-x+3y+4=0$.

Lời giải.
Đặt $\omega = x+yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó, $z = \omega - 2i = x+(y-2)i$. Suy ra $|z-i| = |z-1+2i| \Leftrightarrow$ $|x+(y-3)i| = |x-1+yi|$, hay tương đương với $x^2+(y-3)^2 = (x-1)^2+y^2 \Leftrightarrow x-3y+4=0$.
Chọn phương án (C)

Câu 28.
Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức



A $z = 1 - 3i$. **B** $z = -1 + 3i$. **C** $z = 3 + i$. **D** $z = 3 - i$.

Lời giải.
Điểm $M(3; -1)$ là biểu diễn cho số phức $z = 3 - i$.
Chọn phương án D

Câu 29. Trong mặt phẳng phức cho các điểm $A(-4; 1)$, $B(1; 3)$, $C(-6; 0)$ lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2, z_3. Trọng tâm G của tam giác ABC là điểm biểu diễn của số phức nào sau đây?

A $-3 + \frac{4}{3}i$. **B** $3 + \frac{4}{3}i$. **C** $3 - \frac{4}{3}i$. **D** $-3 - \frac{4}{3}i$.

Lời giải.
Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $\begin{cases} x_G = -3 \\ y_G = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(-3; \frac{4}{3}\right)$ là điểm biểu diễn của số phức $-3 + \frac{4}{3}i$.
Chọn phương án A

Câu 30. Cho số phức $z = 3 - 2\mathrm{i}$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $w = z + \mathrm{i}\bar{z}$.

A $M(1; 1)$. **B** $M(1; -5)$. **C** $M(5; -5)$. **D** $M(5; 1)$.

Lời giải.
Ta có $w = 3 - 2\mathrm{i} + \mathrm{i}(3 + 2\mathrm{i}) \Leftrightarrow w = 3 - 2\mathrm{i} + 3\mathrm{i} - 2 \Leftrightarrow w = 1 + \mathrm{i}$.

Chọn phương án A

Câu 31. Điểm $M(3; -1)$ là điểm biểu diễn số phức nào sau đây?

A $z = -1 + 3i$. **B** $z = 1 - 3i$. **C** $z = 3 - i$. **D** $z = -3 + i$.

Lời giải.
Số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$ có điểm biểu diễn là $M(a; b)$.
Chọn phương án C

Câu 32. Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = 2$, $z_2 = 4i$, $z_3 = 2 + 4i$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Tính diện tích tam giác ABC.

A 8. **B** 2. **C** 6. **D** 4.

Lời giải.
Ta có $A(2; 0)$, $B(0; 4)$, $C(2; 4)$ suy ra $AB = 2\sqrt{5}$, $AC = 4$, $BC = 2$ suy ra tam giác ABC vuông tại C nên $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = 4$.
Chọn phương án D

Câu 33. Cho số phức $z = a + (a - 5)\,\mathrm{i}$ với $a \in \mathbb{R}$. Tìm a để điểm biểu diễn của số phức nằm trên đường phân giác của góc phần tư thứ hai và thứ tư

(A) $a = -\frac{1}{2}$. (B) $a = \frac{5}{2}$. (C) $a = 0$. (D) $a = \frac{3}{2}$.

Lời giải.

Để thỏa mãn bài toán suy ra $a - 5 = -a \Leftrightarrow 2a - 5 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{5}{2}$.

Chọn phương án (B)

Câu 34. Cho số phức z có số phức liên hợp là $\bar{z}$. Gọi M và M' tương ứng, lần lượt là điểm biểu diễn hình học của z và $\bar{z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng.

(A) M và M' đối xứng qua trục thực. (B) M và M' trùng nhau.
(C) M và M' đối xứng qua gốc tọa độ. (D) M và M' đối xứng qua trục ảo.

Lời giải.

Hai số phức liên hợp của nhau có phần thực giống nhau và phần ảo đối nhau nên điểm biểu diễn đối xứng nhau qua trục Ox.

Chọn phương án (A)

Câu 35. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm A là điểm biểu diễn số phức $z = 1 + 2i$, B là điểm thuộc đường thẳng $y = 2$ sao cho tam giác OAB cân tại O. Điểm B là điểm biểu diễn của số phức nào trong các số phức dưới đây?

(A) $-3 + 2i$. (B) $-1 + 2i$. (C) $3 + 2i$. (D) $1 - 2i$.

Lời giải.

$z = 1 + 2i \Rightarrow A(1; 2)$; điểm B thuộc đường thẳng $y = 2 \Rightarrow B(a; 2)$. Tam giác OAB cân tại O $\Leftrightarrow OA = OB \Leftrightarrow 5 = a^2 + 4 \Leftrightarrow a = \pm 1$. Vậy điểm B biểu diễn cho số phức $z = \pm 1 + 2i$.

Chọn phương án (B)

Câu 36. Trên mặt phẳng phức, cho điểm A biểu diễn số phức $-2 + 3i$, điểm B biểu diễn số phức $4 - 5i$. Gọi M là trung điểm của AB. Khi đó, điểm M biểu diễn số phức nào trong các số phức sau

(A) $3 - 4i$. (B) $3 + 4i$. (C) $1 + i$. (D) $1 - i$.

Lời giải.

Ta có $A(-2; 3)$, $B(4; -5)$. M là trung điểm của $AB \Rightarrow M(1; -1)$. Vậy M biểu diễn số phức $1 - i$.

Chọn phương án (D)

Câu 37. Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z trong mặt phẳng tọa độ, N là điểm đối xứng của M qua Oy (M, N không thuộc các trục tọa độ). Số phức ω có điểm biểu diễn lên mặt phẳng tọa độ là N. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\omega = -z$. (B) $\omega = -\bar{z}$. (C) $\omega = \bar{z}$. (D) $|\omega| > |z|$.

Lời giải.

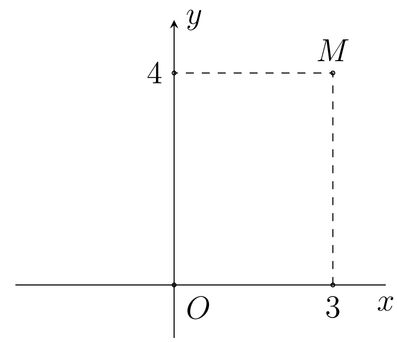
Giả sử $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$, N là điểm đối xứng của M qua Oy.

Khi đó $N(-x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $\omega = -x + yi = -(x - yi) = -\bar{z}$.

Chọn phương án (B)

Câu 38.

Trong mặt phẳng phức, cho điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức z. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**?



(A) Số phức z có phần ảo bằng 4 .
(B) $\overline{z} = 3 - 4i$.
(C) $|z| = 5$.
(D) $z - \overline{z} = 6$.

Lời giải.

Ta có $z = 3 + 4i \Rightarrow \overline{z} = 3 - 4i$, do đó $z - \overline{z} = 8i$.

Chọn phương án (D)

Câu 39. Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = (1-i)(2+i), z_2 = 1 + 3i, z_3 = -1 - 3i$. Tam giác ABC là

(A) Một tam giác vuông cân. (B) Một tam giác cân (không đều).
(C) Một tam giác vuông (không cân). (D) Một tam giác đều.

Lời giải.

Ta có $z_1 = 3 - i, z_2 = 1 + 3i, z_3 = -1 - 3i$. Điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2, z_3 lần lượt là $A(3; -1), B(1; 3), C(-1; -3)$.

$\Rightarrow AB = \sqrt{(1-3)^2 + (3+1)^2} = 2\sqrt{5}$. Tương tự $BC = 2\sqrt{10}$, $CA = 2\sqrt{5}$. Do $AB = AC (= 2\sqrt{5})$ và $AB^2 + AC^2 = BC^2$ nên tam giác ABC là tam giác vuông cân.

Chọn phương án (A)

Câu 40. Cho số phức $z = a + a^2 i$ với $a \in \mathbb{R}$. Khi đó điểm biểu diễn của số phức liên hợp của z nằm trên đường nào?

(A) Đường thẳng $y = -x + 1$. (B) Đường thẳng $y = 2x$.
(C) Parabol $y = x^2$. (D) Parabol $y = -x^2$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn của số phức liên hợp $\overline{z}$ là $M\left(a; -a^2\right)$. Do đó điểm M thuộc $y = -x^2$.

Chọn phương án (D)

C MỨC ĐỘ 3

Câu 41. Tính tổng của tất cả các giá trị của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn đồng thời $|z| = m$ và $|z - 4m + 3mi| = m^2$.

(A) 4. (B) 6. (C) 9. (D) 10.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó, điểm biểu diễn của z là $M(x; y)$.

Với $m = 0$, ta có $z = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m > 0$, ta có

— $|z| = m \Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn (C_1) tâm $I(0; 0)$, bán kính $R = m$.

— $|z-4m+3mi| = m^2 \Leftrightarrow (x-4m)^2+(y+3m)^2 = m^4 \Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn (C_2) tâm $I'(4m;-3m)$, bán kính $R' = m^2$.

— Có duy nhất một số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ khi (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} II' = R+R' \\ II' = |R-R'| \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 5m = m^2+m \\ 5m = |m^2-m| \end{array}\right. \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = 6 \end{array}\right.$.

Suy ra, tập giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là $\{0;4;6\}$. Do đó, tổng tất cả các giá trị của m là 10.
Chọn phương án D

Câu 42. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|(1+i)z-5+i| = 2$ là một đường tròn tâm I và bán kính R lần lượt là

A $I(2;-3), R = \sqrt{2}$. **B** $I(2;-3), R = 2$. **C** $I(-2;3), R = \sqrt{2}$. **D** $I(-2;3), R = 2$.

Lời giải.

Gọi số phức $z = x+yi$.

$$\begin{aligned}
& |(1+i)z-5+i| = 2 \\
\Leftrightarrow\ & |(1+i)(x+yi)-5+i| = 2 \\
\Leftrightarrow\ & |(x-y-5)+(x+y+1)i| = 2 \\
\Leftrightarrow\ & (x-y-5)^2+(x+y+1)^2 = 4 \\
\Leftrightarrow\ & (x-y)^2-10(x-y)+25+(x+y)^2+2(x+y)+1 = 4 \\
\Leftrightarrow\ & 2x^2+2y^2-8x+12y+22 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2+y^2-4x+6y+11 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-2)^2+(y+3)^2 = 2
\end{aligned}$$

. Vậy đường tròn biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện bài toán có tâm $I(2;-3), R = \sqrt{2}$.
Chọn phương án A

Câu 43. Trong hệ tọa độ Oxy, cho điểm M biểu diễn số phức $z = -2+3\text{i}$. Gọi N là điểm thuộc đường thẳng $y = 3$ sao cho tam giác OMN cân tại O. Điểm N là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?

A $z = 3-2\text{i}$. **B** $z = -2-3\text{i}$. **C** $z = 2+3\text{i}$. **D** $z = -2+\text{i}$.

Lời giải.

Do giả thiết suy ra tọa độ $M(-2;3)$ nên M thuộc đường thẳng $y = 3$. Vì tam giác OMN cân tại O suy ra N đối xứng với M qua Oy nên tọa độ điểm $N(2;3)$. Khi đó điểm N là biểu diễn của số phức $z = 2+\text{i}$.

Chọn phương án C

Câu 44. Giả sử z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2-2z+5 = 0$. Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên hệ tọa độ Oxy. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng MN là

(A) $(1;0)$. (B) $(1;1)$. (C) $(0;0)$. (D) $(0;1)$.

Lời giải.

Ta có $z^2-2z+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1+2\mathrm{i} \\ z=1-2\mathrm{i} \end{array}\right.$. Không mất tính tổng quát giả sử $z_1=1+2\mathrm{i}$ và $z_2=1-2\mathrm{i}$ do đó tọa độ điểm $M(1;2)$ và $N(1;-2)$. Gọi I là trung điểm của MN ta suy ra tọa độ $I(1;0)$.

Chọn phương án (A)

Câu 45. Cho số phức z thoả mãn $z-4=(1+i)|z|-(4+3z)i$. Môđun của số phức z bằng

(A) 2. (B) 1. (C) 16. (D) 4.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
& a+bi-4=(1+i)\sqrt{a^2+b^2}-(4+3a+3bi)i \\
\Leftrightarrow\ & a-4+bi=\sqrt{a^2+b^2}+i\sqrt{a^2+b^2}-(4+3a)i+3b \\
\Leftrightarrow\ & a-3b-\sqrt{a^2+b^2}-4+(b-\sqrt{a^2+b^2}+3a+4)i=0 \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a-3b-\sqrt{a^2+b^2}-4=0 \\ 3a+b-\sqrt{a^2+b^2}+4=0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a-3b-\sqrt{a^2+b^2}-4=0 \\ 2a+4b+8=0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} -2b-4-3b-\sqrt{(-2b-4)^2+b^2}-4=0 \\ a=-2b-4 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} \sqrt{(-2b-4)^2+b^2}=5b+8 \\ a=-2b-4 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} 5b^2+16b+16=25b^2+80b+64 \\ a=-2b-4 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} 20b^2+64b+48=0 \\ a=-2b-4 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=-\dfrac{6}{5} \\ a=-\dfrac{8}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} b=-2 \\ a=0 \end{cases} \end{array}\right..
\end{aligned}$$

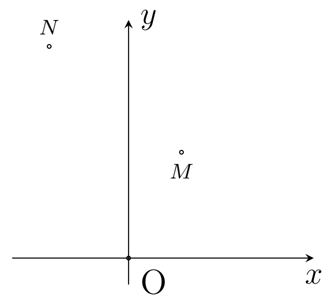
Với cả hai trường hợp ta đều có $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=2$.

Chọn phương án (A)

Câu 46.

Cho số phức z có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là M, biết z^2 có điểm biểu diễn là N như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $|z| < 1$. **B** $1 < |z| < 3$. **C** $3 < |z| < 5$. **D** $|z| > 5$.



Lời giải.

Gọi $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}^+$ và $a < b$. Khi đó $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$.

Từ hình vẽ ta thấy

$$\begin{cases} a^2 - b^2 & < 0 \\ 2ab & > 2b \\ a^2 - b^2 & > -a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ b < \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 < a < b < \sqrt{2}$$

Vậy $1 < |z| < 3$.

Chọn phương án B

Câu 47. Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 trong mặt phẳng phức, I là trung điểm MN, O là gốc tọa độ (3 điểm O, M, N phân biệt và không thẳng hàng). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $|z_1 + z_2| = 2OI$. **B** $|z_1 + z_2| = OI$.

C $|z_1 - z_2| = OM + ON$. **D** $|z_1 - z_2| = 2(OM + ON)$.

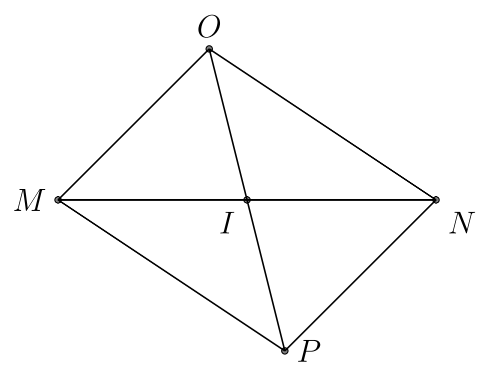
Lời giải.

Gọi P là điểm biểu diễn của số phức $z_1 + z_2$.

Khi đó $OMPN$ là hình bình hành nên $2OI = OP = |z_1 + z_2|$.

$|z_1 - z_2| = MN$ và $MN \neq OM + ON$, $MN \neq 2(OM + ON)$.

Vậy đáp số đúng là $|z_1 + z_2| = 2OI$.



Chọn phương án A

Câu 48. Gọi A, B, C là các điểm trong mặt phẳng Oxy theo thứ tự biểu diễn các số phức $2 + 3i$, $3 + i$, $1 + 2i$. Trọng tâm G của tam giác ABC biểu diễn số phức z. Tìm z.

A $z = 1 + i$. **B** $z = 1 - i$. **C** $z = 2 - 2i$. **D** $z = 2 + 2i$.

Lời giải.

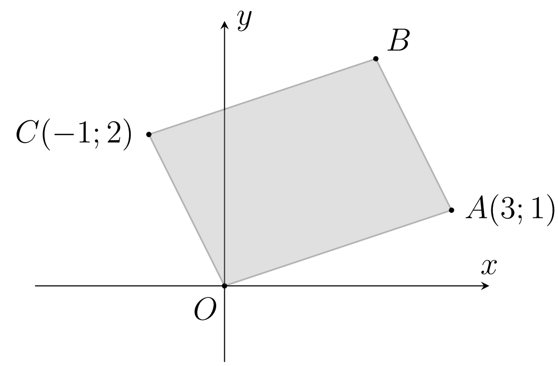
Ta có: $A\,(2;\,3)$, $B\,(3;\,1)$, $C\,(1;\,2) \Rightarrow G\,(2;\,2)$ là điểm biểu diễn số phức $z = 2 + 2i$.

Chọn phương án D

Câu 49.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành $OABC$ có tọa độ điểm $A(3;1)$, $C(-1;2)$ (như hình vẽ bên). Số phức nào sau đây có điểm biểu diễn là điểm B?

A $w_1 = -2+3i$. **B** $w_2 = 2+3i$.
C $w_3 = 4-i$. **D** $w_4 = -4+i$.



Lời giải.

Do $OABC$ là hình bình hành nên

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}. \qquad (1)$$

Mà $\overrightarrow{OA} = (3;1)$ và $\overrightarrow{OC} = (-1;2)$ nên từ (1) suy ra

$$\overrightarrow{OB} = (2;3). \qquad (2)$$

Từ (2) suy ra điểm $B(2;3)$ hay điểm B là điểm biểu diễn của số phức $w_2 = 2+3i$.
Chọn phương án B

Câu 50. Xét các điểm A, B, C trong mặt phẳng phức theo thứ tự là điểm biểu diễn các số phức $\dfrac{4i}{-1+i}$, $(1-i)(1+2i)$, $\dfrac{2+6i}{3-i}$. Gọi $I(a;b)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tính giá trị của biểu thức $P = a+b$.

A $P=0$. **B** $P=1$. **C** $P=2$. **D** $P=-1$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{4i}{-1+i} = 2-2i \Rightarrow A(2;-2)$, $(1-i)(1+2i) = 3+i \Rightarrow B(3;1)$, $\dfrac{2+6i}{3-i} = 2i \Rightarrow C(0;2)$.
Lại có

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 + (b+2)^2 = (a-3)^2 + (b-1)^2 \\ (a-2)^2 + (b+2)^2 = a^2 + (b-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+3b = 1 \\ a-2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow P = 1.$$

Chọn phương án B

Câu 51. Tìm tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện số phức $w = z(1+i) + (2-i)$ là một số thuần ảo.

A Đường tròn $x^2+y^2=2$. **B** Đường thẳng $y = x+2$.
C Đường thẳng $y = x$. **D** Đường parabol $2x = y^2$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi\,(x, y \in \mathbb{R})$.
Ta có

$$\begin{aligned} & w = z(1+i) + (2-i) \\ \Leftrightarrow\ & w = (x+yi)(1+i) + (2-i) \\ \Leftrightarrow\ & w = (x+2-y) + (x+y-1)iw = z(1+i) + (2-i). \end{aligned}$$

Khi đó w là một số thuần ảo khi và chỉ khi $x + 2 - y = 0 \Leftrightarrow y = x + 2$.
Chọn phương án B

Câu 52. Trên mặt phẳng tập hợp các số phức $z = x + yi$ thỏa mãn $|z + 2 + i| = |\overline{z} - 3i|$ là đường thẳng có phương trình

A $y = x + 1$. **B** $y = -x + 1$. **C** $y = -x - 1$. **D** $y = x - 1$.

Lời giải.
Ta có $|z+2+i| = |\overline{z} - 3i| \Leftrightarrow |(x+2)+(y+1)i| = |x-(y+3)i| \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+1)^2 = x^2 + (y+3)^2$
$\Leftrightarrow 4x + 4 + 2y + 1 = 6y + 9 \Leftrightarrow x - y - 1 = 0$.
Chọn phương án D

Câu 53. Tìm số phức z thỏa mãn $|z - 2| = |z|$ và $(z+1)(\overline{z} - i)$ là số thực.

A $z = 1 - 2i$. **B** $z = -1 - 2i$. **C** $z = 2 - i$. **D** $z = 1 + 2i$.

Lời giải.
Đặt $z = a + bi$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} |z-2| = |z| \\ (z+1)(\overline{z}-i) \text{ là số thực} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |(a-2)+bi| = |a+bi| \\ (a+bi+1)(a-bi-i) \text{ là số thực} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 + b^2 = a^2 + b^2 \\ a^2 + a + b^2 + b - (a+b+1)i \text{ là số thực} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a + 4 = 0 \\ a + b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

Vậy $z = 1 - 2i$ là số phức cần tìm.
Chọn phương án A

Câu 54. Trong mặt phẳng Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - 2| = 5$ là một đường tròn. Khi đó số phức $w = (3+4i)z + i$ có điểm biểu diễn thuộc đường tròn bán kính

A 5. **B** 7. **C** 35. **D** 25.

Lời giải.
$w = (3+4i)z + i \Leftrightarrow \dfrac{w-i}{3+4i} = z \Leftrightarrow \dfrac{w-i}{3+4i} - 2 = z - 2 \Leftrightarrow \dfrac{w-6-9i}{3+4i} = z - 2$
Suy ra: $\left|\dfrac{w-6-9i}{3+4i}\right| = |z-2| \Leftrightarrow \dfrac{|w-(6+9i)|}{5} = 5 \Leftrightarrow |w-(6+9i)| = 25$.
Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(6;9)$, bán kính $R = 25$.
Cách 2:
$w = (3+4i)z + i = (3+4i)(z-2) + 6 + 9i \Leftrightarrow w - (6+9i) = (3+4i)(z-2)$.
Suy ra: $|w-(6+9i)| = |(3+4i)||(z-2)|$ hay $|w-(6+9i)| = 25$.
Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(6;9)$, bán kính $R = 25$.
Chọn phương án D

Câu 55. Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C, D lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $z_1 = -1 + i$, $z_2 = 1 + 2i$, $z_3 = 2 - i$, $z_4 = -3i$. Gọi S diện tích tứ giác $ABCD$. Tính S.

A $S = \dfrac{17}{2}$. **B** $S = \dfrac{19}{2}$. **C** $S = \dfrac{23}{2}$. **D** $S = \dfrac{21}{2}$.

Lời giải.

Ta có $z_1 = -1 + i \Rightarrow A(-1; 1)$;

$z_2 = 1 + 2i \Rightarrow B(1; 2)$;

$z_3 = 2 - i \Rightarrow C(2; -1)$;

$z_4 = -3i \Rightarrow D(0; -3)$.

$AB = \sqrt{5}$, $AC = \sqrt{13}$, $BC = \sqrt{10}$, $AD = \sqrt{17}$, $CD = 2\sqrt{2}$.

Do đó: $p_1 = \dfrac{AB + AC + BC}{2} = \dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{13} + \sqrt{10}}{2}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \dfrac{\sqrt{p_1(p_1 - AB)(p_1 - BC)(p_1 - AC)}}{2} = \dfrac{7}{2}$.

$p_2 = \dfrac{AD + CD + AC}{2} = \dfrac{\sqrt{17} + 2\sqrt{2} + \sqrt{13}}{2}$.

Diện tích tam giác ACD là $S_{\triangle ACD} = \sqrt{p_2(p_2 - AC)(p_2 - AD)(p_2 - CD)} = 5$.

Vậy diện tích tứ giác $ABCD$ là $S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = \dfrac{7}{2} + 5 = \dfrac{17}{2}$.

Chọn phương án A

Câu 56. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z - 1| = |z + \overline{z} + 2|$ trên mặt phẳng tọa độ là một

A đường thẳng. **B** đường tròn. **C** parabol. **D** hypebol.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi\, (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z} = x - yi \Rightarrow z + \overline{z} = 2x$.

Khi đó $2|x - 1 + yi| = |2x + 2| \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = |2x + 2|$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = (x + 1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow y^2 = 4x$.

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z - 1| = |z + \overline{z} + 2|$ trên mặt phẳng tọa độ là một parabol.

Chọn phương án C

Câu 57. Cho số phức $z = 1 + i$. Biết rằng tồn tại các số phức $z_1 = a + 5i, z_2 = b$ (trong đó $a, b \in \mathbb{R}, b > 1$) thỏa mãn $\sqrt{3}|z - z_1| = \sqrt{3}|z - z_2| = |z_1 - z_2|$. Tính $b - a$.

A $b - a = 5\sqrt{3}$. **B** $b - a = 2\sqrt{3}$. **C** $b - a = 4\sqrt{3}$. **D** $b - a = 3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Đặt $M(1; 1), N(a; 5), P(b; 0) (b > 1)$ lần lượt là các điểm biểu thị cho các số phức z, z_1, z_2.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (a - 1; 4)$, $\overrightarrow{MP} = (b - 1; -1)$ nên

$$\begin{cases} |\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{MP}| \\ \cos 120^\circ = \dfrac{\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{MP}|} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + 16 = (b-1)^2 + 1 \\ -\dfrac{1}{2} = \dfrac{(a-1)(b-1) - 4}{(a-1)^2 + 16} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a-1)^2 - (b-1)^2 = -15 \\ (a-1)^2 + 2(a-1)(b-1) = -8 \end{cases} \quad (*)$$

Đặt $x = a - 1, y = b - 1 (y > 0)$ thì $\begin{cases} x^2 + y^2 = -15 \\ x^2 + 2xy = -8 \end{cases} \Rightarrow 7x^2 + 30xy + 8y^2 = 0$ (nhân chéo vế với vế của hai phương trình).

Tìm được $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{7}y \\ x = -4y \end{array}\right.$. Thay vào $(*)$ thì thấy chỉ có $x = \dfrac{-2}{7}y$ thỏa mãn.

Lúc này $y^2 = \dfrac{49}{3}$. Do $y > 0 \Rightarrow y = \dfrac{7}{\sqrt{3}} x = \dfrac{-2}{\sqrt{3}}$. Vậy $b - a = y - x = 3\sqrt{3}$.

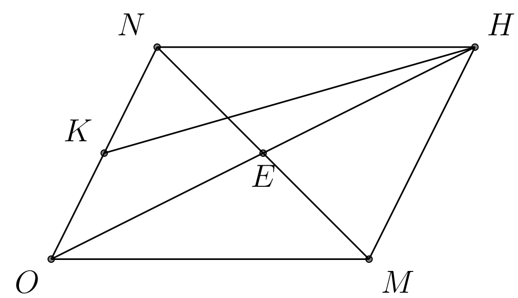
Chọn phương án D

Câu 58. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa $|z_1| = |z_2| = \sqrt{17}$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Biết $MN = 3\sqrt{2}$, gọi H là đỉnh thứ tư của hình bình hành $OMHN$ và K là trung điểm của ON. Tính độ dài ℓ của đoạn thẳng KH.

A $\ell = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$. **B** $\ell = 5\sqrt{2}$. **C** $\ell = \dfrac{3\sqrt{13}}{2}$. **D** $\ell = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi E là giao điểm của OH và MN.



$$\begin{aligned} OE^2 &= \frac{OM^2 + ON^2}{2} - \frac{MN^2}{4} \\ &= 17 - \frac{9}{2} = \frac{25}{2} \Rightarrow OH^2 = 4OE^2 = 50 \\ HK^2 &= \frac{HN^2 + HO^2}{2} - \frac{ON^2}{4} = \frac{OM^2 + OH^2}{2} - \frac{ON^2}{4} \\ &= \frac{17 + 50}{2} - \frac{17}{4} = \frac{117}{4} \Rightarrow \ell = HK = \frac{3\sqrt{13}}{2}. \end{aligned}$$

Chọn phương án C

Câu 59. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$; $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$. Tính $|z_1 - z_2|$.

A 0. **B** 2. **C** 1. **D** 3.

Lời giải.

Giả sử M, N lần lượt là điểm biểu diễn của số phức z_1, z_2.

Theo bài ra ta có $OM = ON = 1$ và $|\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}| = \sqrt{3}$.

Do đó $3 = |\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}|^2 = OM^2 + ON^2 + 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} \Rightarrow 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 3 - 1 - 1 = 1$.

Ta có $|z_1 - z_2| = |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}| = \sqrt{\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}\right)^2} = \sqrt{OM^2 + ON^2 - 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}} = 1$.

Chọn phương án C

Câu 60. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $1 \leq |z| \leq 2$ là một hình phẳng có diện tích bằng

A π. **B** 2π. **C** 4π. **D** 3π.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ với x, y là các số thực. Theo giả thiết, ta có

$$1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4.$$

Gọi (C_1), (C_2) lần lượt là đường tròn có phương trình $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$. Khi đó, (C_1), (C_2) có tâm $O(0;0)$, bán kính lần lượt là $R_1=1$ và $R_2=2$.
Hình phẳng cần tìm chính là vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn (C_1) và (C_2).
Gọi S là diện tích vành khăn, suy ra

$$S=\pi R_2^2-\pi R_1^2=4\pi-\pi=3\pi.$$

Chọn phương án D

D MỨC ĐỘ 4

Câu 61. Cho số phức $z=m+3+(m^2-1)i$, với m là tham số thực thay đổi. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thuộc đường cong (C). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành.

A $\frac{8}{3}$. **B** $\frac{4}{3}$. **C** $\frac{1}{3}$. **D** $\frac{2}{3}$.

Lời giải.
Điểm $M(m+3;m^2-1)$ là điểm biểu diễn số phức $z=m+3+(m^2-1)i$.
Đặt $x=m+3$; $y=m^2-1$, ta có $y=(x-3)^2-1=x^2-6x+8$. Suy ra điểm M thuộc đường $(C)\colon y=x^2-6x+8$.
Hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành là nghiệm của phương trình

$$x^2-6x+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=2\\&x=4.\end{aligned}\right.$$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành là

$$S=\int\limits_2^4|x^2-6x+8|\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$$

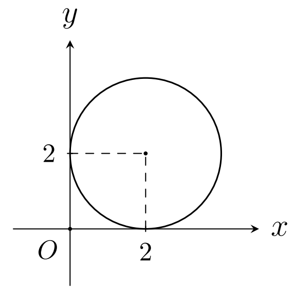
Chọn phương án B

Câu 62. Gọi A, B, C, D lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $1+2i$, $1+\sqrt{3}+i$,$1+\sqrt{3}-i$, $1-2i$ trên mặt phẳng tọa độ. Biết tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong một đường tròn, tâm của đường tròn đó biểu diễn số phức có phần thực là

A $\sqrt{3}$. **B** 2. **C** $\sqrt{2}$. **D** 1.

Lời giải.
Ta có $A\,(1;2)$, $B\left(1+\sqrt{3};1\right)$, $C\left(1+\sqrt{3};-1\right)$, $D\,(1;-2)$.
Khi đó $\overrightarrow{BA}=\left(-\sqrt{3};1\right)$, $\overrightarrow{BD}=\left(-\sqrt{3};-3\right)$ suy ra $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=0\Rightarrow\triangle ABD$ vuông tại B.
$\overrightarrow{CA}=\left(-\sqrt{3};3\right)$, $\overrightarrow{CD}=\left(-\sqrt{3};-1\right)$ suy ra $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}=0\Rightarrow\triangle ACD$ vuông tại C.
Do đó tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ là trung điểm đoạn AD có tọa độ $I\,(1;0)$.
Chọn phương án D

Câu 63.
Trong mặt phẳng tọa độ, đường tròn tô đậm như hình vẽ bên là tập hợp điểm biểu diễn số phức z. Hỏi số phức z thỏa mãn đẳng thức nào sau đây ?



(A) $|z-2-2i|=2$. (B) $|z-2|=2$. (C) $|z-1-2i|=2$. (D) $|z-2i|=2$.

Lời giải.
z thuộc đường tròn tâm $I(2;2)$ bán kính 2. Do đó $|z-2-2i|=2$.
Chọn phương án (A)

Câu 64. Cho số phức z thỏa $|z-1|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(1+i\sqrt{3})z+2$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.
(A) $r=9$. (B) $r=16$. (C) $r=25$. (D) $r=4$.

Lời giải.
$w-3-i\sqrt{3}=(1+i\sqrt{3})(z-1)$.
Suy ra $|w-3-i\sqrt{3}|=|(1+i\sqrt{3})(z-1)|=4$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn bán kính 4.
Chọn phương án (D)

Câu 65. Cho số phức z, biết rằng các điểm biểu diễn hình học của số phức z, iz và $z+iz$ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 18. Tính mô-đun của số phức z.
(A) $|z|=2\sqrt{3}$. (B) $|z|=3\sqrt{2}$. (C) $|z|=6$. (D) $|z|=9$.

Lời giải.
Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$, ta có
$iz=i(x+yi)=-y+xi$ và $z+iz=x+yi-y+xi=x-y+(x+y)i$.
Gọi $A(x;y)$, $B(-y;x)$, $C(x-y;x+y)$ là các điểm biểu diễn của z, iz, $z+iz$.
Ta có $AB=\sqrt{(-x-y)^2+(x-y)^2}$, $AC=\sqrt{(-y)^2+x^2}$, $BC=\sqrt{x^2+y^2}$
$\Rightarrow AB^2=AC^2+BC^2\Rightarrow\triangle ABC$ vuông tại C.
Khi đó $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BC=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)=18\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=6=|z|$.
Chọn phương án (C)

Câu 66. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|\overline{z}-(3-4i)|=2$ là
(A) Đường tròn tâm $I(3;4)$, bán kính $R=2$.
(B) Đường tròn tâm $I(-3;-4)$, bán kính $R=2$.
(C) Đường tròn tâm $I(3;-4)$, bán kính $R=2$.
(D) Đường tròn tâm $I(-3;4)$, bán kính $R=2$.

Lời giải.
Đặt $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})\Rightarrow\overline{z}=a-bi$.
Theo giả thiết $|\overline{z}-(3-4i)|=2\Leftrightarrow|a-bi-(3-4i)|=2\Leftrightarrow(a-3)^2+(b-4)^2=4$.
Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(3;4)$, bán kính $R=2$.

Chọn phương án (A)

Câu 67. Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C là ba điểm lần lượt biểu diễn ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Khi đó tam giác ABC

(A) đều. (B) vuông. (C) cân. (D) có một góc tù.

Lời giải.

Theo giả thiết, tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; 1)$ có $AB = 2$. Suy ra tam giác ABC vuông tại C.

Chọn phương án (B)

Câu 68. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi M là điểm biểu diễn số phức $z = 2 + 2i$; M' là điểm biểu diễn số phức $z' = \dfrac{3i}{2}z$. Tính diện tích tam giác OMM'.

(A) $S_{\triangle OMM'} = 4$. (B) $S_{\triangle OMM'} = 6$. (C) $S_{\triangle OMM'} = 3$. (D) $S_{\triangle OMM'} = \dfrac{15}{2}$.

Lời giải.

Ta có $M(2; 2)$. Mặt khác $z' = \dfrac{3i}{2}z = -3 + 3i \Rightarrow M'(-3; 3)$.

Tam giác OMM' có $\overrightarrow{OM} = (2; 2)$, $\overrightarrow{OM'} = (-3; 3) \Rightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow OM \perp OM'$.

Diện tích tam giác OMM' là $S_{\triangle OMM'} = \dfrac{1}{2}OM \cdot OM' = \dfrac{1}{2} \cdot |z| \cdot |z'| = 6$.

Chọn phương án (B)

Câu 69. Cho số phức $z = m + 3 + (m^2 - 1)i$, với m là tham số thực thay đổi. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thuộc đường cong (C). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành.

(A) $\dfrac{8}{3}$. (B) $\dfrac{4}{3}$. (C) $\dfrac{1}{3}$. (D) $\dfrac{2}{3}$.

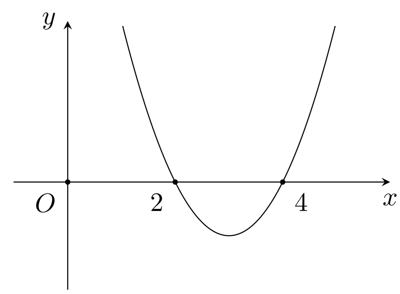
Lời giải.

Ta có $z = m + 3 + (m^2 - 1)i = x + yi \Rightarrow \begin{cases} x = m + 3 \\ y = m^2 - 1 \end{cases}$

$\Rightarrow y = (x - 3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục hoành là

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2; x = 4.$$



Diện tích hình phẳng cần tính là $\displaystyle\int_2^4 -(x^2 - 6x + 8)\,\mathrm{d}x = \dfrac{4}{3}$.

Chọn phương án (B)

Câu 70. Cho số phức z thỏa mãn $|z + m| = |z - 1 + m|$ và số phức $z' = 1 + i$. Định tham số m để $|z - z'|$ là nhỏ nhất.

(A) $m = \dfrac{1}{2}$. (B) $m = -\dfrac{1}{2}$. (C) $m = \dfrac{1}{3}$. (D) $m = 1$.

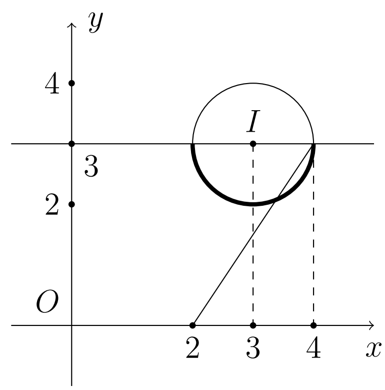
Lời giải.

Giả sử $z = a + bi\,(a, b \in \mathbb{R})$, Khi đó $|z + m| = |z - 1 + m| \Leftrightarrow 2a + 2m = 1$.
Ta có $|z - z'| = \sqrt{(a-1)^2 + (b-1)^2} \geq 0$ dấu bằng xảy ra khi $a = b = 1$.
Với $a = 1 \Rightarrow m = -\dfrac{1}{2}$
Chọn phương án B

Câu 71. Cho số phức thỏa mãn $|z - 2i| \leq |z - 4i|$ và $|z - 3 - 3i| = 1$. Giá trị lớn nhất của $|z - 2|$ là

A $\sqrt{10} + 1$. B $\sqrt{13} + 1$. C $\sqrt{10}$. D $\sqrt{13}$.

Lời giải.



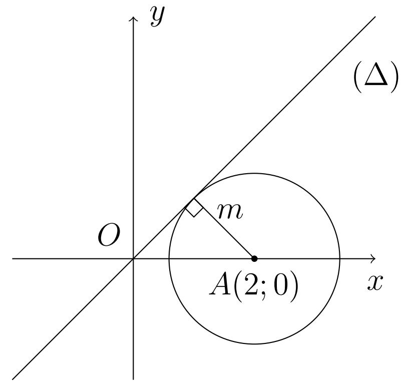
Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng Oxy. Điểm $A(0; 2)$ biểu diễn số phức $2i$, điểm $B(0; 4)$ biểu diễn số phức $4i$, điểm $I(3; 3)$ biểu diễn số phức $3 + 3i$.
Bất đẳng thức $|z - 2i| \leq |z - 4i|$ tương đương với $MA \leq MB$, tức là M "gần" A hơn "gần" B. Vậy tập hợp số phức z thỏa mãn $|z - 2i| \leq |z - 4i|$ được biểu diễn trong mặt phẳng Oxy là nửa mặt phẳng bờ là đường trung trực của AB (đường $y = 3$) chứa điểm A.
Còn $|z - 3 - 3i| = 1$ dẫn đến $MI = 1$, nghĩa là M thuộc đường tròn (C) tâm $I(3; 3)$, bán kính $R = 1$.
Tóm lại, tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn yêu cầu đề bài là nửa dưới của đường tròn (C). Ta gọi tập hợp điểm này là T.
Đề bài yêu cầu tìm giá trị lớn nhất của $|z - 2|$, nghĩa là tìm khoảng cách lớn nhất từ điểm $D(2; 0)$ đến những điểm thuộc T. Dễ dàng nhận ra khoảng cách lớn nhất này chính là khoảng cách từ D đến điểm có tọa độ $(4; 3)$ thuộc T, và bằng $\sqrt{13}$.

Chọn phương án D

Câu 72. Cho số phức z thỏa mãn $\dfrac{1+i}{z}$ là số thực và $|z - 2| = m$ với $m \in \mathbb{R}$. Gọi m_0 là một giá trị của m để có đúng một số phức thỏa mãn bài toán. Khi đó

A $m_0 \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$. B $m_0 \in \left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$. C $m_0 \in \left(1; \dfrac{3}{2}\right)$. D $m_0 \in \left(\dfrac{3}{2}; 2\right)$.

Lời giải.



Đặt số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.
Ta có:

$$\frac{1+i}{z} = \frac{(1+i)\overline{z}}{z.\overline{z}} = \frac{(1+i)(x-yi)}{x^2+y^2} = \frac{x+y+(x-y)i}{x^2+y^2} = \frac{x+y}{x^2+y^2} + \frac{x-y}{x^2+y^2}i.$$

Vậy $\dfrac{1+i}{z}$ là số thực khi và chỉ khi $\dfrac{x-y}{x^2+y^2} = 0$ hay $x = y \neq 0$.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn một số phức z như trên trong mặt phẳng Oxy. Khi đó tập hợp điểm M là đường thẳng $(\Delta): x - y = 0$ (bỏ đi điểm O).

Còn tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-2| = m$ là đường tròn (C_m) tâm $A(2;0)$, bán kính m.

Khi đó, yêu cầu bài toán tương đương với tìm m sao cho đường thẳng (Δ) và (C_m) có đúng một điểm chung, hay (Δ) tiếp xúc với (C_m).

(Δ) tiếp xúc với $(C_m) \Leftrightarrow d(A,(\Delta)) = m \Leftrightarrow m = \dfrac{|2-0|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2}$.

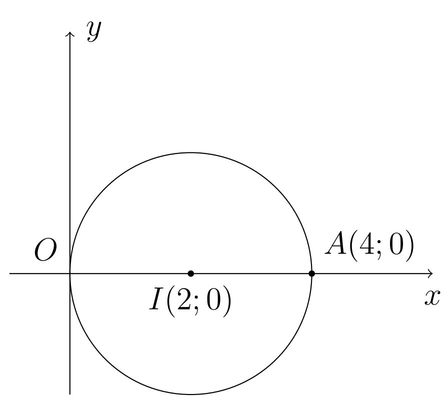
Vậy $m_0 = \sqrt{2}$.

Chọn phương án C

Câu 73. Gọi S là tập hợp các số thực m sao cho với mỗi $m \in S$ có đúng một số phức thỏa mãn $|z-m| = 6$ và $\dfrac{z}{z-4}$ là số thuần ảo. Tính tổng của các phần tử của tập S.

A 0. **B** 8. **C** 10. **D** 16.

Lời giải.



Đặt số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có: $\dfrac{z}{z-4} = \dfrac{z(\overline{z}-4)}{(z-4)(\overline{z}-4)} = \dfrac{|z|^2 - 4z}{|z-4|^2} = \dfrac{x^2+y^2-4x-4yi}{(x-4)^2+y^2} = \dfrac{x^2+y^2-4x}{(x-4)^2+y^2} - \dfrac{4y}{(x-4)^2+y^2}i.$

Vậy $\dfrac{z}{z-4}$ là số thuần ảo (*)
$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4x=0 \\ y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2+y^2=4 \\ y \neq 0 \end{cases}$.
Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn (*) trong mặt phẳng Oxy, thì tập hợp điểm M là đường tròn

$$(C):(x-2)^2+y^2=4$$

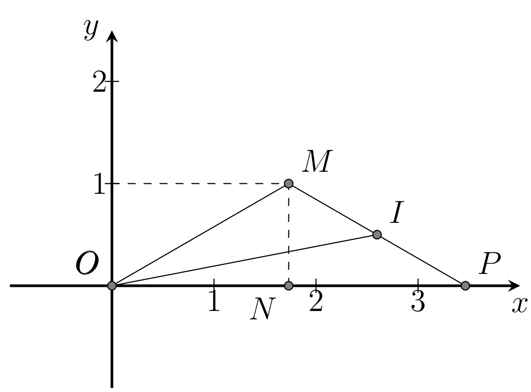
tâm $I(2;0)$ bán kính $R=2$, bỏ đi hai điểm $A(4;0)$ và $O(0;0)$. Ta gọi tập hợp điểm này là T.
Còn tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-m|=6$ trong mặt phẳng Oxy là đường tròn (C_m) tâm $J(m;0)$ bán kính $R=6$.
Vậy số thực m thỏa mãn yêu cầu đề bài là số thực m sao cho đường tròn (C_m) tiếp xúc với tập hợp điểm T.
Tuy nhiên, ta thấy rằng nếu (C_m) tiếp xúc với (C) thì hai tiếp điểm sẽ nằm trên đường nối tâm IJ, nghĩa là trục Ox. Mặt khác, tập hợp T lại là đường tròn (C) bỏ đi 2 giao điểm với trục Ox. Như vậy thì (C_m) không thể tiếp xúc với T, dẫn đến tập hợp S không có phần tử.

Chọn phương án A

Câu 74. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=2$, $|z_2|=\sqrt{3}$. Gọi M, N là các điểm biểu diễn cho z_1 và iz_2. Biết $\widehat{MON}=30^\circ$. Tính $S=\left|z_1^2+4z_2^2\right|$.

A $5\sqrt{2}$. B $3\sqrt{3}$. C $4\sqrt{7}$. D $\sqrt{5}$.

Lời giải.



Ta có $S=\left|z_1^2+4z_2^2\right|=\left|z_1^2-(2iz_2)^2\right|=|z_1-2iz_2|\cdot|z_1+2iz_2|$.
Gọi P là điểm biểu diễn của số phức $2iz_2$. Khi đó ta có

$$|z_1-2iz_2|\cdot|z_1+2iz_2|=\left|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OP}\right|=\left|\overrightarrow{PM}\right|\cdot\left|2\overrightarrow{OI}\right|=2PM\cdot OI.$$

Vì $\widehat{MON}=30^\circ$ nên áp dụng định lí côsin cho $\triangle OMN$ với $OM=2$, $ON=\sqrt{3}$ ta có

$$MN^2=OM^2+ON^2-2OM\cdot ON\cos\widehat{MON}=4+3-4\sqrt{3}\cdot\cos 30^\circ=1\Rightarrow MN=1.$$

Khi đó theo Pitago ta có $\triangle OMN$ vuông tại N. Khi đó $\triangle OMP$ có MN là đường cao đồng thời là trung tuyến, tức là $\triangle OMP$ cân tại $M \Rightarrow PM=OM=2$.

Áp dụng định lý đường trung tuyến cho $\triangle OMN$ ta có $OI^2 = \dfrac{OM^2 + OP^2}{2} - \dfrac{MP^2}{4} = 7$.
Vậy $S = 2 \cdot PM \cdot OI = 4\sqrt{7}$.
Chọn phương án C

Câu 75. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-2| = 6 - |z+2|$ là elip có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Tổng $a^2 + b^2$ bằng

A 5. **B** 14. **C** 41. **D** 13.

Lời giải.
Giả sử $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Điểm $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z.
Đặt $F_1(-2; 0)$ và $F_2(2; 0)$. Ta có $F_1F_2 = 4$ và

$$|z-2| = 6 - |z+2| \Leftrightarrow |z-2| + |z+2| = 6 \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 6.$$

Như vậy, tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là elip có độ dài trục lớn $2a = 6$, tiêu cự $2c = 4$.
Từ đó suy ra $a = 3$, $c = 2$ nên $b = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$. Vậy $a^2 + b^2 = 9 + 5 = 14$.
Chọn phương án B

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. C	4. D	5. A	6. A	7. B	8. C	9. B	10. A
11. A	12. D	13. A	14. D	15. D	16. C	17. C	18. A	19. D	20. B
21. B	22. B	23. C	24. B	25. B	26. A	27. C	28. D	29. A	30. A
31. C	32. D	33. B	34. A	35. B	36. D	37. B	38. D	39. A	40. D
41. D	42. A	43. C	44. A	45. A	46. B	47. A	48. D	49. B	50. B
51. B	52. D	53. A	54. D	55. A	56. C	57. D	58. C	59. C	60. D
61. B	62. D	63. A	64. D	65. C	66. A	67. B	68. B	69. B	70. B
71. D	72. C	73. A	74. C	75. B					

DẠNG 22. XÁC ĐỊNH HÌNH CHIẾU CỦA ĐIỂM LÊN MẶT PHẲNG

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$,hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên mặt phẳng (Ozx) có tọa độ là

A $(0;1;0)$. **B** $(2;1;0)$. **C** $(0;1;-1)$. **D** $(2;0;-1)$.

Lời giải.

Hình chiếu của $M(2;1;-1)$ lên mặt phẳng Ozx là điểm $(2;0;-1)$.

Chọn phương án D

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, Cho hai điểm $A(1;1;-1)$ và $B(2;3;2)$. Véctơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ

A $(1;2;3)$. **B** $(-1;-2;3)$. **C** $(3;5;1)$. **D** $(3;4;1)$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB}=(2-1;3-1;2+1)=(1;2;3)$

Chọn phương án A

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc mặt phẳng (Oxy) ?

A $M(2;2;0)$. **B** $Q(3;-1;3)$. **C** $N(3;-1;2)$. **D** $P(0;0;2)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oxy) có phương trình $z=0$, suy ra $M(2;2;0)\in(Oxy)$.

Chọn phương án A

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\overrightarrow{OA}=\vec{j}-2\vec{k}$. Tọa độ điểm A là

A $(0;1;-2)$. **B** $(1;-2;0)$. **C** $(1;0;-2)$. **D** $(0;-1;2)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OA}=\vec{j}-2\vec{k}\Leftrightarrow A(0;1;-2)$.

Chọn phương án A

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;-1)$, $B(2;1;2)$. Độ dài đoạn AB bằng

A $\sqrt{10}$. **B** $\sqrt{14}$. **C** 9. **D** 10.

Lời giải.

Ta có: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}=\sqrt{(2-1)^2+(1-1)^2+(2+1)^2}=\sqrt{10}$.

Chọn phương án A

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;-3)$, hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (Oxy) là điểm

A $M'(1;0;-3)$. **B** $M'(0;2;-3)$. **C** $M'(1;2;0)$. **D** $M'(1;2;3)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $M'(1;2;0)$.

Chọn phương án C

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;1;2)$ và $B(3;-5;0)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là

A $(2;-4;2)$. **B** $(4;-6;2)$. **C** $(1;-2;1)$. **D** $(2;-3;-1)$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm AB, khi đó tọa độ của M được tính bởi

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + y_A}{2} = 1 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = -2 \\ z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2} = 1. \end{cases}$$

Chọn phương án C

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của $\vec{a}$ là

A $(-3;2;-1)$. **B** $(2;-1;-3)$. **C** $(-1;2;-3)$. **D** $(2;-3;-1)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k} \Rightarrow \vec{a} = (-1;2;-3)$.

Chọn phương án C

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (2;m-1;3)$, $\vec{b} = (1;3;-2n)$. Tìm m, n để các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng.

A $m = 7, n = -\dfrac{3}{4}$. **B** $m = 1, n = 0$. **C** $m = 7, n = -\dfrac{4}{3}$. **D** $m = 4, n = -3$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \exists k > 0$ sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

Từ đó suy ra $\begin{cases} 2 = k.1 \\ m - 1 = 3k \\ 3 = -2nk \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ m - 1 = 6 \\ 3 = -4n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ m = 7 \\ n = -\dfrac{3}{4}. \end{cases}$

Chọn phương án A

Câu 9. Trong không gian cho $\vec{a} = (1;2;3)$, $\vec{b} = (4;5;6)$ Tọa độ $\vec{a} + \vec{b}$ là

A $(3;3;3)$. **B** $(2;5;9)$. **C** $(5;7;9)$. **D** $(4;10;18)$.

Lời giải.

Phương pháp: $\begin{cases} \vec{u} = (x_1;y_1;z_1) \\ \vec{v} = (x_2;y_2;z_2) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$.

Cách giải: Tọa độ $\vec{a} + \vec{b}$ là $(5;7;9)$.

Chọn phương án C

Câu 10. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Toạ độ của vec-tơ $\vec{a}$ là

A $(2;-1;-3)$. **B** $(-3;2;-1)$. **C** $(-1;2;-3)$. **D** $2;-3;-1$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} = -1 \cdot \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k} \Rightarrow$ Toạ độ của vec-tơ $\vec{a} = (-1;2;-3)$.

Chọn phương án C

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tìm tọa độ của vec-tơ $\vec{a}$.

A $(2;-3;-1)$. B $(-3;2;-1)$. C $(-1;2;-3)$. D $(2;-1;-3)$.

Lời giải.

Vì $\vec{i} = (1;0;0)$, $\vec{j} = (0;1;0)$, $\vec{k} = (0;0;1)$ nên $\vec{a} = (-1;2;-3)$.

Chọn phương án C

Câu 12. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(2;-1;0)$ lên mặt phẳng (Oxz) là

A $(0;0;0)$. B $(2;-1;0)$. C $(2;0;0)$. D $(0;-1;0)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(2;-1;0)$ lên mặt phẳng (Oxz) là điểm có tọa độ $(2;0;0)$.

Chọn phương án C

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-2;3;1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A lên trục Ox có tọa độ là

A $(2;0;0)$. B $(0;-3;-1)$. C $(-2;0;0)$. D $(0;3;1)$.

Lời giải.

Tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên trục Ox là $(-2;0;0)$.

Chọn phương án C

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, véc-tơ $\vec{v} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$ có tọa độ bằng bao nhiêu?

A $(-2;-5;1)$. B $\left(1;\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)$. C $\left(\frac{2}{3};\frac{5}{3};-\frac{1}{3}\right)$. D $(2;5;-1)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{v} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k} = (2;5;-1)$.

Chọn phương án D

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;-2;3)$, $I(1;0;4)$. Tìm tọa độ điểm N sao cho điểm I là trung điểm của đoạn thẳng MN.

A $N(5;-4;2)$. B $N(0;1;2)$. C $N\left(2;-1;\frac{7}{2}\right)$. D $N(-1;2;5)$.

Lời giải.

Vì I là trung điểm của đoạn thẳng MN nên

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_M + x_N}{2} \\ y_I = \dfrac{y_M + y_N}{2} \\ z_I = \dfrac{z_M + z_N}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = 2x_I - x_M \\ y_N = 2y_I - y_M \\ z_N = 2z_I - z_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = 2\cdot 1 - 3 \\ y_N = 2\cdot 0 + 2 \\ z_N = 2\cdot 4 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = -1 \\ y_N = 2 \\ z_N = 5. \end{cases}$$

Vậy $N(-1;2;5)$.

Chọn phương án D

B MỨC ĐỘ 2

Câu 16. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (1; -2; 1)$ và $\vec{v} = (2; 1; -1)$. Vectơ nào dưới đây vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$?

A $\overrightarrow{w_1} = (1; -3; 5)$. **B** $\overrightarrow{w_4} = (1; 4; 7)$. **C** $\overrightarrow{w_3} = (1; -4; 5)$. **D** $\overrightarrow{w_2} = (1; 3; 5)$.

Lời giải.

Vectơ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là vectơ $[\vec{u}, \vec{v}] = (1; 3; 5)$.

Chọn phương án D

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 2; 3)$, $B(0; -2; 1)$, $C(1; 0; 1)$. Gọi D là điểm sao cho C là trọng tâm tam giác ABD. Tính tổng các tọa độ của điểm D.

A 1. **B** 0. **C** $\dfrac{7}{3}$. **D** 7.

Lời giải.

Gọi $D(x; y; z)$. Vì C là trọng tâm tam giác ABD nên

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{1+0+x}{3} \\ 0 = \dfrac{2-2+y}{3} \\ 1 = \dfrac{3+1+z}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow x + y + z = 2 + 0 - 1 = 1.$$

Chọn phương án A

Câu 18. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành, biết $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $D(1; -1; 1)$. Tìm tọa độ điểm C.

A $(0; -2; 0)$. **B** $(2; 2; 2)$. **C** $(2; 0; 2)$. **D** $(2; -2; 2)$.

Lời giải.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - 1 = 2 - 1 \\ y_C + 1 = 1 - 0 \\ z_C - 1 = 2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 0 \\ z_C = 2 \end{cases}.$$

Tọa độ điểm $C(2; 0; 2)$.

Chọn phương án C

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, điểm thuộc trục Ox và cách đều hai điểm $A(4; 2; -1)$ và $B(2; 1; 0)$ là

A $M(-4; 0; 0)$. **B** $M(5; 0; 0)$. **C** $M(4; 0; 0)$. **D** $M(-5; 0; 0)$.

Lời giải.

$M \in Ox \Rightarrow M(x_M; 0; 0)$.

M cách đều hai điểm A, B suy ra

$$\begin{aligned} MA^2 = MB^2 &\Leftrightarrow (4 - x_M)^2 + 2^2 + (-1)^2 = (2 - x_M)^2 + 1^2 + 0^2 \\ &\Leftrightarrow 4x_M = 16 \\ &\Leftrightarrow x_M = 4 \Rightarrow M(4; 0; 0). \end{aligned}$$

Chọn phương án (C)

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(1;0;0)$, $B(0;0;1)$ và $C(2;1;1)$. Tìm tọa độ điểm D.

A $D(1;3;0)$. **B** $D(-3;1;0)$. **C** $D(3;-1;0)$. **D** $D(3;1;0)$.

Lời giải.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;0;1), \overrightarrow{DC}=(2-x_D;1-y_D;1-z_D)$.

Suy ra $\begin{cases} -1=2-x_D \\ 0=1-y_D \\ 1=1-z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=3 \\ y_D=1 \\ z_D=0. \end{cases}$ Vậy $D(3;1;0)$.

Chọn phương án (D)

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;1;-3)$, $B(3;-1;1)$. Gọi M là trung điểm của AB, đoạn OM có độ dài bằng

A $\sqrt{5}$. **B** $\sqrt{6}$. **C** $2\sqrt{5}$. **D** $2\sqrt{6}$.

Lời giải.

Ta có M là trung điểm AB nên $M(2;0;-1)\Rightarrow OM=\sqrt{4+0+1}=\sqrt{5}$.

Chọn phương án (A)

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho $M(3;-2;1), N(1;0;-3)$. Gọi M', N' lần lượt là hình chiếu của M và N lên mặt phẳng Oxy. Khi đó độ dài đoạn $M'N'$ là

A $M'N'=8$. **B** $M'N'=4$. **C** $M'N'=2\sqrt{6}$. **D** $M'N'=2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $M'(3;-2;0)$ và $N'(1;0;0)$ suy ra $\overrightarrow{M'N'}=(-2;2;0)\Rightarrow M'N'=2\sqrt{2}$.

Chọn phương án (D)

Câu 23. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=(2;3;-7)$. Tìm toạ độ của $\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}$.

A $\vec{x}=(2;-1;19)$. **B** $\vec{x}=(-2;3;19)$. **C** $\vec{x}=(-2;-3;19)$. **D** $\vec{x}=(-2;-1;19)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k} \\ \vec{b}=(2;3;-7) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\vec{a}= & 4\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k} \\ -3\vec{b}= & -6\vec{i}-9\vec{j}+21\vec{k} \end{cases} \Rightarrow \vec{x}=-2\vec{i}-3\vec{j}+19\vec{k}$.

Vậy $\vec{x}=(-2;-3;19)$.

Chọn phương án (C)

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;4)$ và $M'(a;b;c)$ là điểm đối xứng với điểm M qua trục Oy, khi đó $a+b+c$ bằng

A 3. **B** -5. **C** 5. **D** -1.

Lời giải.

Gọi H là chiếu vuông góc của M trên Oy, ta có $H(0;1;0)$. Do M' đối xứng với M qua Oy nên H là trung điểm MM'. Suy ra $M'(-2;1;-4)$, từ đó ta có $a+b+c=-5$.

Chọn phương án (B)

50 DẠNG TOÁN PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA LẦN 2

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 vectơ $\vec{a} = (2;-5;3)$, $\vec{b} = (0;2;-1)$, $\vec{c} = (1;7;2)$. Tìm tọa độ $\vec{d} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$.

A $(0;-27;3)$. **B** $(1;2;-7)$. **C** $(0;27;3)$. **D** $(0;27;-3)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} = (2;-5;3)\,, 4\vec{b} = (0;8;-4)\,, 2\vec{c} = (2;14;4)$.

Suy ra $\vec{d} = (2-4\cdot 0-2\cdot 1; -5-4\cdot 2-2\cdot 7; 3-4\cdot(-1)-2\cdot 2) = (0;-27;3)$.

Chọn phương án A

Câu 26. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-2;3;3)$. Điểm $M(a;b;c)$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCM$, khi đó $P = a+b-c$ có giá trị bằng

A -4. **B** 8. **C** 10. **D** 4.

Lời giải.

Ta có $ABCM$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \begin{cases} -2-x_M = 1 \\ 3-y_M = -3 \\ 3-z_M = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -3 \\ y_M = 6 \\ z_M = -1. \end{cases}$

Suy ra $M(-3;6;-1)$, khi đó $P = a+b-c = -3+6-(-1) = 4$.

Chọn phương án D

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A\,(3;1;-4)\,, B\,(2;1-2)\,, C\,(1;1;-3)$. Tìm tọa độ điểm $M \in Ox$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A $M\,(2;0;0)$. **B** $M\,(-2;0;0)$. **C** $M\,(6;0;0)$. **D** $M\,(0;2;0)$.

Lời giải.

Giả sử $M(m;0;0)$. Ta có $\overrightarrow{MA} = (3-m;1;-4)$, $\overrightarrow{MB} = (2-m;1;-2)$, $\overrightarrow{MC} = (1-m;1;-3)$.

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| &= \sqrt{(6-3m)^2 + 3^2 + (-9)^2} = \sqrt{9m^2 - 36m + 126} \\ &= \sqrt{9(m-2)^2 + 90} \\ &\geq 3\sqrt{10}, \forall m \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vậy $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $3\sqrt{10}$ khi $m-2=0 \Leftrightarrow m=2$. Hay $M(2;0;0)$.

Chọn phương án A

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ điểm M trên trục Ox cách đều hai điểm $A\,(1;2;-1)$ và điểm $B\,(2;1;2)$

A $M\left(\frac{1}{2};0;0\right)$. **B** $M\left(\frac{3}{2};0;0\right)$. **C** $M\left(\frac{2}{3};0;0\right)$. **D** $M\left(\frac{1}{3};0;0\right)$.

Lời giải.

Ta có $M \in Ox \Rightarrow M\,(m;0;0)$.

Theo bài ta có:

$$\begin{aligned} MA = MB &\Leftrightarrow MA^2 = MB^2 \\ &\Leftrightarrow (m-1)^2 + 2^2 + 1^2 = (m-2)^2 + 1^2 + 2^2 \\ &\Leftrightarrow (m-1)^2 = (m-2)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &m-1 = m-2 \\ &m-1 = 2-m \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{3}{2} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; 0; 0\right).$$

Chọn phương án B

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ với $A(-2; 3; 1)$, $B(3; 0; -1)$, $C(6; 5; 0)$. Toạ độ đỉnh D là

A $D(1; 8; -2)$. **B** $D(11; 2; 2)$. **C** $D(1; 8; 2)$. **D** $D(11; 2; -2)$.

Lời giải.

Ta có $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - x_D = 3 + 2 \\ 5 - y_D = 0 - 3 \\ -z_D = -1 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = 8 \\ z_D = 2 \end{cases} \Rightarrow D(1; 8; 2)$.

Chọn phương án C

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 3; -1)$và $B(0; -1; 1)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

A $(1; 1; 0)$. **B** $(2; 2; 0)$. **C** $(-2; -4; 2)$. **D** $(-1; -2; 1)$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow M = \left(\frac{2+0}{2}; \frac{3-1}{2}; \frac{-1+1}{2}\right) = (1; 1; 0)$.

Chọn phương án A

C MỨC ĐỘ 3

Câu 31. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, biết rằng tập hợp tất cả các điểm $M(x; y; z)$ sao cho $|x| + |y| + |z| = 3$ là một hình đa diện. Tính thể tích V của khối đa diện đó.

A 72. **B** 36. **C** 27. **D** 54.

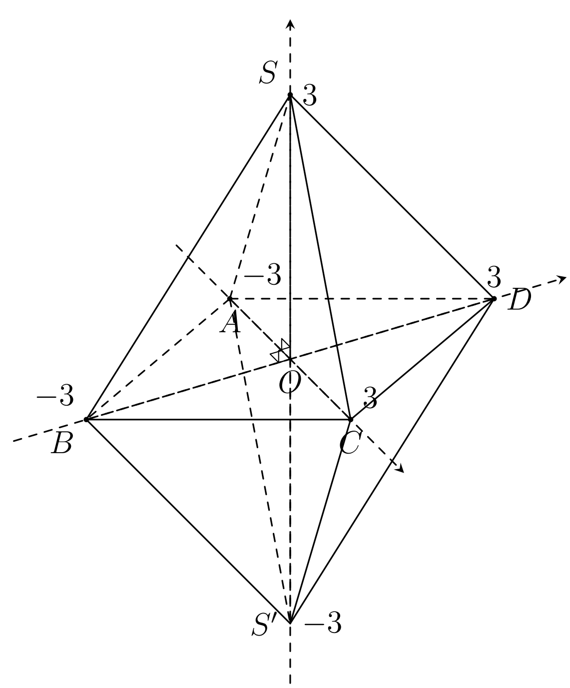
Lời giải.

Tập hợp tất cả các điểm $M(x, y, z)$ sao cho $|x| + |y| + |z| = 3$ là hình bát diện đều $SABCDS'$ (như hình vẽ).

Thể tích V của khối đa diện đó: $V = 2V_{S.ABCD} = 2 \cdot \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD}$.

$ABCD$ là hình vuông cạnh $BC = OB\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

$\Rightarrow S_{ABCD} = \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18 \Rightarrow V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 18 = 36$.



Chọn phương án (B)

Câu 32. Cho tam giác ABC biết $A(2;-1;3)$ và trọng tâm $G(2;1;0)$. Khi đó $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ có toạ độ là

(A) $(0;6;9)$. **(B)** $(0;9;-9)$. **(C)** $(0;-9;9)$. **(D)** $(0;6;-9)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AG}=(0;2;-3)$, theo tính chất trọng tâm tam giác ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}=(0;6;-9)$.

Chọn phương án (D)

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD}=3S_{ABC}$.

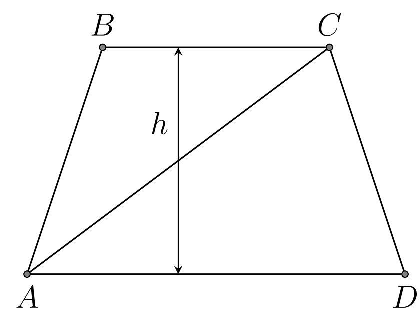
(A) $D(8;7;-1)$. **(B)** $\left[\begin{array}{l}D(8;7;-1)\\ D(-12;-1;3)\end{array}\right.$. **(C)** $\left[\begin{array}{l}D(-8;-7;1)\\ D(12;1;-3)\end{array}\right.$. **(D)** $D(-12;-1;3)$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABCD}=3S_{ABC}\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\cdot h\cdot(AD+BC)=3\cdot\dfrac{1}{2}\cdot h\cdot BC$

$\Leftrightarrow AD+BC=3BC\Leftrightarrow AD=2BC\Rightarrow \overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_D-x_A=2(x_C-x_B)\\ y_D-y_A=2(y_C-y_B)\\ z_D-z_A=2(z_C-z_B)\end{cases}\Leftrightarrow D(-12;-1;3).$



Chọn phương án (D)

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-2)$, $B(2;-1;2)$. Tìm tọa độ M trên mặt phẳng Oxy sao cho $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(A) $M(1;1;0)$. **(B)** $M(2;1;0)$. **(C)** $M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$. **(D)** $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2};0\right)$.

Lời giải.

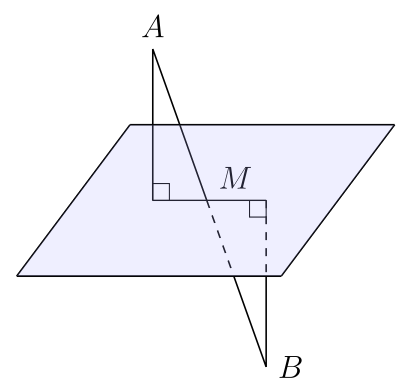
Ta có $z_A=-2<0$, $z_B=2>0$ nên A,B nằm về hai phía của Oxy.

Nên để $MA+MB$ nhỏ nhất thì $M=AB\cap(Oxy)$.

Lại có $\mathrm{d}(A,(Oxy))=|z_A|=2$ và $\mathrm{d}(B,(Oxy))=|z_B|=2$, suy ra

$$\frac{\mathrm{d}(A,(Oxy))}{\mathrm{d}(B,(Oxy))}=\frac{AM}{BM}=1.$$

Hay M là trung điểm $AB\Rightarrow M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$.



Chọn phương án (C)

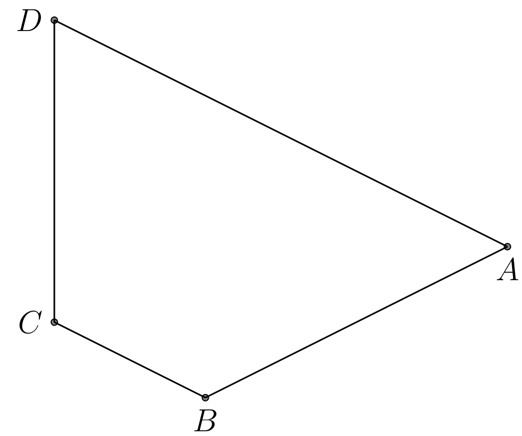
Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD}=3S_{\triangle ABC}$.

(A) $D(8;7;-1)$. **(B)** $\left[\begin{array}{l}D(-8;-7;1)\\ D(12;1;-3)\end{array}\right.$. **(C)** $\left[\begin{array}{l}D(8;7;-1)\\ D(-12;-1;3)\end{array}\right.$. **(D)** $D(-12;-1;3)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= \frac{1}{2}\cdot \mathrm{d}(A;BC)\cdot(BC+AD) \\ &= 3S_{\triangle ABC} \\ &= 3\cdot\frac{1}{2}\cdot \mathrm{d}(A;BC)\cdot BC \\ &\Rightarrow AD = 2BC. \end{aligned}$$



Mặt khác $BC \parallel AD \Rightarrow \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$.

Gọi $D(x;y;z)$.

Ta có $\overrightarrow{AD} = (x+2;y-3;z-1)$ và $\overrightarrow{BC} = (-5;-2;1)$.

Suy ra $\begin{cases} x+2=-10 \\ y-3=-4 \\ z-1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-12 \\ y=-1 \\ z=3. \end{cases}$

Chọn phương án D

Câu 36. Cho $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$, điểm D nằm trên trục Oy và thể tích tứ diện $ABCD$ bằng 5. Tọa độ điểm D là

A $(0;8;0)$.

B $(0;-7;0)$ hoặc $(0;8;0)$.

C $(0;7;0)$ hoặc $(0;-8;0)$.

D $(0;-7;0)$.

Lời giải.

Có $\overrightarrow{AB} = (1;-1;2)$, $\overrightarrow{AC} = (0;-2;4)$, suy ra $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = (0;-4;-2)$.

Gọi điểm $D(0;y;0)\in Oy$, có $\overrightarrow{AD} = (-2;y-1;1)$.

$$\begin{aligned} V_{ABCD} = 5 &\Leftrightarrow \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AD}\right| = 5 \Leftrightarrow \left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AD}\right| = 30 \\ &\Leftrightarrow |-4(y-1)-2| = 30 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &2-4y=30 \\ &2-4y=-30 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &y=-7 \\ &y=8. \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

Vậy có hai điểm D là $(0;-7;0)$ và $(0;8;0)$.

Chọn phương án B

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;1;-2), B(5;3;-1), C(2,3,-4)$. Tọa độ trực tâm H của $\triangle ABC$ là

A $H(7;6;-3)$. **B** $H(3;1;-2)$. **C** $H(4;2;-2)$. **D** $H(1;-2;2)$.

Lời giải.

Nhận xét: Để ý $\overrightarrow{AB} = (2,2,1); \overrightarrow{AC} = (-1;2;-2)$, do đó $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ nên $\triangle ABC$ vuông tại A. Suy ra $H = (3;1;-2)$.

Cách giải khác

Gọi tọa độ trực tâm là $H(a;b;c)$, ta có

$\overrightarrow{BC} = (-3;0;-3); \overrightarrow{AC} = (-1;2;-2)$;

$\overrightarrow{AH} = (a-3;b-1;c+2), \overrightarrow{BH} = (a-5;b-3;c+1)$; $[\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AC}] = (6;-3;-6)$.

Vì H là trực tâm nên

$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ [\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}]\cdot\overrightarrow{AH}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3(a-3)+0(b-1)-3(c+2)=0\\ -1(a-5)+2(b-3)-2(c+1)=0\\ 6(a-3)-3(b-1)-6(c+2)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-3a+0b-3c+3=0\\ -a+2b-2c-3=0\\ 6a-3b-6c-27=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ b=1\\ c=-2\end{cases}$$

Vậy $H(3;1;-2)$.

Chọn phương án (B)

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-2z+4=0$. Tìm tọa độ của điểm N đối xứng với M qua mặt phẳng (P).

(A) $N(-1;-1;4)$. **(B)** $N(0;0;2)$. **(C)** $N(-2;-2;2)$. **(D)** $N(1;1;4)$.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng qua M và vuông góc với mặt phẳng (P), suy ra $\vec{u}_\Delta=\vec{n}_P=(1,1,-2)$. Khi đó phương trình đường thẳng Δ là

$$\begin{cases}x=1+t\\ y=1+t\\ z=-2t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y=0\\ 2y+z=2.\end{cases}$$

Gọi I là giao điểm của Δ với mặt phẳng (P), suy ra tọa độ điểm I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x-y=0\\ 2y+z=2\\ x+y-2z+4=0\end{cases}\Rightarrow I(0;0;2).$$

Tọa độ điểm N được xác định như sau:

$$\begin{cases}x_N=2x_I-x_M\\ y_N=2x_I-y_M\\ z_N=2x_I-z_M\end{cases}\Rightarrow N(-1;-1;4).$$

Chọn phương án (A)

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;0), B(5;3;-1), C(2;3;-4)$. Tọa độ tâm K của đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ là

(A) $K\left(3;\dfrac{3}{5},-\dfrac{1}{2}\right)$. **(B)** $K\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{8}{3};\dfrac{5}{3}\right)$. **(C)** $K\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{8}{3};-\dfrac{5}{3}\right)$. **(D)** $K\left(\dfrac{7}{2};3;-\dfrac{5}{3}\right)$.

Lời giải.

Ta có $AB = 3\sqrt{2}; BC = 3\sqrt{2}; CA = 3\sqrt{2}$.
Với K là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$, ta có

$$BC \cdot \overrightarrow{KA} + CA \cdot \overrightarrow{KB} + AB \cdot \overrightarrow{KC} = \vec{0}$$

Tọa độ tâm K của đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ là

$$\begin{cases} x_K = \dfrac{BC \cdot x_A + CA \cdot x_B + AB \cdot x_C}{BC + CA + AB} \\ y_K = \dfrac{BC \cdot y_A + CA \cdot y_B + AB \cdot y_C}{BC + CA + AB} \\ z_K = \dfrac{BC \cdot z_A + CA \cdot z_B + AB \cdot z_C}{BC + CA + AB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_K = \dfrac{3\sqrt{2} \cdot 1 + 3\sqrt{2} \cdot 5 + 3\sqrt{2} \cdot 2}{3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}} = \dfrac{8}{3} \\ y_K = \dfrac{3\sqrt{2} \cdot 2 + 3\sqrt{2} \cdot 3 + 3\sqrt{2} \cdot 3}{3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}} = \dfrac{8}{3} \\ z_K = \dfrac{3\sqrt{2} \cdot 0 + 3\sqrt{2} \cdot (-1) + 3\sqrt{2} \cdot (-4)}{3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}} = -\dfrac{5}{3} \end{cases}.$$

Vậy $K = \left(\dfrac{8}{3}; \dfrac{8}{3}; -\dfrac{5}{3}\right)$.
Chọn phương án C

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(9; -3; 5)$, $B(a; b; c)$. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các mặt phẳng tọa độ Oxy, Oxz, Oyz. Biết M, N, P nằm trên đoạn thẳng AB sao cho $AM = MN = NP = PB$. Tính tổng $T = a + b + c$.

A $T = 21$. **B** $T = -15$. **C** $T = 13$. **D** $T = 14$.

Lời giải.

Do M, N, P nằm trên đoạn thẳng AB sao cho $AM = MN = NP = PB$ nên N, M, P lần lượt là trung điểm của AB, AN, NB.

Suy ra $N\left(\dfrac{a+9}{2}; \dfrac{b-3}{2}; \dfrac{c+5}{2}\right)$, $M\left(\dfrac{a+27}{4}; \dfrac{b-9}{4}; \dfrac{c+15}{4}\right)$, $P\left(\dfrac{3a+9}{4}; \dfrac{3b-3}{4}; \dfrac{3c+5}{4}\right)$.

Do M, N, P lần lượt nằm trên các mặt phẳng tọa độ Oxy, Oxz, Oyz nên $\begin{cases} \dfrac{c+15}{4} = 0 \\ \dfrac{b-3}{2} = 0 \\ \dfrac{3a+9}{4} = 0. \end{cases}$

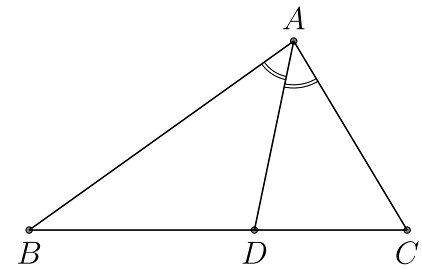
Suy ra $a = -3$, $b = 3$, $c = -15$. Do đó $T = a + b + c = -15$.
Chọn phương án B

Câu 41. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -2; 2)$, $B(-5; 6; 4)$, $C(0; 1; -2)$. Độ dài đường phân giác trong của góc A của tam giác ABC bằng

A $\dfrac{3\sqrt{74}}{2}$. **B** $\dfrac{3}{2\sqrt{74}}$. **C** $\dfrac{2}{3\sqrt{74}}$. **D** $\dfrac{2\sqrt{74}}{3}$.

Lời giải.

Gọi D là chân đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$, ta có $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$.



Lại có $AB = 2\sqrt{26}$ và $AC = \sqrt{26}$ nên $\overrightarrow{DB} = -2\overrightarrow{DC}$.
Gọi $D(x; y; z)$.

$$\overrightarrow{DB} = -2\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 - x = -2(-x) \\ 6 - y = -2(1-y) \\ 4 - z = -2(-2-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{5}{3} \\ y = \dfrac{8}{3} \\ z = 0. \end{cases}$$

Vậy $D\left(-\dfrac{5}{3}; \dfrac{8}{3}; 0\right)$.

Khi đó $\overrightarrow{AD} = \left(-\dfrac{8}{3}; \dfrac{14}{3}; -2\right)$. Do đó $AD = \dfrac{2\sqrt{74}}{3}$.

Chọn phương án D

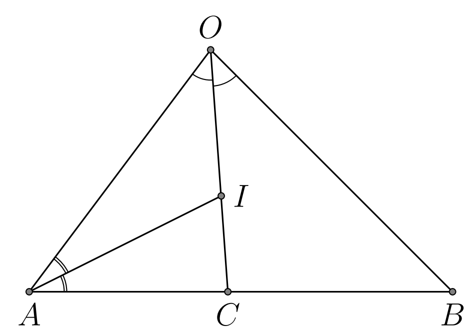
Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 2; 1)$, $B\left(-\dfrac{8}{3}; \dfrac{4}{3}; \dfrac{8}{3}\right)$. Biết $I(a; b; c)$ là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác OAB. Tính $S = a + b + c$.

A $S = 1$. **B** $S = 0$. **C** $S = -1$. **D** $S = 2$.

Lời giải.

Gọi C là chân đường phân giác trong góc O của tam giác OAB.
Ta có $OA = 3$, $OB = 4$.

$$\overrightarrow{CA} = -\dfrac{OA}{OB}\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x_C = -\dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{8}{3} - x_C\right) \\ 2 - y_C = -\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{4}{3} - y_C\right) \\ 1 - z_C = -\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{8}{3} - z_C\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 0 \\ y_C = \dfrac{12}{7} \\ z_C = \dfrac{12}{7}. \end{cases}$$



Vậy $C\left(0; \dfrac{12}{7}; \dfrac{12}{7}\right)$.
Khi đó

$$AC = \sqrt{(0-2)^2 + \left(\dfrac{12}{7} - 2\right)^2 + \left(\dfrac{12}{7} - 1\right)^2} = \dfrac{15}{7}.$$

Ta lại có

$$\overrightarrow{IC} = -\frac{AC}{AO}\overrightarrow{IO} \Leftrightarrow \begin{cases} -a = \dfrac{5}{7}a \\ \dfrac{12}{7} - b = \dfrac{5}{7}b \\ \dfrac{12}{7} - c = \dfrac{5}{7}c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 1. \end{cases}$$

Do đó $S = a + b + c = 2$.

Chọn phương án D

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$, $B(2;-1;3)$. Tìm điểm M trên mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2 - 2MB^2$ lớn nhất.

A $M(3;-4;0)$. **B** $M\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};0\right)$. **C** $M(0;0;5)$. **D** $M\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2};0\right)$.

Lời giải.

Điểm $I(3;-4;5)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$. Suy ra

$$\begin{aligned} MA^2 - 2MB^2 &= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 - 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 \\ &= MI^2 - 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA} + IA^2 - 2MI^2 - 4\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB} - 2IB^2 \\ &= -MI^2 + IA^2 - 2IB^2. \end{aligned}$$

Do đó $MA^2 - 2MB^2$ lớn nhất khi MI nhỏ nhất hay M là hình chiếu của I trên mặt phẳng Oxy. Vậy $M(3;-4;0)$.

Chọn phương án A

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là

A $\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right)$. **B** $\left(\frac{11}{3};-2;1\right)$. **C** $\left(\frac{2}{3};\frac{11}{3};\frac{1}{3}\right)$. **D** $(-2;11;1)$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{BA} = (-1;-3;4) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{26}$; $\overrightarrow{BC} = (-6;8;2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right| = 2\sqrt{26}$.

Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ B lên AC của tam giác ABC.

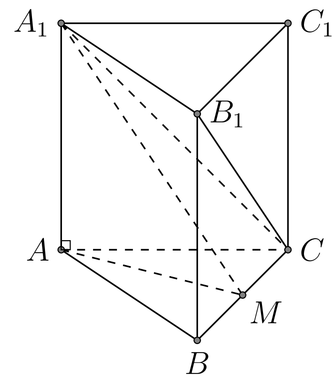
Suy ra $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{BA}{BC} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DA} \Rightarrow D\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{11}{3};1\right)$.

Chọn phương án A

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$ có $A_1\left(\sqrt{3};-1;1\right)$, hai đỉnh B, C thuộc trục Oz và $AA_1 = 1$, (C không trùng với O). Biết $\vec{u} = (a;b;2)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng A_1C. Tính $T = a^2 + b^2$.

A 4. **B** 9. **C** 16. **D** 5.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BC. Vì B, C thuộc trục Oz nên $M(0;0;m)$ và $\overrightarrow{k}=(0;0;1)$ là véc-tơ chỉ phương của BC.

Ta có $\begin{cases} BC\perp AM \\ BC\perp A_1A \end{cases} \Rightarrow BC\perp (A_1AM)\Rightarrow BC\perp A_1M$.

Mặt khác $\overrightarrow{A_1M}=(-\sqrt{3};1;m-1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{A_1M}\cdot\overrightarrow{k}=0\Rightarrow m-1=0\Leftrightarrow m=1$

$\Rightarrow M(0;0;1)$. Gọi $C(0;0;z)$ và $AB=x>0$. Vì ABC là tam giác đều cạnh bằng x nên $AM=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\overrightarrow{A_1M}=(-\sqrt{3};1;0)\Rightarrow A_1M=2$.

Xét tam giác A_1AM vuông tại $A\Rightarrow A_1M^2=A_1A^2+AM^2\Leftrightarrow 2^2=1^2+\dfrac{3x^2}{4}\Leftrightarrow x=2$.

Ta có $\overrightarrow{A_1C}=(-\sqrt{3};1;z-1)\Rightarrow A_1C^2=4+(z-1)^2$.

Xét tam giác A_1AC vuông tại A

$\Rightarrow A_1C^2=A_1A^2+AC^2\Leftrightarrow 4+(z-1)^2=1+4\Leftrightarrow (z-1)^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2 \\ z=0. \end{array}\right.$

Với $z=0\Rightarrow C(0;0;0)\equiv O\Rightarrow C(0;0;0)$ (loại).

Với $z=2\Rightarrow C(0;0;2)$ (thỏa mãn).

Suy ra $\overrightarrow{A_1C}=(-\sqrt{3};1;1)$.

Vì $\vec{u}=(a;b;2)$ là một véc-tơ chỉ phương của A_1C nên $\dfrac{a}{-\sqrt{3}}=\dfrac{b}{1}=\dfrac{2}{1}\Leftrightarrow \begin{cases} a=-2\sqrt{3} \\ b=2. \end{cases}$

Vậy $T=\left(-2\sqrt{3}\right)^2+2^2=16$.

Chọn phương án C

Câu 46. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;0)$. Giả sử B và C là các điểm thay đổi nằm trên các trục Ox và Oz. Gọi M là trung điểm của AC. Biết rằng khi B và C thay đổi nhưng nằm trên các trục Ox và Oz thì hình chiếu vuông góc H của M trên đường thẳng AB luôn nằm trên một đường tròn cố định. Tính bán kính của đường tròn đó.

A $R=\dfrac{1}{4}$. **B** $R=\dfrac{1}{2}$. **C** $R=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D** $R=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

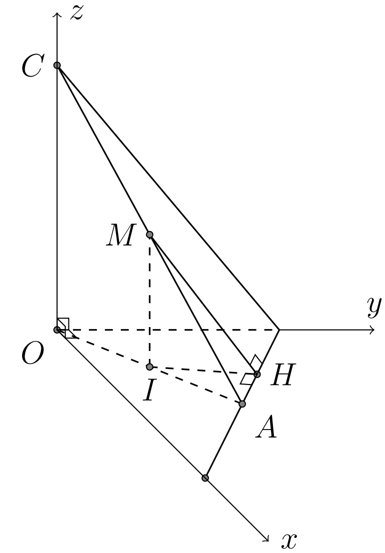
Lời giải.

Gọi I là trung điểm của OA, ta có $IM \parallel OC \Rightarrow IM \perp (Oxy)$.

Ta có $\begin{cases} AB \perp MH \\ AB \perp IM \end{cases} \Rightarrow AB \perp (IMH) \Rightarrow AB \perp IH.$

$\Rightarrow H$ thuộc đường tròn (C) cố định có đường kính IA và nằm trong mặt phẳng (Oxy).

Vậy bán kính của đường tròn (C) là $R = \dfrac{OA}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.



Chọn phương án (D)

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;-1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;0;1)$. Tìm điểm M sao cho $3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(A) $M\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2};-1\right)$. (B) $M\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2};2\right)$. (C) $M\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{3}{2};-1\right)$. (D) $M\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2};-1\right)$.

Lời giải.

Cách 1: Giả sử $M(x;y;z) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} = (x;y;z+1) \\ \overrightarrow{BM} = (x+1;y-1;z) \\ \overrightarrow{CM} = (x-1;y;z-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM^2 = x^2+y^2+(z+1)^2 \\ BM^2 = (x+1)^2+(y-1)^2+z^2 \\ CM^2 = (x-1)^2+y^2+(z-1)^2 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ & 3MA^2 + 2MB^2 - MC^2 \\
=\ & 3[x^2+y^2+(z+1)^2] + 2[(x+1)^2+(y-1)^2+z^2] - [(x-1)^2+y^2+(z-1)^2] \\
=\ & 4x^2+4y^2+4z^2+6x-4y+8z+5 \\
=\ & \left(2x+\frac{3}{2}\right)^2 + (2y-1)^2 + (2z+2)^2 - \frac{9}{4} \geqslant -\frac{9}{4}.
\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{4}$, $y = \dfrac{1}{2}$, $z = -1$, khi đó $M\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2};-1\right)$.

Cách 2: Ta có:

$P = 3MA^2 + 2MB^2 - MC^2 = 3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$P = 4MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}\right) + 3IA^2 + 2IB^2 - IC^2$

Chọn điểm $I(a;b;c)$ sao cho $3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(-a)+2(-1-a)-(1-a)=0 \\ 3(-b)+2(1-b)-(-b)=0 \\ 3(-1-c)+2(-c)-(1-c)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{-3}{4} \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow I\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2};-1\right).$

Để P nhỏ nhất thì $M \equiv I$. Vậy $M\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2};-1\right)$.

Chọn phương án (D)

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;1)$, $M(5;3;1)$, $N(4;1;2)$ và mặt phẳng $(P): y+z=27$. Biết rằng tồn tại điểm B trên tia AM, điểm C trên (P) và điểm D trên tia AN sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thoi. Tọa độ điểm C là

(A) $(-15;21;6)$. (B) $(21;21;6)$. (C) $(-15;7;20)$. (D) $(21;19;8)$.

Lời giải.

Do giả thiết suy ra C là giao điểm của đường phân giác trong góc $\widehat{BAD}$ và mặt phẳng (P).

Đặt $\vec{e}_1 = \dfrac{\overrightarrow{AM}}{\left|\overrightarrow{AM}\right|}$ và $\vec{e}_2 = \dfrac{\overrightarrow{AN}}{\left|\overrightarrow{AN}\right|}$. Mà $\overrightarrow{AM}=(3;4;0)$ suy ra $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{3^2+4^2}=5$.

Tương tự ta có $\overrightarrow{AN}=(2;2;1)$ suy ra $\left|\overrightarrow{AN}\right| = \sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$.

Khi đó tọa độ $\vec{e}_1\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5};0\right)$ và $\vec{e}_2\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$ suy ra $\vec{e}_1+\vec{e}_2=\left(\dfrac{19}{15};\dfrac{22}{15};\dfrac{1}{3}\right)$. Gọi $\vec{u}$ là véc-tơ chỉ phương của đường thân giác góc $\widehat{BAD}$, dễ thấy $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{e}_1+\vec{e}_2$, ta chọn $\vec{u}(19;22;5)$.

Khi đó phương trình tham số của đường phân giác trong góc $\widehat{BAD}$ là $\begin{cases} x=2+19t \\ y=-1+22t \\ z=1+5t \end{cases}, (t\in\mathbb{R})$.

Do giả thiết tọa độ điểm C tương ứng với giá trị t là nghiệm của phương trình
$-1+22t+1+5t=27 \Leftrightarrow t=1$. Ta suy ra tọa độ điểm $C(21;21;6)$.

Chọn phương án (B)

Câu 49. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;1;0)$, $C(3;1;-1)$. Điểm $M(a;b;c)$ trên mặt phẳng (Oxz) cách đều 3 điểm A, B, C. Giá trị $3(a+b+c)$ bằng

(A) 6. (B) 1. (C) -3. (D) -1.

Lời giải.

Do $M(a;b;c)$ trên mặt phẳng (Oxz) nên $b=0 \Rightarrow M(a;0;c)$.

Ta có

$$MA=MB=MC \Leftrightarrow \begin{cases}(a-1)^2+1+(c-1)^2=(a+1)^2+1+c^2\\(a-1)^2+1+(c-1)^2=(a-3)^2+1+(c+1)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4a+2c=1\\4a-4c=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{5}{6}\\c=-\dfrac{7}{6}.\end{cases}$$

Do đó $3(a+b+c)=-1$.

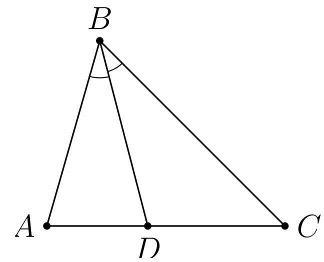
Chọn phương án (D)

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Gọi $D(a;b;c)$ là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC. Giá trị của $a+b+2c$ bằng

(A) 5. (B) 4. (C) 14. (D) 15.

Lời giải.

Ta có $AB = \sqrt{26}$, $BC = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$.
Theo tính chất phân giác ta có
$\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{1}{2}$, suy ra $\overrightarrow{DA} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}$. $(*)$
Ta có $\overrightarrow{DA} = (1-a; 2-b; -1-c)$ và $\overrightarrow{DC} = (-4-a; 7-b; 5-c)$.



Do đó $(*) \Rightarrow \begin{cases} 1-a = -\dfrac{1}{2}(-4-a) \\ 2-b = -\dfrac{1}{2}(7-b) \\ -1-c = -\dfrac{1}{2}(5-c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{2}{3} \\ b = \dfrac{11}{3} \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow D\left(-\dfrac{2}{3}; \dfrac{11}{3}; 1\right) \Rightarrow a + b + 2c = 5.$

Chọn phương án A

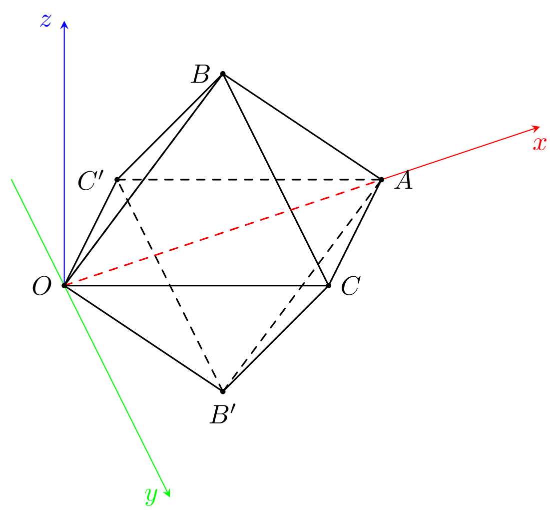
D MỨC ĐỘ 4

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, tập hợp các điểm thỏa mãn $|z| + |y| + |z| \leq 2$ và $|x-2| + |y| + |z| \leq 2$ là một khối đa diện có thể tích bằng

A 3. **B** 2. **C** $\dfrac{8}{3}$. **D** $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Có $0 \leq |x|+|y|+|z| \leq 2$ và $0 \leq |x-2|+|y|+|z| \leq 2$ nên tìm các điểm đầu mút.
$|x|+|y|+|z|=0 \Rightarrow x=y=z=0 \Rightarrow O(0;0;0)$.
$|x-2|+|y|+|z|=0 \Rightarrow x=2; y=z=0 \Rightarrow A(2;0;0)$.
Xét hệ phương trình



$$\begin{aligned} &\begin{cases} |x|+|y|+|z|=2 \\ |x-2|+|y|+|z|=2 \end{cases} \\ \Rightarrow\ & |x|=|x-2| \\ \Leftrightarrow\ & x=2-x \\ \Leftrightarrow\ & x=1 \\ \Rightarrow\ & |y|+|z|=1 \\ \Rightarrow\ & \left[\begin{array}{l} y=0; z=\pm 1 \\ y=\pm 1; z=0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

$\Rightarrow B(1;0;1), B'(1;0;-1), C(1;1;0), C'(1;-1;0)$.
Dựng hình suy ra tập hợp các điểm thỏa mãn là bát diện $B.OCAC'.B'$.
Ta có $OB=\sqrt{1^1+1^1}=\sqrt{2}$, do đó hình bát diện đều $B.OCAC'.B'$ có cạnh bằng $\sqrt{2}$.
Vậy thể tích của bát diện đều là $V=\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^3\cdot\sqrt{2}}{3}=\dfrac{4}{3}$.

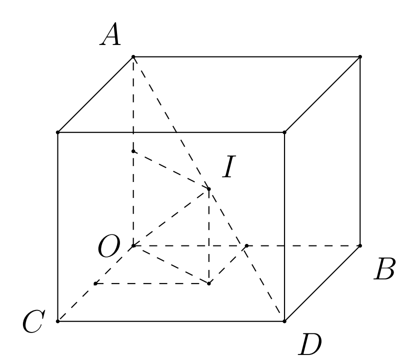
Chọn phương án D

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;6)$, $B(0;4;0)$, $C(-2;0;0)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ với O là gốc tọa độ. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A 8. **B** 2. **C** 4. **D** 6.

Lời giải.

Dựng hình hộp chữ nhật có ba chiều là OA, OB, OC như hình vẽ bên. Rõ ràng tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ cũng chính là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật. Suy ra I là trung điểm của đường chéo AD của hình hộp.
Vì $A(0;0;6)$, $D(-2;4;0)$ nên tọa độ của I là $(-1;2;3)$. Từ đó $a+b+c=4$.

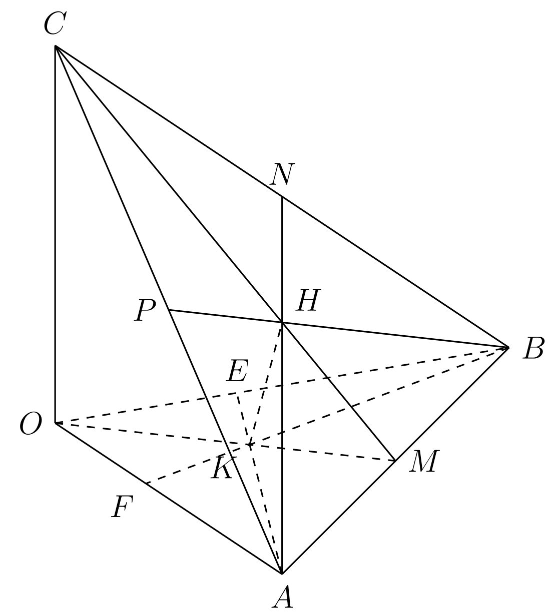


Chọn phương án C

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(5;0;0)$ và $B(3;4;0)$. Với C là một điểm trên trục Oz, gọi H là trực tâm tam giác ABC. Khi C di động trên trục Oz thì H luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính đó.

A $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$. **B** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **D** $\sqrt{3}$.

Lời giải.



Ta có A, B thuộc mặt phẳng $z = 0$, C thuộc Oz do đó $CO \perp (OAB)$.

Hơn nữa, $OA = OB = 5$ nên tam giác OAB cân tại O.

Kẻ các đường cao OM, AN, BP của tam giác ABC; các đường cao AM, BF, AE của tam giác OAB. Gọi K là trực tâm của tam giác OAB.

Ta thấy $AE \perp OB$ và $AE \perp OC$ suy ra $AE \perp CB$.

Kết hợp với $AN \perp CB$ ta có $CB \perp (ANE)$, suy ra $CB \perp KH$.

Chứng minh tương tự, ta có $AC \perp KH$.

Vậy $KH \perp (ABC)$. Nên $\widehat{KHM} = 90^\circ$.

Mà K và M cố định nên H di chuyển trên đường tròn đường kính KM.

Ta đi tính KM.

Ta có $KM = MB \tan \widehat{KBM}$. Chú ý rằng $\widehat{KBM} = \widehat{OAM}$.

Ta có $AB = 2\sqrt{5}$ và $\sin \widehat{OAM} = \dfrac{AM}{OA} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ suy ra $\tan \widehat{OAM} = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $KM = 2\sqrt{5} \cdot \dfrac{1}{2} = \sqrt{5}$.

Do đó bán kính của đường tròn là $\dfrac{KM}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Chọn phương án C

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(3;4;4)$, $C(2;6;6)$ và $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tính $a+b+c$.

A $\dfrac{31}{3}$. **B** $\dfrac{46}{5}$. **C** 10. **D** $\dfrac{63}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;2;1)$, $\overrightarrow{BC} = (-1;2;2) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right] = (2;-5;6)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $2x - 5y + 6z - 10 = 0$.

Do $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên

$$\begin{cases} I \in (ABC) \\ IA = IB \\ IA = IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 5b + 6c - 10 = 0 \\ (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 = (a-3)^2 + (b-4)^2 + (c-4)^2 \\ (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 = (a-2)^2 + (b-6)^2 + (c-6)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 5b + 6c = 10 \\ 4a + 4b + 2c = 27 \\ 2a + 8b + 6c = 62 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{10} \\ b = 4 \\ c = \dfrac{49}{10} \end{cases}.$$

Vậy $a + b + c = \dfrac{46}{5}$.

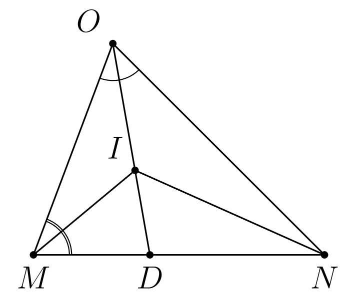
Chọn phương án B

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2;2;1)$, $N\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác $\triangle OMN$.

A $I(1;1;1)$. **B** $I(0;1;1)$. **C** $I(0;-1;-1)$. **D** $I(1;0;1)$.

Lời giải.

Cách 1:



Ta có $\overrightarrow{OM}=(2;2;1)$, $\overrightarrow{ON}=\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Gọi OD là phân giác trong góc O có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=\frac{1}{OM}\cdot\overrightarrow{OM}+\frac{1}{ON}\cdot\overrightarrow{ON}=(0;1;1)$.

Suy ra OD có phương trình tham số: $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=t.\end{cases}$

Đặt $\vec{v}=\frac{1}{MO}\cdot\overrightarrow{MO}+\frac{1}{MN}\cdot\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}(-2;-2;-1)+\frac{1}{5}\left(-\frac{14}{3};-\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right)=\left(-\frac{8}{5};-\frac{4}{5};0\right)$.

Gọi MI là phân giác trong góc M có vectơ chỉ phương là $-\frac{5}{2}\vec{v}=(2;1;0)$.

Suy ra MI có phương trình tham số: $\begin{cases}x=2+2t'\\y=2+t'\\z=1.\end{cases}$

Gọi I là giao điểm của OD và MI ta suy ra tọa độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x_I=2+2t'=0\\y_I=2+t'=t\\z_I=1=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=1\\t'=-1.\end{cases}$

Vậy $I(0;1;1)$.

Cách 2: Khi làm bài trắc nghiệm, học sinh có thể sử dụng luôn tính chất.

Với I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $\triangle OMN$ ta chứng minh:

$$MN\cdot\overrightarrow{IO}+OM\cdot\overrightarrow{IN}+ON\cdot\overrightarrow{IM}=\vec{0}.$$

Thật vậy, theo tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{OM}{ON}=\frac{DM}{DN}\Rightarrow\frac{OM}{OM+ON}=\frac{DM}{DM+DN}\Rightarrow\frac{OM}{OM+ON}=\frac{DM}{MN}\Rightarrow\frac{MO}{MD}=\frac{OM+ON}{MN}\quad(1).$$

Ta cũng có

$$\begin{aligned}\frac{OM}{ON}=\frac{DM}{DN}\quad&\Rightarrow\ \overrightarrow{DM}=-\frac{OM}{ON}\overrightarrow{DN}\\&\Rightarrow\ \overrightarrow{IM}-\overrightarrow{ID}=-\frac{OM}{ON}\left(\overrightarrow{IN}-\overrightarrow{ID}\right)\\&\Rightarrow\ \left(1+\frac{OM}{ON}\right)\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{IM}+\frac{OM}{ON}\overrightarrow{IN}\\&\Rightarrow\ \overrightarrow{ID}=\frac{ON}{OM+ON}\overrightarrow{IM}+\frac{OM}{OM+ON}\overrightarrow{IN}\quad(2).\end{aligned}$$

Mặt khác $\dfrac{IO}{ID} = \dfrac{MO}{MD} \Rightarrow \overrightarrow{IO} = -\dfrac{MO}{MD}\overrightarrow{ID} \quad (3)$.
Thay (1), (2) vàp (3) ta được

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{IO} = -\frac{MO}{MD}\overrightarrow{ID} \\
\Rightarrow\ & \overrightarrow{IO} = -\frac{OM+ON}{MN}\left(\frac{ON}{OM+ON}\overrightarrow{IM} + \frac{OM}{OM+ON}\overrightarrow{IN}\right) \\
\Rightarrow\ & \overrightarrow{IO} = -\frac{ON}{MN}\overrightarrow{IM} - \frac{OM}{MN}\overrightarrow{IN} \\
\Rightarrow\ & MN\cdot\overrightarrow{IO} + OM\cdot\overrightarrow{IN} + ON\cdot\overrightarrow{IM} = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Áp dụng tính chất cho tam giác $\triangle OMN$ với I là tâm đường tròn nội tiếp có $MN = 5$, $OM = 3$, $ON = 4$ ta được:

$$\begin{aligned}
& MN\cdot\overrightarrow{IO} + OM\cdot\overrightarrow{IN} + ON\cdot\overrightarrow{IM} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\ & 5\overrightarrow{IO} + 3\overrightarrow{IN} + 4\overrightarrow{IM} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x_I = \dfrac{1}{12}\left(5x_O + 3x_N + 4x_M\right) \\ y_I = \dfrac{1}{12}\left(5y_O + 3y_N + 4y_M\right) \\ z_I = \dfrac{1}{12}\left(5z_O + 3z_N + 4z_M\right) \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x_I = \dfrac{1}{12}\left(-8+8\right) \\ y_I = \dfrac{1}{12}\left(4+8\right) \\ z_I = \dfrac{1}{12}\left(8+4\right) \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & I(0;1;1).
\end{aligned}$$

Chọn phương án (B)

Câu 56. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $B(-2;2;0)$, $C(4;1;-2)$. Trên mặt phẳng $Oxyz$, điểm nào dưới đây cách đều ba điểm A, B, C?

(A) $M\left(\dfrac{3}{4};0;\dfrac{1}{2}\right)$. **(B)** $M\left(\dfrac{-3}{4};0;\dfrac{-1}{2}\right)$. **(C)** $M\left(\dfrac{3}{4};0;\dfrac{-1}{2}\right)$. **(D)** $M\left(\dfrac{-3}{4};0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

$A(2;2;2)$, $B(-2;2;0)$, $C(4;1;-1)$, $M(x,0,z) \in (Oxz)$ và cách đều 3 điểm A, B, C nên ta có

$$\begin{aligned}
\begin{cases} MA = MB \\ MB = MC \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + 4 + (z-2)^2 = (x+2)^2 + 4 + z^2 \\ (x-4)^2 + 1 + (z+1)^2 = (x+2)^2 + 4 + z^2 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} -8x - 4z = -4 \\ -12x + 2z = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{4} \\ z = \dfrac{-1}{2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy $M = \left(\dfrac{3}{4};0;\dfrac{-1}{2}\right)$.

Chọn phương án (C)

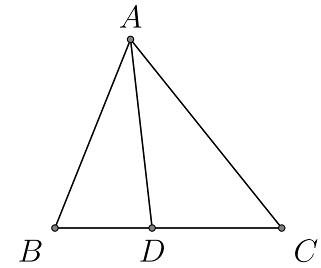
50 DẠNG TOÁN PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA LẦN 2

Câu 57. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(0;2;2)$, $B\left(\frac{9}{4};-1;2\right)$, $C(4;-1;2)$. Tìm tọa độ D là chân đường phân giác trong vẽ từ đỉnh A của tam giác ABC.

A $D(3;-1;-2)$. **B** $D(3;-1;2)$. **C** $D(-3;1;2)$. **D** $D(-3;-1;2)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} AB = \sqrt{\dfrac{81}{16}+9+0} = \dfrac{15}{4} \\ AC = \sqrt{16+9+0} = 5. \end{cases}$



Theo tính chất chân đường phân giác ta có $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3}{4}$.

Vậy nên ta có

$$DB = \frac{3}{4}DC \Rightarrow \overrightarrow{DB} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_D = -\dfrac{3}{4}(x_C - x_D) \\ y_B - y_D = -\dfrac{3}{4}(y_C - y_D) \\ z_B - z_D = -\dfrac{3}{4}(z_C - z_D) \end{cases} \Leftrightarrow D(3;-1;2).$$

Chọn phương án B

Câu 58. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$, $B(2;-1;3)$. Điểm $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2 - 2MB^2$ lớn nhất. Tính $P = a+b+c$.

A $P=-1$. **B** $P=7$. **C** $P=5$. **D** $P=2$.

Lời giải.

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$. (1)

Giả sử $I(x;y;z) \Rightarrow \overrightarrow{IA}(1-x;2-y;1-z), \overrightarrow{IB}(2-x;-1-y;3-z)$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x-2(2-x)=0 \\ 2-y-2(-1-y)=0 \\ 1-z-2(3-z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-4 \\ z=5 \end{cases} \Rightarrow I(3;-4;5).$

Ta có

$$\begin{aligned} MA^2 - 2MB^2 &= \left(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IM}\right)^2 - 2\left(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IM}\right)^2 \\ &= -MI^2 + IA^2 - 2IB^2 - 2\overrightarrow{IM}\left(\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB}\right) \\ &= -IM^2 + \left(IA^2 - 2IB^2\right). \end{aligned}$$

Do I, B, A cố định nên biểu thức trên đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow IM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P).

Đường thẳng (δ) qua I và vuông góc với (Oxy) có phương trình $\begin{cases} x=3 \\ y=-4 \\ z=5+t. \end{cases}$

Phương trình mặt phẳng (Oyz): $z=0 \Rightarrow 5+t=0 \Rightarrow t=-5 \Rightarrow M(3;-4;0) \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-4 \\ c=0. \end{cases}$

Vậy ta có $P = a + b + c = 3 - 4 + 0 = -1$.

• **Cách khác:** *Cách đại số*

Do $M \in (Oxy) \Rightarrow c = 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} MA^2 - 2MB^2 &= (a-1)^2 + (b-2)^2 + (0-1)^2 - 2\left[(a-2)^2 + (b+1)^2 + (0-3)^2\right] \\ &= -a^2 - b^2 + 6a - 8b - 22 \\ &= -(a-3)^2 - (b+4)^2 + 3 \leq 3. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -4. \end{cases}$

Vậy ta có $a + b + c = 3 - 4 + 0 = -1$.

Chọn phương án A

Câu 59. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;1;1)$, $B(9;11;6)$ và $C(5;10;7)$. Giả sử điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng AB sao cho tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MC} = 45$. Khi đó $a + b + c$ bằng

A 19 . **B** 32 . **C** 16 . **D** 24 .

Lời giải.

Do M thuộc đường thẳng AB nên $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ với k là số thực.

Theo giả thiết

$$\overrightarrow{AB} = (10;10;5), \overrightarrow{AC} = (6;9;6) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 180, AB^2 = 225.$$

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{AB}^2 = 180 - 225k = 45$, suy ra $k = \dfrac{3}{5}$.

Do đó $\overrightarrow{AM} = (6;6;3) \Rightarrow M(5;7;4)$. Vậy $a + b + c = 16$.

Chọn phương án C

Câu 60. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân có $AB = BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $\widehat{SBA} = 60^\circ$. Gọi M là điểm nằm trên AC sao cho $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CM}$. Tính khoảng cách giữa SM và AB.

A $d = \dfrac{6a\sqrt{7}}{7}$. **B** $d = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$. **C** $d = \dfrac{a\sqrt{7}}{21}$. **D** $d = \dfrac{3a\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải.

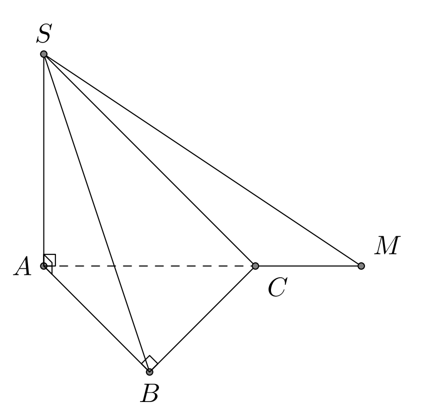
Gọi hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $O \equiv B$, $Bx \equiv BA$, $By \equiv BC$, $Bz \parallel SA$.

Khi đó ta có $B(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $C(0;a;0)$ và $S(a;0;a\sqrt{3})$.

Từ $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CM} \Rightarrow M\left(-\dfrac{a}{2}; \dfrac{3a}{2}; 0\right)$.

Nên $\overrightarrow{AB} = (-a;0;0)$, $\overrightarrow{SM} = \left(-\dfrac{3a}{2}; \dfrac{3a}{2}; -a\sqrt{3}\right)$,

$\overrightarrow{AS} = (0;0;a\sqrt{3})$, $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SM}\right] = \left(0; -a^2\sqrt{3}; -\dfrac{3a^2}{2}\right)$.



Do đó $d(AB, SM) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SM}\right] \cdot \overrightarrow{AS}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SM}\right]\right|} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{a^2\sqrt{21}} = \dfrac{3a\sqrt{7}}{7}$.

Chọn phương án D

BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. A	4. A	5. C	6. C	7. C	8. A	9. C	10. C
11. C	12. C	13. C	14. D	15. D	16. D	17. A	18. C	19. C	20. D
21. A	22. D	23. C	24. B	25. A	26. D	27. A	28. B	29. C	30. A
31. B	32. D	33. D	34. C	35. D	36. B	37. B	38. A	39. C	40. B
41. D	42. D	43. A	44. A	45. C	46. D	47. D	48. B	49. D	50. A
51. D	52. C	53. C	54. B	55. B	56. C	57. B	58. A	59. C	60. D

DẠNG 23. XÁC ĐỊNH TÂM, BÁN KÍNH CỦA MẶT CẦU

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=9$. Tâm của (S) có tọa độ là

A $(-2;4;-1)$. **B** $(2;-4;1)$. **C** $(2;4;1)$. **D** $(-2;-4;-1)$.

Lời giải.

Tâm của mặt cầu (S) có tọa độ $(2;-4;1)$.

Chọn phương án B

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầy (S): $x^2+y^2+z^2-2x+4z+1=0$ có tâm I và bán kính R là.

A $I(-1;0;2), R=2$. **B** $I(-1;0;2), R=4$. **C** $I(1;0;-2), R=2$. **D** $I(1;0;-2), R=4$.

Lời giải.

Dễ thấy mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+4z+1=0$ có:

Tâm $I(1;0;-2)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+0^2+(-2)^2-1}=2$.

Chọn phương án C

Câu 2. Trong không gian $Oxyx$, cho mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

A $I(-2;1;-1), R=3$. **B** $I(-2;1;-1), R=9$. **C** $I(2;-1;1), R=3$. **D** $I(2;-1;1), R=9$.

Lời giải.

Ta có tọa độ tâm $I(2;-1;1)$ và bán kính $R=3$.

Chọn phương án C

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x^2+y^2+z^2+2(m+2)x-2(m-1)z+3m^2-5=0$ là phương trình của một mặt cầu?

A 4. **B** 6. **C** 5. **D** 7.

Lời giải.

Phương trình đã cho là phương trình của một mặt cầu khi và chỉ khi

$(m+2)^2+(m-1)^2-3m^2+5>0 \Leftrightarrow m^2-2m-10<0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{11}<m<1+\sqrt{11}$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1;2;3;4\}$. Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn phương án D

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+9=0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu là

A $I\,(1;-2;3)$ và $R=5$. **B** $I\,(1;-2;3)$ và $R=\sqrt{5}$.

C $I\,(-1;2;-3)$ và $R=5$. **D** $I\,(-1;2;-3)$ và $R=\sqrt{5}$.

Lời giải.

Mặt cầu $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+9=0$ có tâm $I\,(1;-2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{1+4+9-9}=\sqrt{5}$.

Chọn phương án C

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-25=0$. Tìm tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

A $I(1;-2;2); R=6$.
B $I(-1;2;-2); R=5$.
C $I(-2;4;-4); R=\sqrt{29}$.
D $I(1;-2;2); R=\sqrt{34}$.

Lời giải.

Mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=34$. Khi đó (S) có tâm $I(1;-2;2)$, bán kính $R=\sqrt{34}$.

Chọn phương án D

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;1;1), B(0;-1;1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=8$.
B $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=2$.
C $(x+1)^2+y^2+(z+1)^2=8$.
D $(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=2$.

Lời giải.

Phương pháp: Phương trình mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$, bán kính R là $(x-a)2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Cách giải: Tâm mặt cầu là trung điểm của AB, có tọa độ là $I(-1;0;1)$.

Bán kính mặt cầu: $R=IA=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$.

Phương trình mặt cầu đường kính AB: $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=2$.

Chọn phương án B

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+6z-1=0$. Tâm của mặt cầu (S) là

A $I(2;-1;3)$.
B $I(-2;1;3)$.
C $I(2;-1;-3)$.
D $I(2;1;-3)$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;-3)$.

Chọn phương án C

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(1;2;-3)$ và tiếp xúc với trục Oy có bán kính bằng

A $\sqrt{10}$.
B 2.
C $\sqrt{5}$.
D $\sqrt{13}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của tâm $I(1;2;-3)$ trên trục $Oy \Rightarrow H(0;2;0) \Rightarrow IH=\sqrt{10}$.

Gọi R là bán kính mặt cầu có tâm $I(1;2;-3)$ và tiếp xúc với trục $Oy \Rightarrow R=IH=\sqrt{10}$.

Chọn phương án A

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-8x+10y-6z+49=0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S).

A $R=1$.
B $R=7$.
C $R=\sqrt{151}$.
D $R=\sqrt{99}$.

Lời giải.

Ta có $a=4,\ b=-5,\ c=3,\ d=49$. Do đó $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=1$.

Chọn phương án A

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $I(1;1;1)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình của mặt cầu tâm I và đi qua A là

A $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=29$. **B** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5$.
C $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$. **D** $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=5$.

Lời giải.

Mặt cầu tâm $I(1;1;1)$, bán kính $R=IA=\sqrt{5}$ có phương trình là

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5.$$

Chọn phương án B

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$. Tâm I và bán kính R của (S) lần lượt là

A $I(1;-2;0)$; $R=3$. **B** $I(-1;2;0)$; $R=3$. **C** $I(1;-2;0)$; $R=9$. **D** $I(-1;2;0)$; $R=9$.

Lời giải.

Ta có $a=1, b=-2, c=0, R=3$ nên $I(1;-2;0)$; $R=3$

Chọn phương án A

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$. Tâm của mặt cầu (S) có tọa độ là

A $(-3;1;-1)$. **B** $(3;-1;1)$. **C** $(3;-1;-1)$. **D** $(3;1;-1)$.

Lời giải.

Tâm của mặt cầu (S) có tọa độ là $(3;-1;1)$.

Chọn phương án B

Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(2;-2;3)$ đi qua điểm $A(5;-2;1)$ có phương trình

A $(x-5)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=\sqrt{13}$. **B** $(x+2)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=13$.
C $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=13$. **D** $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=\sqrt{13}$.

Lời giải.

Mặt cầu có bán kính $R=IA=\sqrt{13}$.

Mặt cầu tâm $I(2;-2;3)$ bán kính $R=\sqrt{13}$ là $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=13$.

Chọn phương án C

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-8x+10y-6z+49=0$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

A $I(-4;5;-3)$ và $R=1$. **B** $I(4;-5;3)$ và $R=7$.
C $I(-4;5;-3)$ và $R=7$. **D** $I(4;-5;3)$ và $R=1$.

Lời giải.

$(S):(x-4)^2+(y+5)^2+(z-3)^2=1 \Rightarrow I(4;-5;3)$ và $R=1$.

Chọn phương án D

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z-7=0$. Xác định tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

A $I(-1;-2;2)$, $R=3$. **B** $I(1;2;-2)$, $R=\sqrt{2}$. **C** $I(-1;-2;2)$, $R=4$. **D** $I(1;2;-2)$, $R=4$.

Lời giải.

Ta có $a=1$, $b=2$, $c=-2$ và $\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=4$ nên $I(1;2;-2)$ và $R=4$.
Chọn phương án D

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu có phương trình

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+9=0.$$

Tìm tọa độ tâm I và độ dài bán kính R của mặt cầu.

A $I(-1;2;-3)$ và $R=\sqrt{5}$.
B $I(1;-2;3)$ và $R=\sqrt{5}$.
C $I(1;-2;3)$ và $R=5$.
D $I(-1;2;-3)$ và $R=5$.

Lời giải.

Tâm $I(1;-2;3)$; $R=\sqrt{1+4+9-9}=\sqrt{5}$.
Chọn phương án B

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $I(1;0;-1)$, $A(2;2;-3)$. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I và đi qua điểm A.

A $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=3$.
B $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=3$.
C $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=9$.
D $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9$.

Lời giải.

Bán kính mặt cầu $R=IA=\sqrt{1+4+4}=3$, nên phương trình mặt cầu là

$$(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9.$$

Chọn phương án D

Câu 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình là $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$. Tính diện tích mặt cầu (S).

A 42π.
B 36π.
C 9π.
D 12π.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=3$. Diện tích mặt cầu (S) là $S=4\pi R^2=36\pi$.
Chọn phương án B

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(2;-2;0)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I bán kính $R=4$.

A $(x+2)^2+(y-2)^2+z^2=4$.
B $(x+2)^2+(y-2)^2+z^2=16$.
C $(x-2)^2+(y+2)^2+z^2=16$.
D $(x-2)^2+(y+2)^2+z^2=4$.

Lời giải.

Phương trình mặt cầu có tâm $I(2;-2;0)$ và bán kính $R=4$ là

$$(x-2)^2+(y+2)^2+z^2=16.$$

Chọn phương án C

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-5)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$. Tính bán kính R của mặt cầu (S).

(A) $R = 18$. (B) $R = 9$. (C) $R = 3$. (D) $R = 6$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R thì có phương trình $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

Theo đề bài ta có $R^2 = 9 \Rightarrow R = 3$.

Chọn phương án (C)

B MỨC ĐỘ 2

Câu 21. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon 2x + 6y + z - 3 = 0$ cắt trục Oz và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-6}{-1}$ lần lượt tại A và B. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

(A) $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 36$.
(B) $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 9$.
(C) $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 36$.
(D) $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9$.

Lời giải.

Do điểm $A \in Oz$ nên suy ra $A(0; 0; c)$, mà ta lại có $A \in (P)$ nên suy ra $c = 3$. Do đó $A(0; 0; 3)$.

Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2t \\ z = 6 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Tọa độ điểm B là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2t \\ z = 6 - t \\ 2x + 6y + z - 3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = 4 \\ y = -2 \\ z = 7 \end{cases}$

Do đó $B(4; -2; 7)$.

Gọi I là tâm mặt cầu đường kính AB nên I là trung điểm AB, suy ra $I(2; -1; 5)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; -2; 4)$ suy ra $AB = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 7^2} = 6$ nên bán kính mặt cầu là $R = \dfrac{AB}{2} = 3$.

Phương trình mặt cầu là $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 9$.

Chọn phương án (D)

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $I(1; 1; 1)$ và $A(1; 2; 3)$. Phương trình của mặt cầu có tâm I và đi qua A là

(A) $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 29$.
(B) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$.
(C) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$.
(D) $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 5$.

Lời giải.

Ta có $R^2 = IA^2 = (1-1)^2 + (2-1)^2 + (3-1)^2 = 5$

nên phương trình của mặt cầu là $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$.

Chọn phương án (B)

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(3; -2; 5)$, $N(-1; 6; -3)$. Mặt cầu đường kính MN có phương trình là

(A) $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 6$.
(B) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 6$.

(C) $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=36$. (D) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=36$.

Lời giải.

Tâm I của mặt cầu là trung điểm đoạn $MN \Rightarrow I(1;2;1)$.

Bán kính mặt cầu $R=\dfrac{MN}{2}=\dfrac{\sqrt{(-1-3)^2+(6+2)^2+(-3-5)^2}}{2}=6$.

Vậy phương trình mặt cầu là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=36$.

Chọn phương án (D)

Câu 24. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(2;-1;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon\ x-2y-2z+3=0$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P).

(A) $S\colon\ x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-3=0$. (B) $S\colon\ x^2+y^2+z^2-2x+y+z-3=0$.

(C) $S\colon\ x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+1=0$. (D) $S\colon\ x^2+y^2+z^2-2x+y+z+1=0$.

Lời giải.

Gọi R là bán kính mặt cầu.

Do (S) tiếp xúc với (P) nên $R=\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|2-2(-1)-2(-1)+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=3$.

Vậy phương trình $S\colon\ (x-2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=9 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-3=0$.

Chọn phương án (A)

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $S\colon x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-3=0$. Bán kính R của mặt cầu S bằng

(A) $R=3$. (B) $R=2$. (C) $R=6$. (D) $R=9$.

Lời giải.

Ta có $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-3=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$, nên bán kính mặt cầu S bằng 3.

Chọn phương án (A)

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;-3)$ và $B(0;3;-1)$. Phương trình của mặt cầu đường kính AB là

(A) $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=6$. (B) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=24$.

(C) $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=24$. (D) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^{=}6$.

Lời giải.

Tâm I của mặt cầu là trung điểm của $AB \Rightarrow I(1;1;-2)$.

Bán kính của mặt cầu là $R=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{2^2+4^2+2^2}}{2}=\sqrt{6}$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=6$.

Chọn phương án (D)

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x^2+y^2+z^2+4mx+2my-2mz+9m^2-28=0$ là phương trình của mặt cầu?

(A) 7. (B) 8. (C) 9. (D) 6.

Lời giải.

Ta có $a = -2m$; $b = -m$; $c = m$ và $d = 9m^2 - 28$.
Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi

$$a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 \Leftrightarrow 4m^2 + m^2 + m^2 - 9m^2 + 28 > 0 \Leftrightarrow 28 - 3m^2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{2\sqrt{21}}{3} < m < \frac{2\sqrt{21}}{3}.$$

Do m nguyên nên $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.
Vậy có tất cả 7 giá trị nguyên của m.
Chọn phương án A

Câu 28. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon 2x + 6y + z - 3 = 0$ cắt trục Oz và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-6}{-1}$ lần lượt tại A và B. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 36$.
B $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 9$.
C $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 36$.
D $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9$.

Lời giải.

Do điểm $A \in Oz$ nên suy ra $A(0;0;c)$, mà ta lại có $A \in (P)$ nên suy ra $c = 3$. Do đó $A(0;0;3)$.

Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2t \\ z = 6 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Tọa độ điểm B là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2t \\ z = 6 - t \\ 2x + 6y + z - 3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = 4 \\ y = -2 \\ z = 7 \end{cases}$

Do đó $B(4;-2;7)$.
Gọi I là tâm mặt cầu đường kính AB nên I là trung điểm AB, suy ra $I(2;-1;5)$.
Ta có $\overrightarrow{AB} = (4;-2;4)$ suy ra $AB = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 7^2} = 6$ nên bán kính mặt cầu là $R = \dfrac{AB}{2} = 3$.
Phương trình mặt cầu là $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 9$.
Chọn phương án D

Câu 29. Viết phương trình mặt cầu đường kính AB, biết $A(6;2;-5), B(-4;0;7)$.

A $(x-5)^2 + (y-1)^2 + (z+6)^2 = 62$.
B $(x+5)^2 + (y+1)^2 + (z-6)^2 = 62$.
C $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 62$.
D $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 62$.

Lời giải.

Gọi (S) là mặt cầu đường kính AB.
Ta có $\overrightarrow{AB} = (-10;-2;12) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{62}$.
Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow I(1;1;1)$.
(S) có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R = \dfrac{1}{2}AB = \sqrt{62}$.
Vậy phương trình mặt cầu $(S) : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 62$.
Chọn phương án C

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-2z+3=0$ và điểm $I(1;1;0)$. Phương trình mặt cầu tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P) là

A $(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=\frac{5}{6}$.
B $(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=\frac{25}{6}$.
C $(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=\frac{5}{\sqrt{6}}$.
D $(x+1)^2+(y+1)^2+z^2=\frac{25}{6}$.

Lời giải.

Gọi R là bán kính mặt cầu, khi đó $R=\mathrm{d}\left(I;(P)\right)=\dfrac{|1+1-2\cdot 0+3|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{6}}$.

Từ đó suy ra phương trình của mặt cầu là $(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=\dfrac{25}{6}$.

Chọn phương án B

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$ có bán kính bằng

A 3.
B $\sqrt{3}$.
C $\sqrt{6}$.
D 9.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+1^2+3}=3$.

Chọn phương án A

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;4;2)$ và có thể tích bằng 36π. Khi đó phương trình mặt cầu (S) là

A $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=3$.
B $(x-1)^2+(y+4)^2+(z+2)^2=9$.
C $(x-1)^2+(y+4)^2+(z+2)^2=3$.
D $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=9$.

Lời giải.

Thể tích khối cầu $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=36\pi \Rightarrow R=3$.

Phương trình mặt cầu $(S): (x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=9$.

Chọn phương án D

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $I(2;-3;4)$ và đi qua điểm $A(4;-2;2)$ là phương trình nào sau đây?

A $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=3$.
B $(x+2)^2+(y-3)^2+(z+4)^2=9$.
C $(x+2)^2+(y-3)^2+(z+4)^2=3$.
D $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=9$.

Lời giải.

Ta có $IA=\sqrt{4+1+4}=3$. Phương trình mặt cầu là $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=9$.

Chọn phương án D

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=5$. Tọa độ tâm và bán kính mặt cầu là

A $I(1;-3;0)$, $R=\sqrt{5}$.
B $I(1;-3;0)$, $R=5$.
C $I(-1;3;0)$, $R=\sqrt{5}$.
D $I(1;3;0)$, $R=\sqrt{5}$.

Lời giải.

Tọa độ tâm $I(1;-3;0)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.

Chọn phương án A

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có tọa độ đỉnh $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;6)$ và $D(2;4;6)$. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Viết phương trình mặt cầu (S') có tâm trùng với tâm của mặt cầu (S) và có bán kính gấp 2 lần bán kính của mặt cầu (S).

A $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=56$.
B $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$.
C $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=14$.
D $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-12=0$.

Lời giải.

Gọi (S): $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Ta có:

$$\begin{cases} A\in(S)\\ B\in(S)\\ C\in(S)\\ D\in(S)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a+d=-4\\ -8b+d=-16\\ -12c+d=-36\\ -4a-8b-12c+d=-56\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1\\ b=2\\ c=3\\ d=0.\end{cases}$$

Từ đó suy ra (S) có tâm $I(1;2;3), R=\sqrt{14}$.

Phương trình mặt cầu (S') có tâm $I'\equiv I(1;2;3), R'=2R=2\sqrt{14}$ là

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=56.$$

Chọn phương án A

Câu 36. Tìm độ dài đường kính của mặt cầu S có phương trình $x^2+y^2+z^2-2y+4z+2=0$.

A $\sqrt{3}$.
B 2.
C 1.
D $2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Bán kính của mặt cầu: $R=\sqrt{1^2+(-2)^2-2}=\sqrt{3}\Rightarrow$ Đường kính của mặt cầu là $2R=2\sqrt{3}$.

Chọn phương án D

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-2=0$ cắt mặt phẳng Oxy theo giao tuyến là một đường tròn. Tìm tâm và bán kính của đường tròn này.

A $I(1;-2;0), r=\sqrt{5}$.
B $I(1;2;0), r=2\sqrt{5}$.
C $I(1;2;0), r=\sqrt{7}$.
D $I(-1;-2;0), r=2\sqrt{7}$.

Lời giải.

Mặt cầu có tâm $A(1;2;-3)$, bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2+2}=4$.

Tâm I của đường tròn là hình chiếu của điểm A trên mặt phẳng (Oxy) nên $I(1;2;0)$, và bán kính $r=\sqrt{R^2-\mathrm{d}^2(A,(Oxy))}=\sqrt{7}$.

Chọn phương án C

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(2;1;-3)$ và tiếp xúc với trục Oy có phương trình là

A $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=4$.
B $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=13$.
C $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=9$.
D $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=10$.

Lời giải.

Mặt cầu tiếp xúc với trục Oy nên bán kính mặt cầu $R=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$.

Vậy phương trình mặt cầu tâm $I(2;1,-3)$ tiếp xúc với trục Oy có phương trình

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=13.$$

Chọn phương án B

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2+y^2+z^2+4x-2y+2z+m=0$ là phương trình của một mặt cầu.

A $m \leq 6$. **B** $m < 6$. **C** $m > 6$. **D** $m \geq 6$.

Lời giải.

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi: $(2)^2+(-1)^2+(1)^2-m>0 \Leftrightarrow m<6$.

Chọn phương án B

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):\ x^2+(y-1)^2+z^2=2$. Trong các điểm cho dưới đây, điểm nào nằm ngoài mặt cầu (S)?

A $M(1;1;1)$. **B** $N(0;1;0)$. **C** $P(1;0;1)$. **D** $Q(1;1;0)$.

Lời giải.

Mặt cầu có tâm $I(0;1;0)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$. Vì $IP=\sqrt{3}>R$ nên điểm P nằm ngoài mặt cầu (S).

Chọn phương án C

C MỨC ĐỘ 3

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z+3=0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích là 2π. Mặt cầu (S) có phương trình là

A $x^2+(y+2)^2+(z+1)^2=2$. **B** $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$.

C $x^2+(y+2)^2+(z+1)^2=3$. **D** $x^2+(y+2)^2+(z+1)^2=1$.

Lời giải.

Gọi R, r lần lượt là bán kính của mặt cầu và đường tròn giao tuyến. Theo giải thiết ta có:

$$\pi r^2=2\pi \Leftrightarrow r^2=2.$$

Mặt khác $\mathrm{d}(I,(P))=1$ nên $R^2=r^2+[\mathrm{d}(I,(P))]^2=3$.

Vậy phương trình mặt cầu là $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$.

Chọn phương án B

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1;0;0)$, $B(0;0;2)$, $C(0;-3;0)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là

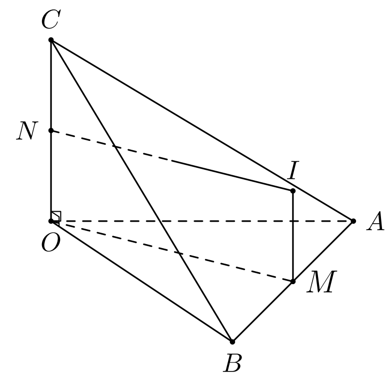
A $\dfrac{\sqrt{14}}{4}$. **B** $\sqrt{14}$. **C** $\dfrac{\sqrt{14}}{3}$. **D** $\dfrac{\sqrt{4}}{2}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Dựng tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp.

Cách giải:



Tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và OC.

Ta có $\begin{cases} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{cases} \Rightarrow OC \perp (OAB)$.

Qua M dựng đường thẳng song song với OC, qua N dựng đường thẳng song song với OM. Hai đường thẳng này cắt nhau tại I. ΔOAB vuông tại $O \Rightarrow M$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta OAB \Rightarrow IO = IA = IB$. và $I \in IN \Rightarrow IO = IC \Rightarrow IO = IA = IB = IC \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp $O.ABC$.

Ta có: $OA = 1, OB = 2, OC = 3$

$\Rightarrow OM = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}\sqrt{1^2 + 2^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

$R = OI = \sqrt{IM^2 + OM^2} = \sqrt{\dfrac{9}{4} + \dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Chọn phương án D

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1; 0; 0)$, $B(0; 0; 2)$, $C(0; -3; 0)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là

A $\dfrac{\sqrt{14}}{3}$. B $\dfrac{\sqrt{14}}{4}$. C $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$. D $\sqrt{14}$.

Lời giải.

Phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có dạng:

$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (S) với $a^2 + b^2 + c^2 > d$.

$O(0; 0; 0) \in (S) \Rightarrow d = 0 \Rightarrow (S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz = 0$.

$A(-1; 0; 0) \in (S) \Rightarrow (-1)^2 - 2a(-1) = 0 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{2}$

$B(0; 0; 2) \in (S) \Rightarrow 2^2 - 2c \cdot 2 = 0 \Rightarrow c = 1$

$C(0; -3; 0) \in (S) \Rightarrow (-3)^2 - 2b \cdot (-3) = 0 \Rightarrow b = -\dfrac{3}{2}$

Suy ra mặt cầu có tâm $I\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{2}; 1\right)$.

$\overrightarrow{OI} = \left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{2}; 1\right)$

Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$:

$R = OI = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 + 1^2} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Chọn phương án C

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0; 0; -2)$, $B(4; 0; 0)$. Mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất, đi qua O, A, B có tâm là

A $I(2; 0; -1)$. B $I(0; 0; -1)$. C $I(2; 0; 0)$. D $I\left(\dfrac{4}{3}; 0; -\dfrac{2}{3}\right)$.

Lời giải.

Gọi tọa độ tâm I của mặt cầu (S) là $I(a; b; c)$.

Phương trình của mặt cầu (S) là $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R$

$O(0;0;0) \in (S) \Rightarrow a^2+b^2+c^2=R$ (1)
$A(0;0;-2) \in (S) \Rightarrow a^2+b^2+(-2-c)^2=R$ (2)
$B(4;0;0) \in (S) \Rightarrow (4-a)^2+b^2+c^2=R$ (3)
Từ (1) và (2) $\Rightarrow c^2=(-2-c)^2 \Leftrightarrow c^2=c^2+4c+4 \Rightarrow c=-1$.
Từ (1) và (3) $\Rightarrow a^2=(4-a)^2 \Leftrightarrow a^2=a^2-8a+16 \Rightarrow a=2$.
Thay $a=2; c=-1$ vào (1) ta được: $R=5+b^2 \geq 5$.
Suy ra để mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất thì $b=0 \Rightarrow I(2;0;-1)$.
Vậy $I(2;0;-1)$.
Chọn phương án (A)

Câu 45. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0), C(0;0;3), B(0;2;0)$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2=MB^2+MC^2$ là mặt cầu có bán kính là

(A) $R=2$. (B) $R=\sqrt{3}$. (C) $R=3$. (D) $R=\sqrt{2}$.

Lời giải.

Giả sử $M(x;y;z)$.
Ta có: $MA^2=(x-1)^2+y^2+z^2$;
$MB^2=x^2+(y-2)^2+z^2$;
$MC^2=x^2+y^2+(z-3)^2$.

$$\begin{aligned} MA^2=MB^2+MC^2 &\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+z^2=x^2+(y-2)^2+z^2+x^2+y^2+(z-3)^2 \\ &\Leftrightarrow -2x+1=(y-2)^2+x^2+(z-3)^2 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=2 \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2=MB^2+MC^2$ là mặt cầu có bán kính là $R=\sqrt{2}$.
Chọn phương án (D)

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-z-3=0$. Viết phương trình mặt cầu có tâm I nằm trên (P), đi qua điểm A và gốc tọa độ O sao cho chu vi tam giác OIA bằng $6+\sqrt{2}$.

(A) $(x+2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ và $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=9$.
(B) $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=9$ và $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=9$.
(C) $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$ và $x^2+y^2+(z+3)^2=9$.
(D) $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=9$ và $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$.

Lời giải.

Gọi (Q) là mặt phẳng trung trực của OA. Lúc đó (Q) đi qua điểm $B\left(\frac{1}{2};0;-\frac{1}{2}\right)$ (trung điểm OA) và nhận véc-tơ $\overrightarrow{OA}=(1;0;-1)$ làm véc-tơ pháp tuyến, nên có phương trình $x-z-1=0$.
Theo giả thiết, tâm I nằm trên (P) và cách đều O, A nên I nằm trên giao tuyến d của (P) và (Q) nên có tọa độ $I(t+1;2;t)$.

Chu vi tam giác OIA là

$$2p_{OIA} = OA + OI + IA = \sqrt{2} + \sqrt{t^2+4+(t+1)^2} + \sqrt{t^2+4+(t+1)^2} = \sqrt{2}+6$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{t^2+4+(t+1)^2} = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &t=1 \\ &t=-2. \end{aligned}\right.$$

Với $t=1$, ta có $I(2;2;1)$ và phương trình mặt cầu là $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$.
Với $t=-2$, ta có $I(-1;2;-2)$ và phương trình mặt cầu là $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=9$.
Chọn phương án D

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có trọng tâm G. Biết $B(6;-6;0)$, $C(0;0;12)$ và đỉnh A thay đổi trên mặt cầu $(S_1)\colon x^2+y^2+z^2=9$. Khi đó G thuộc mặt cầu (S_2) có phương trình là

A $(S_2)\colon (x+2)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=1$.
B $(S_2)\colon (x-2)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=1$.
C $(S_2)\colon (x-4)^2+(y+4)^2+(z-8)^2=1$.
D $(S_2)\colon (x-2)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=3$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} x_A = 3x_G - x_B - x_C = 3x_G - 6 \\ y_A = 3y_G - y_B - y_C = 3y_G + 6 \\ z_A = 3z_G - z_B - z_C = 3z_G - 12. \end{cases}$$

Mà $A\in(S_1)$, suy ra $(3x_G-6)^2+(3y_G+6)^2+(3z_G-12)^2=9 \Leftrightarrow (x_G-2)^2+(y_G+2)^2+(z_G-4)^2=1$.
Vậy điểm G thuộc mặt cầu $(S_2)\colon (x-2)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=1$.
Chọn phương án B

Câu 48. Có bao nhiêu mặt cầu đi qua điểm $M(2;-2;5)$ và tiếp xúc với cả ba mặt phẳng $(P)\colon x-1=0$, $(Q)\colon y+1=0$ và $(R)\colon z-1=0$?

A 7. **B** 1. **C** 8. **D** 3.

Lời giải.

Gọi $I(a;b;c)$ và r lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu.
Ta có $d(I,(P)) = d(I,(Q)) = d(I,(R))$ suy ra $r=|a-1|=|b+1|=|c-1|$.
Do điểm $M(2;-2;5)$ thuộc miền $x>1$; $y<-1$; $z>1$ nên $I(a;b;c)$ cũng thuộc miền $a>1$; $b<-1$; $c>1$. Do các mặt phẳng (P), (Q), (R) là các mặt phẳng song song lần lượt với các mặt phẳng (Oyz), (Oxz), (Oxy) nên $I(1+r;-1-r;1+r)$.
Mặt khác $IM=r \Leftrightarrow (r-1)^2+(r-1)^2+(r-4)^2=r^2 \Leftrightarrow r=3$. Khi đó $I(4;-4;4)$.
Vậy phương trình mặt cầu là $(x-4)^2+(y+4)^2+(z-4)^2=9$.
Chọn phương án B

Câu 49. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S) : x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0$ và đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha) : x+2y-2z-4=0$ và $(\beta) : 2x-2y-z+1=0$. Đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $AB=8$ khi

A $m=12$. **B** $m=-12$. **C** $m=-10$. **D** $m=5$.

Lời giải.

50 DẠNG TOÁN PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA LẦN 2

Giả sử $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ lần lượt là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) và (β), ta chọn $\vec{n}_1(1;2;-2)$ và $\vec{n}_2(2;-2;-1)$. Khi đó $[\vec{n}_1;\vec{n}_2]=(-6;-3;-6)$, gọi $\vec{v}$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ ta chọn $\vec{v}(2;1;2)$ và điểm $M_0\left(1;\dfrac{3}{2};0\right)$ thuộc Δ.

Suy ra phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x=2t+1\\ y=t+\dfrac{3}{2}\\ z=2t.\end{cases}$

Mặt khác ta có

$$(S): x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y-3)^2+z^2=13-m.$$

Để (S) là mặt cầu suy ra $13-m>0\Leftrightarrow m<13$.

Khi đó gọi I, R là tâm và bán kính mặt cầu ta có $I(-2;3;0)$ và $R=\sqrt{13-m}$.

Hạ $IH\perp\Delta$ suy ra $HA=HB=4$ ta có $IH=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IM}_0;\vec{v}\right]\right|}{|\vec{v}|}$. Mà $\overrightarrow{IM}_0\left(3;-\dfrac{3}{2};0\right)$ nên $\left[\overrightarrow{IM}_0;\vec{v}\right]=(-3;-6;6)$ suy ra $IH=\dfrac{\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+6^2}}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=3$.

Xét tam giác vuông HIA ta có $IA^2=IH^2+HA^2\Leftrightarrow 13-m=3^2+4^2\Leftrightarrow m=-12$.

Chọn phương án B

Câu 50. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-3)$, $B(-3;-2;-5)$. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $AM^2+BM^2=30$ là mặt cầu (S). Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

A $I(-2;-2;-8); R=3$.
B $I(-1;-1;-4); R=\sqrt{6}$.
C $I(-1;-1;-4); R=3$.
D $I(-1;-1;-4); R=\dfrac{\sqrt{30}}{2}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AB, ta có $I=(-1;-1;-4)$.

Khi đó

$$\begin{aligned}AM^2+BM^2&=\overrightarrow{AM}^2+\overrightarrow{BM}^2\\&=\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IM}\right)^2+\left(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IM}\right)^2\\&=\overrightarrow{AI}^2+\overrightarrow{BI}^2+2\overrightarrow{IM}^2+2\overrightarrow{IM}\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}\right)\\&=AI^2+BI^2+2IM^2\\&=\dfrac{AB^2}{2}+2IM^2=12+2IM^2.\end{aligned}$$

Nên $AM^2+BM^2=30\Leftrightarrow 12+2IM^2=30\Leftrightarrow IM=3$. Vậy, tập hợp điểm M là mặt cầu (S) tâm $I(-1;-1;-4)$, bán kính $R=3$.

Chọn phương án C

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-2)$, $B(2;-1;2)$. Tìm tọa độ M trên mặt phẳng Oxy sao cho $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A $M(1;1;0)$. **B** $M(2;1;0)$. **C** $M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$. **D** $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2};0\right)$.

Lời giải.

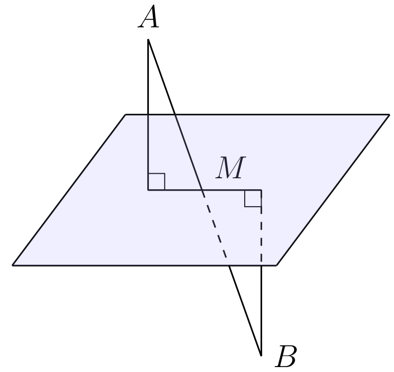
Ta có $z_A = -2 < 0$, $z_B = 2 > 0$ nên A, B nằm về hai phía của Oxy.

Nên để $MA + MB$ nhỏ nhất thì $M = AB \cap (Oxy)$.

Lại có $\mathrm{d}(A,(Oxy)) = |z_A| = 2$ và $\mathrm{d}(B,(Oxy)) = |z_B| = 2$, suy ra

$$\frac{\mathrm{d}(A,(Oxy))}{\mathrm{d}(B,(Oxy))} = \frac{AM}{BM} = 1.$$

Hay M là trung điểm $AB \Rightarrow M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$.



Chọn phương án C

Câu 52. Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2(m+2)y - 2(m+3)z + 16m + 13 = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình trên là phương trình của một mặt cầu.

A $m < 0$ hay $m > 2$. **B** $m \leq -2$ hay $m \geq 0$. **C** $m < -2$ hay $m > 0$. **D** $m \leq 0$ hay $m \geq 2$.

Lời giải.

Phương trình đã cho là phương trình của một mặt cầu khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & m^2 + (m+2)^2 + (m+3)^2 - 16m - 13 > 0 \\ \Leftrightarrow\ & 3m^3 - 6m > 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 2 \end{array}\right. . \end{aligned}$$

Chọn phương án A

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) đi qua $A(-1;2;0)$, $B(-2;1;1)$ và có tâm nằm trên trục Oz.

A $x^2 + y^2 + z^2 - z - 5 = 0$. **B** $x^2 + y^2 + z^2 + 5 = 0$.

C $x^2 + y^2 + z^2 - x - 5 = 0$. **D** $x^2 + y^2 + z^2 - y - 5 = 0$.

Lời giải.

Tâm I của mặt cầu trên trục Oz có tọa độ $I(0;0;c)$.

Hai điểm A, B nằm trên mặt cầu nên

$$\begin{aligned} & IA^2 = IB^2 \\ \Leftrightarrow\ & 1^2 + 2^2 + c^2 = 2^2 + 1^2 + (1-c)^2 \\ \Leftrightarrow\ & c = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Từ đó, phương trình mặt cầu là $x^2 + y^2 + \left(z - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 1^2 + 2^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

hay $x^2 + y^2 + z^2 - z - 5 = 0$.

Chọn phương án A

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+8y-2mz+6m=0$. Biết đường kính của (S) bằng 12, tìm m.

(A) $\left[\begin{aligned}&m=-2\\&m=8\end{aligned}\right.$. (B) $\left[\begin{aligned}&m=2\\&m=-8\end{aligned}\right.$. (C) $\left[\begin{aligned}&m=-2\\&m=4\end{aligned}\right.$. (D) $\left[\begin{aligned}&m=2\\&m=-4\end{aligned}\right.$.

Lời giải.

Ta có $a=2,\ b=-4,\ c=m,\ d=6m$. Do (S) có đường kính bằng 12 nên có bán kính bằng 6, suy ra

$$a^2+b^2+c^2-d=6^2\Leftrightarrow 4+16+m^2-6m=36\Leftrightarrow m^2-6m-16=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&m=-2\\&m=8.\end{aligned}\right.$$

Chọn phương án (A)

Câu 55. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-1)$ và cắt mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-2z-16=0$ theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 3. Phương trình của mặt cầu (S) là

(A) $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=25$. (B) $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=25$.
(C) $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9$. (D) $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=9$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|2+0+2-16|}{\sqrt{4+1+4}}=4$.

Bán kính mặt cầu (S) là $R=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

Phương trình của mặt cầu (S) là $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=25$.

Chọn phương án (A)

Câu 56. Cho tham số $m\in\mathbb{R}$, mặt phẳng $(P)\colon (m^2-1)x-2mz-2m+2=0$ luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định bán kính r.

(A) $r=1$. (B) $r=2$. (C) $r=4$. (D) $r=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu cần tìm, ta có

$$\begin{aligned}d_{(I;(P))}=r\quad&\Leftrightarrow\quad\frac{|(m^2-1)a-2mc-2m+2|}{\sqrt{(m^2-1)^2+(-2m)^2}}=r\\&\Leftrightarrow\quad\frac{|am^2-2m(c+1)-a+2|}{\sqrt{(m^2+1)^2}}=r\\&\Leftrightarrow\quad|am^2-2m(c+1)-a+2|=rm^2+r.\end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số, để phương trình trên không phụ thuộc vào m ta có $\begin{cases}a=r\\-2(c+1)=0\\-a+2=r\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\c=-1\\r=1.\end{cases}$

Vậy $r=1$.

Chọn phương án (A)

Câu 57. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-3}{2}=-z$ và điểm $M(3;2;1)$. Viết phương trình mặt cầu có tâm A thuộc đường thẳng Δ, bán kính là $AM=\sqrt{5}$ biết tâm A có cao độ là số dương.

A. $(x-3)^2+(y-3)^2+z^2=5$.
B. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5$.
C. $(x+3)^2+(y+3)^2+z^2=5$.
D. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=5$.

Lời giải.

Gọi $A(3+2t;3+2t;-t)$ là tâm của mặt cầu (điều kiện $t<0$).

Ta có $AM=\sqrt{5}\Leftrightarrow AM^2=5\Leftrightarrow(2t)^2+(1+2t)^2+(t+1)^2=5\Leftrightarrow 9t^2+6t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=\dfrac{1}{3}.\end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện ta có $t=-1\Rightarrow A(1;1;1)$ nên mặt cầu có phương trình $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5$.

Chọn phương án B

Câu 58. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=2+t\\ y=3+t\\ z=3t\end{cases}$ và hai mặt phẳng $(P)\colon 2x-2y+z-4=0$; $(Q)\colon 2x+y+1=0$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng d, tiếp xúc (P) và cắt mặt phẳng (Q) theo một đường tròn có bán kính bằng $r=2$, biết I có hoành độ dương.

A. $(S)\colon(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$.
B. $(S)\colon(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=3$.
C. $(S)\colon(x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$.
D. $(S)\colon(x-2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=9$.

Lời giải.

Vì $I\in d$ nên tọa độ có dạng $I(2+t;3+t;3t)$.

(S) tiếp xúc (P) nên ta có bán kính của mặt cầu là $R=\mathrm{d}(I;(P))=|t-2|$.

Lại có $\mathrm{d}(I;(Q))=\dfrac{|3t+8|}{\sqrt{5}}$. Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (Q) theo đường tròn có bán kính $r=2$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}&R^2=r^2+[\mathrm{d}(I;(Q))]^2\\ \Leftrightarrow\ &(t-2)^2=4+\left(\dfrac{3t+8}{\sqrt{5}}\right)^2\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=-16\end{array}\right.\end{aligned}$$

— $t=-1$ suy ra $I(1;2;-3)$; $R=3$. Phương trình mặt cầu $(S)\colon(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$.

— $t=-16$ suy ra $I(-14;-13;-48)$, loại do I phải có hoành độ dương.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(S)\colon(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$.

Chọn phương án A

Câu 59. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$, $B(2;-1;3)$. Tìm điểm M trên mặt phẳng (Oxy) sao cho MA^2-2MB^2 lớn nhất.

A $M(3;-4;0)$. **B** $M\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};0\right)$. **C** $M(0;0;5)$. **D** $M\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2};0\right)$.

Lời giải.

Điểm $I(3;-4;5)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Suy ra

$$\begin{aligned} MA^2-2MB^2 &= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2-2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2 \\ &= MI^2-2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+IA^2-2MI^2-4\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}-2IB^2 \\ &= -MI^2+IA^2-2IB^2. \end{aligned}$$

Do đó MA^2-2MB^2 lớn nhất khi MI nhỏ nhất hay M là hình chiếu của I trên mặt phẳng Oxy. Vậy $M(3;-4;0)$.

Chọn phương án A

Câu 60. Trong không gian $Oxyz$, gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với tất cả các mặt phẳng tọa độ. Tính $P=a-b+c$.

A $P=6$. **B** $P=-4$. **C** $P=-2$. **D** $P=9$.

Lời giải.

Goi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu. Do mặt cầu tiếp xúc với ba trụ tọa độ và đi qua $A(1;-1;4)$ nên

$$\begin{cases} a>0, b<0, c>0 \\ |a|=|b|=|c|. \end{cases}$$

Do đó $I(a;-a;a)$. Vì $IA=R$ nên $(a-1)^2+(-a+1)^2+(a-4)^2=a^2 \Leftrightarrow a=3$. Ta có $a=3, b=-3, c=3$ nên $P=a-b+c=9$.

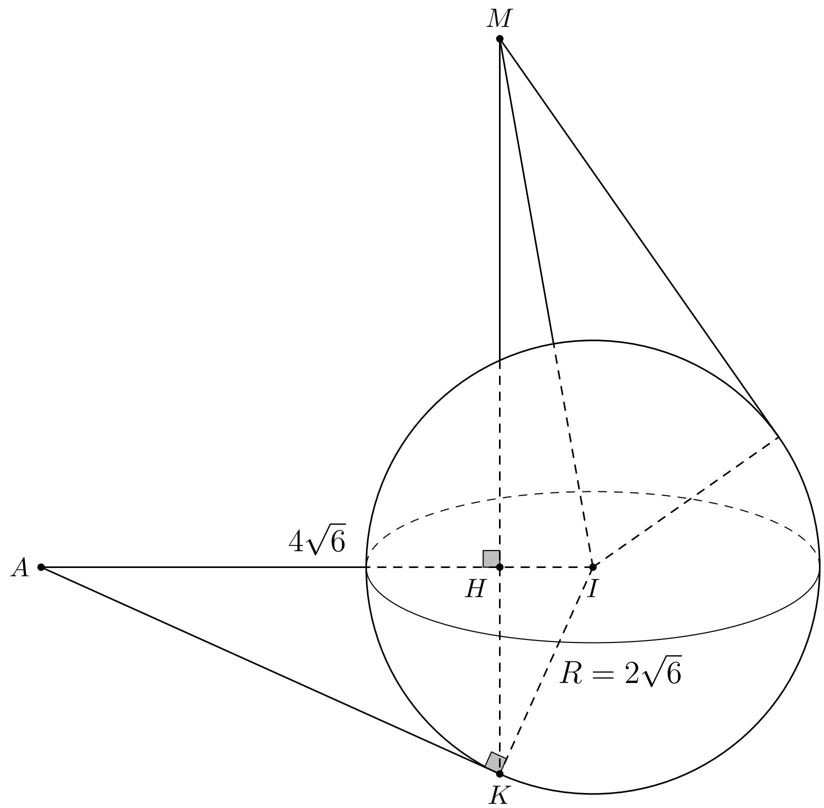
Chọn phương án D

D MỨC ĐỘ 4

Câu 61. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z-6)^2=24$ và điểm $A(-2;0;-2)$. Từ A kẻ các tiếp tuyến đến (S) với các tiếp điểm thuộc đường tròn (ω). từ điểm M di động nằm ngoài (S) và nằm trong mặt phẳng chứa (ω), kẻ các tiếp tuyến đến (S) với các tiếp điểm thuộc đường tròn (ω'). Biết rằng khi (ω) và (ω') có cùng bán kính thì M luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A $r=6\sqrt{2}$. **B** $r=3\sqrt{10}$. **C** $r=3\sqrt{5}$. **D** $r=3\sqrt{2}$.

Lời giải.



Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn (ω).
Mặt cầu (S) có tâm $(2; 4; 6)$ và bán kính $R = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. Ta có

$$IA = \sqrt{4^2 + 4^2 + 8^2} = 4\sqrt{6}.$$

Do hai đường tròn (ω) và (ω') có cùng bán kính nên $IM = IA = 4\sqrt{6}$.
Tam giác IAK vuông tại K nên

$$IK^2 = IH \cdot IA \Rightarrow IH = \frac{IK^2}{IA} = \frac{24}{4\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

Do H là tâm đường tròn (ω) nên điểm H cố định.
Tam giác IHM vuông tại H nên

$$MH = \sqrt{IM^2 - IH^2} = \sqrt{(4\sqrt{6})^2 - (\sqrt{6})^2} = 3\sqrt{10}.$$

Do H cố định thuộc mặt phẳng (P), M di động trên mặt phẳng (P) và $MH = 3\sqrt{10}$ không đổi.
Suy ra điểm M thuộc đường tròn có tâm là H và có bán kính $r = HM = 3\sqrt{10}$.
Chọn phương án B

Câu 62. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 0; 1)$, $B(1; -2; 3)$ và mặt cầu $(S) : (x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$. Tập hợp các điểm M di động trên mặt cầu (S) sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2$ là một đường tròn cố định. Tính bán kính của đường tròn đó.

A $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$. **B** $\dfrac{3\sqrt{11}}{4}$. **C** $\dfrac{\sqrt{41}}{2}$. **D** $\dfrac{\sqrt{62}}{4}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $J(-1;0;2)$ và bán kính $R=2$.

Gọi I là trung điểm của AB, ta có $\begin{cases}\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}\\ I(0;-1;2)\end{cases}$.

Dễ thấy $IJ=2$ nên I thuộc mặt cầu (S).

Từ giả thiết ta có: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM})(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM})=IM^2-IA^2$.

Mặt khác $IA^2=3$ nên $IM^2=5$.

Do vậy ta có điểm M thuộc mặt cầu $(S'): x^2+(y+1)^2+(z-2)^2=5$.

Gọi (C) là đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu (S) và (S'), suy ra (C) là đường tròn cố định mà M di chuyển trên đó.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa $(C)\Rightarrow(P): 2x-2y+1=0$.

Gọi H là hình chiếu của I lên $(P)\Rightarrow H$ là tâm của đường tròn (C).

$IH=d(I,(P))=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\Rightarrow r=HM=\sqrt{IM^2-IH^2}=\dfrac{\sqrt{62}}{4}$.

Chọn phương án D

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;2;-2)$; $B(3;-3;3)$. Điểm M trong không gian thỏa mãn $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng

A $12\sqrt{3}$. **B** $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$. **C** $5\sqrt{3}$. **D** $6\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y;z)$.

Ta có $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow 3MA=2MB\Leftrightarrow 9MA^2=4MB^2$

$\Leftrightarrow 9[(x+2)^2+(y-2)^2+(z+2)^2]=4[(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2]$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+12x-12y+12z=0$

$\Leftrightarrow (x+6)^2+(y-6)^2+(z+6)^2=108$.

Như vậy, điểm M thuộc mặt cầu (S) tâm $I(-6;6;-6)$ và bán kính $R=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$.

Do đó OM lớn nhất bằng $OI+R=\sqrt{(-6)^2+6^2+(-6)^2}+6\sqrt{3}=12\sqrt{3}$.

Chọn phương án A

Câu 64. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$. Bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$ bằng

A $\dfrac{2}{3+\sqrt{3}}$. **B** $\dfrac{4}{3+2\sqrt{3}}$. **C** $\dfrac{3}{6+2\sqrt{3}}$. **D** $\dfrac{5}{6+2\sqrt{3}}$.

Lời giải.

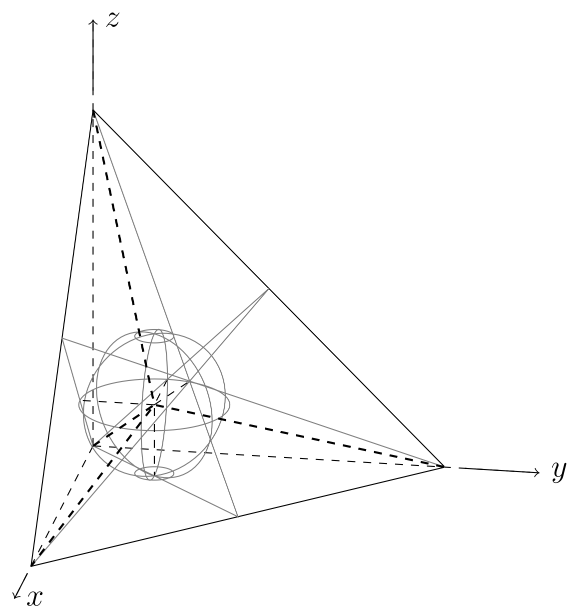
Nhóm: PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA

Áp dụng công thức

$$V=\frac{1}{3}\left(S_{\Delta ABC}+S_{\Delta OAB}+S_{\Delta OBC}+S_{\Delta OCA}\right)r,$$

ta suy ra

$$r=\frac{3V}{S_{\Delta ABC}+S_{\Delta OAB}+S_{\Delta OBC}+S_{\Delta OCA}}=\frac{2}{3+\sqrt{3}}.$$



Chọn phương án A

Câu 65. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A\,(2;0;0)$, $B\,(0;4;0)$, $C\,(0;0;6)$. Điểm M thay đổi trên mặt phẳng (ABC) và N là điểm trên tia OM sao cho $OM\cdot ON=12$. Biết rằng khi M thay đổi, điểm N luôn thuộc một mặt cầu cố định. Tính bán kính mặt cầu đó.

A $\frac{7}{2}$. **B** $3\sqrt{2}$. **C** $2\sqrt{3}$. **D** $\frac{5}{2}$.

Lời giải.

Do giả thiết phương trình mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1\Leftrightarrow 6x+3y+2z-12=0$.

Giả sử điểm $M\,(x_0;y_0;z_0)$ và $N\,(x_1;y_1;z_1)$ thỏa mãn bài toán.

Mà $OM\cdot ON=12\Leftrightarrow OM=\frac{12}{ON}\Leftrightarrow OM=\frac{12}{ON^2}\cdot ON$.

Vì N thuộc tia OM nên hai véc-tơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{ON}$ cùng chiều suy ra $\overrightarrow{OM}=\frac{12}{ON^2}\overrightarrow{ON}\quad(*)$.

Mà $\overrightarrow{OM}\,(x_0;y_0;z_0)$; $\overrightarrow{ON}\,(x_1;y_1;z_1)$ và $ON^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2$.

Từ $(*)$ suy ra $\begin{cases}x_0=\dfrac{12x_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\\ y_0=\dfrac{12y_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\\ z_0=\dfrac{12z_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\end{cases}$. Vì M thuộc phương trình mặt phẳng (ABC) nên

$$\begin{aligned}6x_0+3y_0+2z_0-12=0&\Leftrightarrow 6\frac{12x_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2}+3\frac{12y_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2}+2\frac{12z_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2}-12=0\\&\Leftrightarrow 6x_1+3y_1+2z_1=x_1^2+y_1^2+z_1^2\\&\Leftrightarrow (x_1-3)^2+\left(y_1-\frac{3}{2}\right)^2+(z_1-1)^2=\frac{49}{4}\end{aligned}$$

Do đó tập hợp điểm N thuộc mặt cầu $(S):\ (x-3)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+(z-1)^2=\frac{49}{4}$.

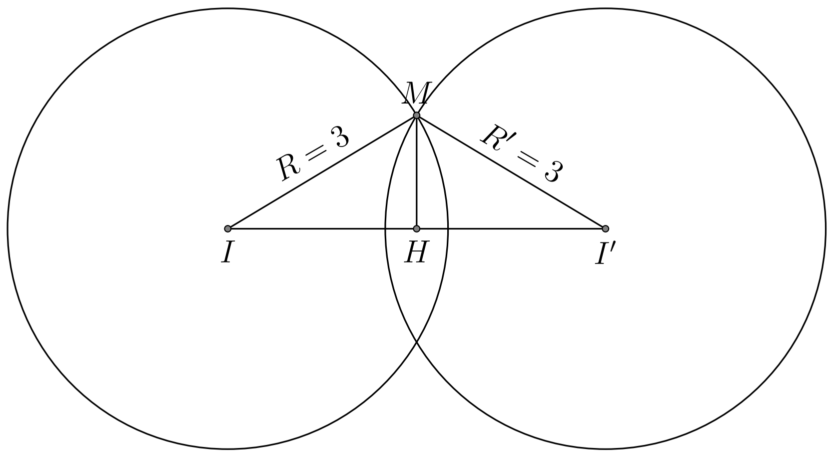
Gọi R là bán kính mặt cầu ta có $R=\frac{7}{2}$.

Chọn phương án A

Câu 66. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm M thuộc mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=9$ và ba điểm $A(1;0;0)$, $B(2;1;3)$, $C(0;2;-3)$. Biết rằng quỹ tích các điểm M thỏa mãn $MA^2+2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=8$ là đường tròn cố định, tính bán kính r đường tròn này.

A $r=\sqrt{3}$. **B** $r=6$. **C** $r=3$. **D** $r=\sqrt{6}$.

Lời giải.



Mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=9$ có tâm $I(3;3;2)$ và bán kính $R=3$.
Gọi $M(x;y;z)$ ta được $MA^2=x^2+y^2+z^2-2x+1$; $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=x^2+y^2+z^2-2x-3y-7$.
Ta có $MA^2+2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=8 \Leftrightarrow 3x^2+3y^2+3z^2-6x-6y-21=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2y-7=0$.
Suy ra M thuộc mặt cầu (S') có tâm $I'(1;1;0)$, bán kính $R'=3$ nên $M\in(S)\cap(S')$ là một đường tròn (C) có tâm H là trung điểm của đoạn II' (vì $R=R'=3$).
Vậy bán kính đường tròn (C) là $r=\sqrt{R^2-IH^2}=\sqrt{6}$.

Chọn phương án D

Câu 67. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$ và điểm $A(3;1;5)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua A và đôi một vuông góc với nhau, cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là ba đường tròn có chu vi lần lượt là p_1,p_2,p_3. Tính $T=p_1^2+p_2^2+p_3^2$.

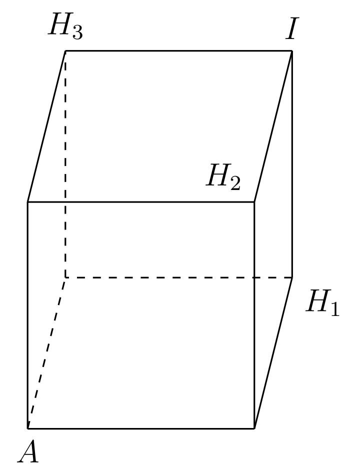
A $T=132\pi^2$. **B** $T=66\pi^2$. **C** $T=264\pi^2$. **D** $T=36\pi^2$.

Lời giải.

— (S) có tâm $I(1;2;3)$; $R=5$.
Gọi H_1; H_2; H_3 là hình chiếu của I đến 3 mặt phẳng đó.

— Ta có

I, H_1, H_2, H_3 và A tạo thành một hình hộp chữ nhật với đường chéo IA và các cạnh IH_1, IH_2, IH_3 như hình vẽ.
Từ đó $IH_1^2 + IH_2^2 + IH_3^2 = IA^2 = 9$.
Gọi r_1, r_2, r_3 là bán kính 3 đường tròn là giao tuyến của 3 mặt phẳng đó với mặt cầu. Ta có
$r_1^2 = R^2 - IH_1^2$; $r_2^2 = R^2 - IH_2^2$;
$r_3^2 = R^2 - IH_3^2$. Suy ra
$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 3R^2 - \left(IH_1^2 + IH_2^2 + IH_3^2\right)$
$= 66$.
Từ đó $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 4\pi^2\left(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2\right)$
$= 264\pi^2$.



Chọn phương án C

Câu 68. Trong không gian cới hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$ và điểm $I(2;-1;1)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho $\triangle IAB$ vuông tại I.

A $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 8$.

B $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = \dfrac{80}{9}$.

C $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 9$.

D $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 9$.

Lời giải.

Mặt cầu tâm I cắt đường thẳng d tại A, B nên A, $B \in d$.
Khi đó $A(2+2t;1+2t;-1-t)$, $B(2+2u;1+2u;-1-u)$ với $t \neq u$.
Suy ra $\overrightarrow{IA} = (2t;2+2t;-2-t)$, $\overrightarrow{IB} = (2u;2+2u;-2-u)$.
Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} = 0\,(\text{do}\,\triangle IAB\,\text{vuông}) \\ IA = IB\,(\text{do}\,I\,\text{là tâm hình cầu}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4tu + (2+2t)(2+2u) + (2+t)(2+u) = 0 \\ 4t^2 + (2+2t)^2 + (2+t)^2 = 4u^2 + (2+2u)^2 + (2+u^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9tu + 6u + 6t + 8 = 0 \\ 9t^2 + 12t = 9u^2 + 12u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9tu + 6u + 6t + 8 = 0 \\ (t-u)(9t+9u+12) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9tu + 6u + 6t + 8 = 0 \\ t = -u - \dfrac{4}{3}\,(\text{vì}\,t \neq u) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9u\left(-u - \dfrac{4}{3}\right) + 6\left(-u - \dfrac{4}{3}\right) + 6u + 8 = 0 \\ t = -u - \dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9u^2 - 12u = 0 \\ t = -u - \dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0;\ t = \dfrac{-4}{3} \\ u = -\dfrac{4}{3};\ t = 0. \end{array}\right.$$

Nhận xét A, B có vai trò như nhau nên ta chỉ cần xét trường hợp $u = 0; t = -\dfrac{4}{3}$. Khi đó $B(2;1;-1)$, $\overrightarrow{IB} = (0;2;-2)$.
Bán kính hình cầu là $R = IB = 2\sqrt{2}$. Vậy phương trình mặt cầu thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 8.$$

Chọn phương án A

Câu 69. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$ và điểm $A(-1;-1;1)$. Ba mặt phẳng thay đổi qua A và đôi một vuông góc với nhau cắt (S) theo ba đường tròn. Tính tổng diện tích của các hình tròn đó.

A 18π. **B** 17π. **C** 26π. **D** 11π.

Lời giải.

Vì tổng diện tích của ba đường tròn không đổi nên ta có thể chọn ba mặt phẳng đôi một vuông góc với nhau có phương trình là $x=-1$, $y=-1$ và $z=1$.

Mặt phẳng $x=-1$ cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn $(y+1)^2+(z-2)^2=9$ có bán kính $R_1=3$.

Mặt phẳng $y=-1$ cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn $(x+1)^2+(z-2)^2=9$ có bán kính $R_2=3$.

Mặt phẳng $z=1$ cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn $(x+1)^2+(y+1)^2=8$ có bán kính $R_3=2\sqrt{2}$.

Tổng diện tích của ba hình tròn là $\pi(R_1^2+R_2^2+R_3^2)=26\pi$.

Chọn phương án C

Câu 70. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1)\colon (x-1)^2+y^2+(z-1)^2=25$, $(S_2)\colon (x-2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. Tính phần thể tích V giới hạn bởi hai mặt cầu trên.

A $V=\dfrac{1127}{6}\pi$. **B** $V=\dfrac{1135}{6}\pi$. **C** $V=\dfrac{1127}{24}\pi$. **D** $V=\dfrac{1127}{12}\pi$.

Lời giải.

Mặt cầu S_1 có tâm $I(1;0;1)$ bán kính $R=5$.

Mặt cầu S_2 có tâm $I'(2;2;3)$ bán kính $R'=5$.

$\overrightarrow{II'}=(1;2;2)$, $II'=3$.

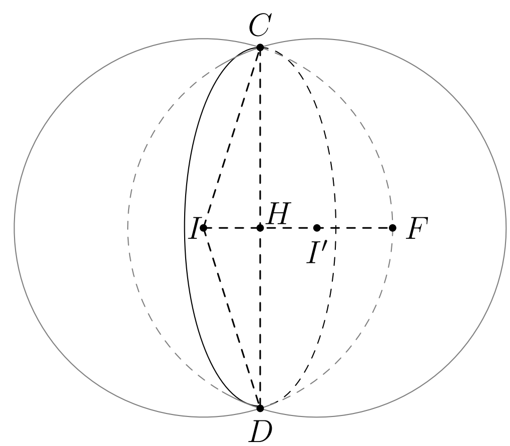
Giải sử ta có các điểm như hình vẽ.

Khi đó $h=HF=R-IH=R-\dfrac{1}{2}II'=\dfrac{7}{2}$.

Do hai mặt cầu có cùng bán kính nên phần giới hạn bởi hai mặt cầu là hai chỏm cầu có cùng thể tích.

Vậy thể tích giới hạn bởi hai mặt cầu là

$V=2\pi\cdot h^2\cdot\left(R-\dfrac{h}{3}\right)=\dfrac{1127}{12}\pi$.



Chọn phương án D

Câu 71. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2;2;1)$, $N\left(-\dfrac{8}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{8}{3}\right)$. Viết phương trình mặt cầu có tâm là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác OMN và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz).

A $(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=1$. **B** $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$.

C $x^2+(y+1)^2+(z+1)^2=1$. **D** $(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1$.

Lời giải.

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OMN.

Ta có: $OM=3$, $ON=4$, $MN=5$.

Áp dụng công thức: $\begin{cases} x_I = \dfrac{ON \cdot x_M + OM \cdot x_N + MN \cdot x_O}{OM + ON + MN} = 0 \\ y_I = \dfrac{ON \cdot y_M + OM \cdot y_N + MN \cdot y_O}{OM + ON + MN} = 1 \\ z_I = \dfrac{ON \cdot z_M + OM \cdot z_N + MN \cdot z_O}{OM + ON + MN} = 1 \end{cases} \Rightarrow I\,(0;1;1).$

Và $\mathrm{d}\,(I,(Oxz)) = 1$.

Vậy, phương trình mặt cầu cần lập : $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.

Chọn phương án B

Câu 72. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm $O(0;0;0)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C khác O thỏa mãn tam giác ABC có trọng tâm là điểm $G(2;4;8)$. Tọa độ tâm mặt cầu (S) là

A $(3;6;12)$. **B** $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{8}{3}\right)$. **C** $(1;2;3)$. **D** $\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{8}{3};\dfrac{16}{3}\right)$.

Lời giải.

Gọi $A(x_A;0;0), B(0;y_B;0), C(0;0;z_C)$. Do $G(2;4;8)$ là trọng tâm tam giác ABC nên $x_A = 6, y_B = 12$ và $z_C = 24$. Suy ra $A(6;0;0), B(0;12;0), C(0;0;24)$.

Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \quad (a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)$, trong đó $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu. Do (S) đi qua bốn điểm A, B, C, O nên ta có hệ

$$\begin{cases} d = 0 \\ 36 - 12a + d = 0 \\ 144 - 24b + d = 0 \\ 576 - 48c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a = 3 \\ b = 6 \\ c = 12 \end{cases} \Rightarrow I(3;6;12).$$

Chọn phương án A

Câu 73. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxy, có tất cả bao nhiêu số tự nhiên của tham số m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2(m-2)y - 2(m+3)z + 3m^2 + 7 = 0$ là phương trình của một mặt cầu.

A 2. **B** 3. **C** 4. **D** 5.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} a = 0 \\ b = m - 2 \\ c = -(m+3) \\ d = 3m^2 + 7. \end{cases}$

Phương trình trên là phương trình mặt cầu khi

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 \\ \Leftrightarrow\ & (m-2)^2 + (m+3)^2 - (3m^2 + 7) > 0 \\ \Leftrightarrow\ & -m^2 + 2m + 6 > 0 \\ \Leftrightarrow\ & 1 - \sqrt{7} < m < 1 + \sqrt{7}. \end{aligned}$$

Mà $m \in \mathbb{N} \Rightarrow m \in \{0, 1, 2, 3\}$.
Vậy có bốn giá trị số tự nhiên của m thỏa điều kiện đề bài.
Chọn phương án C

Câu 74. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2 = 16$ và điểm $A(1;2;3)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua A và đôi một vuông góc với nhau, cắt mặt cầu theo ba đường tròn. Tính tổng diện tích của ba hình tròn tương ứng đó.

A 10π. **B** 36π. **C** 38π. **D** 33π.

Lời giải.

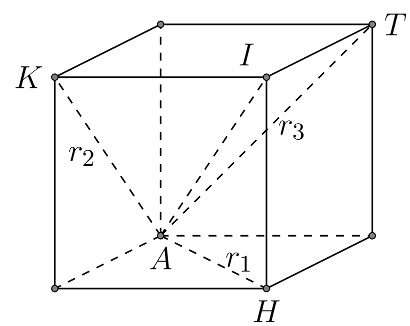
Vì tổng diện tích của ba hình tròn luôn không đổi, nên ta có thể chọn ba mặt phẳng đặc biệt đi qua A và đôi một vuông góc với nhau đó là mặt phẳng $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.
Giao điểm của (S) với mặt phẳng $x = 1$ là $(y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 16$.
Giao điểm của (S) với mặt phẳng $y = 2$ là $(x - 1)^2 + (z - 2)^2 = 16 - 9 = 7$.
Giao điểm của (S) với mặt phẳng $z = 3$ là $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 16 - 1 = 15$.
Vậy tổng diện tích của ba hình tròn là $\pi(16 + 7 + 15) = 38\pi$.
Chọn phương án C

Câu 75. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 16$ và điểm $A(1;2;3)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua A và đôi một vuông góc với nhau, cắt mặt cầu theo ba đường tròn. Tính tổng diện tích của ba đường tròn tương ứng đó.

A 33π. **B** 10π. **C** 38π. **D** 36π.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$ và bán kính $R = 4$.
Gọi r_1, r_2, r_3 lần lượt là bán kính ba đường tròn và H, K, T là hình chiếu của tâm I của mặt cầu (S) lên ba mặt phẳng tương ứng.
Khi đó, tổng diện tích của ba đường tròn tương ứng là



$$\begin{aligned} S &= \pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) = \pi\left[(R^2 - IH^2) + (R^2 - IK^2) + (R^2 - IT^2)\right] \\ &= \pi\left[3R^2 - (IH^2 + IK^2 + IT^2)\right] = \pi(3R^2 - IA^2) = 38\pi. \end{aligned}$$

Chọn phương án C

Câu 76. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;1;2)$, $B(1;-1;0)$, $C(0;2;1)$ và $D(1;0;-1)$. Có bao nhiêu mặt cầu đi qua cả bốn điểm A, B, C, D?

A 3. **B** 1. **C** 0. **D** Vô số.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;-2;-2)$, $\overrightarrow{AC} = (0;1;-1)$, $\overrightarrow{AD} = (1;-1;-3)$. Dễ thấy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ nên $ABCD$ là hình vuông. Vậy có vô số mặt cầu đi qua 4 điểm A, B, C, D.
Chọn phương án D

Câu 77. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1) :\ (x - 1)^2+(y + 2)^2+(z - 2)^2 = 25$, $(S_2) : x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z - 14 = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A (S_1) và (S_2) không cắt nhau .

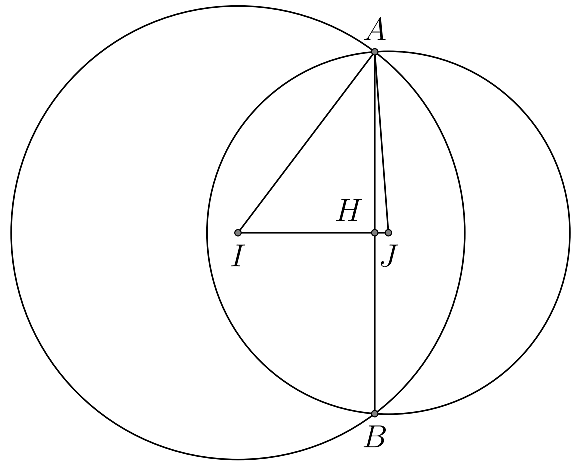
(B) (S_1) và (S_2) cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r = 1$.

(C) (S_1) và (S_2) cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r = \sqrt{\frac{76}{10}}$.

(D) (S_1) và (S_2) cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r = \frac{5\sqrt{77}}{11}$.

Lời giải.

Từ giả thiết: (S_1) có tâm $I = (1; -2; 2)$ và bán kính $R_1 = 5$.
(S_2) có tâm $J = (0; 1; 1)$ và bán kính $R_2 = 4$.
Khi đó $R_1 - R_2 = 1 < IJ = \sqrt{11} < R_1 + R_2 = 9$ nên hai mặt cầu cắt nhau theo một giao tuyến là đường tròn có tâm H và bán kính $r = \frac{AB}{2}$ và H nằm giữa IJ.
Khi đó $IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{25 - r^2}$ và
$JH = \sqrt{JA^2 - AH^2} = \sqrt{16 - r^2}$.
Do đó



$$\begin{aligned} & IH + JH = IJ \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{25 - r^2} + \sqrt{16 - r^2} = \sqrt{11} \\ \Rightarrow\ & \sqrt{25 - r^2} = \sqrt{11} - \sqrt{16 - r^2} \\ \Rightarrow\ & 25 - r^2 = 11 + 16 - r^2 - 2\sqrt{11\left(16 - r^2\right)} \\ \Rightarrow\ & \sqrt{11\left(16 - r^2\right)} = 1 \\ \Rightarrow\ & r = \frac{5\sqrt{77}}{11}. \end{aligned}$$

Vậy (S_1) và (S_2) cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r = \frac{5\sqrt{77}}{11}$.

Chọn phương án (D)

Câu 78. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 0; -1)$, $B(-3; -2; 1)$. Gọi $(\mathscr{S})$ là mặt cầu có tâm I thuộc mặt phẳng (Oxy), bán kính bằng $\sqrt{11}$ và đi qua hai điểm A, B. Biết I có tung độ âm, phương trình của $(\mathscr{S})$ là

(A) $x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 2 = 0$.
(B) $x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 7 = 0$.
(C) $x^2 + y^2 + z^2 + 4y + 7 = 0$.
(D) $x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 2 = 0$.

Lời giải.

Do mặt cầu $(\mathscr{S})$ đi qua A, B nên tâm I của mặt cầu thuộc mặt phẳng trung trực của AB.
Gọi (Q) là mặt phẳng trung trực của AB, ta có (Q) nhận $\overrightarrow{AB}(-4; -2; 2)$ là véc-tơ pháp tuyến và đi qua trung điểm $M(-1; -1; 0)$ của AB.
Phương trình của (Q) là $-4(x + 1) - 2(y + 1) + 2(z - 0) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - z + 3 = 0$.
Theo giả thiết $I \in (Oxy) \Rightarrow I$ thuộc giao tuyến Δ của (Q) và (Oxy).
Đặt $\vec{n} = (2; 1; -1)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$, ta có Δ nhận $\vec{u} = \left[\vec{n}; \vec{k}\right] = (1; -2; 0)$ là véc-tơ chỉ phương và đi qua $N(0; -3; 0)$.

Phương trình của Δ là

$$\begin{cases} x = t \\ y = -3 - 2t \\ z = 0 \end{cases}, (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow I(t; -3-2t; 0), (y_I = -3 - 2t < 0).$$

Ta có bán kính

$$\begin{aligned} R = IA = \sqrt{11} &\Leftrightarrow (t-1)^2 + (2t+3)^2 + 1 = 11 \\ &\Leftrightarrow 5t^2 + 10t = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \left(\text{thỏa mãn}\right) \\ t = -2\,(\text{loại}). \end{array}\right. \end{aligned}$$

Với $t = 0 \Rightarrow I(0; -3; 0) \Rightarrow (\mathscr{S}) : x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 2 = 0$.
Chọn phương án A

Câu 79. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 2; 0)$, $B(3; 2; -1)$, $C(-1; -4; 4)$. Tìm tập hợp tất cả các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 52$.

A Mặt cầu tâm $I(-1; 0; -1)$, bán kính $r = 2$.
B Mặt cầu tâm $I(-1; 0; -1)$, bán kính $r = \sqrt{2}$.
C Mặt cầu tâm $I(1; 0; 1)$, bán kính $r = \sqrt{2}$.
D Mặt cầu tâm $I(1; 0; 1)$, bán kính $r = 2$.

Lời giải.

Gọi $M(x; y; z)$. Khi đó

$$\begin{aligned} & MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x - 6z + 52 = 52 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2. \end{aligned}$$

Vậy M thuộc mặt cầu tâm $I(1; 0; 1)$, bán kính $r = \sqrt{2}$.
Chọn phương án C

Câu 80. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $A(0; 1; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$. Tập hợp các điểm $M(x; y; z)$ thỏa mãn $MA^2 = MB^2 + MC^2$ là mặt cầu có bán kính

A 2. **B** $\sqrt{2}$. **C** 3. **D** $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} MA^2 = MB^2 + MC^2 &\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-2)^2 + z^2 + x^2 + y^2 + (z-3)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm $M(x; y; z)$ thỏa mãn $MA^2 = MB^2 + MC^2$ là mặt cầu có bán kính $R = \sqrt{2}$.
Chọn phương án B

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. D	4. C	5. D	6. B	7. C	8. A	9. A	10. B
11. A	12. B	13. C	14. D	15. D	16. B	17. D	18. B	19. C	20. C
21. D	22. B	23. D	24. A	25. A	26. D	27. A	28. D	29. C	30. B
31. A	32. D	33. D	34. A	35. A	36. D	37. C	38. B	39. B	40. C
41. B	42. D	43. C	44. A	45. D	46. D	47. B	48. B	49. B	50. C
51. C	52. A	53. A	54. A	55. A	56. A	57. B	58. A	59. A	60. D
61. B	62. D	63. A	64. A	65. A	66. D	67. C	68. A	69. C	70. D
71. B	72. A	73. C	74. C	75. C	76. D	77. D	78. A	79. C	80. B

DẠNG 24. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2\,x + 3y + z + 2 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P) ?

(A) $\vec{n}_3 = (2;3;2)$. (B) $\vec{n}_1 = (2;3;0)$. . (C) $\vec{n}_2 = (2;3;1)$. (D) $\vec{n}_4 = (2;0;3)$.

Lời giải.

Vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_1 = (2;3;1)$.

Chọn phương án (C)

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 3 = 0$. Một véc tơ pháp tuyến của (P) có tọa độ là

(A) $(2;1;0)$. (B) $(2;-1;3)$. (C) $(2;-1;0)$. (D) $(2;1;3)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có VTPT là $\vec{n} = (2;-1;0)$.

Chọn phương án (C)

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P)\colon x + y - 2z + 4 = 0$. Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

(A) $\vec{n} = (1;1;-2)$. (B) $\vec{n} = (1;0;-2)$. (C) $\vec{n} = (1;-2;4)$. (D) $\vec{n} = (1;-1;2)$.

Lời giải.

Phương pháp: Mặt phẳng $(P)\colon Ax + By + Cz + D = 0$ nhận $\vec{n} = (A;B;C)$ là 1 vec-tơ pháp tuyến.

Cách giải: Một vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (1;1;-2)$.

Chọn phương án (A)

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 2017 = 0$, véc tơ nào trong các véc tơ được cho dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

(A) $\vec{n} = (4;\ -4;\ 2)$. (B) $\vec{n} = (1;\ -1;\ 4)$. (C) $\vec{n} = (1;\ -2;\ 2)$. (D) $\vec{n} = (-2;\ 2;\ 1)$.

Lời giải.

Ta có phương trình mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 2017 = 0$ nên một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\overrightarrow{n_{(P)}} = (2;-2;1)$.

Mặt khác $\vec{n} = (4;-4;2)$ cùng phương với $\overrightarrow{n_{(P)}}$.

Do đó véc tơ $\vec{n} = (4;-4;2)$ là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Chọn phương án (A)

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)\colon\ 2y - 3z + 1 = 0$?

(A) $\vec{u_1} = (2;0;-3)$. (B) $\vec{u_2} = (0;2;-3)$. (C) $\vec{u_3} = (2;-3;1)$. (D) $\vec{u_4} = (2;-3;0)$.

Lời giải.

$(P)\colon\ 2y - 3z + 1 = 0 \Rightarrow$véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (0;2;-3)$.

Chọn phương án (B)

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 3y + 4z - 5 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

A $\vec{n} = (2; -3; 4)$. **B** $\vec{n} = (2; 3; 4)$. **C** $\vec{n} = (2; 4; 5)$. **D** $\vec{n} = (2; -3; -5)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $ax + by + cz + d = 0$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b; c)$.

Mặt phẳng $(P): 2x - 3y + 4z - 5 = 0$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; -3; 4)$.

Chọn phương án (A)

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 6 = 0$. Điểm nào dưới đây **không** thuộc mặt phẳng (α)?

A $M(1; -1; 1)$. **B** $Q(3; 3; 0)$. **C** $N(2; 2; 2)$. **D** $P(1; 2; 3)$.

Lời giải.

Ta có $1 + (-1) + 1 - 6 \neq 0 \Rightarrow$ Tọa độ điểm M không thỏa mãn phương trình mặt phẳng (α) nên điểm M không thuộc mặt phẳng (α).

Chọn phương án (A)

Câu 7. Góc giữa 2 mặt phẳng (P): $8x - 4y - 8z - 11 = 0$ và (Q): $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 7 = 0$ bằng

A 90°. **B** 30°. **C** 45°. **D** 60°.

Lời giải.

- $\cos((P),(Q)) = \dfrac{|8 \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{2} - 8 \cdot 0|}{\sqrt{8^2 + (-4)^2 + (-8)^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
- Suy ra góc giữa (P) và (Q) bằng 45°.

Chọn phương án (C)

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng (P): $2x - y - 2z - 9 = 0, (Q)$: $x - y - 6 = 0$. Góc giữa hai mặt phẳng $(P), (Q)$ bằng

A 90°. **B** 30°. **C** 45°. **D** 60°.

Lời giải.

Phương pháp: $\vec{n_1}, \vec{n_2}$ lần lượt là 2 véc-tơ pháp tuyến của $(P), (Q)$, khi đó $\cos((P);(Q)) = \dfrac{|\vec{n_1}, \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\,|\vec{n_2}|}$.

Cách giải: (P): $2x - y - 2z - 9 = 0$ có 1 véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n_1} = (2; -1; -2)$.

(Q): $x - y - 6 = 0$ có 1 véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n_2} = (1; -1; 0)$.

$\cos((P);(Q)) = \dfrac{|\vec{n_1}, \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\,|\vec{n_2}|} = \dfrac{|2 \cdot 1 + (-1)(-1) + 0|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow ((P);(Q)) = 45^\circ$.

Chọn phương án (C)

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x - 2y + z + 5 = 0$. Tính khoảng cách từ điểm $M(-1; 2; -3)$ đến mặt phẳng (P).

A $\dfrac{4}{3}$. **B** $-\dfrac{4}{3}$. **C** $\dfrac{2}{3}$. **D** $\dfrac{4}{9}$.

Lời giải.

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là $\dfrac{|-2 - 4 - 3 + 5|}{\sqrt{9}} = \dfrac{4}{3}$.

Chọn phương án A

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách từ điểm $M(1;2;-3)$ đến mặt phẳng (P) : $x+2y-2z-2=0$.

A 3. **B** $\frac{11}{3}$. **C** $\frac{1}{3}$. **D** 1.

Lời giải.

$d\left(M;(P)\right)=\dfrac{|1+2\cdot 2-2\cdot(-3)-2|}{\sqrt{1^1+2^2+(-2)^2}}=3$

Chọn phương án A

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $O(0;0;0)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+y+2z-6=0$. Tính bán kính của (S).

A 1. **B** 3. **C** 2. **D** 6.

Lời giải.

Ta có bán kính của (S) là $R=d(O;(\alpha))=\dfrac{|2\cdot 0+0+2\cdot 0-6|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=2$.

Chọn phương án C

Câu 12. Cho hai mặt phẳng $(P)\colon -6x+my-2mz-m^2=0$ và $(Q)\colon 2x+y-2z+3=0$ (m là tham số). Tìm m để mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q).

A $m=\frac{5}{12}$. **B** $m=12$. **C** $m=\frac{12}{5}$. **D** $m=\frac{12}{7}$.

Lời giải.

Véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_P=(-6;m;-2m)$, véc-tơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_Q=(2;1;-2)$.
Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) khi và chỉ khi

$$\vec{n}_P\cdot\vec{n}_Q=0\Leftrightarrow -12+m+4m=0\Leftrightarrow m=\frac{12}{5}.$$

Chọn phương án C

Câu 13. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(2;-1;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y-2z+3=0$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P).

A $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+y+z-3=0$. **B** $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-3=0$.

C $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+y+z+1=0$. **D** $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+1=0$.

Lời giải.

Bán kính mặt cầu (S) là $R=\dfrac{|2+2+2+3|}{\sqrt{1+4+4}}=3$. Suy ra phương trình mặt cầu (S) là

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=9\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-3=0.$$

Chọn phương án B

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+y+mz-2=0$ và $(\beta)\colon x+ny+2z+8=0$. Tính $S=m+n$ để (α) song song với (β).

A $\frac{9}{2}$. **B** $\frac{17}{4}$. **C** $\frac{9}{4}$. **D** $\frac{5}{2}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;1;m)$ và mặt phẳng (β) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{m}=(1;n;2)$. Hai mặt phẳng này song song với nhau khi $\dfrac{2}{1}=\dfrac{1}{n}=\dfrac{m}{2}\neq\dfrac{-2}{8}\Leftrightarrow\begin{cases}m=4\\n=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

Suy ra $m+n=\dfrac{9}{2}$.

Chọn phương án A

Câu 15. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(2;1;-3)$, $B(0;-2;5)$ và $C(1;1;3)$. Diện tích hình bình hành $ABCD$ là

A. $2\sqrt{87}$. B. $\dfrac{\sqrt{349}}{2}$. C. $\sqrt{349}$. D. $\sqrt{87}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-2;-3;8), \overrightarrow{AC}=(-1;0;6)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-18;4;-3)$.

Suy ra: $S_{ABCD}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\sqrt{349}$.

Chọn phương án C

Câu 16. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba véc-tơ $\vec{a}=(-1;1;0)$, $\vec{b}=(1;1;0)$, $\vec{c}=(1;1;1)$. Tìm mệnh đề **đúng**.

A. Hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{c}$ cùng phương.
B. Hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.
C. Hai véc-tơ $\vec{b}$ và $\vec{c}$ không cùng phương.
D. $\vec{a}\cdot\vec{c}=1$.

Lời giải.

Ta có $\left[\vec{b},\vec{c}\right]=(1;-1;0)\neq\vec{0}$ nên hai véc-tơ $\vec{b}$ và $\vec{c}$ không cùng phương.

Chọn phương án C

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(1;2;1)$, $\vec{b}=(-1;1;2)$, $\vec{c}=(x;3x;x+2)$. Nếu 3 véc-tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng thì x bằng

A. -1. B. 1. C. -2. D. 2.

Lời giải.

Ta có $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(3;-3;3)$.

Ta có

$$\begin{aligned}&\vec{a},\vec{b},\vec{c}\text{ đồng phẳng}\\ \Leftrightarrow\ &\left[\vec{a},\vec{b}\right]\cdot\vec{c}=0\\ \Leftrightarrow\ &3\cdot x-3\cdot(3x)+3\cdot(x+2)=0\\ \Leftrightarrow\ &x=2.\end{aligned}$$

Chọn phương án D

Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$ có $A(0;1;-1), B(1;1;2), C(1;-1;0), D(0;0;1)$. Tính độ dài đường cao AH của tứ diện $ABCD$.

A. $3\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA}=(-1;0;-3)\,;\overrightarrow{BC}=(0;-2;-2)\,;\overrightarrow{BD}=(-1;-1;-1)$.
$\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]=(0;-2;-2)\Rightarrow\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\cdot\overrightarrow{BA}=6$.
$V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\cdot\overrightarrow{BA}\right|=\dfrac{1}{6}\cdot 6=1$ (đvdt)
Ta có $V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot AH\cdot S_{BCD}\Rightarrow AH=\dfrac{3V_{ABCD}}{S_{BCD}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.
Chọn phương án D

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;0),B(3;-1;1)$ và $C(1;1;1)$. Tính diện tích tam giác ABC.

(A) $S=1$. (B) $S=\sqrt{3}$. (C) $S=\dfrac{1}{2}$. (D) $\sqrt{2}$.

Lời giải.
Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(2;-3;1)\\ \overrightarrow{AC}=(0;-1;1)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-2;-2;-2)$.
Ta có $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\sqrt{3}$.
Chọn phương án B

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;2)$, $B(1;-1;-2)$, $C(-1;1;0)$, $D(-2;1;2)$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng

(A) $\dfrac{42}{3}$. (B) $\dfrac{14}{3}$. (C) $\dfrac{21}{3}$. (D) $\dfrac{7}{3}$.

Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-1;-4)$, $\overrightarrow{AC}=(-3;1;-2)$, $\overrightarrow{AD}=(-4;1;0)$.
$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=(6;10;-4)]$ và $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\cdot\overrightarrow{AD}=-14$.
suy ra, $V=\dfrac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\cdot\overrightarrow{AD}\right|=\dfrac{7}{3}$.
Chọn phương án D

B MỨC ĐỘ 2

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;3)$, $B(4;0;1)$, $C(-10;5;3)$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC)?

(A) $\overrightarrow{n_3}=(1;8;2)$. (B) $\overrightarrow{n_1}=(1;2;0)$. (C) $\overrightarrow{n_4}=(1;-2;2)$. (D) $\overrightarrow{n_2}=(1;2;2)$.

Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;1;-2),\overrightarrow{AC}=(-12;6;0)\Rightarrow[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=(12;24;24)=2\overrightarrow{n_2}$. Vậy mặt phẳng (ABC) nhận $\overrightarrow{n_2}=(1;2;2)$ là véc-tơ pháp tuyến.
Chọn phương án D

Câu 22. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(3;0;-1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta)\colon x-y+2z+1=0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (α)?

(A) $\overrightarrow{n_1}(1;7;3)$. (B) $\overrightarrow{n_2}(1;-7;3)$. (C) $\overrightarrow{n_3}(-1;-7;3)$. (D) $\overrightarrow{n_4}(1;-1;3)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (β) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-1;2)$. Mặt phẳng (α) qua A,B và vuông góc với (β) nên có một véc-tơ pháp tuyến là $\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}\right]=(-1;-7;-3)=-(1;7;3)$.

Chọn phương án A

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d)\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$. Mặt phẳng (P) vuông góc với (d) có véc-tơ pháp tuyến là

A $\vec{n}(1;2;3)$. **B** $\vec{n}(2;-1;2)$. **C** $\vec{n}(1;4;1)$. **D** $\vec{n}(2;1;2)$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng (d) là $\overrightarrow{u_d}=(2;-1;2)$.

Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng (d) nên có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{u_d}=(2;-1;2)$.

Vậy véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}(2;-1;2)$.

Chọn phương án B

Câu 24. Ba mặt phẳng $x+2y-z-6=0$, $2x-y+3z+13=0$, $3x-2y+3z+16=0$ cắt nhau tại điểm A. Tọa độ của A là

A $A(-1;2;-3)$. **B** $A(1;-2;3)$. **C** $A(-1;-2;3)$. **D** $A(1;2;3)$.

Lời giải.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}x+2y-z-6=0\\2x-y+3z+13=0\\3x-2y+3z+16=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=2\\z=-3\end{cases}\Rightarrow A(-1;2;-3)$.

Chọn phương án A

Câu 25. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $M(3;4;5)$ và mặt phẳng $(P): x-y+2z-3=0$. Hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (P) là

A $H(1;2;2)$. **B** $H(2;5;3)$. **C** $H(6;7;8)$. **D** $H(2;-3;-1)$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua $M(3;4;5)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình $\begin{cases}x=3+t\\y=4-t\\z=5+2t\end{cases}$

Gọi $H=\Delta\cap(P)\Rightarrow H(3+t;4-t;5+2t)$.

$H\in(P)\Rightarrow 3+t-(4-t)+2(5+2t)-3=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow H(2;5;3)$.

Chọn phương án B

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-1;4)$ và $B(2;3;-2)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua điểm nào dưới đây?

A $Q(2;2;1)$. **B** $M(1;1;-1)$. **C** $P(-2;1;0)$. **D** $N(5;-2;1)$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB, ta có $I(1;1;1)$.

$\overrightarrow{AB}=(2;4;-6)$.

Khi đó, mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua I và nhận $\vec{u}=(1;2;-3)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên có phương trình

$$(x-1)+2(y-1)-3(z-1)=0 \Leftrightarrow x+2y-3z=0.$$

Khi đó, điểm nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là $P(-2;1;0)$.
Chọn phương án C

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;7;-9)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y-3z-1=0$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (P).

A $(2;1;1)$. **B** $(4;0;1)$. **C** $(1;0;0)$. **D** $(-1;1;0)$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua M vuông góc với (P) có phương trình $\begin{cases} x=2+t \\ y=7+2t \\ z=-9-3t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên (P) thì $H=d\cap(P)$.
Xét phương trình: $2+t+2(7+2t)-3(-9-3t)-1=0 \Leftrightarrow 14t+42=0 \Leftrightarrow t=-3$.

Với $t=-3 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$. Vậy $H(-1;1;0)$.

Chọn phương án D

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1;2;-1)$ và cắt mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-1=0$ theo một đường tròn bán kính bằng $\sqrt{8}$ có phương trình

A $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$. **B** $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$.

C $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$. **D** $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$.

Lời giải.

Ta có $d(I,(P))=\dfrac{|2\cdot 1-2+2\cdot(-1)-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=1$. Bán kính mặt cầu $R=\sqrt{1^2+(\sqrt{8})^2}=3$. Do đó, phương trình mặt cầu tâm $I(1;2-1)$, bán kính $R=3$ là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$.
Chọn phương án C

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y+2z+6=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc tia Ox sao cho khoảng cách từ M đến (P) bằng 3.

A $M(0;0;21)$. **B** $M(3;0;0)$.

C $M(0;0;-15)$. **D** $M(0;0;3)\,, M(0;0;-15)$.

Lời giải.

Gọi $M(a;0;0)\in Ox$. Ta có $\mathrm{d}(M;(P))=3 \Leftrightarrow \dfrac{|a+6|}{3}=3 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x&=3 \\ x&=-15. \end{aligned}\right.$

Vậy có điểm $M(3;0;0)$.
Chọn phương án B

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;2;0)$, $B(2;0;0)$, $C(0;0;\sqrt{2})$ và $D(0;-2;0)$. Số đo góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) bằng

A 45°. **B** 30°. **C** 60°. **D** 90°.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-2;0)$, $\overrightarrow{AC}=(0;-2;\sqrt{2})$, $\overrightarrow{AD}=(0;4;0)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}-2 & 0\\ -2 & \sqrt{2}\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0 & 2\\ \sqrt{2} & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & -2\\ 0 & -2\end{vmatrix}\right)=\left(-2\sqrt{2};-2\sqrt{2};-4\right)$.

Suy ra mặt phẳng (ABC) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{ABC}=(1;1;\sqrt{2})$.

Ta có $\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=\left(\begin{vmatrix}-2 & \sqrt{2}\\ 4 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0 & -2\\ 0 & 4\end{vmatrix}\right)=\left(-4\sqrt{2};0;0\right)$.

Suy ra mặt phẳng (ACD) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{ACD}=(1;0;0)$.

Ta có $\cos((ABC),(ACD))=\dfrac{|\vec{n}_{ABC}\cdot\vec{n}_{ACD}|}{|\vec{n}_{ABC}|\cdot|\vec{n}_{ABC}|}=\dfrac{1}{2}$.

Chọn phương án C

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(2;-1;2)$. Biết rằng H là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P). Tính số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(Q)\colon x-y-11=0$.

A 60°. **B** 30°. **C** 45°. **D** 90°.

Lời giải.

Vì H là hình chiếu của O trên (P) nên $\vec{n}_{(P)}=\overrightarrow{OH}=(2;-1;2)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P).

$(Q)\colon x-y-11=0\Rightarrow\vec{n}_{(Q)}=(1;-1;0)$.

Ta có $\cos\left(\widehat{(P),(Q)}\right)=\left|\cos\left(\widehat{\vec{n}_{(P)},\vec{n}_{(Q)}}\right)\right|=\dfrac{|2\cdot1+(-1)\cdot(-1)+2\cdot0|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) là 45°.

Chọn phương án C

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$ khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y+2z-10=0$ và $(Q)\colon x+2y+2z-3=0$ bằng

A $\dfrac{8}{3}$. **B** $\dfrac{7}{3}$. **C** 3. **D** $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Dựa vào phương trình (P), (Q) có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;2;2)$ nên $(P)\parallel(Q)$.

Ta có $|\vec{n}|=\sqrt{1+2^2+2^2}=3$; $\mathrm{d}(O,(P))=\dfrac{10}{3}$; $\mathrm{d}(O,(Q))=\dfrac{3}{3}=1$,

suy ra $\mathrm{d}((P),(Q))=d(O,(P))-d(O,(Q))=\dfrac{7}{3}$.

Chọn phương án B

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$ khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y+2z-10=0$ và $(Q)\colon x+2y+2z-3=0$ bằng

A $\dfrac{8}{3}$. **B** $\dfrac{7}{3}$. **C** 3. **D** $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Xét thấy $(P)\parallel(Q)$.

Trên (P) lấy $M(0;0;5)$. Khi đó, khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là:

$$\mathrm{d}\left((P),(Q)\right)=\mathrm{d}\left(M,(Q)\right)=\frac{|0+2\cdot0+2\cdot5-3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{7}{3}.$$

Chọn phương án (B)

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+y-z+1=0$ và $(Q)\colon x-y+z-5=0$. Có bao nhiêu điểm M trên trục Oy thỏa mãn M cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q)?

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Vì $M\in Oy$ nên $M(0;y;0)$.

Ta có $\mathrm{d}(M;(P))=\dfrac{|y+1|}{\sqrt{3}}$ và $\mathrm{d}(M;(Q))=\dfrac{|-y-5|}{\sqrt{3}}$.

Theo giả thiết $\mathrm{d}(M;(P))=\mathrm{d}(M;(Q))\Leftrightarrow |y+1|=|-y-5|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y+1=-y-5\\ y+1=y=5\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=-3\\ 0y=4\,(\text{vô nghiệm})\end{array}\right.$

$\Rightarrow M(0;-3;0)$.

Vậy có 1 điểm M thỏa mãn bài.

Chọn phương án (B)

Câu 35. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;0;0)$, $N(0;-2;0)$, $P(0;0;1)$. Tính khoảng cách h từ gốc toạ độ O đến mặt phẳng (MNP).

A $h=\dfrac{1}{3}$. **B** $h=-\dfrac{1}{3}$. **C** $h=\dfrac{2}{3}$. **D** $h=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (MNP) viết theo đoạn chắn là $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{1}=1\Leftrightarrow 2x-y+2z-2=0$.

Khoảng cách từ gốc toạ độ $O(0;0;0)$ đến (MNP) là $h=\dfrac{|-2|}{\sqrt{4+1+4}}=\dfrac{2}{3}$.

Chọn phương án (C)

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, hãy tính p và q lần lượt là khoảng cách từ điểm $M(5;-2;0)$ đến mặt phẳng (Oxz) và mặt phẳng $(P)\colon 3x-4z+5=0$.

A $p=2$ và $q=3$. **B** $p=2$ và $q=4$. **C** $p=-2$ và $q=4$. **D** $p=5$ và $q=4$.

Lời giải.

Do mặt phẳng (Oxz) có phương trình $y=0$ nên $p=\mathrm{d}(M,(Oxz))=\dfrac{|-2|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}}=2$.

Do mặt phẳng (P) có phương trình $3x-4z+5=0$ nên $q=\mathrm{d}(M,(P))=\dfrac{|3\cdot 5-4\cdot 0+5|}{\sqrt{3^2+0^2+(-4)^2}}=4$.

Chọn phương án (B)

Câu 37. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+3y-z-1=0$ và $(\beta)\colon 4x+6y-mz-2=0$. Tìm m để hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau.

A Không tồn tại m. **B** $m=1$. **C** $m=2$. **D** $m=-2$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}=(2;3;-1)$.

Mặt phẳng (β) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}=(4;6;-m)$.

Để $(\alpha)\parallel(\beta)$ khi: $\dfrac{2}{4}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{-1}{-m}\neq\dfrac{-1}{-2}$. Không tồn tại m.

Chọn phương án (A)

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 19 = 0$ và mặt phẳng (P): $2x - y - 2z + m + 3 = 0$, với m là tham số. Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có chu vi 6π. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc T bằng:

(A) 4. (B) 24. (C) -20. (D) -16.

Lời giải.

Mặt cầu (S): $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 25$ có tâm $I(2;1;-1)$ và bán kính $R = 5$.

Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn có chu vi bằng 6π nên bán kính đường tròn bằng $r = 3$.

Do đó khoảng cách từ tâm I của mặt cầu đến mặt phẳng là $\mathrm{d}(I,(P)) = \sqrt{R^2 - r^2} = 4$

$$\Leftrightarrow \frac{|4-1+2+m+3|}{3} = 4 \Leftrightarrow |m+8| = 12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -20. \end{array}\right.$$

Vậy tổng giá trị của các phần tử thuộc T bằng -16.

Chọn phương án (D)

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-2=0$, mặt phẳng $(\alpha): x+4y+z-11=0$. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (α), (P) song song với giá của véc-tơ $\vec{v} = (1;6;2)$ và (P) tiếp xúc với (S). Lập phương trình mặt phẳng (P).

(A) $2x - y + 2z - 2 = 0$ và $x - 2y + z - 21 = 0$.

(B) $x - 2y + 2z + 3 = 0$ và $x - 2y + z - 21 = 0$.

(C) $2x - y + 2z + 3 = 0$ và $2x - y + 2z - 21 = 0$.

(D) $2x - y + 2z + 5 = 0$ và $2x - y + 2z - 2 = 0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-3;2)$ và bán kính $R = 4$.

Từ giả thiết suy ra $[\overrightarrow{n_1}, \vec{v}]$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P).

Ta có $[\overrightarrow{n_1}, \vec{v}] = (2;-1;2)$, suy ra (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (2;-1;2)$.

Vậy (P) có phương trình dạng $2x - y + 2z + m = 0$.

Do (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên $\mathrm{d}(I;(P)) = R \Rightarrow \dfrac{|2\cdot 1 + 3 + 2\cdot 2 + m|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = 4$.

Suy ra $|9+m| = 12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -21 \end{array}\right.$.

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán là $2x - y + 2z + 3 = 0$ và $2x - y + 2z - 21 = 0$.

Chọn phương án (C)

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$. Mặt phẳng (Oxy) cắt mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2 = 25$ theo thiết diện là đường tròn bán kính r bằng

(A) $r = 5$. (B) $r = 3$. (C) $r = 16$. (D) $r = 4$.

Lời giải.

Mặt cầu S có tâm $I(1;1;-3)$ và bán kính $R = 5$.

Khoảng cách từ tâm I đến mp (Oxy) bằng 3.

Suy ra, $r = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

Chọn phương án (D)

Câu 41. Cho tứ diện $ABCD$ có $A(0;1;-1), B(1;1;2), C(1;-1;0), D(0;0;1)$. Tính độ dài đường cao AH của hình chóp $A.BCD$.

50 DẠNG TOÁN PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA LẦN 2

(A) $3\sqrt{2}$. (B) $2\sqrt{2}$. (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (D) $\frac{3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA}(-1;0;-3);\overrightarrow{BC}(0;-2;-2);\overrightarrow{BD}(-1;-1;-1)$.

$\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]=(0;-2;-2)\Rightarrow\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\cdot\overrightarrow{BA}=6$.

$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\cdot\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\cdot\overrightarrow{BA}\right|=\frac{1}{6}\cdot 6=1$ (đvtt).

$S_{BCD}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{0^2+(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{2}$ (đvdt).

Ta có $V_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot AH\cdot S_{BCD}\Rightarrow AH=\frac{3V_{ABCD}}{S_{BCD}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn phương án (D)

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;0),B(3;-1;1)$ và $C(1;1;1)$. Tính diện tích tam giác ABC.

(A) $S=1$. (B) $S=\sqrt{3}$. (C) $S=\frac{1}{2}$. (D) $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(2;-3;1)\\ \overrightarrow{AC}=(0;-1;1)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-2;-2;-2)$.

Ta có $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\sqrt{3}$.

Chọn phương án (B)

C MỨC ĐỘ 3

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;3;2)$, mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+z-10=0$ và đường thẳng $d\colon\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$. Đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại hai điểm M,N sao cho A là trung điểm của đoạn MN. Biết $\vec{u}=(a;b;1)$ là một véctơ chỉ phương của Δ, giá trị của $a+b$ bằng

(A) 11. (B) -11. (C) 3. (D) -3.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $N(2t-2;t+1;1-t)\in d$ và A là trung điểm của đoạn MN.

Do đó, tọa độ điểm $M(4-2t;5-t;3+t)$.

Do $M\in(P)$ nên $2(4-2t)-(5-t)+(3+t)-10=0\Leftrightarrow t=-2$.

Suy ra tọa độ điểm $N(-6;-1;3)$ và $M(8;7;1)$. Suy ra $\overrightarrow{MN}=(-14;-8;2)$.

Vì $\vec{u}=(a;b;1)$ là một véctơ chỉ phương của Δ nên $\vec{u},\overrightarrow{MN}$ là 2 véctơ cùng phương.

Do đó ta có $\frac{a}{-14}=\frac{b}{-8}=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}a=-7\\ b=-4\end{cases}\Rightarrow a+b=-11$.

Chọn phương án (B)

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng $(P):x+y+z-6=0$ và cách đều các điểm $A(1;6;0),B(-2;2;-1),C(5;-1;3)$. Tích $a\cdot b\cdot c$ bằng

(A) 5. (B) 0. (C) -6. (D) 6.

Lời giải.

Do $M \in (P)$ và $MA^2 = MB^2 = MC^2$, nên ta được hệ

$$\begin{cases} a+b+c=6 \\ (a-1)^2+(b-6)^2+c^2=(a+2)^2+(b-2)^2+(c+1)^2 \\ (a-1)^2+(b-6)^2+c^2=(a-5)^2+(b+1)^2+(c-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=6 \\ 3a+4b+c=14 \\ 4a-7b+3c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=3. \end{cases}$$

Từ đó ta được $abc = 6$.

Chọn phương án D

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(-1;2;0)$, $B(0;0;-2)$, $C(1;0;1)$, $D(2;1;-1)$. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên đoạn BC và BD sao cho $2\dfrac{BC}{BM}+3\dfrac{BD}{BN}=10$ và $\dfrac{V_{ABMN}}{V_{ABCD}}=\dfrac{6}{25}$. Phương trình mặt phẳng (AMN) có dạng $ax+by+cz+32=0$. Tính $S=a-b+c$.

A $S=98$. **B** $S=26$. **C** $S=27$. **D** $S=97$.

Lời giải.

Đặt: $\dfrac{BC}{BM}=x$; $\dfrac{BD}{BN}=y \Rightarrow 2\dfrac{BC}{BM}+3\dfrac{BD}{BN}=10 \Leftrightarrow 2x+3y=10 \Leftrightarrow x=\dfrac{10-3y}{2}$.

Ta có: $\dfrac{V_{ABMN}}{V_{ABCD}}=\dfrac{6}{25} \Leftrightarrow \dfrac{BM}{BC}\cdot\dfrac{BN}{BD}=\dfrac{1}{xy}=\dfrac{6}{25} \Leftrightarrow \dfrac{10-3y}{2}\cdot y=\dfrac{25}{6} \Leftrightarrow y=\dfrac{5}{3} \Rightarrow x=\dfrac{5}{2}$.

Suy ra:

$$+\ \dfrac{BC}{BM}=\dfrac{5}{2} \Rightarrow 5\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{BC} \Rightarrow \begin{cases} x_M=\dfrac{2x_C+3x_B}{5} \\ y_M=\dfrac{2y_C+3y_B}{5} \\ z_M=\dfrac{2z_C+3z_B}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{2}{5};0;-\dfrac{4}{5}\right).$$

$$+\ \dfrac{BD}{BN}=\dfrac{5}{3} \Rightarrow 5\overrightarrow{BN}=3\overrightarrow{BD} \Rightarrow \begin{cases} x_N=\dfrac{3x_D+2x_B}{5} \\ y_N=\dfrac{3y_D+3y_B}{5} \\ z_N=\dfrac{3z_D+3z_B}{5} \end{cases} \Rightarrow N\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{3}{5};-\dfrac{7}{5}\right).$$

Thay A, M, N vào phương trình $ax+by+cz+32=0$ ta có $a=42$; $b=5$; $c=61 \Rightarrow S=98$.

Chọn phương án A

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;-1;3)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;-3)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-z-4=0$. Gọi $M(a,b,c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho biểu thức $T=|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S=a+b+c$.

A $S=3$. **B** $S=-1$. **C** $S=2$. **D** $S=1$.

Lời giải.

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Ta có

$$\overrightarrow{IA}=(1-x;-1-y;3-z) \Rightarrow 3\overrightarrow{IA}=(3-3x;-3-3y;9-3z).$$
$$\overrightarrow{IB}=(2-x;1-y;-z) \Rightarrow 2\overrightarrow{IB}=(4-2x;2-2y;-2z).$$

$\overrightarrow{IC}=(-3-x;-1-y;-3-z)$.

50 DẠNG TOÁN PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA LẦN 2

Khi đó $3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = (-2x - 4; -2y - 6; -2z + 6) = 0$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 4 = 0 \\ -2y - 6 = 0 \\ -2z + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \\ z = 3 \end{cases}$. Vậy $I(-2; -3; 3)$.

Ta có $T = \left|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = \left|3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})\right| = 2\left|\overrightarrow{MI}\right|$.

Suy ra $T_{\min} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MI}\right|_{\min}$ khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).

Đường thẳng MI đi qua $I(-2; -3; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình tham số là $MI : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -3 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$. Lấy $M(-2 + t; -3 + t; 3 - t) \in MI$.

Mặt khác $M \in (P) \Rightarrow (-2 + t) + (-3 + t) - (3 - t) - 4 = 0 \Rightarrow t = 4$.

Suy ra $M(2; 1; -1)$. Vậy $a + b + c = 2$.

Chọn phương án C

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(1; 2; -2)$. Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho H là trực tâm của $\triangle ABC$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

A $\dfrac{81\pi}{2}$. **B** $\dfrac{243\pi}{2}$. **C** 81π. **D** 243π.

Lời giải.

Gọi $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ lần lượt thuộc các trục tọa độ Ox, Oy, Oz.

Khi đó ta có phương trình mặt phẳng (α) đi qua các điểm A, B, C là $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

$H \in (\alpha) \Rightarrow \dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b} - \dfrac{2}{c} = 1 \quad (1)$.

Ta có: $\overrightarrow{AH} = (1 - a; 2; -2)$, $\overrightarrow{BC} = (0; -b; c)$, $\overrightarrow{BH} = (1; 2 - b; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (-a; 0; c)$.

Theo đề bài ta có H là trực tâm $\triangle ABC$, ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2b - 2c = 0 \\ -a - 2c = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2c \\ b = -c. \end{cases}$$

Thay vào (1) ta có $\dfrac{1}{-2c} + \dfrac{2}{-c} - \dfrac{2}{c} = 1 \Rightarrow -\dfrac{9}{2c} = 1 \Leftrightarrow c = -\dfrac{9}{2}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-2c=9 \\ b=-c=\dfrac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(9;0;0) \\ B\left(0;\dfrac{9}{2}0\right) \\ C\left(0;0;-\dfrac{9}{2}\right) \end{cases}.$$

Gọi $I\left(x_0;y_0;z_0\right)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp tứ giác $OABC$, ta có

$$\begin{cases} OI=LA \\ OI=IB \\ OI=IC \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2+y_0^2+z_0^2=\left(x_0-9\right)^2+y_0^2+z_0^2 \\ x_0^2+y_0^2+z_0^2=x_0^2+\left(y_0-\dfrac{9}{2}\right)^2+z_0^2 \\ x_0^2+y_0^2+z_0^2=x_0^2+y_0^2+\left(z_0+\dfrac{9}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2=\left(x_0-9\right)^2 \\ y_0^2=\left(y_0-\dfrac{9}{2}\right)^2 \\ z_0^2=\left(z_0+\dfrac{9}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-x_0+9 \\ y_0=-y_0+\dfrac{9}{2} \\ z_0=-z_0-\dfrac{9}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0=\dfrac{9}{2} \\ y_0=\dfrac{9}{4} \\ z_0=-\dfrac{9}{4}. \end{cases}$$

Suy ra $I\left(\dfrac{9}{2};\dfrac{9}{4};\dfrac{9}{4}\right)$, $R=OI=\dfrac{9\sqrt{6}}{4}$.

Vậy $S_{(I)}=4\pi R^2=4\pi\cdot\left(\dfrac{9\sqrt{6}}{4}\right)^2=\dfrac{243\pi}{2}$.

Chọn phương án B

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x-2y+z+6=0$ và điểm $A(2;-1;0)$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (α).

A $(-1;1;-1)$. **B** $(2;-2;3)$. **C** $(1;1;-1)$. **D** $(1;0;3)$.

Lời giải.

Gọi $H(a;b;c)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (α).

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AH} \parallel \vec{n}_{(\alpha)} \\ H\in(\alpha) \end{cases}$.

Hay: $\begin{cases} \dfrac{a-2}{3} = \dfrac{b+1}{-2} = \dfrac{c}{1}. \\ 3a - 2b + c + 6 = 0 \end{cases}$.

Giải hệ ta được tọa độ điểm $H(-1;1;-1)$.

Chọn phương án A

Câu 49. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;-1)$ và mặt phẳng (P): $x + y - z - 3 = 0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I nằm trên mặt phẳng P, đi qua điểm A và gốc tọa độ O sao cho diện tích tam giác OIA bằng $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$. Tính bán kính R của mặt cầu (S).

A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của OA. Ta có $OA = \sqrt{2}, OH = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, mặt khác

$$S_{OIA} = \frac{1}{2} OA \cdot IH \Rightarrow IH = \frac{2S_{OIA}}{OA} = \sqrt{\frac{17}{2}}.$$

Từ đó ta tính được bán kính mặt cầu là $R = OI = \sqrt{OH^2 + IH^2} = 3$.

Chọn phương án C

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;-2)$, $B(2;2;-4)$. Giả sử $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB. Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.

A. $T = 8$. B. $T = 2$. C. $T = 6$. D. $T = 14$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OA} = (0;2;-2)$, $\overrightarrow{OB} = (2;2;-4) \Rightarrow \left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right] = (-4;-4;-4)$.

Mặt phẳng (OAB) đi qua O và có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n} = -\dfrac{1}{4}\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right] = (1;1;1)$ nên có phương trình $x + y + z = 0$.

$\overrightarrow{AI} = (a; b-2; c+2)$, $\overrightarrow{BI} = (a-2; b-2; c+4)$, $\overrightarrow{OI} = (a;b;c)$.

Theo giả thiết $\begin{cases} AI = BI \\ AI = OI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + (c+2)^2 = (a-2)^2 + (c+4)^2 \\ (b-2)^2 + (c+2)^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 4 & (1) \\ -b + c = -2 & (2) \end{cases}$

Mặt khác $I \in (OAB) \Rightarrow a + b + c = 0$ (3).

Giải hệ gồm (1), (2) và (3) ta được $a = 2, b = 0, c = -2$.

Vậy $I(2;0;-2) \Rightarrow T = a^2 + b^2 + c^2 = 8$.

Chọn phương án A

Câu 51. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;1;2)$, $B(-3;-1;0)$ và mặt phẳng (P): $x + y + 3z - 14 = 0$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $\triangle MAB$ vuông tại M. Tính giá trị $a + b + 2c$.

A. 5. B. 12. C. 10. D. 11.

Lời giải.

- $\overrightarrow{MA} = (x-3; y-1; z-2)$, $\overrightarrow{MB} = (x+3; y+1; z)$.

Tam giác MAB vuông tại M nên $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 10 = 0$.

Do đó M thuộc mặt cầu (S) tâm $I(0;0;1)$ bán kính $R = \sqrt{11}$.

• Ta có $\mathrm{d}(I,(P)) = \dfrac{11}{\sqrt{11}} = \sqrt{11}$ nên (P) tiếp xúc với (S). Do đó điểm M là tiếp điểm của (P) và mặt cầu (S).

• Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với $(P) \Leftrightarrow \Delta\colon \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$.

Ta có $t + t + 3(1 + 3t) - 14 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ nên $M(1; 1; 4)$. Vậy $a + b + 2c = 10$.
Chọn phương án C

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $3x-6y-4z+36 = 0$. Gọi A, B, C lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (P) với các trục tọa độ Ox, Oy, Oz. Tính thể tích V của khối chóp $O.ABC$.

A. $V = 216$. B. $V = 108$. C. $V = 117$. D. $V = 234$.

Lời giải.
Ta có $(P)\colon 3x - 6y - 4z + 36 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{-12} + \dfrac{y}{6} + \dfrac{z}{9} = 1$.
(P) cắt các trục tọa độ tại $A(-12; 0; 0)$, $B(0; 6; 0)$ và $C(0; 0; 9)$.
Do OA, OB, OC đôi một vuông góc nên $V = \dfrac{1}{6} \cdot OA \cdot OB \cdot OC = \dfrac{1}{6} \cdot 12 \cdot 6 \cdot 9 = 108$.
Chọn phương án B

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 0; 1)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x + y + z - 2 = 0$. Điểm $M(a; b; c)$ nằm trên mặt phẳng (P) thỏa mãn $MA = MB = MC$. Tính $T = a + 2b + 3c$.

A. $T = 5$. B. $T = 3$. C. $T = 2$. D. $T = 4$.

Lời giải.
Ta có $M(a; b; c) \in (P) \Leftrightarrow a + b + c - 2 = 0 \quad (1)$

— $MA^2 = (a-2)^2 + (b-0)^2 + (c-1)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 4a - 2c + 5$.

— $MB^2 = (a-1)^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2a + 1$.

— $MC^2 = (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 2b - 2c + 3$.

Với $MA = MB$, ta có $a + c - 2 = 0 \quad (2)$
Với $MA = MC$, ta có $a - b - 1 = 0 \quad (3)$

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình $\begin{cases} a + b + c = 2 \\ a + c = 2 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1. \end{cases}$

Vậy $T = a + 2b + 3c = 4$.
Chọn phương án D

Câu 54. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x + y + z - 9 = 0$. Hỏi có bao nhiêu điểm $M(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng (P) với a, b, c là các số nguyên không âm.

A. 55. B. 45. C. 50. D. 60.

Lời giải.

Ta có $(P)\colon x+y+z-9=0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{9}+\dfrac{y}{9}+\dfrac{z}{9}=1$ nên mặt phẳng (P) đi qua các điểm $A(9;0;0)$, $B(0;9;0)$, $C(0;0;9)$.

Từ đó suy ra tất cả các điểm có toạ độ nguyên của mặt phẳng (P) đều nằm trong miền tam giác ABC.

Tam giác ABC đều có các cạnh bằng $9\sqrt{2}$, chiếu các điểm có toạ độ nguyên của hình tam giác ABC xuống mặt phẳng (Oxy) ta được các điểm có toạ độ nguyên của hình tam giác OAB. Mà số điểm có toạ độ nguyên của tam giác OAB bằng $1+2+...+10=55$.

Chọn phương án A

Câu 55. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;3;-2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất, mặt phẳng (P) cắt trục Oy tại điểm B. Tọa độ của điểm B là

A $B\left(0;\dfrac{14}{3};0\right)$. **B** $B\left(0;14;0\right)$. **C** $B\left(0;-14;0\right)$. **D** $B\left(0;-\dfrac{14}{3};0\right)$.

Lời giải.

Dễ thấy, $\mathrm{d}(O;(P))\le OM$, nên mặt phẳng (P) đi qua M, cách O một khoảng lớn nhất khi (P) nhận $\overrightarrow{OM}=(1;3;-2)$ làm véc-tơ pháp tuyến. Suy ra (P) có phương trình $x+3y-2z-14=0$. Do đó giao điểm của (P) với trục Oy là $B\left(0;\dfrac{14}{3};0\right)$.

Chọn phương án A

Câu 56. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;0;1)$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y+z-3=0$ sao cho $MA=MB=MC$.

A $M(2;0;-1)$. **B** $M(0;2;-1)$. **C** $M(1;-1;3)$. **D** $M(2;3;-7)$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y;z)$.

Ta có $\begin{cases} MA=MB=MC \\ M\in(P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} MA^2=MB^2 \\ MA^2=MC^2 \\ M\in(P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(x-2)^2+(y+2)^2+(z-1)^2 \\ x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(x+2)^2+y^2+(z-1)^2 \\ 2x+2y+z-3=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x+6y+2z=-4 \\ 4x+2y+2z=0 \\ 2x+2y+z-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=-7. \end{cases}$

Chọn phương án D

Câu 57. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y+z-8=0$ và ba điểm $A(0;-1;0)$, $B(2;3;0)$, $C(0;-5;2)$. Gọi $M(x_0;y_0;z_0)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA=MB=MC$. Tính $S=x_0+y_0+z_0$.

A -12. **B** -5. **C** 12. **D** 9.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} MA=MB \\ MA=MC \\ M\in(P) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2+(y_0+1)^2+z_0^2=(x_0-2)^2+(y_0-3)^2+z_0^2\\ x_0^2+(y_0+1)^2+z_0^2=x_0^2+(y_0+5)^2+(z_0-2)^2\\ x_0+2y_0+z_0-8=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_0+8y_0=12\\ -8y_0+4z_0=28\\ x_0+2y_0+z_0=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=5\\ y_0=-1\\ z_0=5.\end{cases}$$

$\Rightarrow S=5-1+5=9.$

Chọn phương án D

Câu 58. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;-3)$, $B(2;0;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x-8y+7z-1=0$ Điểm $C(a;b;c)$ là điểm nằm trên mặt phẳng (P), có hoành độ dương để tam giác ABC đều. Tính $a-b+3c$.

A -7. **B** -9. **C** -5. **D** -3.

Lời giải.

Gọi (Q) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB, ta có (Q) đi qua điểm $I(1;0;-2)$ là trung điểm của AB và nhận $\overrightarrow{IB}=(1;0;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên (Q) có phương trình là

$$1(x-1)+0(y-0)+1(z+2)=0 \Leftrightarrow x+z+1=0.$$

Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q). Khi đó d đi qua điểm $M(0;-1;-1)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=\left[\vec{n}_{(P)},\vec{n}_{(Q)}\right]=(2;-1;-2)$ nên d có phương trình là $\begin{cases} x=2t\\ y=-1-t\\ z=-1-2t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

Ta có $C\in d\Rightarrow C(2t;-1-t;-1-2t)$.

Tam giác ABC đều khi và chỉ khi $AB=AC$

$\Leftrightarrow \sqrt{(2t)^2+(-1-t)^2+(2-2t)^2}=2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 9t^2-6t-3=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\\ t=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right. \Rightarrow C(2;-2;-3).$

Vậy $a-b+3c=-5$.

Chọn phương án C

Câu 59. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;3;-2)$, $B(-3;7;-18)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+z+1=0$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (P) sao cho mặt phẳng $(ABM)\perp(P)$ và $MA^2+MB^2=246$. Tính $S=a+b+c$.

A 0. **B** -1. **C** 10. **D** 13.

Lời giải.

Từ giả thiết $(ABM)\perp(P)$ suy ra M thuộc d là hình chiếu của đường thẳng AB trên (P).

Véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}=\left[\vec{n}_P,\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}_P\right]\right]=(36;0;-72)=36(1;0;-2)$.

Đường thẳng qua A vuông góc với (P): $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$, cắt (P) tại $A'(1;2;-1)$.

Suy ra phương trình d: $\begin{cases} x=1+t\\ y=2\\ z=-1-2t.\end{cases}$

Gọi $M(1+t;2;-1-2t)$, theo bài ra ta có $MA^2+MB^2=246$ nên

$$(1+t+1)^2+(2-3)^2+(-1-2t+2)^2+(1+t+3)^2+(2-7)^2+(-1-2t+18)^2=246 \Leftrightarrow t=3.$$

Khi đó $M(4;2;-7)$, vậy $a+b+c=-1$.
Chọn phương án B

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết mặt phẳng $(P): ax+by+cz-1=0$ với $c<0$ đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(1;0;0)$ và tạo với mặt phẳng (yOz) một góc $60°$. Khi đó giá trị $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A $(0;3)$. **B** $(3;5)$. **C** $(5;8)$. **D** $(8;11)$.

Lời giải.
$A,B\in(P)\Rightarrow a=1,b=1$. Góc giữa (P) và (yOz) bằng $60°$ suy ra $\dfrac{1}{\sqrt{2+c^2}}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow c=-\sqrt{2}$.

Chọn phương án A

Câu 61. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;m)$. Để mặt phẳng (ABC) hợp với mặt phẳng (Oxy) một góc $60°$ thì giá trị của m là

A $m=\pm\dfrac{12}{5}$. **B** $m=\pm\dfrac{2}{5}$. **C** $m=\pm\sqrt{\dfrac{12}{5}}$. **D** $m=\pm\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.
Mặt phẳng Oxy có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$.
Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;2;0)$ và $\overrightarrow{AC}=(-1;0;m)$, suy ra véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(2m;m;2)$.
Theo bài ra ta có

$$\cos 60°=\frac{\left|\vec{k}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{k}|\cdot|\vec{n}|}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5m^2+4}=4\Leftrightarrow m^2=\frac{12}{5}\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{\frac{12}{5}}.$$

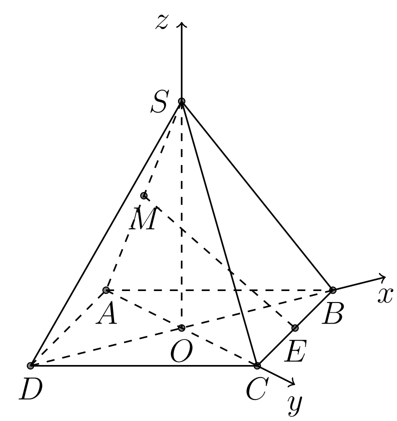
Chọn phương án C

Câu 62. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi E, M lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và SA, α là góc tạo bởi đường thẳng EM và mặt phẳng (SBD). Tính $\tan\alpha$.

A 1. **B** 2. **C** $\sqrt{2}$. **D** $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Không mất tính tổng quát, giả sử các cạnh của hình chóp bằng $2\sqrt{2}$.
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.
Khi đó: $E(1;1;0)$, $M(0;-1;1)$, $\overrightarrow{ME}=(1;2;-1)$ và $\overrightarrow{OC}=(0;2;0)$ là véc-tơ pháp tuyến của (SBD).
Do đó,



$$\sin\alpha=\sin\left(EM,(SBD)\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{EM},\overrightarrow{OC}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{OC}\right|}{\left|\overrightarrow{EM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OC}\right|}=\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Vậy $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\sqrt{2}$.

Chọn phương án C

Câu 63. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;\sqrt{3};0)$, $B(1;\sqrt{3};0)$, $C(0;0;\sqrt{3})$ và điểm M thuộc trục Oz sao cho hai mặt phẳng (MAB) và (ABC) vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và (OAB).

A 30°. B 60°. C 45°. D 15°.

Lời giải.

$M(0;0;m)$ thuộc trục Oz.
Ta có $\overrightarrow{AM}=(1;-\sqrt{3};m)$, $\overrightarrow{AB}=(2;0;0)$, $\overrightarrow{AC}=(1;-\sqrt{3};\sqrt{3})$.
$\Rightarrow \vec{n}_1=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(0;-2\sqrt{3};-2\sqrt{3})$, $\vec{n}_2=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right]=(0;-2m;-2\sqrt{3})$.
Mặt phẳng (ABC) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1$, mặt phẳng (MAB) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2$.
Hai mặt phẳng (MAB) và (ABC) vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$\vec{n}_1\perp\vec{n}_2\Leftrightarrow 0\cdot0+(-2\sqrt{3})\cdot(-2m)+(-2\sqrt{3})\cdot(-2\sqrt{3})=0\Leftrightarrow m=-\sqrt{3}.$$

Mặt phẳng (OAB) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_3=\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(0;0;-2\sqrt{3})$.
Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và (OAB). Khi đó

$$\cos\varphi=\left|\cos\left(\vec{n}_2,\vec{n}_3\right)\right|=\frac{|\vec{n}_2\cdot\vec{n}_3|}{|\vec{n}_2|\cdot|\vec{n}_3|}=\frac{12}{2\sqrt{6}\cdot2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và (OAB) là 45°.

Chọn phương án C

Câu 64. Trong không gian $Oxyz$, điểm M thuộc trục Oy và cách đều hai mặt phẳng $(P)\colon x+y-z+1=0$ và $(Q)\colon x-y+z-5=0$ có tọa độ là

A $M(0;-3;0)$. B $M(0;3;0)$. C $M(0;-2;0)$. D $M(0;1;0)$.

Lời giải.

Ta có $M\in Oy$ suy ra $M(0;m;0)$.
Theo đề $\mathrm{d}(M,(P))=\mathrm{d}(M,(Q))\Leftrightarrow\dfrac{|m+1|}{\sqrt{3}}=\dfrac{|-m-5|}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow m=-3$. Vậy $M(0;-3;0)$.

Chọn phương án A

Câu 65. Cho $A(1;-1;0)$ và mp(P): $2x-2y+z-1=0$. Điểm $M(a;b;c)\in$ mp(P) sao cho $MA\perp OA$ và đoạn AM bằng 3 lần khoảng cách từ A đến mp(P). Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $a+b+c=-3$. (B) $a+b+c=3$. (C) $a+b+c=5$. (D) $a+b+c=-5$.

Lời giải.

$$\begin{cases} M\in \text{mp}(P)\\ AM\perp OA\\ AM=3d(A,(P))\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-2b+c-1=0\\ 1(a-1)-1(b+1)+0(c-0)=0\\ \sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2+(c-0)^2}=3\cdot\dfrac{|2\cdot 1-2\cdot(-1)+0-1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-2b+c-1=0\\ a-b-2=0\\ (a-1)^2+(b+1)^2+c^2=9\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=a-2\\ c=-3\\ (a-1)^2+(a-2+1)^2+(-3)^2=9\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1\\ b=-1\\ c=-3.\end{cases}$$

Vậy $a+b+c=-3$.

Chọn phương án (A)

Câu 66. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A\left(-1;-2;1\right)$, $B\left(-4;2;-2\right)$, $C\left(-1;-1;-2\right)$, $D\left(-5;-5;2\right)$. Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng $\left(ABC\right)$.

(A) $d=\dfrac{20}{\sqrt{19}}$. (B) $d=\dfrac{18}{\sqrt{19}}$. (C) $d=3\sqrt{3}$. (D) $d=4\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;4;-3)$, $\overrightarrow{AC}=(0;1;-3)\Rightarrow[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=(-9;-9;-3)$.

Mặt phẳng (ABC) đi qua $A(-1;-2;1)$ và nhận $\overrightarrow{n}=(3;3;1)$ là véc-tơ pháp tuyến có phương trình tổng quát là $3x+3y+z+8=0$.

Khi đó $\mathrm{d}=\mathrm{d}(D,(ABC))=\dfrac{|-15-15+2+8|}{\sqrt{3^2+3^3+1^2}}=\dfrac{20}{\sqrt{19}}$.

Chọn phương án (A)

Câu 67. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$, $D(0;0;0)$. Hỏi có bao nhiêu điểm cách đều 4 mặt phẳng (ABC), (BCD), (CDA), (DAB).

(A) 4. (B) 5. (C) 1. (D) 8.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $x+y+z-1=0$.
Phương trình mặt phẳng (BCD) là: $x=0$.
Phương trình mặt phẳng (CDA) là: $y=0$.
Phương trình mặt phẳng (DAB) là: $z=0$.
Điểm $M(a;b;c)$ cách đều 4 mặt phẳng (ABC), (BCD), (CDA), (DAB) khi và chỉ khi

$$\begin{cases} d(M;(ABC))=d(M;(BCD)) \\ d(M;(CDA))=d(M;(BCD)) \\ d(M;(DAB))=d(M;(BCD)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|a+b+c-1|}{\sqrt{3}}=|a| \\ |b|=|a| \\ |c|=|a|. \end{cases}$$

Có các khả năng sau:

— $\begin{cases} b=a \\ c=a \\ |3a-1|=\sqrt{3}\,|a| \end{cases} \Leftrightarrow b=c=a=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{6}$.

— $\begin{cases} b=-a \\ c=-a \\ |-a-1|=\sqrt{3}\,|a| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=c=-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ a=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} b=c=-\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ a=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

— $\begin{cases} b=a \\ c=-a \\ |a-1|=\sqrt{3}\,|a| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ c=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ a=-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} b=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ c=-\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ a=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}. \end{cases}$

— $\begin{cases} b=-a \\ c=a \\ |a-1|=\sqrt{3}\,|a| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ c=-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ a=-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} b=-\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ c=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ a=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}. \end{cases}$

Như vậy, có 8 điểm cách đều 4 mặt phẳng (ABC), (BCD), (CDA), (DAB).
Chọn phương án D

Câu 68. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ và mặt phẳng $(P)\colon y-z+1=0$. Biết b, $c>0$, $(ABC)\perp(P)$ và $\mathrm{d}(O;(ABC))=\dfrac{1}{3}$. Tính $T=b+c$.

A $T=2$. **B** $T=1$. **C** $T=\dfrac{1}{2}$. **D** $T=\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.
Phương trình mặt phẳng (ABC) là $x+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1 \Leftrightarrow x+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}-1=0$.

Khoảng cách từ O đến (ABC) là $\dfrac{|-1|}{\sqrt{1+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=9 \Leftrightarrow \dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=8.$ (1)

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_P = (0;1;-1)$ và véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n} = \left(1; \dfrac{1}{b}; \dfrac{1}{c}\right)$. Vì $(ABC) \perp (P)$ nên $\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c} = 0 \Leftrightarrow b = c$. (2)

Thay (2) vào (1) ta được $\dfrac{2}{b^2} = 8 \Leftrightarrow b^2 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow b = \dfrac{1}{2}$ (do $b > 0$), suy ra $c = \dfrac{1}{2} \Rightarrow T = 1$.

Chọn phương án B

Câu 69. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+\sqrt{2})^2 = 9$ và hai điểm $A(-2;0;-2\sqrt{2})$, $B(-4;-4;0)$. Biết tập tất cả các điểm M thuộc (S) để $MA^2 + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MB} = 16$ là một đường tròn. Bán kính của đường tròn đó bằng

A $\sqrt{3}$. **B** $\sqrt{2}$. **C** $2\sqrt{2}$. **D** $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y;z) \in (S)$, ta có $\overrightarrow{AM} = (x+2; y; z+2\sqrt{2})$, $\overrightarrow{OM} = (x;y;z)$, $\overrightarrow{BM} = (x+4; y+4; z)$. Ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MB} = 16 &\Leftrightarrow MA^2 + \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BM} = 16 \\ &\Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 + (z+2\sqrt{2})^2 + x(x+4) + y(y+4) + z^2 = 16 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4y + 2\sqrt{2}z - 2 = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Ta lại có

$$\begin{aligned} M \in (S) &\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+\sqrt{2})^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2\sqrt{2}z - 2 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4y + 2\sqrt{2}z - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2\sqrt{2}z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0.$$

Vậy tập hợp tất cả các điểm M là đường tròn giao tuyến (C) của (S) và mặt phẳng $(P)\colon y = 0$.

Mặt cầu (S) có bán kính $R = 3$, tâm $I(-2;1;-\sqrt{2})$ nên $d\left[I,(P)\right] = 1$.

Suy ra đường tròn (C) có bán kính $r = \sqrt{R^2 - \left(d\left[I,(P)\right]\right)^2} = 2\sqrt{2}$.

Chọn phương án C

Câu 70. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu (S) tâm $I(5;-3;5)$, bán kính $R = 2\sqrt{5}$. Từ một điểm A thuộc mặt phẳng (P) kẻ một đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại B. Tính OA biết $AB = 4$.

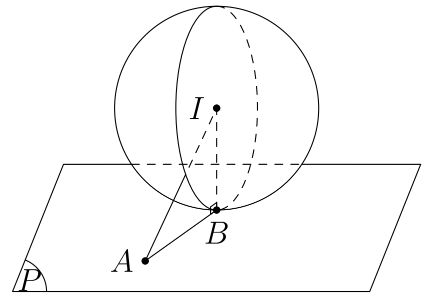
A $OA = \sqrt{11}$. **B** $OA = 5$. **C** $OA = 3$. **D** $OA = \sqrt{6}$.

Lời giải.

Nhóm: PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA

Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (P) là

$$\mathrm{d}[I,(P)] = \frac{|5-2\cdot(-3)+2\cdot 5-3|}{3} = 6.$$



Vì AB tiếp xúc với (S) tại B nên tam giác AIB vuông tại B, do đó ta có

$$IA = \sqrt{IB^2+AB^2} = \sqrt{R^2+AB^2} = 6 = \mathrm{d}[I,(P)].$$

Vậy, suy ra A là hình chiếu của điểm I lên mặt phẳng (P).

Đường thẳng IA đi qua $I(5;-3;5)$ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;-2;2)$ nên có phương trình là $\begin{cases} x = 5+t \\ y = -3-2t \\ z = 5+2t. \end{cases}$

Do $A = IA \cap (P)$ nên $5+t-2(-3-2t)+2(5+2t)-3=0 \Leftrightarrow t=-2$.

Vậy $A(3;1;1)$ nên $OA=\sqrt{11}$.

Chọn phương án A

Câu 71. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x-2y-z-4=0$. Mặt cầu tâm I tiếp xúc mặt phẳng (P) tại điểm H. Tìm tọa độ điểm H.

A $H(-3;0;-2)$. **B** $H(3;0;2)$. **C** $H(-1;4;4)$. **D** $H(-1;4;1)$.

Lời giải.

Ta có $I \notin (P)$. Mặt cầu tâm I tiếp xúc mặt phẳng (P) tại điểm $H \Leftrightarrow H$ là hình chiếu của I lên (P)

$\Leftrightarrow \begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{IH} = (x_H-1; y_H-2; z_H-3) \quad \text{cùng phương} \quad \vec{n}=(2;-2;-1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_H-2y_H-z_H-4=0 \\ \dfrac{x_H-1}{2} = \dfrac{y_H-2}{-2} = \dfrac{z_H-3}{-1} = t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 2t+1 \\ y_H = -2t+2 \\ z_H = -t+3 \\ 2(2t+1)-2(-2t+2)-(-t+3)-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ x_H=3 \\ y_H=0 \\ z_H=2. \end{cases}$

Vậy $H(3;0;2)$.

Chọn phương án B

Câu 72. Mặt cầu (S) có tâm là điểm $A(2;2;2)$, mặt phẳng $(P): 2x+2y+z+8=0$ cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là đường tròn có bán kính $r=8$. Diện tích của mặt cầu (S) là

A 20π. **B** 200π. **C** 10π. **D** 400π.

Lời giải.

Ta có $d(A,(P)) = \dfrac{|4+4+2+8|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = 6$, $R^2 = d^2(A,(P))+r^2 = 100$.

Vậy diện tích của mặt cầu (S) là $S = 4\pi R^2 = 400\pi$.
Chọn phương án D

D MỨC ĐỘ 4

Câu 73. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(\mathcal{S}): x^2+y^2+z^2-2x-2y+4z-1=0$ và mặt phẳng $(P): x+y-z-m=0$. Tìm tất cả m để (P) cắt $(\mathcal{S})$ theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính lớn nhất.

A $m=-4$. B $m=0$. C $m=4$. D $m=7$.

Lời giải.

Mặt cầu $(\mathcal{S})$ có tâm $I(1;1;-2)$. Để (P) cắt $(\mathcal{S})$ theo đường tròn có bán kính lớn nhất thì đó là đường tròn lớn. Suy ra $I \in (P) \Leftrightarrow m=4$.
Chọn phương án C

Câu 74. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;2;3)$, $B(0;1;1)$, $C(1;0;-2)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (P): $x+y+z+2=0$ sao cho giá trị của biểu thức $T=MA^2+2MB^2+3MC^2$ nhỏ nhất. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+b+c$ là

A -3. B 2. C -2. D 3.

Lời giải.

Nhận xét: Điểm M luôn tồn tại. Ta có $M \in (P)$ nên $a+b+c+2=0 \Leftrightarrow a+b+c=-2$.
Chọn phương án C

Câu 75. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;3)$, $B(-2;4;4)$, $C(4;0;5)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. M là điểm nằm trên mặt phẳng (Oxy) sao cho độ dài đoạn thẳng GM ngắn nhất. Tính độ dài đoạn thẳng GM.

A $GM=4$. B $GM=\sqrt{5}$. C $GM=1$. D $GM=\sqrt{2}$.

Lời giải.

G là trọng tâm của $\triangle ABC \Rightarrow G\left(\dfrac{1-2+4}{3};\dfrac{2+4+0}{3};\dfrac{3+4+5}{3}\right)=(1;2;4)$.
Mặt phẳng (Oxy) có phương trình $z=0$.
GM ngắn nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oxy). Khi đó, ta có

$$GM = \mathrm{d}\left(G,(Oxy)\right) = \frac{|4|}{\sqrt{1}} = 4.$$

Chọn phương án A

Câu 76. Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P): $x-2y-2z-2=0$ có phương trình là

A (S): $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3$. B (S): $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$.
C (S): $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$. D (S): $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$.

Lời giải.

Bán kính của mặt cầu (S) là

$$r=d(I,(P))=\frac{|-1-2\cdot 2-2\cdot 1-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=3.$$

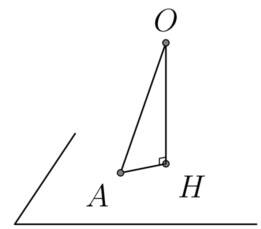
Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(S)\colon (x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$.
Chọn phương án D

Câu 77. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(a;b;c)$ với a, b, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Xét (P) là mặt phẳng thay đổi đi qua điểm A. Khoảng cách lớn nhất từ điểm O đến mặt phẳng (P) bằng

A $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **B** $2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **C** $3\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **D** $4\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Lời giải.

Xét (P) là một mặt phẳng đi qua A, gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (P).
Khi đó, ta có $\mathrm{d}(0,(P)) = OH \le OA = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.



Chọn phương án A

Câu 78. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x+2y-2z+2018=0$, $(Q): x+my+(m-1)z+2017=0$. Khi hai mặt phẳng (P) và (Q) tạo với nhau một góc nhỏ nhất thì điểm M nào dưới đây nằm trong (Q)?

A $M(-2017;1;1)$. **B** $M(2017;-1;1)$. **C** $M(-2017;1;-1)$. **D** $M(1;1;-2017)$.

Lời giải.

(P) có VTPT là $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;2;-2)$.
(Q) có VTPT là $\overrightarrow{n_{(Q)}}=(1;m;m-1)$.
Gọi α là góc giữa (P) và (Q).

$$\cos\alpha = \frac{|1+2m-2m+2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}.\sqrt{1^2+m^2+(m-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}} = \frac{1}{\sqrt{2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}}$$

Để α nhỏ nhất thì $\cos\alpha$ lớn nhất $\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$.
Khi đó $(Q): x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z+2017=0$. Khi đó (Q) đi qua $M(-2017;1;1)$.
Chọn phương án A

Câu 79. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-y+10=0$, một mặt phẳng (Q) đi qua điểm $A(1;1;1)$ vuông góc (P) và khoảng cách từ điểm $B(2;1;3)$ đến mặt phẳng (Q) bằng $\sqrt{3}$, mặt phẳng (Q) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm M, N, P sao cho thể tích của tứ diện $OMNP$ lớn hơn 1. Thể tích của tứ diện $OMNP$ bằng

A $\frac{5}{3}$. **B** $\frac{1331}{150}$. **C** $\frac{9}{2}$. **D** $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc (P) có phương trình $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=1 \end{cases}$, dễ thấy Δ là giao của hai mặt phẳng có phương trình lần lượt là $x+y-2=0$ và $z-1=0$. Mặt phẳng (Q) đi qua A và vuông góc (P) nên $\Delta \subset (Q)$, suy ra $(Q): a(x+y-2)+b(z-1)=0, (a^2+b^2 \ne 0)$.

$d(B,(Q)) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{|a+2b|}{\sqrt{2a^2+b^2}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{a}{b} = 1 \\ \dfrac{a}{b} = -\dfrac{1}{5} \end{array}\right.$.

$V_{OMNP} = \dfrac{1}{6} OM \cdot ON \cdot OP = \left|\dfrac{(2a+b)^3}{6a^2b}\right| = \left|\dfrac{\left(\dfrac{2a}{b}+1\right)^3}{6\left(\dfrac{a}{b}\right)^2}\right| = \dfrac{9}{2}$ khi $\dfrac{a}{b} = 1$.

Chọn phương án C

Câu 80. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, trong đó $a>0$, $b>0$, $c>0$ và $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=7$. Biết mặt phẳng (ABC) tiếp xúc với mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\dfrac{72}{7}$. Thể tích của khối tứ diện $OABC$ là

A $\dfrac{5}{6}$. **B** $\dfrac{3}{8}$. **C** $\dfrac{1}{6}$. **D** $\dfrac{2}{9}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (ABC) có phương trình là $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$. Mặt cầu (S) có tâm là $I(1;2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{\dfrac{72}{7}}$. Khi đó

$$\mathrm{d}(I,(ABC)) = \dfrac{\left|\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}} = \dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2} = \dfrac{7}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có:

$$49 = \left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}\right)^2 \le (1^2+2^2+3^2)\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right) = \dfrac{7}{2}\cdot 14 = 49.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=2b=3c$. Thay vào giả thiết ta có $a=2; b=1; c=\dfrac{2}{3}$.

Vì $OABC$ là tứ diện vuông tại O nên $V_{OABC}=\dfrac{abc}{6}=\dfrac{2}{9}$.

Chọn phương án D

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. A	3. A	4. B	5. A	6. A	7. C	8. C	9. A	10. A
11. C	12. C	13. B	14. A	15. C	16. C	17. D	18. D	19. B	20. D
21. D	22. A	23. B	24. A	25. B	26. C	27. D	28. C	29. B	30. C
31. C	32. B	33. B	34. B	35. C	36. B	37. A	38. D	39. C	40. D
41. D	42. B	43. B	44. D	45. A	46. C	47. B	48. A	49. C	50. A
51. C	52. B	53. D	54. A	55. A	56. D	57. D	58. C	59. B	60. A
61. C	62. C	63. C	64. A	65. A	66. A	67. D	68. B	69. C	70. A
71. B	72. D	73. C	74. C	75. A	76. D	77. A	78. A	79. C	80. D

DẠNG 25. TÌM CÁC YẾU TỐ ĐƯỜNG THẲNG

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$,cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

A $P(1;2;-1)$. **B** $M(-1;-2;1)$. **C** $N(2;3;-1)$. **D** $Q(-2;-3;1)$.

Lời giải.

Thay tọa độ điểm (P) vào phương trình đường thẳng d thấy tọa độ thỏa mãn nên đường thẳng d đi qua điểm $P(1;2;-1)$.

Chọn phương án A

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$. Véc-tơ nào trong các véc-tơ dưới đây không phải là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d?

A $\vec{u_4}=(1;2;1)$. **B** $\vec{u_3}=(-1;2;-1)$. **C** $\vec{u_2}=(2;-4;2)$. **D** $\vec{u_1}=(-3;6;-3)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có 1 véc-tơ chỉ phương là $\vec{u_2}=(1;-2;1)$. Do đó véc-tơ $\vec{u_4}=(1;2;1)$ không là véc-tơ chỉ phương của d.

Chọn phương án A

Câu 2. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng song song với trục Ox?

A $\vec{u}=(1;0)$. **B** $\vec{u}=(1;-1)$. **C** $\vec{u}=(1;1)$. **D** $\vec{u}=(0;1)$.

Lời giải.

Véc-tơ $\vec{i}=(1;0)$ là một véc-tơ chỉ phương của trục Ox. Do đó đường thẳng song song với trục Ox có một véc-tơ là $\vec{u}=(1;0)$.

Chọn phương án A

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): x+2z+3=0$. Một vec-tơ chỉ phương của Δ là

A $\vec{b}=(2;-1;0)$. **B** $\vec{v}=(1;2;3)$. **C** $\vec{a}=(1;0;2)$. **D** $\vec{u}=(2;0;-1)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có một vec-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;0;2)$.

Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α) nên có vec-tơ chỉ phương là $\vec{a}=\vec{n}=(1;0;2)$.

Chọn phương án C

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\begin{cases}x=2+2t\\y=-3t\\z=-3+5t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của d?

A $\vec{u}=(2;0;-3)$. **B** $\vec{u}=(2;-3;5)$. **C** $\vec{u}=(2;3;-5)$. **D** $\vec{u}=(2;0;5)$.

Nhóm: PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA

Lời giải.

Ta có $d\colon \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -3 + 5t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ suy ra véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (2; -3; 5)$.

Chọn phương án (B)

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 0)$ và $B(0; 1; 2)$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB?

(A) $\vec{a} = (-1; 0; -2)$. (B) $\vec{b} = (-1; 0; 2)$. (C) $\vec{c} = (1; 2; 2)$. (D) $\vec{d} = (-1; 1; 2)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 0; 2)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB.

Chọn phương án (B)

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$ đi qua điểm nào dưới đây?

(A) $M(1; 3; -1)$. (B) $M(-3; 5; 3)$. (C) $M(3; 5; 3)$. (D) $M(1; 2; -3)$.

Lời giải.

Nếu một điểm nằm trên một đường thẳng thì khi thay tọa độ điểm đó vào phương trình đường thẳng thì sẽ thỏa mãn phương trình đường thẳng.

Lần lượt thay tọa độ M từ các phương án vào phương trình đường thẳng d ta được $M(-3; 5; 3)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án (B)

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$?

(A) $Q(-2; 1; -3)$. (B) $P(2; -1; 3)$. (C) $M(-1; 1; 2)$. (D) $N(1; -1; 2)$.

Lời giải.

Dựa vào phương trình đường thẳng ta thấy đường thẳng đã cho đi qua điểm $N(1; -1; 2)$.

Chọn phương án (D)

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{-4}$. Điểm nào sau đây không thuộc đường thẳng d?

(A) $Q(-2; -4; 7)$. (B) $N(4; 0; -1)$. (C) $M(1; -2; 3)$. (D) $P(7; 2; 1)$.

Lời giải.

Ta thay lần lượt tọa độ các điểm vào phương trình đường thẳng d, điểm nào có tọa độ không thỏa mãn phương trình đường thẳng d là điểm cần tìm.

a) Điểm $Q(-2; -4; 7)$: $\dfrac{-2-1}{3} = \dfrac{-4+2}{2} = \dfrac{7-3}{-4} = -1 \Rightarrow Q \in d$.

b) Điểm $N(4; 0; -1)$: $\dfrac{4-1}{3} = \dfrac{0+2}{2} = \dfrac{-1-3}{-4} = 1 \Rightarrow N \in d$.

c) Điểm $M(1;-2;3)$: $\dfrac{1-1}{3}=\dfrac{-2+2}{2}=\dfrac{3-3}{-4}=0\Rightarrow M\in d$.

d) Điểm $P(7;2;1)$: $\dfrac{7-1}{3}=\dfrac{2+2}{2}=\dfrac{1-3}{-4}\Rightarrow$ Vô lí$\Rightarrow P\notin d$.

Chọn phương án D

Câu 9. Đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{-1}$ **không** đi qua điểm nào dưới đây?

A $A(-1;2;0)$. **B** $(-1;-3;1)$. **C** $(3;-1;-1)$. **D** $(1;-2;0)$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{-1-1}{2}\neq\dfrac{2+2}{1}\neq\dfrac{0}{-1}$ nên điểm $A(-1;2;0)$ không thuộc đường thẳng Δ.

Chọn phương án A

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\begin{cases}x=1\\ y=2+3t\\ z=5-t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

Đường thẳng d đi qua điểm nào dưới đây?

A $M_1(1;5;4)$. **B** $M_2(-1;-2;-5)$. **C** $M_3(0;3;-1)$. **D** $M_4(1;2;-5)$.

Lời giải.

Với $t=1$ ta có một điểm thuộc d là $(1;5;4)$.

Chọn phương án A

Câu 11. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$. Điểm M nằm trên Δ thì tọa độ của M có dạng nào sau đây?

A $M(a+x_0t;b+y_0t;c+z_0t)$. **B** $M(at;bt;ct)$.

C $M(x_0+at;y_0+bt;z_0+ct)$. **D** $M(x_0t;y_0t;z_0t)$.

Lời giải.

Phương trình tham số của Δ là $\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+at\end{cases}$. Do đó tọa độ điểm có dạng $M(x_0+at;y_0+bt;z_0+ct)$.

Chọn phương án C

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x-y+2z=0$. Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) bằng

A 30°. **B** 60°. **C** 150°. **D** 120°.

Lời giải.

Δ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;2;-1)$.

(α) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-1;2)$.

$\sin\widehat{(\Delta,(\alpha))}=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{|1\cdot 1+2\cdot(-1)+(-1)\cdot 2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $\widehat{(\Delta,(\alpha))}=30^\circ$.

Chọn phương án A

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $C(0;2;0)$, $A'(0;0;2)$. Góc giữa BC' và $A'C$ bằng

(A) 90°. (B) 60°. (C) 30°. (D) 45°.

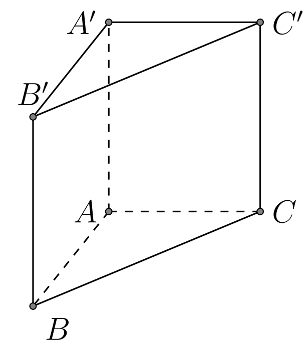
Lời giải.

Từ hình ta có thể suy ra các điểm còn lại của lăng trụ là $B'(2;0;2), C'(0;2;2)$.

Ta có $\overrightarrow{BC'} = (-2;2;2), \overrightarrow{A'C} = (0;2;-2)$

Và: $\overrightarrow{BC'} \cdot \overrightarrow{A'C} = 0$.

Vậy $BC' \perp AC'$



Chọn phương án (A)

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{-2}$. Tính khoảng cách từ A đến đường thẳng d.

(A) $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$. (B) $\sqrt{5}$. (C) $2\sqrt{5}$. (D) $3\sqrt{5}$.

Lời giải.

Gọi $M(1;2;3) \in d \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (-1;1;2) \Rightarrow [\overrightarrow{AM};\vec{u}] = (-6;0;-3)$.

Ta có $\mathrm{d}(A;d) = \dfrac{|[\overrightarrow{AM};\vec{u}]|}{|\vec{u}|} = \dfrac{3\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}$.

Chọn phương án (B)

Câu 15. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-5}{4}$ và mặt phẳng $(P)\colon x - 3y + 2z - 5 = 0$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

(A) d cắt và không vuông góc với (P). (B) d vuông góc với (P).
(C) d song song với (P). (D) d nằm trong (P).

Lời giải.

d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;-3;4)$, (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;-3;2)$.

Do $\vec{u}$ không cùng phương $\vec{n}$ nên d cắt (P). Mặt khác $\vec{u} \cdot \vec{n} = 19 \neq 0$ nên d không vuông góc (P).

Vậy d cắt và không vuông góc với (P).

Chọn phương án (A)

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon x - y + 2z = 1$. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào vuông góc với (α).

(A) $d_1\colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$. (B) $d_3\colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{-1}$.

(C) $d_2\colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{-1}$. (D) $d_4\colon \begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(\alpha)\colon x - y + 2z = 1$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}_{(\alpha)} = (1; -1; 2)$.
Đường thẳng d_1 có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}_{d_1} = (1; -1; 2) = \overrightarrow{n}_{(\alpha)}$. Suy ra $d_1 \perp (\alpha)$.
Chọn phương án A

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tọa độ giao điểm M của đường thẳng $d\colon \dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x + 5y - z - 2 = 0$ là

A $M(0; 2; 3)$. **B** $M(0; 0; -2)$. **C** $M(0; 0; 2)$. **D** $M(0; -2; -3)$.

Lời giải.

Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \quad (t \in \mathbb{R}). \\ z = 1 + t \end{cases}$

Tọa độ giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) ứng với t là nghiệm phương trình

$$3 \cdot (12 + 4t) + 5 \cdot (9 + 3t) - (1 + t) - 2 = 0 \Leftrightarrow t = -3.$$

Do đó, tọa độ giao điểm cần tìm là $M(0; 0; -2)$.
Chọn phương án B

B MỨC ĐỘ 2

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 1; 0)$, $C(1; 3; 2)$. Đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC nhận véc-tơ nào dưới đây làm một véc-tơ chỉ phương?

A $\overrightarrow{a} = (1; 1; 0)$. **B** $\overrightarrow{c} = (-1; 2; 1)$. **C** $\overrightarrow{b} = (-2; 2; 2)$. **D** $\overrightarrow{d} = (-1; 1; 0)$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC, suy ra tọa độ điểm $M(0; 2; 1)$.
Đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AM} = (-1; 1; 0)$.
Chọn phương án D

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-7}{1} = \dfrac{z-3}{4}$ và d_2 là giao tuyến của hai mặt phẳng $2x + 3y - 9 = 0, y + 2z + 5 = 0$. Vị trí tương đối của hai đường thẳng là

A song song. **B** chéo nhau. **C** cắt nhau. **D** trùng nhau.

Lời giải.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y - 9 = 0 \\ y + 2z + 5 = 0 \end{cases}$.

Cho $y = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ z = -3 \end{cases} \Rightarrow A\,(3; 1; -3) \in d_2$

Cho $y = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -4 \end{cases} \Rightarrow B\,(0; 3; -4) \in d_2$

Đường thẳng d_1 đi qua $M\,(1; 7; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}\,(2; 1; 4)$

Đường thẳng d_2 đi qua $A\,(3;1;-3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}\,(-3;2;-1)=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AM}\,(2;-6;-6)$
Ta có $[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]=(-9;-10;7)\Rightarrow[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]\,\overrightarrow{AM}=-2.9+6.10-6.7=0$.
Do đó d_1 và d_2 cắt nhau.
Chọn phương án C

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 3x-2y+2z-5=0$, $(Q): 4x+5y-z+1=0$. Các điểm A,B phân biệt thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q). Khi đó $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với véc-tơ nào sau đây?

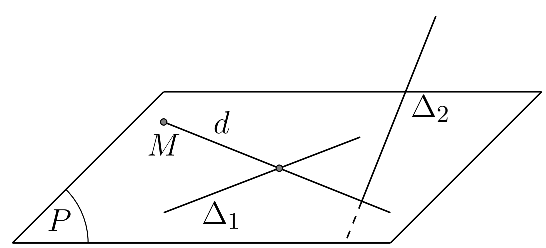
A $\vec{w}=(3;-2;2)$. **B** $\vec{v}=(-8;11;-23)$. **C** $\vec{k}=(4;5;-1)$. **D** $\vec{u}=(8;-11;-23)$.

Lời giải.
Ta có $\vec{n}=(3;-2;2)$ và $\overrightarrow{n'}=(4;5;-1)$ lần lượt là các véc-tơ pháp tuyến của các mặt phẳng $(P),(Q)$.
Do đó $\left[\vec{n},\overrightarrow{n'}\right]=(-8;11;23)$ là một véc-tơ chỉ phương của giao tuyến của (P) và (Q).
Từ đó suy ra $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với véc-tơ $\vec{u}=(8;-11;-23)$.
Chọn phương án D

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $\Delta_1\colon \begin{cases} x=3+t \\ y=1+t \\ z=1+2t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$; $\Delta_2\colon \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z}{-1}$ và điểm $M(0;3;0)$. Đường thẳng d đi qua M, cắt Δ_1 và vuông góc với Δ_2 có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(4;a;b)$. Tính $T=a+b$

A $T=-2$. **B** $T=4$. **C** $T=-4$. **D** $T=2$.

Lời giải.
Gọi (P) là mặt phẳng chứa M và Δ_1.
Lấy $A(3;1;1)\in\Delta_1$.
Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến vuông góc với các véc-tơ $\overrightarrow{MA}=(3;-2;1)$ và $\vec{u}_{\Delta_1}=(1;1;2)$.
Ta có $\left[\overrightarrow{MA},\vec{u}_{\Delta_1}\right]=(-5;-5;5)$.



Một trong các véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_{(P)}=(1;1;-1)$.
Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) và vuông góc với Δ_2 có $\vec{u}_d=\left[\vec{n}_{(P)},\vec{u}_{\Delta_2}\right]=(4;-1;3)$.
Vậy $a=-1; b=3\Rightarrow T=a+b=2$.
Chọn phương án D

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-3}$. Hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (Oyz) là một đường thẳng có véc-tơ chỉ phương là

A $\vec{u}=(0;1;3)$. **B** $\vec{u}=(0;1;-3)$. **C** $\vec{u}=(2;1;-3)$. **D** $\vec{u}=(2;0;0)$.

Lời giải.
Chọn $A(-3;1;1), B(-1;2;-2)$ thuộc d, ta có các điểm $A'(0;1;1)$, $B'(0;2;-2)$ là hình chiếu vuông góc của A,B trên mặt phẳng (Oyz), khi đó $\vec{u}=\overrightarrow{A'B'}=(0;1;-3)$.
Chọn phương án B

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có điểm $C(3;2;3)$, đường cao qua A, B lần lượt là $d_1\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$; $d_2\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-4}{1}$. Hoành độ điểm B bằng

A 3. **B** 2. **C** 5. **D** 1.

Lời giải.

Do d_1 là đường cao của tam giác ABC xuất phát từ đỉnh A nên $d_1 \perp BC$.

Gọi (P) là mặt phẳng qua C và vuông góc với d_1 thì $BC \subset (P)$.

Véc-tơ pháp tuyến của mp(P) là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d_1 suy ra $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{u_{d_1}}=(1;1-2)$.

Mà $C(3;2;3)\in(P) \Rightarrow$ phương trình mp(P) là $x+y-2z+1=0$.

Ta có $B\in d_2$ và $B\in BC\subset(P)$ nên $B=d_2\cap(P)$.

$B\in d_2 \Rightarrow B(2+t;2-2t;4+t)$ mà $B\in(P)\Rightarrow (2+t)+(2-2t)-2(4+t)+1=0 \Leftrightarrow -3t-3=0\Leftrightarrow t=-1$.

Vậy $B(1;4;3)$.

Chọn phương án D

Câu 24. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;2)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-5}{1}$. Tìm tọa độ điểm B đối xứng với A qua d.

A $B(-3;4;-4)$. **B** $B(2;-1;3)$. **C** $B(3;4;-4)$. **D** $B(3;-4;4)$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của A trên d, khi đó $H(6+2t;1+t;5+t)\in d \Rightarrow \overrightarrow{AH}=(5+2t;t-1;t+3)$

Ta có $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{u_d}=0 \Leftrightarrow 6t+12=0\Rightarrow t=-2\Rightarrow H=(2;-1;3)\Rightarrow B=(3;-4;4)$ (H trung điểm AB).

Chọn phương án D

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y-3z-12=0$ và đường thẳng d có phương trình $d\colon \dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y+10}{4}=\dfrac{z-4}{-2}$. Toạ độ giao điểm M của đường thẳng d với mặt phẳng (P) là

A $M(2;2;-2)$. **B** $M(-7;-10;4)$. **C** $M(1;2;-3)$. **D** $M(2;-1;-3)$.

Lời giải.

Toạ của d và (P) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x=-7+3t & (1)\\ y=-10+4t & (2)\\ z=4-2t & (3)\\ x+2y-3z-12=0 & (4)\end{cases}$$

Thay (1), (2), (3) vào (4) ta được $t=3$.

Vậy $M(2;2;-2)$ là giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (P).

Chọn phương án A

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} 6-4t\\ -2-t\\ -1+2t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Hình chiếu của A trên d có tọa độ là

A $(-2;3;1)$. **B** $(2;-3;1)$. **C** $(2;3;1)$. **D** $(2;-3;-1)$.

Nhóm: PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA

Lời giải.
Gọi $H(6-4t;-2-t;-1+2t)$ là hình chiếu của A lên đường thẳng d. Ta có $\overrightarrow{AH}=(5-4t;-3-t;-2+2t)$ và $\vec{u}_d=(4,1,-2)$. Do $AH\perp d$ nên $\overrightarrow{AH}.\vec{u}_d=0$
$\Leftrightarrow 4(5-4t)+1(-3-t)-2(-2+2t)=0$
$\Leftrightarrow t=1$. Vậy tọa độ điểm H là $H(2;-3;1)$.

Chọn phương án B

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$, điểm B đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là

A. $(1;2;-3)$. B. $(-1;-2;-3)$. C. $(1;-2;3)$. D. $(1;2;3)$.

Lời giải.
Hình chiếu của điểm $A(1;2;3)$ trên mặt phẳng (Oxz) là điểm $H(1;0;3)$.

Vì H là trung điểm của đoạn thẳng AB nên $\begin{cases}x_B=2x_H-x_A=1\\ y_B=2y_H-y_A=-2\\ z_B=2z_H-z_A=3\end{cases}\Rightarrow B(1;-2;3)$.

Chọn phương án C

Câu 28. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;6)$. Biết rằng có hai điểm M,N phân biệt thuộc trục Ox sao cho các đường thẳng AM,AN cùng tạo với đường thẳng chứa trục Ox một góc 45°. Tổng các hoành độ hai điểm M,N tìm được là

A. 4. B. 2. C. 1. D. 5.

Lời giải.
Đặt $M(t;0;0)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(t-1;0;-6)$, $\vec{u}_{Ox}=(1;0;0)$.
Áp dụng công thức góc giữa hai đường thẳng ta có:

$$\cos 45^\circ=\frac{|t-1|}{\sqrt{(t-1)^2+36}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow(t-1)^2=36\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=7\\ t=-5.\end{array}\right.$$

Hai điểm $M(7;0;0),N(-5;0;0)$, tổng hoành độ là: $7+(-5)=2$.
Chọn phương án B

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(1;-1;2)$, song song với mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-z+3=0$, đồng thời tạo với đường thẳng $\Delta\colon\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{2}$ một góc lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-2}{3}$. B. $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{3}$.

C. $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-2}{-3}$. D. $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-2}{3}$.

Lời giải.
Vì góc giữa hai đường thẳng lớn nhất bằng 90° nên góc giữa d và Δ lớn nhất khi $d\perp\Delta$.
Khi đó $\vec{u}_d\perp\vec{u}_\Delta$.
Mặt khác, vì $d\parallel(P)$ nên $\vec{u}_d=\left[\vec{u}_\Delta,\vec{n}_{(P)}\right]=(4;5;3)$.
Vậy phương trình đường thẳng d là $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-2}{3}$.

Chọn phương án D

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d sao cho khoảng cách từ điểm A đến (P) là lớn nhất. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (P) bằng

A $\sqrt{2}$. **B** $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$. **C** $\dfrac{11\sqrt{2}}{6}$. **D** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên d và H là hình chiếu vuông góc của A trên (P) thì $d(A,(P)) = AH \le AK$ không đổi. Vậy $d(A,(P))$ lớn nhất khi và chỉ khi $H \equiv K$, khi đó (P) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với AK.

Tìm được $(P): x - 4y + z - 3 = 0 \Rightarrow \mathrm{d}(O,(P)) = \dfrac{3}{\sqrt{18}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Chọn phương án D

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(2;1;0)$, $B(3;0;1)$ và song song với $\Delta: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{2}$. Tính khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P).

A $\dfrac{3}{2}$. **B** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D** $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;-1;1)$, véc-tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}_\Delta = (1;-1;2)$. Theo đề bài, ta suy ra véc-tơ $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}_\Delta\right] = (-1;-1;0)$ là véc-tơ pháp tuyến của (P).

Phương trình mặt phẳng (P) là $x + y - 3 = 0$.

Lấy điểm $M(1;-1;0)$ nằm trên Δ.

Vì $\Delta \parallel (P)$ nên $d(\Delta,(P)) = d(M,(P)) = \dfrac{|1-1-3|}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Chọn phương án D

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng (d): $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z}{2}$, mặt phẳng (P): $x + y - z + 3 = 0$ và điểm $A(1;2;-1)$. Cho đường thẳng (Δ) đi qua A, cắt (d) và song song với mặt phẳng (P). Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (Δ).

A $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **B** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **C** $\sqrt{3}$. **D** $\dfrac{16}{3}$.

Lời giải.

Gọi B là giao điểm của (Δ) với (d) nên tọa độ điểm B có dạng $B(3+t;3+3t,2t)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2+t;1+3t;1+2t)$.

Từ (Δ) song song với mặt phẳng (P) nên $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_P = 0 \Leftrightarrow (2+t) + (1+3t) - (1+2t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$ hay $\overrightarrow{AB} = (1;-2;-1)$.

Ta có $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{6}$, $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{OA}\right] = (-4;0;-4)$.

Khi đó khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (Δ) là $\mathrm{d}(O,\Delta) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{OA}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Chọn phương án B

Câu 33. Cho hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=3+2t \end{cases}$ và $d_2\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-m}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$, (với m là tham số). Tìm m để hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau.

A $m=4$. **B** $m=9$. **C** $m=7$. **D** $m=5$.

Lời giải.

d_1 đi qua điểm $M_1(1;2;3)$ và có vec-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(1;-1;2)$.

d_2 đi qua điểm $M_2(1;m;-2)$ và có vec-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(2;1;-1)$.

$[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}]=(-1;5;3)$ và $\overrightarrow{M_1M_2}=(0;m-2;-5)$.

d_1 và d_2 cắt nhau $\Leftrightarrow [\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}]\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=0 \Leftrightarrow -1\cdot 0+5(m-2)-15=0 \Leftrightarrow m=5$.

Chọn phương án D

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn đường thẳng $(d_1):\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$, $(d_2):\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$, $(d_3):\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$, $(d_4):\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Số đường thẳng trong không gian cắt cả bốn đường thẳng trên là

A 0. **B** 2. **C** Vô số. **D** 1.

Lời giải.

Kiểm tra vị trí tương đối giữa hai đường thẳng ta thấy $(d_1)\parallel(d_2)$;(d_4) cắt $(d_2),(d_3)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa (d_1) và (d_2); (Q) là mặt phẳng chứa (d_3) và (d_4).

Gọi (Δ) là đường thẳng cắt cả 4 đường thẳng trên.

Ta thấy, (Δ) cắt cả $(d_1),(d_2)$ suy ra $(\Delta)\subset(P)$.

(Δ) cắt cả $(d_3),(d_4)$ suy ra $(\Delta)\subset(Q)$. Mà $(d_2),(d_4)$ có điểm chung nên (Δ) là giao tuyến của (P) và (Q), do đó có duy nhất một đường thẳng thỏa mãn.

Chọn phương án D

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon 7x+3ky+mz+2=0$ và $(Q)\colon kx-my+z+5=0$. Khi giao tuyến của (P) và (Q) vuông góc với mặt phẳng $(\alpha):x-y-2z-5=0$ hãy tính $T=m^2+k^2$.

A $T=10$. **B** $T=2$. **C** $T=8$. **D** $T=18$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_P=(7;3k;m)$, mặt phẳng (Q) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_Q=(k;-m;1)$, mặt phẳng (α) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_\alpha=(1;-1;-2)$.

Mặt phẳng (P), (Q) có giao tuyến khi và chỉ khi $\vec{n}_P\neq k\vec{n}_Q$. (1)

Do giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với (α) nên $(P)\perp(\alpha)$ và $(Q)\perp(\alpha)$.

Do vậy $\begin{cases}\vec{n}_P\cdot\vec{n}_\alpha=0\\ \vec{n}_Q\cdot\vec{n}_\alpha=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7-3k-2m=0\\ k+m-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=3\\ m=-1\end{cases}$ thỏa điều kiện (1).

Vậy $T=m^2+k^2=10$.

Chọn phương án A

C MỨC ĐỘ 3

Câu 36. Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho điểm $M=(1;-1;2)$ và hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=-1 \end{cases}$, $d_2\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{1}$. Đường thẳng Δ đi qua điểm M và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 có véc tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;a;b)$.Tính $a+b$.

(A) $a+b=-1$. (B) $a+b=-2$. (C) $a+b=2$. (D) $a+b=1$.

Lời giải.

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đường thẳng Δ với d_1, d_2

$A\in d_1 \Rightarrow A\left(t_1;1-t_1;-1\right); B\in d_2 \Rightarrow B\left(-1+2t_2;1+t_2;-2+t_2\right)$.

$M\in\Delta \Leftrightarrow M, A, B$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}\quad(1)$

$\overrightarrow{MA}=\left(t_1-1;2-t_1;-3\right); \overrightarrow{MB}=\left(2t_2-2;t_2+2;t_2-4\right)$.

$$(1)\Leftrightarrow \begin{cases} t_1-1=k\left(2t_2-2\right) \\ 2-t_1=k\left(t_2+2\right) \\ -3=k\left(t_2-4\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1-2kt_2+2k=1 \\ -t_1-kt_2-2k=-2 \\ kt_2-4k=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1=0 \\ kt_2=\dfrac{1}{3} \\ k=\dfrac{5}{6}. \end{cases}$$

Từ $t_1=0\Rightarrow A(0;1;-1)$.Do đường thẳng Δ đi qua điểm A và M nên một véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{AM}=(1;-2;3)$.

Vậy $a=-2, b=3\Rightarrow a+b=1$.

Chọn phương án (D)

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$, mặt phẳng (P): $x+y-2z+5=0$ và $A\left(1;-1;2\right)$. Đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN. Một véc-tơ chỉ phương của Δ là

(A) $\vec{u}=(2;3;2)$. (B) $\vec{u}=(1;-1;2)$. (C) $\vec{u}=(-3;5;1)$. (D) $\vec{u}=(4;5;-13)$.

Lời giải.

Điểm $M\in d\Rightarrow M\left(-1+2t;t;2+t\right)$, A là trung điểm của $MN\Rightarrow N\left(3-2t;-2-t;2-t\right)$.

Điểm $N\in(P)\Rightarrow 3-2t-2-t-2\left(2-t\right)+5=0\Leftrightarrow t=2$.

$\Rightarrow M\left(3;2;4\right)$, $N\left(-1;-4;0\right)\Rightarrow \overrightarrow{MN}=\left(-4;-6;-4\right)=-2\left(2;3;2\right)$.

Chọn phương án (A)

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{3}$. Đường thẳng Δ là hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (Oyz). Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là

(A) $\vec{u}(0;2;0)$. (B) $\vec{u}(0;2;3)$. (C) $\vec{u}(1;0;2)$. (D) $\vec{u}(1;2;0)$.

Lời giải.

Lấy các điểm $A(2;-3;1)\in d$, $B(3;-1;4)\in d$.

Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của A, B lên mặt phẳng (Oyz).

$\Rightarrow M(0;-3;1)\,N(0;-1;4)\Rightarrow \vec{u}_\Delta=\overrightarrow{MN}=(0;2;3)$.

Chọn phương án (B)

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;-2;1)$, $A(1;2;-3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z}{-1}$. Tìm véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M, vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách A một khoảng nhỏ nhất.

A $\vec{u}=(2;2;-1)$. **B** $\vec{u}=(3;4;-4)$. **C** $\vec{u}=(2;1;6)$. **D** $\vec{u}=(1;0;2)$.

Lời giải.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng d. Suy ra véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P=\vec{u}_d=(2;2;-1)$.

Phương trình mặt phẳng $(P)\colon 2(x+2)+2(y+2)-(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x+2y-z+9=0$.

Đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với d nên Δ nằm trong (P).

Khi đó, với mọi đường thẳng Δ qua M, khoảng cách $\mathrm{d}(A,\Delta)\geq \mathrm{d}(A,(P))$. Đẳng thức xảy ra khi Δ đi qua hình chiếu A' của A lên mặt phẳng (P).

Phương trình đường thẳng AA' đi qua A và vuông góc với (P) là $\begin{cases}x=1+2t\\y=2+2t\\z=-3-t\end{cases}$.

Tọa độ điểm A' là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x=1+2t\\y=2+2t\\z=-3-t\\2x+2y-z+9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-2\\x=-3\\y=-2\\z=-1\end{cases}\Rightarrow A'(-3;-2;-1)$.

Đường thẳng Δ cần tìm nhận $\overrightarrow{A'M}=(1;0;2)$ làm véc-tơ chỉ phương.

Chọn phương án D

Câu 40. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-2}$, $d_2\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z}{-4}$, $d_3\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$, $d_4\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$. Gọi Δ là đường thẳng cắt cả 4 đường thẳng trên. Véc-tơ nào sau đây là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ?

A $\overrightarrow{u_4}(1;2;-2)$. **B** $\overrightarrow{u_3}(2;0;-1)$. **C** $\overrightarrow{u_2}(2;1;1)$. **D** $\overrightarrow{u_1}(2;1;-1)$.

Lời giải.

Ta có $d_1\parallel d_2$ nên Δ cắt $d_1,d_2\Rightarrow \Delta\subset(d_1,d_2)$.

Lại có Δ cắt $d_3,d_4\Rightarrow(d_1,d_2)$ cắt d_3,d_4.

d_1 có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(1;2;-2)$, $M_1(1;2;0)\in d_1$.

d_2 có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(1;2;-2)$, $M_2(2;2;0)\in d_2$.

$\overrightarrow{M_1M_2}=(1;0;0)\Rightarrow\vec{n}=\left[\overrightarrow{M_1M_2};\vec{u}\right]=(0;2;2)$.

Phương trình mặt phẳng(d_1,d_2) : $0(x-1)+2(y-2)+2(z-0)=0\Leftrightarrow y+z-2=0$.

Mặt phẳng (d_1,d_2) cắt $d_3\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}\\y+z-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-\dfrac{1}{2}\\z=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow A\left(1;\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

Mặt phẳng (d_1, d_2) cắt $d_4 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{-1} \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow B(4; 2; 0)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} = \left(3; \dfrac{3}{2}; -\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3}{2}(2; 1; -1)$, vậy véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $(2; 1; -1)$.

Chọn phương án D

Câu 41. Trong không gian $0xyz$, xác định tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 3; 1)$ trên mặt phẳng $(\alpha)\colon x - 2y + z = 0$.

A $\left(2; \dfrac{5}{2}; 3\right)$. **B** $(5; 4; 3)$. **C** $\left(\dfrac{5}{2}; 2; \dfrac{3}{2}\right)$. **D** $(1; 3; 5)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n} = (1; -2; 1)$ là véc-tơ pháp tuyến của (α).

Gọi $H(a; b; c)$ là hình chiếu của M trên (α).

H là hình chiếu của M trên $(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (\alpha) \\ MH \perp (\alpha) \end{cases}$.

$H \in (\alpha) \Leftrightarrow a - 2b + c = 0 \Leftrightarrow c = -a + 2b \Rightarrow H(a; b; -a + 2b)$.

Có: $\overrightarrow{MH} = (a - 2; b - 3; -a + 2b - 1)$.

$MH \perp (\alpha) \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} = k\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2 = k \\ b - 3 = -2k \\ -a + 2b - 1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5}{2} \\ b = 2 \\ k = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

$\Rightarrow H\left(\dfrac{5}{2}; 2; \dfrac{3}{2}\right)$.

Chọn phương án C

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, cắt mặt phẳng $(P)\colon x + y + z - 3 = 0$ tại điểm I. Gọi Δ là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) sao cho $\Delta \perp d$ và khoảng cách từ điểm I đến Δ bằng $\sqrt{42}$. Tìm tọa độ hình chiếu $M(a; b; c)$ $\left(\text{với } a + b > c\right)$ của điểm I trên đường thẳng Δ.

A $M\,(2; 5; -4)$. **B** $M\,(6; -3; 0)$. **C** $M\,(5; 2; -4)$. **D** $M\,(-3; 6; 0)$.

Lời giải.

Ta có $I = d \cap (P) \Rightarrow t - 1 + 2t + 2 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow I\,(1; 1; 1)$.

Lại có véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1; 1; 1)$ và véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (1; 2; -1)$; $\overrightarrow{IM} = (a - 1; b - 1; c - 1)$.

Do $\begin{cases} \Delta \subset (P) \\ \Delta \perp d \end{cases} \Rightarrow$ đường thẳng Δ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}; \vec{u}] = (3; -2; -1)$.

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} M \in (P) \\ IM = \sqrt{42} \\ IM \perp \Delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c-3=0 \\ (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=42 \\ 3(a-1)-2(b-1)-(c-1)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=3 & (1) \\ (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=42 & (2) \\ 3a-2b-c=0 & (3) \end{cases}$$

Từ (1), (3) $\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{6-c}{5} \\ b = \dfrac{9-4c}{5} \end{cases}$, mà $a+b>c \Rightarrow c < \dfrac{3}{2}$.

Thế vào (2) ta được

$$\begin{aligned} & \left(\frac{6-c}{5}-1\right)^2 + \left(\frac{9-4c}{5}-1\right)^2 + (c-1)^2 = 42 \\ \Leftrightarrow\ & (c-1)^2 + 16(c-1)^2 + 25(c-1)^2 = 1050 \\ \Leftrightarrow\ & (c-1)^2 = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c-1=-5 \\ c-1=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} c=-4 & \text{(thỏa mãn)} \\ c=6 & \text{(không thỏa mãn)} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=5 \\ c=-4. \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn phương án A

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(2;1;0)$, $B(3;0;1)$ và song song với $\Delta : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{2}$. Tính khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P).

A $\dfrac{3}{2}$. **B** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D** $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;-1;1)$, véc-tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}_\Delta = (1;-1;2)$. Theo đề bài, ta suy ra véc-tơ $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}_\Delta\right] = (-1;-1;0)$ là véc-tơ pháp tuyến của (P).

Phương trình mặt phẳng (P) là $x+y-3=0$.

Lấy điểm $M(1;-1;0)$ nằm trên Δ.

Vì $\Delta \parallel (P)$ nên $d(\Delta,(P)) = d(M,(P)) = \dfrac{|1-1-3|}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Chọn phương án D

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua $H(3;1;0)$ cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC. Khoảng cách từ điểm $M(1;1;0)$ đến mặt phẳng (P) là

A $\dfrac{2}{\sqrt{10}}$. **B** $\dfrac{6}{\sqrt{10}}$. **C** $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. **D** $\dfrac{5}{\sqrt{10}}$.

Lời giải.

Do giả thiết suy ra $OH \perp (P)$ nên $\overrightarrow{OH}$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P). Mà $\overrightarrow{OH}\,(3;1;0)$ nên phương trình mặt phẳng (P) là

$$3\,(x-3)+(y-1)=0 \Leftrightarrow 3x+y-10=0$$

Khi đó $\mathrm{d}\,(M;(P))=\dfrac{|3+1-10|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{10}}$.

Chọn phương án B

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d)\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z}{2}$, mặt phẳng $(P)\colon x+y-z+3=0$ và điểm $A(1;2;-1)$. Cho đường thẳng (Δ) đi qua A, cắt (d) và song song với mặt phẳng (P). Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (Δ).

A $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **B** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **C** $\sqrt{3}$. **D** $\dfrac{16}{3}$.

Lời giải.

Gọi B là giao điểm của (Δ) với (d) nên tọa độ điểm B có dạng $B(3+t;3+3t,2t)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2+t;1+3t;1+2t)$.

Từ (Δ) song song với mặt phẳng (P) nên $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}_P=0 \Leftrightarrow (2+t)+(1+3t)-(1+2t)=0 \Leftrightarrow t=-1$ hay $\overrightarrow{AB}=(1;-2;-1)$.

Ta có $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{6}$, $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{OA}\right]=(-4;0;-4)$.

Khi đó khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (Δ) là $\mathrm{d}(O,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{OA}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Chọn phương án B

Câu 46. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm của DD'. Khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$ là

A a. **B** $\dfrac{2a}{5}$. **C** $\dfrac{a}{3}$. **D** $\dfrac{3a}{8}$.

Lời giải.

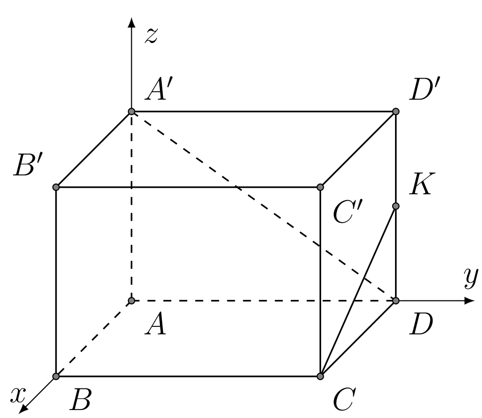
Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình bên

Ta có $A'(0;0;a)$, $D(0;a;0)$, $D'(0;a;a)$, $C(a;a;0)$.

Gọi K là trung điểm $DD' \Rightarrow K\left(0;a;\dfrac{a}{2}\right)$

Từ đó $\overrightarrow{CK}=\left(-a;0;\dfrac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{A'D}=(0;a;-a)$, $\overrightarrow{CD}=(-a;0;0)$

Suy ra $\mathrm{d}(CK,A'D)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{CK},\overrightarrow{A'D}\right]\cdot\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{CK},\overrightarrow{A'D}\right]\right|}=\dfrac{a}{3}$.



Chọn phương án C

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-7}{1}=\dfrac{z-3}{4}$ và d_2 là giao tuyến của hai mặt phẳng $2x+3y-9=0$, $y+2z+5=0$. Vị trí tương đối của hai đường thẳng là

(A) Trùng nhau. (B) Chéo nhau. (C) Song song. (D) Cắt nhau.

Lời giải.

$\overrightarrow{n_1} = (2;3;0)$, $\overrightarrow{n_2} = (0;1;2)$ lần lượt là VTPT của hai mặt phẳng.

— 1 VTCP của đường thẳng d_1 là $\overrightarrow{u_1} = (2;1;4)$, $A(1;7;3) \in (d_1)$.

— 1 VTCP của đường thẳng d_2 là $\overrightarrow{u_2} = [\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}] = (6;-4;2)$, $B(0;3;-4) \in d_2$.

$\overrightarrow{BA} = (1;4;7)$, $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = (18;20;-14)$, $\overrightarrow{BA} \cdot [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = 18 + 80 - 98 = 0$. Do đó d_1, d_2 cắt nhau.
Chọn phương án (D)

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+2}{1}$; $d_2\colon \dfrac{x-5}{-3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x + y + 3z - 5 = 0$. Số đường thẳng song song với mặt phẳng (P) , cắt cả hai đường d_1, d_2 là

(A) vô số. (B) 1. (C) 0. (D) 3.

Lời giải.

• Đường thẳng d_1 đi qua điểm $A_1(3;3;-2)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (-1;-2;1)$. Đường thẳng d_2 đi qua điểm $A_2(5;-1;2)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (-3;2;1)$. Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;1;3)$.
• Ta có $A_1 \notin (P)$ và $\overrightarrow{u_1} \cdot \vec{n} = 0$ nên $d_1 \parallel (P)$. Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua điểm A_1 và có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}$. Khi đó $(Q) \parallel (P)$ và (Q) đi qua d_1.
• Do $\vec{u}_2 \cdot \vec{n} \neq 0$ nên d_2 cắt (Q) tại điểm I. Mặt khác, do d_1 và d_2 chéo nhau nên $I \notin d_1$.
• Với mỗi điểm M tùy ý thuộc đường thẳng d_1, đường thẳng IM cắt cả 2 đường thẳng d_1, d_2 và song song với (P). Vậy có vô số đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn phương án (A)

D MỨC ĐỘ 4

Câu 49. Giao điểm của mặt phẳng $(P): x + y - z - 2 = 0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t. \\ z = 3 + 3t \end{cases}$

(A) $(1;1;0)$. (B) $(0;2;4)$. (C) $(0;4;2)$. (D) $(2;0;3)$.

Lời giải.

Gọi $A(x;y;z)$ là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P).
Ta có: $2 + t - t - (3 + 3t) - 2 = 0 \Leftrightarrow -3t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1$.
Suy ra $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \\ z = 0 \end{cases}$ Vậy $A(1;1;0)$.
Chọn phương án (A)

50 DẠNG TOÁN PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA LẦN 2

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-7}{1} = \dfrac{z-3}{4}$ và d_2 là giao tuyến của hai mặt phẳng $2x+3y-9=0, y+2z+5=0$. Vị trí tương đối của hai đường thẳng là

A song song. **B** chéo nhau. **C** cắt nhau. **D** trùng nhau.

Lời giải.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} 2x+3y-9=0 \\ y+2z+5=0 \end{cases}$.

Cho $y=1 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ z=-3 \end{cases} \Rightarrow A(3;1;-3) \in d_2$

Cho $y=3 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=-4 \end{cases} \Rightarrow B(0;3;-4) \in d_2$

Đường thẳng d_1 đi qua $M(1;7;3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}(2;1;4)$

Đường thẳng d_2 đi qua $A(3;1;-3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}(-3;2;-1) = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AM}(2;-6;-6)$

Ta có $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = (-9;-10;7) \Rightarrow [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}]\,\overrightarrow{AM} = -2.9+6.10-6.7=0$.

Do đó d_1 và d_2 cắt nhau.

Chọn phương án C

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y=0$ và $(\alpha')\colon 2x-y+z-15=0$. Tìm tọa độ giao điểm I của đường thẳng d và d', biết đường thẳng d' có phương trình $\begin{cases} x=1-t \\ y=2+2t \\ z=3. \end{cases}$

A $I(0;0;-1)$. **B** $I(0;0;2)$. **C** $I(1;2;3)$. **D** $I(4;-4;3)$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm I của d và d' thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-y+z-15=0 \\ x=1-t \\ y=2+2t \\ z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-t+2+2t=0 \\ 2(1-t)-(2+2t)+3-15=0 \\ x=1-t \\ y=2+2t \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-3 \\ x=4 \\ y=-4 \\ z=3 \end{cases}.$$

Suy ra $I(4;-4;3)$.

Chọn phương án D

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+y+z+5=0$ và đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=1+3t \\ y=3-t \\ z=2-3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$. Tìm tọa độ giao điểm của Δ và (α).

A $(-2;-1;0)$. **B** $(-5;2;3)$. **C** $(1;3;2)$. **D** $(-17;9;20)$.

Lời giải.

Xét phương trình $2(1+3t)+3-t+2-3t+5=0 \Leftrightarrow 2t+12=0 \Leftrightarrow t=-6$.

Với $t=-6 \Rightarrow \begin{cases} x=-17 \\ y=9 \\ z=20 \end{cases}$. Vậy tọa độ giao điểm của Δ và (α) là $(-17;9;20)$.

Chọn phương án D

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): ax-y+2z+b=0$ đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x-y-z+1=0$ và $(Q): x+2y+z-1=0$. Tính $a+4b$.

A -16. **B** -8. **C** 0. **D** 8.

Lời giải.

Xét giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) là đường thẳng $\begin{cases} x-y-z+1=0 \\ x+2y+z-1=0 \end{cases}$.

Chọn $x=0$ ta được $\begin{cases} -y-z+1=0 \\ 2y+z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow A(0;0;1)$.

Chọn $x=-1$ ta được $\begin{cases} -y-z=0 \\ 2y+z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow B(-1;2;-2)$.

Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A, B \Rightarrow \begin{cases} 2+b=0 \\ -a-2-4+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-8 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow a+4b=-16$.

Chọn phương án A

Câu 54. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(0;0;3)$, $B(-2;0;1)$ và mặt phẳng (α): $2x-y+2z+8=0$. Hỏi có bao nhiêu điểm C trên mặt phẳng (α) sao cho tam giác ABC đều.

A 2. **B** 0. **C** 1. **D** vô số.

Lời giải.

Ta có tam giác ABC đều nên C nằm trên mặt phẳng (β) trung trực của AB.

Mặt khác C cũng thuộc mặt phẳng (α) nên $C \in (\alpha) \cap (\beta)$.

Gọi I là trung điểm của AB, suy ra $I(-1;0;2)$.

Ta có $CI = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB = \sqrt{6} < \mathrm{d}(I,(\alpha)) = \dfrac{|-2+4+8|}{\sqrt{4+1+4}} = \dfrac{10}{3}$.

Suy ra không có điểm C nào thỏa mãn.

Chọn phương án B

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=8$ và điểm $M(-1;1;2)$. Hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ đi qua M và tiếp xúc mặt cầu (S) lần lượt tại A, B. Biết góc giữa (d_1) và (d_2) bằng α với $\cos\alpha = \dfrac{3}{4}$. Tính độ dài AB.

A $\sqrt{7}$. **B** $\sqrt{11}$. **C** $\sqrt{5}$. **D** 7.

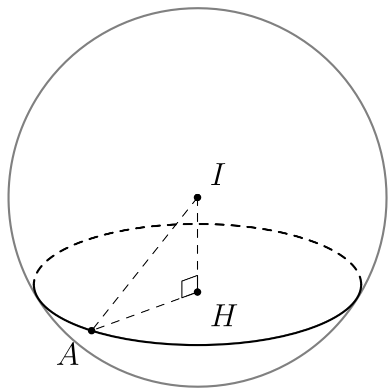
Lời giải.

Mặt cầu (S) tâm $I(1;-2;-1)$ và bán kính $R = 2\sqrt{2}; IM = \sqrt{22}$.
Trong tam giác IMA ta có: $MA = MB = \sqrt{IM^2 - R^2} = \sqrt{14}$.
Do $\cos\widehat{IMB} = \dfrac{MB}{IM} = \dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{22}} > \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{IMB} < 45^\circ \Rightarrow \widehat{AMB} < 90^\circ \Rightarrow \alpha = \widehat{BMA}$.
Trong tam giác MAB ta có: $AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2 \cdot MA \cdot MB \cdot \cos\alpha = 7 \Rightarrow AB = \sqrt{7}$.
Chọn phương án A

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S_1): $x^2+y^2+z^2-2x+4y-3=0$ và điểm $M(1;1;1)$. Gọi (S_2) là mặt cầu đi qua M và chứa đường tròn giao tuyến của mặt cầu (S_1) với mặt phẳng (Oyz). Tính bán kính R của mặt cầu (S_2).

A $R = 3$. **B** $R = 2\sqrt{2}$. **C** $R = \sqrt{11}$. **D** $R = \sqrt{10}$.

Lời giải.



Mặt cầu (S_1) có tâm $I(1;-2;0)$, bán kính $r = \sqrt{8}$.
Tọa độ các giao điểm của (S_1) với mặt phẳng (Oyz) thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x+4y-3=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+z^2+4y-3=0 \\ x=0 \end{cases}.$$

Chọn $y = 0$, suy ra $A(0;0;\sqrt{3})$ là một điểm thuộc đường tròn $(C) = (S_1) \cap (Oyz)$.
Gọi H là hình chiếu của tâm cầu I trên mặt phẳng $(Oyz) \Rightarrow H(0;-2;0)$. Gọi I_2 là tâm mặt cầu (S_2), do mặt cầu (S_2) chứa đường tròn (C) hay $(S_2) \cap (Oyz) = (C)$, suy ra I_2, H, I thẳng hàng.
Đường thẳng I_2H qua H và nhận $\overrightarrow{i}(1;0;0)$ làm véc-tơ pháp tuyến, suy ra I_2H có phương trình là $\begin{cases} x = t \\ y = -2 \\ z = 0 \end{cases}$. Do $I_2 \in (I_2H) \Rightarrow I_2(t;-2;0)$, mà S_2 đi qua $M(1;1;1)$ và $A(0;0;\sqrt{3}) \Rightarrow I_2A = I_2M$. (1)
Ta có (1) $\Leftrightarrow t^2 + 4 + 3 = (t-1)^2 + 9 + 1 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow I_2(2;-3;0) \Rightarrow R = \sqrt{11}$.
Chọn phương án C

Câu 57. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x+2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 99$ và điểm $M(1;7;-8)$. Qua điểm M kẻ các tia Ma, Mb, Mc đôi một vuông góc nhau và cắt mặt cầu tại điểm thứ hai tương ứng là A, B, C. Biết rằng mặt phẳng (ABC) luôn đi qua một điểm cố định $K(x_k; y_k; z_k)$. Tính giá trị $P = x_k + 2y_k - z_k$.

A $P = 11$. **B** $P = 5$. **C** $P = 7$. **D** $P = 12$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;4;1)$, bán kính $R = \sqrt{99}$.

Ta có $M(1;7;-8) \in (S)$.

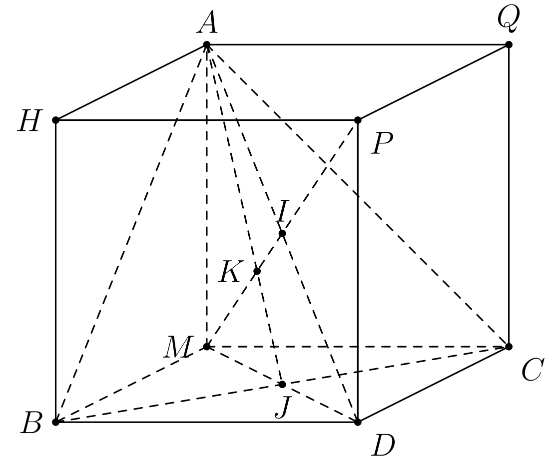
Xét hình hộp chữ nhật $AHPQ.MBDC$.

Gọi $J = MD \cap BC$, $K = MP \cap AJ \Rightarrow K \in (ABC)$. Rõ ràng, tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $MABC$ là trung điểm của đoạn MP (cũng là tâm của (S)).

Mặt khác K là trọng tâm của tam giác MAD hay $\overrightarrow{MK} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{MI}$. Vì M, I cố định nên K cố định. Vậy K chính là điểm cố định mà mặt phẳng (ABC) luôn luôn đi qua.

Ta có $\overrightarrow{MK} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{MI} \Rightarrow K(-1;5;-2)$

$\Rightarrow P = x_k + 2y_k - z_k = -1 + 2 \cdot 5 - (-2) = 11$.



Chọn phương án A

Câu 58. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;1)$, $B(0;3;-1)$. Điểm M nằm trên mặt phẳng $(P): 2x + y + z - 4 = 0$ sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất là

A $(1;0;2)$. **B** $(0;1;3)$. **C** $(1;2;0)$. **D** $(3;0;2)$.

Lời giải.

Thay tọa độ của A, B vào vế trái của phương trình mặt phẳng $(P): 2x + y + z - 4 = 0$ ta được: $(2.2 + 1 + 1 - 4)(2.0 + 3 - 1 - 4) = -4 < 0$

Suy ra A, B nằm về hai phía của mặt phẳng (P).

Vậy $MA + MB \geq AB$ dấu " = " xảy ra khi $M = AB \cap (P)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2;2;-2)$ chọn vtcp của đường thẳng AB : $\vec{u} = (1;-1;1)$.

Vậy phương trình đường thẳng AB : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \; (t \in \mathbb{R}). \\ z = 1 + t \end{cases}$

Tọa độ $(x;y;z)$ của M là nghiệm hệ

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \\ 2x + y + z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \\ 2.(2 + t) + 1 - t + 1 + t - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 0 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow M(1;2;0).$$

Chọn phương án C

Câu 59. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;2;1)$, $N(-1;0;-1)$. Có bao nhiêu mặt phẳng qua M, N cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B, $(A \neq B)$ sao cho $AM = \sqrt{3} \cdot BN$?

A 1. **B** 2. **C** 4. **D** Vô số.

Lời giải.

Gọi $\vec{n} = (a;b;c)$ là một pháp véc-tơ của $mp(\alpha)$ qua M, N thỏa mãn đề bài (với $a^2 + b^2 + c^2 > 0$).

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = (-2;-2;-2) \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{MN} \end{cases} \Rightarrow a+b+c=0 \Rightarrow c=-a-b \neq 0.$

Vì $mp(\alpha)$ cắt Ox, Oy lần lượt tại A, B nên $a \cdot b \neq 0$.

Khi đó, ta được phương trình $mp(\alpha)\colon ax+by-(a+b)z-b=0$.

Ta tính được $\begin{cases} A\left(\dfrac{b}{a};0;0\right) \\ B(0;1;0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} = \left(1-\dfrac{b}{a};2;1\right) \\ \overrightarrow{BN} = (-1;-1;-1). \end{cases}$

Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} & AM = \sqrt{3} \cdot BN \\ \Leftrightarrow\ & AM^2 = 3 \cdot BN^2 \\ \Leftrightarrow\ & \left(1-\dfrac{b}{a}\right)^2 + 5 = 3 \cdot 3 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & \dfrac{b}{a} = -1 \\ & \dfrac{b}{a} = 3. \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

Với $\dfrac{b}{a} = -1$ ta chọn $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases}$, ta được $(\alpha)\colon x-y-1=0$.

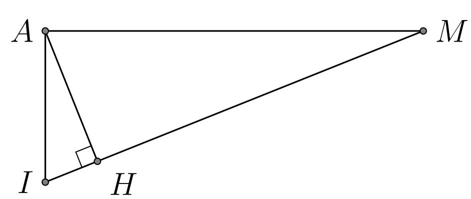
Với $\dfrac{b}{a} = 3$ ta chọn $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -4 \end{cases}$, ta được $(\alpha)\colon x+3y-4z-3=0$.

Chọn phương án B

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+z^2=4$ và một điểm $M(2;3;1)$. Từ M kẻ được vô số các tiếp tuyến tới (S), biết tập hợp các tiếp điểm là đường tròn (C). Tính bán kính r của đường tròn (C).

A $r = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **B** $r = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C** $r = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D** $r = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Mặt cầu có tâm $I(1;1;0)$. Gọi A là tiếp điểm của một tiếp tuyến kẻ từ M tới mặt cầu (S).

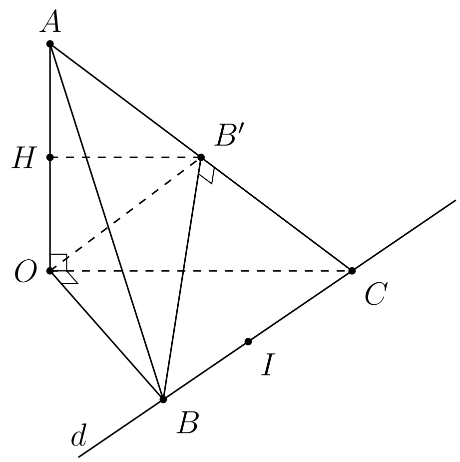
Khi đó $IA \perp AM$.

Gọi H là tâm đường tròn (C), thì $HA \perp IM$.
Ta có $IM = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{6} \Rightarrow AM = \sqrt{IM^2 - IA^2} = \sqrt{6-4} = \sqrt{2}$.
Vậy $r = AH = \sqrt{\dfrac{AI^2 \cdot AM^2}{AI^2 + AM^2}} = \sqrt{\dfrac{4 \cdot 2}{4+2}} = \sqrt{\dfrac{4}{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.
Chọn phương án A

Câu 61. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+1}{-1}$ và điểm $A(1;1;1)$. Hai điểm B, C di động trên đường thẳng d sao cho mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt phẳng (OAC). Gọi B' là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng AC. Biết rằng quỹ tích các điểm B' là đường tròn cố định, tính bán kính r đường tròn này.

A $r = \dfrac{\sqrt{70}}{10}$. **B** $r = \dfrac{3\sqrt{5}}{10}$. **C** $r = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$. **D** $r = \dfrac{\sqrt{60}}{10}$.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{OA} = (1;1;1)$, VTCP của d là $\vec{u} = (2;-1;-1)$. Vì $\overrightarrow{OA} \cdot \vec{u} = 0$ nên $OA \perp d$.
Gọi (P) là mặt phẳng chứa OA và $(P) \perp d$, $I = (P) \cap d \Rightarrow I(0;1;-1)$.
Lại thấy $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$ nên $OA \perp OI$, suy ra $OA \perp (OBC)$.
Mà $(OAB) \perp (OAC)$ nên $OB \perp OC$, suy ra $OB \perp (OAC)$.
Khi đó ta được $AC \perp (OBB') \Rightarrow AC \perp OB'$.
Gọi $H\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ là trung điểm OA thì B' thuộc mặt cầu (S) cố định tâm H bán kính $\dfrac{OA}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Mà B' thuộc mặt phẳng $(ABC)\colon 2x + 5y - z - 6 = 0$ cố định nên đường tròn cố định quỹ tích của B' là giao tuyến của (S) và (ABC) có bán kính là

$$r = \sqrt{\left(\dfrac{OA}{2}\right)^2 - \mathrm{d}^2[H, (ABC)]} = \sqrt{\dfrac{3}{4} - \dfrac{9}{30}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{10}.$$

Chọn phương án B

Câu 62. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 6z - 5 = 0$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 3 = 0$. Gọi M là tiếp điểm của (S) và mặt phẳng (Q) di động vuông góc với mặt phẳng (P). Tập hợp các điểm M là

A Đường tròn: $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 6z - 5 = 0$; $x - 2y + 2z + 9 = 0$.

B Mặt phẳng: $x - 2y + 2z - 9 = 0$.

C Đường tròn: $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 6z - 5 = 0$; $x - 2y + 2z - 9 = 0$.

D Mặt phẳng: $x - 2y + 2z + 9 = 0$.

Lời giải.

Ta có phương trình mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 16$. Gọi I, R là tâm và bán kinh mặt cầu suy ra $I(-1;1;-3)$ và $R = 4$. Khi đó $\mathrm{d}(I;(P)) = \dfrac{|-1-2-6+3|}{3} = 2$ suy ra mặt phẳng (P) luôn cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Do giả thiết suy ra $IM \perp (Q)$ suy ra M thuộc mặt phẳng (α) chứa IM.

Do đó $(\alpha) \parallel (P)$ nên phương trình $(\alpha): x - 2y + 2z + m = 0$ $(m \neq 3)$. Vì $I \in (\alpha)$ nên $-1-2-6+m = 0 \Leftrightarrow m = 9$ suy ra phương trình $(\alpha): x - 2y + 2z + 9 = 0$. Do đó M thuộc đường tròn là giao của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S).

Chọn phương án A

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 đường thẳng $(d_1): \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{-2}$, $(d_2): \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{2}$, $(d_3): \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-4}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$. Mặt cầu bán kính nhỏ nhất tâm $I(a;b;c)$, tiếp xúc với ba đường thẳng $(d_1), (d_2), (d_3)$. Tính $S = a + 2b + 3c$.

A $S = 10$. **B** $S = 11$. **C** $S = 12$. **D** $S = 13$.

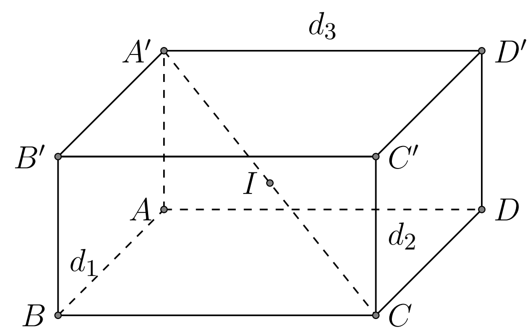
Lời giải.

Nhận xét: ba đường thẳng $(d_1), (d_2), (d_3)$ đôi một vuông góc với nhau và cách đều nhau.

Dựng hình lập phương sao cho $(d_1), (d_2), (d_3)$ chứa 3 cạnh.

Ta có cạnh hình lập phương là $a = 3$.

Ta có:



$$\mathrm{d}^2(I;d_3) = \mathrm{d}^2(I;(A'B'C'D')) + \mathrm{d}^2(I;(ADD'A')) = u^2 + v^2.$$

Cộng vế theo vế ta được:

$3r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2 \geq \dfrac{1}{2}(x+u)^2 + \dfrac{1}{2}(y+t)^2 + \dfrac{1}{2}(z+v)^2 = \dfrac{3}{2} \cdot 3^2 \Rightarrow r \geq \dfrac{9}{2}$.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi I là tâm hình lập phương.

Mặt phẳng (P) qua d_1 và vuông góc d_2 có phương trình

$$(x-1) + 2(y-1) + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 5 = 0.$$

Mặt phẳng (Q) qua d_1 và vuông góc d_3 có phương trình

$$2(x-1) - 2(y-1) + (z-1) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y + z - 1 = 0.$$

Ta có $C = d_2 \cap (P)$ nên có tọa độ là nghiệm $\begin{cases} x + 2y + 2z - 5 = 0 \\ \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$

nên $C(3;-1-2)$.

Ta có $A' = d_3 \cap (Q)$ nên có tọa độ là nghiệm $\begin{cases} 2x - 2y + z - 1 = 0 \\ \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-4}{-2} = \dfrac{z-1}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = 1 \end{cases}$

nên $A'(4;4;1)$.

Theo trên thì I là trung điểm của CA' nên I có tọa độ $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_{A'} + x_C}{2} = \dfrac{3+4}{2} = \dfrac{7}{2} \\ y_I = \dfrac{y_{A'} + y_C}{2} = \dfrac{-1+4}{2} = \dfrac{3}{2} \\ z_I = \dfrac{z_{A'} + z_C}{2} = \dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Vậy tọa $S = a + 2b + 3c = 11$.

Chọn phương án B

Câu 64. Trong không gian $Oxyz$, xét mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(2;1;3)$ đồng thời cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại M, N, P sao cho tứ diện $OMNP$ có thể tích nhỏ nhất. Giao điểm của đường thẳng d: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 4 + t \end{cases}$ với (P) có toạ độ là

A $(4;6;1)$. **B** $(4;1;6)$. **C** $(-4;6;-1)$. **D** $(4;-1;6)$.

Lời giải.

Gọi $M(a;0;0)$, $N(0;b;0)$, $P(0;0;c)$. Theo giả thiết, ta có a, b, c là các số dương.
Phương trình mặt phẳng (P) là $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.
(P) đi qua điểm $A(2;1;3)$ nên $\dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{3}{c} = 1$.
Ta có $\dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{3}{c} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{2}{a} \cdot \dfrac{1}{b} \cdot \dfrac{3}{c}} = \dfrac{3\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{abc}} \Leftrightarrow 1 \geq \dfrac{3\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{abc}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{abc} \geq 3\sqrt[3]{6} \Leftrightarrow abc \geq 112$.

$V_{OMNP} = \dfrac{abc}{6} \geq 27$. Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} \dfrac{2}{a} = \dfrac{1}{b} = \dfrac{3}{c} \\ \dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{3}{c} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \\ c = 9. \end{cases}$

Vậy $(P) : \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{9} = 1$.

Tọa độ giao điểm của d và (P) là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 4 + t \\ \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{9} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \\ z = 6 \\ t = 2. \end{cases}$

Chọn phương án D

Câu 65. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;1), B(1;2;-3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z}{-1}$. Tìm véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với d đồng thời cách B một khoảng lớn nhất.

A $\vec{u} = (4;-3;2)$. **B** $\vec{u} = (2;0;-4)$. **C** $\vec{u} = (2;2;-1)$. **D** $\vec{u} = (1;0;2)$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của B lên Δ. Ta có $\mathrm{d}(A;\Delta) = AH \leq AB$ và đẳng thức xảy ra khi $H \equiv A$.

Do đó, nếu gọi $\vec{u}$ là véc-tơ chỉ phương của Δ thì $\vec{u} \perp \overrightarrow{AB}$ và $\vec{u} \perp \overrightarrow{u_d}$, với $\overrightarrow{AB} = (2;0;-4)$ và $\overrightarrow{u_d} = (2;2;-1)$.

Khi đó, ta có thể chọn $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{u_d} = (8;-6;4) = 2(4;-3;2)$ làm véc-tơ chỉ phương của Δ.

Chọn phương án (A)

Câu 66. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x - 2y + z - 1 = 0$ và điểm $A(0;-2;3)$, $B(2;0;1)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (P) sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất. Giá trị của $a^2 + b^2 + c^2$ bằng

(A) $\dfrac{41}{4}$. **(B)** $\dfrac{9}{4}$. **(C)** $\dfrac{7}{4}$. **(D)** 3.

Lời giải.

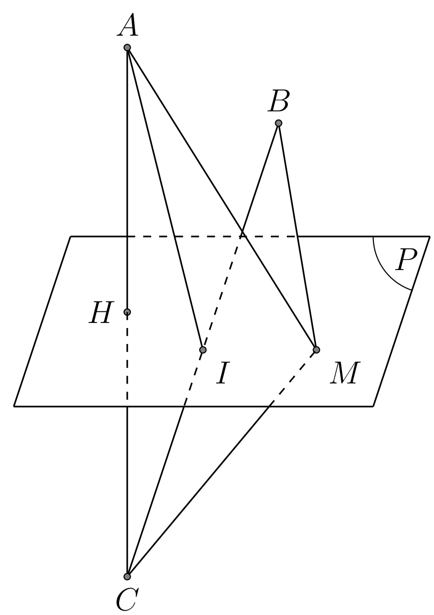
Ta có $(0 - 2\cdot(-2) + 3 - 1)(2 - 2\cdot 0 + 1 - 1) = 12 > 0$, nên A, B nằm cùng phía với mặt phẳng (P).

Gọi C là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (P).

Khi đó ta có $MA + MB = MC + MB \geq BC$. Dẫn tới $MA + MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi M trùng với I là giao điểm của BC với mặt phẳng (P).

Phương trình đường thẳng AC là $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-3}{1}$.

Toạ độ giao điểm H của AC với mặt phẳng (P) là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-3}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$, hay $H(-1;0;2)$.



H là trung điểm AC nên toạ độ C là $C(-2;2;1)$.

Đường thẳng BC đi qua $B(2;0;1)$ có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{BC} = (-4;2;0)$ là $\begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 2t \\ z = 1 \end{cases}$.

Toạ độ I là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 2t \\ z = 1 \\ x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{1}{4} \\ x = 1 \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = 1 \end{cases}$, hay $I\left(1;\dfrac{1}{2};1\right)$.

Vậy ta có $a = 1; b = \dfrac{1}{2}; c = 1$, dẫn tới $a^2 + b^2 + c^2 = \dfrac{9}{4}$.

Chọn phương án (B)

Câu 67. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;1), B(0;3;-1)$. Điểm M nằm trên mặt phẳng $(P): 2x + y + z - 4 = 0$ sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất là

A $(1;0;2)$. **B** $(0;1;3)$. **C** $(1;2;0)$. **D** $(3;0;2)$.

Lời giải.

Thay tọa độ của A, B vào vế trái của phương trình mặt phẳng $(P): 2x+y+z-4=0$ ta được: $(2.2+1+1-4)(2.0+3-1-4)=-4<0$

Suy ra A, B nằm về hai phía của mặt phẳng (P).

Vậy $MA+MB \geq AB$ dấu "$=$" xảy ra khi $M = AB \cap (P)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;2;-2)$ chọn vtcp của đường thẳng $AB: \vec{u}=(1;-1;1)$.

Vậy phương trình đường thẳng $AB: \begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \ (t\in\mathbb{R}). \\ z=1+t \end{cases}$

Tọa độ $(x;y;z)$ của M là nghiệm hệ

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=1+t \\ 2x+y+z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=1+t \\ 2.(2+t)+1-t+1+t-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=0 \\ t=-1 \end{cases} \Rightarrow M(1;2;0).$$

Chọn phương án **C**

Câu 68. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;-1;2), B(-2;0;3), C(0;1;-2)$. $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $S=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, $T=12a+12b+c$ có giá trị là

A $T=-1$. **B** $T=3$. **C** $T=-3$. **D** $T=1$.

Lời giải.

Chọn I sao cho $4\cdot\overrightarrow{IA}+3\cdot\overrightarrow{IB}+5\cdot\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Ta tính được $I\left(-\frac{1}{6};\frac{1}{12};\frac{7}{12}\right)$.

Ta thấy $\begin{cases} \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right) \\ \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right). \\ \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right) \end{cases}$

Ta được $\begin{cases} \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2+\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} \\ \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=MI^2+\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC}. \\ \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}=MI^2+\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IA}\right)+\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{IA} \end{cases}$

Khi đó $S=6MI^2+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}+2\cdot\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC}+3\cdot\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}\cdot\left[4\cdot\overrightarrow{IA}+3\cdot\overrightarrow{IB}+5\cdot\overrightarrow{IC}\right]$.

Ta được $S=6MI^2+\underbrace{4\cdot\overrightarrow{IA}+3\cdot\overrightarrow{IB}+5\cdot\overrightarrow{IC}}_{const}$.

Do vậy, biểu thức S đạt giá trị nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất.

Vậy M là hình chiếu vuông góc của $I\left(-\frac{1}{6};\frac{1}{12};\frac{7}{12}\right)$ lên $(Oxy) \Rightarrow M\left(-\frac{1}{6};\frac{1}{12};0\right)$.

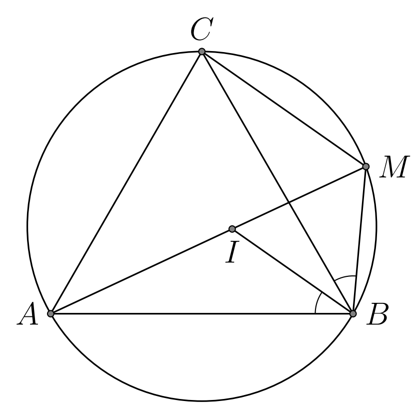
Ta được $\begin{cases} a = -\dfrac{1}{6} \\ b = \dfrac{1}{12} \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow T = -1.$

Chọn phương án A

Câu 69. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(4;1;2)$, $B(1;4;2)$, $C(1;1;5)$, đường tròn (C) là giao của mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-7=0$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z-3=0$. Hỏi có bao nhiêu điểm M thuộc đường tròn (C) sao cho $MA+MB+MC$ đạt giá trị lớn nhất?

A 1. **B** 5. **C** 7. **D** 3.

Lời giải.



Nhận xét các điểm A,B,C cùng thuộc (P) và (S) và tam giác ABC có $AB = AC = BC = 3\sqrt{2}$. Nên bài toán trở thành tìm số điểm M trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đều để $MA+MB+MC$ đạt giá trị lớn nhất.

Giả sử M thuộc cung nhỏ BC.

Trên đoạn MA lấy I sao cho $MB = MI$ suy ra tam giác MBI đều.

Do $\widehat{ABI} = \widehat{CBM}$ (cùng tổng với góc $\widehat{IBC}$ bằng 60°)

nên $\triangle CAI = \triangle CBM$ (c-g-c) $\Rightarrow AI = BM$.

Khi đó, $MA = MI + IA = MC + MB$.

Hay $MA + MB + MC = 2MA$.

Như vậy $MA+MB+MC$ lớn nhất khi và chỉ khi MA lớn nhất khi đó MA là đường kính đường tròn hay M là trung điểm của cung BC.

Tương tự, cho điểm M trên cung nhỏ AB, AC.

Vậy có 3 vị trí điểm M để $MA+MB+MC$ đạt giá trị lớn nhất.

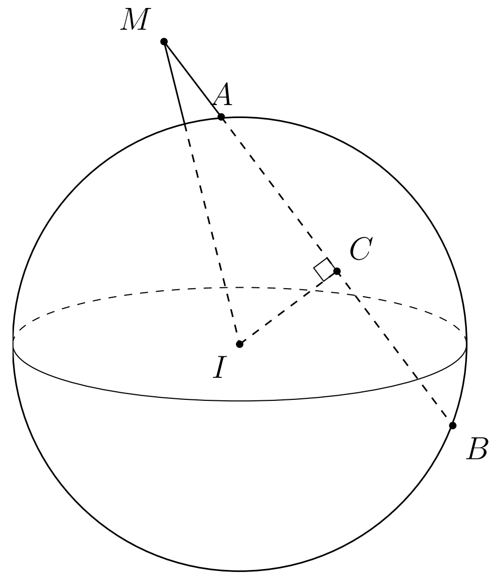
Chọn phương án D

Câu 70. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z=0$ và điểm $M(1;2;-1)$. Một đường thẳng thay đổi qua M cắt (S) tại hai điểm A, B. Tìm giá trị lớn nhất của tổng $MA+MB$.

A 8. **B** 10. **C** $2\sqrt{17}$. **D** $8+2\sqrt{5}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-2)$ và bán kính $R=3$.
Ta có: $MI^2 = 17 > R^2$ nên M nằm ngoài mặt cầu.
Gọi C là trung điểm AB, khi đó ta có: $MA + MB = 2MC$.
Mà $MC \leq MI$, nên $MA + MB \leq 2MI = 2\sqrt{17}$.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi AB đi qua tâm I của (S).



Chọn phương án C

BẢNG ĐÁP ÁN

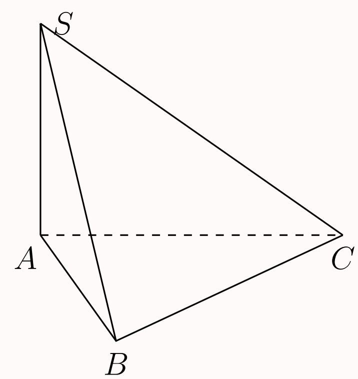
1. A	2. A	3. C	4. B	5. B	6. B	7. D	8. D	9. A	10. A
11. C	12. A	13. A	14. B	15. A	16. A	17. B	18. D	19. C	20. D
21. D	22. B	23. D	24. D	25. A	26. B	27. C	28. B	29. D	30. D
31. D	32. B	33. D	34. D	35. A	36. D	37. A	38. B	39. D	40. D
41. C	42. A	43. D	44. B	45. B	46. C	47. D	48. A	49. A	50. C
51. D	52. D	53. A	54. B	55. A	56. C	57. A	58. C	59. B	60. A
61. B	62. A	63. B	64. D	65. A	66. B	67. C	68. A	69. D	70. C

DẠNG 26. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = \sqrt{2}a$, tam giác AB
vuông cân tại B và $AC = 2a$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng

(A) 30^{o}. (B) 45^{o}. (C) 60^{o}. (D) 90^{o}.



Lời giải.

Ta có $\left.\begin{matrix} SB \cap (ABC) \\ SA \perp (ABC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB trên mặt phẳng (ABC)

Suy ra $(SB,(ABC)) = \widehat{SBA}$.

Do tam giác ABC vuông tại $B \Rightarrow AB^2 + BC^2 = AC^2 \Leftrightarrow 2AB^2 = (2a)^2 \Leftrightarrow AB = a\sqrt{2}$.

Suy ra $\widehat{SBA} = 45^\circ$.

Chọn phương án (B)

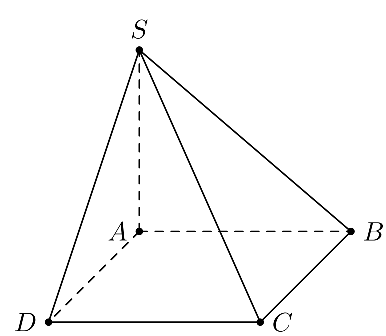
Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Góc giữa SD và $(ABCD)$ bằng

(A) 37°. (B) 45°. (C) 60°. (D) 30°.

Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa SD và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SDA}$.

Mà $\tan \widehat{SDA} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SDA} = 60^\circ$.



Chọn phương án (C)

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A 30°. **B** 90°. **C** 60°. **D** 45°.

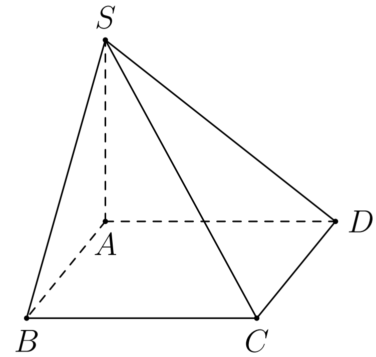
Lời giải.

Ta có AB là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$.

Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng góc giữa SB và AB là góc $\widehat{ABS}$.

Tam giác SAB vuông tại A, $\cos \widehat{ABS} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \widehat{ABS} = 60^\circ$.



Chọn phương án **C**

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$ và $SA = \dfrac{3a}{2}$. Gọi điểm M là trung điểm của cạnh BC và φ là góc giữa đường thẳng SM và mặt phẳng (ABC). Khi đó $\sin\varphi$ bằng

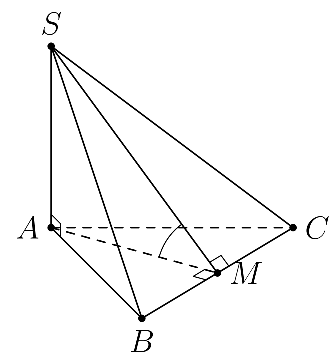
A $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B** $\sqrt{3}$. **C** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Góc giữa SM và (ABC) là góc $\widehat{SMA} = \varphi$.

Ta có $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = a\sqrt{3}$.

Vậy $\sin\varphi = \dfrac{SA}{SM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Chọn phương án **A**

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tâm O. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng đáy. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A $\alpha = 60^\circ$. **B** $\alpha = 75^\circ$. **C** $\tan\alpha = 1$. **D** $\tan\alpha = \sqrt{2}$.

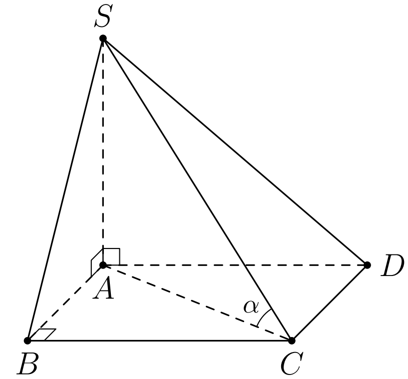
Lời giải.

Ta có AC là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$ nên $\alpha = (SC, (ABCD)) = \widehat{SCA}$.

Trong tam giác ABC vuông cân tại B thì $AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

Tam giác SAC vuông tại A nên ta có

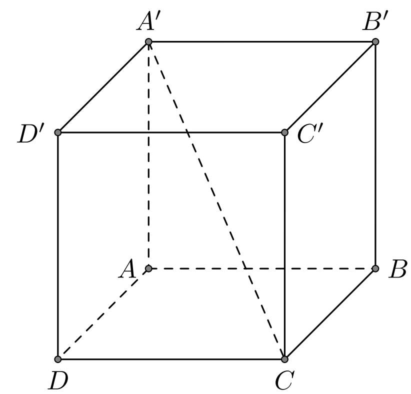
$$\tan\alpha = \frac{SA}{AC} = \frac{2a}{a\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$



Chọn phương án D

Câu 5.

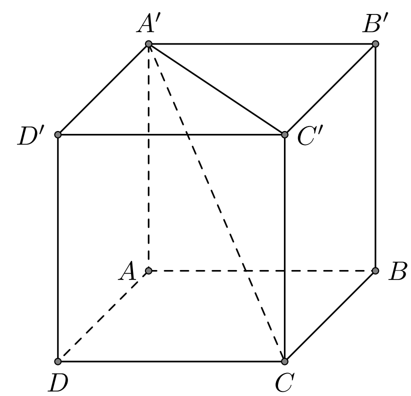
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi α là góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(A'B'C'D')$. Giá trị của $\tan\alpha$ là



A $\tan\alpha = \sqrt{2}$. **B** $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$.

C $\tan\alpha = \dfrac{1}{3}$. **D** $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



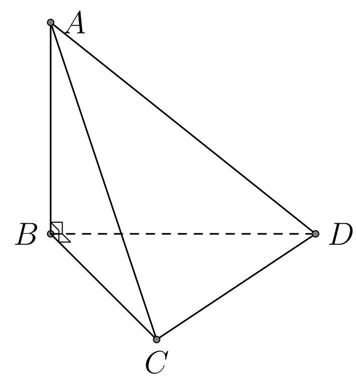
Góc giữa $A'C$ với $(A'B'C'D')$ là $\alpha = \widehat{CA'C'}$.

Có $\tan\alpha = \dfrac{CC'}{A'C'} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn phương án D

Câu 6.

Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh BA, BC, BD vuông góc với nhau từng đôi một (như hình vẽ bên). Khẳng định nào sau đây **sai**?



A Góc giữa AD và (ABC) là góc $\widehat{ADB}$.

B Góc giữa CD và (ABD) là góc $\widehat{CDB}$.

C Góc giữa AC và (BCD) là góc $\widehat{ACB}$.

D Góc giữa AC và (ABD) là góc $\widehat{CAB}$.

Lời giải.

Ta có $CB \perp (ABD)$ nên góc giữa CD và (ABD) là góc $\widehat{CDB}$, góc giữa AC và (ABD) là góc $\widehat{CAB}$.

Ta lại có $AB \perp (BCD)$ nên góc giữa AC và (BCD) là góc $\widehat{ACB}$.

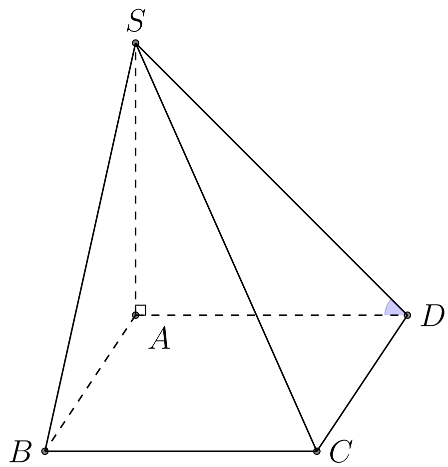
Góc giữa AD và (ABC) chính là góc $\widehat{DAB}$.

Chọn phương án A

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$, $SA = 3a$ và SA vuông góc với mặt đáy. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là

(A) $\widehat{SAD}$. (B) $\widehat{ASD}$. (C) $\widehat{SDA}$. (D) $\widehat{BSD}$.

Lời giải.



Ta có $SA \perp (ABCD)$ tại A nên hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là A.

Do đó $(\widehat{SD, (ABCD)}) = (\widehat{SD, AD}) = \widehat{SDA}$.

Chọn phương án (C)

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

(A) 30°. (B) 45°. (C) 60°. (D) 90°.

Lời giải.

Hình chiếu của S trên $(ABCD)$ là A.

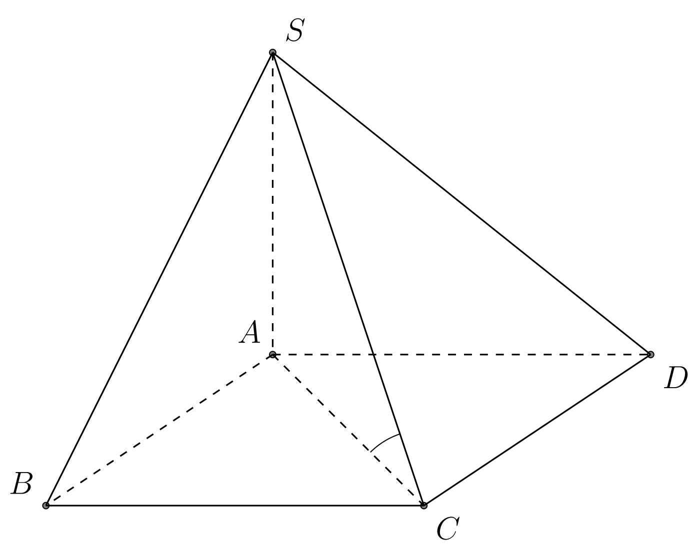
Hình chiếu của C trên $(ABCD)$ là C.

Suy ra AC là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$.

$\widehat{SC, (ABCD)} = \widehat{SC, AC} = \widehat{SCA}$.

$AC = a\sqrt{2}$, $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $\widehat{SCA} = 30^\circ$.



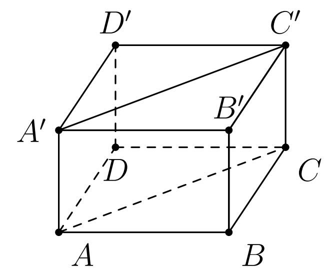
Chọn phương án (A)

Câu 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(ACC'A')$ bằng

(A) 60°. (B) 45°. (C) 90°. (D) 30°.

Lời giải.

Vì $AA' \perp (ABCD)$ nên $(ACC'A') \perp (ABCD)$.
Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(ACC'A')$ bằng 90°.



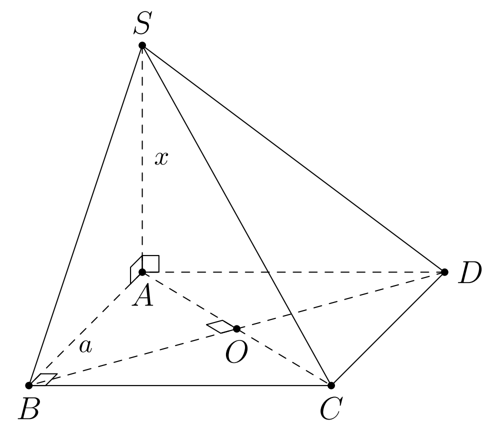
Chọn phương án (C)

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, đường cao $SA = x$. Góc giữa (SBC) và mặt đáy bằng 60°. Tính x.

(A) $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. (B) $a\sqrt{3}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (D) $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Do $SA \perp (ABCD)$ nên $SB \perp BC$. Suy ra góc giữa (SBC) và mặt đáy là $\widehat{SBA} = 60^\circ$.
Trong tam giác vuông SAB ta có
$x = a \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.



Chọn phương án (B)

Câu 11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ bằng bao nhiêu?

(A) 45°. (B) 90°. (C) 0°. (D) 60°.

Lời giải.

Hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ song song nên góc giữa chúng bằng 0°.
Chọn phương án (C)

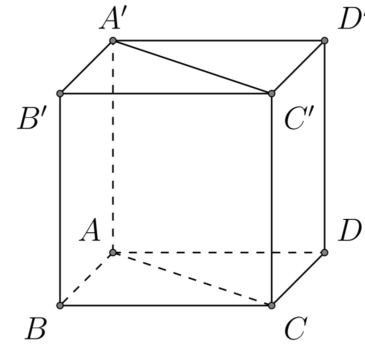
Câu 12. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt phẳng $(ACC'A')$.

(A) 30°. (B) 60°. (C) 90°. (D) 45°.

Lời giải.

Vì $\begin{cases} AA' \perp (ABCD) \\ AA' \subset \left(ACC'A'\right) \end{cases}$ nên $(ACC'A') \perp (ABCD)$.

Vậy góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng $90°$.



Chọn phương án C

B MỨC ĐỘ 2

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy ABC. Tam giác ABC vuông cân tại B và $SA = a\sqrt{2}$, $SB = a\sqrt{5}$. Tính góc giữa SC và mặt phẳng (ABC).

A $45°$. **B** $30°$. **C** $120°$. **D** $60°$.

Lời giải.

Vì $SA \perp (ABC)$ nên góc $\widehat{(SC,(ABC))} = \widehat{(SC, AC)} = \widehat{SCA}$ (vì $\widehat{SCA} < 90°$).

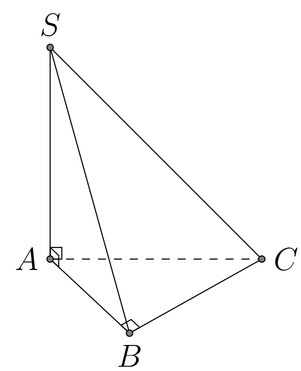
Tam giác SAB vuông tại A có

$$SA = a\sqrt{2}, SB = a\sqrt{5} \Rightarrow AB = \sqrt{SB^2 - SA^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow BC = a\sqrt{3}.$$

Do đó $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3a^2 + 3a^2} = a\sqrt{6}$.

Tam giác SAC có $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30°$.

Vậy $(SC,(ABC)) = \widehat{SCA} = 30°$.



Chọn phương án B

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

A $30°$. **B** $60°$. **C** $75°$. **D** $45°$.

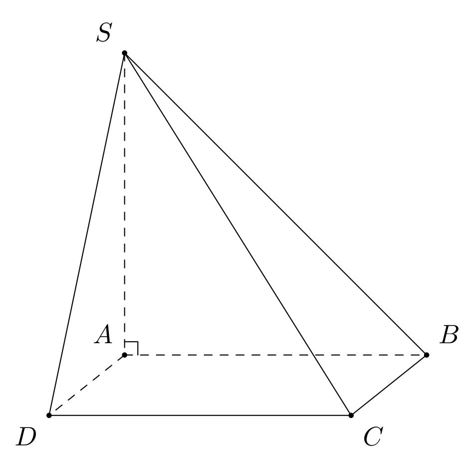
Lời giải.

Có A là hình chiếu S lên mặt phẳng $(ABCD)$.

$\Rightarrow \left(\widehat{SC,(ABCD)}\right) = \widehat{SCA}$.

Có $ABCD$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A có $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SAC} = 30°$.



Chọn phương án (A)

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a$. Gọi φ là góc tạo bởi SB và mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định $\cot\varphi$?

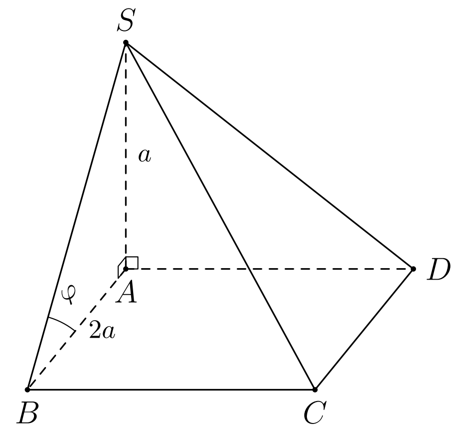
(A) $\cot\varphi = 2$. (B) $\cot\varphi = \dfrac{1}{2}$. (C) $\cot\varphi = 2\sqrt{2}$. (D) $\cot\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra hình chiếu của SB lên mặt phẳng $(ABCD)$ là AB

Do đó $\widehat{(SB,(ABCD))} = \widehat{SB,AB} = \widehat{SBA} = \varphi$ (vì tam giác SAB vuông tại A nên $\widehat{SBA}$ nhọn)

Xét tam giác SAB vuông tại A có $\cot\varphi = \cot\widehat{SAB} = \dfrac{AB}{SA} = 2$



Chọn phương án (A)

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $3a$, SA vuông góc với đáy, $SB = 5a$. Tính sin của góc giữa cạnh SC và mặt đáy $(ABCD)$.

(A) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. (B) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. (C) $\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$.

Lời giải.

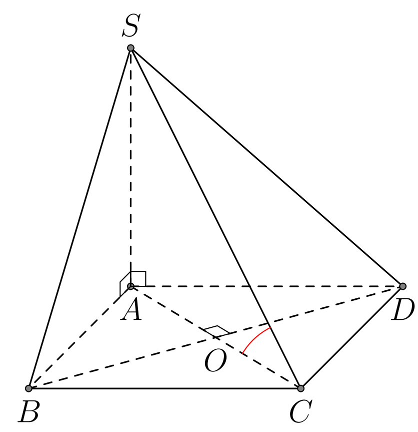
a) Tam giác SAB vuông tại A nên $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = 4a$.

b) Tam giác ABC vuông tại B nên $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 3a\sqrt{2}$.

c) Tam giác SAC vuông tại A nên $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{34}$.

d) Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên $(SC,(ABCD)) = \widehat{SCA}$.

e) Tam giác SAC vuông tại A nên $\sin\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{SC} = \dfrac{2\sqrt{34}}{17}$.

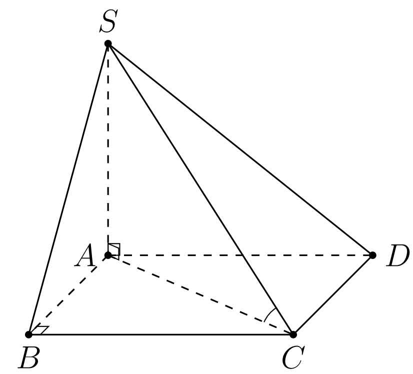


Chọn phương án (D)

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Cạnh SA vuông góc với đáy, $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA = a\sqrt{3}$. Số đo của góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

(A) $30°$. (B) $45°$. (C) $60°$. (D) $75°$.

Lời giải.



Ta có $SC \cap (ABCD) = C$ và $SA \perp (ABCD)$ tại A. Suy ra AC là hình chiếu vuông góc của SC xuống $(ABCD)$.
Vậy góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc giữa SC và AC, chính là $\widehat{SCA}$.
Tam giác ABC vuông tại B nên

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}.$$

Tam giác SAC vuông tại A nên

$$\tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ.$$

Vậy góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°.
Chọn phương án B

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

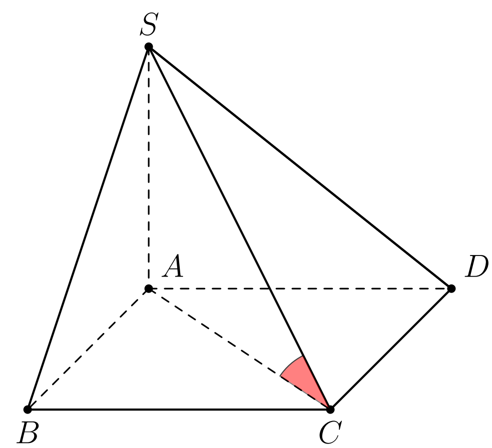
A 30°. B 45°. C 60°. D 75°.

Lời giải.

Do $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa SC và $(ABCD)$ là $\widehat{SCA}$.
Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AC = a\sqrt{2}$.

Ta có $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy : $\widehat{SCA} = 30^\circ$.



Chọn phương án A

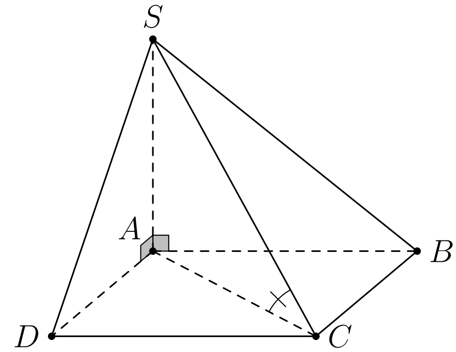
Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$

A 30°. B 60° . C 75° . D 45°.

Lời giải.

Góc giữa SC và $(ABCD)$ là $\angle SCA$;

Suy ra $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{SC} = \dfrac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ nên $\angle SCA = 30^\circ$.



Chọn phương án (A)

Câu 20. Hình chóp tứ giác đều có cạnh bằng a, chiều cao $h = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Góc giữa cạnh bên với mặt phẳng đáy là

(A) 60°. (B) 15°. (C) 45°. (D) 30°.

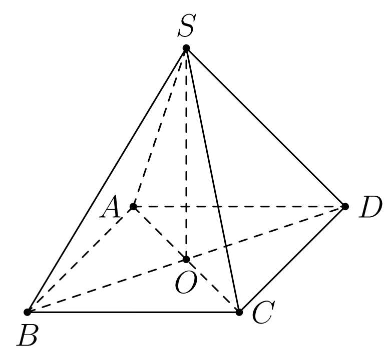
Lời giải.

Giả sử hình chóp tứ giác đều là $S.ABCD$ và O là tâm hình vuông $ABCD$. Do giả thiết $SO \perp (ABCD)$ suy ra góc giữa cạnh bên và mặt đáy là góc $\widehat{SBO}$.

Xét $\triangle SOB$ ta có $BO = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Mà $SO = h$ nên $SO = OB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\triangle OSB$ vuông cân đỉnh O suy ra $\widehat{SBO} = 45^\circ$.



Chọn phương án (C)

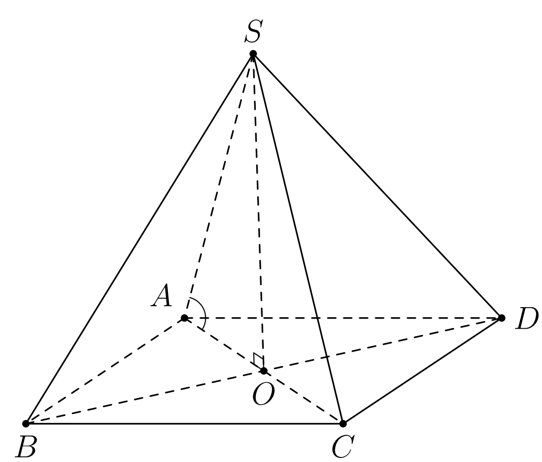
Câu 21. Cosin góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy của hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau là

(A) $\dfrac{1}{3}$. (B) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD và giả sử tất cả các cạnh của hình chóp bằng a. Hình chóp $S.ABCD$ đều nên $SO \perp (ABCD)$, suy ra góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng góc $\widehat{SAO}$. Ta có

$$\cos \widehat{SAO} = \frac{AO}{SA} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



Chọn phương án (D)

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, BC = a\sqrt{3}$ cạnh $SA = 2a, SA \perp (ABCD)$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SC với mặt phẳng $(ABCD)$. Giá trị $\tan \alpha$ bằng

A 2. **B** $\sqrt{2}$. **C** 1. **D** $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Phương pháp: Gọi a' là hình chiếu vuông góc của a trên mặt phẳng (P).

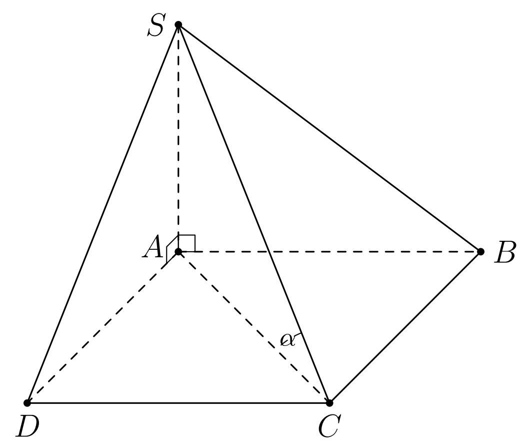
Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) là góc giữa đường thẳng a và a'.

Cách giải: $ABCD$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SC, (ABCD)) = \widehat{SCA} \Rightarrow \alpha = \widehat{SCA}$

$\Rightarrow \tan \alpha = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{2a}{2a} = 1$



Chọn phương án C

Câu 23. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **đúng**?

A Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) .

B Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì a song song với b.

C Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho (với điều kiện đường thẳng không vuông góc với mặt phẳng).

D Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng $[P]$ bằng góc giữa đường thẳng a và đường thẳng b với b vuông góc với (P).

Lời giải.

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho (với điều kiện đường thẳng không vuông góc với mặt phẳng).

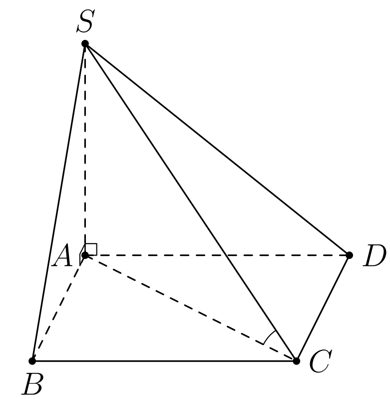
Chọn phương án C

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hinh vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với $(ABCD)$. Góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng

A 45°. **B** 30°. **C** 60°. **D** 90°.

Lời giải.

Do giả thiết ta có $SA \perp (ABCD)$ suy ra $SA \perp AC$ và AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$.
Khi đó góc $(SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$.
Xét tam giác SAC ta có $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC}$.
Mà $AC = \sqrt{2}a$ nên $\tan \widehat{SCA} = 1 \Leftrightarrow \widehat{SCA} = 45°$.



Chọn phương án A

Câu 25. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = a$, $SA = \sqrt{3}a$ và vuông góc với $(ABCD)$. Tính góc giữa hai đường thẳng SB và CD.

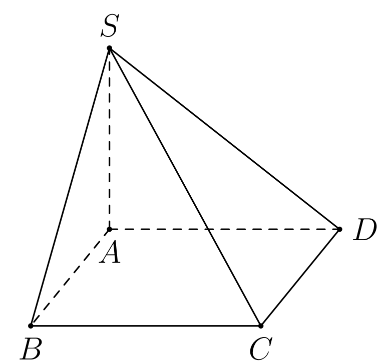
A $60°$. **B** $30°$. **C** $45°$. **D** $90°$.

Lời giải.

Ta có $AB \parallel CD$ suy ra $(SB, CD) = (SB, AB) = \widehat{SBA}$.
Trong tam giác SAB vuông tại A, ta có

$$\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60°.$$

Vậy $(SB, CD) = 60°$.



Chọn phương án A

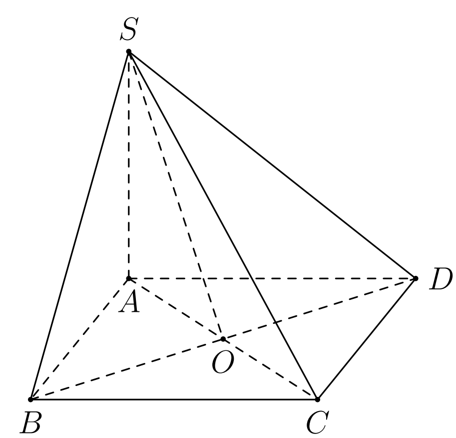
Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60°$, cạnh bên $SA = \sqrt{2}a$ và SA vuông góc với $(ABCD)$. Tính góc giữa SB và (SAC).

A $90°$. **B** $30°$. **C** $45°$. **D** $60°$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD.
Do $ABCD$ là hình thoi nên $BO \perp AC$ (1).
Lại có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BO$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $BO \perp (SAC)$.
Vậy $(SB, (SAC)) = (SB, SO) = \widehat{BSO}$.
Trong tam giác vuông BOA, ta có $\widehat{ABO} = 30°$ nên suy ra $AO = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a}{2}$ và $BO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Trong tam giác vuông SAO, ta có

$$SO = \sqrt{SA^2 + AO^2} = \sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{3a}{2}.$$



$BO \perp (SAC) \Rightarrow BO \perp SO \Rightarrow \Delta SOB$ vuông tại O.

Ta có $\tan\widehat{BSO} = \dfrac{BO}{SO} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{2}{3a} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

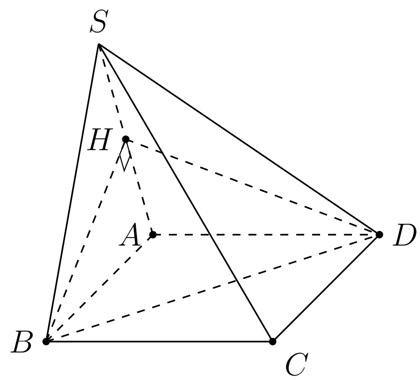
Vậy $(SB, (SAC)) = (SB, SO) = \widehat{BSO} = 30^\circ$.

Chọn phương án B

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng BD với (SAD). Tính $\sin\alpha$.

A $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B** $\dfrac{1}{2}$. **C** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **D** $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

Lời giải.



Trong (SAB), kẻ $BH \perp SA\,(H \in SA)$. (1)

Ta có $\begin{cases}(SAB) \perp (ABCD)\\(SAB) \cap (ABCD) = AB\\AD \perp AB\end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB)$, do đó $AD \perp BH$.

Kết hợp với (1) suy ra $BH \perp (SAD)$.Do đó HD là hình chiếu của BD trên (SAD).

Từ đó ta có $\alpha = (BD, (SAD)) = (BD, HD) = \widehat{BDH}$.

Tam giác SAB đều cạnh a nên $BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Hình vuông $ABCD$ cạnh a nên $BD = a\sqrt{2}$.

Xét $\triangle BDH$ vuông tại H, ta có

$$\sin\widehat{BDH} = \frac{BH}{BD} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Chọn phương án C

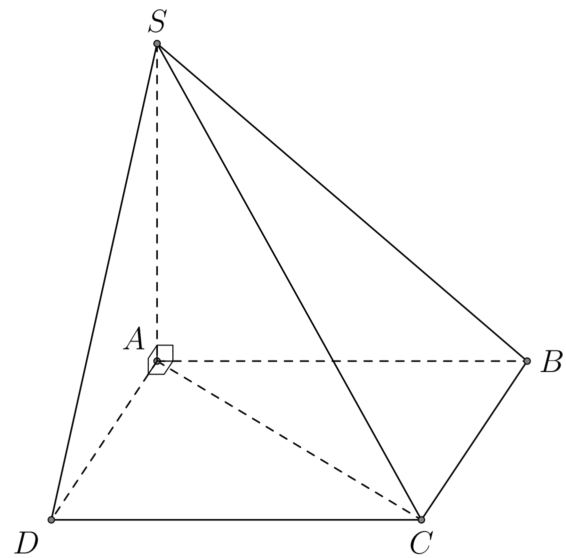
Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

A 30°. **B** 60°. **C** 75°. **D** 45°.

Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABCD)$ tại A và $SC \cap (ABCD) = C$ nên AC là hình chiếu của SC lên $ABCD$.
Suy ra góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCA}$.
Ta có

$$\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^\circ.$$

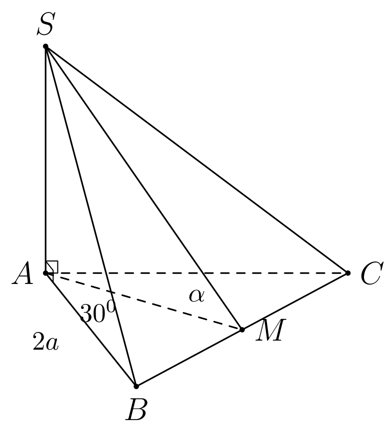


Chọn phương án A

Câu 29. Cho hình chop $SABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC đều cạnh $2a$, SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 30°. Khi đó (SBC) tạo với đáy một góc x. Tính $\tan x$.

A $\tan x = 2$. **B** $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **C** $\tan x = \frac{3}{2}$. **D** $\tan x = \frac{2}{3}$.

Lời giải.



Đáp án là D

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow AB$ là hình chiếu của AB lên (ABC).

Do đó $\widehat{SBA} = \widehat{(SB; (ABC))} = 30^\circ$, $SA = AB \tan 30^\circ = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Gọi M là trung điểm của BC, ta có

$\triangle ABC$ đều cạnh $2a \Rightarrow AM = \frac{2a\sqrt{3}}{2}$ và $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ AM \perp BC \\ SM \perp BC \end{cases} \Rightarrow \widehat{SMA} = \widehat{(SBC; ABC)} = x$.

Vậy $\tan x = \frac{SA}{AM} = \frac{2a\sqrt{3}}{3} . \frac{2}{2a\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$.

Chọn phương án D

Câu 30. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, chiều cao của chóp bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

Ⓐ 60°. Ⓑ 75°. Ⓒ 30°. Ⓓ 45°.

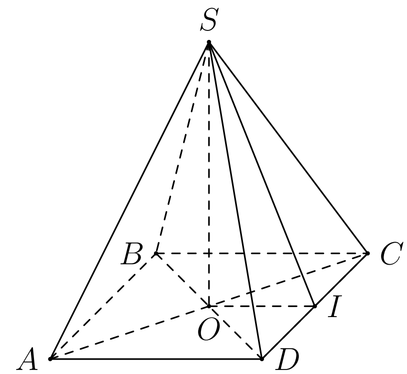
Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$, hạ $OI \perp CD$

$\Rightarrow \left(\widehat{(SCD),(ABCD)}\right) = \widehat{SIO} = \alpha$

Ta có $OI = \dfrac{a}{2}; SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{SO}{OI} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SIO} = \alpha = 60^\circ$



Chọn phương án Ⓐ

Câu 31. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}$, $OA = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC).

Ⓐ 30°. Ⓑ 60°. Ⓒ 90°. Ⓓ 45°.

Lời giải.

Trong $\triangle OBC$ kẻ đường cao OH.

Theo đề bài ta có $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp BC$.

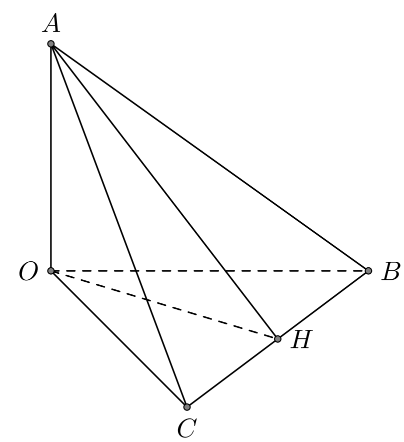
Lại có $BC \perp OH$ nên $BC \perp AH$.

Do đó góc giữa (ABC) và (OBC) là góc $\widehat{AHO}$.

Trong tam giác OBC vuông tại O có OH là đường cao nên

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{6a^2} + \frac{1}{6a^2} = \frac{1}{3a^2} \Rightarrow OH = a\sqrt{3}.$$

Từ đó $\tan\widehat{AHO} = \dfrac{OA}{OH} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{AHO} = 30^\circ$.



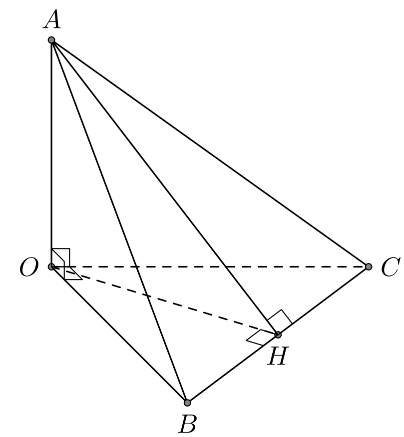
Chọn phương án Ⓐ

Câu 32. Cho tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}$, $OA = a$. Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) bằng

Ⓐ 30°. Ⓑ 90°. Ⓒ 45°. Ⓓ 60°.

Lời giải.

Ta có $(ABC) \cap (OBC) = BC$.
Trong (OBC) kẻ $OH \perp BC$ tại H khi đó $BC \perp (OAH)$.
Khi đó $(OAH) \cap (ABC) = AH$ và $(OAH) \cap (OBC) = OH$.
Do đó $((ABC);(OBC)) = (OH, AH) = \widehat{AHO}$.
Xét Δ vuông OBC ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2} = \dfrac{1}{3a^2}$
$\Rightarrow OH = a\sqrt{3}$.
Trong Δ vuông OAH ta có $\tan AHO = \dfrac{OA}{OH} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
$\Rightarrow \widehat{AHO} = 30°$.
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) bằng $30°$.



Chọn phương án (A)

Câu 33. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính cosin của góc giữa hai mặt bên không liền kề nhau.

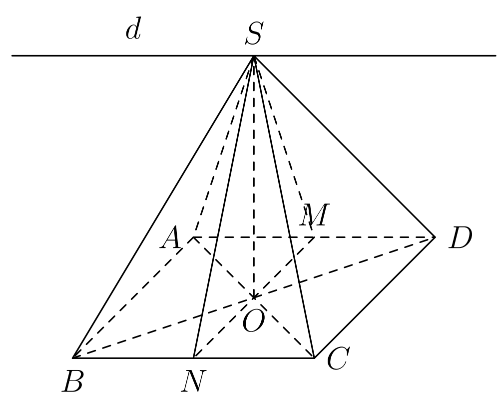
(A) $\dfrac{1}{3}$. (B) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

Hình chóp tứ diện đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a, ta tìm góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Gọi M, N là trung điểm các cạnh AD và BC, khi đó $SM \perp AD$ và $SN \perp BC$ (do các tam giác SBC; SAD là các tam giác đều).

Vì $BC // AD$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng d qua S và song song AD, BC.
Vì $SM \perp AD$ và $SN \perp BC$ nên $SM \perp d$ và $SN \perp d$ mà $SM \subset (SAD)$; $SN \subset (SBC)$ góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là góc $\widehat{MSN}$.
Mặt bên là các tam giác đều cạnh a nên $SM = SN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $MN = AB = a$.
Khi đó



$$\cos \widehat{MSN} = \frac{SM^2 + SN^2 - MN^2}{2SM \cdot SN} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{3a^2}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Chú ý khi giải: Các em có thể tính SO theo tỉ số lượng giác và suy ra $\widehat{MSN} = 2\widehat{MSO}$.
Chọn phương án (A)

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết $SA = a\sqrt{3}$, $AC = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng bao nhiêu?

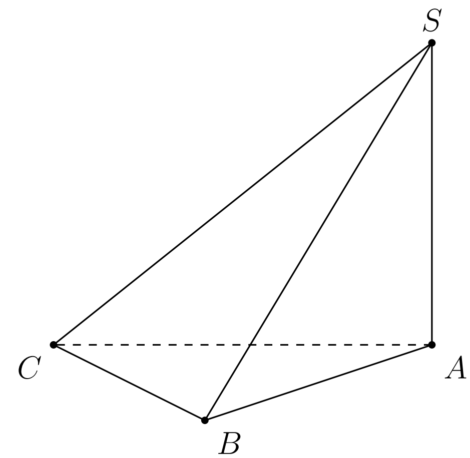
(A) $30°$. (B) $45°$. (C) $60°$. (D) $90°$.

Lời giải.

Ta có AB là hình chiếu của SB lên mặt phẳng (ABC) nên góc tạo bởi SB và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{SBA}$.

Ta có $AB = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = a$ và $\tan\widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.



Chọn phương án C

Câu 35. Cho tứ diện $S.ABC$ có các tam giác SAB, SAC và ABC vuông cân tại A, $SA = a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC), khi đó $\tan\alpha$ bằng

A $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C** $\sqrt{3}$. **D** $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp AC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.

Gọi I là trung điểm của BC. Ta có

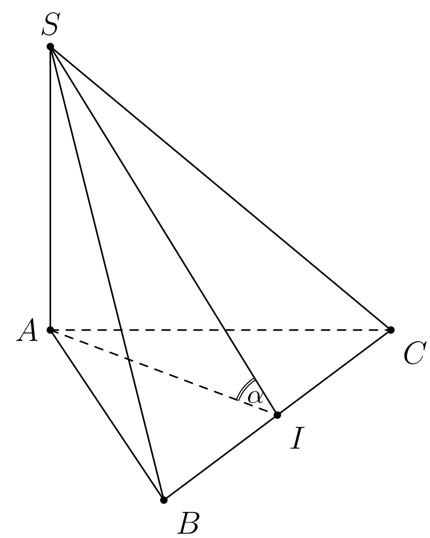
$\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI)$.

Suy ra góc giữa mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc giữa SI và AI hay là góc $\widehat{SIA} = \alpha$.

Xét tam giác SAI vuông tại A. Ta có

$AI = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

$\tan\alpha = \dfrac{SA}{AI} = \sqrt{2}$.



Chọn phương án D

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $SA \perp (ABC)$, $SA = \sqrt{3}$ cm, $AB = 1$ cm. Mặt bên (SBC) hợp với mặt đáy góc bằng

A 90°. **B** 60°. **C** 45°. **D** 30°.

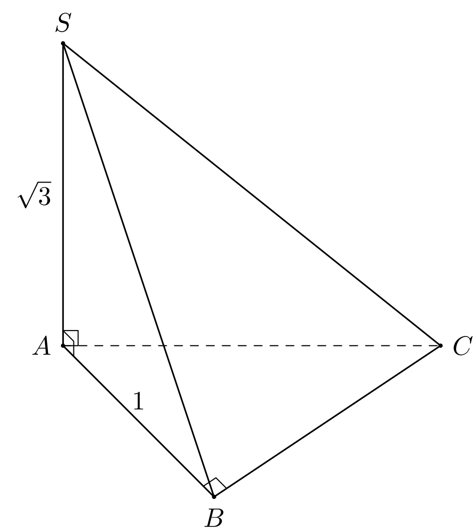
Lời giải.

Vì $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases}$ nên $BC \perp (SAB)$.

Khi đó góc giữa (SBC) hợp với mặt đáy bằng $\widehat{SBA}$.

Xét tam giác SAB vuông tại $A \Rightarrow \tan\widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \widehat{SBA} = 60°$.



Chọn phương án B

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB = SB = a, SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

A 30°. **B** 45°. **C** 60°. **D** 90°.

Lời giải.

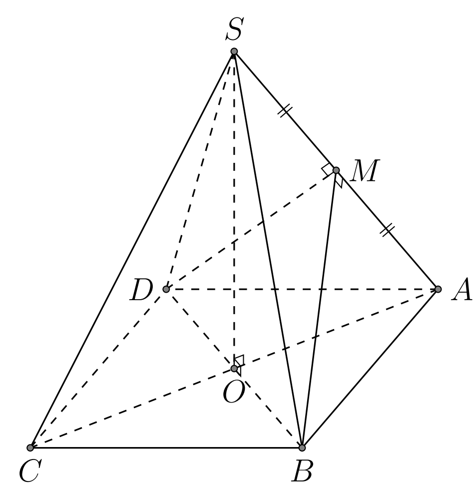
Do $AB = SB$ nên tam giác SAB cân tại B, từ giả thiết dễ thấy $SD = SB, AD = AB$ nên tam giác SAD cân tại D.

Gọi M là trung điểm của SA, khi đó $BM \perp SA, DM \perp SA$, suy ra $\widehat{BMD}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

Từ $SB = AB = SD = AD = a$ ta có $\Delta SBD = \Delta ABD \Rightarrow OA = SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow MO = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot SO = \dfrac{a\sqrt{12}}{6}; OD = OB = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \tan\widehat{MDO} = 1 \Rightarrow \widehat{MDO} = 45° \Rightarrow \widehat{BMD} = 90°$.



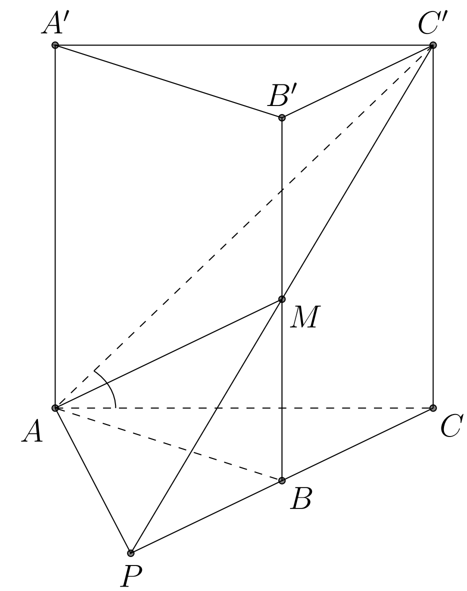
Chọn phương án D

Câu 38. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Gọi M là trung điểm của BB'. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (AMC') và (ABC).

A $\varphi = 60°$. **B** $\varphi = 45°$. **C** $\varphi = 30°$. **D** $\varphi = 90°$.

Lời giải.

Gọi P là giao điểm của BC và $C'M$. Khi đó AP là giao tuyến của (AMC') và (ABC). Vì $MB = \frac{1}{2}CC'$ và $MB \parallel CC'$ nên MB là đường trung bình của $\triangle CC'P$, suy ra B là trung điểm của CP. Ta có $AB = BP = BC$ suy ra tam giác ACP vuông tại A. Mặt khác, $AP \perp AC$ và $AP \perp AA'$ nên $AP \perp (AA'C'C) \Rightarrow AP \perp AC'$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (AMC') và (ABC) là góc CAC'. Tam giác CAC' vuông cân tại C nên $\widehat{CAC'} = 45°$. Vậy $\varphi = 45°$.



Chọn phương án B

C MỨC ĐỘ 3

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{ABC} = 60°$. Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm tam giác ABC. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SCD), tính $\sin\varphi$ biết rằng $SB = a$.

A $\sin\varphi = \frac{1}{4}$. **B** $\sin\varphi = \frac{1}{2}$. **C** $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **D** $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

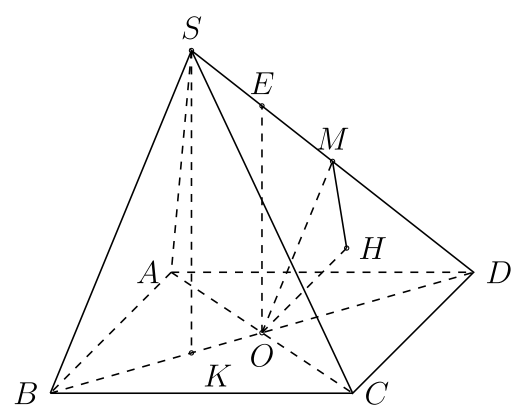
Lời giải.

Gọi M là trung điểm của SD, nhận xét góc giữa SB và (SCD) cũng bằng góc giữa OM và (SCD) (Vì $OM \parallel SB$). Gọi H là hình chiếu của O trên $(SCD) \Rightarrow (OM, (SCD)) = (OM, MH) = OMH$. Trong (SBD) kẻ $OE \parallel SK$, trong đó K là hình chiếu của S lên mặt đáy, khi đó tứ diện $OECD$ là tứ diện vuông nên

$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OE^2}$.

Ta cũng có $OC = \frac{a}{2}$, $OD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Lại có

$\frac{OE}{SK} = \frac{OD}{KD} = \frac{3}{4} \Rightarrow OE = \frac{3}{4}SK$,



mà $SK = \sqrt{SB^2 - BK^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Do đó $OE = \frac{3}{4}SK = \frac{3}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Suy ra $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2} = \frac{a^2}{8} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Tam giác OMH vuông tại H có $OM = \frac{1}{2}SB = \frac{a}{2}$, $OH = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

$\Rightarrow \sin\widehat{OMH} = \frac{OH}{OM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn phương án D

Câu 40. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = BC = a$, $BB' = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BCC'B')$.

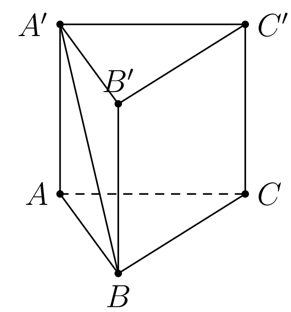
A $60°$. **B** $90°$. **C** $45°$. **D** $30°$.

Lời giải.

Ta có: $\left.\begin{array}{l} A'B' \perp B'C' \\ A'B' \perp BB' \end{array}\right\} \Rightarrow A'B' \perp (BCC'B')$ nên BB' là hình chiếu của $A'B$ trên $(BCC'B')$.

Vậy góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ là góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và BB' và là góc $\widehat{A'BB'}$.

Lại có: $\tan\widehat{A'BB'} = \dfrac{A'B'}{BB'} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, do đó $\widehat{A'BB'} = 30°$.



Chọn phương án D

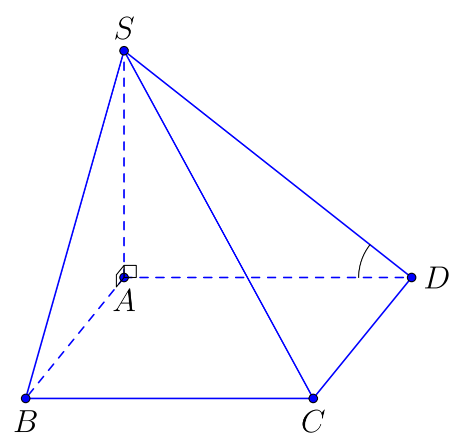
Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **B** 45^0. **C** 60^0. **D** 30^0.

Lời giải.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SDA}$.

Tam giác SAD vuông tại A nên $\tan\widehat{SDA} = \dfrac{SA}{AD} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SDA} = 60^0$.



Chọn phương án C

Câu 42. Cho hình chóp có S.ABC đáy ABC là tam giác vuông cân $BA = BC = a$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90°$ biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) là

A $\dfrac{\pi}{6}$. **B** $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **C** $\dfrac{\pi}{3}$. **D** $\dfrac{\pi}{4}$.

Lời giải.

— Gọi là hình D chiếu vuông góc của S lên (ABC) và H chiếu vuông góc của D lên SC. Khi đó

– $\begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp SD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AD.$

– $\begin{cases} BC \perp SC \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SDC) \Rightarrow BC \perp DC>$ Suy ra $ABCD$ là hình vuông và $CD = a$.

— Ta có $AD \parallel BC$ nên $AB \parallel (SBC)$. Do đó $d_{(A(SBC))} = d_{(D(SB))} = DH \Rightarrow DH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

— VìDC là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$ nên $\widehat{SCD}$ là góc của SC và (ABC).

— Ta có $\sin\widehat{SCD} = \dfrac{DH}{DC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{SCD} = \dfrac{\pi}{3}$.

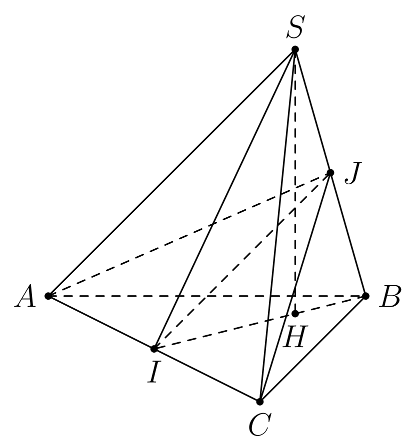
Chọn phương án C

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SC = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, $SB = a\sqrt{2}$, $AB = BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và $AC = a$. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC).

A $90°$. **B** $45°$. **C** $30°$. **D** $60°$.

Lời giải.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC, SB, H là hình chiếu vuông góc của điểm S trên IB.



Do giả thiết $SA = SC$ nên $\triangle SAC$ cân đỉnh S suy ra $SI \perp AC$.

Xét $\triangle SAB$ và $\triangle SBC$ ta có $\begin{cases} SA = SC \\ BA = BC \\ SB \text{ chung.} \end{cases}$

Suy ra $\triangle SAB = \triangle SCB$ nên $JA = JC$. Khi đó $\triangle JAC$ cân đỉnh J.

Mà I là trung điểm của AC nên $IJ \perp AC$ (1).

Mặt khác $\triangle SAC$ cân đỉnh S nên $SI \perp AC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AC \perp (SIB)$ nên $AC \perp SH$.

Do đó $\begin{cases} SH \perp AC \\ SH \perp BI \end{cases}$ suy ra $SH \perp (ABC)$. Nên $\widehat{(SB,(ABC))} = \widehat{SBI}$.

Xét $\triangle SIA$ theo định lý Py-ta-go $SA^2 = SI^2 + IA^2$ suy ra

$SI = \sqrt{SA^2 - AI^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Tương tự trong $\triangle IAB$ ta có $IB = \sqrt{AB^2 - AI^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a}{2}$.

Khi đó, xét $\triangle SIB$ theo định lý hàm số côsin ta có

$$\cos\widehat{SBI} = \frac{SB^2 + IB^2 - SI^2}{2 \cdot SB \cdot IB}$$

$$= \frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2\cdot a\sqrt{2}\cdot \frac{a}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vì $0 < \widehat{SBI} < 90^\circ$ nên $\cos\widehat{SBI} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \widehat{SBI} = 45^\circ$.

Chọn phương án B

Câu 44. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AC = 1$, $BC = 1$, $AA' = 1$. Tính góc giữa AB' và $(BCC'B')$.

A 45°. **B** 90°. **C** 30°. **D** 60°.

Lời giải.

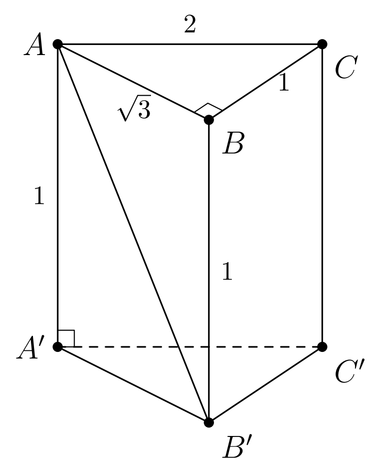
Ta có: $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCC'B')$.

$\Rightarrow BB'$ là hình chiếu của AB' lên mặt phẳng $(BCC'B')$.

Do đó: $(AB', (BCC'B')) = (AB', BB') = \widehat{AB'B}$.

Xét $\Delta ABB'$ vuông tại B ta có: $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{3}, BB' = 1$.

Suy ra $\tan\widehat{AB'B} = \dfrac{AB}{BB'} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{AB'B} = 60^\circ$.



Chọn phương án D

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a và $SO \perp (ABCD)$, $SA = 2a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC. Tính góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$.

A $\dfrac{\pi}{6}$. **B** $\dfrac{\pi}{3}$. **C** $\arctan 2$. **D** $\dfrac{\pi}{6}$.

Lời giải.

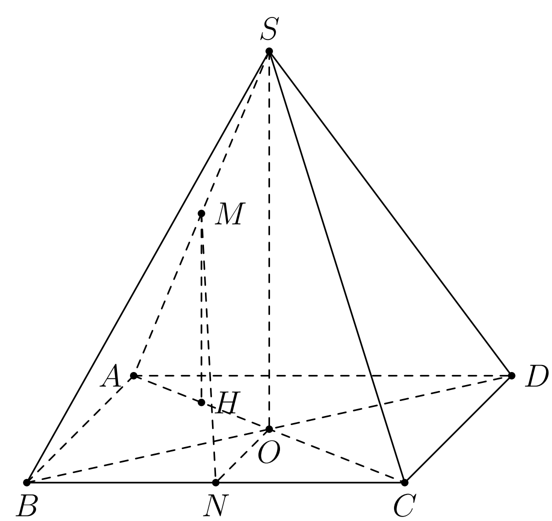
Cách 1: Gọi H là trung điểm của AO. Ta có $HM \parallel SO$. Mà $SO \perp (ABCD) \Rightarrow MH \perp (ABCD) \Rightarrow H$ là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng $(ABCD)$. Suy ra HN là hình chiếu vuông góc của MN trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Do đó $(\widehat{MN, (ABCD)}) = (\widehat{MN; MH}) = \widehat{MNH}$.

Ta có $OA = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$HM = \dfrac{1}{2}SO = \dfrac{1}{2}\sqrt{SA^2 - OA^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{8a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{30}}{4}$,

$HC = \dfrac{3}{4}AC = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.

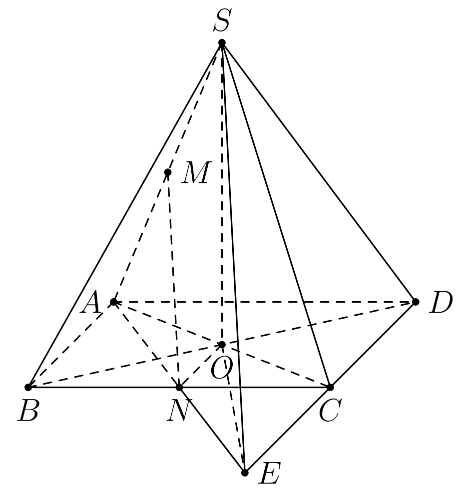


Ta có

$$HN^2 = HC^2 + NC^2 - 2 \cdot HC \cdot NC \cdot \cos 45^\circ = \frac{9a^2}{8} + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5a^2}{8} \Rightarrow HN = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

Xét tam giác vuông HMN, ta có $\widehat{MNH} = \frac{HM}{HN} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{MNH} = \frac{\pi}{3}$.

Cách 2:



Gọi $E = AN \cap CD$, suy ra E đối xứng với D qua C.
Ta có $MN \parallel SE$ nên

$$(\widehat{MN, (ABCD)}) = (\widehat{SE, (ABCD)}) = (\widehat{SE, OE}) = \widehat{SEO}.$$

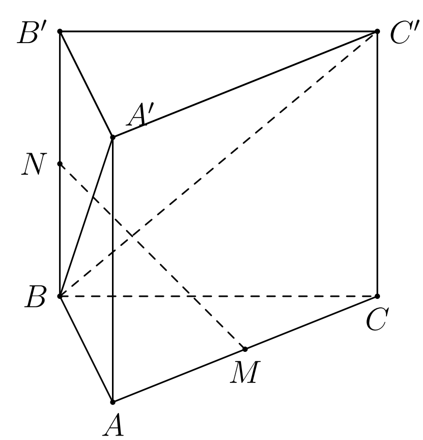
$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{a\sqrt{30}}{2}$.
Gọi K là trung điểm của CD.
Ta có $OE = \sqrt{OK^2 + KE^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.
Ta có

$$\tan \widehat{SEO} = \frac{SO}{OE} = \frac{a\sqrt{30}}{2} \cdot \frac{2}{a\sqrt{10}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SEO} = \frac{\pi}{3}$$

Chọn phương án B

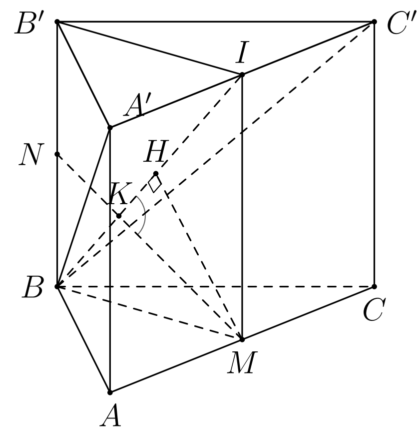
Câu 46.

Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Điểm M và N tương ứng là trung điểm các đoạn AC, BB'. Cô-sin góc giữa đường thẳng MN và $(BA'C')$ bằng



A $\frac{3\sqrt{21}}{14}$. **B** $\frac{4\sqrt{21}}{21}$. **C** $\frac{\sqrt{105}}{21}$. **D** $\frac{\sqrt{7}}{14}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của $A'C' \Rightarrow BMIB'$ là hình chữ nhật.

Gọi $K = MN \cap BI$.

Ta có $\begin{cases} IM \perp A'C' \\ BI \perp A'C' \end{cases} \Rightarrow A'C' \perp (BMI)$.

Suy ra $\begin{cases} (BMI) \perp (A'C'B) \\ (BMI) \cap (A'C'B) = BI \end{cases}$.

Trong mặt phẳng (BMI), dựng $MH \perp BI$

$\Rightarrow MH \perp (A'C'B)$.

$\Rightarrow \widehat{(MN;(BA'C'))} = \widehat{(MK;(BA'C'))} = \widehat{MKH} = \widehat{MKI}$.

Ta có $\triangle NKB \sim \triangle MKI \Rightarrow \dfrac{NK}{MK} = \dfrac{BK}{IK} = \dfrac{NB}{MI} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $\begin{cases} NK = \dfrac{1}{2}MK \\ IK = 2KB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} MK = \dfrac{2}{3}MN = \dfrac{2}{3}a \\ IK = \dfrac{2}{3}IB = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{7}}{2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}. \end{cases}$

Áp dụng định lý Cô-sin trong tam giác $\triangle IKM$, ta có:

$$\cos\widehat{MKI} = \frac{IK^2 + MK^2 - IM^2}{2 \cdot IK \cdot MK} = \frac{\dfrac{7a^2}{9} + \dfrac{4a^2}{9} - a^2}{2 \cdot \dfrac{a\sqrt{7}}{3} \cdot \dfrac{2a}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{14}.$$

Chọn phương án D

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

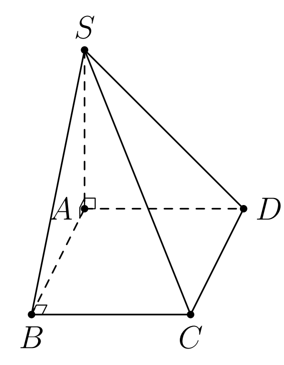
A 30°. **B** 90°. **C** 60°. **D** 45°.

Lời giải.

Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SBA}$.

Tam giác SAB vuông tại A có $\cos\widehat{SBA} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $\widehat{SBA} = 60^\circ$.



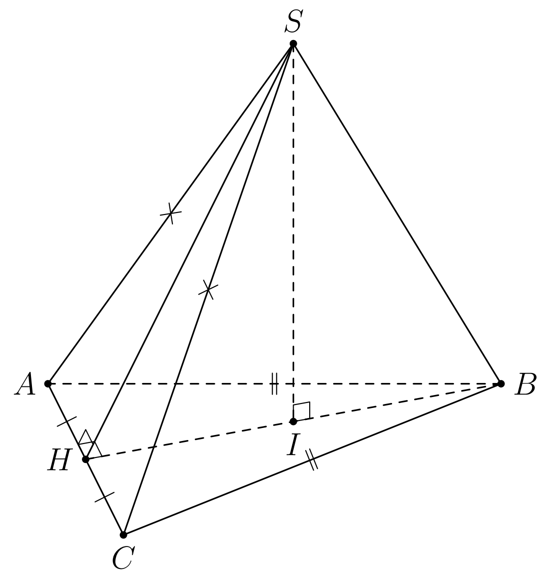
Chọn phương án C

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SC = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, $SB = a\sqrt{2}$, $AB = BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $AC = a$. Tính góc $(SB, (ABC))$.

A 90°. **B** 45°. **C** 30°. **D** 60°.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AC.
Do tam giác SAC cân tại S nên $SH \perp AC$, tam giác BAC cân tại B nên $BH \perp AC$ suy ra $AC \perp (SHB)$.
Gọi I là hình chiếu của S trên HB. Suy ra $SI \perp (ABC)$.
Do đó $(SB,(ABC)) = \widehat{SBI} = \widehat{SBH}$.



— Tam giác SHC vuông tại H có

$$SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2};$$

— Tam giác BHC vuông tại H có

$$HB = \sqrt{BC^2 - HC^2} = \frac{a}{2};$$

— $\cos\widehat{SBH} = \dfrac{SB^2 + BH^2 - SH^2}{2 \cdot SB \cdot BH} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy góc $\widehat{SBH} = 45^\circ$.

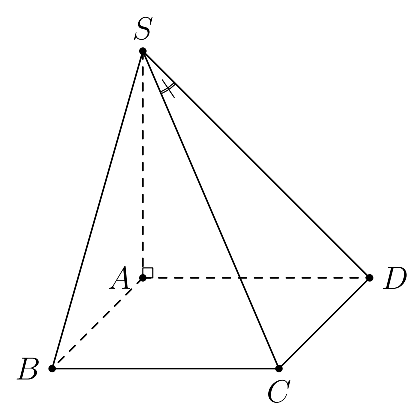
Chọn phương án B

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tìm số đo của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD).

A 45°. **B** 30°. **C** 90°. **D** 60°.

Lời giải.

Ta có $CD \perp AD$ và $CD \perp SA$ nên $CD \perp (SAD)$. Khi đó SD là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng (SAD). Do đó góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD) chính là góc giữa SC và SD và đó là $\widehat{CSD}$.
Ta có $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{3}$.
$\tan\widehat{CSD} = \dfrac{CD}{SD} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ hay $\widehat{CSD} = 30^\circ$.



Vậy số đo của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD) là 30°.

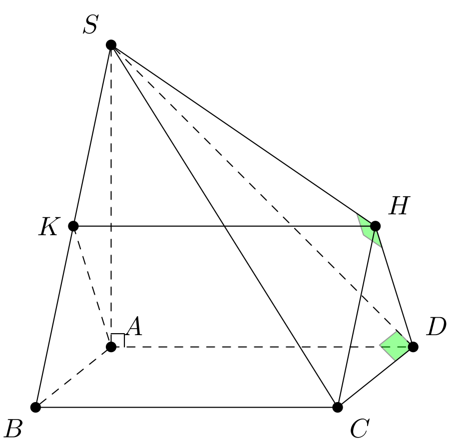
Chọn phương án B

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC). Khẳng định nào dưới đây đúng?

A $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$. **B** $\tan\varphi = \dfrac{1}{7}$. **C** $\tan\varphi = \sqrt{7}$. **D** $\tan\varphi = -\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải.

Gọi K là trung điểm đoạn SB. Vì $AB = SA = a$ nên tam giác SAB vuông cân tại A. Suy ra $AK = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Mặt khác, lại có $AK \perp SB$, $BC \perp (SAB)$ nên $AK \perp (SBC)$.
Dựng hình bình hành $AKHD$ như hình vẽ, suy ra $HD \perp (SAC)$.
Do đó, hình chiếu của SD trên (SBC) là SH. Góc $\widehat{DSH}$ là góc giữa SD và mặt phẳng (SBC).



Xét tam giác SHD vuông tại H, có $HD = AK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $SD = 2a$.
Vậy

$$\tan\varphi = \tan\widehat{DSH} = \frac{HD}{SH} = \frac{HD}{\sqrt{SD^2 - HD^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

Chọn phương án (A)

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là α. Khi đó $\tan\alpha$ bằng

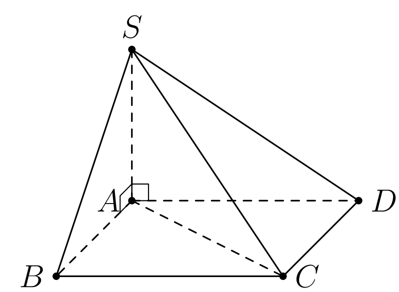
(A) $\sqrt{2}$. **(B)** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **(C)** 1. **(D)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Vì $SA \perp (ABCD)$ tại A nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$. Do đó

$$\left(\widehat{SC, (ABCD)}\right) = \left(\widehat{SC, AC}\right) = \widehat{SCA}.$$

Xét $\triangle SAC$ vuông tại A có $SA = a$ và $AC = a\sqrt{2}$, suy ra $\tan\alpha = \tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.



Chọn phương án (D)

Câu 52. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a. Côsin của góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **(B)** $\dfrac{1}{3}$. **(C)** $\dfrac{1}{2}$. **(D)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

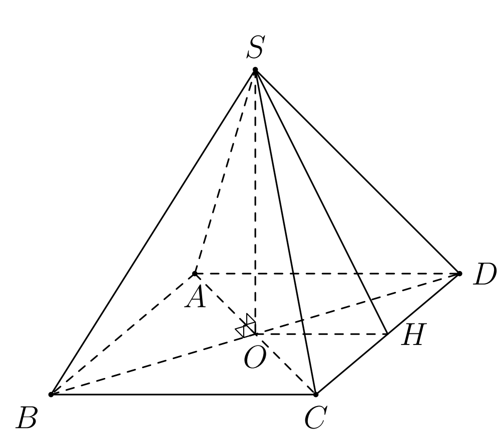
Lời giải.

H là trung điểm CD

Ta có: $OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Khi đó $\tan\varphi = \tan\widehat{SHO} = \dfrac{SO}{OH} = \sqrt{2}$.

Do đó $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.



Chọn phương án (A)

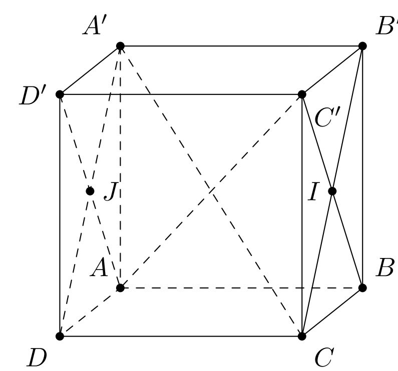
Câu 53. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'C)$ và $(C'D'A)$.

(A) 45°. (B) 30°. (C) 60°. (D) 90°.

Lời giải.

Gọi $I = B'C \cap BC'$, $J = A'D \cap AD'$, ta có

$$\begin{cases}(A'B'C) \cap (C'D'A) = IJ \\ IJ \perp B'C \subset (A'B'C) \\ IJ \perp BC' \subset (C'D'A).\end{cases}$$



Từ đó, suy ra góc giữa mặt phẳng $(A'B'C)$ và mặt phẳng $(C'D'A)$ là góc giữa đường thẳng $B'C$ và BC' hay là bằng 90°.

Chọn phương án (D)

Câu 54. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác vuông cân tại B với trọng tâm G, cạnh bên SA tạo với đáy (ABC) một góc 30°. Biết hai mặt phẳng (SBG) và (SCG) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính cô-sin của góc giữa hai đường thẳng SA và BC.

(A) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. (B) $\dfrac{3\sqrt{15}}{20}$. (C) $\dfrac{\sqrt{15}}{10}$. (D) $\dfrac{\sqrt{30}}{20}$.

Lời giải.

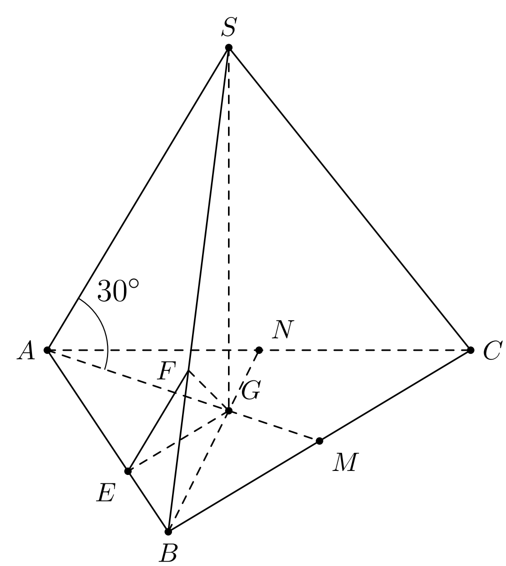
Hai mặt phẳng (SBG) và (SCG) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên $SG \perp (ABC)$.

Gọi cạnh $AB = BC = a \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$,

$AG = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{\sqrt{5}}{3}a \Rightarrow SG = AG \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{\sqrt{15}}{9}a$,

$SA = \dfrac{AG}{\cos 30^\circ} = \dfrac{2\sqrt{15}}{9}a$.

Từ G kẻ $GE \parallel BC$ $(E \in AB)$, từ E kẻ $EF \parallel SA$ $(F \in SB)$ suy ra$(SA, BC) = (EF, EG)$.



Có:

$$\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BS} \Leftrightarrow \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{GS} - \overrightarrow{GB}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{GF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{GS} \Leftrightarrow GF^2 = \frac{4}{9}GB^2 + \frac{1}{9}GS^2$$

$$\Leftrightarrow \quad GF^2 = \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{5}{27 \cdot 9}a^2 = \frac{29}{27 \cdot 9}a^2.$$

Xét $\triangle EFG$ có $EF = \dfrac{1}{3}SA = \dfrac{2\sqrt{15}}{27}a$, $EG = \dfrac{2}{3}BM = \dfrac{a}{3}$.

Khi đó:

$$\cos\widehat{FEG} = \frac{EF^2 + EG^2 - FG^2}{2EF \cdot EG}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\widehat{FEG} = \frac{\dfrac{4 \cdot 15a^2}{27 \cdot 27} + \dfrac{a^2}{9} - \dfrac{29a^2}{27 \cdot 9}}{2\dfrac{2a\sqrt{15}}{27} \cdot \dfrac{a}{3}}$$

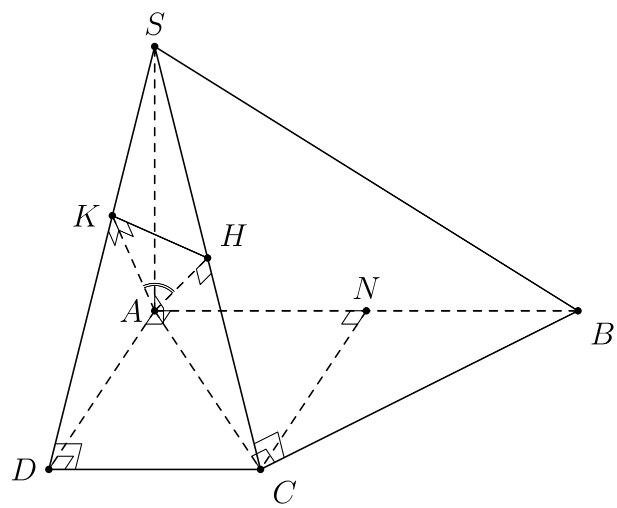
$$\Leftrightarrow \quad \cos\widehat{FEG} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{10}.$$

Chọn phương án D

Câu 55. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AB = 2a$, $AD = CD = a$, $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với $(ABCD)$. Tính côsin của góc giữa (SBC) và (SCD).

A $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **B** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Gọi H, N lần lượt là trung điểm của SC, AB.

Ta có $CN = \dfrac{1}{2}AB$ suy ra tam giác ABC vuông cân tại C.

Suy ra $\begin{cases} SA \perp BC \\ AC \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC)$.

Do $\triangle SAC$ vuông cân tại A nên $AH = a$.

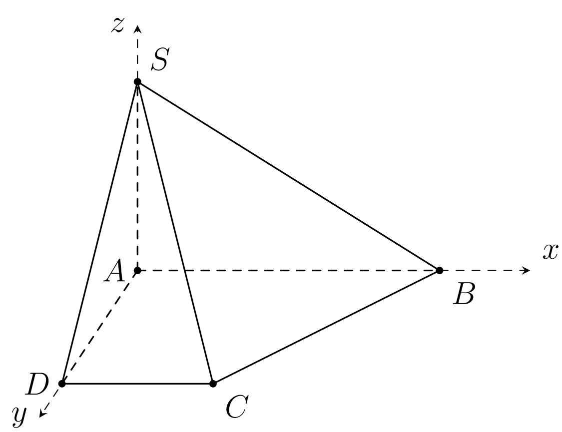
Kẻ $AK \perp SD$. Khi đó $\begin{cases} AH \perp (SBC) \\ AK \perp (SCD) \end{cases}$

$$\Rightarrow ((SBC), (SCD)) = (AH, AK) = \widehat{KAH} = \varphi.$$

Xét tam giác vuông SAD có $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AD^2} \Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác vuông AKH có $\cos\varphi = \dfrac{AK}{AH} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Cách khác. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ như hình vẽ.



Ta có $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $S\left(0;0;\sqrt{2}\right)$.

Ta có véc-tơ pháp tuyến của (SCD) là $\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}\right] = \left(0;\sqrt{2};1\right)$ và véc-tơ pháp tuyến của (SBC) là $\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}\right] = \left(\sqrt{2};\sqrt{2};2\right)$.

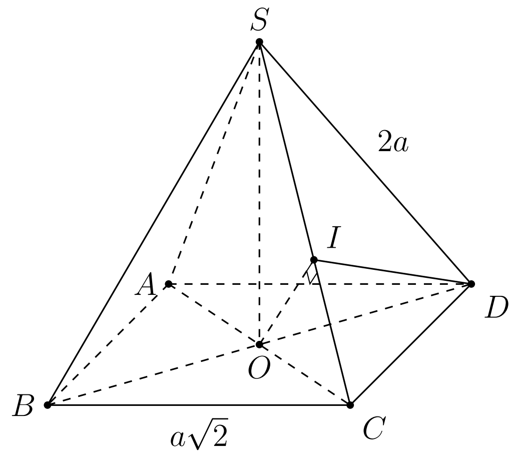
Vậy $\cos\left((SBC), (SCD)\right) = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Chọn phương án (B)

Câu 56. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên bằng $2a$. Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SCD). Tính $\cos\alpha$.

(A) $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$. (B) $\dfrac{\sqrt{21}}{14}$. (C) $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$. (D) $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải.



Kẻ $OI \perp SC\ (I \in SC)$. (1)

Ta có $\begin{cases} OD \perp OC \\ OD \perp SO \end{cases} \Rightarrow OD \perp (SOC) \Rightarrow OD \perp SC$.

Kết hợp (1) ta được $SC \perp (IOD) \Rightarrow SC \perp ID$.

Do đó ta có $((SAC),(SCD)) = (OI, DI) = \widehat{OID}$.

$ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$ nên $OC = OD = BC \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = a$.

Xét $\triangle SOC$ vuông tại O, ta có

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

Ta cũng có

$$\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow OI = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Xét $\triangle OID$ vuông tại O, ta có

$$ID = \sqrt{OD^2 + OI^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

Suy ra $\cos\alpha = \dfrac{OI}{OD} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Chọn phương án (D)

Câu 57. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng BD với (SAD). Tính $\sin\alpha$.

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. (D) $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

Lời giải.

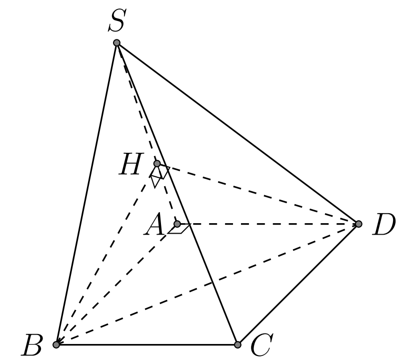
Vì $(SAB) \perp (ABCD)$, $AD \perp AB$ nên $AD \perp (SAB)$.

Trong (SAB), kẻ $BH \perp SA = H$, ta có $BH \perp (SAD)$.

Khi đó $\sin(BD, (SAD)) = \sin\alpha = \dfrac{BH}{BD}$.

Tam giác SAB đều cạnh a có đường cao $BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.



Chọn phương án C

Câu 58. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và $SA \perp (ABCD)$. Để góc giữa (SCB) và (SCD) bằng 60° thì độ dài cạnh SA là

A $a\sqrt{3}$. **B** $a\sqrt{2}$. **C** a. **D** $2a$.

Lời giải.

Đặt $SA = a$.

Kẻ $\begin{cases} AM \perp SD, m \in SD \\ AN \perp SB, N \in SB \end{cases}$, ta có $\begin{cases} AM \perp (SCD) \\ AN \perp (SBC). \end{cases}$

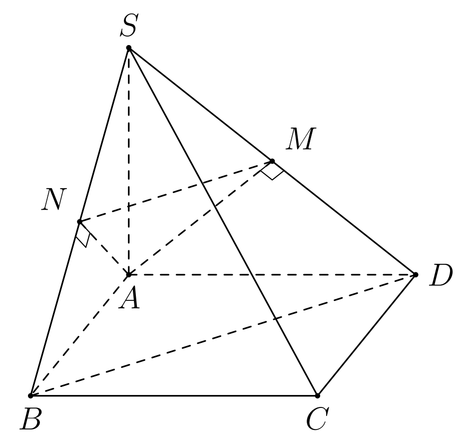
Suy ra $(\widehat{(SCD);(SBC)}) = (\widehat{AM;AN})$.

Do $\triangle SAD = \triangle SAB$ (c.g.c) $\Rightarrow AM = AN$.

Do đó $(\widehat{(SCD);(SBC)}) = 60^\circ \Leftrightarrow (\widehat{AM;AN}) = 60^\circ$.

Xét tam giác SAD, ta có

$$\frac{1}{AM^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{a^2} \Rightarrow AM = \frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$



Mà $\dfrac{MN}{BD} = \dfrac{SM}{SD} = \dfrac{SM \cdot SD}{SD^2} = \dfrac{SA^2}{SD^2} = \dfrac{x^2}{a^2+x^2} \Rightarrow MN = \dfrac{ax^2\sqrt{2}}{a^2+x^2}$.

— Nếu $\widehat{MAN} = 60^0$ thì $\triangle AMN$ đều $\Leftrightarrow AM = MN \Leftrightarrow x = a$.

— Nếu $\widehat{MAN} = 120^\circ$ thì $MN = \sqrt{3}AM \Leftrightarrow 2x^2 = 3(a^2+x^2)$ (vô lý).

Vậy $SA = a$.

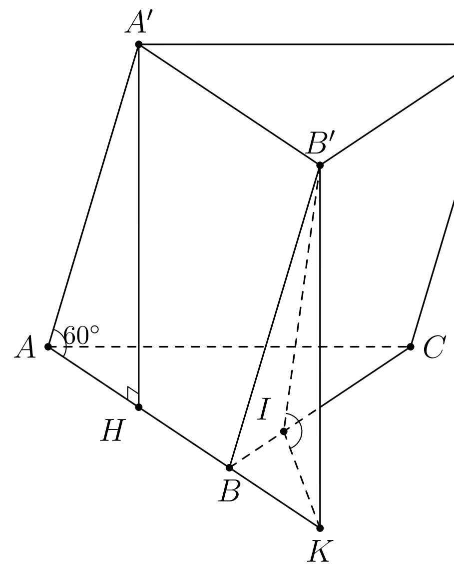
Chọn phương án C

Câu 59. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2a$. Hình chiếu của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB. Biết góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 60°. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và (ABC). Tính $\cos\varphi$.

A $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B** $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{17}}{17}$. **C** $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D** $\cos\varphi = \sqrt{\dfrac{16}{17}}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC, suy ra $AM = 2a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.
Gọi K là điểm đối xứng của H qua B, suy ra $B'K \parallel A'H$, suy ra $B'K \perp (ABC)$.
Trong mp(ABC), dựng $BI \perp BC$ (với $I \in BC$). Khi đó, góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và (ABC) là góc $\widehat{KIB'}$.
Do tứ giác $AHKB'$ là hình bình hành nên $B'K = A'H = AH \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.
Ta có $KI = \mathrm{d}_{(H,BC)} = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}_{(A,BC)} = \dfrac{1}{2}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Xét $\Delta B'IK$ vuông tại K, ta có
$B'I = \sqrt{B'K^2 + KI^2} = \sqrt{3a^2 + \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$,
$\cos\varphi = \cos\widehat{KIB'} = \dfrac{IK}{B'I} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} : \dfrac{a\sqrt{15}}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.



Chọn phương án C

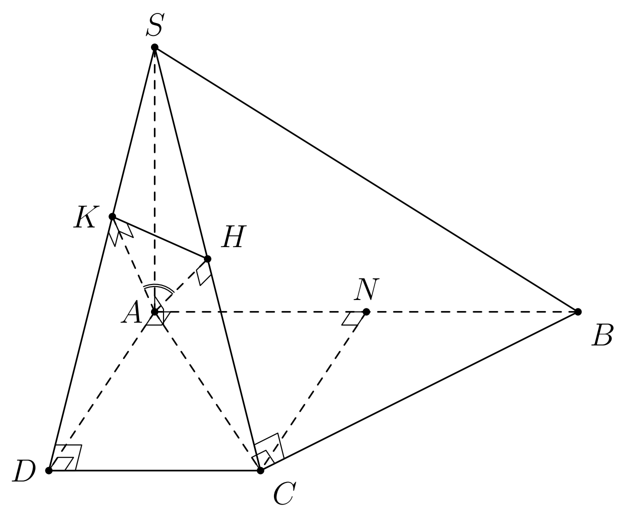
Câu 60. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AB = 2a$, $AD = CD = a$, $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với $(ABCD)$. Tính côsin của góc giữa (SBC) và (SCD).

A $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **B** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

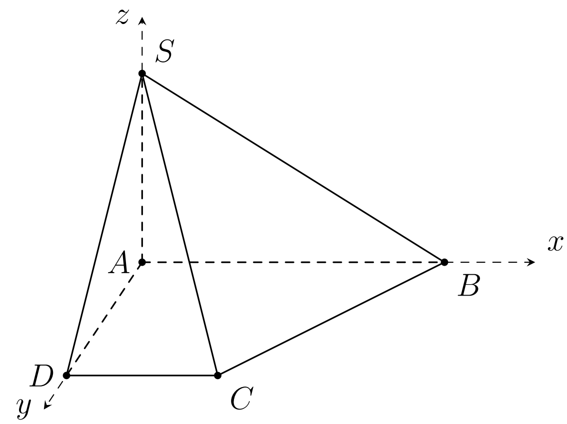
Gọi H, N lần lượt là trung điểm của SC, AB.
Ta có $CN = \dfrac{1}{2}AB$ suy ra tam giác ABC vuông cân tại C.
Suy ra $\begin{cases} SA \perp BC \\ AC \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC)$.
Do $\triangle SAC$ vuông cân tại A nên $AH = a$.
Kẻ $AK \perp SD$. Khi đó $\begin{cases} AH \perp (SBC) \\ AK \perp (SCD) \end{cases}$

$$\Rightarrow ((SBC),(SCD)) = (AH, AK) = \widehat{KAH} = \varphi.$$



Xét tam giác vuông SAD có $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AD^2} \Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.
Xét tam giác vuông AKH có $\cos\varphi = \dfrac{AK}{AH} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Cách khác. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ như hình vẽ.
Ta có $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $S\left(0;0;\sqrt{2}\right)$.
Ta có véc-tơ pháp tuyến của (SCD) là $\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right] = \left(0;\sqrt{2};1\right)$ và véc-tơ pháp tuyến của (SBC) là $\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right] = \left(\sqrt{2};\sqrt{2};2\right)$.
Vậy $\cos\left((SBC),(SCD)\right) = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

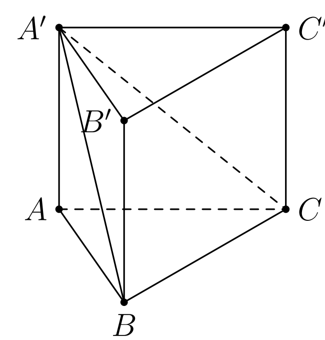


Chọn phương án B

Câu 61. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có diện tích đáy bằng $\sqrt{3}a^2$ (đvdt), diện tích tam giác $A'BC$ bằng $2a^2$ (đvdt). Tính góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC)?

A $120°$. **B** $60°$. **C** $30°$. **D** $45°$.

Lời giải.



- Ta có $\triangle ABC$ là hình chiếu vuông góc của $\Delta A'BC$ trên mặt phẳng (ABC).
- Gọi φ là góc giữa $(A'BC)$ và (ABC).

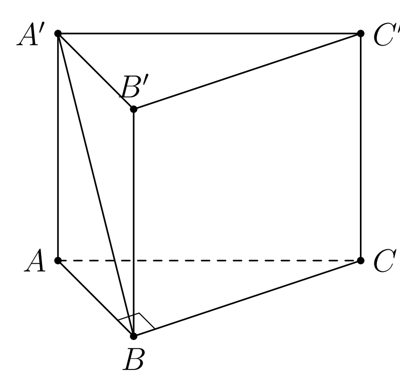
Ta có: $\cos\varphi = \dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\Delta A'BC}} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2a^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 30°$.

Chọn phương án C

Câu 62. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = BC = a$, $BB' = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BCC'B')$.

A $60°$. **B** $90°$. **C** $45°$. **D** $30°$.

Lời giải.



Do $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng, $\triangle ABC$ vuông tại B nên $A'B' \perp B'C' \Rightarrow A'B' \perp (BB'C'C)$.
Do đó góc giữa $A'B$ và mặt phẳng $(BCCC'B')$ là $\widehat{A'BB'}$.
Xét tam giác $A'BB'$, ta có

$$\cot\widehat{A'BB'} = \frac{BB'}{A'B'} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{A'BB'} = 30°.$$

Vậy góc giữa đường thẳng $A'B$ mặt phẳng $(BCC'B')$.

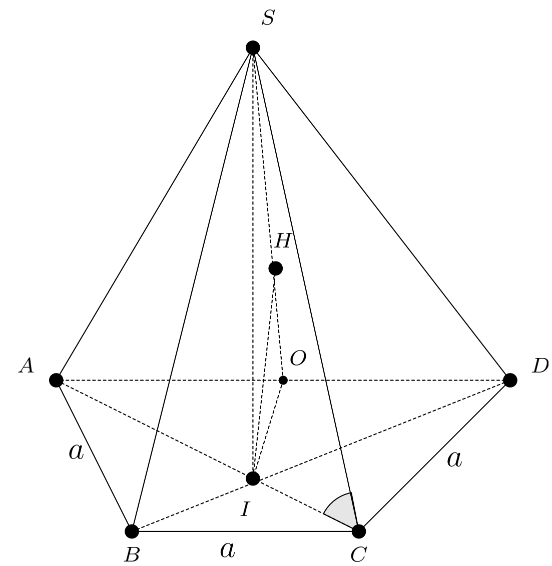
Chọn phương án D

D MỨC ĐỘ 4

Câu 63. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều và $AB = BC = CD = a$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính sin góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD).

(A) $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. (B) $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Gọi I là giao điểm của AC và BD.

Ta có $\begin{cases} (SAC)\perp(ABCD) \\ (SBD)\perp(ABCD) \\ (SAC)\cap(SBD) = SI \end{cases} \Rightarrow SI\perp(ABCD)$.

Ta có góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCI}$ nên $\widehat{SCI} = 60°$.

Xét $\triangle BCD$, ta có

$$\begin{aligned} BD^2 &= BC^2 + CD^2 - 2\cdot BD\cdot CD\cdot\cos\widehat{BCD} \\ &= a^2 + a^2 - 2\cdot a\cdot a\cdot\cos 120° \\ &= 3a^2 \end{aligned}$$

Suy ra $AC = BD = a\sqrt{3}$.

Vì $BC \parallel AD \Rightarrow \triangle IBC \backsim \triangle IDA$, suy ra $\dfrac{IC}{IA} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{2}$.

Do đó $\dfrac{IC}{AC - IC} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{IC}{a\sqrt{3} - IC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow IC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow IA = 2IC = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Xét $\triangle SIC$ vuông tại I, ta có $\begin{cases} SI = IC\cdot\tan 60° = a \\ SC = \dfrac{IC}{\cos 60°} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

Gọi O là trung điểm của AD.

Xét $\triangle AID$ cân tại I với trung tuyến IO, ta có $IO^2 = \dfrac{IA^2 + ID^2}{2} - \dfrac{AD^2}{4} = \dfrac{a^2}{3} \Rightarrow IO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Dựng IH vuông góc với SO tại H.

Suy ra $\mathrm{d}\left(I,(SAD)\right) = IH = \dfrac{a}{2}$.

Ta có $CI \cap (SAD) = A \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}\left(C,(SAD)\right)}{\mathrm{d}\left(I,(SAD)\right)} = \dfrac{AC}{AI} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \mathrm{d}\left(C,(SAD)\right) = \dfrac{3a}{4}$.

Gọi K là hình chiếu của C lên mặt phẳng (SAD).

Suy ra SK là hình chiếu của CK lên mặt phẳng (SAD) và $CK = \mathrm{d}\left(C,(SAD)\right) = \dfrac{3a}{4}$.

Suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD) là $\widehat{CSK}$ và $\sin\widehat{CSK} = \dfrac{CK}{SC} = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

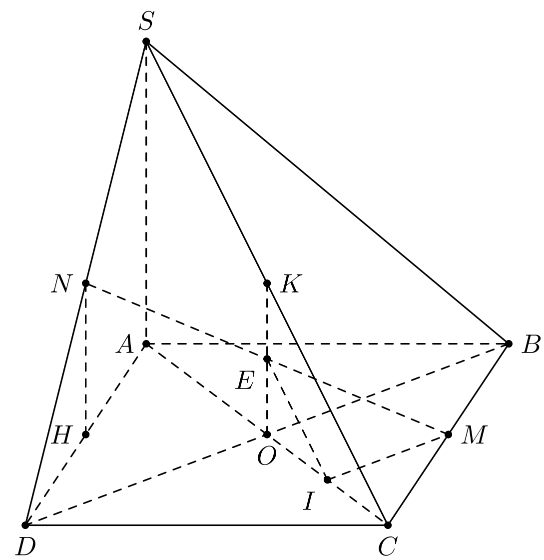
Chọn phương án A

Câu 64. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh $SA = a$ vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SD, α là góc giữa đường thẳng MN và

(SAC). Giá trị $\tan\alpha$ là

A $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **B** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **C** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.



Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AD, SC. Khi đó $NK \parallel MH$. Khi đó $MN \subset (MHNK)$ và giao tuyến của $(MHNK)$ với (SAC) là OK (với O là tâm của hình vuông $ABCD$).
Gọi $E = MN \cap OK$ (trong mặt phẳng $(MHNK)$), hay giao điểm của MN với (SAC) là E.
Gọi I là trung điểm OC, suy ra $MI \perp OC$. Lại có $SA \perp MI$ nên $MI \perp (SAC)$.
Khi đó EI là hình chiếu của MN lên (SAC). Do đó góc giữa MN với (SAC) cũng chính là góc giữa MN với EI chính là góc $\widehat{MEI}$ (vì tam giác MIE vuông tại I).

Ta có $ME = \dfrac{1}{2} \cdot MN = \dfrac{1}{2}\sqrt{MH^2 + NH^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{4}$,
và $MI = \dfrac{1}{2} \cdot OB = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, suy ra $EI = \sqrt{ME^2 - MI^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

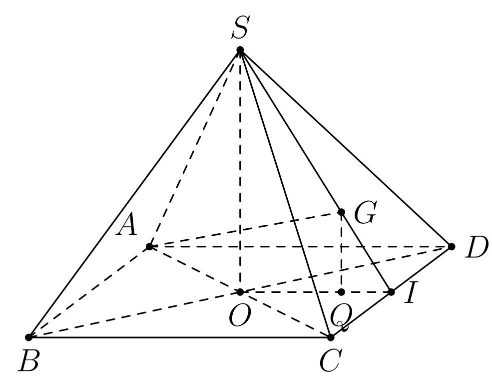
$$\text{Vậy} \quad \tan\alpha = \frac{MI}{EI} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Chọn phương án A

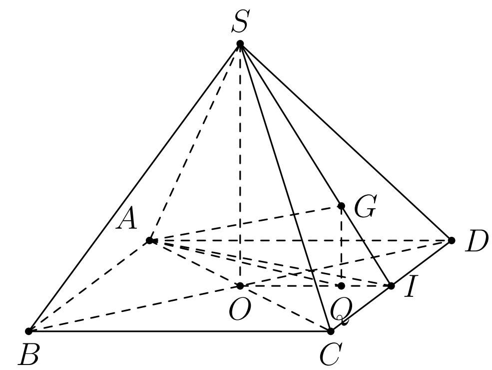
Câu 65.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với tất cả các cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD (tham khảo hình vẽ bên). Giá trị tan góc giữa AG và $(ABCD)$ bằng

A $\dfrac{\sqrt{17}}{17}$. **B** $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **C** $\sqrt{17}$. **D** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.



Lời giải.



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Khi đó, $SO \perp (ABCD)$.
Gọi I là trung điểm của CD. Ta tính được $SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $SG = \dfrac{2}{3}SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và

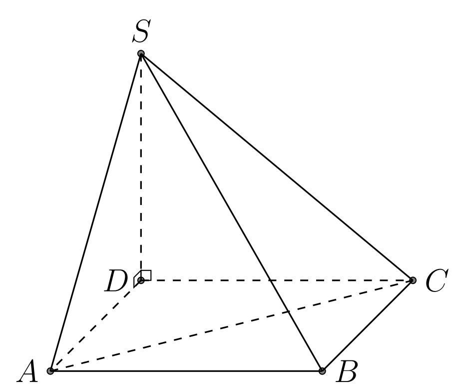
$$SO = \sqrt{SI^2 - OI^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Gọi Q là hình chiếu vuông góc của G trên $(ABCD)$. Ta có $Q \in OI$ và $GQ = \dfrac{1}{3}SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{6}$.
Ta có

$$\begin{aligned} AG^2 &= SA^2 + SG^2 - 2 \cdot SA \cdot SG \cdot \cos\widehat{ASG} = SA^2 + SG^2 - 2 \cdot SA \cdot SG \cdot \frac{SA^2 + SI^2 - AI^2}{2 \cdot SA \cdot SI} \\ &= SA^2 + SG^2 - \frac{2(SA^2 + SI^2 - (AD^2 + ID^2))}{3} \\ &= a^2 + \frac{a^2}{3} - \frac{2\left(a^2 + \frac{3a^2}{4} - a^2 - \frac{a^2}{4}\right)}{3} = a^2. \end{aligned}$$

Khi đó, $AQ = \sqrt{AG^2 - GQ^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{2a^2}{36}} = \dfrac{a\sqrt{34}}{6}$.
Vì $AG \cap (ABCD) = A$ và $GQ \perp (ABCD)$ nên góc giữa AG và $(ABCD)$ là $\widehat{GAQ}$.
Vậy $\tan\widehat{GAQ} = \dfrac{GQ}{AQ} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{6}}{\frac{a\sqrt{34}}{6}} = \dfrac{\sqrt{17}}{17}$.
Chọn phương án A

Câu 66.



Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = 2a, BC = a, \widehat{ABC} = 120^\circ$. Cạnh bên $SD = a\sqrt{3}$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy (tham khảo hình vẽ). Tính sin của góc tạo bởi SB và mặt phẳng (SAC).

A $\dfrac{3}{4}$. **B** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **C** $\dfrac{1}{4}$. **D** $\dfrac{\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải.

Ta có: $BD = \sqrt{AD^2 + AB^2 - 2AB \cdot AD\cos 60^\circ} = \sqrt{a^2 + 4a^2 - 2 \cdot 2a \cdot a \cdot \dfrac{1}{2}} = a\sqrt{3}$.
$SB = \sqrt{SD^2 + BD^2} = a\sqrt{6}$.
Ta có: $\dfrac{1}{\mathrm{d}^2\left(D,(SAC)\right)} = \dfrac{1}{SD^2} + \dfrac{1}{\mathrm{d}^2(D, AC)} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{AC^2}{4S^2_{DAC}} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{7a^2}{4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{8}{3a^2}$

$\Rightarrow \mathrm{d}\left(D,(SAC)\right) = \dfrac{a\sqrt{6}}{4} = \mathrm{d}\left(B,(SAC)\right)$.

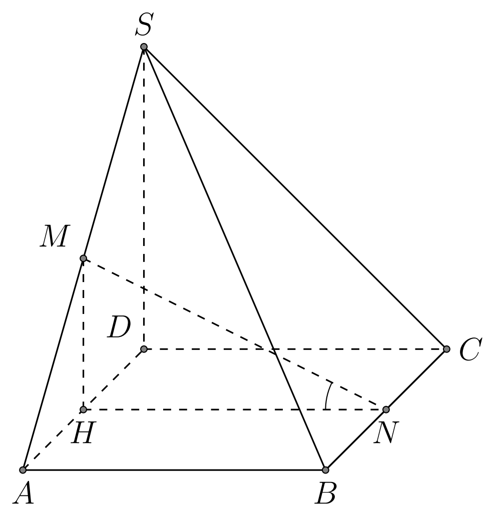
Do đó $\sin\left(SB,(SAC)\right) = \dfrac{\mathrm{d}\left(B,(SAC)\right)}{SB} = \dfrac{\mathrm{d}\left(D,(SAC)\right)}{SB} = \dfrac{\frac{a\sqrt{6}}{4}}{a\sqrt{6}} = \dfrac{1}{4}$.

Chọn phương án C

Câu 67. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$, $SA \perp AB$, $SC \perp BC$, $SB = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, BC và α là góc giữa MN với (ABC). Tính $\cos\alpha$.

A $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{11}}{11}$. **B** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C** $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$. **D** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải.



Dựng hình bình hành $ABCD$ mà ABC vuông cân tại B nên $ABCD$ là hình vuông.

Ta có $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp SD$ và $\begin{cases} BC \perp CD \\ BC \perp SC \end{cases} \Rightarrow$ $BC \perp (SDC) \Rightarrow BC \perp SD$. Vậy $SD \perp (ABCD)$.

Gọi H là trung điểm của $AD \Rightarrow MH \perp (ABCD)$.

Do đó HN là hình chiếu của của MN lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Vậy góc giữa đường thẳng MN với (ABC) là góc $\widehat{MNH} = \alpha$.

Xét tam giác vuông MNH có

$\cos\alpha = \dfrac{HN}{MN} = \dfrac{HN}{\sqrt{HN^2 + MH^2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

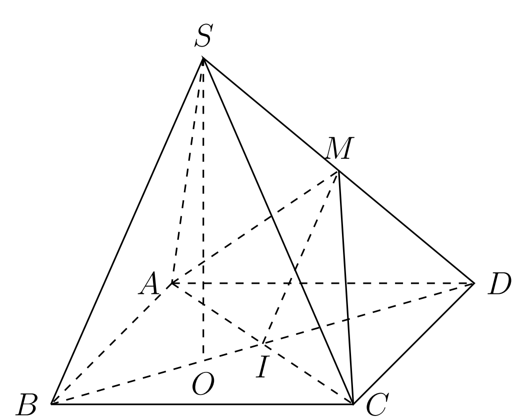
Vậy $\alpha = \arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Chọn phương án B

Câu 68. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SD = x$, tất cả các cạnh còn lại của hình chóp đều bằng a. Biết góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30°. Tìm x.

A $x = a\sqrt{2}$. **B** $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C** $x = a\sqrt{5}$. **D** $x = a\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi O là hình chiếu của S lên $(ABCD)$. Vì $SA = SB = SC$ nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, suy ra $O \in BD$ và góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SDO}$, do đó $\widehat{SDO} = 30^\circ$.

Gọi M, I lần lượt là trung điểm SD và AC. Các tam giác SAD, SCD cân nên $CM \perp SD$, $AM \perp SD$, suy ra $IM \perp SD$. .

Xét tam giác MID vuông tại M, có $IM = \dfrac{1}{2}SB = \dfrac{a}{2}$, $\widehat{MDI} = 30^\circ$ suy ra $MD = \dfrac{MI}{\tan\widehat{MDI}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $SD = a\sqrt{3}$.

Chọn phương án D

Câu 69. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a, AD = 2a$, SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, CD. Tính côsin góc giữa MN và (SAC).

A $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **B** $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$. **C** $\dfrac{\sqrt{55}}{10}$. **D** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

Gọi E, O lần lượt là trung điểm của AB, AC.

Ta có $ME \parallel SA \Rightarrow (SAC) \cap (SAC) = OH \parallel ME \parallel SA$.

Trong (MNE), gọi $K = OH \cap MN \Rightarrow K = MN \cap (SAC)$.

Ta có $NC \perp AC \Rightarrow NC \perp (SAC) \Rightarrow KC$ là hình chiếu vuông góc của KN trên mặt phẳng (SAC).

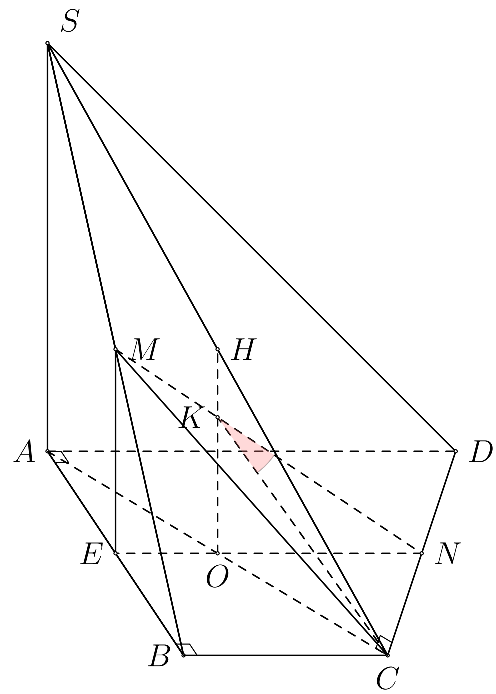
Vậy $\widehat{(MN,(SAC))} = \widehat{(KN,(KC))} = \widehat{NKC}$.

Ta có $NC = OC = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

EN là đường trung bình của hình thang $ABCD$ nên $EN = \dfrac{BC + AD}{2} = \dfrac{3a}{2}$.

Tam giác MNE vuông tại $E \Rightarrow MN = \sqrt{ME^2 + EN^2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

$\triangle KON \backsim MEN \Rightarrow \dfrac{KN}{MN} = \dfrac{ON}{EN} \Rightarrow KN = \dfrac{MN \cdot ON}{EN} = \dfrac{a\sqrt{10}}{3}$.



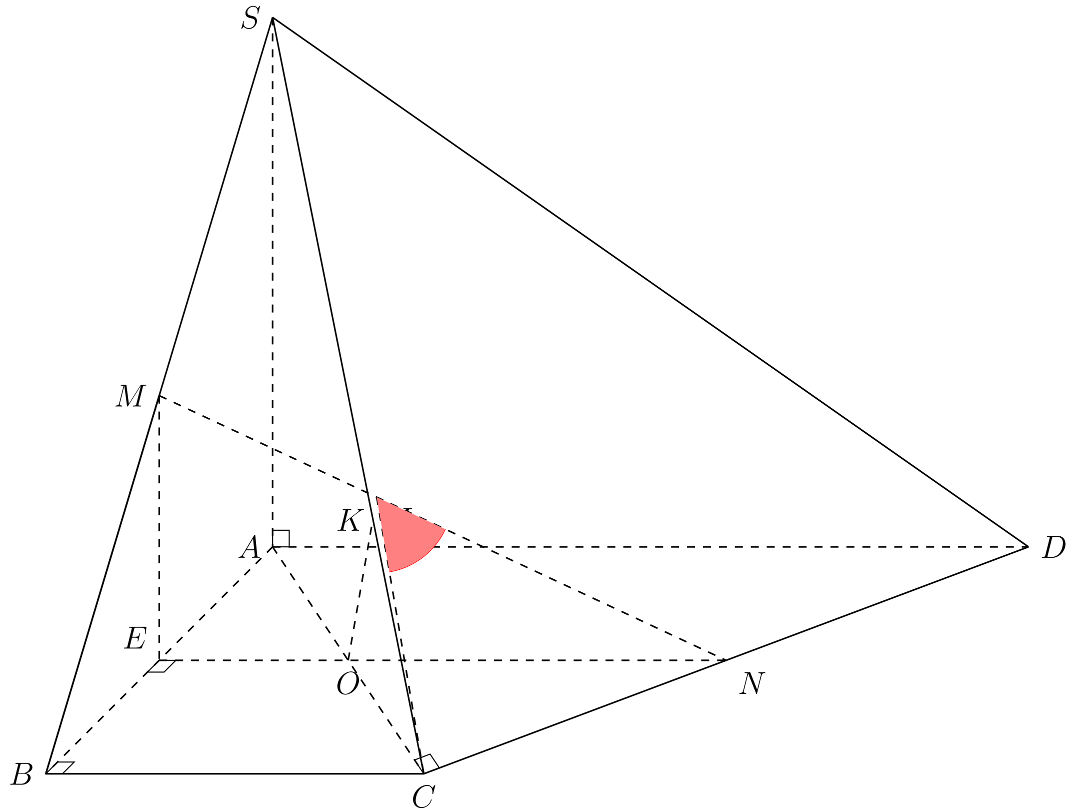
Tam giác KNC vuông tại C, ta có $\cos\widehat{NKC} = \dfrac{KC}{KN} = \dfrac{\sqrt{KN^2 - NC^2}}{KN} = \dfrac{\sqrt{55}}{10}$.

Chọn phương án C

Câu 70. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B. $AB = BC = a$, $AD = 2a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD. Tính côsin góc giữa MN và (SAC).

A $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **B** $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$. **C** $\dfrac{\sqrt{55}}{10}$. **D** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

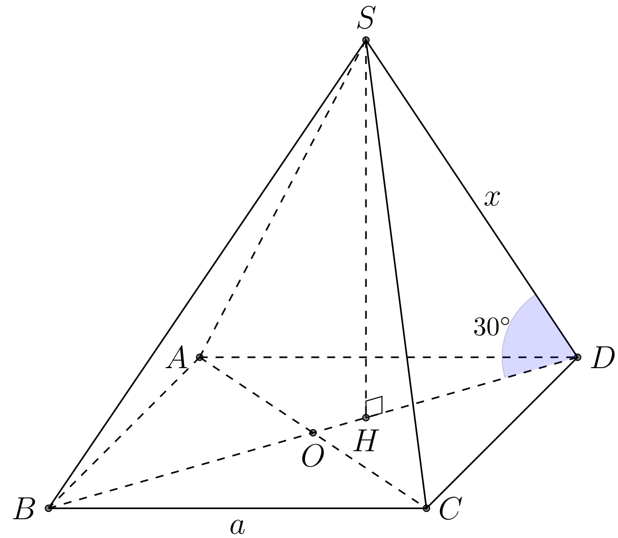


Gọi E, O là trung điểm AB, AC.
Ta có $ME \parallel SA \Rightarrow (SAC) \cap (MEN) = OH \parallel ME \parallel SA$.
Trong (MNE), gọi $K = OH \cap MN \Rightarrow K = MN \cap (SAC)$.
Ta có $NC \perp AC \Rightarrow NC \perp (SAC) \Rightarrow KC$ là hình chiếu vuông góc của KN trên mặt phẳng (SAC).
Vậy $\widehat{(MN, (SAC))} = \widehat{(KN, KC)} = \widehat{NKC}$.
Ta có $NC = OC = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
EN là đường trung bình của hình thang $ABCD$ nên $EN = \dfrac{BC + AD}{2} = \dfrac{3a}{2}$.
Tam giác MNE vuông tại $E \Rightarrow MN = \sqrt{ME^2 + EN^2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.
$\Delta KON\ MEN \Rightarrow \dfrac{KN}{MN} = \dfrac{ON}{EN} \Rightarrow KN = \dfrac{MN \cdot ON}{EN} = \dfrac{a\sqrt{10}}{3}$.
Tam giác KNC vuông tại C, ta có $\cos\widehat{NKC} = \dfrac{KC}{KN} = \dfrac{\sqrt{KN^2 - NC^2}}{KN} = \dfrac{\sqrt{55}}{10}$.
Chọn phương án C

Câu 71. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SD = x$, tất cả các cạnh còn lại của hình chóp đều bằng a. Biết góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $30°$. Tìm x.

A $x = a\sqrt{2}$. **B** $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C** $x = a\sqrt{5}$. **D** $x = a\sqrt{3}$.

Lời giải.



Ta có $ABCD$ là hình thoi $\triangle ABC = \triangle ADC = \triangle SAC \Rightarrow SO = \dfrac{1}{2}BD \Rightarrow \triangle SBD$ vuông tại S.

Gọi H là hình chiếu của S lên $(ABCD) \Rightarrow H \in BD \Rightarrow (SD; (ABCD)) = \widehat{SDH} = 30^\circ$

Xét tam giác vuông SBD có:

$SH.BD = SB.SD \Rightarrow SH = \dfrac{SB.SD}{\sqrt{SB^2 + SD^2}} = \dfrac{a.x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

Lại có: $\sin 30^\circ = \dfrac{SH}{SD} \Rightarrow \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 4a^2 = a^2 + x^2 \Rightarrow x = a\sqrt{3}$.

Chọn phương án D

Câu 72. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = AB = BC = a$, $AD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB, CD. Tính sin góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC).

A $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B** $\dfrac{\sqrt{55}}{10}$. **C** $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$. **D** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SC, AB.

Vì ME, NF cùng song song với BC nên $ME \parallel NF$.

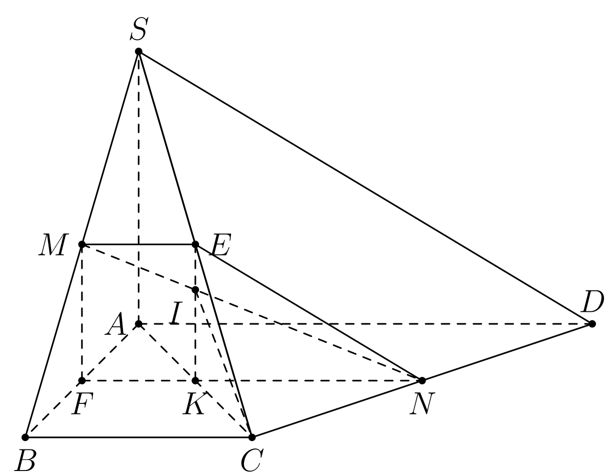
Do đó tứ giác $MENF$ là hình thang.

Do $SA \perp (ABCD)$ và $MF \parallel SA$ nên $MF \perp (ABCD)$.

Khi đó tứ giác $MENF$ là hình thang vuông tại M, F.

Trong $(ABCD)$, gọi $K = AC \cap FN$; trong $(MENF)$, gọi $I = MN \cap EK$.

Khi đó $MN \cap (SAC) = I$.



Ta có $\begin{cases} NC \perp AC \\ NC \perp SA \end{cases} \Rightarrow NC \perp (SAC)$ hay C là hình chiếu vuông góc của N lên (SAC).

Từ đó suy ra $(MN, (SAC)) = (MN, CI) = \widehat{NIC} = \alpha$.

Xét tam giác vuông NIC ta có $\sin \alpha = \dfrac{NC}{IN}$.

Ta có $NC = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Vì $\triangle NIK \sim \triangle MIE$ nên

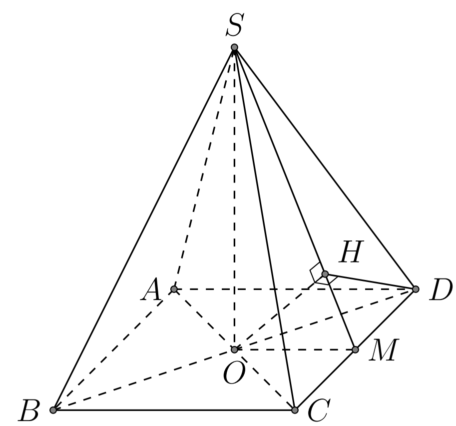
$$\frac{IN}{IM} = \frac{KN}{ME} = 2 \Leftrightarrow IN = \frac{2}{3}MN = \frac{2}{3}\sqrt{MF^2 + FN^2} = \frac{a\sqrt{10}}{3}.$$

Vậy $\sin\alpha = \dfrac{CN}{IN} = \dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.
Chọn phương án C

Câu 73. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$ và cạnh bên bằng $2a$. Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SCD). Tính $\cos\alpha$.

A $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$. **B** $\dfrac{\sqrt{21}}{14}$. **C** $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$. **D** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải.



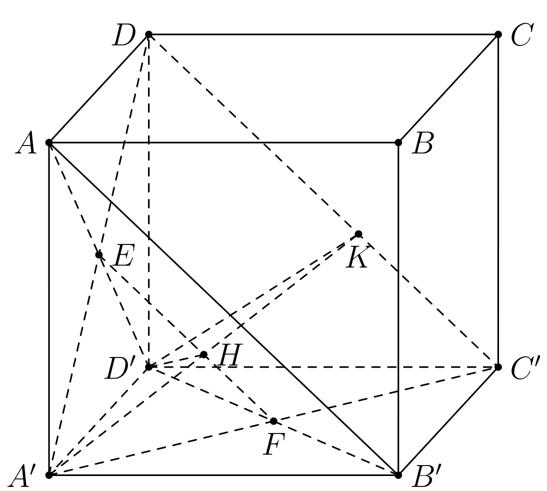
Gọi tâm của đáy là O, M là trung điểm của CD.
Trong (SOM), kẻ OH vuông góc với SM tại H.
Khi đó ta có $OH \perp (SCD)$. Mà $OD \perp (SAC)$.
Do đó $((SCD),(SAC)) = (OH, OD) = \widehat{HOD} = \alpha$.
Ta có $OD = a$, $SO = a\sqrt{3}$, $OM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Xét $\triangle OSM$ vuông tại O, có
$\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{OM^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
Xét $\triangle OHD$ vuông tại H, có
$\cos\widehat{HOD} = \cos\alpha = \dfrac{OH}{OD} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Chọn phương án D

Câu 74. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB = 2$, $AD = 3$, $AA' = 4$. Góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ là α. Tính giá trị gần đúng của α.

A 61,6°. **B** 38,1°. **C** 45,2°. **D** 53,4°.

Lời giải.



Ta chia bài toán thành 2 phần:
Phần 1: Xác định góc giữa hai mặt phẳng:

— **Bước 1: Tìm giao tuyến giữa hai mặt phẳng:**
Trong mặt phẳng $(ADD'A')$ gọi E là giao điểm của AD' và $A'D$.
Trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$ gọi F là giao điểm của $B'D'$ và $A'C'$.
Khi đó EF là giao tuyến của hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$.

— **Bước 2: Trong mỗi mặt phẳng, ta cần tìm đường thẳng vuông góc với giao tuyến:**
Trong mặt phẳng $(DA'C')$ kẻ $A'H \perp EF$ tại H, $A'H$ cắt DC' tại K.
Ta chứng minh $D'H \perp EF$.
Ta có $\begin{cases} DC' \perp A'K \\ DC' \perp A'D' \end{cases} \Rightarrow DC' \perp (A'D'K) \Rightarrow DC' \perp D'H$.
Mặt khác $\begin{cases} DC' \perp D'H \\ D'C \parallel EF \end{cases} \Rightarrow DH' \perp EF$.

— **Bước 3: Xác định góc giữa hai mặt phẳng:**

$$\text{Ta có } \begin{cases} D'H \subset \left(AB'D'\right) \\ D'H \perp EF \\ A'H \subset \left(DA'C'\right) \\ A'H \perp EF \\ \left(AB'D'\right) \cap \left(DA'C'\right) = EF \end{cases} \Rightarrow \alpha = \left((AB'D'), (DA'C')\right) = (D'H, A'H).$$

Phần 2: Tính góc α: Ta sẽ sử dụng định lý cosin trong tam giác $A'HD'$:

— **Bước 1: Chứng minh tam giác $A'HD'$ cân:**
Trong tam giác $\triangle A'DC'$ ta có EF là đường trung bình, nên suy ra H là trung điểm $A'K$.
Vì $A'D' \perp (DD'C'C)$ nên $A'D' \perp D'K$. Do đó tam giác $\triangle A'D'K$ vuông tại D'.
Xét tam giác $\triangle A'D'K$ vuông tại D' có $D'K$ là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $D'H = A'H = \dfrac{A'K}{2}$.

— **Bước 2: Tính độ dài cạnh $A'K$:**
Ta tính đường cao $A'K$ của tam giác $\triangle A'DC'$ thông qua diện tích.
Áp dụng định lý Pytago ta tính được độ dài các cạnh tam giác $\triangle A'DC'$ là: $A'D = 5$, $A'C' = \sqrt{13}$, $DC' = 2\sqrt{5}$.
Sử dụng công thức Hê-rông ta tính được $S_{A'DC'} = \sqrt{61}$.
Mặt khác $S_{A'DC'} = \dfrac{1}{2}A'K \times DC' \Rightarrow \sqrt{61} = \dfrac{1}{2}A'K \times 2\sqrt{5} \Rightarrow A'K = \dfrac{\sqrt{305}}{5}$.
Từ đó suy ra $D'H = A'H = \dfrac{A'K}{2} = \dfrac{\sqrt{305}}{10}$.

— **Bước 3: Tính góc α bằng định lý cosin:**

Trong tam giác $\triangle A'HD'$ ta có:

$$\cos\widehat{A'HD'} = \frac{HA'^2 + HD'^2 - A'D'^2}{2HA' \times HD'} = \frac{2\left(\frac{\sqrt{305}}{10}\right)^2 - 3^2}{2\left(\frac{\sqrt{305}}{10}\right)^2} = \frac{-29}{61}$$

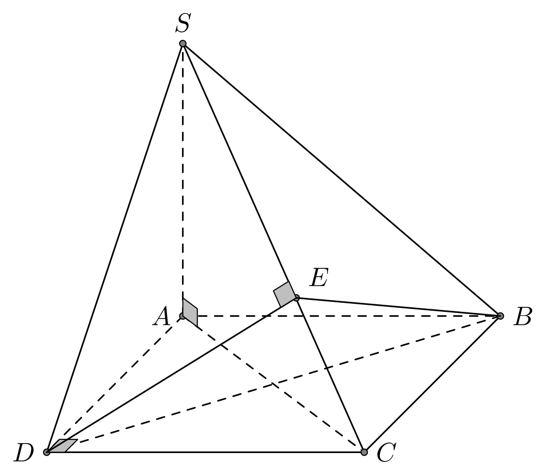
Suy ra $\widehat{A'HD'} = 118{,}4^\circ$. Do đó góc giữa hai đường thẳng $A'H$ và $D'H$ bằng $61{,}6^\circ$.
Vậy $\alpha = 61{,}6^\circ$.

Chọn phương án (A)

Câu 75. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng

(A) 60°. **(B)** 30°. **(C)** 45°. **(D)** 90°.

Lời giải.



Vẽ $DE \perp SC$ tại E.
Vì các tam giác SBC và SDC là các tam giác vuông có các cạnh tương ứng bằng nhau nên $BE \perp SC$ và $BE = DE$.
$\triangle SBC$ vuông tại B và BE là đường cao nên $\frac{1}{BE^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2}$.
$\Rightarrow BE^2 = \frac{2a^2}{3}$.

Khi đó $\begin{cases} SC = (SCD) \cap (SBC) \\ DE \perp SC, DE \subset (SCD) \\ BE \perp SC, BE \subset (SBC) \end{cases}$

Vậy $((SCD),(SBC)) = (DE, BE)$.

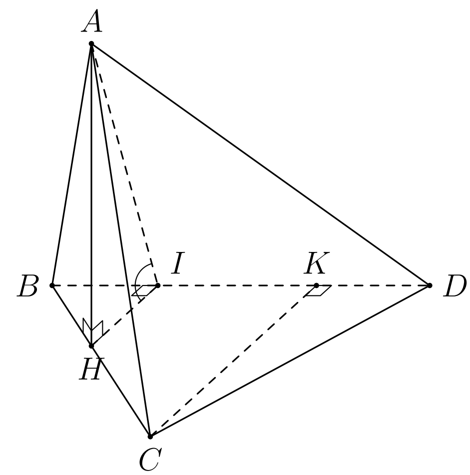
* Tính $\widehat{DEB}$

Ta có $\cos\widehat{DEB} = \frac{BE^2 + DE^2 - BD^2}{2 \cdot BE \cdot DE} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{DEB} = 120^\circ$.
Khi đó $(DE, BE) = 60^\circ$. Vậy $((SCD),(SBC)) = 60^\circ$.
Chọn phương án (A)

Câu 76. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC vuông tại A, $AB = 6$, $AC = 8$. Tam giác BCD có độ dài đường cao kẻ từ đỉnh C bằng 8. Mặt phẳng (BCD) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Cô-sin góc giữa mặt phẳng (ABD) và (BCD) bằng

(A) $\frac{4}{\sqrt{17}}$. **(B)** $\frac{3}{\sqrt{17}}$. **(C)** $\frac{3}{\sqrt{34}}$. **(D)** $\frac{4}{\sqrt{34}}$.

Lời giải.

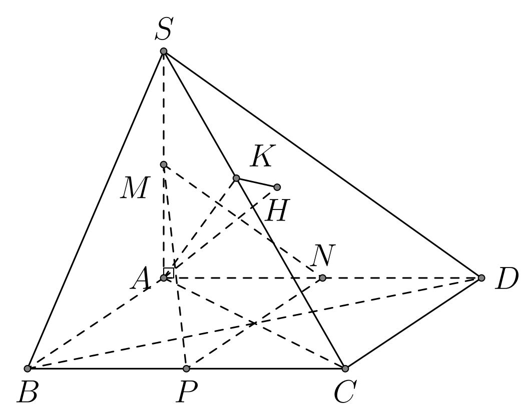


Kẻ $AH \perp BC$ tại H, $CK \perp BD$ tại K, $HI \perp BD$ tại I.
Theo giả thiết suy ra $CK = 8$.
Vì $\begin{cases}(ABC) \perp (BCD)\\ AH \perp BC\end{cases}$ nên $AH \perp (BCD)$.
Ta có $\begin{cases}BD \perp HI\\ BD \perp AH\end{cases} \Rightarrow BD \perp (AHI)$
$\Rightarrow \widehat{AIH}$ là góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (BCD).
Xét $\triangle ABC$ vuông tại A
$\Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{6^2} + \dfrac{1}{8^2} = \dfrac{25}{576} \Rightarrow AH = \dfrac{24}{5}$.
Ta có $BH \cdot BC = AB^2 \Rightarrow \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{AB^2}{BC^2} = \dfrac{6^2}{6^2+8^2} = \dfrac{9}{25}$.
Vì $HI \parallel CK \Rightarrow \dfrac{HI}{CK} = \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{9}{25} \Rightarrow HI = \dfrac{9}{25}CK = \dfrac{9}{25} \cdot 8 = \dfrac{72}{25}$.
Xét $\triangle AHI$ vuông tại $H \Rightarrow \tan\widehat{AIH} = \dfrac{AH}{HI} = \dfrac{\frac{24}{5}}{\frac{72}{25}} = \dfrac{5}{3}$.
Ta có $\cos^2\widehat{AIH} = \dfrac{1}{1+\tan^2\widehat{AIH}} = \dfrac{1}{1+\frac{25}{9}} = \dfrac{9}{34} \Rightarrow \cos\widehat{AIH} = \dfrac{3}{\sqrt{34}}$.
Chọn phương án C

Câu 77. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $AB = 3, AD = 4, \widehat{BAD} = 120°$. Cạnh bên $SA = 2\sqrt{3}$ vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, AD và BC và α là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (MNP). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây.

A $\alpha \in (60°; 90°)$. **B** $\alpha \in (0°; 30°)$. **C** $\alpha \in (30°; 45°)$. **D** $\alpha \in (45°; 60°)$.

Lời giải.



Ta có $\begin{cases}MN \parallel SD\\ NP \parallel CD\end{cases} \Rightarrow (MNP) \parallel (SCD)$
$\Rightarrow ((SAC),(MNP)) = ((SAC),(SCD)) = \alpha$.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của A xuống (SCD), K là hình chiếu vuông góc của H xuống SC, suy ra $\alpha = \widehat{AKH}$.
Ta có $V_{S.ACD} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD}$ hay

$$V_{S.ACD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 6.$$

Trong tam giác ABC có

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\widehat{ABC} = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 13,$$

suy ra $SC^2 = AC^2 + SA^2 = 13 + 12 = 25$.
Và $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{12+16} = \sqrt{28}$. Khi đó

$$\cos\widehat{CSD} = \frac{SC^2 + SD^2 - CD^2}{2 \cdot SC \cdot SD} = \frac{11\sqrt{7}}{35}.$$

Hay $\sin\widehat{CSD} = \sqrt{1-\cos^2\widehat{CSD}} = \dfrac{3\sqrt{42}}{35}$.
Do đó diện tích tam giác SCD là

$$S_{SCD} = \frac{1}{2}\cdot SC\cdot SD\cdot\sin\widehat{CSD} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot\sqrt{28}\cdot\frac{3\sqrt{42}}{35} = 3\sqrt{6}.$$

Ta có $S_{SAC} = \dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot SA = \dfrac{1}{2}\cdot AK\cdot SC$ nên

$$AK = \frac{SA\cdot AC}{SC} = \frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{13}}{5} = \frac{2\sqrt{39}}{5}.$$

Theo công thức tính thể tích khối chóp $A.SCD$ thì $AH = \dfrac{3V_{A.SCD}}{S_{SCD}} = \dfrac{3\cdot 6}{3\sqrt{6}} = \sqrt{6}$.

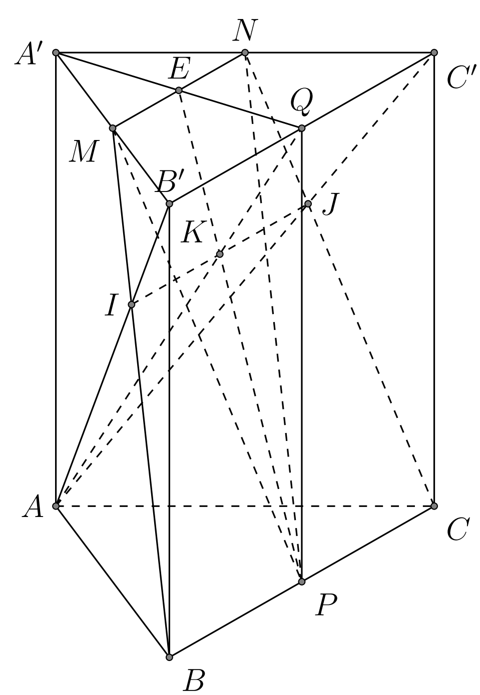
Do đó $\sin\alpha = \dfrac{AH}{AK} = \dfrac{\sqrt{6}}{\dfrac{2\sqrt{39}}{5}} = \dfrac{5\sqrt{26}}{26} \Rightarrow \alpha\in(60^\circ;90^\circ)$.

Chọn phương án A

Câu 78. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B'$, $A'C'$ và BC. Cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng

A. $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$.
B. $\dfrac{\sqrt{13}}{65}$.
C. $\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$.
D. $\dfrac{18\sqrt{13}}{65}$.

Lời giải.



Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$; $I = BM\cap AB'$, $J = CN\cap AC'$, $E = MN\cap A'Q$.
Suy ra $(MNP)\cap(AB'C') = (MNCB)\cap(AB'C') = IJ$ và gọi $K = IJ\cap PE \Rightarrow K\in AQ$, với E là trung điểm của MN.
$(AA'QP)\perp IJ \Rightarrow AQ\perp IJ, PE\perp IJ \Rightarrow ((MNP),(AB'C')) = (AQ,PE) = \alpha$.

Ta có $AP = 3, PQ = 2 \Rightarrow AQ = \sqrt{13} \Rightarrow QK = \dfrac{\sqrt{13}}{3}; PE = \dfrac{5}{2} \Rightarrow PK = \dfrac{5}{3}$.

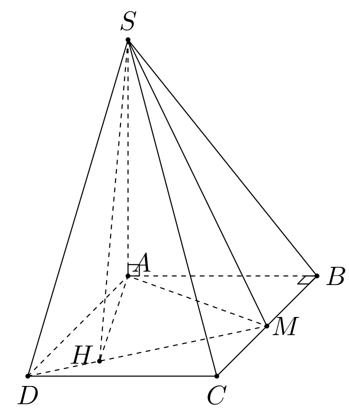
$\cos\alpha = |\cos\widehat{QKP}| = \dfrac{\left|KQ^2 + KP^2 - PQ^2\right|}{2KQ \cdot KP} = \dfrac{\sqrt{13}}{65}$.

Chọn phương án B

Câu 79. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD), SA = AB = a, AD = 3a$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SDM).

A $\dfrac{5}{7}$. **B** $\dfrac{6}{7}$. **C** $\dfrac{3}{7}$. **D** $\dfrac{1}{7}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên DM, ta có $DM \perp (SAH)$.

Gọi α là góc giữa (SDM) và $(ABCD)$ ta có $\alpha = \widehat{SHA}$.

Ta có $S_{\triangle ADM} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} = \dfrac{3}{2}a^2, DM = \sqrt{CD^2 + CM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{3}{2}a^2\right)} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}a$.

Ta có $AH = \dfrac{2S_{\triangle ADM}}{DM} = \dfrac{3}{2}a^2 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{13}a} = \dfrac{6\sqrt{13}}{13}$.

Ta có $\tan\alpha = \dfrac{SA}{AH} = \dfrac{1}{\dfrac{6\sqrt{13}}{13}} = \dfrac{\sqrt{13}}{6} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \dfrac{6}{7}$.

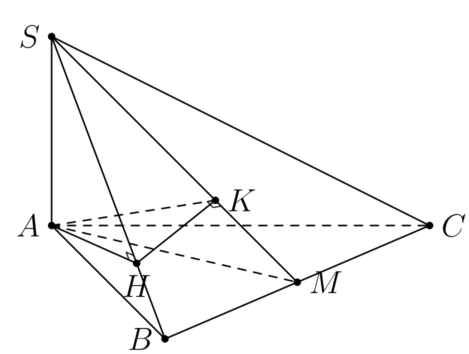
Vậy $\cos\alpha = \dfrac{6}{7}$.

Chọn phương án B

Câu 80. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$, $SA = a\sqrt{3}$. cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là

A $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B** $\dfrac{-2}{\sqrt{5}}$. **C** $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **D** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm BC.

Kẻ $AK \perp SM$ tại K.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow (SBC) \perp (SAM)$.

Lại có $AK \perp SM = (SBC) \cap (SAM)$

Do đó $AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp SB$. Kẻ $AH \perp SB$ tại H.

Suy ra $SB \perp (AHK) \Rightarrow SB \perp HK$.

Ta có $\begin{cases} (SAB) \cap (SBC) = SB \\ AH \perp SB \\ HK \perp SB \end{cases} \Rightarrow ((SAB), (SBC)) = (AH, HK) = \widehat{AHK}$.

Xét $\triangle SAB$ có $AH = \dfrac{SA \cdot AB}{SB} = \dfrac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$AM = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét $\triangle SAM$ có $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AM^2} \Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Xét $\triangle AHK$ vuông tại K có $\sin \widehat{AHK} = \dfrac{AK}{AH} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \cos \widehat{AHK} = \sqrt{1 - \sin^2 \widehat{AHK}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $\cos((SAB),(SBC)) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Chọn phương án D

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. A	4. D	5. D	6. A	7. C	8. A	9. C	10. B
11. C	12. C	13. B	14. A	15. A	16. D	17. B	18. A	19. A	20. C
21. D	22. C	23. C	24. A	25. A	26. B	27. C	28. A	29. D	30. A
31. A	32. A	33. A	34. C	35. D	36. B	37. D	38. B	39. D	40. D
41. C	42. C	43. B	44. D	45. B	46. D	47. C	48. B	49. B	50. A
51. D	52. A	53. D	54. D	55. B	56. D	57. C	58. C	59. C	60. B
61. C	62. D	63. A	64. A	65. A	66. C	67. B	68. D	69. C	70. C
71. D	72. C	73. D	74. A	75. A	76. C	77. A	78. B	79. B	80. D

DẠNG 27. CỰC TRỊ HÀM SỐ KHI BIẾT BBT HOẶC ĐỒ THỊ HÀM SỐ CỦA

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A 3. **B** 0. **C** 2. **D** 1.

Lời giải.

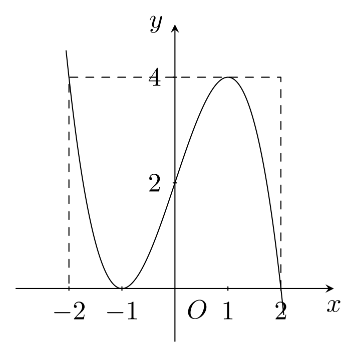
Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Chọn phương án C

Câu 1.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm

A $x = 1$. **B** $x = -2$. **C** $x = 2$. **D** $x = -1$.



Lời giải.

Căn cứ vào đồ thị, ta có

$f'(x) < 0,\ \forall x \in (-2;-1)$ và $f'(x) > 0,\ \forall x \in (-1,0)$ suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

$f'(x) > 0,\ \forall x \in (0;1)$ và $f'(x) < 0,\ \forall x \in (1;2)$ suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

Chọn phương án D

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số.

A 3. **B** 0. **C** 1. **D** 2.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Lời giải.

Dựa vào BBT suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Chọn phương án (A)

Câu 3. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
y		↗	3	↘		↗	$+\infty$
	$-\infty$				0		

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.
(B) Hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị.
(C) Hàm số đã cho không có giá trị cực tiểu.
(D) Hàm số đã cho không có giá trị cực đại.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Vậy hàm số có hai điểm cực trị.

Chọn phương án (A)

Câu 4.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Giá trị cực đại của hàm số bằng

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘		↗	5	↘	
			1				$-\infty$

(A) 1.
(B) 2.
(C) 0.
(D) 5.

Lời giải.

Giá trị cực đại của hàm số bằng 5.

Chọn phương án (D)

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗	3	↘		↗	$+\infty$
	$-\infty$				0		

Tìm giá trị cực đại $y_{CĐ}$ và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho

(A) $y_{CĐ} = -2$ và $y_{CT} = 2$.
(B) $y_{CĐ} = 3$ và $y_{CT} = 0$.
(C) $y_{CĐ} = 2$ và $y_{CT} = 0$.
(D) $y_{CĐ} = 3$ và $y_{CT} = -2$.

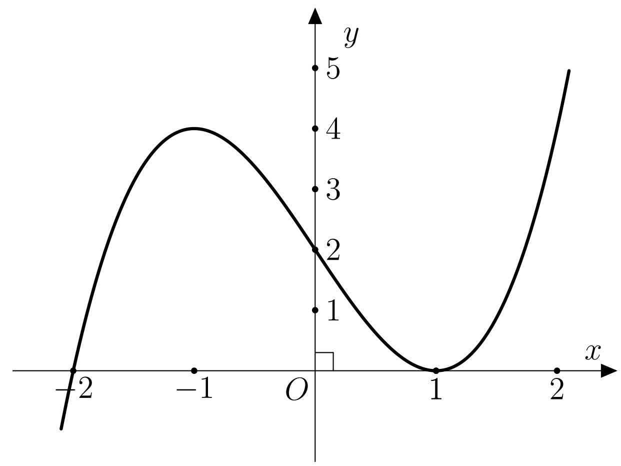
Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có $y_{CĐ} = 3$ và $y_{CT} = 0$.

Chọn phương án (B)

Câu 6.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm kết luận **đúng**



(A) Hàm số $y = f(x)$ có điểm cực tiểu là $x = 2$.
(B) Hàm số $y = f(x)$ có giá trị cực đại là -1.
(C) Hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại là $x = 4$.
(D) Hàm số $y = f(x)$ có giá trị cực tiểu là 0.

Lời giải.

Phương pháp:

Dựa vào cách đọc đồ thị hàm số để tìm điểm cực trị.

Ở đây cần lưu ý giá trị cực trị của hàm số là trung độ điểm cực trị của đồ thị hàm số, điểm cực trị của hàm số là hoành độ điểm cực trị của đồ thị hàm số.

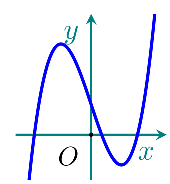
Cách giải:

Từ hình vẽ ta thấy đồ thị hàm số nhận $(1; 0)$ làm điểm cực tiểu và điểm $(-1; 4)$ làm điểm cực đại. Nên hàm số $y = f(x)$ có giá trị cực tiểu là $y_{\text{CT}} = 0$.

Chọn phương án (D)

Câu 7.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?



(A) Hàm số không có cực trị.
(B) Giá trị cực đại dương.
(C) Điểm cực tiểu âm.
(D) Giá trị cực tiểu dương.

Lời giải.

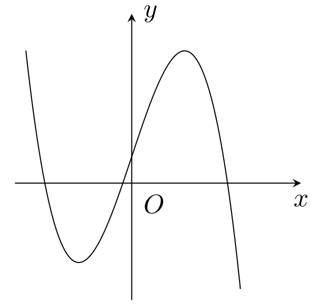
Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy:

- Hàm số có hai cực trị $\Rightarrow A$ sai.
- Điểm cực đại nằm phía trên trục hoành $\Rightarrow$ Giá trị cực đại dương $\Rightarrow B$ đúng.
- Điểm cực tiểu nằm phía bên phải trục tung $\Rightarrow$ Điểm cực tiểu dương $\Rightarrow C$ sai.
- Điểm cực tiểu nằm phía dưới trục hoành $\Rightarrow$ Giá trị cực tiểu âm $\Rightarrow D$ sai.

Chọn phương án (B)

Câu 8.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho có mấy điểm cực trị?



(A) 0. (B) 4. (C) 2. (D) 1.

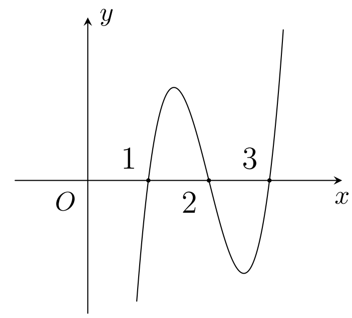
Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có 2 điểm cực trị.

Chọn phương án (C)

Câu 9.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây **đúng**?



(A) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

(B) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.

(C) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bốn điểm cực trị.

(D) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị.

Lời giải.

Vì phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm và khi qua 3 nghiệm $f'(x)$ đều đổi dấu nên nên đồ thị hàm số có ba điểm cực trị.

Chọn phương án (B)

Câu 10.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

(A) Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

(B) Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$.

(C) Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$.

(D) Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.

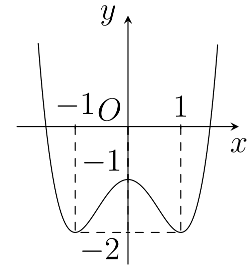
Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ và đạt cực tiểu tại $x = 4$.

Chọn phương án (A)

Câu 11.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Giá trị cực đại của hàm số bằng



(A) -2. (B) 0. (C) -1. (D) 1.

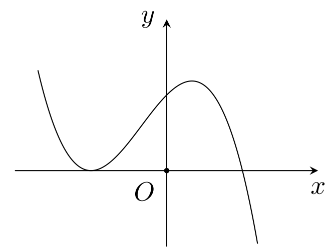
Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta suy ra giá trị cực đại bằng -1.

Chọn phương án (C)

Câu 12.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là



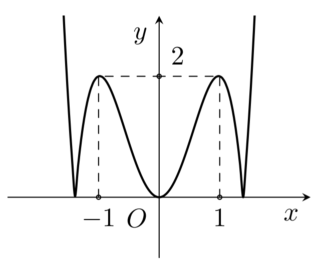
(A) 2. (B) 1. (C) 0. (D) 3.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số, số điểm cực trị của hàm số đã cho là 2.

Chọn phương án (A)

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi đồ thị hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 4. (B) 5. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có 5 cực trị.

Chọn phương án (B)

Câu 14.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Phát biểu nào sau đây **đúng**?

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

(A) Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

(B) Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$.

(C) Hàm số có 3 cực tiểu.

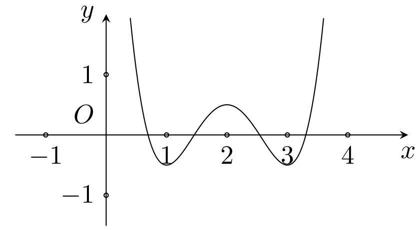
(D) Hàm số có giá trị cực tiểu là 0.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.
Chọn phương án A

Câu 15.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

(A) 3. (B) 1. (C) 4. (D) 2.



Lời giải.
Dựa vào đồ thị ta có hàm số có 3 cực trị, trong đó có 2 cực tiểu và một cực đại.
Chọn phương án A

Câu 16.
Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			5				$+\infty$
	$-\infty$	↗		↘	-1	↗	

(A) Hàm số có điểm cực tiểu $x = 0$.
(B) Hàm số có điểm cực đại $x = 5$.
(C) Hàm số có điểm cực tiểu $x = -1$.
(D) Hàm số có điểm cực tiểu $x = 1$.

Lời giải.
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có điểm cực tiểu $x = 1$.
Chọn phương án D

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$-$	0	$-$	
y			2				
	$-\infty$	↗		↘			$-\infty$

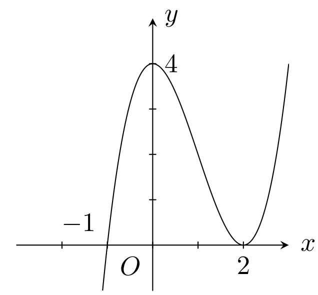
Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

(A) Hàm số có giá trị cực đại bằng 1.
(B) Hàm số có đúng hai cực trị.
(C) Hàm số có giá trị cực đại bằng 2.
(D) Hàm số không xác định tại $x = 1$.

Lời giải.
Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và giá trị cực đại của hàm số bằng 2.
Chọn phương án C

Câu 18.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có mấy điểm cực trị?



(A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Dựa vào hình vẽ thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

Chọn phương án (B)

Câu 19. Đồ thị hàm số nào sau đây có ba điểm cực trị?

(A) $y = 2x^4 - 4x^2 + 3$.
(B) $y = \left(x^2 + 2\right)^2$.
(C) $y = -x^4 - 3x^2$.
(D) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$.

Lời giải.

Hàm bậc ba chỉ có tối đa 2 điểm cực trị $\Rightarrow$ do đó loại hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$.

Hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow a \cdot b < 0$ do đó chọn đáp án $y = 2x^4 - 4x^2 + 3$.

Chọn phương án (A)

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1 || -1	$\nearrow$	3	$\searrow$	2

(A) Có một điểm. (B) Có ba điểm. (C) Có hai điểm. (D) Có bốn điểm.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có hàm số có hai điểm cực trị là $x = -1$ và $x = 1$.

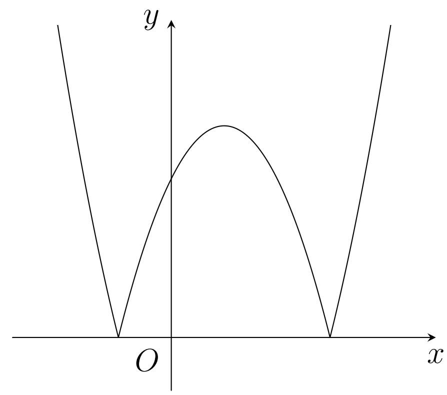
Chọn phương án (C)

B MỨC ĐỘ 2

Câu 21.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 1. **B** 2. **C** 3. **D** 4.



Lời giải.

Dựa vào hình vẽ ta có đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị.

Chọn phương án C

Câu 22. Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như hình vẽ?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			2				$+\infty$
		↗		↘		↗	
	$-\infty$				-2		

A $y = x^3 - 3x$. **B** $y = x^3 - 3x - 1$. **C** $y = x^3 + 3x$. **D** $y = x^4 - 2x^2$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có 2 cực trị nên loại C và D.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-1; 2)$ nên chọn A.

Chọn phương án A

Câu 23.

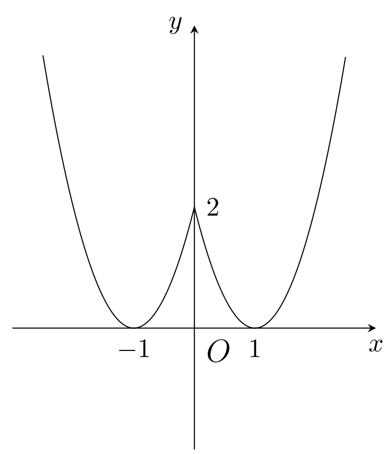
Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên

(I). Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

(II). Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$.

(III). Hàm số có ba điểm cực trị.

(IV). Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2.



Số mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên là

A 4. **B** 2. **C** 3. **D** 1.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta thấy

— Đồ thị đi xuống trên khoảng $(0;1)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$. Do đó (I) đúng.

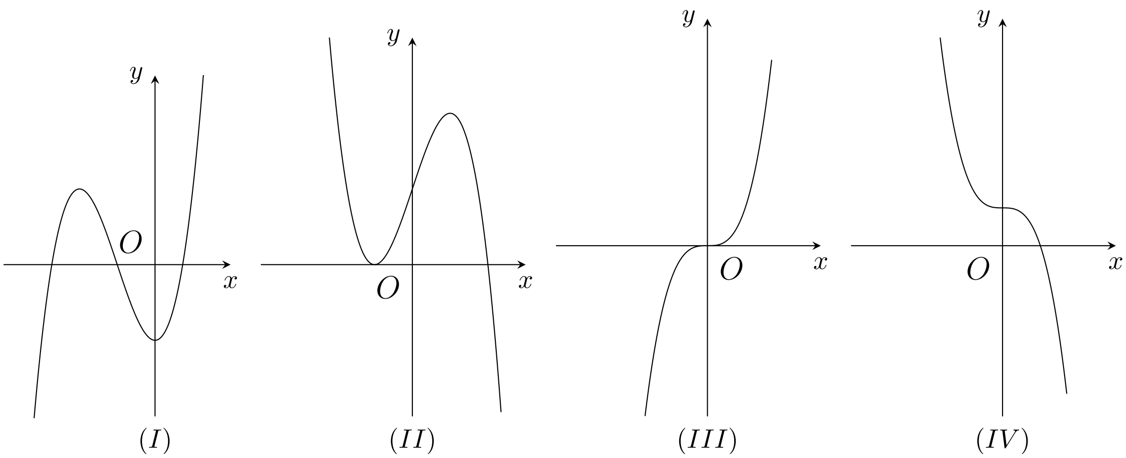
— Đồ thị đi lên trên khoảng $(-1;0)$, đi xuống trên khoảng $(0;1)$ và đi lên trên khoảng $(1;2)$ nên trên khoảng $(-1;2)$ hàm số không hoàn toàn đồng biến. Do đó (II) sai.

— Đồ thị hàm số có ba điểm hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại nên (III) đúng.

— Giá trị lớn nhất của hàm số là tung độ của điểm cao nhất của đồ thị hàm số nên (IV) sai.

Như vậy ta có hai mệnh đề đúng là (I) và (III).
Chọn phương án B

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$



Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A Đồ thị (III) xảy ra khi $a > 0$ và $f'(x) = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.
B Đồ thị (IV) xảy ra khi $a > 0$ và $f'(x) = 0$ có có nghiệm kép.
C Đồ thị (II) xảy ra khi $a \neq 0$ và $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.
D Đồ thị (I) xảy ra khi $a < 0$ và $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải.

Đồ thị (III) đi lên từ trái qua phải nên $a > 0$ và hàm số không có cực trị nên $f'(x) = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

Chọn phương án A

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3;3]$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên.

x	-3		-1		0		1		2		3
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Mệnh đề nào sau đây **sai** về hàm số đó?

A Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.
B Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.
C Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.
D Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Lời giải.

Dựa vào bảng xét dấu của đạo hàm ta thấy $f'(0) = 0$ và đạo hàm không đổi dấu khi x qua $x_0 = 0$ nên hàm số đã cho không đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Chọn phương án D

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[-3; 2)$, có bảng biến thiên như hình vẽ

x	-3		-1		1		2
y'	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	‖
y	-2	$\nearrow$	0	$\searrow$	-5	$\nearrow$	3

Khẳng định nào sau đây đúng?

A $\max\limits_{[-3;2)} y = 3$.

B $\min\limits_{[-3;2)} y = -2$.

C Giá trị cực tiểu của hàm số là 1.

D Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có giá trị cực tiểu của hàm số là -5 và $\min\limits_{[-3;2)} y = -5$ nên ta loại phương án B, C.

Vì $\max\limits_{[-3;2)} y = y(-1) = 0$ nên ta loại phương án A và chọn phương án D.

Chọn phương án D

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -3.

B Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1 và 2.

C Hàm số đại cực đại tại $x = 0$.

D Hàm số có đứng hai cực trị.

Câu 28. Cho biết hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

(A) Hàm số có hai điểm cực đại.

(B) Hàm số có hai điểm cực trị.

(C) Hàm số có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

(D) Hàm số có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(2x+3)$. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 2. (B) 3. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

$f'(x)$ đổi dấu khi qua $x = 0$ và $x = -\dfrac{3}{2}$.

Vậy hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.

Chọn phương án (A)

Câu 30.

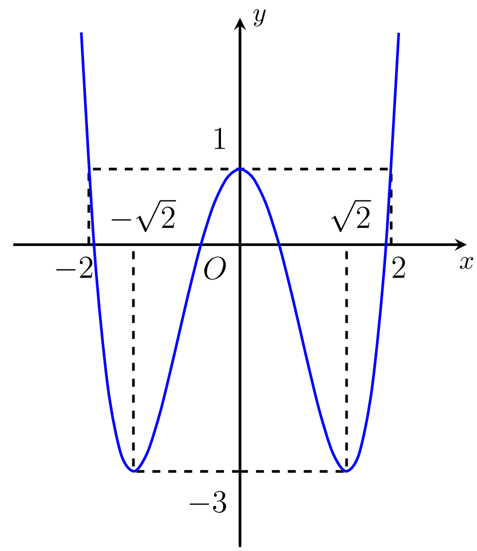
Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Đồ thị hàm số không có điểm cực đại và có hai điểm cực tiểu là $(-\sqrt{2}; -3), (\sqrt{2}; -3)$.

(B) Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(1; 0)$ và hai điểm cực tiểu là $(-3; -\sqrt{2}), (-3; \sqrt{2})$.

(C) Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(0; 1)$ và hai điểm cực tiểu là $(-\sqrt{2}; -3), (\sqrt{2}; -3)$.

(D) Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $(0; 1)$ và hai điểm cực đại là $(-\sqrt{2}; -3), (\sqrt{2}; -3)$.



Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hỏi hàm số sau có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1 ‖ -1	$\nearrow$	3	$\searrow$	2

(A) Có một điểm. (B) Có ba điểm. (C) Có bốn điểm. (D) Có hai điểm.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+2)(x-1)^2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

(A) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-2; +\infty)$.
(B) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = -2$.
(C) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.
(D) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-2; 1)$.

Lời giải.

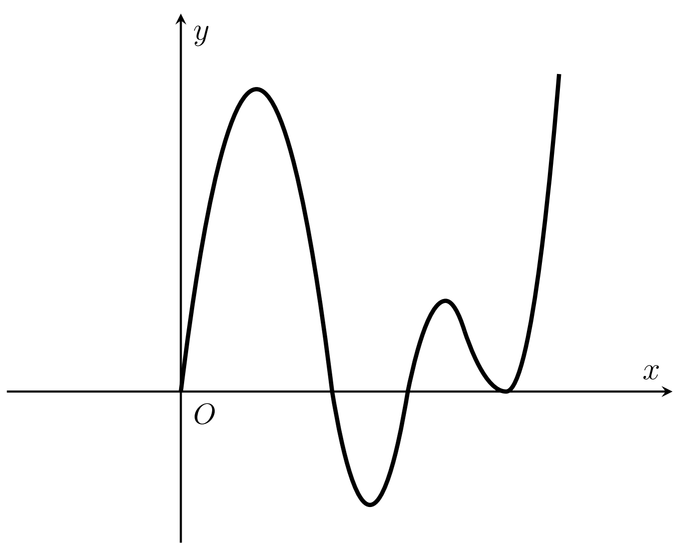
Bảng xét dấu biểu thức $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.

Chọn phương án (A)

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm $f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $f(x)$ đã cho có bao nhiêu cực trị?



(A) 4. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		x_4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số đã cho có 3 cực trị.

Chọn phương án C

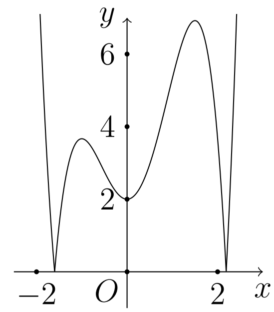
Câu 34. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số là

A 4.

B 3.

C 5.

D 2.



Lời giải.

Chú ý: x_0 là điểm cực đại của hàm số nếu tồn tại khoảng $(a; b)$ sao cho $x_0 \in (a; b) \subset \mathscr{D}$ và $f(x_0) > f(x)$ với mọi $x \in (a; b)\backslash\{x_0\}$, x_0 là điểm cực tiểu của hàm số nếu tồn tại khoảng $(a; b)$ sao cho $x_0 \in (a; b) \subset \mathscr{D}$ và $f(x_0) < f(x)$ với mọi $x \in (a; b)\backslash\{x_0\}$. Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị.

Chọn phương án C

Câu 35. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ biết $f'(x) = x\left(x^2 - 1\right)(x + 2)^{2018}$.

A 2. B 3. C 4. D 1.

Lời giải.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 1\right)(x + 2)^{2018} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

Đạo hàm chỉ đổi dấu khi qua các nghiệm $-1, 0, 1$ nên hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Chọn phương án B

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **đúng**?

A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 4.
B. Hàm số có giá trị cực đại bằng -1 .
C. Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$.
D. Hàm số có đúng một cực trị.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f'(x)$ có nghiệm $x = -2$ và đồng thời $f'(x)$ đổi dấu từ " $+$ " sang " $-$ " khi x đi qua -2 .Vậy nên hàm số đạt cực đại tại $x = -2$.

Chọn phương án C

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	

A. 3.
B. 0.
C. 1.
D. 2.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên, ta suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Chọn phương án A

Câu 38. Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào trong các hàm số được liệt kê dưới đây?

A. $y = x^3 - 3x^2 + 3x$.
B. $y = -x^3 + 3x^2 - 3x$.
C. $-x^3 - 3x^2 - 3x$.
D. $x^3 + 3x^2 - 3x$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↗	$+\infty$

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy rằng hàm số luôn đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$. Do đó hàm số cần tìm là $y = x^3 - 3x^2 + 3x$.

Chọn phương án A

Câu 39.

Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

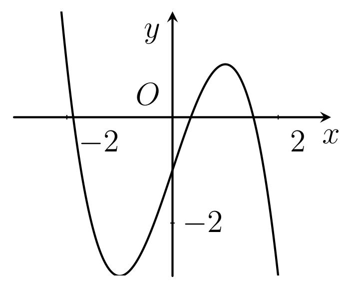
(A) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.
(B) Hàm số đã cho không có giá trị cực đại.
(C) Hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị.
(D) Hàm số đã cho không có giá trị cực tiểu.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có:
Hàm số đạt cực đại tại $x_{\text{CĐ}} = 1$ và $y_{\text{CĐ}} = 3$.
Hàm số đạt cực tiểu tại $x_{\text{CT}} = 2$ và $y_{\text{CT}} = 0$.
Chọn phương án (A)

Câu 40.

Cho hàm số $y = f(x)$, có đạo hàm là $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $f'(x)$ có đồ thị như dưới đây. Hỏi hàm số có bao nhiêu cực trị?



(A) 1. (B) 0. (C) 3. (D) 2.

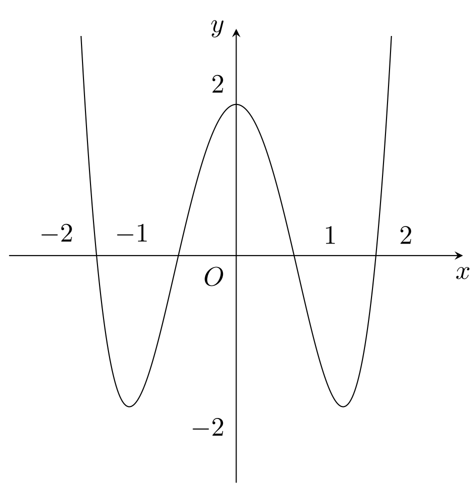
Lời giải.

Ta thấy y' đổi dấu 3 lần. Vậy hàm số có 3 cực trị.
Chọn phương án (C)

C MỨC ĐỘ 3

Câu 41. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có dạng hình vẽ bên. Tính tổng tất cả giá trị nguyên của m để hàm số $y = |f(x) - 2m + 5|$ có 7 điểm cực trị.

(A) 6. (B) 3. (C) 5. (D) 2.



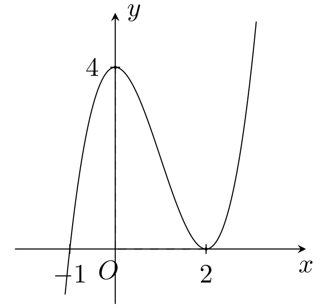
Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = f(x) - 2m + 5$ có được bằng cách tịnh tiến theo trục Oy là $-2m + 5$ đơn vị. Muốn đồ thị $y = |f(x) - 2m + 5|$ có đủ 7 cực trị thì đồ thị hàm số $y = f(x) - 2m + 5$ phải cắt Ox như vậy thì $-2 < -2m + 5 < 2 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} < m < \dfrac{7}{2}$ do m nguyên nên chọn $m = 2; m = 3$. Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn.

Chọn phương án C

Câu 42.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trên khoảng $(-1; 3)$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ có mấy điểm cực trị?



A 0. **B** 2. **C** 3. **D** 1.

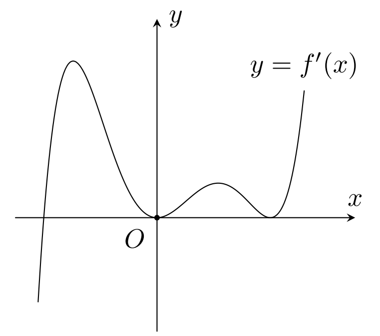
Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có trên khoảng $(-1; 3)$ có hai điểm cực trị.

Chọn phương án B

Câu 43.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ bằng



A 2. **B** 3. **C** 4. **D** 1.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm lần lượt là x_1, x_2, x_3 (với $x_1 < x_2 < x_3$).

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên:

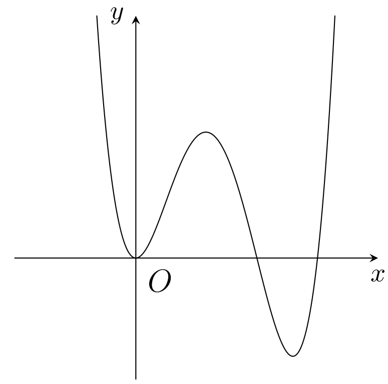
x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	

Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu từ âm qua dương khi qua điểm x_1 này nên số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ bằng 1.

Chọn phương án D

Câu 44.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ bên dưới. Khi đó trên $\mathbb{R}$ hàm số $y = f(x)$



(A) có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.
(B) có 1 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.
(C) có 2 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.
(D) có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$,ta lập bảng biến thên của hàm số $y = f(x)$:

x	$-\infty$		0		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y					y_1		y_2		

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có 1 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

Chọn phương án (B)

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ với bảng biến thiên dưới đây:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-2		3		-4		$+\infty$

Hỏi hàm số $y = |f(|x|)|$ có bao nhiêu cực trị?

(A) 5. (B) 3. (C) 1. (D) 7.

Lời giải.

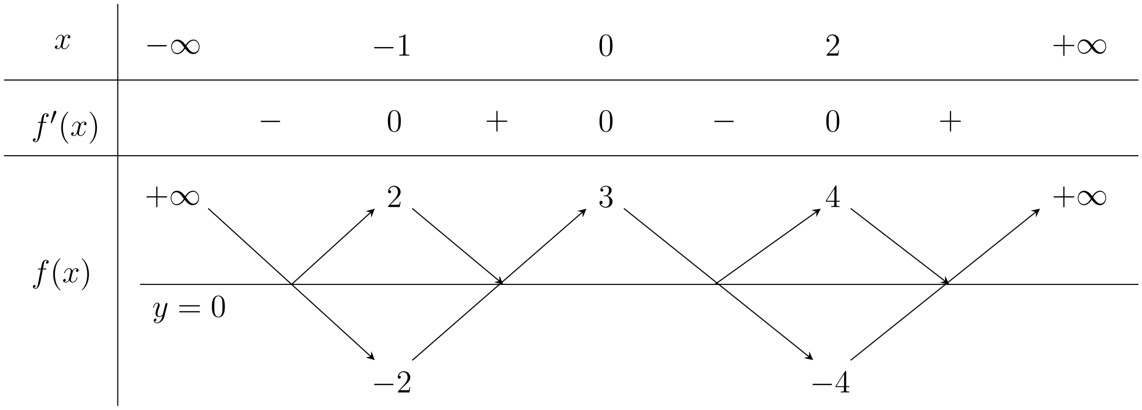
Phương pháp:

+ Cách 1: Dựa vào BBT, vẽ BBT của đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$ và suy ra số các điểm cực trị của hàm số.

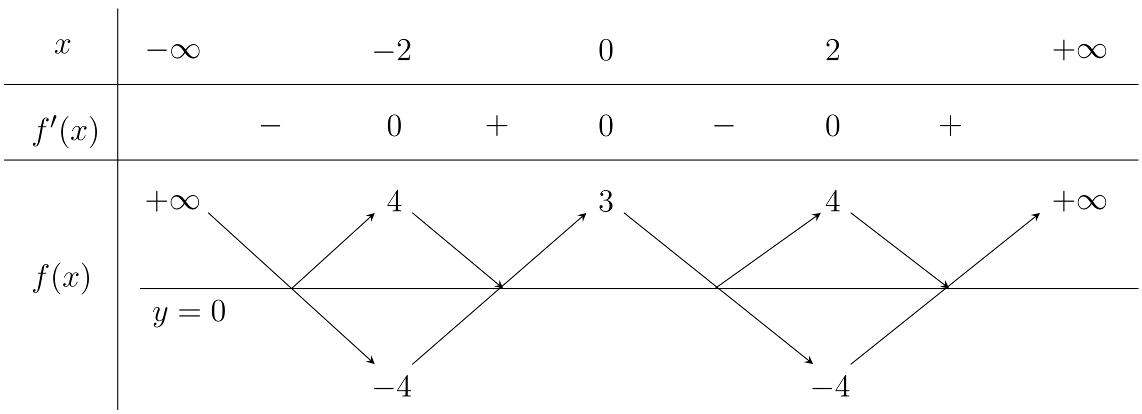
+ Cách 2: Từ BBT suy ra công thức hàm số $y = f(x)$ từ đó vẽ đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$ và suy ra số các điểm cực trị của hàm số.

Cách giải:

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị $(-1; -2), (0; 3), (2; -4)$.
Khi đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = |f(|x|)|$ như sau



Bảng biến thiên của hàm số $y = |f(|x|)|$ là



Như vậy hàm số $y = |f(|x|)|$ có 7 điểm cực trị.
Chọn phương án D

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biên thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 3. **B** 5. **C** 2. **D** 4.

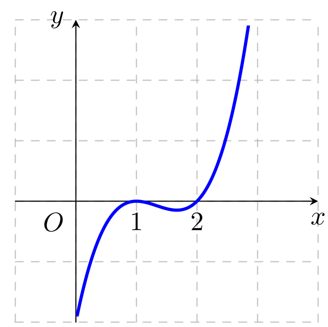
Lời giải.

Từ bảng biến thiên đã cho, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$ như sau

x	$-\infty$		x_0		-1		3		$+\infty$
$\lvert f(x)\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có 3 cực trị.
Chọn phương án A

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A $(0; 1)$.
B $(2; +\infty)$.
C $(1; 2)$.
D $(0; 1)$ và $(2; +\infty)$.

Lời giải.

— **Phương pháp:** Lập BXD của $f'(x)$ và kết luận các khoảng đơn điệu của hàm số.

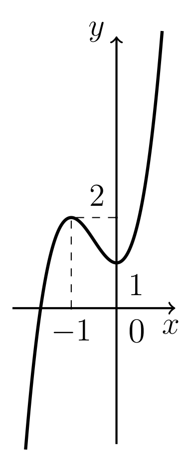
— **Cách giải:** Ta có BXD của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào BXD ta có: Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1), (1; 2)$ và đồng biến trên $(2; +\infty)$.
Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$
$\Rightarrow y = f(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$

Chọn phương án B

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



(A) Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực tiểu và không có cực đại.
(B) Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại và không có cực tiểu.
(C) Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.
(D) Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

Lời giải.

Phương pháp: Dựa vào đồ thị hàm số để xét dấu của hàm số $y = f'(x)$ và số nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ để kết luận tính đơn điệu và số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

Cách giải: Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại 1 điểm qua điểm đó hàm số $y = f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên điểm đó là điểm cực tiểu của hàm số.

Chọn phương án (A)

Câu 49. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có hai điểm cực trị $A(0; 2)$ và $B(2; -14)$. Tính $f(1)$.

(A) $f(1) = -5$. (B) $f(1) = 5$. (C) $f(1) = -6$. (D) $f(1) = -7$.

Lời giải.

A, B thuộc đồ thị hàm số nên có $\begin{cases} c = 2 & (1) \\ 16a + 4b + c = -14 & (2) \end{cases}$

Ta có $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$. B là cực trị của đồ thị nên $f'(2) = 0 \Leftrightarrow 32a + 4b = 0$ (3).

Từ $(1), (2), (3)$ tìm được $a = 1, b = -8, c = 2$.

Vậy $f(1) = a + b + c = -5$.

Chọn phương án (A)

Câu 50. Giá trị của m nằm trong khoảng nào để đồ thị hàm số $y = 2x^4 + mx^2 + m$ có ba điểm cực trị và ba điểm này tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2.

(A) $(-12; -6)$. (B) $(-6; 0)$. (C) $(-6; -5)$. (D) $(2; 6)$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $32a^3S^2 + b^5 = 0$ ta có $32.2^3.2^2 + m^5 = 0 \Leftrightarrow m^5 = -1024 \Leftrightarrow m = -4$.

Chọn phương án (B)

Câu 51. Tìm tham số m để các điểm cực trị của hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - 2mx^2 + (4m^2 - 1)x + 1$ đều nằm trong khoảng $(-5; 3)$.

(A) $-3 < m < 2$. (B) $-2 < m < 2$. (C) $-2 < m < 1$. (D) $-3 < m < 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 4mx + 4m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2m + 1 \\ x = 2m - 1. \end{array}\right.$

Để các điểm cực trị của hàm số đều nằm trong khoảng $(-5; 3)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} -5 < 2m + 1 < 3 \\ -5 < 2m - 1 < 3. \end{cases}$

Giải ra ta được $-2 < m < 1$.

Chọn phương án (C)

Câu 52. Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$. Tính diện tích của tam giác ABC.

A $\frac{1}{2}$. **B** 2. **C** $\sqrt{3}$. **D** 1.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Vậy ta có $A(-1;1)$, $B(0;2)$; $C(1;1)$ và diện tích tam giác ABC là $S = |y_{\text{cđ}} - y_{\text{ct}}|.|x_{\text{ct}}| = 1$.

Chọn phương án D

Câu 53. Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ có hai điểm cực trị là A và B. Đường thẳng AB đi qua điểm nào sau đây?

A $M(4;3)$. **B** $P(3;4)$. **C** $Q(3;-4)$. **D** $N(4;-3)$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y = -2x + 5$.

Khi đó đường thẳng đi qua $N(4;-3)$.

Chọn phương án D

Câu 54. Biết rằng hàm số $y = a\sin 2x + b\cos 2x - x \quad (0 < x < \pi)$ đạt cực trị tại các điểm $x = \frac{\pi}{6}$ và $x = \frac{\pi}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $T = a - b$.

A $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. **B** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **C** $\sqrt{3} - 1$. **D** $\sqrt{3} + 1$.

Lời giải.

$y' = 2a\cos 2x - 2b\sin 2x - 1$.

Hàm số đạt cực trị tại các điểm $x = \frac{\pi}{6}$ và $x = \frac{\pi}{2}$ nên ta có

$$\begin{cases} y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - \sqrt{3}b - 1 = 0 \\ -2a - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

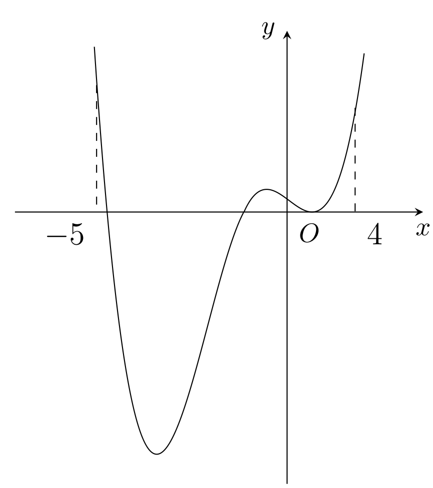
Vậy $T = a - b = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Chọn phương án B

Câu 55.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên đoạn $[-5;4]$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-5;4]$ là

A 3. **B** 5. **C** 2. **D** 4.



50 DẠNG TOÁN PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA LẦN 2

Lời giải.
Nhìn hình ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 2 lần nên có 2 điểm cực trị.
Chọn phương án C

Câu 56. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x^2-4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là:

(A) 4. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.
Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$.
Mà $x = 0$ là nghiệm kép nên $f'(x)$ không đổi dấu qua $x = 0$.
$\Rightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.
Chọn phương án D

Câu 57. Tìm tất cả các giá trị số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-m}{x+m}$ đối xứng qua điểm có tọa độ $(1;2)$.

(A) $m = 2$. (B) $m = 1$. (C) $m = -1$. (D) $m = -2$.

Lời giải.

— Trường hợp $m = 0$: hàm số trở thành $y = \dfrac{2x}{x}$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus 0$, đồ thị không đối xứng qua điểm $(1;2)$.

— Trường hợp $m \neq 0$: đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -m$, tiệm cận ngang là $y = 2$. Đồ thị hàm số đối xứng qua điểm $I(-m;2)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận $\Rightarrow -m = 1 \Leftrightarrow m = -1$.

Vậy $m = -1$.
Chọn phương án C

Câu 58. Tìm m để hàm số $y = mx^3 + 3x^2 + 12x + 2$ đạt cực đại tại $x = 2$.

(A) $m = -2$. (B) $m = -3$. (C) $m = 0$. (D) $m = -1$.

Lời giải.
$y' = 3mx^2 + 6x + 12$ và $y'' = 6mx + 6$.
Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ khi và chỉ khi
$\begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$
Chọn phương án A

Câu 59. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -2017(x-1)(x+2)^3(x-3)^2$. Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 3. (B) 2. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \\ x = 3 \end{array}\right.$. Bảng xét dấu của y' như sau:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Chọn phương án B

Câu 60. Hàm số $y = x - \sin 2x + 3$ thỏa mãn tính chất nào sau đây

A Nhận điểm $x = -\dfrac{\pi}{6}$ làm điểm cực tiểu.
B Nhận điểm $x = \dfrac{\pi}{2}$ làm điểm cực đại.
C Nhận điểm $x = -\dfrac{\pi}{6}$ làm điểm cực đại.
D Nhận điểm $x = -\dfrac{\pi}{2}$ làm điểm cực tiểu.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 1 - 2\cos 2x$, $y" = 4\sin 2x$.

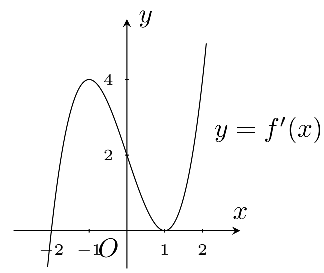
Vì $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \neq 0$ và $y'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) \neq 0$ nên loại đáp án B, D.

Ta có $\begin{cases} y'\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = 0 \\ y"\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -2\sqrt{3} < 0 \end{cases}$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = -\dfrac{\pi}{6}$.

Chọn phương án C

D MỨC ĐỘ 4

Câu 61. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x^2 - 3\right)$.



A 4.
B 2.
C 5.
D 3.

Lời giải.

Quan sát đồ thị ta có $y = f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x = -2$ nên hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị là $x = -2$.

Ta có $y' = \left[f\left(x^2 - 3\right)\right]' = 2x.f'\left(x^2 - 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 3 = -2 \\ x^2 - 3 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$.

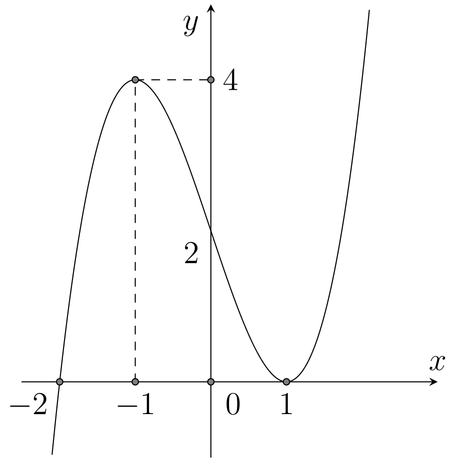
Mà $x = \pm 2$ là nghiệm kép, còn các nghiệm còn lại là nghiệm đơn nên hàm số $y = f\left(x^2 - 3\right)$ có ba cực trị

Chọn phương án D

Câu 62.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Khí đó, số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \left|f^2(x) - 2f(x) - 8\right|$ là

(A) 9. (B) 10. (C) 11. (D) 7.



Lời giải.

Ta xét hàm $y = h(x) = f^2(x) - 2f(x) - 8 \Rightarrow y' = 2f(x)f'(x) - 2f'(x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f(x) = 1. \end{array}\right.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1. \end{array}\right.$

$f(x) = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \text{ với } -2 < x_1 < -1 \\ x = x_2 \text{ với } 0 < x < 1 \\ x = x_3 \text{ với } x_3 > 1. \end{array}\right.$

Ta có $y = h(x) = (f(x) - 4)(f(x) + 2)$

$\Rightarrow h(x_1) = h(x_2) = h(x_3) = (1-4) \cdot 3 = -9$ và $h(-1) = 0$, $h(1) = -8$.

Ta có bảng biến thiên hàm $y = h(x) = f^2(x) - 2f(x) - 8$

x	$-\infty$		x_1		-1		x_2		1		x_3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	-9	↗	0	↘	-9	↗	-8	↘	-9	↗	$+\infty$

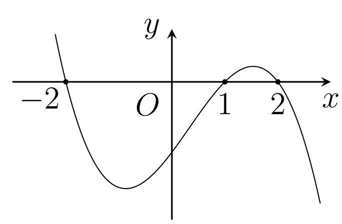
Từ bảng biến thiên ta thấy số điểm cực trị của hàm $y = g(x) = |h(x)|$ là 7.

Chọn phương án (D)

Câu 63.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thoả $f(2) = f(-2) = 0$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ có dạng như hình bên. Hàm số $y = [f(x)]^2$ đạt cực đại tại điểm nào?

(A) 2. (B) -2. (C) 1. (D) 0.



Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$; $f(2) = f(-2) = 0$. Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	0	↘		↗	0	↘	
	$-\infty$								$-\infty$

$\Rightarrow f(x) < 0; \forall x \neq \pm 2$.

Xét $y = (f(x))^2 \Rightarrow y' = 2f(x) \cdot f'(x)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 2 \\ x = 1; x = \pm 2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$-$		$-$	0	$-$	
$y = (f(x))^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y = [f(x)]^2$ đạt cực đại tại $x = 1$.

Chọn phương án C

Câu 64. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘		↗	-1	↘		↗	$+\infty$
			-2				-2		

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = 3f^3(x) + 4f^2(x) + 1$ là

A 4. **B** 9. **C** 5. **D** 3.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = 9f^2(x) \cdot f'(x) + 8f(x)f'(x)$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = -\dfrac{8}{9}. \end{array}\right.$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 < -1 \\ x = x_2 > 1 \end{array}\right.$; $f(x) = -\dfrac{8}{9} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = x_3, & x_1 < x_3 < -1 \\ x = x_4, & 1 < x_4 < x_2 \end{array}\right.$.

Vì $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ nên ta có bảng biến thiên cho $g(x)$ như sau

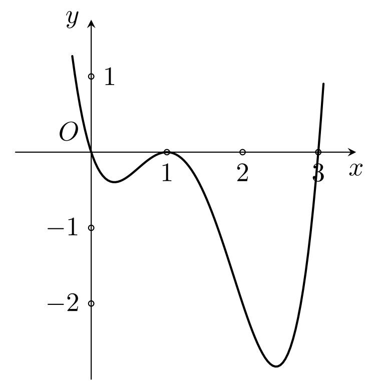
x	$-\infty$		x_1		x_3		-1		0		1		x_4		x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(x_1)$	$\nearrow$	$g(x_3)$	$\searrow$	$g(-1)$	$\nearrow$	$g(0)$	$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	$g(x_4)$	$\searrow$	$g(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đây ta suy ra được số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)$ là 4.

Chọn phương án A

Câu 65.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị của hàm số $y = f^2(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại, cực tiểu?



A. 1 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

B. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

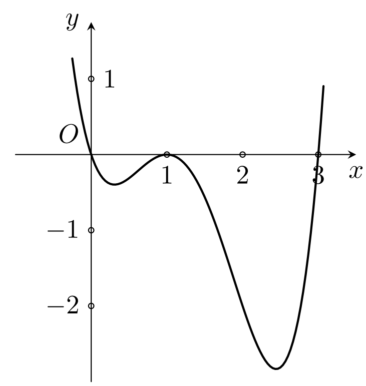
C. 3 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

D. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

Lời giải.

a) Ta có $y = f^2(x) \Rightarrow y' = 2f(x)f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right.$.

b) Từ đồ thị ta có



(a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \text{, trong đó } x = 1 \text{ là nghiệm kép.} \\ x = 3 \end{array}\right.$

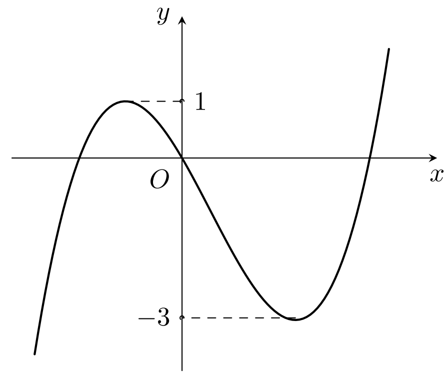
(b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \text{ (với } 0 < a < 1) \\ x = 1 \\ x = b \text{ (với } 1 < b < 3) \end{array}\right.$

c) Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f^2(x)$ như sau

x	$-\infty$		0		m		1		n		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy hàm số $y = f^2(x)$ có 2 điểm cực đại và 3 điểm cực tiểu
Chọn phương án (B)

Câu 66.
Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị.



(A) $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$.
(B) $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$.
(C) $m = -1$ hoặc $m = 3$.
(D) $1 \leq m \leq 3$.

Lời giải.

a) Ta có số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) + m|$ "=" số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) + m$ "+" số nghiệm của phương trình $f(x) + m = 0$ (không tính nghiệm kép).

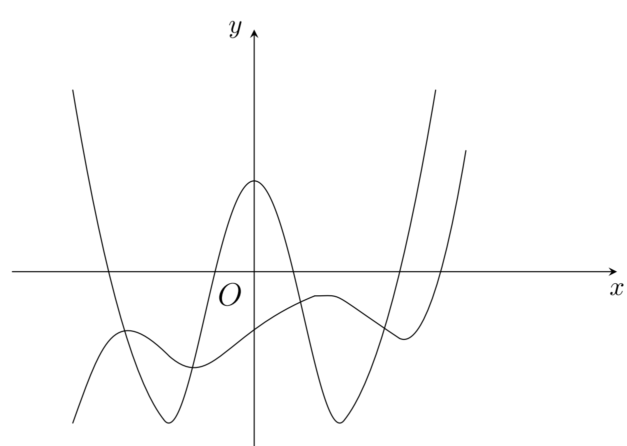
b) Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) + m$ "=" số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$. Từ đồ thị ta thấy hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

c) Như vậy, để hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị thì phương trình $f(x) = -m$ phải có một nghiệm đơn hoặc một nghiệm đơn và một nghiệm kép.

Suy ra, $\left[\begin{array}{l} -m \geq 1 \\ -m \leq -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{array}\right.$.

Chọn phương án (A)

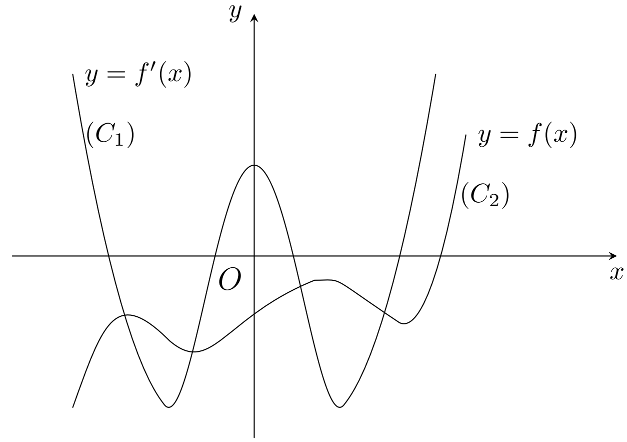
Câu 67.
Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của $f(x)$; $f'(x)$ như hình vẽ.
Mệnh đề nào sau đây **đúng**?



(A) $f'(-1) \geq f''(1)$.
(B) $f'(-1) > f''(1)$.
(C) $f'(-1) < f''(1)$.
(D) $f'(-1) = f''(1)$.

Lời giải.

— Nếu (C_2) là đồ thi của $f'(x)$ thì ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 1 lần nên hàm số $f(x)$ có 1 cực trị. Đồ thị còn lại (C_1) là của hàm số $f(x)$ có 3 cực trị nên vô lí.



— Do đó từ hình vẽ, ta có (C_1) là đồ thị của $f'(x)$ và (C_2) là đồ thị của $f(x)$.

— Từ đồ thị ta thấy hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0$.

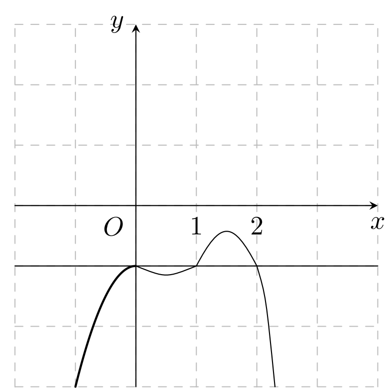
— hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0$ và $f''(1) < 0$.

— Do đó $f'(-1) > f''(1)$.

Chọn phương án B

Câu 68.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)$. Biết rằng đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Xác định điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x) + x$.



A Không có giá trị. **B** $x = 0$.

C $x = 1$. **D** $x = 2$.

Lời giải.

Phương pháp: Giải phương trình $g'(x) = 0$, lập BBT của đồ thị hàm số $y = g(x)$ và kết luận.

Cách giải:

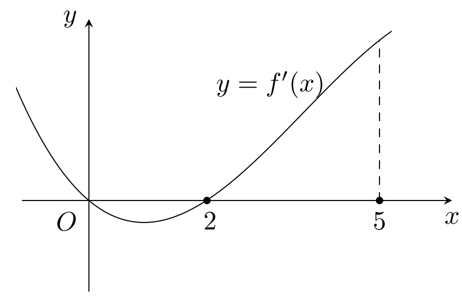
Ta có $g'(x) = f'(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

BBT

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào BBT ta thấy hàm số $y = g(x)$ có 1 điểm cực đại là $x = 2$.
Chọn phương án D

Câu 69.
Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Tính số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2)$ trên khoảng $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$.



A 2. **B** 4. **C** 3. **D** 5.

Lời giải.
Xét hàm số $g(x) = f\left(x^2\right) \Rightarrow g'(x) = 2xf'\left(x^2\right)$.

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(x^2\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 0 \\ x^2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\sqrt{5}$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{5}$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ đó suy ra hàm số $y = f(x^2)$ có 3 điểm cực trị.
Chọn phương án C

Câu 70. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3mx + m$ có hai điểm cực trị và hai điểm đó cách đều đường thẳng $x = 2$.

A $m = 1$. **B** $m = 2$. **C** $m \in \varnothing$. **D** $m = 0$.

Lời giải.
Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3m = 3(x^2 - 2mx + m)$.
Giả sử đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Khi đó $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $y' = 0$ và trung điểm I của AB phải thuộc đường thẳng $x = 2$. (không xảy ra trường hợp AB song song hoặc trùng với đường thẳng $x = 2$)

Hoành độ của I: $x_I = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = m$ (Vi-et).
I thuộc $x = 2$ nên $m = 2$.
Ngược lại, với $m = 2$ ta có $y' = 3(x^2 - 4x + 2)$ hàm số luôn có 2 cực trị. Do đó $m = 2$ thỏa mãn.
Nhận xét: Ta có thể giải bài này bằng cách thử lần lượt $m = 0, m = 1, m = 2$ để chọn được phương án đúng.
Chọn phương án B

Câu 71. Tìm tất cả các giá trị của tham số k để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

A -1. **B** 1. **C** -3. **D** 3.

Lời giải.
$y' = 3x^2 - 6x + m \quad \Delta = 9 - 3m$.
Để hàm số đã cho có hai điểm cực trị thì $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < 3$.
Ta có $x_1 + x_2 = 2; x_1.x_2 = \dfrac{m}{3}$.
$x_1^2 + x_2^2 = 6 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1.x_2 = 6$
$\Leftrightarrow 4 - 2.\dfrac{m}{3} = 6 \Leftrightarrow m = -3$.
Chọn phương án C

Câu 72. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

A $m < 0$. **B** $m > 0$. **C** $m = 0$. **D** $m \neq 0$.

Lời giải.
Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ khi và chỉ khi $\begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$.
Chọn phương án C

Câu 73. Tìm tất cả các giá trị số m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3\,(m - 1)\,x^2 + 6\,(m - 2)\,x - 2017$ có hai điểm cực trị nằm trong khoảng $(-5; 5)$.

A $m \in (-3; +\infty)$. **B** $m \in (-\infty; 7)$. **C** $m \in (-3; 7) \setminus \{3\}$. **D** $m \in (7; 11)$.

Lời giải.
Ta có: $y' = 6x^2 + 6(m - 1)x + 6(m - 1)$
Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + (m - 1)x + m - 2 = 0 \quad (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 - m \quad (2) \end{array}\right.$.
Đồ thị hàm số có 2 cực trị khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Rightarrow$ phương trình (2) có nghiệm khác $-1 \Rightarrow 2 - m \neq -1 \Leftrightarrow m \neq 3$.
Hai điểm cực trị là 2 nghiệm của phương trình (1), để hai điểm cực trị nằm trong khoảng $(-5; 5)$ thì $-5 < 2 - m < 5 \Leftrightarrow -3 < m < 7$.
Vậy $m \in (-3; 7) \setminus \{3\}$.
Chọn phương án C

Câu 74. Với giá trị nào của tham số m thì đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m + 1)x^2 + m^2$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

(A) $m = -1$. (B) $m = -1, m = 0$. (C) $m > -1$. (D) $m = 0$.

Lời giải.

$y' = 4x(x^2 - (m+1))$.

Để hàm số có 3 cực trị thì $m > -1$.

Khi đó các cực trị là $A(0; m^2), B(-\sqrt{m+1}; -2m-1), C(\sqrt{m+1}; -2m-1)$.

Do tính đối xứng của hàm số chẵn nên ABC là tam giác cân. Do đó, tam giác ABC vuông cân khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -(m+1)^2 + (m+1)^4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 0 \\ m = -2 \end{array}\right.$.

So với điều kiện ta được $m = 0$.

Chọn phương án (D)

Câu 75. Đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều khi

(A) $m = 0, m = \sqrt[3]{3}$. (B) $m = 0$. (C) $m = 0, m = 27$. (D) $m = \sqrt[3]{3}$.

Lời giải.

$y' = -4x^3 + 4mx = -4x(x^2 - m)$.

Đồ thị hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi $m > 0$.

Gọi $O(0;0), A(-\sqrt{m}; m^2), B(\sqrt{m}; m^2)$ là ba điểm cực trị. Do tính đối xứng của hàm số chẵn nên OAB là tam giác cân tại O. Do đó, OAB là tam giác đều khi và chỉ khi

$OA = AB \Leftrightarrow m + m^4 = 4m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \sqrt[3]{3} \end{array}\right.$.

So điều kiện ta được $m = \sqrt[3]{3}$.

Chọn phương án (D)

Câu 76. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 4m - 4$ (m là tham số thực). Xác định m để hàm số đã cho có 3 cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 1.

(A) $m = 1$. (B) $m = 3$. (C) $m = 5$. (D) $m = 7$.

Lời giải.

$y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$.

Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi $m > 0$.

Gọi ba cực trị là $O(0;0), A(-\sqrt{m}; -(m-2)^2), B\left(\sqrt{m}; -(m-2)^2\right)$.

Do tính chất đối xứng của hàm số chẵn nên tam giác OAB cân tại O. Gọi H là chân đường cao kẻ từ O. Suy ra là trung điểm AB nên $H(0; -(m-2)^2)$.

Khi đó $S_{OAB} = \dfrac{1}{2}.2\sqrt{m}.m^2 = 1 \Leftrightarrow m = 1$.

Chọn phương án (A)

Câu 77. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng hai lần bán kính đường tròn nội tiếp.

(A) $m = 1$. (B) $m = \sqrt[3]{3}$. (C) $m = \dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$. (D) $m = \dfrac{\sqrt[3]{6}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 2m + m^4 \\ x = \pm\sqrt{m} \Rightarrow y = 2m + m^4 - m^2 \end{array}\right.$.

Với điều kiện $m > 0$, ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0; 2m + m^4)$, $B(\sqrt{m}; 2m + m^4 - m^2)$, $C(-\sqrt{m}; 2m + m^4 - m^2)$. Để A, B, C thỏa mãn yêu cầu bài toán thì ABC tạo thành tam giác đều $\Leftrightarrow AB = BC \Leftrightarrow m + m^4 = 4m \Leftrightarrow m = \sqrt[3]{3}$.

Chọn phương án B

Câu 78. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + mx + 1$ đạt cực trị tại hai điểm x_1 và x_2 sao cho $\left(x_1^2 + x_2 + 2m\right)\left(x_2^2 + x_1 + 2m\right) = 9$?

(A) $m = -1$.
(B) $m = -4$ hoặc $m = 2$.
(C) $m = -4$.
(D) $m = 2$.

Lời giải.

Ta có: $y' = x^2 - x + m$.

Hàm số đạt cực trị tại hai điểm $x_1; x_2$.

$\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta > 0$.

$\Leftrightarrow 1 + 4m > 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{-1}{4}$.

Khi đó $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - x + m = 0$.

$\Rightarrow \left(x_1^2 + x_2 + 2m\right)\left(x_2^2 + x_1 + 2m\right) = (x_1 - m + x_2 + 2m)(x_2 - m + x_1 + 2m)$.

$\Rightarrow (x_1 + x_2 + m)^2 = 9 \quad (*)$.

Áp dụng định lí Vi - ét ta có: $x_1 + x_2 = 1$.

Thay vào $(*)$ ta có: $(m+1)^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 (\text{thỏa mãn}) \\ m = -4 (\text{loại}) \end{array}\right.$.

Vậy $m = 2$.

Chọn phương án D

Câu 79. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m-1)\sqrt{4 - x^2}$ có 3 điểm cực trị.

(A) $[-5; 7] \setminus \{1\}$.
(B) $(-5; 7) \setminus \{1\}$.
(C) $(-1; 3) \setminus \{1\}$.
(D) $[-1; 3] \setminus \{1\}$.

Lời giải.

Hàm số $y = x^3 + (m-1)\sqrt{4 - x^2}$, tập xác định $D = [-2; 2]$, có $y' = 3x^2 - \dfrac{(m-1)x}{\sqrt{4 - x^2}}$. Xét phương trình

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 3x - \dfrac{m-1}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \, (*) \end{array}\right., x \in (-2; 2).$$

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 và thuộc khoảng $(-2; 2)$. Phương trình $(*) \Leftrightarrow 3x\sqrt{4 - x^2} = m - 1$.

Đặt $f(x) = 3x\sqrt{4 - x^2}, x \in (-2; 2)$ ta khảo sát hàm $f(x)$.

Ta có $f'(x) = 3\sqrt{4 - x^2} - \dfrac{3x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \dfrac{12 - 6x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Lập bảng biến thiên như sau

x	-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-6	$\nearrow$	6	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $m-1 \in (-6,6) \setminus \{0\} \Leftrightarrow m \in (-5;7) \setminus \{1\}$ thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn phương án B

Câu 80. Cho đồ thị hàm số $y=-x^3+3mx+1$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn tam giác OAB vuông tại O (O là gốc tọa độ). Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A $-2<m<0$. **B** $-1<m<\dfrac{1}{3}$. **C** $-\dfrac{1}{2}<m<1$. **D** $1<m<3$.

Lời giải.

$y'=-3x^2+3m$.
Đồ thị hàm số có 2 cực trị thì y' phải có 2 nghiệm phân biệt
$\Leftrightarrow m>0$ Khi đó, đường thẳng đi qua hai điểm cực trị x_1, x_2 là $y=2mx+1$.
Suy ra $y_1=2mx_1+1, y_2=2mx_2+1$.
Giả sử $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$. Khi đó, tam giác OAB là tam giác vuông tại O
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0 \Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0 \Leftrightarrow x_1x_2+(2mx_1+1)(2mx_2+1)=0$
$\Leftrightarrow (4m^2+1)x_1x_2+2m(x_1+x_2)+1=0$
Theo Vi-ét ta có $x_1x_2=-m$ và $x_1+x_2=0$
Do đó $(4m^2+1)x_1x_2+2m(x_1+x_2)+1=0 \Leftrightarrow -4m^3-m+1=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$ (thỏa mãn đk).
Vậy $m=\dfrac{1}{2}$.
Chọn phương án C

BẢNG ĐÁP ÁN

1. D	2. A	3. A	4. D	5. B	6. D	7. B	8. C	9. B	10. A
11. C	12. A	13. B	14. A	15. A	16. D	17. C	18. B	19. A	20. C
21. C	22. A	23. B	24. A	25. D	26. D	27. C	28. D	29. A	30. C
31. D	32. A	33. C	34. C	35. B	36. C	37. A	38. A	39. A	40. C
41. C	42. B	43. D	44. B	45. D	46. A	47. B	48. A	49. A	50. B
51. C	52. D	53. D	54. B	55. C	56. D	57. C	58. A	59. B	60. C
61. D	62. D	63. C	64. A	65. B	66. A	67. B	68. D	69. C	70. B
71. C	72. C	73. C	74. D	75. D	76. A	77. B	78. D	79. B	80. C

DẠNG 28. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 10x^2 + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

A 2. **B** -23. **C** -22. **D** -7.

Lời giải.

Hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[-1; 2]$.

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 20x$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Xét hàm số trên $[-1; 2]$ có $f(-1) = -7$; $f(0) = 2$; $f(2) = -22$.

Vậy $\min\limits_{x \in [-1;2]} f(x) = -22$.

Chọn phương án C

Câu 1. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x(5 - 2x)^2$ trên $[0; 3]$ là

A $\dfrac{250}{3}$. **B** 0. **C** $\dfrac{250}{27}$. **D** $\dfrac{125}{27}$.

Lời giải.

Ta có $y = 4x^3 - 10x^2 + 25x \Rightarrow y' = 12x^2 - 40x + 25$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{2} \in [0; 3] \\ x = \dfrac{5}{6} \in [0; 3] \end{array}\right.$.

Ta có $y(0) = 0; y\left(\dfrac{5}{2}\right) = 0; y\left(\dfrac{5}{6}\right) = \dfrac{250}{27}; y(3) = 3$.

Vậy $\max\limits_{[0;3]} y = y\left(\dfrac{5}{6}\right) = \dfrac{250}{27}$.

Chọn phương án C

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ xác định trên tập $\mathscr{D} = [0; 1]$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A Hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất trên $\mathscr{D}$.

B Hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất trên $\mathscr{D}$.

C Hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất trên $\mathscr{D}$.

D Hàm số $f(x)$ không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $\mathscr{D}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \sqrt{x - x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1 - 2x}{2\sqrt{x - x^2}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \in [0; 1]$.

Ta có $f(0) = 0; f(1) = 0; f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $\max\limits_{[0;1]} y = \dfrac{1}{2}$ khi $x = \dfrac{1}{2}$, $\min\limits_{[0;1]} y = 0$ khi $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Chọn phương án (A)

Câu 3. Gọi M, N lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ trên đoạn $[1;2]$. Khi đó tổng $M + N$ bằng

(A) 2. (B) -2. (C) 0. (D) -4.

Lời giải.

Ta có $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin [1;2] \\ x = 2 \in [1;2]. \end{array}\right.$

$f(1) = -1, f(2) = -3$.

Suy ra $N = \min\limits_{[1;2]} f(x) = f(2) = -3, N = \max\limits_{[1;2]} f(x) = f(1) = -1$.

Vậy $M + N = -4$.

Chọn phương án (D)

Câu 4. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x + 1}$ trên đoạn $[0;3]$ bằng:

(A) 3. (B) 2. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x + 1}$ trên $\mathscr{D} = [0;3]$.

$y = \dfrac{x^2 - 3x}{x + 1} \Rightarrow y' = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \notin \mathscr{D} \\ x = 1 \in \mathscr{D}. \end{array}\right.$

Ta có: $y(0) = y(3) = 0, y(1) = -1$. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên $[0;3]$ bằng 0.

Chọn phương án (C)

Câu 5. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[2;4]$ là:

(A) $\min\limits_{[2;4]} y = 3$. (B) $\min\limits_{[2;4]} y = 7$. (C) $\min\limits_{[2;4]} y = 5$. (D) $\min\limits_{[2;4]} y = 0$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \notin [2;4] \\ x = -1 \notin [2;4] \end{array}\right.$ mà $\begin{cases} f(2) = 7 \\ f(4) = 57 \end{cases} \Rightarrow \min\limits_{[2;4]} y = 7$.

Chọn phương án (B)

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $\left[-\sqrt{3}; \sqrt{5}\right]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{5}$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$2\sqrt{5}$

Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

(A) $\min\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{5}]} y = 0$. (B) $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{5}]} y = 2$. (C) $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{5}]} y = 2\sqrt{5}$. (D) $\min\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{5}]} y = 2$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên có $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{5}]} y = 2\sqrt{5}$.

Chọn phương án (C)

Câu 7. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0;2]$.

(A) $-\dfrac{1}{3}$. (B) -5. (C) 5. (D) $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{-8}{(x-3)^2} < 0, \forall x \in [0;2]$ mà $y(0) = \dfrac{1}{3}$, $y(2) = -5$.

Vậy $\max\limits_{x\in[0;2]} y = y(0) = \dfrac{1}{3}$.

Chọn phương án (D)

Câu 8. Gọi M, N lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ trên $[1;2]$. Khi đó tổng $M + N$ bằng

(A) 2. (B) -4. (C) 0. (D) -2.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$.

Do $f(1) = -1$, $f(2) = -3$ suy ra $\max\limits_{x\in[1;2]} y = y(1) = -1$ và $\min\limits_{x\in[1;2]} y = y(2) = -3$.

Vậy $M + N = -4$.

Chọn phương án (B)

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như sau

x	-3		-1		0		1		2
$f(x)$			3				2		
	-2	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	1

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$. Tính $M + m$.

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 4.

Lời giải.

Phương pháp:

Quan sát bảng biến thiên và tìm $GTLN$, $GTNN$ của hàm số trên đoạn $[-1;2]$ rồi kết luận.

Cách giải:

Quan sát bảng biến thiên ta thấy trên đoạn $[-1;2]$ thì hàm số đạt $GTNN$ bằng 0 tại $x = 0$ và đạt $GTLN$ bằng 3 tại $x = -1$.

Do đó $M = 3; m = 0 \Rightarrow M + m = 3 + 0 = 3$.

Chọn phương án (A)

Câu 10. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 4$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng

(A) 10. (B) 6. (C) 24. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Mặt khác: $f(-2) = -2$; $f(2) = 6$; $f(1) = 2$; $f(-1) = 6$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 2]$ là 6.

Chọn phương án B

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A Giá trị lớn nhất của hàm số bằng -1.
B Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $x = 0$.
C Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(2; -5)$.
D Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $x = 2$.

Lời giải.

Từ BBT suy ra khẳng định đúng là: Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(2; -5)$.

Chọn phương án C

Câu 12. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x\sqrt{1 - x^2}$. Khi đó, giá trị của $M - m$ bằng

A 1.
B 2.
C 4.
D 3.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$, $\mathscr{D} = [-1; 1]$.

$f'(x) = \sqrt{1 - x^2} + \dfrac{-x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ta có: $f(-1) = 0, f(1) = 0, f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}, f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

Do đó $M = \dfrac{1}{2}, m = -\dfrac{1}{2}$. Vậy $M - m = 1$.

Chọn phương án A

Câu 13. Trên khoảng $(0; +\infty)$ thì hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$

A có giá trị nhỏ nhất là -1.
B có giá trị lớn nhất là -1.
C có giá trị lớn nhất là 3.
D có giá trị nhỏ nhất là 3.

Lời giải.

Hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ xác định và liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

$y' = -3x^2 + 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

x	0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Vậy $\max\limits_{(0;+\infty)} y = 3$ tại $x = 1$.

Chọn phương án C

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	
y	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$ ‖ -3	$\nearrow$	10

A. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 10.

B. Giá trị cực đại của hàm số là $y_{\text{CĐ}} = 10$.

C. Giá trị cực tiểu của hàm số là $y_{\text{CT}} = -3$.

D. Giá trị cực đại của hàm số là $y_{\text{CĐ}} = 3$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số xác định và có đạo hàm đổi dấu từ $+$ sang $-$ tại $x = 0$ nên hàm số đại cực đại tại $x = 0$, $y_{\text{CĐ}} = 3$.

Chọn phương án D

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$-$	$+$		
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -3 hoặc 2.

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và có giá trị nhỏ nhất bằng -4.

C. Đồ thị của hàm số có đúng 2 điểm cực trị.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên trên ta thấy

Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -4 suy ra đáp án "Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -3 hoặc 2" sai.

Hàm số không có giá trị lớn nhất suy ra đáp án "Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và có giá trị nhỏ nhất bằng -4" sai.

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị suy ra đáp án "Đồ thị của hàm số có đúng 2 điểm cực trị" sai.

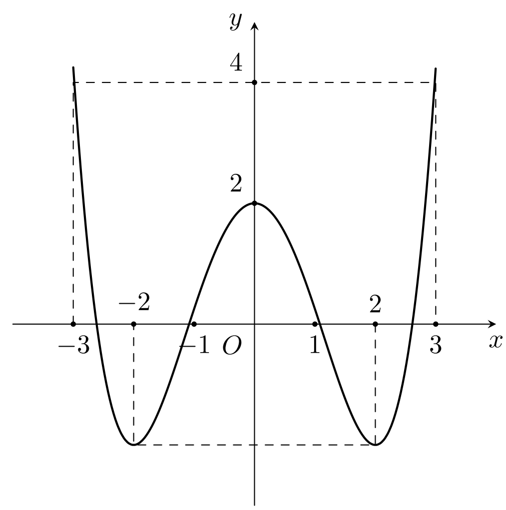
Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ suy ra "Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$" đúng.

Chọn phương án D

Câu 16.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 3]$ bằng

A 3. **B** 4. **C** 5. **D** 2.



Lời giải.

Từ đồ thị suy ra giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 3]$ bằng 4.

Chọn phương án B

Câu 17. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \dfrac{9}{x}$ trên đoạn $[2; 4]$ là

A 6. **B** 7. **C** $\dfrac{13}{2}$. **D** $\dfrac{25}{4}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 1 - \dfrac{9}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \text{ (loại)} \\ x = 3. \end{array}\right.$

Do $f(2) = \dfrac{13}{2}$, $f(3) = 6$ và $f(4) = \dfrac{25}{4}$ nên giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[2; 4]$ là $f(2) = \dfrac{13}{2}$.

Chọn phương án C

Câu 18. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng

A $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **B** 1. **C** $2\sqrt{3}$. **D** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$.

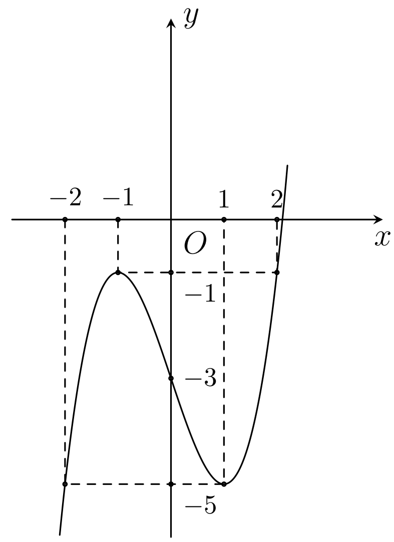
Ta có $f'(x) = -\dfrac{2x - 1}{2\sqrt{(x^2 - x + 1)^3}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

$f(0) = 1$; $f(1) = 1$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Chọn phương án (A)

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ dưới.



Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$.

(A) $m = -1, M = 0$. (B) $m = -2, M = 2$. (C) $m = -5, M = -1$. (D) $m = -5, M = 0$.

Lời giải.

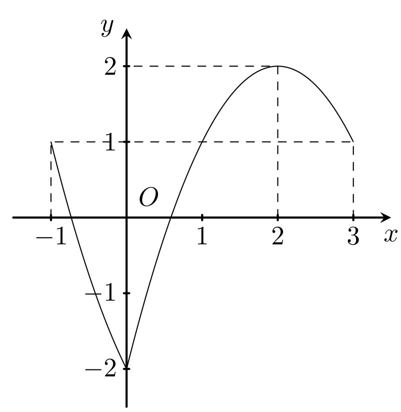
Dựa vào đồ thị, ta thấy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên $[-2; 2]$ là -5, giá trị lớn nhất trên $[-2; 2]$ là -1. Vậy $m = -5, M = -1$.

Chọn phương án (C)

Câu 20.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của $M - m$ bằng

(A) 4. (B) 1. (C) 3. (D) 0.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị, ta có $M = 2$ và $m = -2$. Vậy $M - m = 4$.

Chọn phương án (A)

B MỨC ĐỘ 2

Câu 21. Tìm tập giá trị T của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{9-x}$.

A $T = [1;9]$. **B** $T = [0; 2\sqrt{2}]$. **C** $T = (1;9)$. **D** $T = [2\sqrt{2}; 4]$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = [1;9]$.

Ta có $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{9-x}}, \forall x \in (1;9)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{9-x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \sqrt{9-x} \Leftrightarrow x = 5 \in (1;9)$.

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathscr{D}$, có $y(1) = 2\sqrt{2}, y(9) = 2\sqrt{2}, y(5) = 4$.

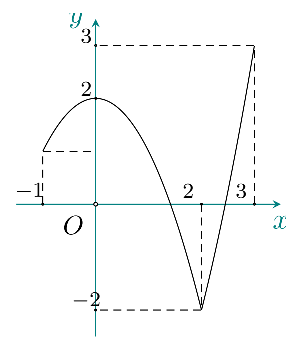
Do đó tập giá trị của hàm số là $T = [2\sqrt{2}; 4]$.

Chọn phương án D

Câu 22.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M - m$ bằng

A 0. **B** 1. **C** 4. **D** 5.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta được $M = 3$, $m = -2$ nên $M - m = 3 + 2 = 5$.

Chọn phương án D

Câu 23. Gọi M, m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{4}{x} + x + 1$ trên đoạn $[1;3]$. Tính $M - m$.

A 4. **B** 9. **C** 1. **D** 5.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = -\dfrac{4}{x^2} + 1$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{4}{x^2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \in [1;3] \\ x = -2 \notin [1;3]. \end{array}\right.$

Ta tính được $f(1) = 6$, $f(2) = 5$, $f(3) = \dfrac{16}{3}$.

Kết hợp với $f(x)$ liên tục trên $[1;3]$ nên $M = \max\limits_{x \in [1;3]} f(x) = 6 = f(1)$ và $m = \min\limits_{x \in [1;3]} f(x) = 5 = f(2)$.

Vậy $M - m = 1$.

Chọn phương án C

Câu 24. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2}$. Tính $M - m$.

A $M - m = 2\sqrt{2}$. **B** $M - m = 2\sqrt{2} + 2$. **C** $M - m = 4$. **D** $M - m = 2\sqrt{2} - 2$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = [-2; 2]$.

Ta có $y' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Do $y(-2) = -2, y(2) = 2, y\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$.

Vậy $M = 2\sqrt{2}, m = -2$, suy ra $M - m = 2\sqrt{2} + 2$.

Chọn phương án B

Câu 25. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \dfrac{1}{x}$ trên $\left[\dfrac{1}{3}; 3\right]$. Tính $3M + 2m$.

A $3M + 2m = \dfrac{16}{3}$. **B** $3M + 2m = 15$. **C** $3M + 2m = 14$. **D** $3M + 2m = 12$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in \left[\dfrac{1}{3}; 3\right] \\ x = -1 \notin \left[\dfrac{1}{3}; 3\right] \end{array}\right.$.

Lại có $y\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{10}{3}; y(1) = 2, y(3) = \dfrac{10}{3}$.

Vậy $M = \dfrac{10}{3}$, $m = 2$ suy ra $3M + 2m = 3 \cdot \dfrac{10}{3} + 2 \cdot 2 = 14$.

Chọn phương án C

Câu 26. Tích của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng

A $\dfrac{65}{3}$. **B** 20. **C** 6. **D** $\dfrac{52}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ xác định và liên tục trên $[1; 3]$. Khi đó

$$f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Nhận thấy: $-2 \notin [1; 3] \Rightarrow x = -2$ (loại).

$f(1) = 5$; $f(2) = 4$; $f(3) = \dfrac{13}{3}$. Khi đó: $\max\limits_{[1;3]} f(x) = 5$; $m = \min\limits_{[1;3]} f(x) = 4$. Vậy $M.m = 20$.

Chọn phương án B

Câu 27. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$ là

A 11. **B** 10. **C** 6. **D** 15.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [-1; 2] \\ x = -2 \notin [-1; 2]. \end{array}\right.$

Mà $f(-1) = 15, f(1) = -5, f(2) = 6$.

Do đó $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(-1) = 15$.

Chọn phương án D

50 DẠNG TOÁN PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA LẦN 2

Câu 28. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng

A 2. **B** 3. **C** 1. **D** 4.

Lời giải.

Ta có: $y' = -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [0; 2] \\ x = -1 \notin [0; 2] \end{array}\right.$.

$y(0) = 1; y(1) = 3; y(2) = -1$.

Khi đó $\max\limits_{[0;2]} y = 3; \min\limits_{[0;2]} y = -1$. Vậy $\max\limits_{[0;2]} y + \min\limits_{[0;2]} y = 2$.

Chọn phương án A

Câu 29. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \dfrac{1}{x}$ trên $\left[\dfrac{1}{2}; 3\right]$. Khi đó, $3M + m$ bằng

A 12. **B** $\dfrac{35}{6}$. **C** $\dfrac{7}{2}$. **D** 10.

Lời giải.

Hàm số đã cho liên tục trên $\left[\dfrac{1}{2}; 3\right]$. Ta có $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in \left[\dfrac{1}{2}; 3\right] \\ x = -1 \notin \left[\dfrac{1}{2}; 3\right] \end{array}\right.$

Mà $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{5}{2}$, $y(1) = 2$, $y(3) = \dfrac{10}{3}$.

Suy ra $M = \max\limits_{\left[\frac{1}{2};3\right]} y = \dfrac{10}{3}$ và $m = \min\limits_{\left[\frac{1}{2};3\right]} y = 2$.

Vậy $3M + m = 12$.

Chọn phương án A

Câu 30. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{2 - x^2} - x$ bằng

A $2 + \sqrt{2}$. **B** 2. **C** 1. **D** $2 - \sqrt{2}$.

Lời giải.

Nhóm: PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA

Tập xác định $\mathscr{D} = \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$. Ta có $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{2-x^2}} - 1 = \dfrac{-x-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2-x^2}}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x^2} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

Bảng biến thiên

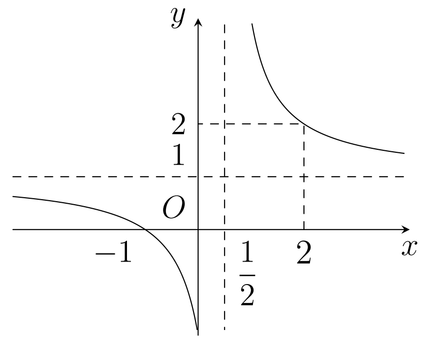
x	$-\sqrt{2}$		-1		$\sqrt{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\sqrt{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\max\limits_{[-\sqrt{2};\sqrt{2}]} y = 2$, $\min\limits_{[-\sqrt{2};\sqrt{2}]} y = -\sqrt{2}$.

Vậy $\max\limits_{[-\sqrt{2};\sqrt{2}]} y + \min\limits_{[-\sqrt{2};\sqrt{2}]} y = 2 - \sqrt{2}$.

Chọn phương án D

Câu 31.
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.



(A) $\max\limits_{[1;2]} f(x) = 2$.
(B) $\max\limits_{[-2;1]} f(x) = 0$.
(C) $\max\limits_{[-3;0]} f(x) = f(-3)$.
(D) $\max\limits_{[3;4]} f(x) = f(4)$.

Lời giải.
Từ đồ thị dễ thấy hàm số nghịch biến và liên tục trên $[-3; 0]$ nên $\max\limits_{[-3;0]} f(x) = f(-3)$.

Chọn phương án C

Câu 32. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^4}{2} - 4x^2 + 1$ trên $[-1; 3]$. Tính giá trị của $2M + m$.

(A) 4.
(B) -5.
(C) 12.
(D) -6.

Lời giải.
Xét hàm số $y = \dfrac{x^4}{2} - 4x^2 + 1$ trên [-1;3].

Ta có: $y' = 2x^3 - 8x$. Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \notin [-1; 3] \\ x = 0 \in [-1; 3] \\ x = 2 \in [-1; 3] \end{array}\right.$.

Lại có: $y(0) = 1$, $y(-1) = -\dfrac{5}{2}$, $y(3) = \dfrac{11}{2}$ và $y(2) = -7$.

Do đó $M = \dfrac{11}{2}$ và $m = -7 \Rightarrow 2M + m = 11 - 7 = 4$.

Chọn phương án A

Câu 33. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ trên tập hợp $D = (-\infty; -1] \subset [1; \dfrac{3}{2}]$. Khi đó $T = m \cdot M$ bằng

A $\dfrac{1}{9}$. B 0. C $\dfrac{3}{2}$. D $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \setminus \{2\}$.

Ta có $y' = \dfrac{\dfrac{x(x-1)}{\sqrt{x^2-1}} - \sqrt{x^2-1}}{(x-2)^2} = \dfrac{-2x+1}{(x-2)^2\sqrt{x^2-1}}$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -1$.

Bảng biến thiên

x	$-\sqrt{2}$		-1		$\sqrt{2}$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$4-2\sqrt{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$4+2\sqrt{2}$

Từ bảng biến thiên suy ra $M = 0; m = \sqrt{5}$.

Vậy $T = m \cdot M = 0$.

Chọn phương án B

Câu 34. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - \sqrt{4-x^2}$. Khi đó $M - m$ bằng

A 4. B $2\left(\sqrt{2}-1\right)$. C $2-\sqrt{2}$. D $2\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = [-2; 2]$.

Ta có $y' = 1 - \dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}} = -1 \Leftrightarrow -x = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ x^2 = 4 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$.

Khi đó $y(2) = 2; y(-2) = -2; y\left(-\sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2}$.

Suy ra $m = y\left(-\sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2}, M = y(2) = 2$. Vậy $M - m = 2 + 2\sqrt{2} = 2\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Chọn phương án D

Câu 35. Hàm số $y = \sqrt{4-x^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại:

A $x = \pm 2$. B $x = 0$. C $x = 0; x = 2$. D $x = 0; x = -2$.

Lời giải.

TXĐ: $D = [-2; 2]$.
Ta có $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}; y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Khi đó: $y(-2) = 0; y(0) = 2; y(2) = 0$
$\Rightarrow$Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm có hoành độ $x = \pm 2$.
Chọn phương án A

Câu 36. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng:

A 5. **B** 4. **C** 3. **D** $\dfrac{13}{3}$.

Lời giải.

Phương pháp

Tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên $[a; b]$ bằng cách:

— Giải phương trình $y' = 0$ tìm các nghiệm x_i .

— Tính các giá trị $f(a); f(b); f(x_i) \quad (x_i \in [a; b])$. Khi đó:

$\min\limits_{[a;b]} f(x) = \min\{f(a); f(b); f(x_i)\}$

$\max\limits_{[a;b]} f(x) = \max\{f(a); f(b); f(x_i)\}$

Cách giải:

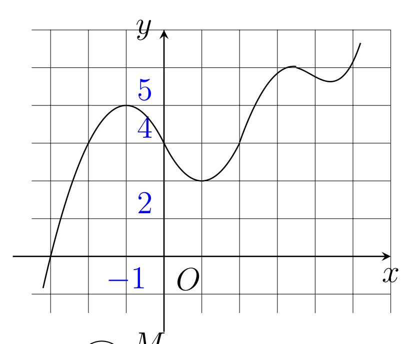
Ta có: $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \in [1; 3] \\ x = -2 \notin [1; 3] \end{array}\right.$

$f(1) = 5; f(2) = 4; f(3) = \dfrac{13}{3}$
$\Rightarrow \min\limits_{[1;3]} f(x) = f(2) = 4$.

Chọn phương án B

Câu 37.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(x^2 - 2x\right)$ trên đoạn $\left[-\dfrac{3}{2}; \dfrac{7}{2}\right]$. Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau.



A $M + m > 7$. **B** $Mm > 10$. **C** $M - m = 3$. **D** $\dfrac{M}{m} = 2$.

Lời giải.

Phương pháp

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho và biến đổi, đặt ẩn phụ để tìm đáp án đúng.

Cách giải:

Đặt $t = x^2 - 2x, x \in \left[-\dfrac{3}{2}; \dfrac{7}{2}\right] \Rightarrow t \in \left[-1; \dfrac{21}{4}\right]$

Từ đồ thị hàm số ta xét hàm số $y = f(t)$, $\quad t \in \left[-1; \dfrac{21}{4}\right]$

$m = \min\limits_{\left[-1;\frac{21}{4}\right]} f(t) = f(2) = 2$

$M = \max\limits_{\left[-1;\frac{21}{4}\right]} f(t) > f\left(\dfrac{21}{4}\right) = 5$

$M + m > 7$.

Chọn phương án A

Câu 38. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - \sqrt{4 - x^2}$. Tính tổng $M + m$.

A. $2 - \sqrt{2}$. B. $2\left(1 - \sqrt{2}\right)$. C. $2\left(1 + \sqrt{2}\right)$. D. 4.

Lời giải.

Điều kiện $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.

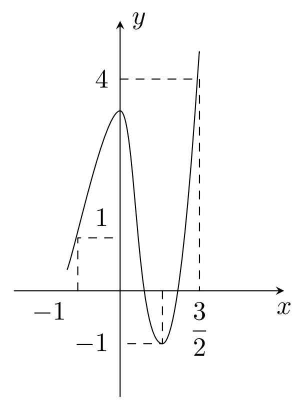
Ta có $y' = \dfrac{\sqrt{4 - x^2} + x}{\sqrt{4 - x^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$.

Mà $y(2) = 2$, $y(-2) = -2$, $y(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$. Suy ra $M + m = 2 - 2\sqrt{2} = 2\left(1 - \sqrt{2}\right)$.

Chọn phương án B

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1; \dfrac{3}{2}\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Tổng giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1; \dfrac{3}{2}\right]$ là

A. $M + m = \dfrac{7}{2}$. B. $M + m = -3$. C. $M + m = \dfrac{5}{2}$. D. $M + m = 3$.



Lời giải.

Theo đồ thị ta có

$$M = \max_{\left[-1;\frac{3}{2}\right]} f(x) = 4;\ m = \min_{\left[-1;\frac{3}{2}\right]} f(x) = -1.$$

Do đó $M + m = 3$.

Chọn phương án D

Câu 40. Gọi A, B lần lượt là các giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x + m^2 + 2m}{x - 2}$ trên đoạn $[3; 4]$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A + B = \dfrac{19}{2}$.

A. $m = 1; m = -3$. B. $m = -1; m = 3$. C. $m = \pm 3$. D. $m = -4$.

Lời giải.

Phương pháp:

Hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất đơn điệu trên trên từng khoảng xác định của nó.

Cách giải:

TXĐ: $D = R\setminus\{2\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{-2.1 - 1.(m^2+2m)}{(x-2)^2} = \dfrac{-m^2-2m-2}{(x-2)^2} = \dfrac{-(m+1)^2-1}{(x-2)^2} < 0 \forall x \in D \Rightarrow y' < 0 \forall x \in [3;4] \Rightarrow$ Hàm số đã cho nghịch biến trên $[3;4]$.

$\Rightarrow \min\limits_{[3;4]} y = y(4) = \dfrac{m^2+2m+4}{2}; \max\limits_{[3;4]} y = y(3) = m^2+2m+3$.

$\Rightarrow A = \dfrac{m^2+2m+4}{2}; B = m^2+2m+3$

Theo bài ra ta có $A + B = \dfrac{19}{2} \Leftrightarrow \dfrac{m^2+2m+4}{2} + m^2+2m+3 = \dfrac{19}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{m^2+2m+4+2m^2+4m+6}{2} = \dfrac{19}{2} \Leftrightarrow 3m^2+6m-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3 \end{array}\right.$.

Chọn phương án A

C MỨC ĐỘ 3

Câu 41. Giá trị lớn nhất cả hàm số $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x} - \sqrt{(x-1)(5-x)} + 5$ là

(A) Không tồn tại. (B) 0. (C) 7. (D) $3+2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Điều kiện $1 \le x \le 5$.

Đặt $t = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x},\ t \ge 0$.

Ta có $t^2 = 4 + 2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{5-x} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(5-x)} = \dfrac{t^2-4}{2}$.

Do $\sqrt{(x-1)(5-x)} \ge 0,\ \forall x \in [1;5]$ nên $\dfrac{t^2-4}{2} \ge 0 \Rightarrow t \ge 2$.

$t = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right. \Rightarrow t \in \left[2; 2\sqrt{2}\right]$.

Khi đó ta có hàm số $g(t) = t - \dfrac{t^2-4}{2} + 5 = \dfrac{-t^2+2t+14}{2}$ với $t \in \left[2; 2\sqrt{2}\right]$.

Ta có $g'(t) = -t = 1 < 0,\ \forall t \in \left[2;2\sqrt{2}\right]$ suy ra $\max\limits_{t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]} g(t) = g(2) = 7$.

Vậy $\max\limits_{x\in[1;5]} f(x) = 7 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(5-x)} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$.

Chọn phương án C

Câu 42. Tính tổng bình phương giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 + 4x^2 + 3$ trên đoạn $[-1;1]$?

(A) 121. (B) 64. (C) 73. (D) 22.

Lời giải.

Ta có $y' = \left(x^4+4x^2+3\right)' = 4x^3+8x$.

Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3+8x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in (-1;1)$.

Đặt $m = \min\limits_{[-1;1]} y;\ M = \max\limits_{[-1;1]} y$.

Do $y(-1) = y(1) = 8$; $y(0) = 3$ nên $M = \max\limits_{[-1;1]} y = y(\pm 1) = 8$; $m = \min\limits_{[-1;1]} y = y(0) = 3$.

$\Leftrightarrow M^2 + m^2 = 8^2 + 3^2 = 73$.

Chọn phương án C

Câu 43. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = 2x + \sqrt{8 - 2x^2}$ trên tập xác định của nó?

A $M = 2\sqrt{5}$. **B** $M = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. **C** $M = 2\sqrt{6}$. **D** $M = 4$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số: $\mathscr{D} = [-2; 2]$.

Ta có $y' = 2 + \dfrac{-2x}{\sqrt{8 - 2x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{8 - 2x^2} = x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 8 - 2x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 8 = 3x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{2\sqrt{6}}{3} \in [-2; 2].$$

$y(-2) = -4$; $y(2) = 4$; $y\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right) = 2\sqrt{6}$.

Vậy giá trị lớn nhất M của hàm số là $M = 2\sqrt{6}$. Chọn C.

Chọn phương án C

Câu 44. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x - m^2 - 2}{x - m}$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng -1?

A 3. **B** 2. **C** 1. **D** 0.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq m$.

Ta có $y' = \dfrac{m^2 - m + 2}{(x - m)^2}$ nhận thấy $m^2 - m + 2 > 0$ với mọi m nên $y' > 0$ với mọi m.

Hay hàm số đồng bến trên từng khoảng xác định.

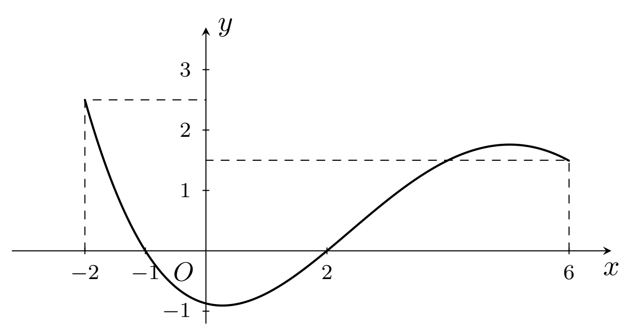
Để hàm số đạt GTLN trên $[0; 4]$ thì $m \in \mathbb{R} \backslash [0; 4] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 4 \end{array}\right.$. Suy ra $\max\limits_{x \in [0;4]} y(4) = \dfrac{4 - m^2 - 2}{4 - m}$.

Theo bài ra ta có $\dfrac{4 - m^2 - 2}{4 - m} = -1 \Rightarrow m^2 + 2 = m - 4 \Rightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \text{ (loại)} \\ m = -3. \end{array}\right.$

Vậy có một giá trị của m thỏa mãn.

Chọn phương án C

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ bên. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.



A $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = f(-2)$.

B $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = f(6)$.

C $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = \max\{f(-1), f(6)\}$.

D $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = f(-1)$.

Lời giải.

x	-2		-1		2		6
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$f(-2)$	↗	$f(-1)$	↘	$f(2)$	↗	$f(6)$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy

— Hàm số đồng biến trên $(-2;-1)$ và $(2;6)$ do $f'(x)>0$, suy ra

$$f(-1)>f(-2) \text{ và } f(6)>f(2)\ (1).$$

— Hàm số nghịch biến trên $(-1;2)$ do $f'(x)<0$, suy ra

$$f(-1)>f(2)\ (2).$$

Từ (1), (2) suy ra $\max\limits_{[-2;6]} f(x)=\max\{f(-2),f(-1),f(2),f(6)\}=\max\{f(-1),f(6)\}$.

Chọn phương án C

Câu 46. Tích của giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

A $\dfrac{65}{3}$. **B** 6. **C** 20. **D** $\dfrac{52}{3}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=1-\dfrac{4}{x^2}=0\Leftrightarrow x=\pm2$.

Ta có $f(1)=5; f(2)=4; f(3)=\dfrac{13}{3}$.

Suy ra $\min\limits_{[1;3]} f(x)=4; \max\limits_{[1;3]} f(x)=5$.

Do đó tích giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $4\cdot5=20$.

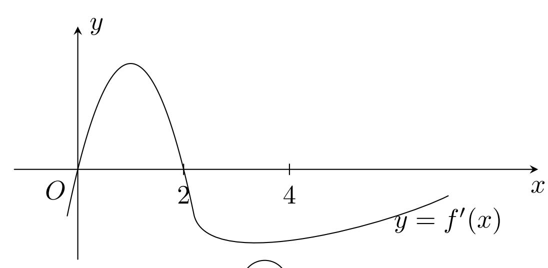
Chọn phương án C

Câu 47.

Giả sử hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ dưới đây và

$$f(0)+f(1)-2f(2)=f(4)-f(3).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=f(x)$ trên $[0;4]$.



A $m=f(4)$. **B** $m=f(0)$. **C** $m=f(2)$. **D** $m=f(1)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên

x	0		1		2		3		4
$f'(x)$		+	0	+	0	−	0	−	
$f(x)$	$f(0)$	↗	$f(1)$	↗	$f(2)$	↘	$f(3)$	↘	$f(4)$

Từ bảng biến thiên, ta thấy GTNN của hàm số đạt được bằng $f(0)$ và $f(4)$.
Ta sẽ so sánh $f(0)$ và $f(4)$ như sau

$$\begin{aligned} & f(0)+f(1)-2f(2)=f(4)-f(3) \\ \Leftrightarrow\ & f(0)-f(4)=2f(2)-f(1)-f(3) \\ \Leftrightarrow\ & f(0)-f(4)=[f(2)-f(1)]+[f(2)-f(3)]>0 \text{ (do } f(2)>f(1), f(2)>f(3)). \end{aligned}$$

Do đó $f(0)-f(4)>0 \Leftrightarrow f(0)>f(4)$.
Vậy $m=f(4)$.
Chọn phương án A

Câu 48. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\sin x-m}{\sin x+1}$. Tìm giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$ bằng -2?

A $m=5$. **B** $\left[\begin{array}{l} m=5 \\ m=2 \end{array}\right.$. **C** $m=2$. **D** $m=3$.

Lời giải.
Đặt $t=\sin x, x\in\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]\Rightarrow t\in(0;1)$.
Ta được hàm số $g(t)=\dfrac{t-m}{t+1}, t\in[0;1]$.
Ta có $g'(t)=\dfrac{1+m}{(t+1)^2}$.

— $m+1>0\Leftrightarrow m>-1\Rightarrow g'(t)>0\Rightarrow \max\limits_{[0;1]} g(t)=-2\Leftrightarrow g(1)=-2\Leftrightarrow \dfrac{1-m}{2}=-2\Leftrightarrow m=5$ (thỏa mãn).

— $m+1<0\Leftrightarrow m<-1\Rightarrow g'(t)<0\Rightarrow \max\limits_{[0;1]} g(t)=-2\Leftrightarrow g(0)=-2\Leftrightarrow \dfrac{-m}{1}=-2\Leftrightarrow m=2$ (không thỏa mãn).

Vậy $m=5$.
Chọn phương án A

Câu 49. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y=|x^3-3x^2+x+m|$ trên đoạn $[2;4]$ và m_0 là giá trị của tham số m để M đạt giá trị nhỏ nhất. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $1<m_0<5$. **B** $m_0<-8$. **C** $-4<m_0<0$. **D** $-7<m_0<-5$.

Lời giải.

Xét hàm $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + m$ trên đoạn $[2;4]$, ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1 > 0$ với mọi $x \in [2;4]$. Suy ra $f(x)$ luôn đồng biến trên đoạn $[2;4]$, do vậy

$$\min_{[2;4]} f(x) = f(2) = m - 2 \text{ và } \max_{[2;4]} f(x) = f(4) = m + 20 \Rightarrow M = \max_{[2;4]} |f(x)| = \max\{|m-2|, |m+20|\}.$$

Ta có

$$2M \geq |m-2| + |m+20| \geq |m - 2 - m - 20| = 22 \Rightarrow M \geq 11.$$

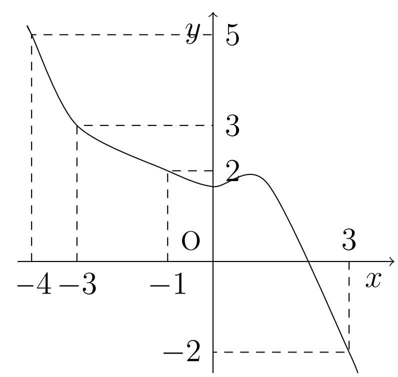
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} |m-2| = |m+20| \\ (m-2)(m+20) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -9.$

Vậy $m_0 = -9$.

Chọn phương án B

Câu 50.

Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Trên $[-4;3]$ hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm?



- **A** $x_0 = -4$.
- **B** $x_0 = 3$.
- **C** $x_0 = -3$.
- **D** $x_0 = -1$.

Lời giải.

Trên $[-4;3]$, ta có: $g'(x) = 2f'(x) - 2(1-x)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1 - x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = -1 \quad x = 3 \end{array}\right.$

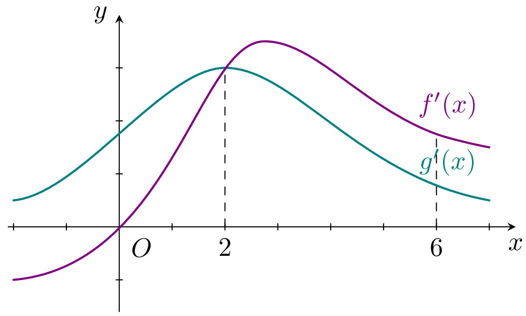
Bảng biến thiên.

x	-4		0		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Hàm số $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0 = -1$.

Chọn phương án D

Câu 51. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$, $g'(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $g'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng $f(0) - f(6) < g(0) - g(6)$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ lần lượt là

A $h(2)$, $h(6)$. **B** $h(6)$, $h(2)$. **C** $h(0)$, $h(2)$. **D** $h(2)$, $h(0)$.

Lời giải.

Có $h'(x) = f'(x) - g'(x)$.

Từ đồ thị đã cho ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ trên $[0; 6]$

x	0		2		6
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$h(0)$	↘	$h(2)$	↗	$h(6)$

Do đó $\min\limits_{[0;6]} h(x) = h(2)$.

Giả thiết ta có $f(0) - g(0) < f(6) - g(6) \Leftrightarrow h(0) < h(6)$.

Vậy $\max\limits_{[0;6]} h(x) = h(6)$.

Chọn phương án B

Câu 52. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+1)(x-2)^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ là

A $f(-1)$. **B** $f(0)$. **C** $f(3)$. **D** $f(2)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = x(x+1)(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$ với $x = 2$ là nghiệm kép.

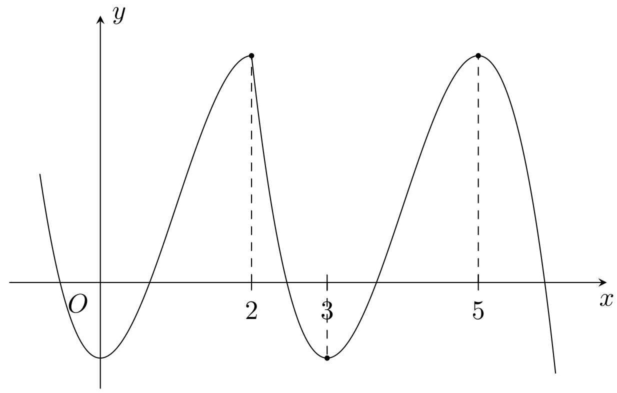
Ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗		↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 2]$ tại $x = 0$.

Chọn phương án B

Câu 53. Cho số thực m và hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(2^x + 2^{-x}) = m$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?



A 2. **B** 3. **C** 4. **D** 5.

Lời giải.

Đặt $t = t(x) = 2^x + 2^{-x}$ với $x \in [-1; 2]$.

Hàm $t = t(x)$ liên tục trên $[-1; 2]$ và $t'(x) = 2^x \ln 2 - 2^{-2} \ln 2$, $t'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	-1		0		2
$t'(x)$		$-$	0	$+$	
$t(x)$	$\frac{5}{2}$	↘	2	↗	$\frac{17}{4}$

Do đó $x \in [-1; 2] \Rightarrow t \in \left[2; \dfrac{17}{4}\right]$.

Với mỗi $t \in \{2\} \cup \left(\dfrac{5}{2}; \dfrac{17}{4}\right]$ có duy nhất 1 giá trị x thỏa mãn.

Xét phương trình $f(t) = m$ với $t \in \left(\dfrac{5}{2}; \dfrac{17}{4}\right]$.

Từ đồ thị, phương trình $f(2^x + 2^{-x}) = m$ có số nghiệm nhiều nhất khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có 2 nghiệm t_1, t_2 trong đó có $t_1 \in \left(2; \dfrac{5}{2}\right]$, $t_2 \in \left(\dfrac{5}{2}; \dfrac{17}{4}\right]$.

Khi đó, phương trình có $f(2^x + 2^{-2}) = m$ có nhiều nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$.

Chọn phương án B

Câu 54.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - \sin^2 x$ trên đoạn $[-1; 1]$ là

A $f(-1)$. **B** $f(0)$. **C** $f(2)$. **D** $f(1)$.

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	↗	0	↗ ↘	0	↘ ↗	0	↗

Lời giải.

Ta có $g(x) = f(2x) + \dfrac{1}{2}\cos 2x - \dfrac{1}{2}$.

Đặt $t = 2x$. Với $x \in [-1; 1]$ thì $t \in [-2; 2]$.

Khi đó ta có $h(t) = f(t) + \dfrac{1}{2}\cos t - \dfrac{1}{2} \Rightarrow h'(t) = f'(t) - \dfrac{1}{2}\sin t$.

Từ bảng biến thiên ta thấy

— Với $t \in (-2;0)$ thì $f'(t) > 0$ và $\sin t < 0 \Rightarrow h'(t) > 0$.

— Với $t \in (0;2)$ thì $f'(t) < 0$ và $\sin t > 0 \Rightarrow h'(t) < 0$.

— Với $t = 0$ thì $f'(t) = 0$.

Từ đó ta có bảng biến thiên sau

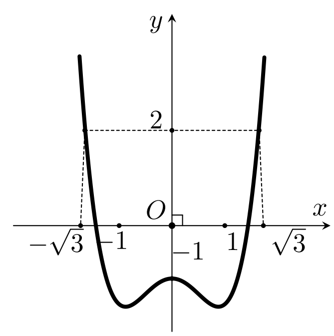
t	-2		0		2
h'		$+$	0	$-$	
h		$\nearrow$		$\searrow$	

Vậy $\max\limits_{[-1;1]} g(x) = \max\limits_{[-2;2]} h(t) = h(0) = f(0)$.

Chọn phương án B

Câu 55.

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



Đặt $h(x) = 3f(x) - x^3 + 3x$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

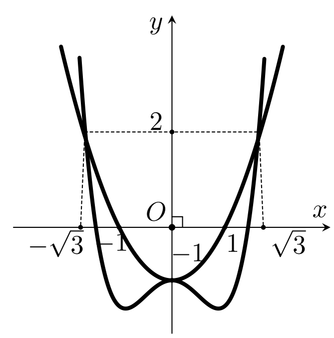
A $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x) = 3f(1)$.

B $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x) = 3f\left(-\sqrt{3}\right)$.

C $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x) = 3f\left(\sqrt{3}\right)$.

D $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x) = 3f(0)$.

Lời giải.



Ta có: $h'(x) = 3f'(x) - 3x^2 + 3 \Leftrightarrow h'(x) = 3\left[f'(x) - \left(x^2 - 1\right)\right]$.

Đồ thị hàm số $y = x^2 - 1$ là một parabol có toạ độ đỉnh $C(0;-1)$, đi qua $A\left(-\sqrt{3};2\right)$, $B\left(\sqrt{3};2\right)$.

Từ đồ thị hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = x^2 - 1$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$.

x	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$
$h'(x)$		$-$	0	$-$	
$h(x)$	$h(-\sqrt{3})$	$\searrow$	$h(0)$	$\searrow$	$h(\sqrt{3})$

Với $h\left(-\sqrt{3}\right) = 3f\left(-\sqrt{3}\right)$, $h\left(\sqrt{3}\right) = 3f\left(\sqrt{3}\right)$.

Vậy $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x) = 3f\left(-\sqrt{3}\right)$.

Chọn phương án B

Câu 56. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$. Tính giá trị của $M^2 + m^2$.

A 6. **B** 2. **C** $2+\sqrt{2}$. **D** $6+2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = [-1; 1]$.

Ta có $y' = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} + \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Suy ra $y_{\max} = f(0) = 2$ và $y_{\min} = f(\pm 1) = \sqrt{2}$.

Vậy $M^2 + m^2 = 6$.

Chọn phương án A

Câu 57. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{1-x}$ trên khoảng $(0; 1)$ là

A 1. **B** $\dfrac{2}{3}$. **C** 9. **D** 2.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

Ta có $y' = \dfrac{-4}{x^2} + \dfrac{1}{(1-x)^2} = 0 \Leftrightarrow (2-2x)^2 = x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3} \\ x = 2. \end{array}\right.$

Suy ra $f_{\min} = f(\dfrac{2}{3}) = 9$.

Chọn phương án C

Câu 58. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$ trên đoạn $[-1; 3]$.

A $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = 2\sqrt{3}$. **B** $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = 2\sqrt{2}$. **C** $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = 2$. **D** $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = 3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{3-x}}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{3-x}} \Leftrightarrow x = 1$.

$f(-1) = \sqrt{2}; f(3) = 2; f(1) = 2\sqrt{2}$.

Vậy $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = 2\sqrt{2}$.

Chọn phương án B

Câu 59. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x + \sqrt{5-x^2}$.

A 5. **B** $2\sqrt{5}$. **C** -3. **D** $-2\sqrt{5}$.

Lời giải.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 2 - \dfrac{x}{\sqrt{5-x^2}}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 2 - \dfrac{x}{\sqrt{5-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$y(1) = 4; y(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}; y(-\sqrt{5}) = -2\sqrt{5}$.

Chọn phương án D

Câu 60. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4-x^2}$. Hãy tính $P = M + m$.

A $P = 2\left(\sqrt{2}-1\right)$. **B** $P = 2\left(\sqrt{2}+1\right)$. **C** $P = \sqrt{2}+1$. **D** $P = \sqrt{2}-1$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = [-2;2]$.

$y' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

$y(-2) = -2; y(2) = 2; y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

Suy ra $m = -2; M = 2\sqrt{2}$.

Vậy $P = 2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Chọn phương án A

D MỨC ĐỘ 4

Câu 61. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x^2 - 9x + m|$ trên đoạn $[-2;4]$ bằng 16. Số phần tử của S là

A 10. **B** 12. **C** 14. **D** 11.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ có $y' = 3x^2 - 6x - 9$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	-2		-1		3		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$m-2$	$\nearrow$	$m+5$	$\searrow$	$m-27$	$\nearrow$	$m-20$

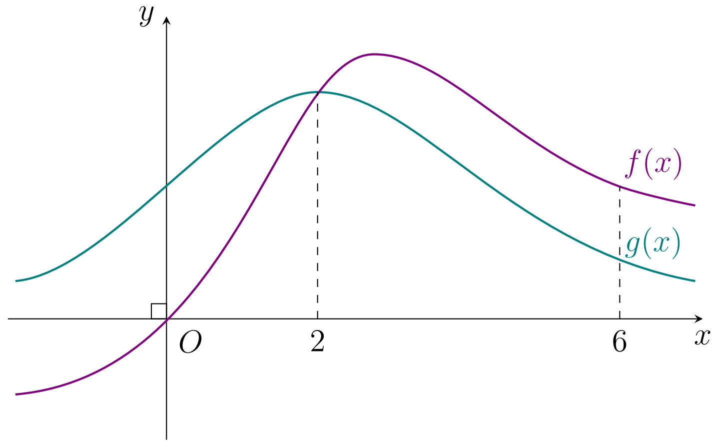
Giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x^2 - 9x + m|$ trên đoạn $[-2;4]$ bằng 16 khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m+5 = 16 \\ 27 - m \leq 16 \end{cases} \\ \begin{cases} m - 27 = 16 \\ m + 5 \leq 16 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m = 11.$$

Vậy $m = 11$ là giá trị duy nhất thỏa mãn.

Chọn phương án D

Câu 62. Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đạo hàm là $f'(x), g'(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x), g'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây



Biết rằng $f(0) - f(6) < g(0) - g(6)$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ lần lượt là

A $h(6), h(2)$. **B** $h(0), h(2)$. **C** $h(2), h(6)$. **D** $h(2), h(0)$.

Lời giải.

Cách giải:

Xét hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$, ta có $h'(x) = f'(x) - g'(x)$.

Dựa vào đồ thị ta có: $\begin{cases} h'(x) = f'(x) - g'(x) < 0, \forall x \in (0; 2) \\ h'(x) = f'(x) - g'(x) > 0, \forall x \in (2; 6). \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	0		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h	$h(0)$	$\searrow$	$h(2)$	$\nearrow$	$h(6)$

Lại có: $f(0) - f(6) < g(0) - g(6) \Leftrightarrow f(0) - g(0) < f(6) - g(6) \Leftrightarrow h(0) < h(6)$.

$\Rightarrow \min\limits_{[0;6]} h(x) = h(2); \max\limits_{[0;6]} h(x) = \max\{h(0); h(6)\} = h(6)$.

Chọn phương án C

Câu 63. Cho hàm số $y = \left|\dfrac{x^4 + ax + a}{x + 1}\right|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[1; 2]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để $M \geq 2m$.

A 15. **B** 14. **C** 17. **D** 16.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^4 + ax + a}{x + 1}$. Ta có $f'(x) = \dfrac{3x^4 + 4x^3}{(x + 1)^2} > 0, \forall x \in [1; 2]$

Do đó $f(1) \leq f(x) \leq f(2), \forall x \in [1; 2]$ hay $a + \dfrac{1}{2} \leq f(x) \leq a + \dfrac{16}{3}, \forall x \in [1; 2]$

Ta xét các trường hợp sau:

TH1: Nếu $a + \dfrac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow a > -\dfrac{1}{2}$ thì $M = a + \dfrac{16}{3}; m = a + \dfrac{1}{2}$ Theo đề bài $a + \dfrac{16}{3} \geq 2\left(a + \dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow a \leq \dfrac{13}{3}$.

Do a nguyên nên $a \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

TH2: Nếu $a+\dfrac{16}{3}<0\Leftrightarrow a<-\dfrac{16}{3}$ thì $m=-\left(a+\dfrac{16}{3}\right);M=-\left(a+\dfrac{1}{2}\right)$.

Theo đề bài $-\left(a+\dfrac{1}{2}\right)\geq -2\left(a+\dfrac{16}{3}\right)\Leftrightarrow a\geq -\dfrac{61}{6}$. Do a nguyên nên $a\in\{-10;-9;...;-6\}$.

TH3: Nếu $a+\dfrac{1}{2}\leq 0\leq a+\dfrac{16}{3}\Leftrightarrow -\dfrac{16}{3}\leq a\leq -\dfrac{1}{2}$ thì $M\geq 0;m=0$ (Luôn thỏa mãn). Do a nguyên nên $a\in\{-5;-4;...;-1\}$.

Vậy có 15 giá trị của a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án A

Câu 64. Tìm m để hàm số $y=x+\sqrt{4-x^2}$ có giá trị lớn nhất bằng $3\sqrt{2}$

A $m=2\sqrt{2}$. **B** $m=\sqrt{2}$. **C** $m=-\sqrt{2}$. **D** $m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $y=x+\sqrt{4-x^2}+m$ là $\mathscr{D}=[-2;2]$.

Ta có $y'=\dfrac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}$

$y'=0\Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}-x=0\Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}=x\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 0\\ 4-x^2=x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$.

Tính được $y\left(\sqrt{2}\right)=m+2\sqrt{2}$, $y(-2)=m-2$ và $y(2)=m+2$.

Để ý rằng $m-2<m+2<m+2\sqrt{2}$ nên $\max\limits_{[-2;2]}y=m+2\sqrt{2}\Leftrightarrow m+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}\Leftrightarrow m=\sqrt{2}$.

Chọn phương án B

Câu 65. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\max\limits_{[1;3]}\left|x^3-3x^2+m\right|\leq 4$?

A 5. **B** 4. **C** 6. **D** Vô số.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2+m$ trên $[1;3]$, $f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\notin(1;3)\\ x=2\in(1;3)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

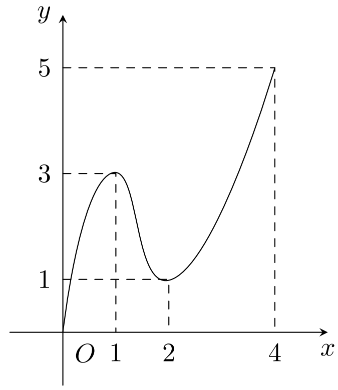
x	1		2		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$m-2$	$\searrow$	$m-4$	$\nearrow$	m

Vì $m-4<m-2<m$ nên $\max\limits_{[1;3]}|f(x)|\leq 4\Leftrightarrow \begin{cases}|m|\leq 4\\ |m-4|\leq 4\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}-4\leq m\leq 4\\ 0\leq m\leq 8\end{cases}\Leftrightarrow 0\leq m\leq 4$.

$\Rightarrow m\in\{0;1;2;3;4\}$.

Chọn phương án A

Câu 66. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị trên đoạn $[0;4]$ như hình vẽ bên dưới.



Đặt $M = \max f\left(\sqrt{4-x^2}\right)$, $m = \min f\left(\sqrt{4-x^2}\right)$. Tổng $M+m$ bằng

A 3. **B** 6. **C** 4. **D** 5.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{4-x^2}$. Khi đó $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $t \in [0;2]$.

Xét hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[0;2]$ ta thấy $M = \max\limits_{x\in[0;2]} f(t) = 3$ và $M = \min\limits_{x\in[0;2]} f(t) = 0$.

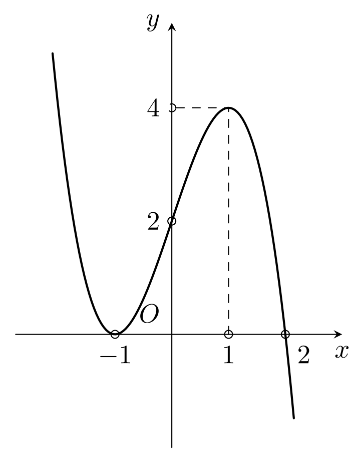
Vậy $M+m = 3$.

Chọn phương án A

Câu 67.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên tập số thực và có đồ thị như hình vẽ bên. Biết $f(-1) = \dfrac{13}{4}$, $f(2) = 6$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$ trên $[-1;2]$ bằng

A $\dfrac{1573}{64}$. **B** 198. **C** $\dfrac{37}{4}$. **D** $\dfrac{14245}{64}$.



Lời giải.

Bảng biến thiên

x	-1		2
$f'(x)$	0	$+$	0
$f(x)$	$\dfrac{13}{4}$	$\nearrow$	6

Ta có $g'(x) = 3f^2(x).f'(x) - 3f'(x)$.

Xét trên đoạn $[-1;2]$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3f'(x)[f^2(x)-1] = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	-1		2
$g'(x)$	0	$+$	0
$g(x)$		$\nearrow$	

$\Rightarrow \min\limits_{[-1;2]} g(x) = g(-1) = f^3(-1) - 3f(-1) = \dfrac{1573}{64}$.

Chọn phương án A

Câu 68. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|\dfrac{x^2+mx+m}{x+1}\right|$ trên $[1;2]$ bằng 2. Số phần tử của S là

A 1. **B** 4. **C** 3. **D** 2.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2+mx+m}{x+1}$ trên $[1;2]$.

Ta có $f(x)$ liên tục trên $[1;2]$ và $f'(x) = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [1;2]$. Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $[1;2]$.

Do đó $\max\limits_{[1;2]} f(x) = f(2) = \dfrac{3m+4}{3}, \min\limits_{[1;2]} f(x) = f(1) = \dfrac{2m+1}{2}$.

Trường hợp 1: $\dfrac{2m+1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{1}{2}$.

Trong trường hợp này ta có $\max\limits_{[1;2]} |f(x)| = \dfrac{3m+4}{3}$.

Theo yêu cầu bài toán ta có $\dfrac{3m+4}{3} = 2 \Leftrightarrow m = \dfrac{2}{3}$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: $\dfrac{3m+4}{3} \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -\dfrac{4}{3}$.

Trong trường hợp này ta có $\max\limits_{[1;2]} |f(x)| = \dfrac{-2m-1}{2}$.

Theo yêu cầu bài toán ta có $\dfrac{-2m-1}{2} = 2 \Leftrightarrow m = -\dfrac{5}{2}$ (thỏa mãn).

Trường hợp 3: $\dfrac{2m+1}{2} < 0 < \dfrac{3m+4}{3} \Leftrightarrow -\dfrac{4}{3} < m < -\dfrac{1}{2}$.

+) Nếu $\dfrac{-2m-1}{2} \leq \dfrac{3m+4}{3} \Leftrightarrow -\dfrac{11}{12} \leq m < -\dfrac{1}{2}$ thì $\max\limits_{[1;2]} |f(x)| = \dfrac{3m+4}{3}$.

Theo yêu cầu bài toán ta có $\dfrac{3m+4}{3} = 2 \Leftrightarrow m = \dfrac{2}{3}$ (không thỏa mãn).

+) Nếu $\dfrac{-2m-1}{2} \geq \dfrac{3m+4}{3} \Leftrightarrow -\dfrac{11}{12} \geq m > -\dfrac{4}{3}$ thì $\max\limits_{[1;2]} |f(x)| = \dfrac{-2m-1}{2}$.

Theo yêu cầu bài toán ta có $\dfrac{-2m-1}{2} = 2 \Leftrightarrow m = -\dfrac{5}{2}$ (không thỏa mãn).

Vậy $S = \left\{\dfrac{2}{3}; -\dfrac{5}{2}\right\} \Rightarrow |S| = 2$.

Chọn phương án D

Câu 69. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 30. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

Ⓐ 108. Ⓑ 120. Ⓒ 210. Ⓓ 136.

Lời giải.

Đặt $f(x)=\frac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30$ là hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $f'(x)=x^3-28x+48$. Với mọi $x\in[0;2]$, ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$.

Mặt khác, $f(0)=m-30$, $f(2)=m+14$. Suy ra $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=\max\{|f(0)|;|f(2)|\}$.

Theo đề bài, suy ra

$$\max_{[0;2]}|f(x)|=\max\{|f(0)|;|f(2)|\}\le 30\Leftrightarrow\begin{cases}|f(0)|\le 30\\|f(2)|\le 30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|m-30|\le 30\\|m+14|\le 30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-30\le m-30\le 30\\-30\le m+14\le 30.\end{cases}$$

Từ đó, ta có $0\le m\le 16$, hay là $m\in S=\{0;1;2;3;\ldots;15;16\}$.

Vậy tổng tất cả 17 giá trị trong tập S là $\frac{17(0+16)}{2}=136$.

Chọn phương án Ⓓ

Câu 70. Tìm tất cả các giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0.

Ⓐ $m=4$. Ⓑ $m=2$. Ⓒ $m=6$. Ⓓ $m=0$.

Lời giải.

$y'=-3x^2-6x$.

$y'=0\Leftrightarrow -3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2.\end{array}\right.$

Ta có $y(-1)=-2+m; y(1)=-4+m; y(0)=m$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ trên đoạn $[-1;1]$ là $-4+m$. Vậy để thỏa yêu cầu bài toán thì $m=4$.

Chọn phương án Ⓐ

Câu 71. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$x^4+\frac{16}{x^4}-4\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-12\left(x-\frac{2}{x}\right)=m$$

có nghiệm $x\in[1;2]$.

Ⓐ $-13\le m\le 11$. Ⓑ $-15\le m\le 9$. Ⓒ $-15<m<9$. Ⓓ $-16\le m\le 9$.

Lời giải.

Đặt $f(x)=x^4+\frac{16}{x^4}-4\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-12\left(x-\frac{2}{x}\right)$.

Đặt $t=t(x)=x-\frac{2}{x}=\frac{x^2-2}{x}$ với $x\in[1;2]$.

Ta có $t'(x)=\frac{x^2+2}{x^2}>0$, $\forall x\in[1;2]$.

50 DẠNG TOÁN PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA LẦN 2

Ta có $t(x)$ liên tục trên $[1;2]$ và $t'(x)$ đồng biến trên $(1;2)$ nên $\min\limits_{[1;2]} t(x) = t(1) = -1, \max\limits_{[1;2]} t(x) = 1$.

Với $t = x - \dfrac{2}{x}$, $f(x)$ thành $g(t) = t^4 + 4t^2 - 12t - 8$.

Ta tìm GTLN, GTNN của $g(t)$ trên $[-1;1]$.

Ta có $g'(t) = 4t^3 + 8t^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(4t^2+4t+12) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ (do $4t^2 + 4t + 12 > 0 \quad \forall t$).

Ta có $g(-1) = 9, g(1) = -15$.

Do đó, $\max\limits_{[1;2]} f(x) = \max\limits_{[-1;1]} g(t) = 9; \min\limits_{[1;2]} f(x) = \min\limits_{[-1;1]} g(t) = -15$.

Vậy $-15 \le m \le 9$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn phương án (B)

Câu 72. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $2(x^2+y^2)+xy = (x+y)(xy+2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4\left(\dfrac{x^3}{y^3}+\dfrac{y^3}{x^3}\right) - 9\left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\right)$ bằng

(A) $-\dfrac{25}{4}$. (B) 5. (C) -13. (D) $-\dfrac{23}{4}$.

Lời giải.

Có $2(x^2+y^2)+xy = (x+y)(xy+2) \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+1 = (x+y)\left(1+\dfrac{2}{xy}\right) = x + \dfrac{2}{y} + y + \dfrac{2}{x}$.

$\Rightarrow 2\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+1 \ge 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)$ $(*)$

Đặt $t = \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} > 0$, ta có $t^2 = \dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}+2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2} = t^2 - 2$

và $t^3 = \dfrac{x^3}{y^3}+\dfrac{y^3}{x^3}+3\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right) \Rightarrow \dfrac{x^3}{y^3}+\dfrac{y^3}{x^3} = t^3 - 3t$.

$(*) \Leftrightarrow \left(2\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+1\right)^2 \ge 8\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+2\right) \Leftrightarrow (2t+1)^2 \ge 8(t+2) \Leftrightarrow 4t^2 - 4t - 15 \ge 0 \Leftrightarrow t \ge \dfrac{5}{2}$.

$P = 4(t^3-3t) - 9(t^2-2) = 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18 = f(t)$, $f'(t) = 12t^2 - 18t - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

t	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$		↗		↘		↗	

TỪ bảng biến thiên ta suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\left[\dfrac{5}{2};+\infty\right)$, vậy $P \ge f\left(\dfrac{5}{2}\right) = -\dfrac{23}{4}$.

Chọn phương án (D)

Câu 73. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $3\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}\right) - 2\sqrt{(1+x)(3-x)} \ge m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1;3]$?

(A) $m \le 6\sqrt{2} - 4$. (B) $m \ge 6\sqrt{2} - 4$. (C) $m \le 6$. (D) $m \ge 6$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{3-x}$ với $x \in [-1;3]$.

$\Rightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{(1+x)(3-x)} \Rightarrow 2\sqrt{(1+x)(3-x)} = t^2 - 4$

$t' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{3-x}}$

$t' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$t(-1) = 2; t(1) = 2\sqrt{2}; t(3) = 2$

Vậy $t \in [2; 2\sqrt{2}]$.

Bất phương trình đã cho tương đương:

$3t + 4 - t^2 \geq m$ với $t \in [2; 2\sqrt{2}]$

Đặt $f(t) = -t^2 + 3t + 4$ với $t \in [2; 2\sqrt{2}]$ $f' = -2t + 3; f' = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{3}{2}$

$f(2) = 6; ; f(2\sqrt{2}) = -4 + 6\sqrt{2}$

Vậy ycbt $\Leftrightarrow m \leq 6\sqrt{2} - 4$

Chọn phương án A

Câu 74. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x + y = 2\left(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = 4(x^2 + y^2) + 15xy$.

(A) -83. (B) -91. (C) -86. (D) -79.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có $(x+y)^2 = 4(x+y) + 8\sqrt{x-3}\sqrt{y+3} \geq 4(x+y) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y \geq 4 \\ x+y \leq 0 \end{array}\right.$

Mặt khác $x + y = 2\left(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}\right) \leq \sqrt{2(x+y)} \Rightarrow x + y \leq 8$

Từ $(x+3)(y+3) \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq -3(x+y) - 9$.

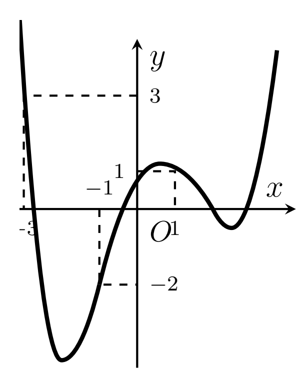
Ta có $Q = 4(x+y)^2 + 7xy \geq Q \geq 4(x+y)^2 - 21(x+y) - 63$.

Đặt $t = x + y$ $(t \in [4;8])$. Khi đó, $Q = 4t^2 - 21t - 63$. Vậy $Q_{\min} = Q(7) = -83$.

Chọn phương án A

Câu 75. Cho đồ thị $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{3}{2}x + 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

(B) $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(1)$.

(C) $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$.

(D) $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = \dfrac{g(-3) + g(1)}{2}$.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x) - x^2 - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{2}$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Lập Bảng biến thiên:

x	-3		-1		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\searrow$				$\nearrow$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

Chọn phương án A

Câu 76. Hàm số $y = (x+m)^3 + (x+n)^3 - x^3$ (tham số m, n) đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4\left(n^2 + m^2\right) - m - n$ bằng

A -16. **B** 4. **C** $-\dfrac{1}{16}$. **D** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có: $y = (x+m)^3 + (x+n)^3 - x^3 = x^3 + 3(m+n)x^2 + 3\left(m^2+n^2\right)x + m^3 + n^3$.
$y' = 3x^2 + 6(m+n)x + 3\left(m^2+n^2\right)$. Hàm số luôn đồng biến trên $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow \Delta \le 0 \Leftrightarrow m.n \le 0$.
Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4\left(n^2+m^2\right) - m - n$.

— TH1: $m = n = 0 \Rightarrow P = 0 \quad (1)$.

— TH2: $m.n \le 0$. Ta có: $P = \left(2m - \dfrac{1}{4}\right)^2 - \dfrac{1}{16} + 4n^2 + (-n) \ge -\dfrac{1}{16} \quad (2)$.

Từ $(1);(2) \Rightarrow P_{\min} = -\dfrac{1}{16}$. Dấu $''=''$ xảy ra khi và chỉ khi $m = \dfrac{1}{8}; n = 0 \vee m = 0; n = \dfrac{1}{8}$.

Chọn phương án C

Câu 77. Cho các số thực dương x, y. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{4xy^2}{\left(x + \sqrt{x^2+4y^2}\right)^3}$.

A $\max P = 1$. **B** $\max P = \dfrac{1}{10}$. **C** $\max P = \dfrac{1}{8}$. **D** $\max P = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $P = \dfrac{4xy^2}{\left(x+\sqrt{x^2+4y^2}\right)^3} = \dfrac{4\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{\left(1+\sqrt{1+4\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\right)^3}$.

Đặt $t = \sqrt{1+4\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}, t \ge 1$ thì $4\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 = t^2 - 1$. Khi đó, $P = \dfrac{t^2-1}{(1+t)^3} = \dfrac{t-1}{(t+1)^2}$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t-1}{(t+1)^2}, t \ge 1$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{-t^2+2t+3}{(t+1)^4}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$ (loại) hoặc $t = 3$.

t	1		3		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{8}$	$\searrow$	0

Vậy $\max P = \max\limits_{t\in[1;+\infty)} f(t) = \dfrac{1}{8}$.

Chọn phương án C

Câu 78. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\cos\dfrac{x}{2} + \sin x + 1$.

A $1 - 2\sqrt{3}$. **B** $\dfrac{2-5\sqrt{3}}{2}$. **C** -1. **D** $\dfrac{2-3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Vì hàm số $y = 2\cos\dfrac{x}{2} + \sin x + 1$ tuần hoàn với chu kì 4π nên ta chỉ cần xét hàm số trên đoạn $[0;4\pi]$.

Ta có $y' = -\sin\dfrac{x}{2} + \cos x,\ x \in (0;4\pi)\,;\ y' = 0 \Leftrightarrow -\sin\dfrac{x}{2} + 1 - 2\sin^2\dfrac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\dfrac{x}{2} = -1\\ \sin\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{2} = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\pi + k4\pi\\ x = \dfrac{\pi}{3} + k4\pi\\ x = \dfrac{5\pi}{3} + k4\pi\end{array}\right.$ Vì $x \in (0;4\pi)$ nên $x \in \left\{\dfrac{\pi}{3};\dfrac{5\pi}{3};3\pi\right\}$

$y(0) = 3,\ y(3\pi) = 1,\ y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{2+3\sqrt{3}}{2},\ y\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) = \dfrac{2-3\sqrt{3}}{2},\ y(4\pi) = 3$

Vậy $\min\limits_{\mathbb{R}} y = \dfrac{2-3\sqrt{3}}{2}$.

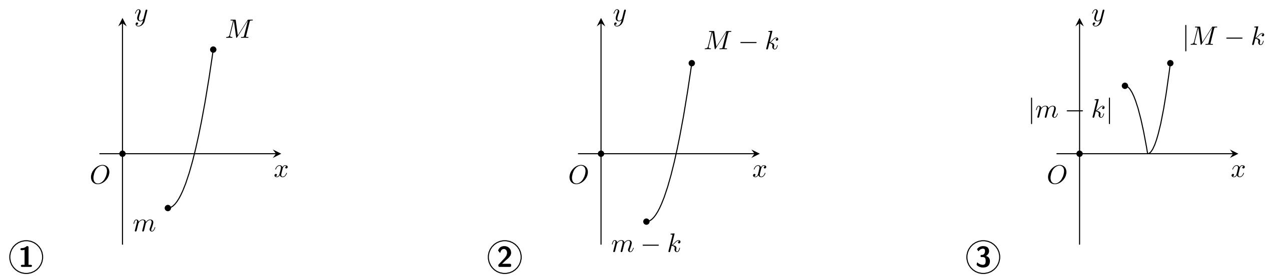
Chọn phương án D

Câu 79. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|x^3 - 3x + 2m - 1\right|$ trên đoạn $[0;2]$ là nhỏ nhất. Giá trị của m thuộc khoảng?

A $[-1;0]$. **B** $(0;1)$. **C** $\left(\dfrac{2}{3};2\right)$. **D** $\left(-\dfrac{3}{2};-1\right)$.

Lời giải.

• Xét bài toán tổng quát, cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ có giá trị lớn nhất là M và giá trị nhỏ nhất là m. Tìm hệ số k sao cho hàm số $y = |f(x) - k|$ có giá trị lớn nhất đạt giá trị nhỏ nhất. Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình a. Khi đó ta di chuyển đồ thị xuống một đoạn có giá trị là k như hình b và lấy đối xứng đối xứng phần đồ thị dưới trục Ox qua trục Ox như hình c thì ta được đồ thị hàm số $y = |f(x) - k|$.



Ta thấy nếu $|m-k|=|M-k|$ thì $\max\limits_{[a;b]}|f(x)-k|=\max\limits_{[a;b]}\{|m-k|;|M-k|\}$ sẽ đạt giá trị nhỏ nhất vì ngược lại hai đại lượng này chênh lệch nhau thì sẽ tồn tại một trong hai giá trị này cao hơn vị trí trung bình của chúng.

Do đó, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow M-k=k-m \Leftrightarrow k=\dfrac{m+M}{2}$.

• Áp dụng công thức trên cho hàm số $y=\left|x^3-3x+2m-1\right|=\left|x^3-3x-(1-2m)\right|$ thì ta cần tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x$ trên đoạn $[0;2]$. Ta có $f'(x)=3x^2-3$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[0;2] \\ x=-1\notin[0;2] \end{array}\right.$ và bảng xét dấu của $f'(x)$ là

x	0		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Mặt khác $f(0)=0$, $f(1)=-2$, $f(2)=2$. Do đó $\max\limits_{[0;2]}f(x)=M=2$, $\min\limits_{[0;2]}f(x)=m=-2$.

Vậy yêu cầu bài toán được thỏa mãn khi $1-2m=\dfrac{m+M}{2}=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

Chọn phương án B

Câu 80. Cho x,y thỏa mãn $\sqrt{2x+3}+\sqrt{y+3}=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=\sqrt{x+2}+\sqrt{y+9}.$$

A $\sqrt{\dfrac{1}{2}}+\sqrt{21}$. **B** $\sqrt{6}+\sqrt{\dfrac{17}{2}}$. **C** $\sqrt{3}$. **D** $\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$.

Lời giải.

Đặt $a=\sqrt{2x+3}, b=\sqrt{y+3} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a^2-3}{2} \\ y=b^2-3 \end{cases}$, theo giả thiết $a+b=4$ (1).

Yêu cầu bài toán đưa về tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\sqrt{\dfrac{a^2-3}{2}+2}+\sqrt{b^2+6}$

$$\begin{aligned} P&=\sqrt{\dfrac{a^2-3}{2}+2}+\sqrt{b^2+6} \\ &=\sqrt{\dfrac{a^2-3}{2}+2}+\sqrt{(4-a)^2+6}. \end{aligned}$$

Ta có $f'(a)=0 \Leftrightarrow a=2$.

Do đó giá trị nhỏ nhất cần tìm $\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$.

Chọn phương án B

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. A	3. D	4. C	5. B	6. C	7. D	8. B	9. A	10. B
11. C	12. A	13. C	14. D	15. D	16. B	17. C	18. A	19. C	20. A
21. D	22. D	23. C	24. B	25. C	26. B	27. D	28. A	29. A	30. D
31. C	32. A	33. B	34. D	35. A	36. B	37. A	38. B	39. D	40. A
41. C	42. C	43. C	44. C	45. C	46. C	47. A	48. A	49. B	50. D
51. B	52. B	53. B	54. B	55. B	56. A	57. C	58. B	59. D	60. A
61. D	62. C	63. A	64. B	65. A	66. A	67. A	68. D	69. D	70. A
71. B	72. D	73. A	74. A	75. A	76. C	77. C	78. D	79. B	80. B

DẠNG 29. LOGARIT CÓ THAM SỐ

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Xét các số thực a và b thỏa mãn $\log_3\left(3^a\cdot 9^b\right)=\log_9 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $a+2b=2$. (B) $4a+2b=1$. (C) $4ab=1$. (D) $2a+4b=1$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_3\left(3^a.9^b\right)=\log_9 3\Leftrightarrow\log_3\left(3^a.3^{2b}\right)=\log_{3^2}3$$
$$\Leftrightarrow\log_3 3^{a+2b}=\log_3 3^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow a+2b=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2a+4b=1$$

Chọn phương án (D)

Câu 1. Biết $\log_2 a=x$ và $\log_2 b=y$, biểu thức $\log_2\left(4a^2b^3\right)$ bằng

(A) x^3y^2. (B) $2x+3y+2$. (C) x^2+y^3+4. (D) $6xy$.

Lời giải.

Ta có $\log_2\left(4a^2b^3\right)=\log_2 4+\log_2 a^2+\log_2 b^3=2\log_2 a+3\log_2 b+2=2x+3y+2$.

Chọn phương án (B)

Câu 2. Cho a là số thực dương tùy ý khác 3, giá trị của $\log_{\frac{a}{3}}\left(\frac{a^2}{9}\right)$ bằng

(A) $\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{1}{2}$. (C) 2. (D) -2.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{a}{3}}\left(\frac{a^2}{9}\right)=\log_{\frac{a}{3}}\left(\frac{a}{3}\right)^2=2$.

Chọn phương án (C)

Câu 3. Cho $a,b>0$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

(A) $\log\left(ab^2\right)=2\log a+2\log b$. (B) $\log(ab)=\log a-\log b$.

(C) $\log(ab)=\log a\cdot\log b$. (D) $\log\left(ab^2\right)=\log a+2\log b$.

Lời giải.

Ta có $\log\left(ab^2\right)=\log a+\log b^2=\log a+2\log b$.

Chọn phương án (D)

Câu 4. Với a,b là các số thực dương tùy ý và a khác 1, đặt $P=\log_a b^3+\log_{a^2}b^6$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $P=27\log_a b$. (B) $P=15\log_a b$. (C) $P=9\log_a b$. (D) $P=6\log_a b$.

Lời giải.

Ta có $P=\log_a b^3+\log_{a^2}b^6=3\log_a b+\frac{6}{2}\log_a b=3\log_a b+3\log_a b=6\log_a b$.

Chọn phương án (D)

50 DẠNG TOÁN PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA LẦN 2

Câu 5. Tính giá trị của $a^{\log_{\sqrt{a}} 4}$ với $a > 0, a \neq 1$.

A. 8. B. 4. C. 16. D. 2.

Lời giải.

Ta có $a^{\log_{\sqrt{a}} 4} = a^{2\log_a 4} = a^{\log_a 16} = 16$.

Chọn phương án C

Câu 6. Giá trị của biểu thức $P = \log_a\left(a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}\right)$ bằng

A. 3. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \log_a\left(a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}\right) \\ &= \log_a\left(a\sqrt[3]{a\cdot a^{\frac{1}{2}}}\right) \\ &= \log_a\left(a\sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}}\right) \\ &= \log_a\left(a\cdot a^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \log_a a^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Chọn phương án C

Câu 7. Cho $a = \log_3 2, b = \log_3 5$. Khi đó $\log 60$ bằng

A. $\frac{-2a+b-1}{a+b}$. B. $\frac{2a+b+1}{a+b}$. C. $\frac{2a+b-1}{a+b}$. D. $\frac{2a-b-1}{a+b}$.

Lời giải.

Phương pháp: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \log_a b^c = c\log_a b$ (các biểu thức trên đều xác định).

Cách giải:

$\log 60 = \frac{\log_3 60}{\log_3 10} = \frac{\log_3 2^2 + \log_3 3 + \log_3 5}{\log_3 2 + \log_3 5} = \frac{2\log_3 2 + 1 + \log_3 5}{\log_3 2 + \log_3 5} = \frac{2a+b+1}{a+b}$.

Chọn phương án B

Câu 8. Biết $\log 3 = m$, $\log 5 = n$, tìm $\log_9 45$ theo m, n.

A. $1 - \frac{n}{2m}$. B. $1 + \frac{n}{m}$. C. $2 + \frac{n}{2m}$. D. $1 + \frac{n}{2m}$.

Lời giải.

Ta có $\log_9 45 = \frac{\log 3^2\cdot 5}{\log 3^2} = 1 + \frac{\log 5}{2\log 3} = 1 + \frac{n}{2m}$.

Chọn phương án D

Câu 9. Cho a là số thực dương khác 1. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $\log_a 2\cdot\log_2 a = 1$. B. $\log_a 1 = 0$. C. $\log_a a = 1$. D. $\log_a 2 = \frac{1}{\log_a 2}$.

Lời giải.
$\log_a 2 = \dfrac{1}{\log_a 2}$ không phải là công thức đổi cơ số, nếu đúng là $\log_a 2 = \dfrac{1}{\log_2 a}$.
Chọn phương án D

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của x thỏa mãn đẳng thức $\log_3 x = 3\log_3 2 + \log_9 25 - \log_{\sqrt{3}} 3$.

A. $\dfrac{20}{3}$.   B. $\dfrac{40}{9}$.   C. $\dfrac{25}{9}$.   D. $\dfrac{28}{3}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} &\log_3 x = 3\log_3 2 + \log_9 25 - \log_{\sqrt{3}} 3 \\ \Leftrightarrow\ &\log_3 x = \log_3 8 + \log_3 5 - \log_3 9 \\ \Leftrightarrow\ &\log_3 x = \log_3 \frac{40}{9} \Leftrightarrow x = \frac{40}{9}. \end{aligned}$$

Chọn phương án B

Câu 11. Với a và b là hai số thực dương tùy ý, $\log(ab^2)$ bằng

A. $2\log a + \log b$.   B. $\log a + 2\log b$.   C. $2(\log a + \log b)$.   D. $\log a + \dfrac{1}{2}\log b$.

Lời giải.

$$\log(ab^2) = \log a + \log b^2 = \log a + 2\log b.$$

Chọn phương án B

Câu 12. Với a và b là hai số dương tùy ý, $\log_2(a^3b^4)$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}\log_2 a + \dfrac{1}{4}\log_2 b$.   B. $3\log_2 a + 4\log_2 b$.   C. $2(\log_3 a + \log_4 b)$.   D. $4\log_2 a + 3\log_2 b$.

Lời giải.
Ta có $\log_2\left(a^3b^4\right) = \log_2 a^3 + \log_2 b^4 = 3\log_2 a + 4\log_2 b$.
Chọn phương án B

Câu 13. Cho hai số thực a, b với $a > 0, a \neq 1, b \neq 0$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\log_{a^3}|b| = \dfrac{1}{2}\log_a|b|$.   B. $\dfrac{1}{2}\log_a b^2 = \log_a|b|$.   C. $\dfrac{1}{2}\log_a a^2 = 1$.   D. $\dfrac{1}{2}\log_a b^2 = \log_a b$.

Lời giải.
Dễ thấy các phương án A, B, C đều đúng theo tính chất logarit. Đáp án D sai vì chưa biết $b > 0$ hay $b < 0$.
Chọn phương án D

Câu 14. Với a, b là hai số thực dương tùy ý, $\ln\dfrac{a^4e}{b}$ bằng

A. $4\ln a - \ln b + 1$.   B. $4\ln b - \ln a + 1$.   C. $4\ln a + \ln b - 1$.   D. $4\ln a + \ln b + 1$.

Lời giải.
Ta có: $\ln\dfrac{a^4e}{b} = \ln a^4 + \ln e - \ln b = 4\ln a + 1 - \ln b = 4\ln a - \ln b + 1$.
Chọn phương án A

Câu 15. Cho $a, b, c > 0, a \neq 1; b \neq 1$.Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$.   B. $\log_a b.\log_b c = \log_a c$.

Ⓒ $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$. Ⓓ $\log_{a^c} b = c\log_a b$.

Lời giải.

Sai, vì $\log_{a^c} b = \dfrac{1}{c}\log_a b$.

Chọn phương án D

Câu 16. Với a là số thực dương bất kì, mệnh đề nào dưới đây là đúng?

Ⓐ $\ln 3a = \ln 3 + \ln a$. Ⓑ $\ln \dfrac{a}{3} = \dfrac{1}{3}\ln a$.

Ⓒ $\ln a^5 = \dfrac{1}{5}\ln a$. Ⓓ $\ln(3+a) = \ln 3 + \ln a$.

Lời giải.

Ta có $\ln 3a = \ln 3 + \ln a$.

Chọn phương án A

Câu 17. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log a = x$, $\log b = y$. Tính $P = \log\left(a^2b^3\right)$

Ⓐ $P = 6xy$. Ⓑ $p = x^2y^3$. Ⓒ $P = x^2 + y^3$. Ⓓ $P = 2x + 3y$.

Lời giải.

Ta có $\log\left(a^2b^3\right) = \log\left(a^2\right) + \log\left(b^3\right) = 2\log a + 3\log b = 2x + 3y$.

Chọn phương án D

Câu 18. Với các số thực dương x, y. Ta có 8^x, 4^4, 2 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân và các số $\log_2 45$, $\log_2 y$, $\log_2 x$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Khi đó y bằng

Ⓐ 225. Ⓑ 15. Ⓒ 105. Ⓓ $\sqrt{105}$.

Lời giải.

Từ 8^x, 4^4, 2 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân nên công bội $q = \dfrac{2}{4^4} = \dfrac{1}{2^7}$

Suy ra $4^4 = 8^x \cdot \dfrac{1}{2^7} \Rightarrow x = 5$.

Mặt khác $\log_2 45$, $\log_2 y$, $\log_2 x$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng suy ra

$$\log_2 y = (\log_2 45 + \log_2 x) : 2 \Leftrightarrow \log_2 y = (\log_2 45 + \log_2 5) : 2 \Leftrightarrow \log_2 y = \log_2 \sqrt{225} \Leftrightarrow y = 15.$$

Chọn phương án B

Câu 19. Cho $a, b > 0$, $\log_3 a = p$, $\log_3 b = p$. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\log_3\left(\dfrac{3^r}{a^mb^d}\right) = r + pm - qd$. Ⓑ $\log_3\left(\dfrac{3^r}{a^mb^d}\right) = r + pm + qd$.

Ⓒ $\log_3\left(\dfrac{3^r}{a^mb^d}\right) = r - pm - qd$. Ⓓ $\log_3\left(\dfrac{3^r}{a^mb^d}\right) = r - pm + qd$.

Lời giải.

Ta có $\log_3\left(\dfrac{3}{a^mb^d}\right) = \log_3 3^r - \log_3\left(a^mb^d\right) = r - \log_3 a^m - \log_3 b^d = r - m\log_3 a - d\log_3 b$

Chọn phương án C

Câu 20. Cho số thực $a > 0, a \neq 1$. Giá trị $\log_{\sqrt{a^3}} \sqrt[3]{a^2}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{4}{9}$. Ⓑ $\dfrac{2}{3}$. Ⓒ 1. Ⓓ $\dfrac{9}{4}$.

Lời giải.

Ta có: $\log_{\sqrt{a^3}} \sqrt[3]{a^2} = \log_{a^{\frac{3}{2}}} a^{\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \log_a a = \dfrac{4}{9}$.

Chọn phương án A

Câu 21. Với a và b là các số thực dương. Biểu thức $\log_a(a^2b)$ bằng

A. $2 + \log_a b$. B. $2 - \log_a b$. C. $2\log_a b$. D. $1 + 2\log_a b$.

Lời giải.

Ta có $\log_a(a^2b) = \log_a a^2 + \log_a b = 2 + \log_a b$.

Chọn phương án A

Câu 22. Cho a, b, c là các số thực dương, a khác 1. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

A. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

B. $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

C. $\log_a(bc) = \log_a b \cdot \log_a c$.

D. $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a b$.

Lời giải.

Ta có $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$ nên $\log_a(bc) = \log_a b \cdot \log_a c$ sai.

Chọn phương án C

Câu 23. Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. B. $\ln \dfrac{a}{b} = \ln b - \ln a$. C. $\ln(ab) = \ln a \cdot \ln b$. D. $\ln \dfrac{a}{b} = \dfrac{\ln a}{\ln b}$.

Lời giải.

Dễ thấy $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Chọn phương án A

Câu 24. Cho $a > 0; a \neq 1$ và $x; y$ là hai số dương. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\log_a(x + y) = \log_a x + \log_a y$.

B. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

C. $\log_a(xy) = \log_a \cdot \log_a y$.

D. $\log_a(x + y) = \log_a \cdot \log_a y$.

Lời giải.

Ta có: $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

Chọn phương án B

Câu 25. Cho $a, b, c > 0$ và $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$.

B. $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$.

C. $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$.

D. $\log_a (b + c) = \log_a b + \log_a c$.

Lời giải.

Theo các công thức về logarit.

Chọn phương án D

Câu 26. Cho a, $b > 0$; $a, b \neq 1$ và x, y là hai số thực dương. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào **sai**?

A. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

B. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

C. $\log_a \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\log_a x}$.

D. $\log_b a \cdot \log_a x = \log_b x$.

Lời giải.

Có $\log_a \dfrac{1}{x} = \log_a(x^{-1}) = -\log_a x$.

Chọn phương án C

Câu 27. Với hai số thực bất kì $a \neq 0$, $b \neq 0$, khẳng định nào sau đây là **sai**?

A $\log\left(a^2b^2\right) = 2\log(ab)$.

B $\log\left(a^2b^2\right) = 3\log\sqrt[3]{a^2b^2}$.

C $\log\left(a^2b^2\right) = \log\left(a^4b^6\right) - \log\left(a^2b^4\right)$.

D $\log\left(a^2b^2\right) = \log a^2 + \log b^2$.

Lời giải.

Chọn $a = 1$, $b = -1$, ta có $\log\left(a^2b^2\right) = 1$, nhưng $2\log(ab)$ không có nghĩa.

Chọn phương án A

Câu 28. Cho a, b là hai số dương bất kì. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A $\ln a^b = b\ln a$.

B $\ln(ab) = \ln a \cdot \ln b$.

C $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$.

D $\ln\dfrac{a}{b} = \dfrac{\ln a}{\ln b}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức logarit của lũy thừa $\ln a^\alpha = \alpha \ln a$.

Chọn phương án A

Câu 29. Cho các số thực $a < b < 0$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln|a| - \ln|b|$.

B $\ln\sqrt{ab} = \dfrac{1}{2}(\ln a + \ln b)$.

C $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \ln(a^2) - \ln(b^2)$.

D $\ln(ab)^2 = \ln(a^2) + \ln(b^2)$.

Lời giải.

Mệnh đề "$\ln\sqrt{ab} = \dfrac{1}{2}(\ln a + \ln b)$" sai vì $a < b < 0$ nên $\ln a$ và $\ln b$ không tồn tại.

Chọn phương án B

Câu 30. Với a, b, x là các số thực dương thỏa mãn $\log_5 x = 4\log_5 a + 3\log_5 b$, mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A $x = 3a + 4b$.

B $x = 4a + 3b$.

C $x = a^4b^3$.

D $x = a^4 + b^3$.

Lời giải.

$\log_5 x = 4\log_5 a + 3\log_5 b = \log_5\left(a^4 \cdot b^3\right)$. Suy ra $x = a^4b^3$.

Chọn phương án C

B MỨC ĐỘ 2

Câu 31. Rút gọn biểu thức $B = \log_{\frac{1}{a}} \dfrac{a.\sqrt[4]{a^3}.\sqrt[3]{2}}{\sqrt{a}.\sqrt[4]{a}}$, (giả sử tất cả các điều kiện đều được thỏa mãn) ta được kết quả là

A $\dfrac{60}{91}$.

B $-\dfrac{91}{60}$.

C $\dfrac{3}{5}$.

D $-\dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

Ta có $B = \log_{\frac{1}{a}} \dfrac{a \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a}} = \log_{a^{-1}} \dfrac{a \cdot a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}}} = \log_{a^{-1}} \dfrac{a^{\frac{29}{12}}}{a^{\frac{3}{4}}} = \log_{a^{-1}} a^{\frac{5}{3}} = -\dfrac{5}{3}$.

Chọn phương án D

Câu 32. Đặt $a = \log_3 2$, khi đó $\log_6 48$ bằng

(A) $\dfrac{3a-1}{a-1}$. (B) $\dfrac{3a+1}{a+1}$. (C) $\dfrac{4a-1}{a-1}$. (D) $\dfrac{4a+1}{a+1}$.

Lời giải.

$\log_6 48 = \log_6 3 + \log_6 16 = \dfrac{1}{\log_3 2 + 1} + \dfrac{4}{\log_2 3 + 1} = \dfrac{1}{a+1} + \dfrac{4}{\dfrac{1}{a} + 1} = \dfrac{4a+1}{a+1}$.

Chọn phương án (D)

Câu 33. Cho các số thực dương a, b với $a \neq 1$ và $\log_a b > 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\left[\begin{array}{l} 0 < a, b < 1 \\ 0 < a < 1 < b \end{array}\right.$. (B) $\left[\begin{array}{l} 0 < a, b < 1 \\ 1 < a, b \end{array}\right.$. (C) $\left[\begin{array}{l} 0 < a, b < 1 \\ 0 < b < 1 < a \end{array}\right.$. (D) $\left[\begin{array}{l} 0 < b < 1 < a \\ 1 < a, b \end{array}\right.$.

Lời giải.

<u>TH1</u>: $0 < a < 1 \Rightarrow \log_a b > 0 = \log_a 1 \Leftrightarrow 0 < b < 1$.

<u>TH2</u>: $a > 1 \Rightarrow \log_a b > 0 = \log_a 1 \Leftrightarrow b > 1$.

Vậy $\left[\begin{array}{l} 0 < a, b < 1 \\ 1 < a, b. \end{array}\right.$

Chọn phương án (B)

Câu 34. Đặt $a = \log_2 5, b = \log_3 5$. Hãy biểu diễn $\log_6 5$ theo a và b.

(A) $\log_6 5 = \dfrac{1}{a+b}$. (B) $\log_6 5 = \dfrac{ab}{a+b}$. (C) $\log_6 5 = a^2 + b^2$. (D) $\log_6 5 = a + b$.

Lời giải.

Ta có $\log_6 5 = \dfrac{1}{\log_5 6} = \dfrac{1}{\log_5 2 + \log_5 3} = \dfrac{1}{\frac{1}{\log_2 5} + \dfrac{1}{\log_3 5}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} = \dfrac{ab}{a+b}$.

Chọn phương án (B)

Câu 35. Với a là số thực dương bất kì, mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\log(2018a) = 2018 \log a$. (B) $\log a^{2018} = \dfrac{1}{2018} \log a$.

(C) $\log(2018a) = \dfrac{1}{2018} \log a$. (D) $\log a^{2018} = 2018 \log a$.

Lời giải.

Phương pháp

Sử dụng các công thức: $\log ab = \log a + \log b$; $\log a^n = n \log a$

Cách giải:

Ta có: $\log(2018a) = \log 2018 + \log a$

$\log a^{2018} = 2018 \log a$.

Chọn phương án (D)

Câu 36. Số thực x thỏa mãn $\log_2(\log_4 x) = \log_4(\log_2 x) - a$, với $a \in \mathbb{R}$. Giá trị của $\log_2 x$ bằng bao nhiêu?

(A) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^a$. (B) a^2. (C) 2^{1-a}. (D) 4^{1-a}.

Lời giải.

Ta có $\log_2(\log_4 x) = \log_4(\log_2 x) - a \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right) = \frac{1}{2}\log_2(\log_2 x) - a$

$$\Leftrightarrow \log_2(\log_2 x) - 1 = \frac{1}{2}\log_2(\log_2 x) - a$$

$$\Leftrightarrow \log_2(\log_2 x) = 2 - 2a$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = 2^{2-2a} = 4^{1-a}.$$

Chọn phương án D

Câu 37. Cho $\log_{12} 3 = a$. Tính $\log_{24} 18$ theo a

A) $\frac{3a-1}{3-a}$. B) $\frac{3a+1}{3-a}$. C) $\frac{3a+1}{3+a}$. D) $\frac{3a-1}{3+a}$.

Lời giải.

— $a = \log_{12} 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 12} = \frac{\log_2 3}{\log_2(2^2\cdot 3)} = \frac{\log_2 3}{\log_2(2^2) + \log_2 3} = \frac{\log_2 3}{2 + \log_2 3} \Rightarrow \log_2 3 = \frac{2a}{1-a}$.

— $\log_{24} 18 = \frac{\log_2 18}{\log_2 24} = \frac{\log_2(2.3^2)}{\log_2(2^2\cdot 3)} = \frac{1 + 2\log_2 3}{3 + \log_2 3} = \frac{1 + 2\cdot\frac{2a}{1-a}}{3 + \frac{2a}{1-a}} = \frac{3a+1}{3-a}$.

Chọn phương án B

Câu 38. Với a, b là hai số thực dương. Khi đó, $\log\left(a^2 b\right)$ bằng

A) $2\log a - \log b$. B) $2\log a + b$. C) $2\log a + \log b$. D) $2\log b + \log a$.

Lời giải.

Ta có $\log\left(a^2 b\right) = \log a^2 + \log b = 2\log a + \log b$.

Chọn phương án C

Câu 39. Cho hai số thực dương a và b thỏa mãn $\log_9 a^4 + \log_3 b = 8$ và $\log_3 a + \log_{\sqrt[3]{3}} b = 9$. Giá trị biểu thức $P = ab + 1$ bằng

A) 82. B) 27. C) 243. D) 244.

Lời giải.

Theo điều kiện ta có $\begin{cases}\log_9 a^4 + \log_3 b = 8\\ \log_3 a + \log_{\sqrt[3]{3}} b = 9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\log_3 a + \log_3 b = 8\\ \log_3 a + 3\log_3 b = 9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_3 a = 3\\ \log_3 b = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = 27\\ b = 9.\end{cases}$

Vậy $P = ab + 1 = 244$.

Chọn phương án D

Câu 40. Với a, b, c là các số thực dương tùy ý khác 1 và $\log_a c = x$, $\log_b c = y$. Khi đó giá trị của $\log_c(ab)$ bằng

A) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. B) $\frac{xy}{x+y}$. C) $\frac{1}{xy}$. D) $x + y$.

Lời giải.

Với a, b, c là các số thực dương tùy ý khác 1, ta có $\log_c a = \frac{1}{x}$ và $\log_c b = \frac{1}{y}$.

Khi đó $\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Chọn phương án A

Câu 41. Cho $\log_{12} 3 = a$. Tính $\log_{24} 18$ theo a.

(A) $\dfrac{3a+1}{3+a}$. (B) $\dfrac{3a-1}{3+a}$. (C) $\dfrac{3a-1}{3-a}$. (D) $\dfrac{3a+1}{3-a}$.

Lời giải.

Có $a = \log_{12} 3 = \dfrac{1}{\log_3 12} = \dfrac{1}{\log_3 3 + \log_3 4} = \dfrac{1}{1 + 2\log_3 2} \Rightarrow \log_3 2 = \dfrac{1-a}{2a}$.

Lại có $\log_{24} 18 = \dfrac{\log_3 18}{\log_3 24} = \dfrac{\log_3 9 + \log_3 2}{\log_3 3 + \log_3 8} = \dfrac{2 + \log_3 2}{1 + 3\log_3 2} = \dfrac{2 + \dfrac{1-a}{2a}}{1 + 3 \cdot \dfrac{1-a}{2a}} = \dfrac{3a+1}{3-a}$.

Chọn phương án (D)

Câu 42. Đặt $\log_3 2 = a$, khi đó $\log_{16} 27$ bằng

(A) $\dfrac{3a}{4}$. (B) $\dfrac{3}{4a}$. (C) $\dfrac{4}{3a}$. (D) $\dfrac{4a}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{16} 27 = \log_{2^4} 3^3 = \dfrac{3}{4}\log_2 3 = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{\log_3 2} = \dfrac{3}{4a}$.

Chọn phương án (B)

Câu 43. Tính giá trị của biểu thức $A = 8^{\log_2 3} + 9^{\frac{1}{\log_2 3}}$.

(A) $A = 31$. (B) $A = 5$. (C) $A = 11$. (D) $A = 17$.

Lời giải.

$A = 8^{\log_2 3} + 9^{\frac{1}{\log_2 3}} = \left(2^{\log_2 3}\right)^3 + \left(3^{\log_3 2}\right)^2 = 3^3 + 2^2 = 31$.

Chọn phương án (A)

Câu 44. Cho $a > 0, b > 0$ và $a \neq 1$ thỏa mãn $\log_a b = \dfrac{b}{4}; \log_2 a = \dfrac{16}{b}$. Tính tổng $a + b$.

(A) 16. (B) 12. (C) 10. (D) 18.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \log_a b = \dfrac{b}{4} \\ \log_2 a = \dfrac{16}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^{\frac{b}{4}} \\ a = 2^{\frac{16}{b}} \end{cases} \Rightarrow b = \left(2^{\frac{16}{b}}\right)^{\frac{b}{4}} = 16 \Rightarrow b = 16, a = 2 \Rightarrow a + b = 18.$

Chọn phương án (D)

Câu 45. Cho 2 số thực a và b với $a > 0,\ a \neq 1,\ b \neq 0$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) $\log_{a^2} |b| = \dfrac{1}{2}\log_a |b|$. (B) $\dfrac{1}{2}\log_a a^2 = 1$. (C) $\dfrac{1}{2}\log_a b^2 = \log_a |b|$. (D) $\dfrac{1}{2}\log_a b^2 = \log_a b$.

Lời giải.

Vì $\dfrac{1}{2}\log_a b^2 = \log_a |b|$ nên khẳng định $\dfrac{1}{2}\log_a b^2 = \log_a b$ là khẳng định **sai**.

Chọn phương án (D)

Câu 46. Cho a, b là các số thực dương và khác 1. Đặt $\alpha = \log_a 5$, $\beta = \log_b 5$. Hãy biểu diễn $\log_{ab^2} 25$ theo α, β.

(A) $\dfrac{2}{\alpha + \beta}$. (B) $\dfrac{2\alpha\beta}{2\alpha + \beta}$. (C) $\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha + 2\beta}$. (D) $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}$.

Lời giải.

$\alpha = \log_a 5 \Leftrightarrow \log_5 a = \dfrac{1}{\alpha}$;
$\beta = \log_b 5 \Leftrightarrow \log_5 b = \dfrac{1}{\beta}$.
Ta có $\log_{ab^2} 25 = 2\log_{ab^2} 5 = \dfrac{2}{\log_5 ab^2} = \dfrac{2}{\log_5 a + 2\log_5 b} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{\alpha} + 2\cdot\dfrac{1}{\beta}} = \dfrac{2\alpha\beta}{\beta + 2\alpha}$.

Chọn phương án B

Câu 47. Đặt $\log_7 2 = a$, $\log_7 3 = b$, $Q = \log_7 \dfrac{1}{2} + \log_7 \dfrac{2}{3} + \cdots + \log_7 \dfrac{2014}{2015} + \log_7 \dfrac{2015}{2016}$. Tính Q theo a, b.

(A) $-5a - 2b - 1$. (B) $5a + 2b - 1$. (C) $5a + 2b + 1$. (D) $5a - 2b - 1$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned} Q &= \log_7\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{2014}{2015}\cdot\frac{2015}{2016}\right) = \log_7 \frac{1}{2016} \\ &= -\log\left(2^5\cdot 3^2\cdot 7\right) = -5\log_7 2 - 2\log_7 3 - 1 = -5a - 2b - 1. \end{aligned}$$

Chọn phương án A

Câu 48. Cho $0 < a \neq 1$ và x, y là các số thực âm. mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\log_a\left(x^2y^4\right) = 2\left(\log_a |x| + \log_a y^2\right)$.
(B) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.
(C) $\log_a\left(-x^2y\right) = 2\log_a(-x) + \log_a y$.
(D) $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{\log_a(-x)}{\log_a(-y)}$.

Lời giải.
Ta có, $\log_a\left(x^2y^4\right) = \log_a x^2 + \log_a y^4 = 2\log_a |x| + 2\log_a y^2 = 2\left(\log_a |x| + \log_a y^2\right)$.
Chọn phương án A

Câu 49. Biết $\log x = 5\log m + \dfrac{2}{3}\log n - \dfrac{1}{4}\log p$. Giá trị của x bằng

(A) $\dfrac{m^5\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[4]{p}}$. (B) $m^5\sqrt[3]{n^2}\sqrt[4]{p}$. (C) $\dfrac{m^5\sqrt[3]{n^2}}{p^4}$. (D) $m^5 + \sqrt[3]{n^2} + \sqrt[4]{p}$.

Lời giải.
$\log x = \log m^5 + \log n^{\frac{2}{3}} - \log p^{\frac{1}{4}} = \log\left(\dfrac{m^5\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[4]{p}}\right) \Rightarrow x = \dfrac{m^5\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[4]{p}}$.

Chọn phương án A

Câu 50. Cho $a > 0, a \neq 1$. Đặt $x = \log_3 a$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \log_{\frac{1}{3}} a - \log_{\sqrt{3}} a^2 + \log_a 9$$

(A) $P = \dfrac{1 - 10x^2}{x}$. (B) $P = \dfrac{2\left(1 - x^2\right)}{x}$. (C) $P = \dfrac{2 - 5x^2}{x}$. (D) $P = -3x$.

Lời giải.
Ta có: $P = -\log_3 a - 4\log_3 a + \dfrac{2}{\log_3 a} = -5x + \dfrac{2}{x} = \dfrac{2 - 5x^2}{x}$

Chọn phương án C

C MỨC ĐỘ 3

Câu 51. Cho a, b là các số dương thỏa mãn $\log_9 a = \log_{16} b = \log_{12} \dfrac{5b-a}{2}$. Tính giá trị $T = \dfrac{a}{b}$.

(A) $T = \dfrac{3+\sqrt{6}}{4}$. (B) $T = 7 - 2\sqrt{6}$. (C) $T = 7 + 2\sqrt{6}$. (D) $T = \dfrac{3-\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải.

Đặt $\log_9 a = \log_{16} b = \log_{12} \dfrac{5b-a}{2} = t$, ta được $a = 9^t$, $b = 16^t$, $\dfrac{5b-a}{2} = 12^t$.

Suy ra $\dfrac{5 \cdot 16^t - 9^t}{2} = 12^t \Leftrightarrow 5 \cdot 16^t - 2 \cdot 12^t - 9^t = 0 \Leftrightarrow 5 - 2 \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^t - \left(\dfrac{3}{4}\right)^{2t} \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{4}\right)^t = \sqrt{6} - 1.$

Do đó $\dfrac{a}{b} = \dfrac{9^t}{16^t} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{2t} = (\sqrt{6}-1)^2 = 7 - 2\sqrt{6}.$

Chọn phương án B

Câu 52. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log_4 (x+y) + \log_4 (x-y) \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2x - y$.

(A) 4. (B) -4. (C) $2\sqrt{3}$. (D) $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x+y>0 \\ x-y>0 \end{cases}$. Từ đó suy ra $x > 0$.

$\log_4 (x+y) + \log_4 (x-y) \geq 1 \Leftrightarrow \log_4 \left(x^2 - y^2\right) \geq 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 \geq 4 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{y^2+4}$ (do $x > 0$).
$P = 2x - y \geq 2\sqrt{y^2+4} - y$ với $y \in \mathbb{R}$.
Xét hàm số $f(y) = 2\sqrt{y^2+4} - y$ với $y \in \mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$f'(y) = \dfrac{2y}{\sqrt{y^2+4}} - 1 = \dfrac{2y - \sqrt{y^2+4}}{\sqrt{y^2+4}}$; $f'(y) = 0 \Leftrightarrow 2y = \sqrt{y^2+4} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = \dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}.$

Bảng biến thiên

y	$-\infty$		$\frac{2}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(y)$		$-$	0	$+$	
$f(y)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min\limits_{y \in \mathbb{R}} f(y) = 2\sqrt{3} = f\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$

Suy ra $P \geq 2\sqrt{3}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = \sqrt{y^2+4} \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

Vậy $\min P = 2\sqrt{3}$ đạt được khi $(x; y) = \left(\dfrac{4}{\sqrt{3}}; \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Chọn phương án C

Câu 53. Cho $a, b > 0; a, b \neq 1; a \neq b^2$. Biểu thức $P = \log_{\sqrt{a}} b^2 + \dfrac{2}{\log_{\frac{a}{b^2}} a}$ có giá trị bằng

(A) 6. (B) 4. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Ta có

$P = \log_{\sqrt{a}} b^2 + \dfrac{2}{\log_{\frac{a}{b^2}} a} = 4\log_a b + 2\log_a \dfrac{a}{b^2} = 4\log_a b + 2(\log_a a - 2\log_a b) = 2.$

Chọn phương án (C)

Câu 54. Cho các số thực a, b thỏa mãn $1 < a < b$ và $\log_a b + \log_b a^2 = 3$. Tính giá trị của biểu thức $T = \log_{ab} \dfrac{a^2 + b}{2}$.

(A) $\dfrac{1}{6}$. (B) $\dfrac{3}{2}$. (C) 6. (D) $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\log_a b + \log_b a^2 = 3 \Leftrightarrow \log_a b + 2\log_b a = 3.$ (1)

Đặt $t = \log_a b$. Do $1 < a < b \Leftrightarrow t > \log_a b \Rightarrow t > 1$.

Khi đó (1) trở thành: $t + \dfrac{2}{t} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \text{ (không thỏa)} \\ t = 2 \text{ (thỏa)} \end{array}\right.$.

Với $t = 2$ ta có $\log_a b = 2 \Leftrightarrow b = a^2$.

Suy ra $T = \log_{ab} \dfrac{a^2 + b}{2} = \log_{a^3} a^2 = \dfrac{2}{3}\log_a a = \dfrac{2}{3}$.

Chọn phương án (D)

Câu 55. Cho $a\log_6 3 + b\log_6 2 + c\log_6 5 = 5$ với a, b, c là các số tự nhiên. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

(A) $a = b$. (B) $a > b > c$. (C) $b < c$. (D) $c = b$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $3^a.2^b.5^c = 5$. Do $a, b, c \in \mathbb{N}$ nên chỉ có 1 bộ số $(a; b; c) = (0; 0; 1)$ thỏa mãn.

Chọn phương án (A)

Câu 56. Cho x, y là các số dương lớn hơn 1 thỏa mãn $x^2 + 9y^2 = 6xy$. Tính $M = \dfrac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2\log_{12}(x + 3y)}$.

(A) $M = \dfrac{1}{2}$. (B) $M = \dfrac{1}{3}$. (C) $M = \dfrac{1}{4}$. (D) $M = 1$.

Lời giải.

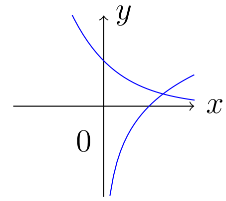
Ta có $x^2 + 9xy = 6xy \Leftrightarrow (x - 3y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3y$.

Khi đó $M = \dfrac{1 + 2\log_{12} 3y + \log_{12} y}{2\log_{12} 6y} = \dfrac{\log_{12} 12y + \log_{12} 3y}{\log_{12} 36y^2} = \dfrac{\log_{12} 36y^2}{\log_{12} 36y^2} = 1$

Chọn phương án (D)

Câu 57.

Cho hai hàm số $y = a^x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A $a; b > 1$. **B** $0 < a; b < 1$. **C** $0 < a < 1 < b$. **D** $0 < b < 1 < a$.

Câu 58. Tính giá trị của biểu thức $T = \log_4 \left(2^{-2016}.2^{16}.\sqrt{2}\right)$

A $T = -\dfrac{3999}{4}$. **B** $T = -\dfrac{3999}{2}$. **C** T không xác định. **D** $T = -2016$.

Lời giải.

$T = \log_4 \left(2^{-\frac{3999}{2}}\right) = -\dfrac{3999}{4}$.

Chọn phương án A

Câu 59. Cho $c = \log_{15} 3$. Hãy tính $\log_{25} 15$ theo c.

A $\log_{25} 15 = \dfrac{1}{2-c}$. **B** $\log_{25} 15 = \dfrac{1}{2(c-1)}$. **C** $\log_{25} 15 = \dfrac{1}{2(1-c)}$. **D** $\log_{25} 15 = \dfrac{1}{2(1+c)}$.

Lời giải.

$c = \log_{15} 3 = \dfrac{1}{\log_3 15} = \dfrac{1}{\log_3(3 \cdot 5)} = \dfrac{1}{1 + \log_3 5} \Rightarrow \log_3 5 = \dfrac{1-c}{c}$.

$\log_{25} 15 = \log_{5^2} 15 = \dfrac{1}{2} \log_5 15 = \dfrac{1}{2} \log_5(5 \cdot 3) = \dfrac{1}{2}(1 + \log_5 3) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{c}{1-c}\right) = \dfrac{1}{2(1-c)}$.

Chọn phương án C

Câu 60. Tính giá trị của biểu thức $P = \log(\tan 1^\circ) + \log(\tan 2^\circ) + \log(\tan 3^\circ) + \ldots + \log(\tan 89^\circ)$.

A $P = 0$. **B** $P = 2$. **C** $P = \dfrac{1}{2}$. **D** $P = 1$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
P &= \log(\tan 1^\circ) + \log(\tan 2^\circ) + \log(\tan 3^\circ) + \ldots + \log(\tan 89^\circ)\\
&= \log(\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \ldots \tan 89^\circ) = \log\left[\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \ldots \tan(90^\circ - 2^\circ) \cdot \tan(90^\circ - 1^\circ)\right]\\
&= \log(\tan 1^\circ \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \ldots \cot 2^\circ \cdot \cot 1^\circ) = \log((\tan 1^\circ \cdot \cot 1^\circ)(\tan 2^\circ \cdot \cot 2^\circ)\ldots)\\
&= \log 1 = 0.
\end{aligned}$$

Chọn phương án A

Câu 61. Biết a, b là các số nguyên thỏa $\log_{1350} 2 = 1 + a \log_{1350} 3 + b \log_{1350} 5$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A $3a - 5b = 2$. **B** $a^2 - b^2 = 4$. **C** $a - 2b = 1$. **D** $ab = 8$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
& \log_{1350} 2 = 1 + a\log_{1350} 3 + b\log_{1350} 5 \\
\Leftrightarrow\ & 1350^{\log_{1350} 2} = 1350 \cdot \left(1350^{\log_{1350} 3}\right)^a \cdot \left(1350^{\log_{1350} 5}\right)^b \\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1350 \cdot 3^a \cdot 5^b \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{675} = 3^a \cdot 5^b \\
\Leftrightarrow\ & 3^{-3} \cdot 5^{-2} = 3^a \cdot 5^b \\
\Leftrightarrow\ & 3^{a+3} \cdot 5^{b+2} = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \log_3 3^{a+3} + \log_3 5^{b+2} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (a+3) + (b+2) \cdot \log_3 5 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a = -3 \\ b = -2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Suy ra $a - 2b = 1$.
Chọn phương án C

Câu 62. Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = 7ab$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A $\log(a+b) = \dfrac{3}{2}(\log a + \log b)$.

B $2(\log a + \log b) = \log(7ab)$.

C $3\log(a+b) = \dfrac{1}{2}(\log a + \log b)$.

D $\log\left(\dfrac{a+b}{3}\right) = \dfrac{1}{2}(\log a + \log b)$.

Lời giải.

Ta có: $a^2 + b^2 = 7ab$

$\Leftrightarrow (a+b)^2 = 9ab$

$\Leftrightarrow 2\log(a+b) = \log(9ab)$

$\Leftrightarrow 2\log(a+b) = 2\log 3 + \log a + \log b$

$\Leftrightarrow \log(a+b) - \log 3 = \dfrac{1}{2}(\log a + \log b)$

$\Leftrightarrow \log\dfrac{a+b}{3} = \dfrac{1}{2}\log ab$

Chọn phương án D

Câu 63. Cho $n > 1$ là một số nguyên. Tính giá trị của biểu thức

$$\frac{1}{\log_2 n!} + \frac{1}{\log_3 n!} + \cdots + \frac{1}{\log_n n!}.$$

A n. **B** 0. **C** 1. **D** $n!$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{\log_2 n!} + \dfrac{1}{\log_3 n!} + \cdots + \dfrac{1}{\log_n n!} = \log_{n!} 2 + \log_{n!} 3 + \cdots + \log_{n!} n = \log_{n!} n! = 1$.

Chọn phương án C

Câu 64. Biết $\log_2 7 = a, \log_3 7 = b$, tính $S = \log_2 2016$ theo a, b.

A $S = \dfrac{2a + 5b + ab}{b}$. **B** $S = \dfrac{2b + 5a + ab}{a}$. **C** $S = \dfrac{5a + 2b + ab}{b}$. **D** $S = \dfrac{2a + 5b + ab}{a}$.

Lời giải.

Ta có $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \Rightarrow \log_2 2016 = \log_2(2^5 \cdot 3^2 \cdot 7) = 5 + 2\log_2 3 + \log_2 7$

$\Rightarrow S = 5 + \dfrac{2\log_7 3}{\log_7 2} + \log_2 7 = 5 + \dfrac{a}{b} + a = \dfrac{5b + ab + 2a}{b}$

Chọn phương án A

Câu 65. Cho $\log_{27} 5 = a, \log_8 7 = b$ và $\log_2 3 = c$. Hãy biểu diễn $A = \log_{12} 35$ theo a, b, c.

A) $A = \dfrac{3b + 3ac}{c + 3}$. B) $A = \dfrac{3b + 2ac}{c + 2}$. C) $A = \dfrac{3b + 3ac}{c + 2}$. D) $A = \dfrac{3b + 3ac}{c + 1}$.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có $\log_3 5 = 3a, \log_2 7 = 3b$.

$A = \dfrac{\log_2 35}{\log_3 12} = \dfrac{\log_3 5 + \log_3 7}{1 + 2\log_3 2} = \dfrac{3a + \frac{3b}{c}}{1 + \frac{2}{c}} = \dfrac{3b + 3ac}{c + 2}$.

Chọn phương án C

Câu 66. Cho $a > 0$, $b > 0$ thoả mãn $a^2 + 9b^2 = 10ab$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A) $\log(a + b) + \log b = 1$. B) $\log \dfrac{a + 3b}{4} = \dfrac{\log a + \log b}{2}$.

C) $3\log(a + 3b) = \log a - \log b$. D) $2\log(a + 3b) = 2\log a + \log b$.

Lời giải.

Ta có $a^2 + 9b^2 = 10ab \Leftrightarrow a^2 + 9b^2 + 6ab = 16ab \Leftrightarrow (a + 3b)^2 = 16ab \Leftrightarrow \left(\dfrac{a + 3b}{4}\right)^2 = ab$

$\Leftrightarrow \log\left(\dfrac{a + 3b}{4}\right)^2 = \log ab \Leftrightarrow 2\log\dfrac{a + 3b}{4} = \log a + \log b \Leftrightarrow \log\dfrac{a + 3b}{4} = \dfrac{\log a + \log b}{2}$.

Chọn phương án B

Câu 67. Gọi n là số nguyên dương sao cho $\dfrac{1}{\log_3 x} + \dfrac{1}{\log_{3^2} x} + \dfrac{1}{\log_{3^3} x} + \cdots + \dfrac{1}{\log_{3^n} x} = \dfrac{210}{\log_3 x}$ đúng với mọi $x > 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = 2n + 3$.

A) $P = 32$. B) $P = 40$. C) $P = 43$. D) $P = 23$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{\log_3 x} + \dfrac{1}{\log_{3^2} x} + \dfrac{1}{\log_{3^3} x} + \cdots + \dfrac{1}{\log_{3^n} x} = \dfrac{1}{\log_3 x} + \dfrac{2}{\log_3 x} + \dfrac{3}{\log_3 x} + \cdots + \dfrac{n}{\log_3 x} = \dfrac{n(n+1)}{2\log_3 x}$.

Do đó $\dfrac{n(n+1)}{2} = 210 \Leftrightarrow n^2 + n - 420 = 0 \Leftrightarrow n = 20$. Vậy $P = 43$.

Chọn phương án C

Câu 68. Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $a \neq 1$, $a \neq \dfrac{1}{b}$ và $\log_a b = \sqrt{5}$. Tính $P = \log_{\sqrt{ab}} \dfrac{b}{\sqrt{a}}$.

A) $P = \dfrac{11 - 3\sqrt{5}}{4}$. B) $P = \dfrac{11 + 3\sqrt{5}}{4}$. C) $P = \dfrac{11 - 2\sqrt{5}}{4}$. D) $P = \dfrac{11 + 3\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $P = \dfrac{\log_a \dfrac{b}{\sqrt{a}}}{\log_a \sqrt{ab}} = \dfrac{\log_a b - \log_a \sqrt{a}}{\log_a \sqrt{a} + \log_a \sqrt{b}} = \dfrac{\log_a b - \dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\log_a b} = \dfrac{11 - 3\sqrt{5}}{4}$.

Chọn phương án A

Câu 69. Cho ba số thực dương x, y, z theo thứ tự lập thành một cấp số nhân, đồng thời với mỗi số thực dương $a\,(a \neq 1)$ thì $\log_a x$, $\log_{\sqrt{a}} y$, $\log_{\sqrt[3]{a}} z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{1959x}{y} + \dfrac{2019y}{z} + \dfrac{60z}{x}$.

Ⓐ $\dfrac{2019}{2}$. Ⓑ 60. Ⓒ 2019. Ⓓ 4038.

Lời giải.

Theo đề bài, ta có: $\begin{cases} xz = y^2 \\ \log_a x + \log_{\sqrt[3]{a}} z = 2\log_{\sqrt{a}} y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xz = y^2 \\ xz^3 = y^4 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z.$

Do đó: $P = \dfrac{1959x}{y} + \dfrac{2019y}{z} + \dfrac{60z}{x} = 1959 + 2019 + 60 = 4038.$

Chọn phương án D

Câu 70. Gọi x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(x+y)$ và $\dfrac{x}{y} = \dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a, b là hai số nguyên dương. Tính $T = a + b$?

Ⓐ $T = 6$. Ⓑ $T = 4$. Ⓒ $T = 11$. Ⓓ $T = 8$.

Lời giải.

Đặt $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(x+y) = t \Rightarrow \begin{cases} x = 9^t \\ y = 6^t \\ x + y = 4^t \end{cases}$

$\Rightarrow 9^t + 6^t = 4^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2t} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^t = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Ta lại có: $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{-a+\sqrt{b}}{2} \\ \left(\dfrac{9}{6}\right)^t = \left(\dfrac{3}{2}\right)^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow T = a + b = 6$

Chọn phương án A

D MỨC ĐỘ 4

Câu 71. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a \geq b > 1$. Biết rằng $P = \dfrac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \dfrac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất khi $b = a^k$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $k \in \left(0; \dfrac{3}{2}\right)$. Ⓑ $k \in (-1; 0)$. Ⓒ $k \in \left(\dfrac{3}{2}; 2\right)$. Ⓓ $k \in (2; 3)$.

Lời giải.

Ta có $P = 1 + \log_a b + \sqrt{1 - \log_a b}$. Đặt $t = \sqrt{1 - \log_a b} \Rightarrow t \in (0; 1]$ và $P = f(t) = -t^2 + t + 2$.

Do tam thức $-t^2 + t + 2$ có hoành độ đỉnh $t = \dfrac{1}{2} \in (0; 1]$ nên $\max\limits_{(0;1]} f(t) = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Khi đó $\log_a b = \dfrac{3}{4} \Rightarrow k = \dfrac{3}{4}$.

Chọn phương án A

Câu 72. Cho hai số thực $a, b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \dfrac{1}{\log_{(ab)} a} + \dfrac{1}{\log_{\sqrt[4]{ab}} b}$.

Nhóm: PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA

(A) $\min S = \dfrac{4}{9}$. (B) $\min S = \dfrac{9}{4}$. (C) $\min S = \dfrac{9}{2}$. (D) $\min S = \dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

$S = \log_a(ab) + \dfrac{1}{4}\log_b(ab) = 1 + \log_a b + \dfrac{1}{4}(1 + \log_b a) = \log_a b + \dfrac{1}{4\log_a b} + \dfrac{5}{4}$

Vì $a > 1, b > 1$ nên $\log_a b > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô - si ta có

$S \geq 2\sqrt{\log_a b.\dfrac{1}{4\log_a b}} + \dfrac{5}{4} = 1 + \dfrac{5}{4} = \dfrac{9}{4}$

Dấu " = " xảy ra khi $\log_a b = \dfrac{1}{4\log_a b} \Leftrightarrow (\log_a b)^2 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_a b = -\dfrac{1}{2}(l)\\ \log_a b = \dfrac{1}{2}(TM)\end{array}\right.$

Với $\log_a b = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow b = a^{\frac{1}{2}}$

Chọn phương án (B)

Câu 73. Cho $\log_9 x = \log_{12} y = \log_{16}(x + 3y)$. Tính giá trị $\dfrac{x}{y}$.

(A) $\dfrac{\sqrt{13} - 3}{2}$. (B) $\dfrac{\sqrt{13} + 3}{2}$. (C) $\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$. (D) $\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Đặt $\log_9 x = \log_{12} y = \log_{16}(x+3y) = t$. Suy ra: $x = 9^t, y = 12^t, x+3y = 16^t$. Khi đó ta có $x(x+3y) = y^2$.

Chia hai vế cho y^2 ta được phương trình $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 3\dfrac{x}{y} - 1 = 0$. Giải ra ta được $\dfrac{x}{y} = \dfrac{\sqrt{13} - 3}{2}$.

Chọn phương án (A)

Câu 74. Cho x, y là các số thực dương thỏa $\log_9 x = \log_6 y = \log_4\left(\dfrac{x + y}{6}\right)$. Tính tỉ số $\dfrac{x}{y}$.

(A) $\dfrac{x}{y} = 4$. (B) $\dfrac{x}{y} = 3$. (C) $\dfrac{x}{y} = 5$. (D) $\dfrac{x}{y} = 2$.

Lời giải.

Ta có $\log_9 x = \log_6 y \Leftrightarrow y = 6^{\log_9 x} = (2.3)^{\frac{1}{2}\log_3 x} = 2^{\frac{1}{2}\log_3 x}.3^{\frac{1}{2}\log_3 x} = \left(x.2^{\log_3 x}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Khi đó $\dfrac{y}{x} = \dfrac{\left(x.2^{\log_3 x}\right)^{\frac{1}{2}}}{x} = \left(\dfrac{2^{\log_3 x}}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$ (1)

Ta có $\log_9 x = \log_4\left(\dfrac{x + y}{6}\right) \Rightarrow \dfrac{x + y}{6} = 4^{\log_9 x} = 2^{\log_3 x} \Rightarrow y = 6.2^{\log_3 x} - x$.

Khi đó $\dfrac{y}{x} = \dfrac{6.2^{\log_3 x} - x}{x} = 6 \cdot \dfrac{2^{\log_3 x}}{x} - 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $6 \cdot \dfrac{2^{\log_3 x}}{x} - 1 = \left(\dfrac{2^{\log_3 x}}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \left(\dfrac{2^{\log_3 x}}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{x}{y} = 2$.

Chọn phương án (D)

Câu 75. Xét các số thực dương x, y thỏa $\log_3 \dfrac{1 - y}{x + 3xy} = 3xy + x + 3y - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất P_{min} của biểu thức $P = x + y$.

(A) $P_{min} = \dfrac{3\sqrt{3} + 4}{3}$. (B) $P_{min} = \dfrac{3\sqrt{3} - 4}{3}$. (C) $P_{min} = \dfrac{3\sqrt{3} + 4}{9}$. (D) $P_{min} = \dfrac{3\sqrt{3} - 4}{9}$.

Lời giải.

50 DẠNG TOÁN PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA LẦN 2

Từ giả thiết: $\log_3 \dfrac{1-y}{x+3xy} = 3xy + x + 3y - 4$
$\Leftrightarrow \log_3(1-y) + 1 + 3(1-y) = \log_3(x+3xy) + 3xy + x$
$\Leftrightarrow \log_3[3(1-y)] + 3(1-y) = \log_3(x+3xy) + (3xy+x) \qquad (*)$.
Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t \Rightarrow f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 3} + 1 > 0 \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Mặt khác do $x, y > 0$ nên $x + 3xy > 0 \Rightarrow 1 - y > 0 \Rightarrow 3(1-y); 3xy + x \in (0;+\infty)$. Do đó phương trình $(*) \Leftrightarrow 3(1-y) = x + 3xy \Leftrightarrow y = \dfrac{-x+3}{3x+3}$ thế vào P ta được:

$P = x + \dfrac{-x+3}{3x+3}$ với $x > 0 \Rightarrow P' = 1 - \dfrac{12}{(3x+3)^2}; P' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{12}-3}{3} \text{ (thỏa mãn)} \\ x = \dfrac{-\sqrt{12}-3}{3} \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên ta được $\min P = P\left(\dfrac{\sqrt{12}-3}{3}\right) = \dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}$.

Chọn phương án B

Câu 76. Cho n là số nguyên dương, tìm n sao cho

$1^2 \log_a 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{a}} 2019 + \ldots + n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 1010^2 \cdot 2019^2 \log_a 2019$.

A 2019. **B** 2018. **C** 2017. **D** 2016.

Lời giải.

$VT = 1^2 \log_a 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{a}} 2019 + \ldots + n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019$.
$VT = 1^3 \log_a 2019 + 2^3 \log_a 2019 + \ldots + n^3 \log_a 2019$.
$VT = \left(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3\right) \log_a 2019$.
$VP = 1010^2 \cdot 2019^2 \cdot \log_a 2019$.
$VT = VP \Leftrightarrow \left(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3\right) \log_a 2019 = 1010^2 \cdot 2019^2 \cdot \log_a 2019$
$\Leftrightarrow \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = 1010^2.2019^2 \Leftrightarrow (n^2+n) = (2020 \cdot 2019)^2$
$\Leftrightarrow n^2 + n = 2020 \cdot 2019 \Leftrightarrow n = 2019$ vì $n > 0$.

Chọn phương án A

Câu 77. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $2^{2u_1+1} + 2^{3-u_2} = \dfrac{8}{\log_3\left(\dfrac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n > 5^{100}$ bằng

A 230. **B** 231. **C** 233. **D** 234.

Lời giải.

Theo giả thiết $u_{n+1} = 2u_n$ nên (u_n) là một cấp số nhân có công bội $q = 2$. Suy ra $u_n = u_1 \cdot 2^{n-1}$ với mọi $b \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

Ta lại có $2^{2u_1+1} + 2^{3-u_2} = \dfrac{8}{\log_3\left(\dfrac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)}$

$\Leftrightarrow 2 \cdot 4^{u_1} + \dfrac{8}{4_1^u} = \dfrac{8}{\log_3\left(\dfrac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)} \qquad (1)$.

Dễ thấy $2 \cdot 4^{u_1} + \dfrac{8}{4^{u_1}} \geq 8$ và $\dfrac{8}{\log_3\left(\dfrac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)} = \dfrac{8}{\log_3\left[\left(\dfrac{1}{2}u_3 - 1\right)^2 + 3\right]} \leq 8$ nên (1) tương đương

Nhóm: PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA

với $2\cdot 4^{u_1}+\dfrac{8}{4^{u_1}}=8$ và $\dfrac{8}{\log_3\left(\dfrac{1}{4}u_3^2-4u_1+4\right)}=8$ hay $u_1=\dfrac{1}{2}$.

Khi đó $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=u_1\dfrac{1-2^n}{1-2}=\dfrac{2^n-1}{2}$.

Do đó, $S_n>5^{100}\Leftrightarrow\dfrac{2^n-1}{2}>5^{100}\Leftrightarrow\log_5\dfrac{2^n-1}{2}>100\Leftrightarrow n>233$.

Chọn phương án D

Câu 78. Xét các số dương a,b,c thỏa mãn $16\log^4 a+4\log^4 b+2\log^2 c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của a.

A $10^{\frac{1}{2}}$. **B** 10^{-1}. **C** 1. **D** $10^{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Ta có: $16\log^4 a+4\log^4 b+2\log^2 c=1$

$\Leftrightarrow 16\log^4 a=1-\left(4\log^4 b+2\log^2 c\right)\leqslant 1$

$\Leftrightarrow |2\log a|\leqslant 1\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\leqslant\log a\leqslant\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 10^{-\frac{1}{2}}\leqslant a\leqslant 10^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow a_{\max}=10^{\frac{1}{2}}$ đạt được khi $4\log^4 b+2\log^2 c=0\Leftrightarrow b=c=1$.

Chọn phương án A

Câu 79. Gọi x,y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x=\log_6 y=\log_4(x+y)$ và $\dfrac{x}{y}=\dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a,b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

A $a+b=6$. **B** $a+b=11$. **C** $a+b=4$. **D** $a+b=8$.

Lời giải.

Đặt $\log_9 x=t$.

Theo đề ra ta có $\begin{cases}\log_9 x=\log_6 y=t\\ \log_9 x=\log_4(x+y)=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=9^t & (10)\\ y'=6^t & (11)\\ x+y=4^t & (12)\\ \dfrac{x}{y}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^t & (13)\end{cases}$

Từ (10), (11) và (12) ta có $9^t+6^t=4^t\Leftrightarrow(3^t)^2+(3\cdot 2)^t-4^t=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2t}+\left(\dfrac{3}{2}\right)^t-1=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\left(\frac{3}{2}\right)^t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\\ &\left(\frac{3}{2}\right)^t=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\ \text{(loại)}\end{aligned}\right.$$

Thế vào (13) ta được $\dfrac{x}{y}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}\Rightarrow a=1;b=5$.

Chọn phương án A

Câu 80. Cho n là một số nguyên dương và $0<a\neq 1$, tìm n sao cho

$\log_a 2019+2^2\log_{\sqrt{a}}2019+3^2\log_{\sqrt[3]{a}}2019+\cdots+n^2\log_{\sqrt[n]{a}}2019=1008^2\cdot 2017^2\log_a 2019$.

Ⓐ 2017. Ⓑ 2018. Ⓒ 2019. Ⓓ 2016.

Lời giải.

Dễ dàng chứng bằng quy nạp rằng $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Suy ra

$$\begin{aligned}
& \log_a 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{a}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \cdots + n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 1008^2 \cdot 2017^2 \log_a 2019 \\
\Leftrightarrow\ & (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) \log_a 2019 = 1008^2 \cdot 2017^2 \log_a 2019 \\
\Leftrightarrow\ & \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 1008^2 \cdot 2017^2 \\
\Leftrightarrow\ & n = 2016.
\end{aligned}$$

Chọn phương án Ⓓ

Câu 81. Cho cấp số cộng (a_n), cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $a_2 > a_1 \geqslant 0$, $b_2 > b_1 \geqslant 1$ và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(a_2) + 2 = f(a_1)$ và $f(\log_2 b_2) + 2 = f(\log_2 b_1)$. Tìm số nguyên dương $n (n > 1)$ nhỏ nhất sao cho $b_n > 2018 a_n$.

Ⓐ $n = 20$. Ⓑ $n = 10$. Ⓒ $n = 14$. Ⓓ $n = 16$.

Lời giải.

Hàm số $y = x^3 - 3x$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0		$-$		0	$+$	
y	$+\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

+ Với $0 \leq a_1 < a_2$

Từ giả thiết $f(a_2) - f(a_1) = -2 < 0 \Rightarrow f(x)$ giảm trên $(a_1; a_2) \Rightarrow 0 \leq a_1 < a_2 \leq 1$.

Khi đó: $\begin{cases} f(a_1) \leqslant f(0) = 0 \\ f(a_2) \geqslant f(1) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(a_1) \leq 0 \\ f(a_2) + 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(a_1) \leq 0 \\ f(a_1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(a_1) = 0 \Rightarrow a_1 = 0.$

Và $f(a_2) + 2 = 0 \Rightarrow f(a_2) = -2 \Rightarrow a_2 = 1$.

Vậy cấp số cộng (a_n) có $\begin{cases} a_1 = 0 \\ d = 1. \end{cases}$

+ Với $1 \leq b_1 < b_2$

Từ giả thiết: $f(\log_2 b_2) - f(\log_2 b_1) = -2 < 0 \Rightarrow f(x)$ giảm trên $(\log_2 b_1; \log_2 b_2)$

$\Rightarrow 0 \leqslant \log_2 b_1 < \log_2 b_2 \leqslant 1 \Rightarrow 1 \leqslant b_1 < b_2 \leqslant 2$.

Khi đó: $\begin{cases} f(\log_2 b_1) \leqslant f(0) = 0 \\ f(\log_2 b_2) \geqslant f(1) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\log_2 b_1) \leqslant 0 \\ f(\log_2 b_2) + 2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\log_2 b_1) \leqslant 0 \\ f(\log_2 b_1) \geqslant 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f(\log_2 b_1) = 0 \Rightarrow \log_2 b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = 1$.

Và $f(\log_2 b_2) + 2 = 0 \Rightarrow f(\log_2 b_2) = -2 \Rightarrow \log_2 b_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 2$.

Vậy cấp số nhân (b_n) có $\begin{cases} b_1 = 1 \\ q = 2. \end{cases}$

+ Khi đó: $b_n > 2018a_n \Leftrightarrow 1\cdot 2^{n-1} > 2018\left(0+(n-1)\right) \Leftrightarrow 2^{n-1} > 2018\left(n-1\right)$.
Dùng chức năng Calc của máy tính ta chọn được $n = 16$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa yêu cầu bái toán.
Chọn phương án D

Câu 82. Biết $\log_2\left(\sum\limits_{k=1}^{100}\left(k\times 2^k\right)-2\right) = a+\log_c b$ với a,b,c là các số nguyên và $a>b>c>1$. Tổng $a+b+c$ là

A 203. B 202. C 201. D 200.

Lời giải.
Đặt $S=\sum\limits_{k=1}^{100}\left(k\times 2^k\right)$. Suy ra

$$\begin{aligned}S &= 2S-S\\ &= \left(1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+3\cdot 2^4+\cdots+100\cdot 2^{101}\right)-\left(1\cdot 2+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots+100\cdot 2^{100}\right)\\ &= 100\cdot 2^{101}-2-2^3-2^4-\cdots-2^{100}\\ &= 100\cdot 2^{101}-2\cdot\frac{2^{100}-1}{2-1}\\ &= 99\cdot 2^{101}+2.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\log_2\left(\sum_{k=1}^{100}\left(k\times 2^k\right)-2\right)=\log_2(99\cdot 2^{101})=101+\log_2 99.$$

Vậy $a=101$, $b=99$, $c=2$ và $a+b+c=202$.
Chọn phương án B

Câu 83. Cho hàm số $f(x)=-\ln\left(x^2+x\right)$. Tính $P=\mathrm{e}^{f(1)}+\mathrm{e}^{f(2)}+\cdots+\mathrm{e}^{f(2019)}$.

A $P=\dfrac{2020}{2019}$. B $P=\dfrac{2019}{2020}$. C $P=\mathrm{e}^{2019}$. D $P=-\dfrac{2019}{2020}$.

Lời giải.
Ta có

$$f(x)=-\ln(x^2+x)\Rightarrow \mathrm{e}^{-f(x)}=x^2+x\Leftrightarrow \mathrm{e}^{f(x)}=\frac{1}{x(x+1)}\Rightarrow \mathrm{e}^{f(x)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}P&=\mathrm{e}^{f(1)}+\mathrm{e}^{f(2)}+\cdots+\mathrm{e}^{f(2019)}\\ &=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}\right)\\ &=1-\frac{1}{2020}=\frac{2019}{2020}.\end{aligned}$$

Chọn phương án B

50 DẠNG TOÁN PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA LẦN 2

Câu 84. Cho cấp số cộng (a_n), cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $a_2 > a_1 \geq 0$, $b_2 > b_1 \geq 1$ và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(a_2) + 2 = f(a_1)$ và $f(\log_2 b_2) + 2 = f(\log_2 b_1)$. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $b_n > 2019a_n$.

Ⓐ 17. Ⓑ 14. Ⓒ 15. Ⓓ 16.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên $[0; +\infty)$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$, suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Vì $a_2 > 0$ nên $f(a_2) \geq -2$. Suy ra $f(a_1) = f(a_2) + 2 \geq 0$. (1)

Giả sử $a_1 \geq 1$. Vì $f(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$ nên $f(a_2) > f(a_1)$, suy ra $f(a_1) - 2 > f(a_1)$, vô lý. Vậy $a_1 \in [0; 1]$, do đó $f(a_1) \leq 0$. (2)

Từ (1) và (2) ta có

$$\begin{cases} f(a_1) = 0 \\ f(a_2) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1. \end{cases}$$

Vậy số hạng tổng quát của cấp số cộng (a_n) là $a_n = n - 1$.

Một cách tương tự, đặt $t_1 = \log_2 b_1$ và $t_2 = \log_2 b_2$. Từ giả thiết suy ra $f(t_2) + 2 = f(t_1)$. Vì $1 \leq b_1 < b_2$ nên $0 \leq t_1 < t_2$. Lập luận như trên ta có

$$\begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 b_1 = 0 \\ \log_2 b_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = 2. \end{cases}$$

Vậy số hạng tổng quát của cấp số nhân (b_n) là $b_n = 2^{n-1}$. Do đó

$$b_n > 2019a_n \Leftrightarrow 2^{n-1} > 2019(n-1). \qquad (3)$$

Suy ra số nguyên dương nhỏ nhất thỏa (3) là $n = 16$.

Chọn phương án D

Câu 85. Cho $\log_7 12 = x$, $\log_{12} 24 = y$ và $\log_{54} 168 = \dfrac{axy + 1}{bxy + cx}$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $S = a + 2b + 3c$.

Ⓐ $S = 4$. Ⓑ $S = 19$. Ⓒ $S = 10$. Ⓓ $S = 15$.

Lời giải.

$$\begin{cases} \log_7 12 = x \\ \log_{12} 24 = y \end{cases} \Rightarrow xy = \log_7 12 \cdot \log_{12} 24 = \log_7 24.$$

Ta có

$$\log_{54} 168 = \frac{\log_7 168}{\log_7 54} = \frac{\log_7(24 \cdot 7)}{\log_7 54} = \frac{\log_7 24 + \log_7 7}{\log_7 54} = \frac{xy + 1}{\log_7 54} \Rightarrow a = 1.$$

Lại có

$$\begin{aligned} bxy + cx = \log_7 54 &\Leftrightarrow b\log_7 24 + c\log_7 12 = \log_7 54 \\ &\Leftrightarrow \log_7(24^b \cdot 12^c) = \log_7 54 \\ &\Leftrightarrow 24^b \cdot 12^c = 54 \\ &\Leftrightarrow 3^{b+c} \cdot 2^{3b+2c} = 3^3 \cdot 2^1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 3 \\ 3b + 2c = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 \\ c = 8. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra, $P = a + 2b + 3c = 1 + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 8 = 15$.
Chọn phương án D

Câu 86. Cho a, b, c là ba số thực dương, khác 1 và $abc \neq 1$. Biết $\log_a 3 = 2$, $\log_b 3 = \dfrac{1}{4}$ và $\log_{abc} 3 = \dfrac{2}{15}$. Khi đó, giá trị của $\log_c 3$ bằng bao nhiêu?

A $\log_c 3 = \dfrac{1}{3}$. **B** $\log_c 3 = 2$. **C** $\log_c 3 = \dfrac{1}{2}$. **D** $\log_c 3 = 3$.

Lời giải.
$\log_{abc} 3 = \dfrac{2}{15} \Leftrightarrow \log_3 abc = \dfrac{15}{2} \Leftrightarrow \log_3 a + \log_3 b + \log_3 c = \dfrac{15}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} + 4 + \log_3 c = \dfrac{15}{2} \Leftrightarrow \log_3 c = 3$.
Do đó $\log_c 3 = \dfrac{1}{3}$.
Chọn phương án A

Câu 87. Cho 3 số thực dương a, b, c $(a, b, c \neq 1)$ và không cùng bằng nhau thỏa mãn $a^{\log_b c} = b^{\log_c a} = c^{\log_a b}$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $a + b + c$.

A $m = 3$. **B** $m = 2\sqrt{2}$. **C** $m = 3\sqrt[3]{3}$. **D** $m = \dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$.

Lời giải.

— Không mất tính tổng quát, ta giả sử $b \neq c$.
Khi đó từ $a^{\log_b c} = b^{\log_c a} = c^{\log_a b}$, lấy log cơ số a, ta có

$$\begin{aligned} &\log_b c = \log_c a \cdot \log_a b = \log_a c \cdot \log_a b \\ \Rightarrow\ &\log_b c = \log_c b = \log_a c \cdot \log_a b. \end{aligned}$$

Từ $\log_b c = \log_c b \Rightarrow \log_b c = \dfrac{1}{\log_b c} \Rightarrow \log_b c = -1$ (vì $b \neq c$) $\Rightarrow b = \dfrac{1}{c}$.
Khi đó $\log_a c \cdot \log_a b = -1 \Rightarrow (\log_a b)^2 = 1$ và $(\log_a c)^2 = 1$.

— Không mất tính tổng quát giả sử $\log_a b = 1$ và $\log_a c = -1$. Từ đó $a = b = \dfrac{1}{c}$.

— Vậy $a+b+c=2a+\dfrac{1}{a}$. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $2a+\dfrac{1}{a}\geq 2\sqrt{2a\cdot\dfrac{1}{a}}=2\sqrt{2}$.
Dấu bằng xảy ra khi $a=b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $c=\sqrt{2}$. Vậy $m=2\sqrt{2}$.

Chọn phương án B

Câu 88. Cho $\log_7 12=x$, $\log_{12}24=y$, $\log_{54}168=\dfrac{axy+1}{bxy+cx}$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị biểu thức $S=a+2b+3c$.

A $S=4$. **B** $S=19$. **C** $S=10$. **D** $S=15$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\log_{54}168&=3\log_{54}2+\log_{54}7+\log_{54}3=\frac{3}{\log_2 54}+\frac{1}{\log_7 54}+\frac{1}{\log_3 54}\\&=\frac{3}{1+3\log_2 3}+\frac{1}{\log_7 2+3\log_7 3}+\frac{1}{3+\log_3 2}.\quad(*)\end{aligned}$$

Lại có

$$\begin{cases}\log_7 12=x\\ \log_{12}24=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_7 12=x\\ \log_7 24=xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\log_7 2+\log_7 3=x\\ 3\log_7 2+\log_7 3=xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_7 2=xy-x\\ \log_7 3=3x-2xy.\end{cases}$$

Khi đó $\log_2 3=\log_2 7\cdot\log_7 3=\dfrac{1}{xy-x}\cdot 3x-2y=\dfrac{3-2y}{y-1}$.

Suy ra $\log_3 2=\dfrac{y-1}{3-2y}$.

Thay vào $(*)$ ta được

$$\begin{aligned}\log_{54}168&=\frac{3}{1+3\frac{3-2y}{y-1}}+\frac{1}{xy-x+3(3x-2xy)}+\frac{1}{3+\frac{y-1}{3-2y}}\\&=\frac{3(y-1)}{y-1+9-6y}+\frac{1}{8x-5xy}=\frac{3-2y}{8-5y}\\&=\frac{3(y-1)}{8-5y}+\frac{3-2y}{8-5y}+\frac{1}{x(8-5y)}=\frac{xy+1}{8x-5xy}.\end{aligned}$$

Suy ra $a=1$, $b=-5$, $c=8$. Khi đó S=a+2b+3c=15.

Chọn phương án D

Câu 89. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3(x+y+2)=1+\log_3\left(\dfrac{x-1}{y}+\dfrac{y-1}{x}\right)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{a}{b}$ với a, $b\in\mathbb{N}$ và $(a,b)=1$. Hỏi $a+b$ bằng bao nhiêu?

A 2. **B** 9. **C** 12. **D** 13.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\log_3(x+y+2) = 1 + \log_3\left(\frac{x-1}{y} + \frac{y-1}{x}\right)\\
\Leftrightarrow\ &\log_3(x+y+2) = \log_3\left[3\left(\frac{x-1}{y} + \frac{y-1}{x}\right)\right]\\
\Leftrightarrow\ &x+y+2 = 3\left(\frac{x-1}{y} + \frac{y-1}{x}\right)\\
\Leftrightarrow\ &xy(x+y+2) = 3\left(x^2+y^2-x-y\right). \quad (*)
\end{aligned}$$

Đặt $S = x+y > 0,\ P = xy > 0,\ (*) \Leftrightarrow P(S+2) = 3\left(S^2 - S - 2P\right) \Leftrightarrow P = \dfrac{3S^2-3S}{S+8}$.

Lại có $0 < P \le \dfrac{S^2}{4}$, từ đó suy ra $0 < \dfrac{3S^2-3S}{S+8} \le \dfrac{S^2}{4} \Rightarrow S > 1$. (do $S > 0$)

Ta có $\dfrac{x^2+y^2}{xy} = \dfrac{S^2-2P}{P} = \dfrac{S^2+2S+6}{3S-3} = f(S)$.

$f'(S) = \dfrac{3S^2-6S-24}{(3S-3)^2}$,

$f'(S) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S = 4 \\ S = -2 \notin (1;+\infty) \end{array}\right.$.

S	1		4		$+\infty$
$f'(S)$		$-$	0	$+$	
$f(S)$		$\searrow$	$\dfrac{10}{3}$	$\nearrow$	

Suy ra $f(S) \ge f(4) = \dfrac{10}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ và các hoán vị.

Vậy $\begin{cases} a = 10 \\ b = 3 \end{cases}$ nên $a+b = 13$.

Chọn phương án D

Câu 90. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a \ge b > 1$. Biết rằng $P = \dfrac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \dfrac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất khi $b = a^k$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $k \in \left(0; \dfrac{3}{2}\right)$. **B** $k \in (-1; 0)$. **C** $k \in \left(\dfrac{3}{2}; 2\right)$. **D** $k \in (2; 3)$.

Lời giải.

Ta có $P = 1 + \log_a b + \sqrt{1 - \log_a b}$. Đặt $t = \sqrt{1-\log_a b} \Rightarrow t \in (0;1]$ và $P = f(t) = -t^2 + t + 2$.

Do tam thức $-t^2+t+2$ có hoành độ đỉnh $t = \dfrac{1}{2} \in (0;1]$ nên $\max\limits_{(0;1]} f(t) = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Khi đó $\log_a b = \dfrac{3}{4} \Rightarrow k = \dfrac{3}{4}$.

Chọn phương án A

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. D	4. D	5. C	6. C	7. B	8. D	9. D	10. B
11. B	12. B	13. D	14. A	15. D	16. A	17. D	18. B	19. C	20. A
21. A	22. C	23. A	24. B	25. D	26. C	27. A	28. A	29. B	30. C
31. D	32. D	33. B	34. B	35. D	36. D	37. B	38. C	39. D	40. A
41. D	42. B	43. A	44. D	45. D	46. B	47. A	48. A	49. A	50. C
51. B	52. C	53. C	54. D	55. A	56. D	57. C	58. A	59. C	60. A
61. C	62. D	63. C	64. A	65. C	66. B	67. C	68. A	69. D	70. A
71. A	72. B	73. A	74. D	75. B	76. A	77. D	78. A	79. A	80. D
81. D	82. B	83. B	84. D	85. D	86. A	87. B	88. D	89. D	90. A

DẠNG 30. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ và trục hoành là

(A) 3. (B) 0. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Chọn phương án (A)

Câu 1. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$ với trục hoành là

(A) 3. (B) 2. (C) 4. (D) 1.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\begin{aligned} & x^4 - x^2 + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x^2 - 4)(x^2 - 1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 2 \\ x = \pm 1. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục hoành là 4.

Chọn phương án (C)

Câu 2. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 3$ và đường thẳng $y = x$.

(A) 1. (B) 0. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - 3x + 3 = x \Leftrightarrow x^3 - 3x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{-1 + \sqrt{13}}{2} \\ x = \dfrac{-1 - \sqrt{13}}{2}. \end{array}\right.$$

Phương trình có ba nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 3$ cắt đường thẳng $y = x$ tại ba điểm phân biệt.

Chọn phương án (C)

Câu 3. Hai đồ thị của hai hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 2x - 1$ và $y = 3x^2 - 2x - 1$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$-x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 3x^2 - 2x - 1 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Vậy hai đồ thị của hai hàm số đã cho có 3 điểm chung.

Chọn phương án (D)

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) - 1 = m$ có đúng hai nghiệm.

(A) $-2 < m < -1$. (B) $m = -2, m \geq -1$. (C) $m > 0, m = -1$. (D) $m = -2, m > -1$.

Lời giải.

Ta có $f(x) - 1 = m \Leftrightarrow f(x) = m + 1$.

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(x) - 1 = m$ có đúng hai nghiệm khi

$$\left[\begin{array}{l} m + 1 = -1 \\ m + 1 > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m > -1. \end{array}\right.$$

Chọn phương án (D)

Câu 5. Đồ thị của hàm số $y = x^4 + 3x^2 - 4$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

(A) 4. (B) 2. (C) 3. (D) 0.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa đồ thị và trục hoành là

$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = -4 \quad (\text{vô nghiệm}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Vậy đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 2 điểm.

Chọn phương án (B)

Câu 6. Gọi M và N là giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ và $y = -x^2 + 4$. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN là

A $(1;0)$. **B** $(0;2)$. **C** $(2;0)$. **D** $(0;1)$.

Lời giải.

Phương pháp: Giải phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số. Tìm tọa độ giao điểm M và N. Tìm tọa độ trung điểm I của MN.

Cách giải: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ và $y = -x^2 + 4$ là $x^4 - 2x^2 + 2 = -x^2 + 4 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = -1 \\ x^2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2}. \end{array}\right.$

— $x = \sqrt{2} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow M\left(\sqrt{2}; 2\right)$.

— $x = -\sqrt{2} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow M\left(-\sqrt{2}; 2\right)$.

Tọa độ trung điểm I của MN là $(0;2)$.

Chọn phương án B

Câu 7. Số giao điểm của đường cong $y = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$ và đường thẳng $y = 1 - x$ bằng.

A 0. **B** 2. **C** 1. **D** 3.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 1 - x \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2x + 3 = 0 \quad \text{(vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0.$$

Chọn phương án C

Câu 8. Đường thẳng $y = 3x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + 4x + 2$ tại điểm E có tọa độ

A $E(2;0)$. **B** $E(0;2)$. **C** $E(1;0)$. **D** $E(0;1)$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $3x + 2 = x^3 - x^2 + 4x + 2 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy điểm E có tọa độ $(0;2)$.

Chọn phương án B

Câu 9. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$ với trục Ox là:

A 1. **B** 0. **C** 3. **D** 2.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-2x^3 - 3x^2 + 1 = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow$ Số giao điểm là 2.

Chọn phương án D

Câu 10. Cho hàm số $y = (x-3)\left(x^2 - 2x + 3\right)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A (C) cắt trục hoành tại hai điểm. **B** (C) cắt trục hoành tại ba điểm.

C (C) không cắt trục hoành. **D** (C) cắt trục hoành tại một điểm.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là:

$$(x-3)\left(x^2-2x+3\right)=0 \Leftrightarrow x=3$$

Do đó (C) cắt trục hoành tại một điểm.

Chọn phương án D

Câu 11. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị $(\mathscr{C})$. Đồ thị $(\mathscr{C})$ đi qua điểm nào?

A $M(-5;2)$. **B** $M(0;-1)$. **C** $M\left(-4;\dfrac{7}{2}\right)$. **D** $M(-3;4)$.

Lời giải.

Thay tọa độ điểm $M(0;-1)$ ta thấy thỏa mãn phương trình. Vậy điểm $M(0;-1)$ thuộc đồ thị $(\mathscr{C})$.

Chọn phương án B

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+5x^2-mx+3$ đi qua điểm $A(-1;9)$?

A $m=\dfrac{2}{3}$. **B** $m=\dfrac{-2}{3}$. **C** $m=2$. **D** $m=\dfrac{-3}{2}$.

Lời giải.

A thuộc đồ thị hàm số đã cho $\Leftrightarrow -1+5+m+3=9 \Leftrightarrow m=2$.

Chọn phương án C

Câu 13. Điểm nào dưới đây thuộc giao điểm của $(P)\colon y=x^2-x+1$ và đường thẳng $d\colon y=2x-1$.

A $P(3;5)$. **B** $N(2;3)$. **C** $M(1;-1)$. **D** $Q(0;1)$.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của d và (P) là nghiệm phương trình $x^2-x+1=2x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=1\\ x=2\Rightarrow y=3.\end{array}\right.$

Vậy điểm $N(2;3)$ thuộc giao điểm của d và (P).

Chọn phương án B

Câu 14. Tìm số giao điểm của đường cong $y=x^3-2x^2+2x+1$ và đường thẳng $y=1-x$.

A 1. **B** 2. **C** 3. **D** 0.

Lời giải.

Số giao điểm cần tìm là số nghiệm của phương trình

$$x^3-2x^2+2x+1=1-x \Leftrightarrow x\left[(x+1)^2+2\right]=0.$$

Phương trình hoành độ giao điểm chỉ có một nghiệm nên số giao điểm cần tìm là 1.

Chọn phương án A

Câu 15. Cho hàm số $y=x^3+x+2$ có đồ thị (C). Tìm số giao điểm của (C) và đường thẳng $y=2$.

A 1. **B** 0. **C** 3. **D** 2.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng $y=2$ là $x^3+x+2=2 \Leftrightarrow x=0$.

Vậy số giao điểm của (C) và đường thẳng $y=2$ là 1.

Chọn phương án A

B MỨC ĐỘ 2

Câu 16. Cho hai hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. Đồ thị hàm số trên cắt hai trục tọa độ tại hai điểm A, B phân biệt. Tính độ dài đoạn AB.

(A) $\sqrt{2}$. (B) 2. (C) 4. (D) $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số cắt trục Ox tại $A(-2;0)$

Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại $B(0;-2)$

$\overrightarrow{AB}=(2;-2)$. Độ dài đoạn AB là $AB=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$.

Chọn phương án (D)

Câu 17. Tìm tọa độ giao điểm I của đồ thị hàm số $y=4x^3-3x$ với đường thẳng $y=-x+2$.

(A) $I(2;2)$. (B) $I(2;1)$. (C) $I(1;1)$. (D) $I(1;2)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d: $4x^3-3x=-x+2 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1$.

Vậy tọa độ giao điểm $I(1;1)$.

Chọn phương án (C)

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x+2$ cắt đường thẳng $y=m-1$ tại 3 điểm phân biệt.

(A) $1\le m<5$. (B) $1<m<5$. (C) $1<m\le 5$. (D) $0<m<4$.

Lời giải.

⋆ Đạo hàm $y'=3x^2-3$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow y=4 \\ x=1 \Rightarrow y=0. \end{array}\right.$

⋆ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, theo đề, ta có $0<m-1<4 \Leftrightarrow 1<m<5$.

Chọn phương án (B)

Câu 19. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ và trục Ox bằng

(A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ và trục Ox $(y=0)$ bằng số nghiệm của phương trình

$$x^3-3x+1=0.$$

Phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt.

Chọn phương án C

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 + 2 - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

A $0 < m < 1$. **B** $1 < m < 2$. **C** $-2 < m < 0$. **D** $-2 < m < 2$.

Lời giải.

Ta có $x^3 - 3x^2 + 2 - m = 0 \Leftrightarrow m = x^3 - 3x^2 + 2$ (1).

Xét hàm $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x$; $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Chọn phương án D

Câu 21. Đồ thị hàm số $y = -\dfrac{x^4}{2} + x^2 + \dfrac{3}{2}$ cắt trục hoành tại mấy điểm?

A 0. **B** 2. **C** 4. **D** 3.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm là $-\dfrac{x^4}{2} + x^2 + \dfrac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3$ hoặc $x^2 = -1$ (vô nghiệm).

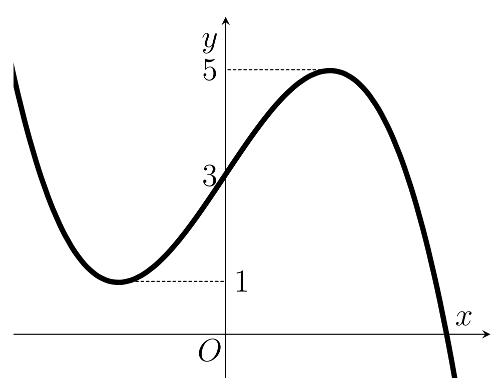
$x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$. Vậy đồ thị hàm số $y = -\dfrac{x^4}{2} + x^2 + \dfrac{3}{2}$ cắt trục hoành tại hai điểm.

Chọn phương án B

Câu 22.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Phương trình $2f(x) - 5 = 0$ có bao nhiêu nghiệm âm?



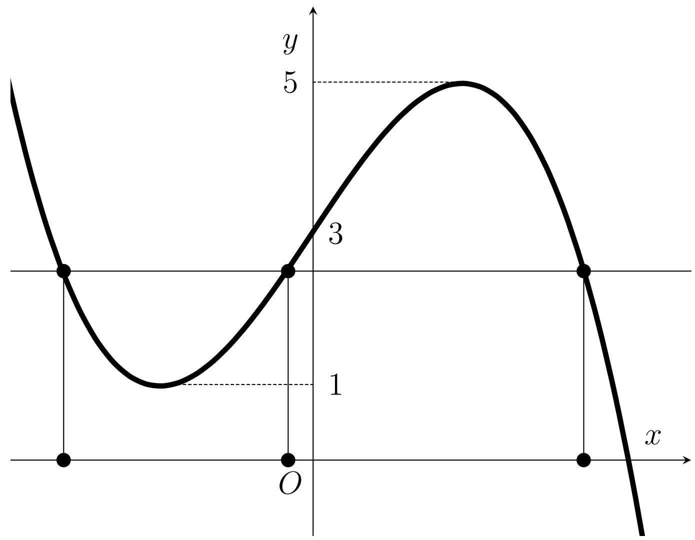
A 0. **B** 2. **C** 1. **D** 3.

Lời giải.

Phương pháp:

Tìm giao điểm của đường thẳng $y = \dfrac{5}{2}$ với đồ thị hàm số và nhận xét tính chất nghiệm.

Cách giải:



Ta có $2f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{5}{2}$.

Nghiệm của phương trình chính là hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = \dfrac{5}{2}$ với đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Quan sát đồ thị ta thấy đường thẳng $y = \dfrac{5}{2}$ cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm phân biệt, trong đó có 2 điểm có hoành độ âm và 1 điểm có hoành độ dương.

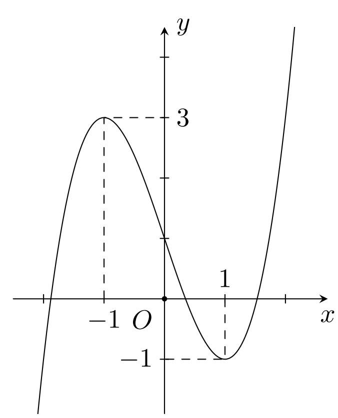
Vậy phương trình có 2 nghiệm âm.

Chọn phương án B

Câu 23.

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

A 3. B 1. C 2. D 0.



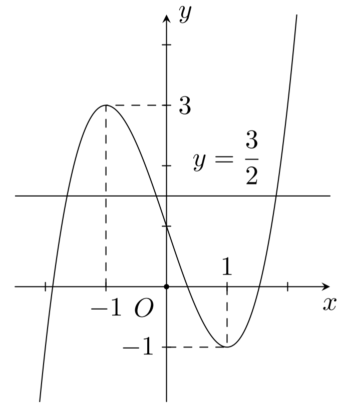
Lời giải.

Ta có $2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{3}{2} \quad (*)$.

Số nghiệm của phương trình $(*)$ bằng số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \dfrac{3}{2}$.

Dựa vào hình vẽ, hai đồ thị cắt nhau tại 3 điểm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.



Chọn phương án A

Câu 24. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $(d): y = x + 1$ và đường cong $(C): y = \dfrac{2x+4}{x-1}$. Hoành độ trung điểm I của đoạn thẳng MN bằng?

A 1. **B** 2. **C** $\dfrac{5}{2}$. **D** $-\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$x + 1 = \dfrac{2x+4}{x-1} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 5x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{6} \\ x = 1 - \sqrt{6} \end{array}\right.$.

Suy ra hoành độ trung điểm của đoạn MN là $x_I = \dfrac{1 + \sqrt{6} + 1 - \sqrt{6}}{2} = 1$.

Chọn phương án A

Câu 25. Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Với giá trị nào của m để đường thẳng $y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt?

A $m < -8$. **B** $-8 < m < 8$. **C** $\forall m \in \mathbb{R}$. **D** $m > 8$.

Lời giải.

ĐKXĐ : $x \neq -1$

Xét phương trình có hoành độ giao điểm $\dfrac{x-1}{x+1} = -x + m \qquad (*)$

Với $x \neq -1$ thì $(*) \Leftrightarrow x - 1 = (x+1)(-x+m)$

$x - 1 = -x^2 + (m-1)x + m \Leftrightarrow x^2 - (m-2)x - m - 1 = 0 \qquad (**)$

Đường thẳng $y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(**)$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-2)^2 + 4(m+1) > 0 \\ (-1)^2 - (m-2)(-1) - m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 8 > 0 \\ -2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m \in \mathbb{R}.$$

Vậy $m \in \mathbb{R}$.

Chọn phương án C

Câu 26. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = x - 1$. Số giao điểm của (C) và d là

(A) 1. (B) 3. (C) 0. (D) 2.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$2x^3-3x^2+1=x-1 \Leftrightarrow (x-1)\left(2x^2-x-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{4} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{4} \end{array}\right.$$

Vậy số giao điểm là 3.

Chọn phương án (B)

Câu 27. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ với đường thẳng $y=2x+3$ là

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\begin{aligned} &\frac{2x+1}{x-1}=2x+3 \\ \Leftrightarrow\ &2x+1=(2x+3)(x-1)\,(\text{do } x=1 \text{ không là nghiệm của phương trình}) \\ \Leftrightarrow\ &2x^2-x-4=0 \\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{33}}{4} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{33}}{4}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy đường thẳng $y=2x+3$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm.

Chọn phương án (A)

Câu 28. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^2\left|x^2-4\right|$ với đường thẳng $y=3$ là

(A) 8. (B) 2 . (C) 4. (D) 6 .

Lời giải.

Phương tình hoành độ giao điểm $x^2\left|x^2-4\right|=3\,(1)$

nếu $x^2-4\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -2 \cup 2\leq x$.

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^2(x^2-4)=3 \Leftrightarrow x^4-4x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=2+\sqrt{7} \\ x^2=2-\sqrt{7}\,(\text{ loại }) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2+\sqrt{7}}$.

nếu $x^2-4<0 \Leftrightarrow -2<x<2$.

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^2(x^2-4)=-3 \Leftrightarrow x^4-4x^2+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=3 \\ x^2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{3} \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình có 6 nghiệm.

Chọn phương án (D)

Câu 29. Biết rằng đường thẳng $d: y=3x+m$ (với m là số thực) tiếp xúc với đồ thị hàm số $(C): y=x^2-5x-8$. Tìm tọa độ tiếp điểm của d và (C).

Ⓐ $(4;-12)$. Ⓑ $(-4;28)$. Ⓒ $(1;-12)$. Ⓓ $(-1;-2)$.

Lời giải.

$y=3x+m \Rightarrow y'=3$.

$y=x^2-5x-8 \Rightarrow y'=2x-5$.

d tiếp xúc $(C) \Leftrightarrow \begin{cases}2x-5=3\\x^2-5x-8=3x+m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\m=-24\end{cases}$.

Vậy tọa độ tiếp điểm là $(4;-12)$.

Chọn phương án Ⓐ

Câu 30. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+5}$ và đường thẳng $y=x-1$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Gọi $I(a;b)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB. Tính giá trị của biểu thức $T=2a^2+b$.

Ⓐ $T=9$. Ⓑ $T=5$. Ⓒ $T=0$. Ⓓ $T=2$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\begin{aligned}\frac{2x-1}{x+5}=x-1 &\Leftrightarrow 2x-1=(x-1)(x+5)\\ &\Leftrightarrow 2x-1=x^2+4x-5\\ &\Leftrightarrow x^2+2x-4=0 \qquad (*)\end{aligned}$$

Gọi $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, với x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình $(*)$.

Tọa độ trung điểm $I(a;b)$ của đoạn AB là: $\begin{cases}a=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{S}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1\\b=a-1=-2\end{cases}$.

Do đó: $T=2a^2+b=2(-1)^2-2=0$.

Chọn phương án Ⓒ

C MỨC ĐỘ 3

Câu 31. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x+1}$. Xác định m để đường thẳng $y=mx+m-1$ luôn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh của đồ thị.

Ⓐ $m<1$. Ⓑ $m>0$. Ⓒ $m<0$. Ⓓ $m=0$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x+2}{2x+1}=mx+m-1 \Rightarrow 2mx^2+3(m-1)x+m-3=0$ (1).

Để đường thẳng luôn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh của đồ thị thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1<-\dfrac{1}{2}<x_2$ (2).

(1) có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases}a\neq 0\\\Delta>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2m\neq 0\\m^2+6m+9>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 0\\m\neq -3.\end{cases}$

Theo định lý Vi-et, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{3(m-1)}{2m}\\x_1x_2=\dfrac{m-3}{2m}.\end{cases}$

Do đó

$$\begin{aligned}(2) \;&\Leftrightarrow\; (2x_1+1)(2x_2+1)<0\\ &\Leftrightarrow\; 4x_1x_2+2(x_1+x_2)+1<0\\ &\Leftrightarrow\; 4\cdot\frac{m-3}{2m}+2\cdot\left(-\frac{3(m-1)}{2m}\right)+1<0\\ &\Leftrightarrow\; \frac{4m-12-6m+6+2m}{2m}<0\\ &\Leftrightarrow\; -\frac{6}{2m}<0\\ &\Leftrightarrow\; m>0.\end{aligned}$$

Chọn phương án B

Câu 32. Cho hàm số $y=x^3+x^2+(m+1)x+1$ và $y=2x+1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in(-10;10)$ để hai đồ thị của hai hàm số trên cắt nhau tại ba điểm phân biệt.

A 9. B 10. C 1. D 11.

Lời giải.

Giả sử hàm số $y=x^3+x^2+(m+1)x+1$ có đồ thị (C) và $d: y=2x+1$

Hoành độ giao điểm của (C) và d là nghiệm PT: $x^3+x^2+(m+1)x+1=2x+1$ (1)

$\Leftrightarrow x^3+x^2+(m-1)x=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2+x+m-1=0(2)\end{array}\right.$

Đặt $f(x)=x^2+x+m-1$

d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt $x\neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ f(0)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5-4m>0\\ m-1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<\dfrac{5}{4}\\ m\neq 1\end{cases}$

Kết hợp với điều kiện $m\in(-10;10)$ ta được $m\in\left(-10;\dfrac{5}{4}\right)\setminus\{1\}$

Do m nguyên nên có 10 giá trị thỏa mãn.

Chọn phương án B

Câu 33. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=2x^3-3(m+3)x^2+18mx-8$ tiếp xúc với trục hoành?

A 2. B 1. C 3. D 0.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$\begin{cases}2x^3-3(m+3)x^2+18mx-8=0 \text{ (1)}\\ 6x^2-6(m+3)x+18m=0 \text{ (2)}.\end{cases}$

Từ (2) ta có: $x^2-(m+3)x+3m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=m.\end{array}\right.$

Với $x=3$ ta thay vào (1) ta có $54-27(m+3)+54m-8=0 \Leftrightarrow 27m=35 \Leftrightarrow m=\dfrac{35}{27}$.

Với $x = m$ ta thay vào (1) ta có $2m^3 - 3m^2(m+3) + 18m^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow m^3 - 9m^2 + 8 = 0$

$\Leftrightarrow (m-1)\left(m^2 - 8m - 8\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 4 - 2\sqrt{6} \\ m = 4 + 2\sqrt{6}. \end{array}\right.$

Vậy chỉ có một giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn điều kiện đề bài là $m = 1$.

Chọn phương án B

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm của tham số m sao cho hàm số $y = -x^4 + (2m-3)\,x^2 + m$ nghịch biến trên đoạn $[1;2]$?

(A) 1. (B) 2. (C) 4. (D) Vô số.

Lời giải.

Ta có $y' = x[-x^2 + 2\,(2m-3)]$. Do đó, hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn $[1;2]$ khi và chỉ khi

$$-x^2 + 2\,(2m-3) \leq 0,\ \forall x \in [1;2]\,.$$

Trường hợp 1: $\Delta' = 2\,(2m-3) < 0$. Chỉ có giá trị $m = 1$ thỏa mãn. Trường hợp 2: $\begin{cases} \Delta' = 2\,(2m-3) \geq 0 \\ -1 + 2\,(2m-3) < 0 \end{cases}$.

Không có giá trị m nguyên dương thỏa mãn.

Vậy có duy nhất 1 giá trị $m = 1$ thỏa yêu cầu.

Chọn phương án A

Câu 35. Cho hàm số $y = mx^3 - x^2 - 2x + 8m$ có đồ thị (C_m). Tìm tất cả giá trị tham số m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

(A) $m \in \left[-\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right]$. (B) $m \in \left(-\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right)$.

(C) $m \in \left(-\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right) \setminus \{0\}$. (D) $m \in \left(-\infty;\frac{1}{2}\right) \setminus \{0\}$.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với trục hoành là

$mx^3 - x^2 - 2x + 8m = 0 \Leftrightarrow (x+2)[mx^2 - (2m+1)x + 4m] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2 = 0 \\ mx^2 - (2m+1)x + 4m = 0 \quad (1) \end{array}\right.$

Để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt thì (1) có hai nghiệm phân biệt khác -2.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = -12m^2 + 4m + 1 > 0 \\ 4m + (2m+1)2 + 4m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\frac{1}{6} < m < \frac{1}{2} \end{cases}$

Chọn phương án C

Câu 36. Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B và $AB \leq 4$?

(A) 1. (B) 6. (C) 2. (D) 7.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{2x-1}{x+1} = x + m \Leftrightarrow 2x - 1 = (x+1)\,(x+m) \Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + m + 1 = 0 \text{ (1)}.$$

Nhóm: PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA

(Ta có $x = -1$ không là nghiệm phương trình (1).)
Đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \neq 0 \\ \Delta = (m-1)^2 - 4(m+1) = m^2 - 6m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 + 2\sqrt{3} \\ m < 3 - 2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3 + 2\sqrt{3} \\ m < 3 - 2\sqrt{3} \end{array}\right. (*).$$

Gọi tọa độ giao điểm $A(x_1; x_1 + m), B(x_2; x_2 + m)$ với x_1, x_2 là nghiệm của (1).
Khi đó $AB = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 6m - 3} \leq 4 \Leftrightarrow m^2 - 6m - 19 \leq 0 \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{7} \leq m \leq 3 + 2\sqrt{7}$.
Kết hợp với điều kiện $(*)$, ta được $\left[\begin{array}{l} 3 + 2\sqrt{3} < m < 3 + 2\sqrt{7} \\ 3 - 2\sqrt{7} \leq m \leq 3 - 2\sqrt{3}. \end{array}\right.$
Mà m nguyên dương nên $m = 7 \vee m = 8$.
Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn phương án A

Câu 37. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d_m\colon y = mx + 1$ cắt đồ thị $(C)\colon y = x^3 - x^2 + 1$ tại 3 điểm A, $B(0; 1)$ và C phân biệt sao cho tam giác AOC vuông tại O.

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.
Phương trình hoành độ giao điểm của d_m và (C) là:

$$x^3 - x^2 + 1 = mx + 1 \Leftrightarrow x(x^2 - x - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - x - m = 0. \end{array}\right.$$

Đường thẳng d_m cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt A, $B(0; 1)$ và C.
$\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2 - x - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.
$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 + 4m > 0 \\ -m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{4} \\ m \neq 0. \end{cases}$
Khi đó: $A(x_1; mx_1 + 1)$ và $C(x_2; mx_2 + 1)$ Theo Vi-et: x_1 và x_2 là nghiệm phương trình $x^2 - x - m = 0$ nên ta có : $x_1 + x_2 = 1$ và $x - 1x_2 = -m$.
$\triangle AOC$ vuông tại O.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1x_2 + (mx_1 + 1)(mx_2 + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (m^2 + 1)x_1x_2 + m(x_1 + x_2) + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (m^2 + 1)(-m) + m + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow -m^3 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow m = 1. \text{(Thỏa mãn điều kiện)} \end{aligned}$$

Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn bài toán.
Chọn phương án B

Câu 38. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt.

(A) $m \in (-\infty; -4)$.
(B) $m \in (-4; 0)$.
(C) $m \in (0; +\infty)$.
(D) $m \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2$. Ta có

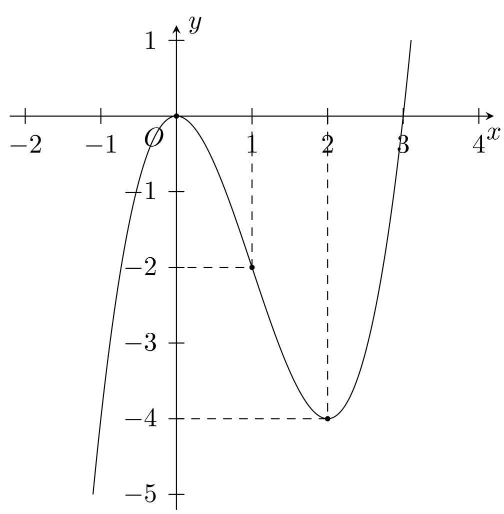
$f'(x) = 3x^2 - 6x$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$



Đồ thị hàm số $y = m$ là đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng m.

Dựa vào đồ thị ta thấy, hai đồ thị cắt nhau tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi $-4 < m < 0$.

Chọn phương án (B)

Câu 39. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d : y = x + m$. Giá trị của tham số m để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = \sqrt{10}$ là

(A) $m = -1$ hoặc $m = 6$.
(B) $0 \leq m \leq 5$.
(C) $m = 0$ hoặc $m = 6$.
(D) $m = 0$ hoặc $m = 7$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d là:

$\dfrac{2x+1}{x+1} = x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 + (m-1)x + m - 1 = 0 \quad (1) \end{cases}$

Khi đó d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - 4(m-1) > 0 \\ (-1)^2 - (m-1) + m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 5 \end{array}\right. (*)$

Ta có:

$A(x_1; x_1+m), B(x_2; x_2+m) \Rightarrow \overline{AB} = (x_2 - x_1; x_2 - x_1) \Rightarrow AB = \sqrt{2(x_2-x_1)^2} = \sqrt{2}\,|x_2 - x_1|$

Và $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - m \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases}$. Từ đây ta có:

$AB = \sqrt{10} \Leftrightarrow |x_2 - x_1| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2 = 5$

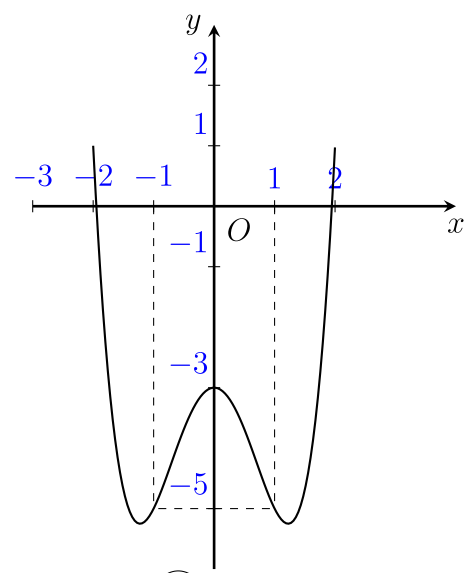
$\Leftrightarrow (1-m)^2 - 4(m-1) = 5 \Leftrightarrow m^2 - 6m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 6 \end{array}\right.$ (thỏa mãn) $(*)$.

Vậy $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 6 \end{array}\right.$

Chọn phương án C

Câu 40.

Đồ thị sau đây là của hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 3$. Với giá trị nào của m thì phương trình $x^4 - 3x^2 - 3 = m$ có 3 nghiệm phân biệt



A $m = -4$.   B $m = -3$.   C $m = 0$.   D $m = -5$.

Lời giải.

Phương pháp

Số nghiệm của phương trình đã cho là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 3$ và đường thẳng $y = m$. Dựa vào đồ thị hàm số để xác định m thỏa mãn bài toán.

Cách giải:

Số nghiệm của phương trình đã cho là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 3$ và đường thẳng $y = m$. Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 3$ tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m = -3$.

Chọn phương án (B)

Câu 41. Đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 2x - 1$ và đồ thị hàm số $y = 3x^2 - 2x - 1$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

(A) 0. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

Phương pháp

Số nghiệm của hai đồ thị hàm số là số giao điểm của phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị.

Giải phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số.

Cách giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là:

$-x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 3x^2 - 2x - 1$

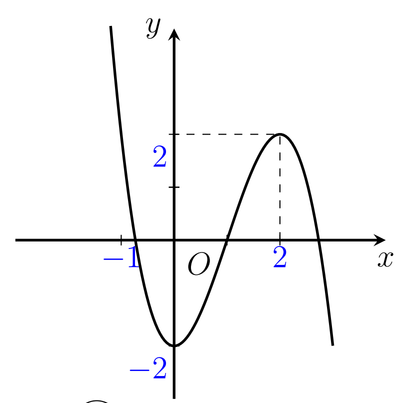
$$\Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Hai đồ thị hàm số có 3 điểm chung.

Chọn phương án (C)

Câu 42.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình bên. Phương trình $f(x) = 1$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt nhỏ hơn 2?



(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Phương pháp

Số nghiệm của phương trình $f(x) = 1$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 1$.

Dựa vào đồ thị hàm số để biện luận số nghiệm của phương trình.

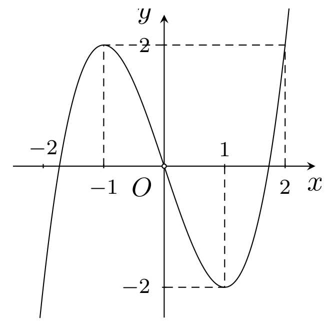
Cách giải:

Số nghiệm của phương trình $f(x) = 1$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 1$.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt trong đó có hai điểm có hoành độ nhỏ hơn 2.

Chọn phương án C

Câu 43.
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right) = m$ có nghiệm $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.



A 5.
B 3.
C 2.
D 4.

Lời giải.
Ta có với $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \cos x \in (-1; 0] \Rightarrow f(\cos x) \in (0; 2] \Rightarrow \sqrt{2f(\cos x]} \in [0; 2)$
khi đó $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right) \in [-2; 2)$.
Do vậy phương trình đã cho có nghiệm $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ khi và chỉ khi $m \in [-2; 2)$.
Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.
Chọn phương án D

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = 2x^3 - (2+m)x + m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

A $m > -\frac{1}{2}$.
B $m > -\frac{1}{2}, m \neq 4$.
C $m > \frac{1}{2}$.
D $m \leq \frac{1}{2}$.

Lời giải.
Phương trình hoành độ giao điểm

$$\begin{aligned}
& 2x^3 - (2+m)x + m = 0 \\
\Leftrightarrow & (x-1)\left(2x^2 + 2x - m\right) = 0 \\
\Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 2x^2 + 2x - m = 0 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ 2x^2 + 2x - m = 0. \quad (1) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Đặt $f(x) = 2x^2 + 2x - m = 0$.
Để đồ thị của hàm số $y = 2x^3 - (2+m)x + m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1.

Tức là $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2m > 0 \\ 4 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m \neq 4. \end{cases}$

Chọn phương án B

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 + 3x^2 - 2 = m$ có hai nghiệm phân biệt.

A $m \in (-\infty; -2]$.
B $m \notin [-2; 2]$.
C $m \in [2; +\infty)$.
D $m \in \{-2; 2\}$.

Lời giải.

Phương pháp:

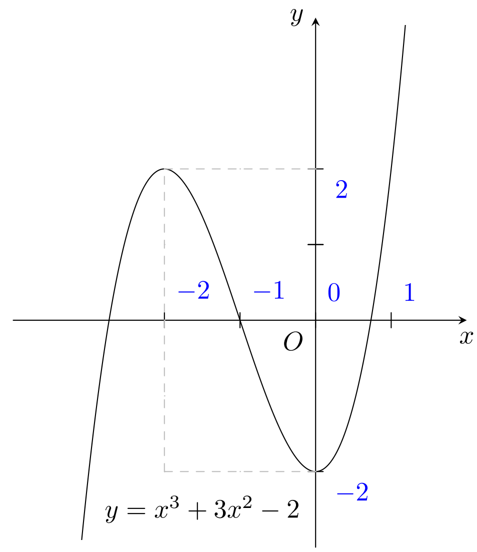
+) Số nghiệm của phương trình $f(x) = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m$.

+) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$ sau đó suy ra giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách giải:

Số nghiệm của phương trình $x^3 + 3x^2 - 2 = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ và đường thẳng $y = m$.

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$. Ta có đồ thị hàm số như hình vẽ:



Quan sát đồ thị hàm số ta có: đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -2 \end{array}\right.$.

Chú ý khi giải: Để làm bài nhanh hơn, các em có thể vẽ BTT thay cho đồ thị hàm số.

Chọn phương án D

D MỨC ĐỘ 4

Câu 46. Cho hàm số $y = \dfrac{x}{1-x}(C)$. Tìm m để đường thẳng $d: y = mx - m - 1$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt M, N sao cho $AM^2 + AN^2$ đạt giá trị nhỏ nhất với $A(-1; 1)$.

A $m = 2$. **B** $m = 0$. **C** $m = 1$. **D** $m = -1$.

Lời giải.

Phương pháp:

Xét phương trình hoành độ giao điểm, áp dụng định lí Vi-ét.

Cách giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$\frac{x}{1-x} = mx - m - 1, (x \neq 1) \Leftrightarrow x = mx - m - 1 - mx^2 + mx + x$$
$$\Leftrightarrow mx^2 - 2mx + m + 1 = 0 \quad (1)$$

Để (C) cắt d tại 2 điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ m \cdot 1^2 - 2m.1 + m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - m(m+1) > 0 \\ 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Khi đó, giả sử x_1, x_2 là nghiệm của (1), áp dụng định lsy Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 x_2 = \dfrac{m+1}{m}. \end{cases}$

Tọa độ giao điểm là: $A(x_1; mx_1 - m - 1), B(x_2; mx_2 - m - 1) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} = (x_1 + 1; mx_1 - m - 2) \\ \overrightarrow{AN} = (x_2 + 1; mx_2 - m - 2). \end{cases}$

Gọi I là trung điểm của $MN \Rightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ y_I = \dfrac{mx_1 - m - 1 + mx_2 - m - 1}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow I(1; -1).$

Ta có:

$$\begin{aligned} AM^2 + AN^2 &= \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IN}\right)^2 \\ &= 2AI^2 + 2\overrightarrow{AI}.\left(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN}\right) + IM^2 + IN^2 \\ &= 2AI^2 + \frac{1}{2}MN^2. \end{aligned}$$

Do vậy, $(AM^2 + AN^2)_{\min}$ khi và chỉ khi $MN_{\min}$.
Ta có: $\overrightarrow{MN} = (x_2 - x_1; mx_2 - mx_1)$, suy ra

$$\begin{aligned} \sqrt{(1 + m^2)(x_2 - x_1)^2} &= \sqrt{(1 + m)^2\left((x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2\right)} \\ &= \sqrt{(1 + m^2)\left(4 - \frac{4(m + 1)}{n}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{-4(1 + m^2)}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{4}{(-m)} + (-4m)} \\ &\geq \sqrt{2.\sqrt{\frac{4}{-m}.(-4m)}} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Suy ra $MN_{\min} = 2\sqrt{2}$ khi và chỉ khi $\dfrac{4}{-m} = -4m \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1\,(\text{ktm}). \\ m = -1\,(\text{tm}). \end{array}\right.$

Vậy để $(AM^2 + AN^2)_{\min}$ thì $m = -1$.
Chọn phương án D

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x) = 2^{2018}x^3 + 3.2^{2018}x^2 - 2018$ có đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3. Tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{1}{f'(x_1)} + \dfrac{1}{f'(x_2)} + \dfrac{1}{f'(x_3)}$.

A $P = 0$. **B** $P = 2^{2018}$. **C** $P = -2018$. **D** $P = 3.2^{2018} - 1$.

Lời giải.

Phương pháp:

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Cách giải:

Đồ thị hàm số $y = f(x) = 2^{2018}x^3 + 3.2^{2018}x^2 - 2018$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3.

$\Rightarrow f(x) = 2^{2018}(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

$f'(x) = 2^{2018}\left[(x - x_2)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_2)\right]$.

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(x_1) = 2^{2018}(x - x_2)(x - x_3) \\ f'(x_2) = 2^{2018}(x - x_1)(x - x_3) \\ f'(x_3) = 2^{2018}(x - x_1)(x - x_2). \end{cases}$$

Ta có $P = \dfrac{1}{f'(x_1)} + \dfrac{1}{f'(x_2)} + \dfrac{1}{f'(x_3)}$.

$= \dfrac{1}{2^{2018}}\left(\dfrac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \dfrac{1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \dfrac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}\right)$.

$= \dfrac{1}{2^{2018}} \cdot \dfrac{-(x_2 - x_3) - (x_3 - x_1) - (x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)} = \dfrac{1}{2^{2018}.} \cdot \dfrac{0}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)} = 0.$

Vậy $P = 0$.

Chọn phương án A

Câu 48. Cho hàm số $y = x^4 - (3m+4)x^2 + m^2$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

A $\begin{cases} m > -\dfrac{4}{5} \\ m \neq 0 \end{cases}$. **B** $m > 0$. **C** $m = 12$. **D** $\left[\begin{array}{l} m = 12 \\ m = -\dfrac{12}{19} \end{array}\right.$.

Lời giải.

Phương pháp:

Ba số a, b, c lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi $a + c = 2b$.

Cách giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với Ox: $x^4 - (3m+4)x^2 + m^2 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2 (t \geq 0)$, phương trình (1) trở thành $t^2 - (3m+4)t + m^2 = 0$ (2)

Để (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt thì (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S = 3m + 4 > 0 \\ P = m^2 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m+4)^2 - 4m^2 > 0 \\ m > -\frac{4}{3} \\ m \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m^2 + 24m + 16 > 0 \\ m > -\frac{4}{3} \\ m \neq 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > -\dfrac{4}{5} \\ m < -4 \end{array}\right. \\ m > -\dfrac{4}{3} \\ m \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{4}{5} \\ m \neq 0. \end{cases}$$

Khi đó, phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt $t_1, t_2 (t_1 < t_2)$, dẫn tới (1) có 4 nghiệm phân biệt sắp xếp tăng dần như sau: $-\sqrt{t_2}, -\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}$.

Để dãy số trên là dãy cấp số cộng thì $\begin{cases} -\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1} = -2\sqrt{t_1} \\ -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = 2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow 3\sqrt{t_1} = \sqrt{t_2} \Leftrightarrow 9t_1 = t_2$.

Theo hệ thức Vi – ét ta có:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 3m + 4 \\ t_1 t_2 = m^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 9t_1 = 3m + 4 \\ t_1 . 9t_2 = m^2. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{3m+4}{10} \\ t_1 = \dfrac{|m|}{3} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{3m+4}{10} = \dfrac{|m|}{3}. \quad (3)$$

+) Với $m > 0$: (3) $\Leftrightarrow 9m + 12 = 10m \Leftrightarrow m = 12$ (tm).

+) Với $m < 0$: (3) $\Leftrightarrow 9m + 12 = -10m \Leftrightarrow m = -\dfrac{12}{19}$ (tm).

Vậy $m = 12$ hoặc $m = -\dfrac{12}{19}$.

Chọn phương án (D)

Câu 49. Cho phương trình: $\sin^3 x + 2\sin x + 3 = \left(2\cos^3 x + m\right)\sqrt{2\cos^3 x + m - 2} + 2\cos^3 x + \cos^2 x + m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có đúng 1 nghiệm $x \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right)$?

(A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Ta có: $\sin^3 x + \sin^2 x + 2\sin x = \left(\sqrt{2\cos^3 x + m - 2}\right)^3 + \left(2\cos^3 x + m - 2\right) + 2\sqrt{2\cos^3 x + m - 2}$ (1).

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + 2t$ có $f'(t) = 6t^2 + 2t + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bởi vậy: (1) $\Leftrightarrow f(\sin x) = f\left(\sqrt{2\cos^3 x + m - 2}\right) \Leftrightarrow \sin x = \sqrt{2\cos^3 x + m - 2}$ (2).

Với $x \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right)$ thì (2)$\Leftrightarrow \sin^2 x = 2\cos^3 x + m - 2 \Leftrightarrow -2\cos^3 x - \cos^2 x + 3 = m$ (3).

Đặt $t = \cos x$, phương trình (3) trở thành $-2t^3 - t^2 - 1 = m$ (4).

Ta thấy, với mỗi $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$ thì phương trình $\cos x = t$ cho ta một nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$.

Xét hàm số $g(t) = -2t^3 - t^2 + 3$ với $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Ta có $g'(t) = -6t^2 - 2t, g'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

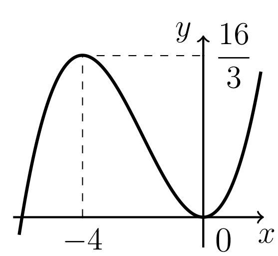
x	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		0		1
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	3	$\searrow$	$\frac{80}{27}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

Do đó, để phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$ điều kiện cần và đủ là phương trình (4) có đúng một nghiệm $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m \in \left[0; \frac{80}{27}\right] \end{array}\right. \Rightarrow m \in \{3; 2; 1; 0\}$ (Do m nguyên).

Chọn phương án (D)

Câu 50.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|\dfrac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right|\right) = f(m^2 + 4m + 4)$ có nghiệm?



(A) 4. (B) 5. (C) Vô số. (D) 3.

Lời giải.

Vì $-1 \leq \sin x \leq 1$; $-1 \leq \cos x \leq 1$ nên $2\cos x - \sin x > -3 \Rightarrow 2\cos x - \sin x + 4 > 0$.
Đặt $\dfrac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4} = t \Leftrightarrow (2t+1)\cos x - (t+3)\sin x = -4t - 1$.
Phương trình trên có nghiệm khi
$(2t+1)^2 + (t+3)^2 \geq (-4t-1)^2 \Leftrightarrow 11t^2 - 2t - 9 \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{9}{11} \leq t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |t| \leq 1$.
Từ đồ thị hàm số ta thấy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;1)$, nên phương trình
$f(x) = f(|t|)$ với $t \in [0;1]$ có nghiệm duy nhất khi $x = |t| \Rightarrow x \geq 0$.
Do đó phương trình $f\left(\left|\dfrac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right|\right) = f(m^2 + 4m + 4)$ có nghiệm
$\Leftrightarrow |t| = m^2 + 4m + 4$ có nghiệm với $0 \leq |t| \leq 1$
$\Leftrightarrow 0 \leq m^2 + 4m + 4 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq -1$.
Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-3; -2; -1\}$. Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu.
Chọn phương án D

Câu 51. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y = f(x^2 - 2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(2; +\infty)$. **B** $(0; 2)$. **C** $(-\infty; -2)$. **D** $(-2; 0)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2xf'\left(x^2 - 2\right)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(x^2 - 2\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2 = -2 \\ x^2 - 2 = 0 \\ x^2 - 2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm 2 \end{array}\right..$$

Do các nghiệm của phương trình $y' = 0$ đều là nghiệm bội lẻ, mà $y'(3) = 6f'(7) < 0$ nên ta có bảng xét dấu y'

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số $y = f\left(x^2 - 2\right)$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
Chọn phương án A

Câu 52. Cho Parabol $(P_1)\colon y = f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - x$ và $(P_2)\colon y = g(x) = ax^2 - 4ax + b$ $(a > 0)$. Gọi I_1, I_2 lần lượt là các đỉnh của (P_1), (P_2) và A, B là giao điểm của (P_1) với trục Ox. Biết rằng bốn điểm

A, B, I_1, I_2 tạo thành tứ giác lồi có diện tích bằng 10. Tính diện tích S của tam giác IAB với I là đỉnh của Parabol $(P)\colon y = h(x) = f(x) + g(x)$.

A $S = 6$. **B** $S = 4$. **C** $S = 9$. **D** $S = 7$.

Lời giải.

$(P_1)\colon y = f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - x$ có đỉnh $I_1(2; -1)$.

$(P_2)\colon y = g(x) = ax^2 - 4ax + b$ $(a > 0)$ có đỉnh $I_2(2; b - 4a)$.

$(P) : y = h(x) = f(x) + g(x) = \left(\dfrac{1}{4} + a\right)x^2 - (1 + 4a)x + b$ có đỉnh $I(2; b - 4a - 1)$.

Suy ra I_1, I_2, I cùng nằm trên đường thẳng $x = 2$.

Mà giao điểm của (P_1) và Ox là $A(4; 0)$ và $B(0; 0)$

Suy ra tứ giác lồi AI_1BI_2 có hai đường chéo vuông góc và $b - 4a > 0$

$S_{AI_1BI_2} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot I_1I_2 \Leftrightarrow 10 = \dfrac{1}{2}4 \cdot |b - 4a + 1| = 10 \Leftrightarrow b - 4a + 1 = 5 \Leftrightarrow b - 4a = 4$.

Tam giác IAB có diện tích là $S = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot \mathrm{d}(I, Ox) = \dfrac{1}{2} \cdot 4|b - 4a - 1| = 6$.

Chọn phương án A

Câu 53. Cho hàm số $y = \dfrac{x^4}{2} - 3x^2 + \dfrac{5}{2}$, có đồ thị (C) và điểm $M \in (C)$ có hoành độ $x_M = a$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại hai điểm phân biệt khác M.

A 0. **B** 3. **C** 2. **D** 1.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \dfrac{x^4}{2} - 3x^2 + \dfrac{5}{2}$, ta có: $y' = 2x^3 - 6x$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M: $y = \left(2a^3 - 6a\right)(x - a) + \dfrac{a^4}{2} - 3a^2 + \dfrac{5}{2}$ (d).

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C):

$$\begin{aligned}
& \left(2a^3 - 6a\right)(x - a) + \frac{a^4}{2} - 3a^2 + \frac{5}{2} = \frac{x^4}{2} - 3a^2 + \frac{5}{2} \\
\Leftrightarrow\ & (x - a)^2\left(x^2 + 2ax + 3a^2 - 6\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x - a)^2\left(x^2 + 2ax + 3a^2 - 6\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = a \\ x^2 + 2ax + 3a^2 - 6 = 0\,(2). \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Đường thẳng (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt khác M khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác $a \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 6 - 2a^2 > 0 \\ a^2 + 2a^2 + 3a^3 - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} < a < \sqrt{3} \\ a \neq \pm 1. \end{cases}$

Mà a nguyên nên $a = 0$.

Chọn phương án D

Câu 54. Cho hàm số $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 4$ có đồ thị (C). Biết (C) cắt trục hoành tại ít nhất 1 điểm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 20a^2 + 20b^2 + 5c^2$.

A 32. **B** 64. **C** 16. **D** 8.

50 DẠNG TOÁN PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA LẦN 2

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+4=0 \Leftrightarrow ax^3+bx^2+cx=-x^4-4. \qquad (1)$$

Nhận thấy $x=0$ không phải nghiệm của (1).

Do đó theo giả thiết $\exists x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ sao cho $ax_0^3+bx_0^2+cx_0=-x_0^4-4$.

Bình phương hai vế ta có

$$x_0^2\left(ax_0^2+bx_0+c\right)^2=\left(x_0^2+4\right)^2 \Leftrightarrow \left(ax_0^2+bx_0+c\right)^2=\frac{\left(x_0^2+4\right)^2}{x_0^2}.$$

Theo bất đẳng thức Buniakovsky, ta có

$$\left(ax_0^2+bx_0+c\right)^2 \le \left(20a^2+20b^2+5c^2\right)\left(\frac{x_0^4}{20}+\frac{x_0^2}{20}+\frac{1}{5}\right)=\frac{T}{20}\left(x_0^4+x_0^2+4\right).$$

Từ đó suy ra

$$\frac{T}{20}\ge\frac{\left(ax_0^2+bx_0+c\right)^2}{x_0^4+x_0^2+4}=\frac{\left(x_0^2+4\right)^2}{x_0^2\left(x_0^4+x_0^2+4\right)}.$$

Đặt $x_0^2=t>0$, ta có $\dfrac{T}{20}\ge\dfrac{\left(t^2+4\right)^2}{t^3+t^2+4t}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{\left(t^2+4\right)^2}{t^3+t^2+4t}$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{4t\left(t^2+4\right)\left(t^3+t^2+4t\right)-\left(t^2+4\right)^2\left(3t^2+2t+4\right)}{\left(t^3+t^2+4t\right)^2}=\dfrac{\left(t^2+4\right)(t+2)\left(t^3-8\right)}{\left(t^3+t^2+4t\right)^2}$.

Vì $t>0$ nên $f'(t)=0\Leftrightarrow t=2$, ta có bảng biến thiên

t	0		2		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{64}{20}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{(0;+\infty)} f(t)=f(2)=\dfrac{64}{20}$. Suy ra $\dfrac{T}{20}\ge\dfrac{64}{20}\Leftrightarrow T\ge 64$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x_0^2=2\\ ax_0^3+bx_0^2+cx_0=-x_0^4-4\\ \dfrac{20a}{x_0^2}=\dfrac{20b}{x_0}=5c\end{cases}. \qquad (2)$

<u>TH1</u>: $x_0=\sqrt{2}$, ta có (2) $\Leftrightarrow \begin{cases}2a\sqrt{2}+2b+\sqrt{2}c=-8\\ a=\sqrt{2}b\\ c=2\sqrt{2}b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-\dfrac{4\sqrt{2}}{5}\\ b=-\dfrac{4}{5}\\ c=-\dfrac{8\sqrt{2}}{5}\end{cases} \Rightarrow T=64$ (TM).

TH2: $x_0 = -\sqrt{2}$, ta có (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} -2a\sqrt{2} + 2b - \sqrt{2}c = -8 \\ a = -\sqrt{2}b \\ c = -2\sqrt{2}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{4\sqrt{2}}{5} \\ b = -\dfrac{4}{5} \\ c = \dfrac{8\sqrt{2}}{5} \end{cases} \Rightarrow T = 64$ (TM).

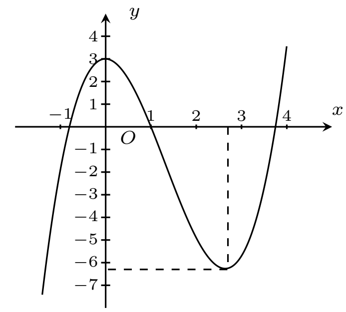
Vậy T có giá trị nhỏ nhất bằng 64.

Nhận xét: Đây là một bài toán phức tạp, không phù hợp là một bài tập trắc nghiệm.

Chọn phương án B

Câu 55.

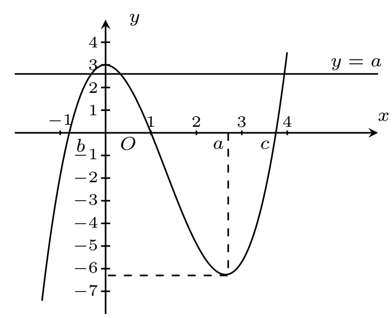
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới. Đặt $g(x) = f\left[f(x)\right]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.



A 8. **B** 4. **C** 6. **D** 2.

Lời giải.

Ký hiệu a, b, c như hình vẽ.



Ta có $g'(x) = f'[f(x)] \cdot f'(x)$, từ đó suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'[f(x)] = 0 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right.$.

Từ đồ thị của hàm $y = f(x)$ ta suy ra phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 0$ và $x_2 = a \in (2; 3)$, (a là hoành độ của điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$).

$f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x) = a \end{array}\right.$.

Phương trình $f(x) = 0$ có tập nghiệm $\{x_3; x_4; x_5\} = \{b, 1; c\}$, ($b < 1 < c$ là hoành độ giao điểm của hàm số $y = f(x)$ và trục hoành).

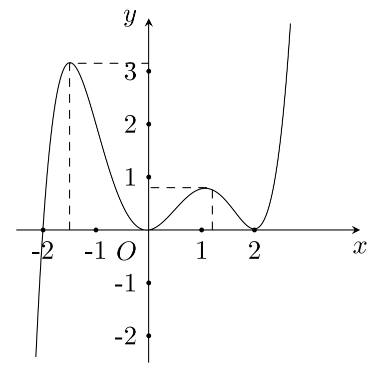
Phương trình $f(x) = 0$ có tập nghiệm $\{x_6; x_7; x_8\}$, ở đó $x_6; x_7; x_8$ là hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = a$ với đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Dễ thấy các nghiệm x_i, $i = \overline{1; 8}$ đôi một phân biệt. Từ đó suy ra phương trình $g'(x) = 0$ có đúng 8 nghiệm.

Chọn phương án A

Câu 56.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trơn (không bị gãy khúc), hình vẽ bên. Gọi hàm $g(x) = f[f(x)]$. Hỏi phương trình $g'(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

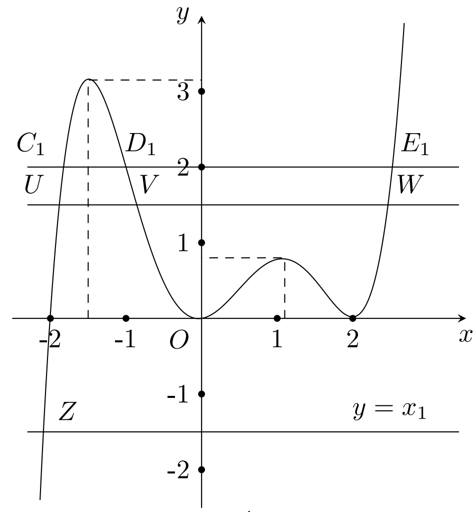


(A) 14. (B) 10. (C) 12. (D) 8.

Lời giải.

Ta có: $g'(x) = f'[f(x)] \cdot f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'[f(x)].f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \ \ (1) \\ f'[f(x)] = 0 \ (2). \end{array}\right.$



Từ đồ thị có thể thấy:

(1) có các nghiệm nghiệm:

$x = x_1 \in (-2; -1), x = 0, x = x_2 \in (1; 2), x = 2$.

Xét phương trình (2) ta có: (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = x_1 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = x_2 \\ f(x) = 2. \end{array}\right.$

Phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $x = -2, x = 0, x = 2$ (trùng mất hai nghiệm với (1)).

Dựng các đường thẳng $y = 2, y = x_1 \in (-2; -1), y = x_2 \in (1; 2)$ ta thấy:

— $f(x) = 2$ có 3 nghiệm x_3, x_4, x_5 tương ứng là hoành độ các điểm C_1, D_1, E_1 (xem hình)

— $f(x) = x_1$ có nghiệm duy nhất x_6 ứng với hoành độ điểm Z (Xem hình).

— $f(x) = x_2$ có 3 nghiệm x_7, x_8, x_9 tương ứng là hoành độ các điểm U, V, W (Xem hình).

Từ đồ thị có thể thấy các nghiệm $-2, 0, 2, x_1, x_2, \cdots, x_9$ hoàn toàn phân biệt nên phương trình $g'(x) = 0$ có tổng cộng 12 nghiệm phân biệt.

Chọn phương án (C)

Câu 57. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C). Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(1; 5)$ và B là giao điểm thứ hai của Δ và (C). Tính diện tích tam giác OAB.

(A) 12. (B) 15. (C) 24. (D) 6.

Lời giải.

Với $y = x^3 + 3x^2 + 1$, ta có $y' = 3x^2 + 6x$, $y'(1) = 9$.

Phương trình tiếp tuyến Δ: $y - 5 = 9(x - 1) \Leftrightarrow y = 9x - 4$.

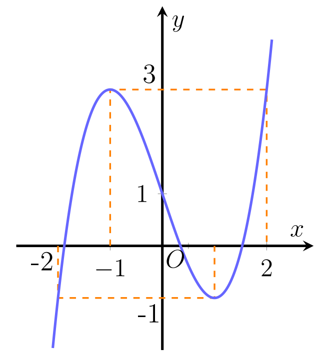
Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 + 3x^2 + 1 = 9x - 4 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -5 \Rightarrow y = -49 \Rightarrow B(-5; -49) \\ x = 1 \end{array}\right.$

Ta có: $OA = \sqrt{26}$, $OB = \sqrt{2426}$, $AB = 6\sqrt{82}$.
Theo công thức Hê-rông, ta có $S_{\triangle OAB} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 12$.
Chọn phương án A

Câu 58.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số liệt kê ở bốn phương án A,B,C,D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



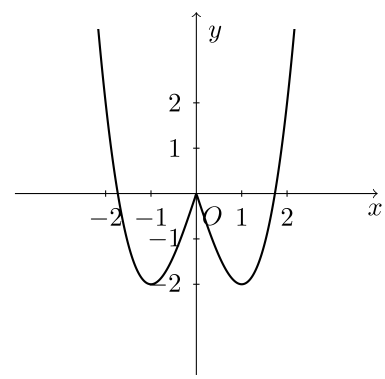
A. $y = -x^3 - 3x^2 - 1$.
B. $y = x^3 - 3x + 1$.
C. $y = x^3 - 3x - 1$.
D. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

Câu 59. Cho phương trình $|x|\left(x^2 - 3\right) - m = 0$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-5; 5]$ để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm?

A. 5.
B. 11.
C. 6.
D. 9.

Lời giải.

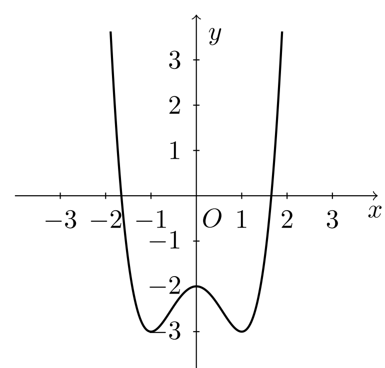
Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |x|\left(x^2 - 3\right)$ và $y = m$.
Dựa vào đồ thị, phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $m = -2$ hoặc $m > 0$.
Trên đoạn $[-5; 5]$ phương trình đã cho có đúng hai nghiệm khi $m \in \{-2; 1; 2; 3; 4; 5\}$ tức là có 6 giá trị của m.



Chọn phương án C

Câu 60.

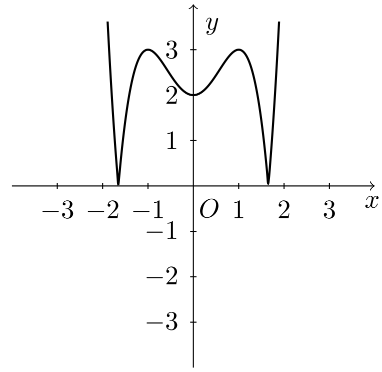
Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Tìm m để phương trình $|f(x)| - 2m = 0$ có số nghiệm nhiều nhất.



A. $3 < m < 4$.
B. $3 \le m \le 4$.
C. $1 < m < \dfrac{3}{2}$.
D. $1 \le m \le \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có được bằng cách giữ lại phần đồ thị phía trên Ox và lấy đối xứng phần đồ thị phía dưới Ox qua Ox.
Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $|f(x)| - 2m = 0$ có số nghiệm nhiều nhất khi $2 < 2m < 3$ hay $1 < m < \dfrac{3}{2}$.



Chọn phương án C

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. D	4. D	5. B	6. B	7. C	8. B	9. D	10. D
11. B	12. C	13. B	14. A	15. A	16. D	17. C	18. B	19. C	20. D
21. B	22. B	23. A	24. A	25. C	26. B	27. A	28. D	29. A	30. C
31. B	32. B	33. B	34. A	35. C	36. A	37. B	38. B	39. C	40. B
41. C	42. C	43. D	44. B	45. D	46. D	47. A	48. D	49. D	50. D
51. A	52. A	53. D	54. B	55. A	56. C	57. A	58. B	59. C	60. C

DẠNG 31. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ – LOGARIT

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Tập nghiệm của bất phương trình $9^x + 2.3^x - 3 > 0$ là

(A) $[0; +\infty)$. (B) $(0; +\infty)$. (C) $(1; +\infty)$. (D) $[1; +\infty)$.

Lời giải.

$9^x + 2.3^x - 3 > 0 \Leftrightarrow (3^x - 1)(3^x + 3) > 0 \Leftrightarrow 3^x > 1$ (vì $3^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$)$\Leftrightarrow x > 0$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(0; +\infty)$.

Chọn phương án (B)

Câu 1. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x+1) < 2$ là

(A) $\left[-\dfrac{1}{3}; 1\right)$. (B) $\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$. (C) $\left(-\dfrac{1}{3}; 1\right)$. (D) $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

ĐK: $x > -\dfrac{1}{3}$

$$\log_2(3x+1) < 2 \Leftrightarrow 3x + 1 < 4 \Leftrightarrow x < 1.$$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình là $-\dfrac{1}{3} < x < 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $\left(-\dfrac{1}{3}; 1\right)$.

Chọn phương án (C)

Câu 2. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3-x) < 2$ là

(A) $(-\infty; 1)$. (B) $(-1; 3)$. (C) $(1; 3)$. (D) $(3; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $3 - x > 0 \Leftrightarrow x < 3$.

$$\log_2(3-x) < 2 \Leftrightarrow 3 - x < 4 \Leftrightarrow x > -1.$$

Kết hợp điều kiện ta được tập nghiệm $S = (-1; 3)$.

Chọn phương án (B)

Câu 3. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x-1} > \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-x+3}$.

(A) $(2; +\infty)$. (B) $(-\infty; 2)$. (C) $[2; +\infty)$. (D) $(-\infty; 2]$.

Lời giải.

$\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x-1} > \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-x+3} \Leftrightarrow x - 1 < -x + 3 \Leftrightarrow x < 2$.

Chọn phương án (B)

Câu 4. Nghiệm của bất phương trình $3^{x-2} \leq 243$ là

(A) $x < 7$. (B) $x \leq 7$. (C) $x \geq 7$. (D) $2 \leq x \leq 7$.

Lời giải.

Ta có $3^{x-2} \leq 243 \Leftrightarrow 3^{x-2} \leq 3^5 \Leftrightarrow x - 2 \leq 5 \Leftrightarrow x \leq 7$

Chọn phương án B

Câu 5. Nghiệm của bất phương trình $3^{2x+1} > 3^{3-x}$ là

(A) $x > -\frac{2}{3}$. (B) $x < \frac{2}{3}$. (C) $x > \frac{2}{3}$. (D) $x > \frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $3^{2x+1} > 3^{3-x} \Leftrightarrow 2x+1 < 3-x \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$.

Chọn phương án C

Câu 6. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 8$ là.

(A) $S = (-\infty; -3)$. (B) $S = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$. (C) $S = (-3; +\infty)$. (D) $S = \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải.

$\left(\frac{1}{2}\right)^x < 8 \Leftrightarrow x > \log_{\frac{1}{2}} 8 \Leftrightarrow x > -3$.

Chọn phương án C

Câu 7. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{2x-1} > 27$ là

(A) $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. (B) $(3; +\infty)$. (C) $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. (D) $(2; +\infty)$.

Lời giải.

$3^{2x-1} > 27 \Leftrightarrow 2x-1 > 3 \Leftrightarrow x > 2$.

Chọn phương án D

Câu 8. Bất phương trình $\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x)$ có tập nghiệm là

(A) $(-3; 1)$. (B) $\left(1; \frac{6}{5}\right)$. (C) $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$. (D) $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x) \Leftrightarrow \begin{cases} 6-5x > 0 \\ 3x-2 > 6-5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{6}{5} \\ 8x > 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{6}{5} \\ x > 1. \end{cases}$

Chọn phương án B

Câu 9. Nghiệm của bất phương trình $3^{2x+1} > 3^{3-x}$ là

(A) $x > -\frac{2}{3}$. (B) $x > \frac{3}{2}$. (C) $x > \frac{2}{3}$. (D) $x < \frac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $3^{2x+1} > 3^{3-x} \Leftrightarrow 2x+1 > 3-x \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$.

Chọn phương án C

Câu 10. Giải bất phương trình $\left(\sqrt{10}-3\right)^x > \sqrt{10}+3$ ta được kết quả nào sau đây?

(A) $x < 1$. (B) $x > 1$. (C) $x < -1$. (D) $x > -1$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{10}+3 = \left(\sqrt{10}-3\right)^{-1}$, vậy bất phương trình trên trở thành

$$\left(\sqrt{10}-3\right)^x > \left(\sqrt{10}-3\right)^{-1}$$
$$\Leftrightarrow x < -1.$$

Chọn phương án (C)

Câu 11. Bất phương trình $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x > 0$ có tập nghiệm là

(A) $S = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.
(B) $S = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
(C) $S = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.
(D) $S = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Lời giải.

Chia cả 2 vế của bất phương trình cho 9^x ta được $6\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 13\left(\frac{2}{3}\right)^x + 6 > 0$.

Đặt $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t\,(t > 0)$. Ta được $6t^2 - 13t + 6 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < \frac{2}{3} \\ t > \frac{3}{2}. \end{array}\right.$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{2}{3} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -1. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Chọn phương án (B)

Câu 12. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2x - 8) \geq -4$.

(A) $(-4; 2)$.
(B) $[-6; 4)$.
(C) $[-6; -4] \cup [2; 4]$.
(D) $[-6; -4) \cup (2; 4]$.

Lời giải.

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 8 > 0 \\ x^2 + 2x - 8 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -4 \text{ hoặc } x > 2 \\ x^2 + 2x - 24 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -4 \text{ hoặc } x > 2 \\ -6 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6 \leq x < -4 \\ 2 < x \leq 4 \end{array}\right..$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[-6; -4) \cup (2; 4]$.

Chọn phương án (D)

Câu 13. Khi đặt $t = \log_5 x$ thì bất phương trình $\log_5^2(5x) - 3\log_{\sqrt{5}} x - 5 \leqslant 0$ tương đương với bất phương trình nào sau đây?

(A) $t^2 - 6t - 4 \leqslant 0$.
(B) $t^2 - 6t - 5 \leqslant 0$.
(C) $t^2 - 4t - 4 \leqslant 0$.
(D) $t^2 - 3t - 5 \leqslant 0$.

Lời giải.

$\log_5^2(5x) - 3\log_{\sqrt{3}} x - 5 \leqslant 0 \Leftrightarrow (\log_5 x + 1)^2 - 6\log_5 x - 5 \leqslant 0 \Leftrightarrow \log_5^2 x - 4\log_5 x - 4 \leqslant 0$.

Đặt $t = \log_5 x$ bất phương trình trở thành $t^2 - 4t - 4 \leqslant 0$.

Chọn phương án (C)

Câu 14. Tập nghiệm của bất phương trình $16^x - 5.4^x + 4 \geq 0$ là

(A) $T = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$.
(B) $T = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.
(C) $T = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.
(D) $T = (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.

Lời giải.

Đặt $t = 4^x$, $t > 0$.

$16^x - 5.4^x + 4 \geq 0$ trở thành

$$t^2 - 5.t + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \geq 4 \\ t \leq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \geq 4 \\ 0 < t \leq 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4^x \geq 4 \\ 0 < 4^x \leq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \leq 0. \end{array}\right.$$

Vậy $T = (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.

Chọn phương án D

Câu 15. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $3^x + 9 \cdot 3^{-x} < 10$ là

A Vô số. **B** 2. **C** 0. **D** 1.

Lời giải.

$3^x + 9 \cdot 3^{-x} < 10 \Leftrightarrow 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 < 0 \Leftrightarrow 1 < 3^x < 9 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

Chọn phương án D

Câu 16. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $9^x - 2 \cdot 6^x + 4^x > 0$.

A $S = (0; +\infty)$. **B** $S = \mathbb{R}$. **C** $S = \mathbb{R} \backslash \{0\}$. **D** $S = [0; +\infty)$.

Lời giải.

Chia hai vế cho $4^x > 0$, phương trình tương đương $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 1 > 0$.

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, điều kiện $t > 0$.

Khi đó pt tương đương $t^2 - 2 \cdot t + 1 > 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 > 0 \Leftrightarrow t \neq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$.

Vậy $S = \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Chọn phương án C

Câu 17. Nghiệm của bất phương trình $9^{x-1} - 36 \cdot 3^{x-3} + 3 \leq 0$ là

A $1 \leq x \leq 3$. **B** $1 \leq x \leq 2$. **C** $1 \leq x$. **D** $x \leq 3$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với $9^{x-1} - \frac{36}{9}.3^{x-1} + 3 \leq 0$

$\Leftrightarrow 1 \leq 3^{x-1} \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.

Chọn phương án B

Câu 18. Bất phương trình $25^{x+1} + 9^{x+1} \geq 34 \cdot 15^x$ có tập nghiệm S là

A $S = (-\infty; 2]$. **B** $S = [-2; 0]$.

C $S = (-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$. **D** $S = [0; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 25^{x+1}+9^{x+1}\geq 34\cdot 15^x &\Leftrightarrow 25\cdot 25^x-34\cdot 15^x+9\cdot 9^x\geq 0\\ &\Leftrightarrow 25\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{2x}-34\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{x}+9\geq 0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{5}{3}\right)^{x}\leq\frac{9}{25}\\ \left(\frac{5}{3}\right)^{x}\geq 1\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{5}{3}\right)^{x}\leq\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\\ \left(\frac{5}{3}\right)^{x}\geq\left(\frac{5}{3}\right)^{0}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\leq -2\\ x\geq 0.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy $S=(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)$.

Chọn phương án C

Câu 19. Bất phương trình $3^{2x+1}-7.3^x+2>0$ có nghiệm là

A $\left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>\log_2 3\end{array}\right.$. B $\left[\begin{array}{l}x<-2\\ x>\log_2 3\end{array}\right.$. C $\left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>\log_3 2\end{array}\right.$. D $\left[\begin{array}{l}x<-2\\ x>\log_3 2\end{array}\right.$.

Lời giải.

• Đặt $t=3^x$ $(t>0)$ ta có $3t^2-7t+2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t>2\\ t<\frac{1}{3}\end{array}\right.$.

• Ta có $\left[\begin{array}{l}3^x>2\\ 3^x<\frac{1}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>\log_3 2\\ x<-1\end{array}\right.$.

Chọn phương án C

Câu 20. Tập nghiệm của bất phương trình $8.4^{x+1}-18.2^x+1<0$ là

A $(2;4)$. B $(1;4)$. C $(-4;-1)$. D $\left(\frac{1}{16};\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Phương trình đã cho trở thành: $32.4^x-18.2^x+1<0\Leftrightarrow\frac{1}{16}<2^x<\frac{1}{2}$.

Giải bất phương trình kép ta nhận được: $-4<x<-1$.

Chọn phương án C

Câu 21. Tập nghiệm của bất phương trình $2\cdot 4^x-5\cdot 2^x+2\leqslant 0$ có dạng $S=[a;b]$. Tính giá trị của biểu thức $b-a$.

A $\frac{3}{2}$. B 1. C $\frac{5}{2}$. D 2.

Lời giải.

Ta có $2\cdot 4^x-5\cdot 2^x+2\leqslant 0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\leqslant 2^x\leqslant 2\Leftrightarrow -1\leqslant x\leqslant 1$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=[-1;1]\Rightarrow a=-1;\ b=1\Rightarrow b-a=2$.

Chọn phương án D

Câu 22. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log(2x-2)\geq\log(x+1)$.

A $S=(3;+\infty)$. B $S=(1;3]$. C $S=[3;+\infty)$. D $S=\varnothing$.

Lời giải.

Ta có $\log(2x-2) \geq \log(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2 \geq x+1 \\ 2x-2>0 \\ x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3.$

Vậy, tập nghiệm S của bất phương trình là: $S=[3;+\infty)$.

Chọn phương án (C)

Câu 23. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^4$ là

(A) $\left(1;\dfrac{5}{4}\right)$.
(B) $\left(-\infty;\dfrac{5}{4}\right)$.
(C) $(-\infty;-1)\cup\left(\dfrac{5}{4};+\infty\right)$.
(D) $\left(\dfrac{5}{4};+\infty\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 1$.

Với điều kiện trên, bất phương trình đã cho tương đương với

$\dfrac{1}{x-1} > 4 \Leftrightarrow \dfrac{-4x+5}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<\dfrac{5}{4}.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left(1;\dfrac{5}{4}\right)$.

Chọn phương án (A)

Câu 24. Giải bất phương trình $2\log_2(x-1) \leq \log_2(5-x)+1$.

(A) $1<x<3$.
(B) $1 \leq x \leq 3$.
(C) $-3 \leq x \leq 3$.
(D) $1<x\leq 3$.

Lời giải.

Ta có $2\log_2(x-1) \leq \log_2(5-x)+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x<5 \\ (x-1)^2 \leq 2(5-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x<5 \\ -3 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x\leq 3.$

Chọn phương án (D)

Câu 25. Bất phương trình $\log_2^2 x - \log_2(4x) < 0$ có số nghiệm nguyên là

(A) 3.
(B) 2.
(C) 1.
(D) 0.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$, khi đó

$$\begin{aligned} & \log_2^2 x - \log_2(4x) < 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - \log_2 x - \log_2 4 < 0 \\ \Leftrightarrow\ & \log_2^2 x - \log_2 x - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < \log_2 x < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 4. \end{aligned}$$

Giá trị nguyên của x là $\{1,2,3\}$.

Chọn phương án (A)

Câu 26. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $16^x - 5\cdot 4^x + 4 \leq 0$.

(A) $S=(0;1)$.
(B) $S=[1;4]$.
(C) $S=(1;4)$.
(D) $S=[0;1]$.

Lời giải.

Ta có $16^x - 5\cdot 4^x + 4 \le 0 \Leftrightarrow (4^x)^2 - 5\cdot 4^x + 4 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le 4^x \le 4 \Leftrightarrow 0 \le x \le 1$.
Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $S = [0;1]$.
Chọn phương án D

Câu 27. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,2}^2 x - \log_{0,2} x - 6 \le 0$ có dạng $S = [a;b]$. Giá trị của $A = a\cdot b$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **B** $\left(\dfrac{3}{2};2\right)$. **C** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **D** $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$.
Đặt $t = \log_{0,2} x$, bất phương trình trở thành $t^2 - t - 6 \le 0 \Leftrightarrow -2 \le t \le 3$.
Suy ra $-2 \le \log_{0,2} x \le 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{125} \le x \le 25$ (thỏa điều kiện).
Khi đó $a = \dfrac{1}{125}$, $b = 25$. Vậy $A = a\cdot b = \dfrac{1}{125}\cdot 25 = \dfrac{1}{5} \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.
Chọn phương án A

Câu 28. Xét bất phương trình $5^{2x} - 3\cdot 5^{x+2} + 32 < 0$. Nếu đặt $t = 5^x$ thì bất phương trình trở thành bất phương trình nào sau đây?

A $t^2 - 3t + 32 < 0$. **B** $t^2 - 16t + 32 < 0$. **C** $t^2 - 6t + 32 < 0$. **D** $t^2 - 75t + 32 < 0$.

Lời giải.

$$5^{2x} - 3\cdot 5^{x+2} + 32 < 0 \Leftrightarrow 5^{2x} - 3\cdot 5^2 5^x + 32 < 0 \Leftrightarrow 5^{2x} - 75\cdot 5^x + 32 < 0.$$

Nếu đặt $t = 5^x > 0$ thì bất phương trình trở thành bất phương trình $t^2 - 75t + 32 < 0$.
Chọn phương án D

Câu 29. Biết rằng tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\sqrt{3}} x\left(1 + \dfrac{1}{3}\log_{\sqrt[3]{3}} 3x\right) \le 6$ là $[a;b]$. Tính $T = 81a^2 + b^2$.

A $T = \dfrac{82}{9}$. **B** $T = \dfrac{84}{3}$. **C** $T = \dfrac{80}{9}$. **D** $T = \dfrac{80}{3}$.

Lời giải.

Đặt $t = \log_3 x$, ta có bất phương trình $t^2 + 2t - 3 \le 0$, suy ra $-3 \le t \le 1$ hay $\dfrac{1}{27} \le x \le 3$. Do đó $[a;b] = \left[\dfrac{1}{27};3\right]$, dẫn đến $T = 81a^2 + b^2 = \dfrac{82}{9}$.
Chọn phương án A

Câu 30. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 5x + 7\right) > 0$ là

A $(2;3)$. **B** $(3;+\infty)$. **C** $(-\infty;2)$. **D** $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x^2 - 5x + 7 > 0 & \text{(luôn đúng)} \\ x^2 - 5x + 7 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2;3)$.

Chọn phương án A

Câu 31. Tập nghiệm của bất phương trình $(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x + 3 > 0$ là

A $(0;2)\cup(8;+\infty)$. **B** $(-\infty;2)\cup(8;+\infty)$. **C** $(2;8)$. **D** $(8;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có

$$(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x + 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x > 3\\ \log_2 x < 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x > 8\\ 0 < x < 2.\end{array}\right.$$

Chọn phương án (A)

Câu 32. Có bao nhiêu số tự nhiên x không vượt quá 2018 thỏa mãn $\log_2\left(\dfrac{x}{4}\right)\log_2^2 x \geq 0$?

(A) 2017. (B) 2016. (C) 2014. (D) 2015.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$. Bất phương trình trở thành

$$(\log_2 x - 2)\cdot\log_2^2 x \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x = 0\\ \log_2 x - 2 \geq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1\\ x \geq 4.\end{array}\right.$$

Vậy có tất cả $2018 - 4 + 1 + 1 = 2016$ số tự nhiên không vượt quá 2018 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án (B)

Câu 33. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\ln^2 x - 3\ln x + 2 \geq 0$.

(A) $\left[e^2;+\infty\right]$. (B) $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$. (C) $(0;e]\cup\left[e^2;+\infty\right]$. (D) $(-\infty;e]\cup\left[e^2;+\infty\right]$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$. Đặt $t = \ln x$.

Bất phương trình tương đương

$$t^2 - 3t + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t \leq 1\\ t \geq 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\ln x \leq 1 = \ln e\\ \ln x \geq 2 = \ln e^2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0 < x \leq e\\ x \geq e^2.\end{array}\right.$$

Tập nghiệm bất phương trình là $S = (0;e]\cup\left[e^2;+\infty\right]$.

Chọn phương án (C)

Câu 34. Giải bất phương trình $5\cdot 4^x + 2\cdot 25^x - 7\cdot 10^x \leq 0$.

(A) $\leq x \leq \dfrac{5}{2}$. (B) $-\dfrac{5}{2} \leq x \leq -1$. (C) $0 \leq x \leq 1$. (D) $-1 \leq x \leq 0$.

Lời giải.

Bất phương trình $5\cdot 4^x + 2\cdot 25^x - 7\cdot 10^x \leq 0 \Leftrightarrow 2\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^{2x} - 7\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^x + 5 \leq 0.$ (1)

Đặt $t = \left(\dfrac{5}{2}\right)^x$, điều kiện $t > 0$. Bất phương trình (1) tương đương

$$2t^2 - 7t + 5 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq t \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^0 \leq \left(\frac{5}{2}\right)^x \leq \left(\frac{5}{2}\right)^1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1.$$

Chọn phương án (C)

Câu 35. Giải bất phương trình $\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^x \leq 34$.

(A) $-6 \leq x \leq 6$. (B) $-2 \leq x \leq 2$. (C) $-8 \leq x \leq 8$. (D) $-4 \leq x \leq 4$.

Lời giải.

Do $\sqrt{3+\sqrt{8}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{8}}=1$ nên

$$\begin{aligned}\text{BPT} &\Leftrightarrow \left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x+\frac{1}{\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x}\le 34\\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^{2x}-34\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x+1\le 0\\ &\Leftrightarrow 17-12\sqrt{2}\le\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x\le 17+12\sqrt{2}\\ &\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3+\sqrt{8}}}(17-12\sqrt{2})\le x\le\log_{\sqrt{3+\sqrt{8}}}(17+12\sqrt{2})\\ &\Leftrightarrow -4\le x\le 4.\end{aligned}$$

Chọn phương án D

Câu 36. Giải bất phương trình $(10+3\sqrt{11})^x+(10-3\sqrt{11})^x\le 20$.

(A) $0\le x\le 1$. (B) $-1\le x<1$. (C) $-1<x\le 1$. (D) $-1\le x\le 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Đặt $t=(10+3\sqrt{11})^x$, điều kiện $t>0$. Khi đó $(10-3\sqrt{11})^x=\dfrac{1}{t}$.

Bất phương trình đã cho tương đương

$$t+\frac{1}{t}\le 20\Leftrightarrow t^2-20t+1\le 0\Leftrightarrow 10-3\sqrt{11}\le t\le 10+3\sqrt{11}.$$

Do đó $10-3\sqrt{11}\le(10+3\sqrt{11})^x\le 10+3\sqrt{11}\Leftrightarrow -1\le x\le 1$.

Chọn phương án D

Câu 37. Giải bất phương trình $64\cdot 9^x-84\cdot 12^x+27\cdot 16^x<0$.

(A) $\dfrac{9}{16}<x<\dfrac{3}{4}$. (B) $x<1\vee x>2$. (C) $1<x<2$. (D) Vô nghiệm.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&64\cdot 9^x-84\cdot 12^x+27\cdot 16^x<0\\ \Leftrightarrow&64-84\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^x+27\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{2x}<0\\ \Leftrightarrow&\frac{4}{3}<\left(\frac{4}{3}\right)^x<\frac{16}{9}\\ \Leftrightarrow&1<x<2.\end{aligned}$$

Chọn phương án C

Câu 38. Tập nghiệm của phương trình $\log_2^2 x-3\log_2 x+2<0$ là khoảng $(a;b)$. Giá trị biểu thức a^2+b^2 bằng

(A) 16. (B) 5. (C) 20. (D) 10.

Lời giải.

$\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 < 0 \Leftrightarrow (\log_2 x - 1)(\log_2 x - 2) < 0 \Leftrightarrow 1 < \log_2 x < 2 \Leftrightarrow 2 < x < 4 \Leftrightarrow x \in (2;4)$.

Vậy $\begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = 20$.

Chọn phương án C

Câu 39. Bất phương trình $2^{x+2} + 8 \cdot 2^{-x} - 33 < 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A 4. B 6. C 7. D Vô số.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4 \cdot 2^x + \frac{8}{2^x} - 33 < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 4 \cdot (2^x)^2 - 33 \cdot 2^x + 8 < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} < 2^x < 8 \ \Leftrightarrow \ -2 < x < 3. \end{aligned}$$

Suy ra, phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên là $-1, 0, 1, 2$.

Chọn phương án A

Câu 40. Biết rằng bất phương trình $\log_2(5^x+2) + 2\log_{(5^x+2)} 2 > 3$ có tập nghiệm là $S = (\log_a b; +\infty)$, với a, b là các số nguyên dương nhỏ hơn 6 và $a \neq 1$. Tính $P = 2a + 3b$.

A $P = 7$. B $P = 11$. C $P = 18$. D $P = 16$.

Lời giải.

Đặt $t = \log_2(5^x + 2)$. Khi đó bất phương trình đã cho có dạng

$$t + \frac{2}{t} > 3 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 3t + 2}{t} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t > 2 \\ 0 < t < 1. \end{array}\right.$$

— Với $t > 2 \Leftrightarrow \log_2(5^x + 2) > 2 \Leftrightarrow 5^x + 2 > 4 \Leftrightarrow 5^x > 2 \Leftrightarrow x > \log_5 2$.

— Với $0 < t < 1 \Leftrightarrow 0 < \log_2(5^x + 2) < 1 \Leftrightarrow 1 < 5^x + 2 < 2 \Leftrightarrow -1 < 5^x < 0$ (vô nghiệm).

Vậy $a = 5, b = 2 \Rightarrow P = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 16$.

Chọn phương án D

B MỨC ĐỘ 2

Câu 41. Nghiệm của bất phương trình $\log_{2-\sqrt{3}}(2x-5) \geq \log_{2-\sqrt{3}}(x-1)$ là

A $\frac{5}{2} < x \leq 4$. B $1 < x \leq 4$. C $\frac{5}{2} \leq x \leq 4$. D $x \geq 4$.

Lời giải.

$\log_{2-\sqrt{3}}(2x-5) \geq \log_{2-\sqrt{3}}(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5 \leq x - 1 \\ 2x - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x > \dfrac{5}{2}. \end{cases}$

Vậy nghiệm của bất phương trinh là $\frac{5}{2} < x \leq 4$.

Chọn phương án A

Câu 42. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\geq 0$ là

(A) $(-\infty;4)$. (B) $(1;4]$. (C) $(1;4)$. (D) $\left[4;\dfrac{11}{2}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện: $1<x<\dfrac{11}{2}$.

Bất phương trình tương đương $-\log_3(x-1)+\log_3(11-2x)\geq 0$

$\Leftrightarrow \log_3\dfrac{11-2x}{x-1}\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{11-2x}{x-1}\geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{12-3x}{x-1}\geq 0 \Leftrightarrow 1<x\leq 4$.

Chọn phương án (B)

Câu 43. Tập nghiệm của bất phương trình $4^{x+1}\leq 8^{x-2}$ là

(A) $[8;+\infty)$. (B) $\varnothing$. (C) $(0;8)$. (D) $(-\infty;8]$.

Lời giải.

Ta có: $4^{x+1}\leq 8^{x-2}\Leftrightarrow 2^{2x+2}\leq 2^{3x-6}\Leftrightarrow 2x+2\leq 3x-6\Leftrightarrow 8\leq x$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[8;+\infty)$.

Chọn phương án (A)

Câu 44. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x+1)>\log_3(2-x)$ là $S=(a;b)\cup(c;d)$ với a,b,c,d là các số thực. Khi đó $a+b+c+d$ bằng:

(A) 4. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Phương pháp

— Tìm điều kiện xác định của bất phương trình.

— Giải bất phương trình.

Cách giải:

Ta có:

$$\begin{cases}x+1>0\\2-x>0\\\log_{\frac{1}{3}}(x+1)>\log_3(2-x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\x<2\\-\log_3(x+1)>\log_3(2-x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<2\\\log_3(2-x)+\log_3(x+1)<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<2\\x^2+x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<2\\\left[\begin{array}{l}x>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\x<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Rightarrow S=\left(-1;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};2\right)$$

$$a+b+c+d=-1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}+2=2.$$

Chọn phương án (D)

Câu 45. Tập hợp tất cả các số thực x thỏa mãn $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x}$ là

(A) $\left[-\frac{2}{3};+\infty\right)$. (B) $\left[\frac{2}{5};+\infty\right)$. (C) $\left(-\infty;\frac{2}{5}\right]$. (D) $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x} &\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{-4x} \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x}\\ &\Leftrightarrow -4x \leqslant 2-x\\ &\Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leqslant x.\end{aligned}$$

Chọn phương án (A)

Câu 46. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 > 0$.

(A) $(1;8)$. (B) $(-\infty;1)\cup(8;+\infty)$. (C) $(8;+\infty)$. (D) $(0;2)\cup(8;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$

BPT $\Leftrightarrow \log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 > 0 \Leftrightarrow \log_2 x \in (-\infty;1)\cup(3;+\infty) \Leftrightarrow x \in (0;2)\cup(8;+\infty)$.

Chọn phương án (D)

Câu 47. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x-8) \geq -4$.

(A) $(-4;2)$. (B) $[-6;4)$. (C) $[-6;-4]\cup[2;4]$. (D) $[-6;-4)\cup(2;4]$.

Lời giải.

$$\text{Pt } \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-8>0 \\ x^2+2x-8 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-4 \text{ hoặc } x>2 \\ x^2+2x-24 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<-4 \text{ hoặc } x>2 \\ -6 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6 \leq x < -4 \\ 2 < x \leq 4 \end{array}\right..$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[-6;-4)\cup(2;4]$.

Chọn phương án (D)

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{4}}\left(x^2-3x\right) < \log_{\frac{\pi}{4}}(x+4)$ là

(A) $2-2\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2}$. (B) $2-2\sqrt{2} < x < 0$.

(C) $\left[\begin{array}{l} -4 < x < 2-2\sqrt{2} \\ x > 2+2\sqrt{2} \end{array}\right.$. (D) $\left[\begin{array}{l} x < 2-2\sqrt{2} \\ x > 2+2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^2-3x>0 \\ x+4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<0 \end{array}\right. \\ x>-4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ -4<x<0. \end{array}\right.$

$\log_{\frac{\pi}{4}}\left(x^2-3x\right) < \log_{\frac{\pi}{4}}(x+4) \Rightarrow x^2-3x > x+4 \Leftrightarrow x^2-4x-4>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2+2\sqrt{2} \\ x<2-2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện, ta có tập nghiệm của bất phương trình là $\left[\begin{array}{l} -4<x<2-2\sqrt{2} \\ x>2+2\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Chọn phương án C

Câu 49. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} \geq \dfrac{1}{4}$.

A $S=(-\infty;3]$. **B** $S=[3;+\infty)$. **C** $S=(-\infty;1]$. **D** $S=[1;+\infty)$.

Lời giải.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \Leftrightarrow x-1 \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 3.$$

Chọn phương án A

Câu 50. Nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình $\log_2(\log_4 x) \geq \log_4(\log_2 x)$ là

A $x=16$. **B** $x=9$. **C** $x=10$. **D** $x=8$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} \log_4 x>0 \\ \log_2 x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>1$

Bất phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & \log_2(\log_4 x) \geq \log_2\sqrt{log_2 x} \Leftrightarrow \log_4 x \geq \sqrt{\log_2 x} \\ \Leftrightarrow\ & (\log_{2^2} x)^2 \geq \log_2 x \Leftrightarrow \frac{1}{4}(\log_2 x)^2 \geq \log_2 x \\ \Leftrightarrow\ & \log_2 x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 16. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm nguyên nhỏ nhất là $x=16$.

Chọn phương án A

Câu 51. Tìm tập nghiệm S của hệ phương trình $\begin{cases} 4^{x+1} \leq 8^{6-2x} \\ 3^{4x+5} \geq 27^{1+x} \end{cases}$.

A $S=[2;+\infty)$. **B** $S=[-2;2]$. **C** $S=(-\infty;1]$. **D** $S=[2;5]$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} 4^{x+1} \leq 8^{6-2x} \\ 3^{4x+5} \geq 27^{1+x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2x+2} \leq 2^{18-6x} \\ 3^{4x+5} \geq 3^{3+3x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2 \leq 18-6x \\ 4x+5 \geq 3+3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2.$

Chọn phương án B

Câu 52. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $5^{x^2-x}<25$.

A $(2;+\infty)$. **B** $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$.
C $(-1;2)$. **D** $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Bất phương trình $\Leftrightarrow 5^{x^2-x}<5^2 \Leftrightarrow x^2-x<2 \Leftrightarrow x^2-x-2<0 \Leftrightarrow x\in(-1;2)$.

Chọn phương án C

Câu 53. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x) \geq 0$.

A $S=(1;4]$. **B** $S=(-\infty;4]$. **C** $S=\left(3;\dfrac{11}{2}\right)$. **D** $S=(1;4)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\ge 0 &\Leftrightarrow \log_3(11-2x)\ge\log_3(x-1)\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x-1>0\\ 11-2x\ge x-1\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x>1\\ x\le 4\end{cases}\Leftrightarrow 1<x\le 4.\end{aligned}$$

Chọn phương án A

Câu 54. Tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+2}<\left(\frac{1}{25}\right)^{-x}$ là

A $S=(-\infty;2)$. B $S=(-\infty;1)$. C $S=(1;+\infty)$. D $S=(2;+\infty)$.

Lời giải.

$5^{x+2}<\left(\frac{1}{25}\right)^{-x}\Leftrightarrow 5^{x+2}<5^{2x}\Leftrightarrow x+2<2x\Leftrightarrow x>2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(2;+\infty)$.

Chọn phương án D

Câu 55. Cho bất phương trình $2\log_3(4x-3)+\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)\le 2$. Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình bằng bao nhiêu?

A 5. B 3. C 6. D 7.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}4x-3>0\\ 2x+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\dfrac{3}{4}\\ x>-\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x>\dfrac{3}{4}$.

Ta có

$$\begin{aligned}2\log_3(4x-3)+\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)\le 2 &\Leftrightarrow \log_3(4x-3)^2\le\log_3 9(2x+3)\\ &\Leftrightarrow (4x-3)^2\le 9(2x+3)\\ &\Leftrightarrow 16x^2-42x-18\le 0\\ &\Leftrightarrow -\frac{3}{8}\le x\le 3\end{aligned}$$

So với điều kiện, ngiệm bất phương trình $\dfrac{3}{4}<x\le 3$.

Suy ra các nghiệm nguyên của bất phương trình là $x=1$, $x=2$, $x=3$. Do đó, $1+2+3=6$.

Chọn phương án C

Câu 56. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_4(2x-3)-\log_2\left(x-\frac{1}{2}\right)>0$ là

A $S=\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$. B $S=\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$.

C $S=\left(\frac{1}{2};1\right)$. D $S=(-\infty;1)\cup\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$.

Lời giải.

Điều kiện của bất phương trình là $x > \dfrac{3}{2}$. Khi đó

$$\log_2(2x-3) - \log_2\left(x - \frac{1}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow \log_2 \frac{\sqrt{2x-3}}{x - \frac{1}{2}} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-3}{x-\frac{1}{2}} > 1 \Leftrightarrow 2x - 3 > x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(\dfrac{5}{2}; +\infty\right)$.

Chọn phương án A

Câu 57. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{-x^2+x} < \dfrac{1}{4}$ là

A. $S = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.
B. $S = (-1; 2)$.
C. $S = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.
D. $S = (-2; 1)$.

Lời giải.

Bất phương trình $2^{-x^2+x} < \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{-x^2+x} < 2^{-2} \Leftrightarrow -x^2 + x < -2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 2 \end{array}\right.$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Chọn phương án A

Câu 58. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_2(x-1) + \log_2(x+3) \geq 1$.

A. $(1; +\infty)$.
B. $[-3; +\infty)$.
C. $[1; +\infty)$.
D. $(-3; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 1$.

$$\begin{aligned} & \log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_2(x-1) + \log_2(x+3) \geq 1 \\ \Leftrightarrow\ & \log_2(x+3) \geq 1 \\ \Leftrightarrow\ & x \geq -1 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện suy ra tập nghiệm là $(1; +\infty)$.

Chọn phương án A

Câu 59. Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{5}}(5x-3) > -2$ ta có nghiệm là

A. $x > \dfrac{28}{5}$.
B. $\dfrac{3}{5} < x < \dfrac{28}{5}$.
C. $\dfrac{3}{5} \leq x \leq \dfrac{28}{5}$.
D. $x < \dfrac{28}{5}$.

Lời giải.

Điều kiện $x > \dfrac{3}{5}$

Bất phương trình $\log_{\frac{1}{5}}(5x-3) > -2 \Leftrightarrow 5x - 3 < \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2} \Leftrightarrow x < \dfrac{28}{5} \Rightarrow \dfrac{3}{5} < x < \dfrac{28}{5}$.

Chọn phương án B

Câu 60. Nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 32$ là

(A) $x \in (-\infty; -5)$. (B) $x \in (-\infty; 5)$. (C) $x \in (-5; +\infty)$. (D) $x \in (5; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 32 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} \Leftrightarrow x < -5$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x \in (-\infty; -5)$.

Chọn phương án (A)

C MỨC ĐỘ 3

Câu 61. Bất phương trình $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x > 0$ có tập nghiệm là?

(A) $S = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$. (B) $S = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

(C) $S = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. (D) $S = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải.

Chia cả hai vế của bất phương trình cho 9^x ta được $6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 6 > 0$.

Đặt $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$ $(t > 0)$. Ta được bất phương trình mới $6t^2 - 13t + 6 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < \frac{3}{2} \\ t > \frac{3}{2}. \end{array}\right.$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{2}{3} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -1. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Chọn phương án (B)

Câu 62. Tất cả các giá trị của m để bất phương trình $(3m+1).18^x + (2-m).6^x + 2^x < 0$ có nghiệm đúng $\forall x > 0$ là:

(A) $(-\infty; 2)$. (B) $\left(-2; -\frac{1}{3}\right)$. (C) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$. (D) $(-\infty; -2]$.

Lời giải.

$(3m+1).18^x + (2-m).6^x + 2^x < 0$

Chia 2 vế cho $2^x > 0$, ta được: $(3m+1).9^x + (2-m).3^x + 1 < 0$

Đặt $t = 3^x$, có $x > 0 \Rightarrow t > 1$

BPT $\Leftrightarrow (3m+1)t^2 + (2-m)t + 1 < 0 \Leftrightarrow m(3t^2 - t) + t^2 + 2t + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{t^2 + 2t + 1}{3t^2 - t}$

Xét $f(t) = -\dfrac{t^2 + 2t + 1}{3t^2 - t}$ trên $[1; \infty)$

Có $f'(t) = \dfrac{7t^2 + 6t - 1}{(3t^2 - t)^2} > 0\ \forall t > 1$

$\Rightarrow y = f(t)$ đồng biến trên $[1; \infty)$

$\Rightarrow \min\limits_{[1;+\infty)} f(t) = f(1) = -2$

Vậy $m \leq -2$.

Chọn phương án (D)

Câu 63. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{2018} x \le \log_x 2018$.

A $S = (0; 2018]$.

B $S = \left[\frac{1}{2018}; 2018\right]$.

C $S = \left(0; \frac{1}{2018}\right] \cup (1; 2018]$.

D $S = \left(-\infty; \frac{1}{2018}\right] \cup (1; 2018]$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0, x \ne 1$.

Phương trình đã cho tương đương với $\log_{2018} x \le \dfrac{1}{\log_{2018} x}$

$$\Leftrightarrow \frac{(\log_{2018} x)^2 - 1}{\log_{2018} x} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < \log_{2018} x \le 1 \\ \log_{2018} x \le -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x \le 2018 \\ 0 < x \le \dfrac{1}{2018} \end{array}\right.$$

Chọn phương án C

Câu 64. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $4^{x+1} - m(2^x + 1) > 0$ có nghiệm với $\forall x \in \mathbb{R}$.

A $m \in (-\infty; 0]$.

B $m \in (-\infty; 0)$.

C $m \in (-\infty; 1)$.

D $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải.

Biến đổi bất phương trình đã cho về dạng $m < \dfrac{4 \cdot 4^x}{2^x + 1}$.

Xét hàm số $y = f(t)$ với $t > 0$, ta có

Đạo hàm: $f'(t) = 4 \cdot \dfrac{t^2 + 2t}{(t+1)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 0; t = -2$. Mặt khác, $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = 0$. Bảng biến thiên

t	0		$+\infty$
$f'(t)$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thu được $m \le 0$.

Chọn phương án A

Câu 65. Tìm m để bất phương trình $\log^2 x + 3\log x + m \ge 0$ nghiệm đúng với mọi x thuộc tập xác định.

A $m \ge \dfrac{9}{4}$.

B $m \le \dfrac{9}{4}$.

C $m < \dfrac{9}{4}$.

D $m > -\dfrac{9}{4}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$. Đặt $t = \log x, t \in \mathbb{R}$.

Bất phương trình trở thành $t^2 + 3t + m \ge 0$

$\Leftrightarrow m \ge -t^2 - 3t\,(2)$.

Bất phương trình đã cho có nghiệm đúng với mọi x thuộc tập xác định $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm đúng với mọi $t \in \mathbb{R}$.

Xét $f(t) = -t^2 - 3t$ với $t \in \mathbb{R}$.

Ta có: $f(t)' = -2t - 3$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{3}{2}$.

t	$-\infty$		$-\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{9}{4}$	$\searrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $m \ge \dfrac{9}{4}$.

Chọn phương án (A)

Câu 66. Bất phương trình $2^{x+2} + 8 \cdot 2^{-x} - 33 < 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

(A) Vô số. (B) 6. (C) 7. (D) 4.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 2^{x+2} + 8.2^{-x} - 33 < 0 &\Leftrightarrow 4 \cdot 2^{2x} - 33 \cdot 2^x + 8 < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4} < 2^x < 8 \Leftrightarrow -2 < x < 3. \end{aligned}$$

Suy ra bất phương trình có 4 nghiệm nguyên $S = \{-1, 0, 1, 2\}$.

Chọn phương án (D)

Câu 67. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [0; 10]$ để tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{\log_2^2 x + 3\log_{\frac{1}{2}} x^2 - 7} < m\left(\log_4 x^2 - 7\right)$ chứa khoảng $(256; +\infty)$?

(A) 7. (B) 10. (C) 8. (D) 9.

Lời giải.

Xét trên $(256; +\infty)$, khi đó bất phương trình tương đương

$$\sqrt{\log_2^2 x - 6\log_2 x - 7} < m\left(\log_2 x - 7\right) \quad (1).$$

Đặt $t = \log_2 x$ với $x > 256 \Rightarrow t = \log_2 x > 8$.

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \sqrt{t^2 - 6t - 7} < m(t-7) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(t+1)(t-7)} < m(t-7) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{t+1} < m\sqrt{t-7} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{t+1}{t-7}} < m \ (*) (\text{do } t - 7 > 1 > 0). \end{aligned}$$

Bất phương trình đã cho có tập nghiệm chứa $(256; +\infty)$ khi và chỉ khi (*) nghiệm đúng với mọi $t > 8$.

Ta có $\forall t > 8$ thì $\dfrac{t+1}{t-7} = 1 + \dfrac{8}{t-7} \Rightarrow 1 < \dfrac{t+1}{t-7} < 1 + \dfrac{8}{8-7} = 9 \Rightarrow 1 < \sqrt{\dfrac{t+1}{t-7}} < 3$.

Từ đó tìm được điều kiện của tham số m là $m \geq 3$. Vậy có 8 giá trị nguyên cần tìm là $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

Chọn phương án (C)

Câu 68. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(1; 20)$ để $\forall x \in \left(\dfrac{1}{3}; 1\right)$ đều là nghiệm của bất phương trình $\log_m x > \log_x m$?

(A) 18. (B) 16. (C) 17. (D) 0.

Lời giải.

ĐK $0 < x \neq 1$. BPT $\Leftrightarrow \log_m x > \dfrac{1}{\log_m x} \Leftrightarrow \dfrac{(\log_m x)^2 - 1}{\log_m x} > 0$. $\quad (*)$

Do $x \in \left(\dfrac{1}{3}; 1\right) \Rightarrow \log_m x < 0$. Do đó $(*) \Leftrightarrow -1 < \log_m x < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{m} < x < m$

Để mọi $x \in \left(\dfrac{1}{3}; 1\right)$ đều là nghiệm của BPT thì $\dfrac{1}{m} \leq \dfrac{1}{3} < 1 \leq m \Leftrightarrow m \geq 3 \Rightarrow m \in \{3; 4; \ldots; 19\}$.

Chọn phương án C

Câu 69. Tất cả các giá trị của m để bất phương trình $(3m+1)\,.18^x + (2-m)\,.6^x + 2^x < 0$ có nghiệm đúng $\forall x > 0$ là:

A $(-\infty; 2)$. **B** $\left(-2; -\dfrac{1}{3}\right)$. **C** $\left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right)$. **D** $(-\infty; -2]$.

Lời giải.

$(3m+1)\,.18^x + (2-m)\,.6^x + 2^x < 0$

Chia 2 vế cho $2^x > 0$, ta được: $(3m+1)\,.9^x + (2-m)\,.3^x + 1 < 0$

Đặt $t = 3^x$, có $x > 0 \Rightarrow t > 1$

BPT $\Leftrightarrow (3m+1)t^2 + (2-m)t + 1 < 0 \Leftrightarrow m(3t^2 - t) + t^2 + 2t + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{t^2+2t+1}{3t^2-t}$

Xét $f(t) = -\dfrac{t^2+2t+1}{3t^2-t}$ trên $[1; \infty)$

Có $f'(t) = \dfrac{7t^2+6t-1}{(3t^2-t)^2} > 0 \ \forall t > 1$

$\Rightarrow y = f(t)$ đồng biến trên $[1; \infty)$

$\Rightarrow \min\limits_{[1;+\infty)} f(t) = f(1) = -2$

Vậy $m \leq -2$.

Chọn phương án D

Câu 70. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $4^{x+1} - m(2^x + 1) > 0$ có nghiệm với $\forall x \in \mathbb{R}$.

A $m \in (-\infty; 0]$. **B** $m \in (-\infty; 0)$.

C $m \in (-\infty; 1)$. **D** $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải.

Biến đổi bất phương trình đã cho về dạng $m < \dfrac{4 \cdot 4^x}{2^x + 1}$.

Xét hàm số $y = f(t)$ với $t > 0$, ta có

Đạo hàm: $f'(t) = 4 \cdot \dfrac{t^2 + 2t}{(t+1)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 0; t = -2$. Mặt khác, $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = 0$. Bảng biến thiên

t	0		$+\infty$
$f'(t)$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thu được $m \leq 0$.

Chọn phương án A

Câu 71. Bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} \geq \frac{1}{8}$ có tập nghiệm là

(A) $[3;+\infty)$. (B) $(-\infty;-1]$. (C) $[-1;3]$. (D) $(-1;3)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} &&\geq \frac{1}{8}\\ \Leftrightarrow\ &\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} &&\geq \left(\frac{1}{2}\right)^3\\ \Leftrightarrow\ &x^2-2x &&\leq 3\\ \Leftrightarrow\ &x^2-2x-3 &&\leq 0\\ \Leftrightarrow\ &-1\leq x\leq 3. \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=[-1;3]$.

Chọn phương án (C)

Câu 72. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 > 0$.

(A) $(1;8)$. (B) $(-\infty;1)\cup(8;+\infty)$. (C) $(8;+\infty)$. (D) $(0;2)\cup(8;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x>0$

BPT $\Leftrightarrow \log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 > 0 \Leftrightarrow \log_2 x \in (-\infty;1)\cup(3;+\infty) \Leftrightarrow x\in(0;2)\cup(8;+\infty)$.

Chọn phương án (D)

Câu 73. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x-8)\geq -4$.

(A) $(-4;2)$. (B) $[-6;4)$. (C) $[-6;-4]\cup[2;4]$. (D) $[-6;-4)\cup(2;4]$.

Lời giải.

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-8>0\\ x^2+2x-8\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-4 \text{ hoặc } x>2\\ x^2+2x-24\leq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<-4 \text{ hoặc } x>2\\ -6\leq x\leq 4\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6\leq x<-4\\ 2<x\leq 4\end{array}\right..$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[-6;-4)\cup(2;4]$.

Chọn phương án (D)

Câu 74. Cho bất phương trình $9^x+9^{x+1}+9^{x+2}<2^x+2^{x+1}+2^{x+2}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

(A) Bất phương trình có đúng một nghiệm âm. (B) Bất phương trình chỉ có nghiệm âm.
(C) Bất phương trình vô nghiệm. (D) Bất phương trình có một nghiệm dương.

Lời giải.

$9^x+9^{x+1}+9^{x+2}<2^x+2^{x+1}+2^{x+2} \Leftrightarrow 91\cdot 9^x<7\cdot 2^x \Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^x<\frac{7}{91}\Leftrightarrow x<\log_{\frac{9}{2}}\frac{7}{91}<0$.

Vậy bất phương trình chỉ có nghiệm âm.

Chọn phương án (B)

D MỨC ĐỘ 4

Câu 75. Biết rằng $2^{x+\frac{1}{x}} = \log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right]$ trong đó $x>0$. Tính giá trị của biểu thức $P = x^2+y^2-xy+1$

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $x+\dfrac{1}{x} \geq 2 \Rightarrow 2^{x+\frac{1}{x}} \geq 4,\ (1)$.

Ta thấy $14-(y-2)\sqrt{y+1} = -(\sqrt{y+1})^3 + 3\sqrt{y+1} + 14$.

Xét $f(t) = -t^3+3t+14$ với $t=\sqrt{y+1}\geq 0$. Ta có bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	16	$\searrow$	

Do vậy, ta được $\log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right] \leq 4,\ (2)$.

Từ (1) và (2) ta được $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$.

Vậy $P=2$.

Chọn phương án (B)

Câu 76. Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_9(x+6)-\log_3\left(5-\sqrt[4]{19-x}\right)<0$ là

(A) -9. (B) -12. (C) 0. (D) -11.

Lời giải.

Ta có $\log_9(x+6)-\log_3\left(5-\sqrt[4]{19-x}\right)<0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\log_3(x+6) < \log_3\left(5-\sqrt[4]{19-x}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6<x\leq 19 \\ \sqrt{x+6} < 5-\sqrt[4]{19-x} \end{cases}$$

Xét bất phương trình $\sqrt{x+6}<5-\sqrt[4]{19-x}$ với $-6<x\leq 19$.

Ta có $\sqrt{x+6}<5-\sqrt[4]{19-x} \Leftrightarrow \sqrt{x+6}-3+\sqrt[4]{19-x}-2<0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x+6}+3} + \frac{3-x}{\left(\sqrt[4]{19-x}+2\right)\left(\sqrt{19-x}+4\right)} < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{1}{\sqrt{x+6}+3} - \frac{1}{\left(\sqrt[4]{19-x}+2\right)\left(\sqrt{19-x}+4\right)}\right] < 0$$

$$\Leftrightarrow x<3$$

$\left(\text{Vì } \dfrac{1}{\sqrt{x+6}+3} - \dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{19-x}+2\right)\left(\sqrt{19-x}+4\right)} \geq 0, \forall x\in(-6;19]\right)$.

Suy ra bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=(-6;3)$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho là

$$T = -5+(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2 = -12.$$

Chọn phương án B

Câu 77. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_{0,02}(\log_2(3^x+1)) > \log_{0,02} m$ có nghiệm với mọi $x \in (-\infty;0)$.

A $m > 9$. **B** $m < 2$. **C** $0 < m < 1$. **D** $m \geq 1$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Điều kiện của tham số $m > 0$.

Ta có $\log_{0,02}(\log_2(3^x+1)) > \log_{0,02} m \Leftrightarrow \log_2(3^x+1) < m$.

Xét hàm số $f(x) = \log_2(3^x+1), \forall x \in (-\infty;0)$ có $f' = \dfrac{3^x \ln 3}{(3^x+1)\ln 2} > 0, \forall x \in (-\infty;0)$.

Lập bảng biến thiên

x	$-\infty$		0
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

Khi đó với yêu cầu bài toán thì $m \geq 1$

Chọn phương án D

Câu 78. Cho bất phương trình $8^x - 3.2^{2x+1} + 9.2^x + m - 5 > 0$ (1) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x \in [1;2]$?

A Vô số. **B** 4. **C** 5. **D** 6.

Lời giải.

Đặt $t = 2^x$ vì $x \in [1;2] \Rightarrow t \in [2;4]$.

Bất phương trình đã cho trở thành $t^3 - 6t^2 + 9t - 5 > -m$ có nghiệm đúng với $t \in [2;4]$.

Đặt $g(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 5 \Rightarrow g'(t) = 3t^2 - 12t + 9 > 0 \forall t \in [2;4]$.

$\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra $-m < Min\, g(t) = g(2) = -5 \Leftrightarrow m > 5$.

Vậy có vô số giá trị của m.

Chọn phương án A

Câu 79. Cho x, y là số thực dương thỏa mãn $\log_2 x + \log_2 y + 1 \geq \log_2\left(x^2 + 2y\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x + 2y$.

A $P = 9$. **B** $P = 2\sqrt{2} + 3$. **C** $P = 2 + 3\sqrt{2}$. **D** $P = 3 + \sqrt{3}$.

Lời giải.

$\log_2 x + \log_2 y + 1 \geq \log_2\left(x^2 + 2y\right) \Leftrightarrow 2xy \geq x^2 + 2y \Leftrightarrow 2y(1-x) + x^2 \leq 0 \quad (1)$

Vì $P = x + 2y \Rightarrow 2y = P - x$, thay vào (1) ta được:

$(P-x)(1-x) + x^2 \leq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x(P+1) + P \leq 0$

Phương trình có nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow (P+1)^2 - 8P \geq 0$

$\Leftrightarrow P^2 - 6P + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P \geq 3 + 2\sqrt{2} \\ P \leq 3 - 2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Chọn phương án B

Câu 80. Biết rằng $2^{x+\frac{1}{x}} = \log_2\left[14 - (y-2)\sqrt{y+1}\right]$ trong đó $x > 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = x^2 + y^2 - xy + 1$

A 1. B 2. C 3. D 4.

Lời giải.

Ta có $x + \dfrac{1}{x} \geq 2 \Rightarrow 2^{x+\frac{1}{x}} \geq 4,\ (1)$.

Ta thấy $14 - (y-2)\sqrt{y+1} = -(\sqrt{y+1})^3 + 3\sqrt{y+1} + 14$.

Xét $f(t) = -t^3 + 3t + 14$ với $t = \sqrt{y+1} \geq 0$. Ta có bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	16	$\searrow$	

Do vậy, ta được $\log_2\left[14 - (y-2)\sqrt{y+1}\right] \leq 4,\ (2)$.

Từ (1) và (2) ta được $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$.

Vậy $P = 2$.

Chọn phương án B

Câu 81. Gọi S là tổng các nghiệm của bất phương trình

$$\left(\frac{4\sqrt{2\log_x^2\dfrac{22}{3} - 2\log_x\dfrac{22}{3} + 5}}{9^{4\log_{81}2}} - \sqrt{13} + \sqrt{\frac{2}{\log^2_{\frac{22}{3}} x} - \frac{4}{\log_{\frac{22}{3}} x} + 4}\right)(24x^6 - 2x^5 + 27x^4 - 2x^3 + 2017x^2 +$$

$2018) \leqslant 0$. Giá trị gần đúng của S là

A 12,3. B 12,2. C 12,1. D 12.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} 2\log_x^2\dfrac{22}{3} - 2\log_x\dfrac{22}{3} + 5 \geqslant 0 \\ \dfrac{2}{\log^2_{\frac{22}{3}} x} - \dfrac{4}{\log_{\frac{22}{3}} x} + 4 \geqslant 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Ta có: $24x^6 - 2x^5 + 27x^4 - 2x^3 + 2017x^2 + 2018 = 23x^6 + x^4(x-1)^2 + 25x^4 + x^2(x-1)^2 + 2016x^2 + 2018 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{4\sqrt{2\log_x^2\dfrac{22}{3}-2\log_x\dfrac{22}{3}+5}}{9^{4\log_{81}2}}-\sqrt{13}+\sqrt{\frac{2}{\log_{\frac{22}{3}}^2 x}-\frac{4}{\log_{\frac{22}{3}}x}+4}\leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2\log_x^2\frac{22}{3}-2\log_x\frac{22}{3}+5}-\sqrt{13}+\sqrt{2\log_x^2\frac{22}{3}-4\log_x\frac{22}{3}+4}\leqslant 0$$

Đặt $t=\log_x\dfrac{22}{3}$, ta được:

$$\sqrt{2t^2-2t+5}+\sqrt{2t^2-4t+4}\leqslant\sqrt{13}\ (*)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{2}t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{9}{2}}+\sqrt{\left(-\sqrt{2}t+\sqrt{2}\right)^2+2}\leqslant\sqrt{13}$$

Đặt $\vec{u}\left(\sqrt{2}t-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$ và $\vec{v}\left(-\sqrt{2}t+\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$. Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u}|+|\vec{u}|\geqslant|\vec{u}+\vec{v}|$, ta có:

$$\sqrt{\left(\sqrt{2}t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{9}{2}}+\sqrt{\left(-\sqrt{2}t+\sqrt{2}\right)^2+2}\geqslant\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{25}{2}}=\sqrt{13}$$

Do đó (*) xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u},\vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\sqrt{2}t-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\left(-\sqrt{2}t+\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow t=\dfrac{4}{5}$.

Suy ra $\log_x\dfrac{22}{3}=\dfrac{4}{5}\Leftrightarrow x^{\frac{4}{5}}=\dfrac{22}{3}\Leftrightarrow x=\sqrt[4]{\left(\dfrac{22}{3}\right)^5}\simeq 12,1$.

Chọn phương án C

Câu 82. Cho x, y là số thực dương thỏa mãn $\log_2 x+\log_2 y+1\geq\log_2\left(x^2+2y\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x+2y$.

(A) $P=9$. (B) $P=2\sqrt{2}+3$. (C) $P=2+3\sqrt{2}$. (D) $P=3+\sqrt{3}$.

Lời giải.

$\log_2 x+\log_2 y+1\geq\log_2\left(x^2+2y\right)\Leftrightarrow 2xy\geq x^2+2y\Leftrightarrow 2y(1-x)+x^2\leq 0\quad(1)$

Vì $P=x+2y\Rightarrow 2y=P-x$, thay vào (1) ta được:

$(P-x)(1-x)+x^2\leq 0\Leftrightarrow 2x^2-x(P+1)+P\leq 0$

Phương trình có nghiệm

$\Leftrightarrow\Delta\geq 0\Leftrightarrow(P+1)^2-8P\geq 0$

$\Leftrightarrow P^2-6P+1\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}P\geq 3+2\sqrt{2}\\ P\leq 3-2\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Chọn phương án B

Câu 83. Có bao nhiêu số nguyên dương a (a là tham số) để phương trình

$$(3a^2+12a+15)\log_{27}(2x-x^2)+\left(\frac{9}{2}a^2-3a+1\right)\log_{\sqrt{11}}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=2\log_9(2x-x^2)+\log_{11}\frac{2-x^2}{2}$$

có nghiệm duy nhất?

(A) 2. (B) 0. (C) Vô số. (D) 1.

Lời giải.

Điều kiện $0 < x < \sqrt{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$(a^2+4a+5)\log_3(2x-x^2)+(9a^2-6a+2)\log_{11}\left(\dfrac{2-x^2}{2}\right)=\log_3(2x-x^2)+\log_{11}\left(\dfrac{2-x^2}{2}\right)$.

$\Leftrightarrow (a+2)^2\log_3(2x-x^2)+(3a-1)^2\log_{11}\left(\dfrac{2-x^2}{2}\right)=0\ (*)$

Đặt $u=\log_3(2x-x^2)$ và $v=\log_{11}\left(\dfrac{2-x^2}{2}\right)$. Phương trình $(*)$ trở thành

$$(u+9v)a^2+2(2u-3v)a+4u+v=0\ (**)$$

Phương trình $(*)$ có nghiệm thì phải tồn tại a, tức là phương trình $(**)$ phải có nghiệm a. Do đó $\Delta'=(2u-3v)^2-(u+9v)(4u+v)=-49uv\geq 0 \Leftrightarrow uv\leq 0$ hay $\log_3(2x-x^2)\cdot\log_{11}\left(\dfrac{2-x^2}{2}\right)\leq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_3(2x-x^2)\leq 0\\ \log_{11}\left(\dfrac{2-x^2}{2}\right)\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}\log_3(2x-x^2)\geq 0\\ \log_{11}\left(\dfrac{2-x^2}{2}\right)\leq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<2x-x^2\leq 1\\ \dfrac{2-x^2}{2}\geq 1\end{cases}\\ \begin{cases}2x-x^2\geq 1\\ 0<\dfrac{2-x^2}{2}\leq 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<2x-x^2\leq 1\\ x=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=1\\ 0<\dfrac{2-x^2}{2}\leq 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=1.$$

Với $x=1$, ta thay lại vào phương trình $(*)$ ta được $a=\dfrac{1}{3}$ (loại)

Vậy không có số nguyên dương a để phương trình đã cho cho nghiệm duy nhất.

Chọn phương án B

Câu 84. Biết rằng $2^{x+\frac{1}{x}}=\log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right]$ trong đó $x>0$. Tính giá trị của biểu thức $P=x^2+y^2-xy+1$

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải.

Ta có $x+\dfrac{1}{x}\geq 2\Rightarrow 2^{x+\frac{1}{x}}\geq 4,\ (1)$.

Ta thấy $14-(y-2)\sqrt{y+1}=-(\sqrt{y+1})^3+3\sqrt{y+1}+14$.

Xét $f(t)=-t^3+3t+14$ với $t=\sqrt{y+1}\geq 0$. Ta có bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	16	$\searrow$	

Do vậy, ta được $\log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right]\leq 4,\ (2)$.

Từ (1) và (2) ta được $\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}$.

Vậy $P = 2$.

Chọn phương án (B)

Câu 85. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{(x+y)}(x^2+y^2) \leq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $A = 48(x+y)^3 - 156(x+y)^2 + 133(x+y) + 4$ là

(A) 29. **(B)** $\dfrac{1369}{36}$. **(C)** 30. **(D)** $\dfrac{505}{36}$.

Lời giải.

Xét giả thiết $\log_{(x+y)}(x^2+y^2) \leq 1$, ta có

— Nếu $x + y > 1$ ta có $x^2 + y^2 \leq x + y$.
Mặt khác $x^2 + y^2 \geq \dfrac{(x+y)^2}{2} \Rightarrow \dfrac{(x+y)^2}{2} \leq x + y \Leftrightarrow 1 < x + y \leq 2$.

— Nếu $0 < x + y < 1$, ta có $x^2 + y^2 \geq x + y \Leftrightarrow (x+y)^2 - (x+y) \geq 2xy > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+y<0 \\ x+y>1 \end{array}\right.$(loại).

Đặt $t = x + y \Rightarrow t \in (1; 2]$, xét hàm số $f(t) = 48t^3 - 156t^2 + 133t + 4$.

Ta có $f'(t) = 144t^2 - 312t + 133$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{19}{12} \\ t = \dfrac{7}{12} \end{array}\right. \Rightarrow t = \dfrac{19}{12}$.

Ta có BBT:

t	1		$\frac{19}{12}$		2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	29	$\searrow$	$\frac{505}{36}$	$\nearrow$	30

Vậy $\max A = \max\limits_{(1;2]} f(t) = 30$ khi $x + y = 2$.

Chọn phương án (C)

Câu 86. Xét bất phương trình $\log_2^2 2x - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(\sqrt{2}; +\infty\right)$.

(A) $m \in (0; +\infty)$. **(B)** $m \in \left(-\dfrac{3}{4}; 0\right)$. **(C)** $m \in \left(-\dfrac{3}{4}; +\infty\right)$. **(D)** $m \in (-\infty; 0)$.

Lời giải.

Đặt $t = \log_2 x$, do $x \in \left(\sqrt{2}; +\infty\right)$ nên $t \in \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ta được phương trình

$$(t+1)^2 - 2(m+1)t - 2 < 0 \Leftrightarrow f(t) = \frac{t^2-1}{t} < 2m.$$

Ta có $f'(t) = 1 + \dfrac{1}{t^2} > 0$, $\forall t \in \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$, nên

$$f(t) \in \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right) \Leftrightarrow 2m > -\frac{3}{2} \Leftrightarrow m \in \left(-\frac{3}{4}; +\infty\right).$$

Chọn phương án C

Câu 87. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(x\sqrt{x^2+2}+4-x^2\right)+2x+\sqrt{x^2+2}\le 1$ là $\left(-\sqrt{a};-\sqrt{b}\right]$. Khi đó ab bằng

A $\frac{12}{5}$. **B** $\frac{5}{12}$. **C** $\frac{15}{16}$. **D** $\frac{16}{15}$.

Lời giải.

Điều kiện:

$$\begin{aligned}
& x\sqrt{x^2+2}+4-x^2>0 \Leftrightarrow x\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)+4>0\\
\Leftrightarrow\ & x\cdot\frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}+4>0 \Leftrightarrow \frac{2x+4\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)}{\sqrt{x^2+2}+x}>0\\
\Leftrightarrow\ & 4\sqrt{x^2+2}+6x>0 \text{ (vì } \sqrt{x^2+2}+x>0,\forall x)\\
\Leftrightarrow\ & 2\sqrt{x^2+2}>-3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3x<0\\ \begin{cases} -3x\ge 0\\ 4(x^2+2)>(-3x)^2\end{cases}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x>0\\ \begin{cases} x\le 0\\ 5x^2<8\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x>0\\ -\frac{40}{5}<x\le 0.\end{cases}
\end{aligned}$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
& \log_2\left(x\sqrt{x^2+2}+4-x^2\right)+2x+\sqrt{x^2+2}\le 1\\
\Leftrightarrow\ & \log_2\left(\frac{6x+4\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}+x}\right)+2x+\sqrt{x^2+2}\le 1\\
\Leftrightarrow\ & \log_2(6x+4\sqrt{x^2+2})-\log_2(\sqrt{x^2+2}+x)+2x+\sqrt{x^2+2}\le 1\\
\Leftrightarrow\ & \log_2\left[2\left(3x+2\sqrt{x^2+2}\right)\right]-\log_2(\sqrt{x^2+2}+x)+2x+\sqrt{x^2+2}\le 1\\
\Leftrightarrow\ & \log_2 2+\log_2(3x+2\sqrt{x^2+2})-\log_2(\sqrt{x^2+2}+x)+2x+\sqrt{x^2+2}\le 1\\
\Leftrightarrow\ & \log_2(3x+2\sqrt{x^2+2})+3x+2\sqrt{x^2+2}\le \log_2(\sqrt{x^2+2}+x)+x+\sqrt{x^2+2}(*)
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=t+\log_2 t$ với $t>0$ ta có $f'(t)=1+\frac{1}{t\ln 2}>0$ với mọi $t>0$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Từ đó

$$\begin{aligned}
(*)\Leftrightarrow\ & f(3x+2\sqrt{x^2+2})\le f(x+\sqrt{x^2+2})\\
\Leftrightarrow\ & 3x+2\sqrt{x^2+2}\le x+\sqrt{x^2+2}\\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{x^2+2}\le -2x \Leftrightarrow \begin{cases} -2x\ge 0\\ x^2+2\le 4x^2\end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \le 0 \\ 3x^2 \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ \left[\begin{array}{l} x \ge \dfrac{\sqrt{6}}{3} \\ x \le -\dfrac{\sqrt{6}}{3} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \le -\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Kết hợp điều kiện $\left[\begin{array}{l} x > 0 \\ -\dfrac{\sqrt{40}}{5} < x \le 0 \end{array}\right.$ ta có $-\dfrac{\sqrt{40}}{5} < x \le -\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ hay $-\sqrt{\dfrac{8}{5}} < x \le -\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Tập nghiệm bất phương trình $S = \left(-\sqrt{\dfrac{8}{5}}; -\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right]$ nên $a = \dfrac{8}{5}$; $b = \dfrac{2}{3} \Rightarrow ab = \dfrac{16}{15}$.

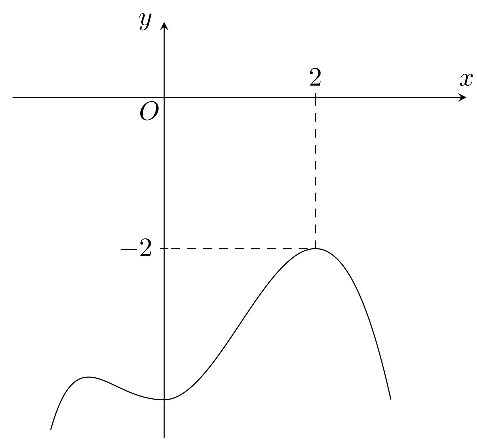
Chọn phương án D

Câu 88.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$$9 \cdot 6^{f(x)} + \left(4 - f^2(x)\right) \cdot 9^{f(x)} \le (-m^2 + 5m) \cdot 4^{f(x)}$$

nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.



(A) 10. (B) 4.
(C) 5. (D) 9.

Lời giải.

Ta có

$9 \cdot 6^{f(x)} + \left(4 - f^2(x)\right) \cdot 9^{f(x)} \le (-m^2 + 5m) \cdot 4^{f(x)} \Leftrightarrow -m^2 + 5m \ge 9\left(\dfrac{3}{2}\right)^{f(x)} + \left[4 - f^2(x)\right] \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2f(x)}$.(1)

Từ đồ thị suy ra $f(x) \le -2\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} 9 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{f(x)} \le 4, & \forall x \in \mathbb{R} \\ \left[4 - f^2(x)\right] \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2f(x)} \le 0, & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Do đó $g(x) = 9 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{f(x)} + \left[4 - f^2(x)\right] \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2f(x)} \le 4,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \max\limits_{\mathbb{R}} g(x) = 4$.

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -m^2 + 5m \ge 4 \Leftrightarrow 1 \le m \le 4$.

Vậy $m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Chọn phương án B

Câu 89. Cho x, y là số thực dương thỏa mãn $\log_2 x + \log_2 y + 1 \ge \log_2\left(x^2 + 2y\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x + 2y$.

(A) $P = 9$. (B) $P = 2\sqrt{2} + 3$. (C) $P = 2 + 3\sqrt{2}$. (D) $P = 3 + \sqrt{3}$.

Lời giải.

$\log_2 x + \log_2 y + 1 \geq \log_2\left(x^2 + 2y\right) \Leftrightarrow 2xy \geq x^2 + 2y \Leftrightarrow 2y(1-x) + x^2 \leq 0 \quad (1)$
Vì $P = x + 2y \Rightarrow 2y = P - x$, thay vào (1) ta được:
$(P-x)(1-x) + x^2 \leq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x(P+1) + P \leq 0$
Phương trình có nghiệm
$\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow (P+1)^2 - 8P \geq 0$
$\Leftrightarrow P^2 - 6P + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P \geq 3 + 2\sqrt{2} \\ P \leq 3 - 2\sqrt{2} \end{array}\right.$.
Chọn phương án B

Câu 90. Có bao nhiêu số nguyên dương a (a là tham số) để phương trình

$$(3a^2 + 12a + 15)\log_{27}(2x - x^2) + \left(\frac{9}{2}a^2 - 3a + 1\right)\log_{\sqrt{11}}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = 2\log_9(2x - x^2) + \log_{11}\frac{2 - x^2}{2}$$

có nghiệm duy nhất?

(A) 2. (B) 0. (C) Vô số. (D) 1.

Lời giải.
Điều kiện $0 < x < \sqrt{2}$.
Phương trình đã cho tương đương với phương trình
$(a^2 + 4a + 5)\log_3(2x - x^2) + (9a^2 - 6a + 2)\log_{11}\left(\frac{2 - x^2}{2}\right) = \log_3(2x - x^2) + \log_{11}\left(\frac{2 - x^2}{2}\right)$.
$\Leftrightarrow (a+2)^2\log_3(2x - x^2) + (3a-1)^2\log_{11}\left(\frac{2 - x^2}{2}\right) = 0 \ (*)$
Đặt $u = \log_3(2x - x^2)$ và $v = \log_{11}\left(\frac{2 - x^2}{2}\right)$. Phương trình $(*)$ trở thành

$$(u + 9v)a^2 + 2(2u - 3v)a + 4u + v = 0 \ (**)$$

Phương trình $(*)$ có nghiệm thì phải tồn tại a, tức là phương trình $(**)$ phải có nghiệm a. Do đó $\Delta' = (2u - 3v)^2 - (u + 9v)(4u + v) = -49uv \geq 0 \Leftrightarrow uv \leq 0$ hay $\log_3(2x - x^2) \cdot \log_{11}\left(\frac{2 - x^2}{2}\right) \leq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_3(2x - x^2) \leq 0 \\ \log_{11}\left(\dfrac{2 - x^2}{2}\right) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_3(2x - x^2) \geq 0 \\ \log_{11}\left(\dfrac{2 - x^2}{2}\right) \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < 2x - x^2 \leq 1 \\ \dfrac{2 - x^2}{2} \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - x^2 \geq 1 \\ 0 < \dfrac{2 - x^2}{2} \leq 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < 2x - x^2 \leq 1 \\ x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ 0 < \dfrac{2 - x^2}{2} \leq 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1.$$

Với $x = 1$, ta thay lại vào phương trình $(*)$ ta được $a = \frac{1}{3}$ (loại)
Vậy không có số nguyên dương a để phương trình đã cho cho nghiệm duy nhất.
Chọn phương án B

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. B	3. B	4. B	5. C	6. C	7. D	8. B	9. C	10. C
11. B	12. D	13. C	14. D	15. D	16. C	17. B	18. C	19. C	20. C
21. D	22. C	23. A	24. D	25. A	26. D	27. A	28. D	29. A	30. A
31. A	32. B	33. C	34. C	35. D	36. D	37. C	38. C	39. A	40. D
41. A	42. B	43. A	44. D	45. A	46. D	47. D	48. C	49. A	50. A
51. B	52. C	53. A	54. D	55. C	56. A	57. A	58. A	59. B	60. A
61. B	62. D	63. C	64. A	65. A	66. D	67. C	68. C	69. D	70. A
71. C	72. D	73. D	74. B	75. B	76. B	77. D	78. A	79. B	80. B
81. C	82. B	83. B	84. B	85. C	86. C	87. D	88. B	89. B	90. B

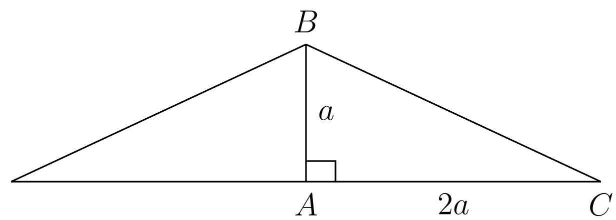
DẠNG 32. DIỆN TÍCH MẶT NÓN – MẶT TRỤ

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại $A, AB = a$ và $AC = 2a$. Khi quay tam giác ABC xung quanh canh góc vuông AB thì đường gấp khúc ACB tạo thành một hình nón. Diện tích xung quanh của hình nón đó bằng

(A) $5\pi a^2$. (B) $\sqrt{5}\pi a^2$. (C) $2\sqrt{5}\pi a^2$. (D) $10\pi a^2$.

Lời giải.



$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{5}$.

Diện tích xung quanh hình nón cần tìm $S = \pi AC.BC = \pi 2a.a\sqrt{5} = 2\sqrt{5}a^2$.

Chọn phương án (C)

Câu 1. Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh bằng 3 và bán kính đáy bằng 2 là

(A) 4π. (B) 6π. (C) 12π. (D) 5π.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính diện tích xung quanh của hình nón

$$S_{\text{xq}} = \pi rl = \pi \cdot 2 \cdot 3 = 6\pi.$$

Chọn phương án (B)

Câu 2. Gọi l, h, r lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính mặt đáy của hình nón. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón là

(A) $S_{\text{xq}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. (B) $S_{\text{xq}} = \pi rh$. (C) $S_{\text{xq}} = 2\pi rl$. (D) $S_{\text{xq}} = \pi rl$.

Lời giải.

Công thức tính diện tích xung quanh của hình nón là $S_{\text{xq}} = \pi rl$.

Chọn phương án (D)

Câu 3. Công thức tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón có đường sinh l, bán kính đáy r là

(A) $S_{\text{xq}} = 4\pi rl$. (B) $S_{\text{xq}} = \pi rl$. (C) $S_{\text{xq}} = \pi rl$. (D) $S_{\text{xq}} = 3\pi rl$.

Lời giải.

Công thức tính diện tích xung quanh hình nón có bán kính đáy r, chiều cao h và đường sinh l là $S_{\text{xq}} = \pi rl$.

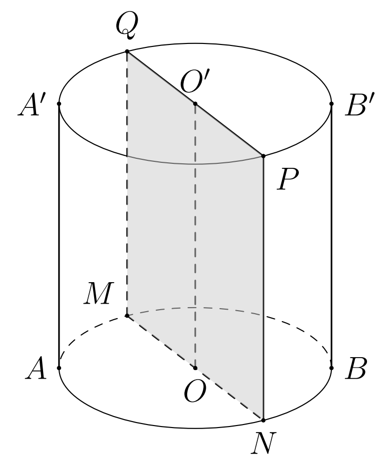
Chọn phương án (C)

Câu 4. Một hình trụ có bán kính đáy bằng 2cm và có thiết diện qua trục là một hình vuông. Diện tích xung quanh của hình trụ là

(A) $8\pi\text{cm}^2$. (B) $4\pi\text{cm}^2$. (C) $32\pi\text{cm}^2$. (D) $16\pi\text{cm}^2$.

Lời giải.

Vì thiết diện qua trục là hình vuông nên ta có $h = 2r = 4\text{cm} \Rightarrow S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 2.4 = 16\pi\text{cm}^2$.



Chọn phương án (D)

Câu 5. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 3 cm, độ dài đường cao bằng 4 cm. Tính diện tích xung quanh của hình trụ này.

(A) 24π (cm^2). (B) 22π (cm^2). (C) 26π (cm^2). (D) 20π (cm^2).

Lời giải.

$S_{\text{xq}} = 2\pi \times r \times h = 2\pi \times 3 \times 4 = 24$ (cm^2).

Chọn phương án (A)

Câu 6. Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng $4\pi a^2$ và bán kính đáy là a. Tính độ dài đường cao h của hình trụ đó.

(A) a. (B) $2a$. (C) $3a$. (D) $4a$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ có bán kính đáy a và chiều cao h là:

$$S_{xq} = 2\pi ah \Leftrightarrow h = \frac{S_{xq}}{2\pi a} = \frac{4\pi a^2}{2\pi a} = 2a.$$

Vậy độ dài đường cao của hình trụ đó là $h = 2a$.

Chọn phương án (B)

Câu 7. Cho hình nón có bán kính đáy là $r = \sqrt{3}$ và độ dài đường sinh $l = 4$. Tính diện tích xung quanh S của hình nón đã cho.

(A) $S = 8\sqrt{3}\pi$. (B) $S = 24\pi$. (C) $S = 16\sqrt{3}\pi$. (D) $S = 4\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.

$S_{xq} = \pi Rl = 4\sqrt{3}\pi$ (đvdt).

Chọn phương án (D)

Câu 8. Viết công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ có chiều cao h bán kính đáy là R.

(A) $S_{xq} = 2\pi Rh$. (B) $S_{xq} = \pi^2 Rh$. (C) $S_{xq} = \pi Rh$. (D) $S_{xq} = 4\pi Rh$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ $S_{xq} = 2\pi Rh$.

Chọn phương án (A)

Câu 9. Tính diện tích xung quanh của một hình nón tròn xoay có đường cao là 1 và đường kính đáy là 1.

(A) π. (B) $\frac{\pi\sqrt{5}}{8}$. (C) 2π. (D) $\frac{\pi\sqrt{5}}{4}$.

Lời giải.

Ta có $S_{xq} = \pi rl = \pi r\sqrt{h^2+r^2} = \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\pi\sqrt{5}}{4}$ (đvdt).

Chọn phương án (D)

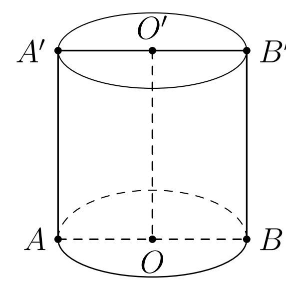
Câu 10. Một hình trụ có bán kính đáy a, có thiết diện qua trục là một hình vuông. Tính theo a diện tích xung quanh của hình trụ.

(A) πa^2. (B) $2\pi a^2$. (C) $3\pi a^2$. (D) $4\pi a^2$.

Lời giải.

Thiết diện qua trục là một hình vuông nên hình trụ có đường sinh bằng đường kính đáy: $l = 2a$.

Vậy diện tích xung quanh hình trụ là $S_{xq} = 2\pi rl = 4\pi a^2$.



Chọn phương án (D)

Câu 11. Diện tích xung quanh mặt trụ có bán kính đáy R, chiều cao h là

(A) $S_{\mathrm{xq}} = \pi Rh$. (B) $S_{\mathrm{xq}} = 3\pi Rh$. (C) $S_{\mathrm{xq}} = 4\pi Rh$. (D) $S_{\mathrm{xq}} = 2\pi Rh$.

Lời giải.

Ta có diện tích xung quanh mặt trụ $S_{\mathrm{xq}} = 2\pi Rh$.

Chọn phương án (D)

Câu 12. Cho hình nón có bán kính đáy là $r = \sqrt{3}$ và độ dài đường sinh $\ell = 2$. Tính diện tích xung quanh S của hình nón đã cho.

(A) $S = 8\sqrt{3}\pi$. (B) $S = 24\pi$. (C) $S = 4\sqrt{3}\pi$. (D) $S = 2\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $S = \pi r\ell = 2\sqrt{3}\pi$.

Chọn phương án (D)

Câu 13. Tính diện tích xung quanh S của hình trụ có bán kính đáy bằng 3 và chiều cao bằng 4.

(A) $S = 12\pi$. (B) $S = 42\pi$. (C) $S = 36\pi$. (D) $S = 24\pi$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 3 \cdot 4 = 24\pi$.

Chọn phương án D

Câu 14. Một khối trụ có độ dài đường sinh bằng 10, biết thể tích của khối trụ bằng 90π. Tính diện tích xung quanh của khối trụ.

(A) 60π. (B) 78π. (C) 81π. (D) 90π.

Lời giải.

Gọi R, l lần lượt là bán kính và độ dài đường sinh của khối trụ. Chiều cao của khối trụ cũng bằng độ dài đường sinh của khối trụ.

Thể tích V của khối trụ là $V = \pi R^2 l$. Suy ra $R = \sqrt{\dfrac{V}{\pi l}} = \sqrt{\dfrac{90\pi}{10\pi}} = 3$.

Diện tích xung quanh của khối trụ là $S_{\text{xq}} = 2\pi Rl = 2\pi \cdot 3 \cdot 10 = 60\pi$.

Chọn phương án A

Câu 15. Một khối trụ có khoảng cách giữa hai đáy, độ dài đường sinh và bán kính đường tròn đáy lần lượt bằng h, l, r. Khi đó công thức tính diện tích toàn phần của khối trụ là gì?

(A) $S_{tp} = 2\pi r(l + r)$. (B) $S_{tp} = 2\pi r(l + 2r)$. (C) $S_{tp} = \pi r(l + r)$. (D) $S_{tp} = \pi r(2l + r)$.

Lời giải.

$S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{đáy}} = 2\pi rl + 2\pi r^2 = 2\pi r(l + r)$.

Chọn phương án A

Câu 16. Tính diện tích toàn phần của hình nón có bán kính đáy bằng $4a$, chiều cao bằng $3a$.

(A) $20\pi a^2$. (B) $15\pi a^2$. (C) $24\pi a^2$. (D) $36\pi a^2$.

Lời giải.

Ta có đường sinh $l = \sqrt{h^2 + R^2} = 5a$.

Ta có $S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + S_{\text{đáy}} = \pi \cdot R \cdot l + \pi \cdot R^2 = 36\pi a^2$.

Chọn phương án D

Câu 17. Một nón lá có đường kính của vành nón là 50 cm, chiều cao bằng 25 cm. Hỏi diện tích xung quanh của cái nón lá đó bằng bao nhiêu?

(A) $625\ \text{cm}^2$. (B) $625\sqrt{3}\pi\ \text{cm}^2$. (C) $625\sqrt{2}\pi^2\ \text{cm}^2$. (D) 625π cm.

Lời giải.

Độ dài đường sinh là $l = \sqrt{25^2 + 25^2} = 25\sqrt{2}$.

Diện tích xung quanh của hình nón là:

$S_{xq} = \pi \cdot 25 \cdot 25\sqrt{2} = 625\pi\sqrt{2}\ \text{cm}^2$.

Chọn phương án C

Câu 18. Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng 50π và độ dài đường sinh bằng bán kính đường tròn đáy. Tính diện tích toàn phần của hình trụ.

(A) 60π. (B) 80π. (C) 100π. (D) 120π.

Lời giải.

Theo đề bài ta có $h = r$.
Diện tích xung quanh là $A = 2\pi rh = 2\pi r^2 = 50\pi$.
Diện tích toàn phần là $2\pi r(r+h) = 2\pi 2r^2 = 50\pi.2 = 100\pi$.
Chọn phương án (C)

Câu 19. Tính diện tích xung quanh của một hình nón có bán kính đường tròn đáy là 4 cm và độ dài đường sinh là 5 cm.

(A) 15π cm^2 . (B) 20π cm^2 . (C) $9\pi\sqrt{3}$ cm^2 . (D) 12π cm^2 .

Lời giải.

Ta có: $S_{\text{xq}} = \pi rl = \pi \cdot 4 \cdot 5 = 20\pi$ cm^2.
Chọn phương án (B)

Câu 20. Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $5\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Tính độ dài đường sinh của hình nón đã cho.

(A) $a\sqrt{5}$. (B) $3\sqrt{2}a$. (C) $3a$. (D) $5a$.

Lời giải.

Ta có diện tích xung quanh của hình nón $\mathcal{S}_{\text{xq}} = \pi r \times l = \pi a \times l = 5\pi a^2 \Leftrightarrow l = 5a$.
Chọn phương án (D)

B MỨC ĐỘ 2

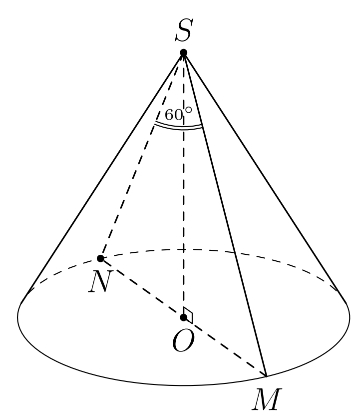
Câu 21. Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng 60° và bán kính đáy bằng a. Diện tích xung quanh của hình nón bằng bao nhiêu?

(A) $2\pi a^2$. (B) $4\pi a^2$. (C) πa^2. (D) $\pi a^2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Hình nón đã cho có đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O đường kính MN như hình vẽ.
Ta có bán kính đáy $r = OM = a$, góc $\widehat{MSN} = 60^\circ$ suy ra $\widehat{MSO} = 30^\circ$.
$\triangle SOM$ vuông tại O, ta có
$\sin\widehat{MSO} = \dfrac{OM}{SM}$, suy ra $SM = \dfrac{OM}{\sin\widehat{MSO}} = 2a$, hay đường sinh $l = 2a$.
Vậy diện tích xung quanh hình nón là

$$S_{\text{xq}} = \pi \cdot r \cdot l = 2\pi a^2.$$



Chọn phương án (A)

Câu 22. Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng a. Tính diện tích xung quanh S của khối trụ đó.

(A) $S = 2\pi a^2$. (B) $S = \dfrac{\pi a^2}{2}$. (C) $S = \pi a^2$. (D) $S = 4\pi a^2$.

Lời giải.

Do thiết diện là hình vuông cạnh a nên bán kính đáy bằng $\dfrac{a}{2}$ và chiều cao $h = a$.

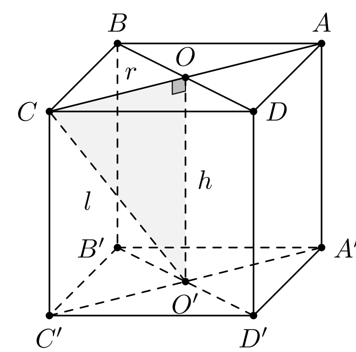
Diện tích xung quanh: $S = 2\pi \times \dfrac{a}{2} \times a = \pi a^2$.

Chọn phương án C

Câu 23. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Một hình nón có đỉnh là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông $ABCD$. Tính diện tích xung quanh của hình nón đó.

(A) $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$. (B) $\pi a^2\sqrt{3}$. (C) $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{4}$. (D) $\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Gọi O, O' lần lượt là tâm hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

Hình nón có đáy là đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ có cạnh là a nên đáy của hình nón là đường tròn có bán kính

$$r = OC = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Hình nón có đỉnh là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ nên chiều cao của hình nón bằng độ dài cạnh của hình vuông. Suy ra $h = a$.

Khi đó độ dài đường sinh là $l = O'C = \sqrt{O'O^2 + OC^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy diện tích xung quanh của hình nón đó là $S_{\text{xq}} = \pi r l = \pi \cdot \dfrac{2\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$.

Chọn phương án D

Câu 24. Hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều và có thể tích $V = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3$. Diện tích xung quanh S của hình nón đó là

(A) $S = 4\pi a^2$. (B) $S = 2\pi a^2$. (C) $S = \dfrac{1}{2}\pi a^2$. (D) $S = 3\pi a^2$.

Lời giải.

Gọi R là bán kính đáy của hình nón.

Vì thiết diện qua trục là tam giác đều nên chiều cao của hình nón là $h = R\sqrt{3}$.

Từ đây ta suy ra thể của khối nón $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{\pi R^3\sqrt{3}}{3}$. (1)

Theo giả thiết ta có $V = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $R = a$. Do đó diện tích xung quanh là $S = \pi a \cdot 2a = 2\pi a^2$.

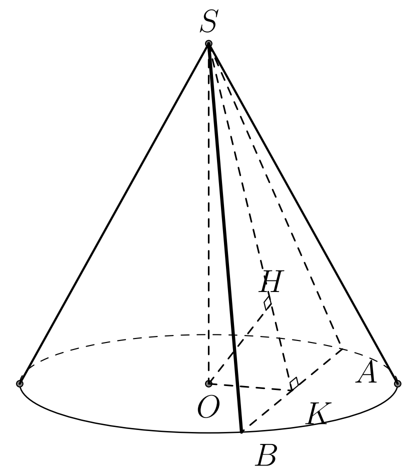
Chọn phương án B

Câu 25. Cho hình nón tròn xoay có chiều cao $h = 20$ (cm), bán kính đáy $r = 25$ (cm). Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12 (cm). Tính diện tích của thiết diện đó.

(A) $S = 400\ (\text{cm}^2)$. (B) $S = 500\ (\text{cm}^2)$. (C) $S = 406\ (\text{cm}^2)$. (D) $S = 300\ (\text{cm}^2)$.

Lời giải.

Thiết diện qua đỉnh là tam giác SAB.
Gọi K là trung điểm $AB \Rightarrow OK \perp AB \Rightarrow AB \perp (SOK) \Rightarrow (SAB) \perp (SOK)$.
Kẻ $OH \perp SK$ $(H \in SK) \Rightarrow OH \perp (SAB) \Rightarrow OH = 12(\text{cm})$.
Ta có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OK^2} + \dfrac{1}{OS^2} \Rightarrow \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{12^2} - \dfrac{1}{20^2} = \dfrac{1}{225} \Rightarrow OK = 15$ (cm).
$KB = \sqrt{OB^2 - OK^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20 \Rightarrow AB = 2BK = 40$ (cm).
$SK = \sqrt{SO^2 + OK^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$ (cm).
$\Rightarrow S_{\Delta SAB} = \dfrac{1}{2}.SK.AB = 500 \left(\text{cm}^2\right)$.



Chọn phương án B

Câu 26. Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng 10 và diện tích xung quanh bằng 60π . Thể tích của khối nón đã cho bằng

A 360π. B 288π. C 120π. D 96π.

Lời giải.

Ta có $S_{xq} = \pi r l = 10\pi r = 60\pi \Rightarrow r = 6$.
và $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.
Vậy thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi$.

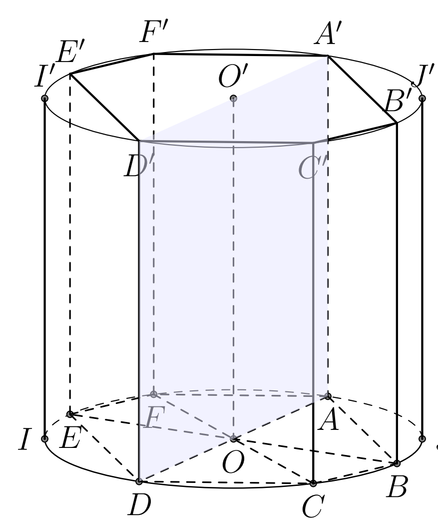
Chọn phương án D

Câu 27. Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh bằng $36\pi a^2$. Tính thể tích V của lăng trụ lục giác đều nội tiếp hình trụ.

A $V = 27\sqrt{3}a^3$. B $V = 24\sqrt{3}a^3$. C $V = 36\sqrt{3}a^3$. D $V = 81\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.

Thiết diện qua trục hình trụ là hình vuông $ADD'A'$. Gọi O, O' lần lượt là hai tâm đường tròn đáy (hình vẽ). Suy ra $l = 2r$.
Theo giả thiết ta có
$S_{xq} = 2\pi r l = 36\pi a^2 \Leftrightarrow 2\pi r \cdot 2r = 36\pi a^2 \Rightarrow r = 3a \Rightarrow l = 6a$.
Lăng trụ lục giác đều $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$ nội tiếp hình trụ có chiều cao là $h = 6a$.
$S_{ABCDEF} = 6S_{\Delta OAB} = 6 \cdot \dfrac{(3a)^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{27a^2\sqrt{3}}{2}$ (vì ΔOAB đều, cạnh bằng $3a$).
Suy ra $V = \dfrac{27a^2\sqrt{3}}{2} \cdot 6a = 81a^3\sqrt{3}$.

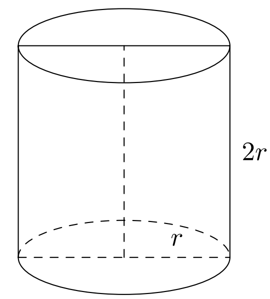


Chọn phương án D

Câu 28. Cho hình trụ có diện tích toàn phần là 8π và có thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua trục là hình vuông. Tính thể tích khối trụ?

Ⓐ $\frac{4\pi}{9}$. Ⓑ $\frac{\pi\sqrt{6}}{9}$. Ⓒ $\frac{16\pi\sqrt{3}}{9}$. Ⓓ $\frac{\pi\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải.



Gọi bán kính đường tròn đáy là r. Vì thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua trục là hình vuông nên chiều cao hình trụ là $2r$. Ta có $S_{tp} = 2S_d + S_{xq} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2$.

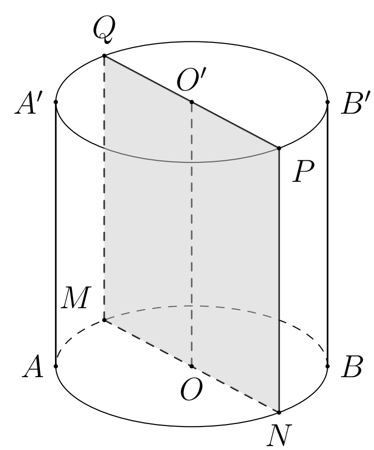
Theo đề bài $S_{tp} = 8\pi \Rightarrow r^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $V = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 = 2\pi \cdot \frac{8\sqrt{3}}{9} = \frac{16\sqrt{3}\pi}{9}$.

Chọn phương án Ⓒ

Câu 29. Cắt hình trụ (T) bằng một mặt phẳng đi qua trục được thiết diện là một hình chữ nhật có diện tích bằng 30cm^2 và chu vi bằng 26cm . Biết chiều dài của hình chữ nhật lớn hơn đường kính mặt đáy của hình trụ (T). Diện tích toàn phần của (T) là

Ⓐ $23\pi\text{cm}^2$. Ⓑ $\frac{23\pi}{2}\text{cm}^2$. Ⓒ $\frac{69\pi}{2}\text{cm}^2$. Ⓓ $69\pi\text{cm}^2$.

Lời giải.



Gọi h, r lần lượt là đường cao và bán kính đáy của hình trụ (T). Thiết diện của mặt phẳng và hình trụ (T) là hình chữ nhật $MNPQ$. Khi đó theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} h > 2r \\ S_{ABCD} = h \cdot 2r = 30 \\ C_{ABCD} = 2(h+2r) = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h > 2r \\ hr = 15 \\ h + 2r = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h > 2r \\ h = 13 - 2r \\ -2r^2 + 15r - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h > 2r \\ h = 13 - 2r \\ \left[\begin{array}{l} r = 5 \Rightarrow h = 3 \\ r = \frac{3}{2} \Rightarrow h = 10 \text{ (nhận)} \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy $S_{tp} = S_{xq} + 2S = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot \frac{3}{2} \cdot 10 + 2\pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{69\pi}{2}\text{cm}^2$.

Chọn phương án Ⓒ

Câu 30. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính diện tích toàn phần của vật tròn xoay thu được khi quay tam giác $AA'C'$ quanh trục AA'.

Ⓐ $\pi\left(\sqrt{6}+2\right)a^2$. Ⓑ $\pi\left(\sqrt{3}+2\right)a^2$. Ⓒ $2\pi\left(\sqrt{2}+1\right)a^2$. Ⓓ $2\pi\left(\sqrt{6}+1\right)a^2$.

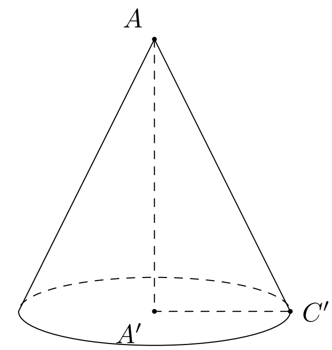
Lời giải.

Khi quay tam giác $AA'C'$ quanh trục AA' ta được hình nón có bán kính đáy $R = A'C' = a\sqrt{2}$, đường sinh $l = AC'$ và chiều cao $h = AA' = a$.

Ta có $l = AC' = \sqrt{A'C'^2 + AA'^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

Ta có

$$S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi(\sqrt{6} + 2)a^2.$$



Chọn phương án (A)

Câu 31. Cho hình nón tròn xoay có bán kính bằng 3 và diện tích xung quanh bằng $6\sqrt{3}\pi$. Góc ở đỉnh của hình nón đã cho bằng

(A) $60°$. (B) $150°$. (C) $90°$. (D) $120°$.

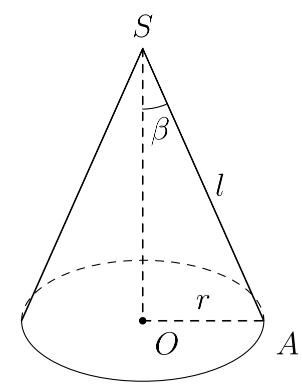
Lời giải.

Gọi S, O lần lượt là đỉnh và tâm mặt đáy của hình nón. Lấy A là một điểm nằm trên đường tròn đáy. Gọi góc ở đỉnh của hình nón là 2β suy ra $\beta = \widehat{OSA}$.

Mặt khác $S_{xq} = \pi rl \Leftrightarrow l = \dfrac{S_{xq}}{\pi r} = \dfrac{6\sqrt{3}\pi}{3\pi} = 2\sqrt{3}$. Xét $\triangle SOA$ vuông tại O, ta có

$\sin OSA = \dfrac{OA}{SA} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{OSA} = 60°$.

Vậy $2\beta = 2\widehat{OSA} = 120°$.



Chọn phương án (D)

Câu 32. Cho hình nón tròn xoay có bán kính bằng 3 và diện tích xung quanh bằng $6\sqrt{3}\pi$. Góc ở đỉnh của hình nón đã cho bằng

(A) $60°$. (B) $150°$. (C) $90°$. (D) $120°$.

Lời giải.

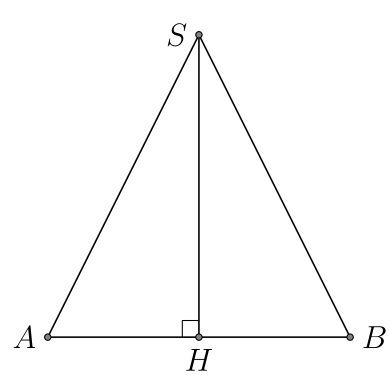
Giả sử thiết diện qua trục của hình nón đã cho là tam giác SAB, gọi H là tâm đường tròn đáy của hình nón.

Ta có $AH = 3$ và $S_{xq} = \pi \cdot AH \cdot SA$

Suy ra $SA = \dfrac{S_{xq}}{\pi AH} = \dfrac{6\sqrt{3}\pi}{3\pi} = 2\sqrt{3}$.

Ta có $\cos\widehat{ASH} = \dfrac{AH}{AS} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{ASH} = 30°$.

Do đó, góc ở đỉnh của hình nón bằng $60°$.



Chọn phương án (A)

Câu 33. Cho hình nón tròn xoay có chiều cao là $a\sqrt{3}$, đường kính đáy là $2a$. Tìm diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đã cho.

(A) $S_{xq} = 2\sqrt{3}\pi a^2$. (B) $S_{xq} = 2\pi a^2$. (C) $S_{xq} = \pi a^2$. (D) $S_{xq} = 4\sqrt{3}\pi a^2$.

Lời giải.

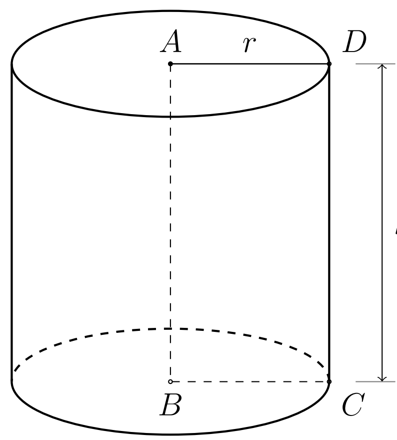
Bán kính đáy $r = a$, suy ra đường sinh $l = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = 2a$. Do đó, diện tích xung quanh hình nón là $S_{xq} = 2a^2\pi$.

Chọn phương án (B)

Câu 34. Cho hình trụ (T) được sinh ra khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh AB. Biết $AC = 2\sqrt{3}a$ và góc $\widehat{ACB} = 45^\circ$. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ (T).

(A) $S_{tp} = 12\pi a^2$. (B) $S_{tp} = 8\pi a^2$. (C) $S_{tp} = 24\pi a^2$. (D) $S_{tp} = 16\pi a^2$.

Lời giải.



Ta có $AB = \sin 45^\circ AC = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\sqrt{3}a = \sqrt{6}a$ và $BC = \sqrt{AC^2 - BA^2} = \sqrt{6}a$.

Do đó $S_{tp} = 2\pi BC^2 + 2\pi BC \cdot AB = 2\pi 6a^2 + 2\pi 6a^2 = 24\pi a^2$.

Chọn phương án (C)

Câu 35. Tính thể tích V của khối nón có độ dài đường sinh bằng $2a$ và diện tích xung quanh bằng $2\pi a^2$.

(A) $V = \pi a^3\sqrt{3}$. (B) $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$. (D) $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $l = 2a,\ S_{xq} = \pi r l = 2\pi a^2$. Suy ra $r = \dfrac{2\pi a^2}{\pi 2a} = a$.

Mặt khác $h = \sqrt{l^2 - r^2} = a\sqrt{3}$. Vậy $V = \pi a^2 a\sqrt{3} = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Chọn phương án (B)

Câu 36. Một hình trụ có thiết diện qua trục là một hình vuông cạnh $2a$. Thể tích khối trụ tương ứng bằng

(A) $2\pi a^3$. (B) πa^3. (C) $\dfrac{8\pi a^3}{3}$. (D) $\dfrac{2\pi a^3}{3}$.

Lời giải.

Do khối trụ có thiết diện qua trục là hình vuông cạnh bằng $2a$ nên $h = 2R = 2a \Rightarrow \begin{cases} h = 2a \\ R = a \end{cases}$.

Vậy thể tích khối trụ là $V = \pi R^2 \cdot h = 2\pi a^3$.

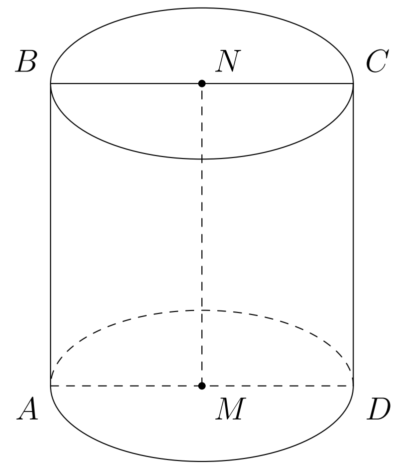
Chọn phương án (A)

Câu 37. Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1$ và $AD = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN, ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đó.

A $S_{tp} = \dfrac{4\pi}{3}$. **B** $S_{tp} = 4\pi$. **C** $S_{tp=6\pi}$. **D** $S_{tp} = 3\pi$.

Lời giải.

Do quay hình chữ nhật quanh trục MN nên hình trụ tạo thành sẽ có $h = MN = AB = 1$ và $R = \dfrac{AD}{2} = 1$. Từ đó ta tính được $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 4\pi$.



Chọn phương án B

Câu 38. Tính diện tích xung quanh một hình trụ có chiều cao 20 m và chu vi đáy bằng 5 m.

A 100π m^2. **B** 50π m^2. **C** 50 m^2. **D** 100 m^2.

Lời giải.

Chu vi đáy $2\pi R = 5\ (\text{m}^2) \Rightarrow S_{xq} = 2\pi Rh = 100\ (\text{m}^2)$.

Chọn phương án D

Câu 39. Một hình nón có chiều cao $h = 3$, bán kính đáy $r = 5$. Mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón nhưng không đi qua trục của hình nón cắt hình nón theo một thiết diện là một tam giác cân có độ dài cạnh đáy bằng 8. Tình diện tích của thiết diện.

A $8\sqrt{2}$. **B** $6\sqrt{2}$. **C** $12\sqrt{2}$. **D** $24\sqrt{2}$.

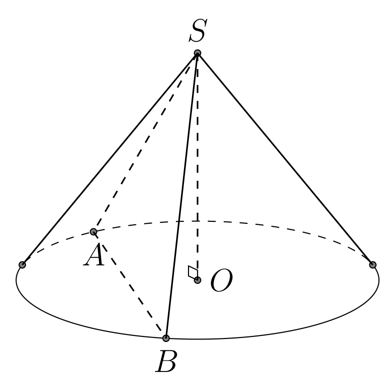
Lời giải.

Ta có $l = SC = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$.

Vì $\triangle SAB$ cân tại S nên $SA = SB = SC = \sqrt{34}$, $P = \dfrac{\sqrt{34} + \sqrt{34} + 8}{2} = 4 + \sqrt{34}$.

Suy ra diện tích tam giác $\triangle SAB$ là:

$S = \sqrt{\left(4 + \sqrt{34}\right)\left(4 + \sqrt{34} - 8\right)\left(4 + \sqrt{34} - \sqrt{34}\right)\left(4 + \sqrt{34} - \sqrt{34}\right)} = 12\sqrt{2}$.



Chọn phương án C

Câu 40. Biết thiết diện qua trục của hình nón là tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $2a\sqrt{2}$. Tính diện tích xung quanh của hình nón.

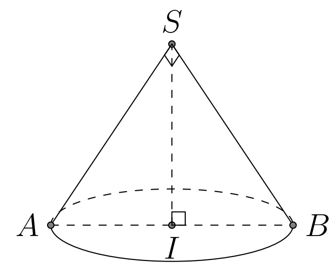
(A) $S_{xq} = 2\sqrt{2}\pi a^2$. (B) $S_{xq} = 4\pi a^2$. (C) $S_{xq} = \sqrt{2}\pi a^2$. (D) $S_{xq} = 2\pi a^2$.

Lời giải.

Tam giác SAB vuông cân tại S có $AB = 2a\sqrt{2} \Rightarrow SA = SB = 2a$.

Suy ra hình nón có đường sinh $l = SA = 2a$, bán kính $r = \dfrac{AB}{2} = a\sqrt{2}$.

$S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot a\sqrt{2} \cdot 2a = 2\sqrt{2}\pi a^2$.



Chọn phương án (A)

C MỨC ĐỘ 3

Câu 41. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R, chiều cao bằng h. Biết rằng hình trụ đó có diện tích toàn phần gấp ba diện tích xung quanh. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $R = 2h$. (B) $h = \sqrt{3}R$. (C) $R = 3h$. (D) $h = 2R$.

Lời giải.

Phương pháp:

Công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq} = 2\pi Rl = 2\pi Rh$.

Công thức tính diện tích toàn phần của hình trụ: $S_{tp} = 2\pi Rl + 2\pi R^2 = 2\pi Rh + 2\pi R^2$.

Cách giải:

Hình trụ đó có diện tích toàn phần gấp ba diện tích xung quanh nên ta có:

$$2\pi Rh + 2\pi R^2 = 3.2\pi Rh \Leftrightarrow 2\pi R^2 = 4\pi Rh \Leftrightarrow R = 2h.$$

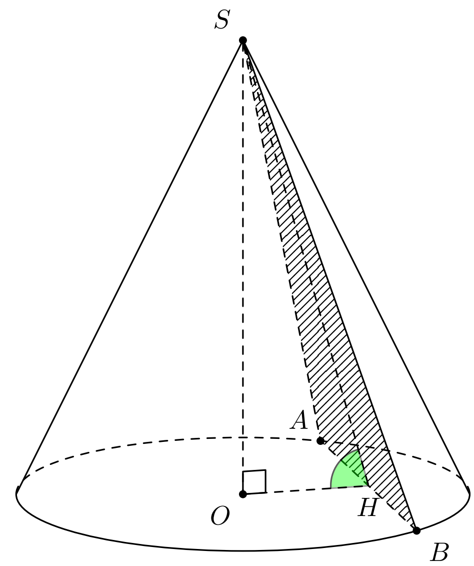
Chọn phương án (A)

Câu 42. Cho khối nón (N) đỉnh S , có chiều cao là $a\sqrt{3}$ và độ dài đường sinh là $3a$. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh S, cắt và tạo với mặt đáy của khối nón một góc $60°$. Tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) và khối nón (N).

(A) $2a^2\sqrt{5}$. (B) $a^2\sqrt{3}$. (C) $2a^2\sqrt{3}$. (D) $a^2\sqrt{5}$.

Lời giải.

Khối nón có tâm đáy là điểm O, chiều cao là $SO = h = a\sqrt{3}$ và độ dài một đường sinh $l = 3a$.



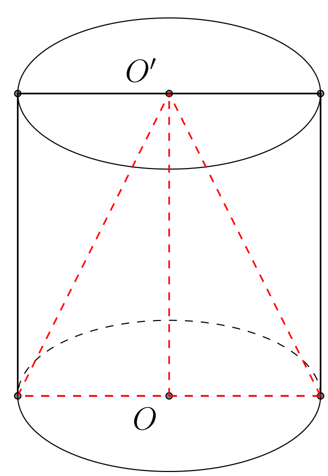
Giả sử (P) cắt khối nón (N) theo thiết diện là tam giác SAB.
Gọi H là trung điểm của AB.
Do $SA = SB = l \Rightarrow \triangle SAB$ cân tại $S \Rightarrow SH \perp AB$.
Mặt khác $\triangle OAB$ cân tại $O \Rightarrow OH \perp AB$ nên góc giữa mặt phẳng (P) và đáy của hình chóp là góc giữa OH và SH, hay $\widehat{SHO} = 60^\circ$.
Xét tam giác SOH vuông tại O, ta có
$SH = \dfrac{SO}{\sin \widehat{SHO}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2a$.
Mặt khác tam giác SHA vuông tại H, ta có
$HA^2 = SA^2 - SH^2 = 9a^2 - 4a^2 = 5a^2 \Rightarrow HA = a\sqrt{5} \Rightarrow AB = 2 \cdot HA = 2a\sqrt{5}$.
Vậy diện tích thiết diện cần tìm là
$S_{\Delta SAB} = \dfrac{1}{2} SH \cdot AB = \dfrac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a\sqrt{5} = 2a^2\sqrt{5}$.

Chọn phương án A

Câu 43. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O') chiều cao $R\sqrt{3}$ và bán kính đáy R. Một hình nón có đỉnh (O') và đáy là hình tròn $(O; R)$. Tỷ lệ diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón bằng?

A 3. **B** $\sqrt{2}$. **C** 2. **D** $\sqrt{3}$.

Lời giải.



+ Diện tích xung quanh hình trụ là: $S_1 = 2\pi Rh = 2\pi R^2\sqrt{3}$.
+ Độ dài đường sinh hình nón là: $l = \sqrt{\left(R\sqrt{3}\right)^2 + R^2} = 2R$.
+ Diện tích xung quanh hình nón là: $S_2 = \pi Rl = \pi R \cdot 2R = 2\pi R^2$.
Suy ra tỉ lệ cần tìm là: $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{2\pi R^2 \cdot \sqrt{3}}{2\pi R^2} = \sqrt{3}$.

Chọn phương án D

Câu 44. Cho hình trụ có thiết diện đi qua trục là một hình vuông có cạnh bằng $4a$. Diện tích xung quanh S của hình trụ là

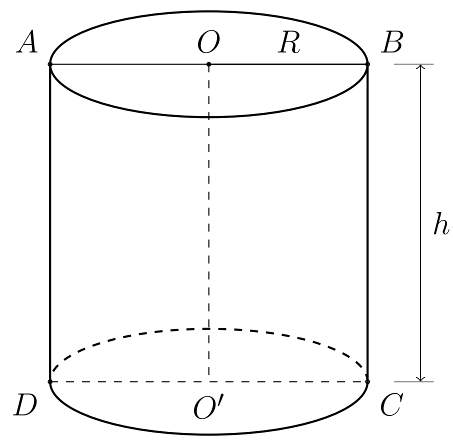
A $S = 4\pi a^2$. **B** $S = 8\pi a^2$. **C** $S = 24\pi a^2$. **D** $S = 16\pi a^2$.

Lời giải.

Phương pháp: Công thức tính diện tích xung quanh hình trụ có bán kính đáy R, chiều cao h là

$$S_{xq} = 2\pi Rh.$$

Cách giải:



Hình trụ có thiết diện đi qua trục là hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $4a$.

Do đó $h = 2R = 4a \Rightarrow R = 2a$ với R, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ.

Vậy $S = 2\pi Rh = 16\pi a^2$

Chọn phương án D

Câu 45. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$, chiều cao $R\sqrt{3}$. Một hình nón có đỉnh là O' và đáy là hình tròn $(O; R)$. Tỷ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón bằng

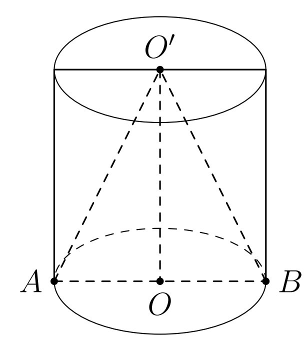
A 2. **B** $\sqrt{3}$. **C** 3. **D** $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_1 = 2\pi R^2\sqrt{3}$.

Độ dài đường sinh của hình nón là $l = \sqrt{R^2 + 3R^2} = 2R$ do đó diện tích xung quanh của hình nón là $S_2 = 2\pi R^2$.

Vậy tỷ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón là $\dfrac{S_1}{S_2} = \sqrt{3}$.

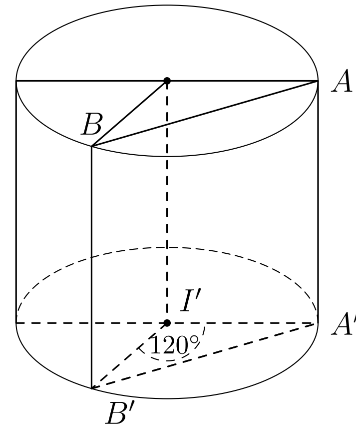


Chọn phương án B

Câu 46. Một hình trụ có diện tích xung quanh là 4π, thiết diện qua trục là hình vuông. Một mặt phẳng (α) song song với trục, cắt hình trụ theo thiết diện $ABB'A'$, biết một cạnh của thiết diện là một dây của đường tròn đáy hình trụ và căng một cung $120°$. Diện tích thiết diện $ABB'A'$ là

A $\sqrt{3}$. **B** $2\sqrt{3}$. **C** $2\sqrt{2}$. **D** $3\sqrt{2}$.

Lời giải.



Vì thiết diện qua trục là hình vuông nên $h = 2r$.

Diện tích xung quanh hình trụ bằng $4\pi \Rightarrow 2\pi rh = 4\pi \Rightarrow 2\pi r.2r = 4\pi \Rightarrow r = 1$.

Theo định lý cosin: $AB^2 = OA^2+OB^2-2OA.OB.\cos 120^\circ = 3 \Rightarrow AB = \sqrt{3}$.

Vậy diện tích của $ABB'A'$ là $2.\sqrt{3}$.

Chọn phương án B

Câu 47. Hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều và có thể tích $V = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3$. Diện tích chung quanh S của hình nón đó là

A $S = \dfrac{1}{2}\pi a^2$. **B** $S = 4\pi a^2$. **C** $S = 2\pi a^2$. **D** $S = \pi a^2$.

Lời giải.

Thiết diện qua trục là tam giác đều nên hình nón đó có $l = 2R \Rightarrow h = R\sqrt{3}$.

Lại có $V = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3 = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{1}{3}\pi R^3\sqrt{3} \Rightarrow R^3 = a^3 \Rightarrow R = a$.

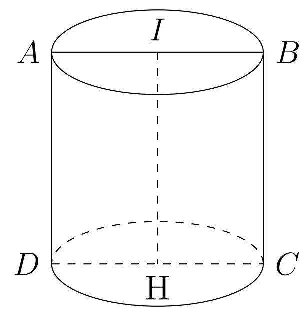
Vậy diện tích xung quanh hình nón là $S_{xq} = \pi Rl = \pi a^2$.

Chọn phương án D

Câu 48. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng a.

A $S_{\text{xq}} = \pi\sqrt{2}a^2$. **B** $S_{\text{xq}} = \dfrac{\pi\sqrt{2}a^2}{2}$. **C** $S_{\text{xq}} = 2\pi a^2$. **D** $S_{\text{xq}} = \pi a^2$.

Lời giải.



Đường kính đáy của hình trụ là đường chéo hình vuông là đáy của lập phương nên $r = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Đường cao $h = a$.

$S_{xq} = 2\pi rh = \pi a^2\sqrt{2}$

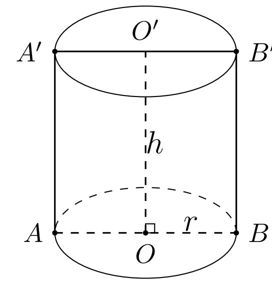
Chọn phương án A

Câu 49. Một hình trụ có bán kính đáy là 2 cm. Một mặt phẳng đi qua trục của hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là một hình vuông. Tính thể tích khối trụ đó.

A $4\pi\,\text{cm}^3$. **B** $8\pi\,\text{cm}^3$. **C** $16\pi\,\text{cm}^3$. **D** $32\pi\,\text{cm}^3$.

Lời giải.

Theo giả thiết suy ra $r = 2$ cm và thiết diện là hình vuông $ABB'A'$.
Khi đó $h = 2r = 4$ cm.
Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi\,\text{cm}^3$.



Chọn phương án C

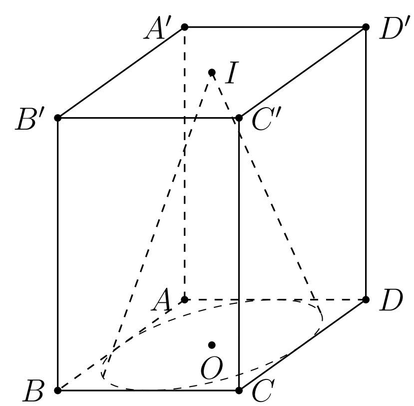
Câu 50. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Một khối nón có đỉnh là tâm của hình vuông $ABCD$ và có đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$. Diện tích toàn phần khối nón đó bằng

(A) $\dfrac{\pi a^2(\sqrt{3}+2)}{2}$. (B) $\dfrac{\pi a^2(\sqrt{5}+1)}{4}$. (C) $\dfrac{\pi a^2(\sqrt{5}+2)}{4}$. (D) $\dfrac{\pi a^2(\sqrt{3}+1)}{2}$.

Lời giải.

Gọi O, I lần lượt là tâm hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ có bán kính $r = \dfrac{a}{2}$.
Theo giả thiết thì đường cao hình nón có độ dài bằng $h = IO = a$.
Khi đó đường sinh hình nón là $l = \sqrt{IO^2 + r^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
Vậy diện tích toàn phần hình nón là

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{đáy}} = \pi r l + \pi r^2 = \frac{\pi a^2(\sqrt{5}+1)}{4}.$$



Chọn phương án B

Câu 51. Cắt một khối trụ cho trước thành hai phần thì được hai khối trụ mới có tổng diện tích toàn phần nhiều hơn diện tích toàn phần của khối trụ ban đầu 18π dm^2. Biết chiều cao của khối trụ ban đầu là 8 dm, tính tổng diện tích toàn phần S của hai khối trụ mới.

(A) $S = 108\pi\,(\text{dm}^2)$. (B) $S = 84\pi\,(\text{dm}^2)$. (C) $S = 90\pi\,(\text{dm}^2)$. (D) $S = 162\pi\,(\text{dm}^2)$.

Lời giải.

Gọi R, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của khối trụ ban đầu (T).
và $h_1; h_2$ lần lượt là chiều cao của hai khối trụ mới $(T_1), (T_2)$.
Diện tích toàn phần khối trụ (T) là $S = 2\pi Rh + 2\pi R^2$
Diện tích toàn phần khối trụ (T_1) là $S_1 = 2\pi Rh_1 + 2\pi R^2$
Diện tích toàn phần khối trụ (T_2) là $S_2 = 2\pi Rh_2 + 2\pi R^2$
Theo đề bài, ta có $S_1 + S_2 = S + 18\pi \Leftrightarrow 2\pi R(h_1 + h_2) + 4\pi R^2 = 2\pi Rh + 2\pi R^2 + 18\pi \Rightarrow 2\pi Rh + 4\pi R^2 = 2\pi Rh + 2\pi R^2 + 18\pi \Rightarrow R = 3$.
Vậy $S_1 + S_2 = 2\pi Rh + 4\pi R^2 = 84\pi$

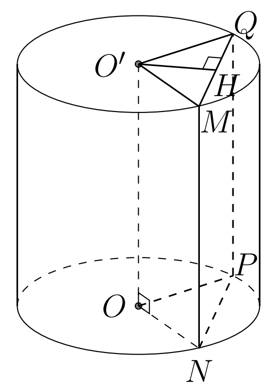
Chọn phương án B

Câu 52. Một hình trụ có bán kinh $r = 5$ cm và khoảng cách giữa hai đáy $h = 7$ cm. Cắt khối trụ bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục 3 cm. Diện tích thiết diện tạo thành là

Ⓐ 56 cm^2. Ⓑ 55 cm^2. Ⓒ 53 cm^2. Ⓓ 46 cm^2.

Lời giải.

Giả sử hình trụ (T) có trục OO'. Thiết diện song song với trục là hình chữ nhật $MNPQ$ (N, P thuộc đường tròn tâm O và M, Q thuộc đường tròn tâm O').



Gọi H là trung điểm MQ. Khi đó, $O'H \perp MQ \Rightarrow O'H \perp (MNPQ)$.

Do đó, $\mathrm{d}\left(OO', (MNPQ)\right) = \mathrm{d}\left(O', (MNPQ)\right) = O'H = 3$ cm.

Ta có $MH = \sqrt{O'M^2 - O'H^2} = 4$ cm $\Rightarrow MQ = 2MH = 8$ cm.

Diện tích thiết diện là $S = MQ \cdot MN = 56\text{ cm}^2$.

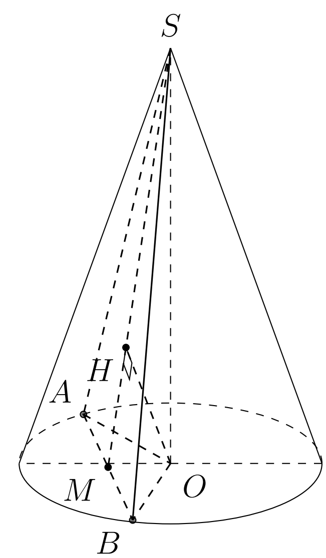
Chọn phương án A

Câu 53. Cho hình nón tròn xoay có chiều cao $h = 20$ cm, bán kính $r = 25$ cm. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12 cm. Tính diện tích của thiết diện đó.

Ⓐ $S = 500\text{ cm}^2$. Ⓑ $S = 400\text{ cm}^2$. Ⓒ $S = 300\text{ cm}^2$. Ⓓ $S = 406\text{ cm}^2$.

Lời giải.

Giả sử thiết diện qua đỉnh của hình nón (N) là tam giác cân SAB. Gọi M là trung điểm AB và H là hình chiếu của O lên SM.



Ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{OS^2} \Rightarrow OM = 15$ cm.

Tam giác SMO vuông tại O có $OH \perp SM$ nên $SO \cdot OM = OH \cdot SM \Rightarrow SM = \dfrac{SO \cdot OM}{OH} = 25$ cm.

Tam giác OMA vuông tại M nên $MA = \sqrt{OA^2 - OM^2} = 20$ cm.

Diện tích thiết diện là $S_{\triangle SAB} = \dfrac{1}{2} SM \cdot AB = 20 \cdot 25 = 500\text{ cm}^2$.

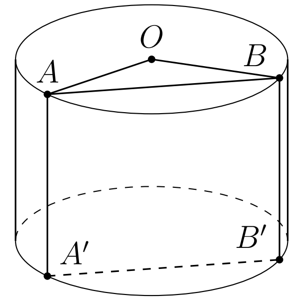
Chọn phương án A

Câu 54. Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng 4π, thiết diện qua trục là hình vuông. Một mặt phẳng (α) song song với trục cắt hình trụ theo thiết diện là tứ giác $ABB'A'$, biết một cạnh của thiết diện là dây cung của đường tròn đáy của hình trụ và căng một cung $120°$. Tính diện tích thiết diện $ABB'A'$.

Ⓐ $3\sqrt{2}$. Ⓑ $\sqrt{3}$. Ⓒ $2\sqrt{3}$. Ⓓ $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi r là bán kính đường tròn đáy của hình trụ. Vì thiết diện qua trục của hình trụ là một hình vuông nên chiều cao bằng đường kính đường tròn đáy hay $2r$. Suy ra $2\pi r \cdot 2r = 4\pi$ hay $r = 1$. Do đó



$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos 120^\circ} = \sqrt{3}$$

Vậy diện tích thiết diện $ABB'A'$ là $S_{ABB'A'} = AD \cdot AB = 2\sqrt{3}$.

Chọn phương án (C)

Câu 55. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 5 cm và khoảng cách giữa hai đáy là 7 cm. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục 3 cm. Tính diện tích S của thiết diện được tạo thành.

(A) $S = 55$ cm^2. **(B)** $S = 56$ cm^2. **(C)** $S = 53$ cm^2. **(D)** $S = 46$ cm^2.

Lời giải.

Vì khối trụ được cắt bởi mặt phẳng song song với trục nên thiết diện là hình chữ nhật $MNPQ$.

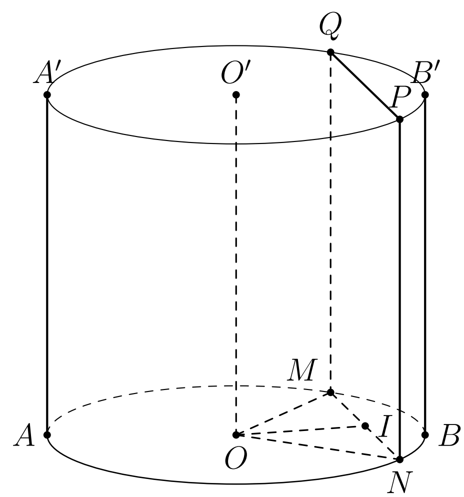
Gọi I là trung điểm MN. Khi đó, $OI \perp MN$ do $\triangle OMN$ cân tại O.

Mà $OI \perp PN$ (do PN vuông góc với đáy)

$\Rightarrow OI \perp (MNPQ) \Rightarrow OI = 3$ cm.

Áp dụng định lí Pi-ta-go cho tam giác vuông OMI, ta có $MI = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Rightarrow MN = 8$.

Mà $PQ = OO' = 7$ nên $S_{MNPQ} = 8 \cdot 7 = 56$ (cm^2).



Chọn phương án (B)

Câu 56. Cho hình nón tròn xoay có chiều cao $h = 20$ cm, bán kính đáy $r = 25$ cm. Mặt phẳng (α) đi qua đỉnh của hình nón cách tâm của đáy 12 cm. Tính diện tích thiết diện của hình nón cắt bởi mặt phẳng (α) .

(A) $S = 400$ cm^2. **(B)** $S = 406$ cm^2. **(C)** $S = 300$ cm^2. **(D)** $S = 500$ cm^2.

Lời giải.

Gọi S, O là đỉnh và tâm của đáy hình nón. Giả sử (α) cắt đường tròn đáy tại M và N, thiết diện là ΔSMN. Gọi I là trung điểm của MN và H là hình chiếu của O lên mặt phẳng (α).

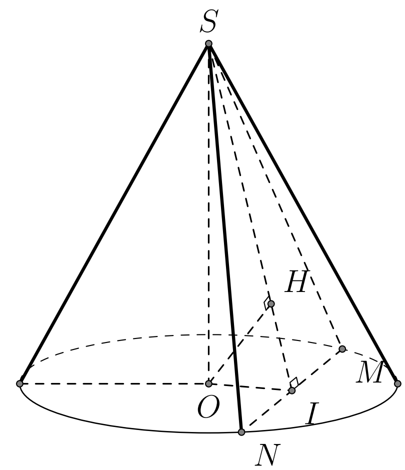
Ta có $SO = 20, ON = 25, OH = 12$ và $SH = \sqrt{SO^2 - OH^2} = 16$.

Vì $\Delta SOI \backsim \Delta SHO \Rightarrow OI = \dfrac{SO \cdot OH}{SH} = 15$.

Khi đó

$SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = 25, MN = 2IN = 2\sqrt{ON^2 - OI^2} = 40$.

Vậy diện tích thiết diện $\mathbb{S} = \dfrac{1}{2} SI \cdot MN = 500\ (\text{cm}^2)$.



Chọn phương án D

Câu 57. Cho hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông cạnh $2a$. Mặt phẳng (P) song song với trục và cách trục một khoảng $\dfrac{a}{2}$. Tính diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (P).

(A) $2\sqrt{3}a^2$. (B) a^2. (C) πa^2. (D) $\sqrt{3}a^2$.

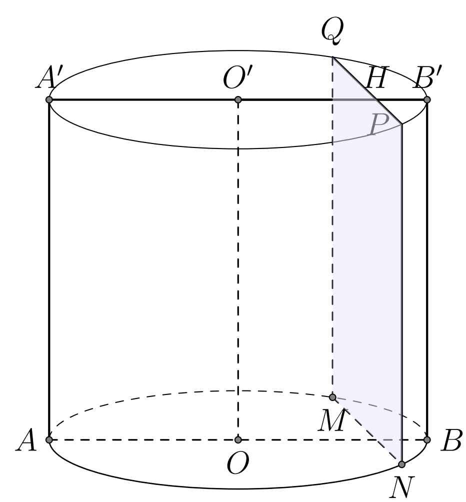
Lời giải.

Gọi $ABB'A'$ là thiết diện qua trục của hình trụ. Từ giả thiết ta suy ra đường cao hình trụ là $AA' = 2a$, bán kính đường tròn đáy hình trụ là $R = \dfrac{AB}{2} = a$.

Mặt phẳng (P) song song với trục nên cắt hình trụ theo thiết diện là hình chữ nhật có một cạnh $MQ = AA' = 2a$, và cách trục một khoảng $\dfrac{a}{2}$ nên $O'H = \dfrac{a}{2}$ với H là trung điểm của PQ.

Khi đó $PQ = 2\sqrt{O'Q^2 - O'H^2} = 2\sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = a\sqrt{3}$.

Do đó diện tích thiết diện cần tìm là $MQ \cdot PQ = 2\sqrt{3}a^2$.



Chọn phương án A

Câu 58. Cho hình nón đỉnh S đáy là hình tròn tâm O, SA và SB là hai đường sinh biết $SO = 3$, khoảng cách từ O đến (SAB) là 1 và diện tích tam giác SAB là 18. Tính bán kính đáy của hình nón trên.

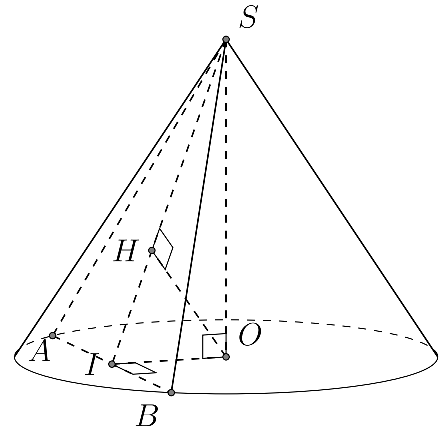
(A) $\dfrac{\sqrt{674}}{4}$. (B) $\dfrac{\sqrt{530}}{4}$. (C) $\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$. (D) $\dfrac{23}{4}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AB, H là hình chiếu của O lên SI, suy ra $OH \perp (SAB) \Rightarrow OH = 1$. Ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{OI^2} \Rightarrow \dfrac{1}{OI^2} = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9} \Rightarrow OI^2 = \dfrac{9}{8}$.

Do đó $SI = \sqrt{OI^2 + SO^2} = \sqrt{\dfrac{9}{8} + 9} = \dfrac{9\sqrt{2}}{4}$.

Diện tích tam giác SAB bằng $\dfrac{1}{2}SI \cdot AB \Rightarrow AB = \dfrac{2S}{SI} = \dfrac{16}{\sqrt{2}}$, suy ra $AI = \dfrac{8}{\sqrt{2}} \Rightarrow AO = \dfrac{\sqrt{530}}{4} = R$.



Chọn phương án B

Câu 59. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $2a$, diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và đáy là hình tròn nội tiếp $ABCD$ bằng

A $\dfrac{\pi a^2\sqrt{17}}{4}$. **B** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{17}}{2}$. **C** $\pi a^2\sqrt{17}$. **D** $2\pi a^2\sqrt{17}$.

Lời giải.

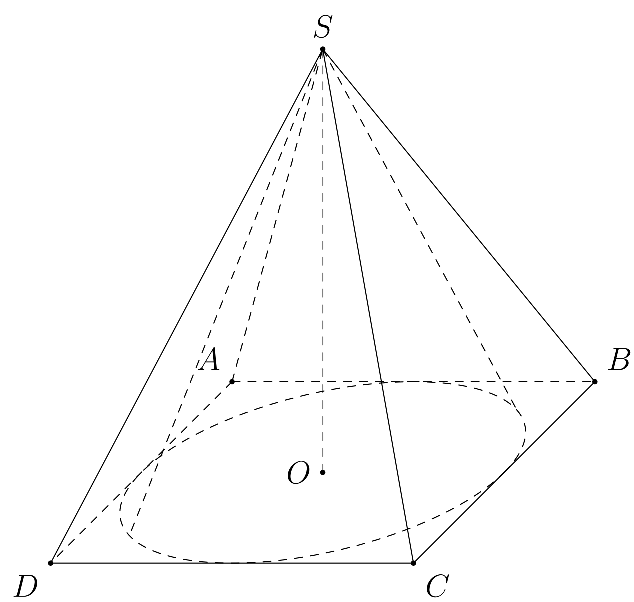
Ta có bán kính của hình nón là $R = \dfrac{a}{2}$.

Chiều cao hình nón bằng chiều cao hình chóp $h = SO = 2a$.

Độ dài đường sinh là $l = \sqrt{h^2 + R^2} = \dfrac{a\sqrt{17}}{2}$.

Suy ra diện tích xung của hình nón là

$$S_{\text{xq}} = \pi Rl = \frac{\pi a^2\sqrt{17}}{4}.$$



Chọn phương án A

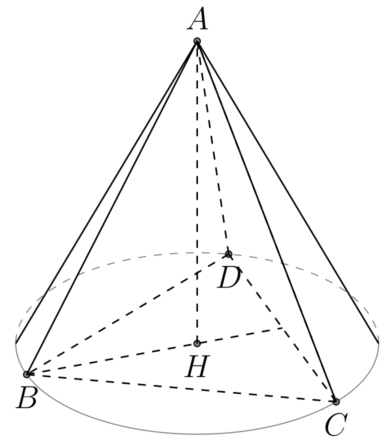
Câu 60. Tính diện tích xung quanh hình nón tròn xoay ngoại tiếp tứ diện đều cạnh bằng a.

A $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **B** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2}{3}$. **C** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{3}$. **D** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Giả sử $ABCD$ là tứ diện đều cạnh bằng a, gọi H là trọng tâm tam giác BCD. Khi đó, hình nón tròn xoay ngoại tiếp tứ diện đều $ABCD$ có bán kính đáy $r = HB = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và độ dài đường sinh $l = AB = a$.
Diện tích xung quanh của hình nón là

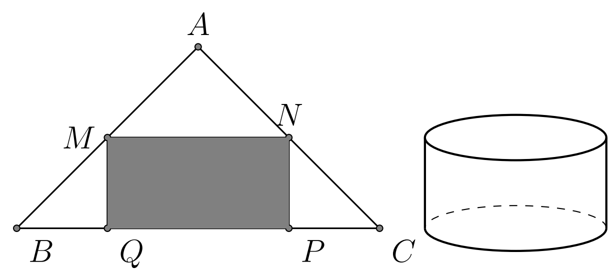
$$S_{xq} = \pi rl = \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot a = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}.$$



Chọn phương án A

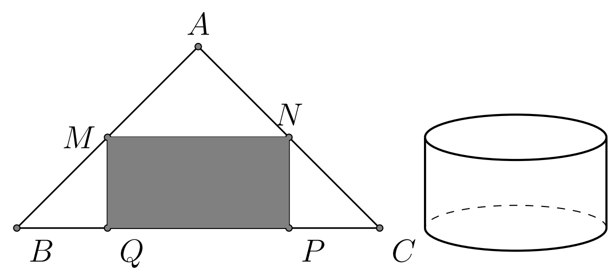
D MỨC ĐỘ 4

Câu 61.
Có tấm bìa hình tam giác vuông cân ABC có cạnh huyền bằng a. Người ta muốn cắt tấm bìa đó thành hình chữ nhật $MNPQ$ rồi cuộn lại thành một hình trụ không đáy như hình vẽ. Diện tích hình chữ nhật đó bằng bao nhiêu để diện tích xung quanh của hình trụ là lớn nhất?



A $\dfrac{a^2}{2}$. **B** $\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}$. **C** $\dfrac{a^2}{8}$. **D** $\dfrac{\sqrt{3}a^2}{8}$.

Lời giải.
Đặt $MQ = NP = x \Rightarrow MN = PQ = a - 2x$
với điều kiện $0 < 2x < a$
$S_{xq} = S_{MNPQ} = x(a-2x) = \dfrac{1}{2} \cdot 2x(a-2x) \leq \dfrac{a^2}{8}$
Dấu " = " xảy ra khi $a - 2x = 2x \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{4}$

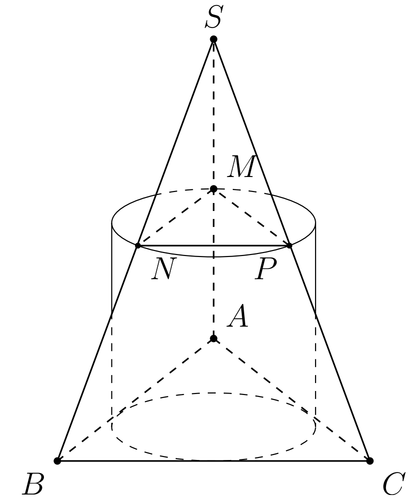


Chọn phương án C

Câu 62. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, M, N, P lần lượt là trung điểm SA, SB, SC. Dựng một hình trụ có một đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP, một đáy thuộc mặt phẳng (ABC). Biết diện tích xung quanh của hình trụ bằng tổng diện tích hai đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A $\dfrac{1}{4}a^3$. **B** $\dfrac{1}{12}a^3$. **C** $\dfrac{1}{8}a^3$. **D** $\dfrac{1}{6}a^3$.

Lời giải.



Vì MN là đường trung bình của tam giác SAB nên $MN = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$. Tương tự ta cũng có $NP = MP = \dfrac{a}{2}$, dẫn tới $\triangle MNP$ đều.

Khi đó bán kính đáy của hình trụ là $r = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Gọi h là chiều cao của hình trụ, khi đó ta có:

$2r\pi h = 2r^2\pi \Rightarrow h = r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Vì M là trung điểm SA nên

$\mathrm{d}\left[S, (ABC)\right] = 2\mathrm{d}\left[M, (ABC)\right] = 2h = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Dẫn tới $V_{S.ABC} = \dfrac{S_{ABC} \cdot \mathrm{d}\left[S, (ABC)\right]}{3} = \dfrac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{3}}{3} = \dfrac{a^3}{12}$.

Chọn phương án B

Câu 63. Trong các khối trụ có cùng diện tích toàn phần bằng π, gọi $(\Im)$ là khối trụ có thể tích lớn nhất, chiều cao của $(\Im)$ bằng:

A $\dfrac{\pi}{3}$. **B** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C** $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **D** $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Gọi R, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao khối trụ.

Diện tích toàn phần hình trụ: $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = \pi \Rightarrow h = \dfrac{1 - 2R^2}{2R}$.

Thể tích khối trụ: $V = h\pi R^2 = \dfrac{1 - 2R^2}{2R} \cdot \pi R^2 = \dfrac{\pi}{2}\left(R - 2R^3\right)$.

Xét $g(R) = \dfrac{\pi}{2}(R - 2R^3)$ trên $\left(0; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Ta có: $g'(R) = \dfrac{\pi}{2}\left(1 - 6R^2\right)$.

$g'(R) = 0 \Rightarrow R = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

Bản biến thiên:

x	0		$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$g'(R)$		$+$	0	$-$	
$g(R)$		$\nearrow$		$\searrow$	

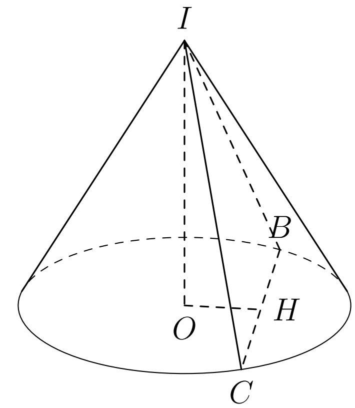
Vậy, thể tích khối trụ lớn nhất khi $R = \dfrac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow h = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Chọn phương án B

Câu 64. Cắt hình nón đỉnh I bởi một mặt phẳng đi qua trục hình nón ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$; BC là dây cung của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (IBC) tạo với mặt phẳng chứa đáy hình nón một góc $60°$. Tính theo a diện tích S của tam giác IBC.

A $S = \dfrac{a^2}{3}$. **B** $S = \dfrac{\sqrt{2}a^2}{3}$. **C** $S = \dfrac{\sqrt{2}a^2}{6}$. **D** $S = \dfrac{2a^2}{3}$.

Lời giải.



Cắt hình nón đỉnh I bởi một mặt phẳng đi qua trục hình nón ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$ nên bán kính của hình nón là $r = OB = OC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, đường sinh $l = IB = IC = a$ và đường cao $h = SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi H là trung điểm BC, khi đó góc hợp bởi mặt phẳng (IBC) và mặt phẳng chứa đường tròn đáy là $\widehat{IHO} = 60^\circ$. Suy ra $IH = \dfrac{IO}{\sin 60^\circ} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ và $BC = 2CH = 2\sqrt{IC^2 - IH^2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

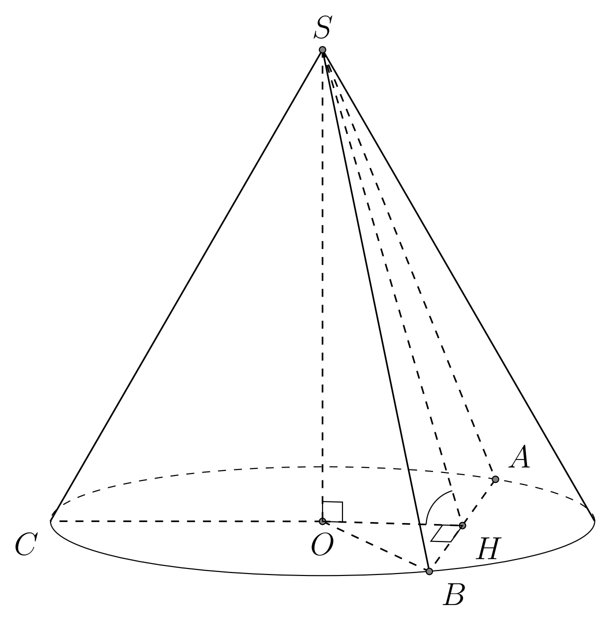
Diện tích S của tam giác IBC là $S_{IBC} = \dfrac{1}{2} \cdot IH \cdot BC = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

Chọn phương án B

Câu 65. Cho hình nón có đường sinh bằng $2a$ và góc ở đỉnh bằng 90°. Cắt hình nón bằng mặt phẳng (P) đi qua đỉnh sao cho góc giữa (P) và mặt đáy hình nón bằng 60°. Tính diện tích S của thiết diện tạo thành.

A $S = \dfrac{4\sqrt{2}a^2}{3}$. **B** $S = \dfrac{\sqrt{2}a^2}{3}$. **C** $S = \dfrac{8\sqrt{2}a^2}{3}$. **D** $S = \dfrac{5\sqrt{2}a^2}{3}$.

Lời giải.



Theo bài ra ta có tam giác SOC vuông cân ở O suy ra $OC = SO = a\sqrt{2}$.

Giả sử mặt phẳng (P) cắt đường tròn đáy theo dây cung AB. Gọi H là trung điểm của AB suy ra $OH \perp AB$, kết hợp với SO vuông góc với đáy suy ra $AB \perp (SOH)$, từ đó suy ra $\widehat{SHO} = 60^\circ$.

Trong tam giác vuông SOH có

$$OH = SO \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{3},$$

$$SH = \frac{SO}{\sin 60^\circ} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}.$$

Trong tam giác vuông OHB có

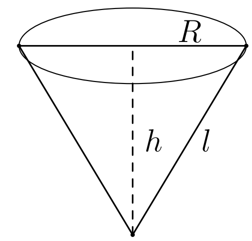
$$BH^2 = OB^2 - OH^2 = 2a^2 - \frac{6a^2}{9} = \frac{12a^2}{9} \Rightarrow BH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Từ đó ta có diện tích thiết diện $S_{\triangle SAB} = \dfrac{SH \cdot AB}{2} = SH \cdot BH = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3} \cdot \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{4a^2\sqrt{2}}{3}$.

Chọn phương án A

Câu 66.

Khi sản xuất cái phễu hình nón (không có nắp) bằng nhôm, các nhà thiết kế luôn đạt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm phểu ít nhất, tức là diện tích xung quanh của hình nón là nhỏ nhất. Hỏi nếu ta muốn sản xuất cái phễu có thể tích là 2 dm^3 thì diện tích xung quanh của cái phễu sẽ có giá trị nhỏ nhất gần với giá trị nào sau đây nhất?



(A) 6,85 dm^2. (B) 6,75 dm^2. (C) 6,65 dm^2. (D) 6,25 dm^2.

Lời giải.

Gọi R, h, l lần lượt là bán kính đáy, chiều cao và độ dài đường sinh của cái phễu.

Khi đó $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 \cdot h = 2 \Leftrightarrow h = \dfrac{6}{\pi R^2}$ và $l = \sqrt{h^2 + R^2} = \sqrt{\dfrac{36}{\pi^2 R^4} + R^2}$.

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi \cdot R \cdot l = \pi R\sqrt{\dfrac{36}{\pi^2 R^4} + R^2} = \sqrt{\dfrac{36}{R^2} + \pi^2 R^4}$.

Ta có $\dfrac{36}{R^2} + \pi^2 R^4 = \dfrac{18}{R^2} + \dfrac{18}{R^2} + \pi^2 R^4 \geq 3\sqrt[3]{(18\pi)^2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{18}{R^2} = \pi^2 R^4 \Leftrightarrow R = \sqrt[6]{\dfrac{18}{\pi^2}}$.

Suy ra $\min S_{xq} = \sqrt{3\sqrt[3]{(18\pi)^2}} \approx 6,65$.

Chọn phương án (C)

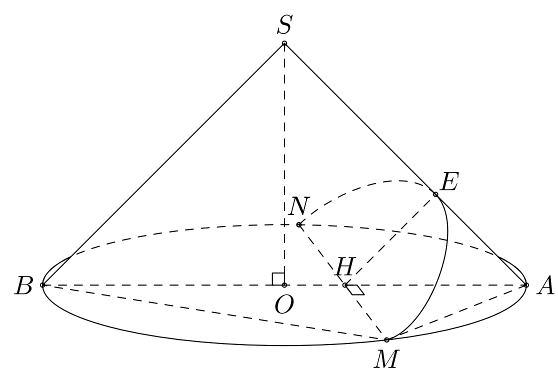
Câu 67. Khi cắt hình nón chiều cao bằng 16 cm, đường kính đáy bằng 24 cm bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện có diện tích lớn nhất gần với giá trị nào sau đây?

(A) 170. (B) 208. (C) 294. (D) 260.

Lời giải.

Cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện là một parabol. Với dây cung bất kỳ chứa đoạn MH như hình vẽ, suy ra tồn tại đường kính $AB \perp MH$.

Trong tam giác SAB, kẻ $HE \parallel SB$, $E \in SA$ nên thiết diện là parabol nhận HE làm trục.



Đặt $AH = x$ (với $0 < x < 24$).

Trong tam giác ABM có: $HM^2 = BH \cdot AH = x(24 - x)$.

Trong tam giác SAB có: $\dfrac{HE}{BS} = \dfrac{AH}{AB} \Leftrightarrow HE = \dfrac{AH}{AB} \cdot BS = \dfrac{AH}{AB} \cdot \sqrt{SO^2 + OB^2} = \dfrac{5x}{6}$.

Thiết diện thu được là một parabol có diện tích:

$$\begin{aligned} S &= \frac{4}{3}MH \cdot HE = \frac{10}{9} \cdot \sqrt{24x^3 - x^4} \\ &= \frac{10}{9}\sqrt{x \cdot x \cdot x(24-x)} \\ &= \frac{10}{9\sqrt{3}} \cdot \sqrt{x \cdot x \cdot x \cdot (72-3x)} \\ &\le \frac{10}{9\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{x+x+x+(72-3x)}{4}\right)^4} \approx 207{,}8 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

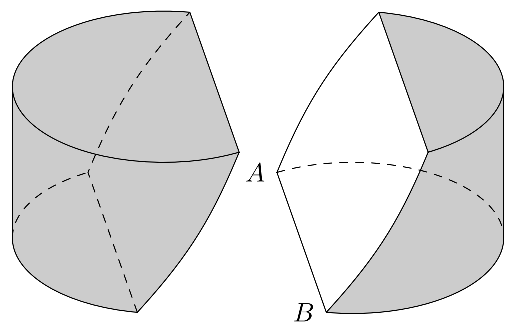
Dấu "=" xảy ra khi $x = 72 - 3x \Leftrightarrow x = 18$.

Vậy thiết diện có diện tích lớn nhất là: $\dfrac{10}{9}\sqrt{34992} \approx 207{,}8 \text{ cm}^2$.

Chọn phương án B

Câu 68.

Một khối gỗ có hình trụ với bán kính đáy bằng 6 và chiều cao bằng 8. Trên một đường tròn đáy nào đó lấy hai điểm A, B sao cho cung AB có số đo 120°. Người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua A, B và tâm của hình trụ (tâm của hình trụ là trung điểm của đoạn nối tâm hai đáy) để được thiết diện như hình vẽ. Biết diện tích thiết diện thu được có dạng $S = a\pi + b\sqrt{3}$. Tính $P = a + b$.



A $P = 60$. **B** $P = 30$. **C** $P = 50$. **D** $P = 45$.

Lời giải.

Gọi (α) là mặt phẳng chứa thiết diện.

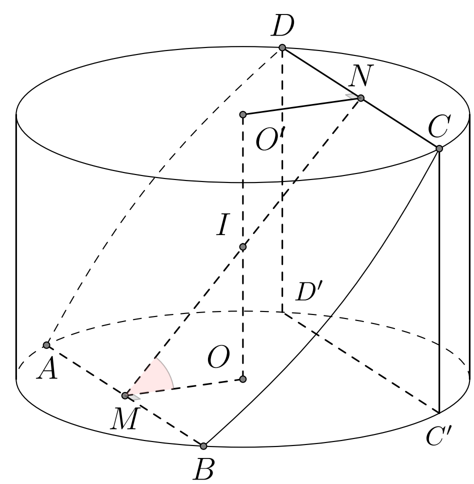
Gọi M là trung điểm AB; I là trung điểm OO'.

MI cắt đáy trên tại N; kẻ CD qua N, song song với AB thì ta được thiết diện được giới hạn bởi các đoạn thẳng AB, CD và các cung AD, BC như hình vẽ.

M là trung điểm AB thì $OM \perp AB$ nên góc giữa (α) và (ABO) là $\widehat{IMO}$.

Ta có $OM = OB \cdot \cos 60^\circ = 3 \Rightarrow MI = 5$ nên $\cos((\alpha), (ABO)) = \dfrac{3}{5}$.

Gọi C', D' lần lượt là hình chiếu của C, D lên (ABO) thì $ABC'D'$ là hình chiếu của $ABCD$ lên (ABO).



Ta có

$$S_{ABC'D'} = 2\left(S_{\triangle OAB} + S_{\text{quạt}OBC'}\right) = 2\left(\frac{1}{2}OB \cdot OA \cdot \sin 120^\circ + \frac{1}{6}\pi \cdot 36\right) = 18\sqrt{3} + 12\pi.$$

Suy ra $S_{ABCD} = \dfrac{S_{ABC'D'}}{\cos((\alpha), (ABO))} = 30\sqrt{3} + 20\pi$.

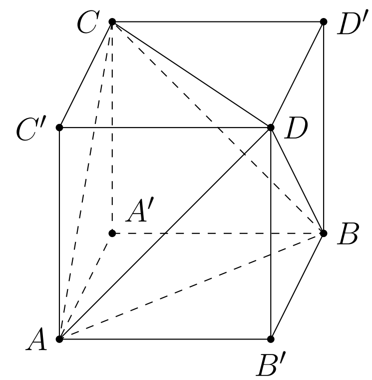
Vậy $P = 20 + 30 = 50$.

Chọn phương án C

Câu 69. Cho hình trụ có chiều cao bằng đường kính đáy và có hai đường kính AB, CD lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy. Biết AB vuông góc với CD và thể tích của khối tứ diện $A.BCD$ bằng 18. Tính diện tích xung quanh hình trụ.

(A) 24π. (B) $18\pi\sqrt[3]{2}$. (C) 72π. (D) 48π.

Lời giải.



Dựng thêm hai đường kính vuông góc với các đường kính AB và CD.

Ta được hình hộp chữ nhật như hình bên $AA'BB'.C'CD'D$.

Theo giả thiết ta có chiều cao $AC' = AB = h$, gọi V là thể tích hình hộp.

Ta có $V = V_{DABB'} + V_{BCDD'} + V_{CABA'} + V_{ACDC'} + V_{ABCD}$.

$V_{DABB'} = V_{BCDD'} = V_{CABA'} = V_{ACDC'} = \dfrac{1}{3}AC' \cdot S_{CDC'} = \dfrac{1}{6}V$.

Khi đó $V = \dfrac{2}{3}V + V_{ABCD} \Rightarrow \dfrac{1}{3}V = 18 \Rightarrow V = 54$.

Ta có $V = h \cdot S_{AA'BB'} = \dfrac{h^3}{2} \Rightarrow h^3 = 108 \Rightarrow h = 3\sqrt[3]{4}$.

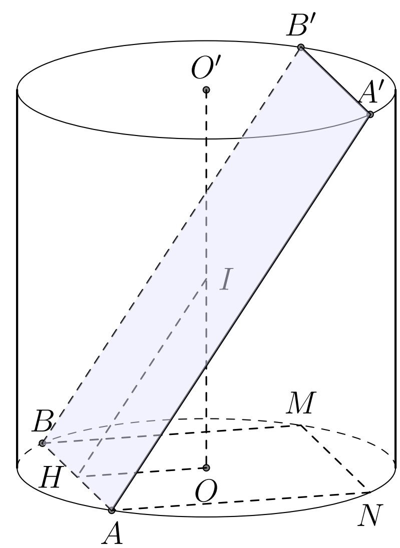
Do đó diện tích xung quanh hình trụ $S_{\text{xq}} = 2\pi \cdot r \cdot h = 18\pi\sqrt[3]{2}$.

Chọn phương án (B)

Câu 70. Cho khối trụ có chiều cao $h = 16$ và hai đáy là hai hình tròn tâm O, O' với bán kính $R = 12$. Gọi I là trung điểm của OO' và AB là một dây cung của đường tròn (O) sao cho $AB = 12\sqrt{3}$. Tính diện tích thiết diện của khối trụ với mặt phẳng (IAB).

(A) $120\sqrt{3} + 80\pi$. (B) $48\pi + 24\sqrt{3}$. (C) $60\sqrt{3} + 40\pi$. (D) $120\sqrt{3}$.

Lời giải.



(IAB) cắt khối trụ theo thiết diện như hình vẽ.

Gọi α là góc giữa (IAB) và đáy; H là trung điểm của AB.

Ta có: $IH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{12^2 - (6\sqrt{3})^2} = 6$.

$\Rightarrow IH = \sqrt{IO^2 + OH^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Ta có: $\cos\alpha = \cos\widehat{IHO} = \dfrac{OH}{IH} = \dfrac{6}{10}$.

Diện tích của thiết diện của khối trụ cắt bởi (IAB) là S.

Hình chiếu của S trên mặt đáy tâm O là hình giới hạn bởi đường tròn tâm O, bán kính 12 và hai đường thẳng AB và MN; gọi diện tích của hình này là S_1.

Khi đó, $S_1 = 4\displaystyle\int_0^6 \sqrt{144 - x^2}\mathrm{d}x = 4\left(18\sqrt{3} + 12\pi\right) = 72\sqrt{3} + 48\pi$.

Ta có: $S_1 = S \cdot \cos\alpha \Rightarrow S = \dfrac{10}{6}\left(72\sqrt{3} + 48\pi\right) = 120\sqrt{3} + 80\pi$.

Chọn phương án (A)

Câu 71. Cho hình nón có đường sinh bằng $2a$ và góc ở đỉnh bằng $90°$. Cắt hình nón bằng mặt phẳng (P) đi qua đỉnh sao cho góc giữa (P) và mặt đáy hình nón bằng $60°$. Tính diện tích S của thiết diện tạo thành.

A $S = \dfrac{4\sqrt{2}a^2}{3}$. **B** $S = \dfrac{\sqrt{2}a^2}{3}$. **C** $S = \dfrac{8\sqrt{2}a^2}{3}$. **D** $S = \dfrac{5\sqrt{2}a^2}{3}$.

Lời giải.

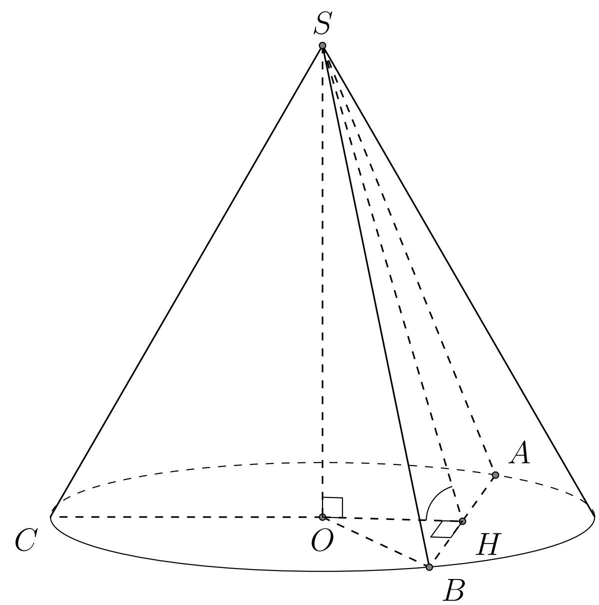
Theo bài ra ta có tam giác SOC vuông cân ở O suy ra $OC = SO = a\sqrt{2}$.

Giả sử mặt phẳng (P) cắt đường tròn đáy theo dây cung AB. Gọi H là trung điểm của AB suy ra $OH \perp AB$, kết hợp với SO vuông góc với đáy suy ra $AB \perp (SOH)$, từ đó suy ra $\widehat{SHO} = 60^\circ$.

Trong tam giác vuông SOH có

$$OH = SO\tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{3},$$

$$SH = \frac{SO}{\sin 60^\circ} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}.$$



Trong tam giác vuông OHB có

$$BH^2 = OB^2 - OH^2 = 2a^2 - \frac{6a^2}{9} = \frac{12a^2}{9} \Rightarrow BH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Từ đó ta có diện tích thiết diện $S_{\triangle SAB} = \dfrac{SH \cdot AB}{2} = SH \cdot BH = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3} \cdot \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{4a^2\sqrt{2}}{3}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. D	3. C	4. D	5. A	6. B	7. D	8. A	9. D	10. D
11. D	12. D	13. D	14. A	15. A	16. D	17. C	18. C	19. B	20. D
21. A	22. C	23. D	24. B	25. B	26. D	27. D	28. C	29. C	30. A
31. D	32. A	33. B	34. C	35. B	36. A	37. B	38. D	39. C	40. A
41. A	42. A	43. D	44. D	45. B	46. B	47. D	48. A	49. C	50. B
51. B	52. A	53. A	54. C	55. B	56. D	57. A	58. B	59. A	60. A
61. C	62. B	63. B	64. B	65. A	66. C	67. B	68. C	69. B	70. A

DẠNG 33. TÍCH PHÂN

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Xét $\int_0^2 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$, nếu đặt $u=x^2$ thì $\int_0^2 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$ bằng

(A) $2\int_0^2 e^u du$. (B) $2\int_0^4 \mathrm{e}^u\mathrm{d}u$. (C) $\frac{1}{2}\int_0^2 \mathrm{e}^u\mathrm{d}u$. (D) $\frac{1}{2}\int_0^4 \mathrm{e}^u\mathrm{d}u$.

Lời giải.

Đặt $u=x^2 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x \Leftrightarrow x\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2}$.

Khi $x=0 \Rightarrow u=0$, khi $x=2 \Rightarrow u=4$.

Do đó $\int\limits_0^2 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 \mathrm{e}^u\mathrm{d}u$.

Chọn phương án (D)

Câu 1. Nếu $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$, $\int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$ thì $\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) -2. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 5+(-1)=4$.

Chọn phương án (D)

Câu 2. Nếu $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$, $\int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$ thì $\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) -2. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 5+(-1)=4$.

Chọn phương án (D)

Câu 3. Tính tích phân $I = \int\limits_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{1-2x}$.

(A) $I=-\ln 9$. (B) $I=\ln 9$. (C) $I=-\ln 3$. (D) $I=\ln 3$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{1-2x} = -\frac{1}{2}\int\limits_1^5 \frac{\mathrm{d}(1-2x)}{1-2x} = -\frac{1}{2}\ln|1-2x|\Big|_1^5 = -\ln 3.$

Chọn phương án C

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ biết $f(0)=1$, $f'(x)$ liên tục trên $[0;3]$ và $\int\limits_0^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = 9$. Tính $f(3)$.

A $f(3)=9$. **B** $f(3)=10$. **C** $f(3)=8$. **D** $f(3)=7$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = 9 \Leftrightarrow f(x)\big|_0^3 = 9 \Leftrightarrow f(3)-f(0)=9 \Leftrightarrow f(3)=9+f(0)=9+1=10.$

Vậy $f(3)=10$.

Chọn phương án B

Câu 5. Giá trị của $\int\limits_{-1}^0 \mathrm{e}^{x+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A $1-\mathrm{e}$. **B** $\mathrm{e}-1$. **C** $-\mathrm{e}$. **D** e.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{-1}^0 \mathrm{e}^{x+1}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x+1}\Big|_{-1}^0 = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}-1.$

Chọn phương án B

Câu 6. Tính tích phân $I = \int\limits_1^2 \frac{x-1}{x}\,\mathrm{d}x$

A $I = 1-\ln 2$. **B** $I = \frac{7}{4}$. **C** $I = 1+\ln 2$. **D** $I = 2\ln 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} I = \int\limits_1^2 \frac{x-1}{x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left(1-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x &= (x-\ln|x|)\big|_1^2 \\ &= (2-\ln 2)-(1-\ln 1) \\ &= 1-\ln 2 \end{aligned}$$

Chọn phương án A

Câu 7. Tích phân $\int\limits_0^1 \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\frac{1}{2}\log\frac{7}{5}$. **B** $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{7}$. **C** $\frac{1}{2}\ln\frac{7}{5}$. **D** $-\frac{4}{35}$.

Lời giải.

$\int\limits_0^1 \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}\left(2x+5\right) = \frac{1}{2}\ln\left(2x+5\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln\frac{7}{5}$

Chọn phương án C

Câu 8. Tính tích phân $I = \int\limits_1^2 \frac{x+1}{x}\,\mathrm{d}x$.

A $I = 1 - \ln 2$. B $I = 2\ln 2$. C $I = 1 + \ln 2$. D $I = \frac{7}{4}$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_1^2 \frac{x+1}{x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x = \left(x + \ln|x|\right)\Big|_1^2 = 1 + \ln 2$.

Chọn phương án C

Câu 9. Cho $\int\limits_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_{-1}^2 g(x)\mathrm{d}x = -1$, khi đó $\int\limits_{-1}^2 \left[x + 2f(x) + 3g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A $\frac{5}{2}$. B $\frac{7}{2}$. C $\frac{17}{2}$. D $\frac{11}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $\int\limits_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)]\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^2 x\mathrm{d}x + 2\int\limits_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x + 3\int\limits_{-1}^2 g(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2} + 4 - 3 = \frac{5}{2}$.

Chọn phương án A

Câu 10. Cho $\int_0^2 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$ với a, b, c là các số thực. Giá trị của $a + b^2 - c^3$ bằng

A 3. B 6. C 5. D 4.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)} = \int\limits_2^3 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\Bigg|_2^3 = \ln\frac{4}{5} - \ln\frac{3}{4} = 4\ln 2 - \ln 3 - \ln 5$.

Suy ra $a = 4, b = -1, c = -1$. Vậy $a + b^2 - c^3 = 6$.

Chọn phương án B

Câu 11. Cho $\int\limits_{-2}^5 f\left(x\right)\,\mathrm{d}x = 8$ và $\int\limits_5^{-2} g\left(x\right)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $I = \int\limits_{-2}^5 \left[f\left(x\right) - 4g\left(x\right) - 1\right]\,\mathrm{d}x$.

A $I = 13$. B $I = 27$. C $I = -11$. D $I = 3$.

Lời giải.

Nhóm: PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA

Theo tính chất của tích phân ta có

$$I=\int\limits_{-2}^{5}\left[f\left(x\right)-4g\left(x\right)-1\right]\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{5}f\left(x\right)\,\mathrm{d}x-4\int\limits_{-2}^{5}g\left(x\right)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{-2}^{5}\mathrm{d}x=8\cdot4\cdot(-3)-x\Big|_{-2}^{5}=13.$$

Chọn phương án A

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^2\left(f(x)+3x^2\right)\mathrm{d}x=10$. Tính $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A -18. B -2. C 18. D 2.

Lời giải.

Ta có: $\int\limits_0^2\left(f(x)+3x^2\right)\mathrm{d}x=10\Leftrightarrow\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=10-\int\limits_0^2 3x^2\,\mathrm{d}x=10-x^2\Big|_0^2=2.$

Chọn phương án D

Câu 13. Cho $\int\limits_0^1\dfrac{x\,\mathrm{d}x}{(x+2)^2}=a+b\ln2+c\ln3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng

A -2. B -1. C 2. D 1.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+2)^2}&=\int\limits_0^1\frac{x+2-2}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x\\&=\int\limits_0^1\frac{x+2}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x-\int\limits_0^1\frac{2}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x\\&=\int\limits_0^1\frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x-\int\limits_0^1\frac{2}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x\\&=\ln|x+2|\Big|_0^1+\frac{2}{x+2}\Big|_0^1\\&=\ln3-\ln2-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Nên $a=-\dfrac{1}{3}$, $b=-1$, $c=1$, suy ra $3a+b+c=-1$.

Chọn phương án B

Câu 14. Giá trị của $\int\limits_0^1(2019x^{2018}-1)\mathrm{d}x$ bằng

A 0. B $2^{2017}+1$. C $2^{2017}-1$. D 1.

Lời giải.

$$\int_0^1 (2019x^{2018}-1)\mathrm{d}x = 2019\int_0^1 x^{2018}\mathrm{d}x - \int_0^1 \mathrm{d}x = \left(x^{2019}-x+C\right)\Big|_0^1 = 0$$

Chọn phương án A

Câu 15. Cho $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+2)^2} = a+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng

(A) -2. (B) -1. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+2)^2} &= \int_0^1 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{2}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \ln|x+2|\Big|_0^1 + \frac{2}{x+2}\Big|_0^1 = \ln 3-\ln 2-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Nên $a=-\dfrac{1}{3}$, $b=-1$, $c=1$. Suy ra $3a+b+c=-1$.

Chọn phương án B

Câu 16. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^3 \max\{x^2,4\}\,\mathrm{d}x$.

(A) $I=9$. (B) $I=12$. (C) $I=\dfrac{43}{3}$. (D) $I=21$.

Lời giải.

$$I=\int_0^2 \max\{x^2,4\}\,\mathrm{d}x+\int_2^3 \max\{x^2,4\}\,\mathrm{d}x=\int_0^2 4\,\mathrm{d}x+\int_2^3 x^2\,\mathrm{d}x = 8+\frac{19}{3}=\frac{43}{3}.$$

Chọn phương án C

Câu 17. Biết $\displaystyle\int_1^2 \frac{4\mathrm{d}x}{(x+4)\sqrt{x}+x\sqrt{x+4}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-d$ với a,b,c,d là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c+d$.

(A) 48. (B) 46. (C) 54. (D) 52.

Lời giải.

Ta có

$$I=\int_1^2 \frac{4\mathrm{d}x}{(x+4)\sqrt{x}+x\sqrt{x+4}} = \int_1^2 \frac{4}{\sqrt{x(x+4)}\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x}\right)}\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+4)}}\mathrm{d}x$$

Khi đó,

$$I=\int\limits_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+4}}\right)\mathrm{d}x=\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x+4}\right)\Big|_1^2=2\sqrt{2}-2\sqrt{6}-2+2\sqrt{5}=\sqrt{8}+\sqrt{20}-\sqrt{24}-2.$$

Suy ra, $a=8$, $b=20$, $c=24$, $d=2$. Do đó, $P=54$.
Chọn phương án C

Câu 18. Biết rằng $\int\limits_2^3\frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x=\frac{a-4\sqrt{b}}{c}$, với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $T=a+b+c$.

A 31. B 29. C 33. D 27.

Lời giải.

$$\int\limits_2^3\frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x=\int\limits_2^3\frac{\left(x-\sqrt{x-1}\right)\left(x^2-x+1\right)}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_2^3\left(x-\sqrt{x-1}\right)\,\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}\right)\Big|_2^3=\frac{19-4\sqrt{8}}{6}\Rightarrow\begin{cases}a=19\\b=8\\c=6.\end{cases}$$

Vậy $T=a+b+c=33$.
Chọn phương án C

Câu 19. Biết $\int\limits_{-2}^2\frac{x+1}{x^2-9}\,\mathrm{d}x=-\frac{a}{b}\ln 5$ với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị $a+b$.

A 10. B 4. C 8. D 7.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{-2}^2\frac{x+1}{x^2-9}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^2\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+3}\right)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\ln|x-3|+\frac{1}{3}\ln|x+3|\Big|_{-2}^2$
$=\frac{2}{3}(\ln 1-\ln 5)+\frac{1}{3}(\ln 5-\ln 1)=-\frac{1}{3}\ln 5$ hay $a=1,b=3$. Khi đó $a+b=4$
Chọn phương án B

Câu 20. $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+\frac{1}{2x+1}$. Biết $F(0)=0$, $F(1)=a+\frac{b}{c}\ln 3$, trong đó a,b,c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó giá trị biểu thức $a+b+c$ bằng

A 4. B 3. C 12. D 9.

Lời giải.

Ta có $F(1)-F(0)=\int\limits_0^1\left(3x^2+\dfrac{1}{2x+1}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 3x^2\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^1\dfrac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x=\left(x^3+\dfrac{1}{2}\ln(2x+1)\right)\Big|_0^1=$ $1+\dfrac{1}{2}\ln 3$. Suy ra $a=1, b=1, c=2$, do đó $a+b+c=4$.

Chọn phương án A

B MỨC ĐỘ 2

Câu 21. Nếu $\int\limits_1^5\dfrac{\mathrm{d}x}{2x-1}=\ln c$ với $c\in\mathbb{Q}$ thì giá trị của c bằng

A 9. B 3. C 6. D 81.

Lời giải.

$\int\limits_1^5\dfrac{\mathrm{d}x}{2x-1}=\dfrac{1}{2}\ln|2x-1|\Big|_1^5=\ln 3.$

Vậy $c=3$.

Chọn phương án B

Câu 22. Tính $I=\int\limits_0^{\ln 2}\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

A $I=\dfrac{1}{2}$. B $I=1$. C $I=\dfrac{1}{8}$. D $I=\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

$I=\int\limits_0^{\ln 2}\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^{\ln 2}=\dfrac{3}{2}.$

Chọn phương án D

Câu 23. Tính tích phân $I=\int\limits_1^2\dfrac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x$.

A $I=\ln 3-1$. B $I=\ln\sqrt{3}$. C $I=\ln 2+1$. D $I=\ln 2-1$.

Lời giải.

Ta có $I=\int\limits_1^2\dfrac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln|2x-1|\Big|_1^2=\dfrac{1}{2}(\ln 3-\ln 1)=\dfrac{1}{2}\ln 3=\ln\sqrt{3}.$

Chọn phương án B

Câu 24. Cho $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2$. Hãy tính $\int\limits_1^4\dfrac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

A $I=4$. B $I=1$. C $I=\dfrac{1}{2}$. D $I=2$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t$.
Đổi cận $x = 1 \Leftrightarrow t = 1$; $x = 4 \Rightarrow t = 2$, ta có

$$I = 2\int\limits_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot 2 = 4.$$

Chọn phương án A

Câu 25. Tích phân $\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{7}{3}$. B $\ln\dfrac{7}{3}$. C $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{7}$. D $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{7}{3}$.

Lời giải.
Đặt $u = x^2 + 3 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x \Rightarrow x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}u$.
Đổi cận $x = 0 \Rightarrow u = 3$; $x = 2 \Rightarrow u = 7$, ta có

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_3^7 \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln|u|\Big|_3^7 = \frac{1}{2}\ln 7 - \frac{1}{2}\ln 3 = \frac{1}{2}\ln\frac{7}{3}.$$

Chọn phương án D

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\displaystyle\int\limits_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 12$.

Giá trị tích phân $I = \displaystyle\int\limits_1^2 f(2x+1)\,\mathrm{d}x$ bằng

A 4. B 6. C 8. D 12.

Lời giải.
Đặt $t = 2x + 1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x$, $x = 1 \Rightarrow t = 3$; $x = 2 \Rightarrow t = 5$.

Vậy $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_3^5 f(t)\,\mathrm{d}t = 6$.

Chọn phương án B

Câu 27. Tích phân $I = \displaystyle\int\limits_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1}\mathrm{d}x = a - \ln b$ trong đó a, b là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a + b$.

A 1. B 0. C -1. D 3.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(1 - \frac{2x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= x\Big|_0^1 - \ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^1 \\ &= 1 - \ln 2 \\ &\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b = 3. \end{aligned}$$

Chọn phương án D

Câu 28. Tìm giá trị của a để $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x = \ln a$.

(A) 12. (B) $\frac{4}{3}$. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{3}{4}$.

Lời giải.

$\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x = \int_3^4 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x = \left(\ln|x-2| - \ln|x-1|\right)\Big|_3^4 = \ln\frac{4}{3}$.

Suy ra $a = \frac{4}{3}$.

Chọn phương án B

Câu 29. Tích phân $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x(\ln x+2)^2}\mathrm{d}x = a\ln 3 + b\ln 2 + \frac{c}{3}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $a^2+b^2+c^2 = 1$. (B) $a^2+b^2+c^2 = 11$. (C) $a^2+b^2+c^2 = 9$. (D) $a^2+b^2+c^2 = 3$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x(\ln x+2)^2}\mathrm{d}x$, đặt $t = \ln x + 2 \Rightarrow dt = \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

Đổi cận tích phân: Khi $x = 1 \Rightarrow t = 2$; $x = \mathrm{e} \Rightarrow t = 3$.

Vậy $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{t-2}{t^2}\mathrm{d}t = \int_2^3 \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \left(\ln t + \frac{2}{t}\right)\Big|_2^3 = \ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{3}$.

Suy ra $a = 1, b = -1, c = -1$. Vậy $a^2+b^2+c^2 = 3$.

Chọn phương án D

Câu 30. Biết $\int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \dfrac{a}{b}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+C$ (với a, b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản), khi đó giá trị của $b-a$ là

(A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.

$\int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int (x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(x^2+1) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C = \dfrac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+C.$

Vậy $b-a=3-1=2$.

Chọn phương án (D)

Câu 31. Cho $I = \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin x}{(\cos 2x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ và đặt $t=\cos x$. Khẳng định nào **sai**?

(A) $I = -\dfrac{1}{12}t^{-3}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$. (B) $I = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{\mathrm{d}t}{t^4}$. (C) $I = \dfrac{7}{12}$. (D) $I = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin x}{(\cos 2x+1)^4}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\cos x \Leftrightarrow \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}$

Khi đó, $I = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{\mathrm{d}t}{t^4} = -\dfrac{1}{12}t^{-3}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = -\dfrac{7}{16}.$

Chọn phương án (C)

Câu 32. Tích phân $\displaystyle\int\limits_1^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ có giá trị bằng

(A) $\dfrac{8-2\sqrt{2}}{3}$. (B) $\dfrac{4-\sqrt{2}}{3}$. (C) $\dfrac{4+\sqrt{2}}{3}$. (D) $\dfrac{8+2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{1+x^2}\Rightarrow t^2=1+x^2\Rightarrow t\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}$; $x=\sqrt{3}\Rightarrow t=2$.

Khi đó $I = \displaystyle\int\limits_1^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \displaystyle\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} t^2\,\mathrm{d}t = \dfrac{t^3}{3}\Big|_{\sqrt{2}}^{2} = \dfrac{8-2\sqrt{2}}{3}.$

Chọn phương án (A)

Câu 33. Tính tích phân $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-2\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x$ được kết quả là

A $\dfrac{e^2+1}{2e^2}$. **B** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{e^2}{2}$. **C** $\dfrac{e^2-1}{2e^2}$. **D** $\dfrac{1}{2}-\dfrac{e^2}{2}$.

Lời giải.

Đặt $t=-2\cos x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\sin x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \sin x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=-2$; $x=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t=0$.

Khi đó: $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0}\dfrac{1}{2}e^t\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}e^t\Big|_{-2}^{0} = \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2e^2}=\dfrac{e^2-1}{2e^2}$.

Chọn phương án C

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\displaystyle\int_{-5}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 9$. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^2 [f(1-3x)+9]\,\mathrm{d}x$

A 21. **B** 75. **C** 15. **D** 27.

Lời giải.

$$\int_0^2 [f(1-3x)+9]\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(1-3x)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 9\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(1-3x)\,\mathrm{d}x + 18.$$

Đặt $1-3x=t \Rightarrow \displaystyle\int_0^2 f(1-3x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3}\int_1^{-5} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{3}\int_{-5}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{3}\int_{-5}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\cdot 9 = 3$.

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^2 [f(1-3x)+9]\,\mathrm{d}x = 21$.

Chọn phương án A

Câu 35. Tính $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^3 x\cdot\sin x\mathrm{d}x$.

A $-\dfrac{\pi^4}{4}$. **B** $-\pi^4$. **C** 0. **D** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Đặt $x=\pi-t$. Ta có $I=-\displaystyle\int_{\pi}^{0}\cos^3(\pi-t)\cdot\sin(\pi-t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{\pi}\cos^3 t\cdot\sin t\,\mathrm{d}t$, suy ra $2I=0 \Rightarrow I=0$.

Chọn phương án C

Câu 36. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$

A $I=\dfrac{5}{2}$. **B** $I=\dfrac{3}{2}$. **C** $I=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{9}{20}$. **D** $I=\dfrac{9}{4}$.

Lời giải.

Đặt $t=\cos x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1; x=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

Nhóm: PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA

Khi đó: $I = \int\limits_{1}^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{t^3}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t = \left.\frac{-1}{2t^2}\right|_{\frac{1}{2}}^{1} = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$.

Chọn phương án B

Câu 37. Tích phân $I = \int\limits_{0}^{1} \frac{(x-1)^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = a\ln b + c$, trong đó $a; b; c$ là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a+b+c$?

(A) 3. (B) 0. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

$I = \int\limits_{0}^{1} \frac{(x-1)^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} \left(1 - \frac{2x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \left.\left(x - \ln\left|x^2+1\right|\right)\right|_0^1 = 1 - \ln 2.$

Khi đó $a = -1, b = 2, c = 1 \Rightarrow a+b+c = 2$.

Chọn phương án D

Câu 38. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính $\int\limits_{0}^{1} f^2(x)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $\frac{2}{3}$. (B) 2. (C) $-\frac{2}{3}$. (D) -2.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{0}^{1} f^2(x)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} f^2(x)\mathrm{d}f(x) = \left.\frac{f^3(x)}{3}\right|_0^1 = -\frac{2}{3}$.

Chọn phương án C

Câu 39. Biết $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{0}^{9} f(x)\mathrm{d}x = 9$. Khi đó giá trị của $\int\limits_{1}^{4} f(3x-3)\mathrm{d}x$ là

(A) 27. (B) 3. (C) 24. (D) 0.

Lời giải.

Đặt $t = 3x - 3$, khi đó $\mathrm{d}t = 3\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 1 \to t = 0, x = 4 \to t = 9$.

Từ đó ta có $\int\limits_{1}^{4} f(3x-3)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\limits_{0}^{9} f(t)\mathrm{d}t = 3$.

Chọn phương án B

Câu 40. Cho biết $I = \int\limits_{0}^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $m - 7n$.

(A) 2. (B) 1. (C) 0. (D) 91.

Lời giải.

Đặt $u = \sqrt[3]{1+x^2}$.
Khi đó, $x^2 = u^3 - 1$; $2x\,\mathrm{d}x = 3u^2\,\mathrm{d}u$. Đổi cận:

x	0	$\sqrt{7}$
u	1	2

$$I = \int\limits_1^2 \frac{\left(u^3-1\right)}{u} \cdot \frac{3}{2}u^2\,\mathrm{d}u = \frac{3}{2}\int\limits_1^2 \left(u^4 - u\right)\,\mathrm{d}u = \frac{3}{2}\left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{141}{20}.$$

Vậy $m = 141$, $n = 20$; và do đó $m - 7n = 1$.
Chọn phương án B

Câu 41. Tính tích phân $I = \int\limits_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x$.

(A) $\frac{16}{9}$. (B) $-\frac{16}{9}$. (C) $\frac{52}{9}$. (D) $-\frac{52}{9}$.

Lời giải.
Đặt $u = \sqrt{x^3+1} \Rightarrow u^2 = x^3 + 1 \Rightarrow 2u\,\mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x$.
Khi đó $I = \frac{2}{3}\int\limits_1^3 u^2\,\mathrm{d}u = \frac{2}{9}\cdot u^3\Big|_1^3 = \frac{52}{9}$.
Chọn phương án C

Câu 42. Cho tích phân $\int\limits_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{3+\sqrt{2x+1}} = a + b\cdot\ln\frac{2}{3}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $a - b = 3$. (B) $a - b = 5$. (C) $a + b = 5$. (D) $a + b = 3$.

Lời giải.
Ta thấy

$$\int\limits_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{3+\sqrt{2x+1}} = \int\limits_0^4 \left(1 - \frac{3}{3+\sqrt{2x+1}}\right)\mathrm{d}(\sqrt{2x+1}) = \left[\sqrt{2x+1} - 3\ln(\sqrt{2x+1}+3)\right]\Big|_0^4 = 2 + 3\cdot\ln\frac{2}{3}$$

Vậy $a + b = 5$.
Chọn phương án C

Câu 43. Biết tính phân $\int\limits_0^1 x\sqrt[3]{1-x}\,\mathrm{d}x = \frac{M}{N}$ là phân số tối giản. Tính $M + N$

(A) 36. (B) 38. (C) 37. (D) 35.

Lời giải.
Đặt $t = \sqrt[3]{1-x} \Rightarrow t^3 = 1 - x \Rightarrow 3t^2\,\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x$.
Ta có $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = 1 \Rightarrow t = 0$.

Vậy $\int\limits_0^1 x\sqrt[3]{1-x}\,\mathrm{d}x = 3\int\limits_0^1 \left(1-t^3\right)t^3\,\mathrm{d}t = 3\left(\frac{t^4}{4}-\frac{t^7}{7}\right)\Big|_0^1 = \frac{9}{28}$.

Do đó $M=9$, $N=28$. Suy ra $M+N=37$.

Chọn phương án (C)

Câu 44. Tích phân $\int\limits_0^2 2x(x^2+1)^{2018}\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $\frac{5^{2019}-1}{2019}$. (B) $\frac{5^{2019}-1}{4038}$. (C) $\frac{5^{2018}-1}{4036}$. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^2 2x(x^2+1)^{2018}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 (x^2+1)^{2018}\,\mathrm{d}(x^2+1) = \frac{(x^2+1)^{2019}}{2019}\Big|_0^2 = \frac{5^{2019}-1}{2019}$.

Chọn phương án (A)

Câu 45. Cho $\int\limits_1^2 f(x^2+1)x\,\mathrm{d}x = 2$. Tính $I=\int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I=2$. (B) $I=1$. (C) $I=-1$. (D) $I=4$.

Lời giải.

Đặt $t=x^2+1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$.

Khi đó $x=2 \Rightarrow t=5$ và $x=1 \Rightarrow t=2$.

Vậy $\int\limits_1^2 f(x^2+1)x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_2^5 f(t)\,\mathrm{d}t = 2 \Leftrightarrow I=4$.

Chọn phương án (D)

C MỨC ĐỘ 3

Câu 46. Biết $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = a\sqrt{\mathrm{e}}+b$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $P=ab$.

(A) $P=4$. (B) $P=-8$. (C) $P=8$. (D) $P=-4$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ \mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ v=2\sqrt{x} \end{cases}$, ta có

$$\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_{\mathrm{e}}^1 - 2\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_{\mathrm{e}}^1 - 4\sqrt{x}\Big|_{\mathrm{e}}^1 = -2\sqrt{\mathrm{e}}+4.$$

Từ đó suy ra $\begin{cases} a=-2 \\ b=4 \end{cases}$. Vậy $P=ab=-8$.

Chọn phương án (B)

Câu 47. Tính $\int (x - \sin 2x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $\frac{x^2}{2} + \cos 2x + C$. (B) $x^2 + \frac{1}{2}\cos 2x + C$. (C) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x + C$. (D) $\frac{x^2}{2} + \sin x + C$.

Lời giải.

$$\int (x - \sin 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x + C.$$

Chọn phương án (C)

Câu 48. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \left(4x^2 - 1\right)^{-3}$.

(A) $\mathscr{D} = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$. (B) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. (C) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$. (D) $\mathscr{D} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định là $4x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm\frac{1}{2}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$.

Chọn phương án (C)

Câu 49. Tích phân $\int\limits_0^{\pi^2} \left(\sin\sqrt{x} - \cos\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = A + B\pi$ với $A, B \in \mathbb{Z}$. Tính $A + B$.

(A) 7. (B) 6. (C) 5. (D) 4.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \pi^2 \Rightarrow t = \pi. \end{cases}$

Suy ra $I = 2\int\limits_0^{\pi} (\sin t - \cos t)\, t\,\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases} u = t \\ \mathrm{d}v = (\sin t - \cos t)\ \mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ v = -\cos t - \sin t. \end{cases}$

$$I = 2\left[t(-\cos t - \sin t)\Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi} (\cos t + \sin t)\ \mathrm{d}t\right] = 2\left[\pi + (\sin t - \cos t)\Big|_0^{\pi}\right] = 4 + 2\pi.$$

Vậy $A = 4; B = 2 \Rightarrow A + B = 6$.

Chọn phương án (B)

Câu 50. Tìm giá trị của a để $\int\limits_1^{2} \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x = \ln a$.

(A) 12. (B) $\frac{4}{3}$. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{3}{4}$.

Lời giải.

$$\int\limits_3^{4} \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_3^{4} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right)\ \mathrm{d}x = \left(\ln|x-2| - \ln|x-1|\right)\Big|_3^4 = \ln\frac{4}{3}.$$

Suy ra $a = \dfrac{4}{3}$.

Chọn phương án B

Câu 51. Biết $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1)\cos 2x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a} + \dfrac{\pi}{b}$ (với a, b là các số hữu tỉ), giá trị của $a \cdot b$ là

Ⓐ 4. Ⓑ 12. Ⓒ 32. Ⓓ 2.

Lời giải.

Đặt $I = \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1)\cos 2x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ \mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$.

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}(x+1)\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+1\right) + \frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

Vậy $a \cdot b = 8 \cdot 4 = 32$.

Chọn phương án C

Câu 52. Giá trị của tích phân $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x$ là

Ⓐ 0. Ⓑ 2. Ⓒ 1. Ⓓ -2.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \sin x \end{cases}$.

Suy ra $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x = (x\sin x)\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 0 + \cos x\Big|_0^{\pi} = \cos\pi - \cos 0 = -2$.

Chọn phương án D

Câu 53. Cho biết $\displaystyle\int\limits_1^2 \ln\left(9-x^2\right)\,\mathrm{d}x = a\ln 5 + b\ln 2 + c$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = |a| + |b| + |c|$.

Ⓐ $S = 34$. Ⓑ $S = 13$. Ⓒ $S = 18$. Ⓓ $S = 26$.

Lời giải.

Xét trên $[1; 2]$.

Ta có $\ln\left(9-x^2\right) = \ln(3-x) + \ln(3+x)$.

Xét $I_1 = \displaystyle\int\limits_1^2 \ln(3-x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(3-x) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x \\ v = x \end{cases}$

$\Rightarrow I_1 = x\ln(3-x)\big|_1^2 - \displaystyle\int_1^2 \dfrac{x}{x-3}\,\mathrm{d}x = x\ln(3-x)\big|_1^2 - (x + 3\ln(3-x))\big|_1^2 = 2\ln 2 - 1.$

Xét $I_2 = \displaystyle\int_1^2 \ln(3+x)\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases} u = \ln(3+x) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x \\ v = x \end{cases}$

$\Rightarrow I_2 = x\ln(3+x)\big|_1^2 - \displaystyle\int_1^2 \dfrac{x}{x+3}\,\mathrm{d}x = x\ln(3+x)\big|_1^2 - (x - 3\ln(3+x))\big|_1^2 = 5\ln 5 - 8\ln 2 - 1.$

Vậy $\displaystyle\int_1^2 \ln\left(9-x^2\right)\,\mathrm{d}x = 5\ln 5 - 6\ln 2 - 2$. Khi đó $S = 13$.

Chọn phương án B

Câu 54. Giá trị của tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin x\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\dfrac{4+\pi}{4\sqrt{2}}$. B $\dfrac{2-\pi}{2\sqrt{2}}$. C $\dfrac{4-\pi}{4\sqrt{2}}$. D $\dfrac{2+\pi}{2\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = -\cos x \end{cases}.$

Khi đó $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin x\,\mathrm{d}x = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,\mathrm{d}x = (-x\cos x + \sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{4-\pi}{4\sqrt{2}}.$

Chọn phương án C

Câu 55. Biết $\displaystyle\int_0^2 2x\ln(x+1)\mathrm{d}x = a\ln b$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và b là số nguyên tố. Tính $6a + 7b$.

A 33. B 25. C 42. D 39.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_0^2 2x\ln(x+1)\mathrm{d}x &= \int\limits_0^2 \ln(x+1)\mathrm{d}(x^2-1)\\ &= (x^2-1)\cdot\ln(x+1)\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 (x-1)\mathrm{d}x\\ &= 3\ln 3 - \frac{1}{2}(x-1)^2\Big|_0^2\\ &= 3\ln 3\end{aligned}$$

Vậy $a = b = 3 \Rightarrow 6a + 3b = 39$.

Chọn phương án D

Câu 56. Biết rằng $\int\limits_2^3 x\ln x\,\mathrm{d}x = m\ln 3 + n\ln 2 + p$, trong đó m, n, $p \in \mathbb{Q}$. Khi đó số m là

A $\frac{9}{2}$. **B** 18. **C** 9. **D** $\frac{27}{4}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \ \mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$.

$$\Rightarrow \int\limits_2^3 x\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_2^3 - \int\limits_2^3 \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}\ln 3 - 2\ln 2 - \frac{x^3}{6}\Big|_2^3 = \frac{9}{2}\ln 3 - 2\ln 2 - \frac{19}{6} \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{9}{2} \\ n = -2 \\ p = -\dfrac{19}{6} \end{cases}.$$

Vậy $m = \frac{9}{2}$.

Chọn phương án A

Câu 57. Cho $\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{b}{c} + a\ln 2$ (với a là số thực và b, c là các số nguyên dương, $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản). Tính giá trị của biểu thức $T = 2a + 3b + c$.

A $T = 4$. **B** $T = -6$. **C** $T = 5$. **D** $T = 6$.

Lời giải.

$$\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\int\limits_1^2 \ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^2 + \int\limits_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{x}\Big|_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}$$

$\Rightarrow a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 2 \Rightarrow T = 4$.

Chọn phương án A

Câu 58. Tích phân $\int\limits_0^{\pi} (3x+2)\cos^2 x\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $\frac{3}{4}\pi^2 - \pi$. (B) $\frac{3}{4}\pi^2 + \pi$. (C) $\frac{1}{4}\pi^2 + \pi$. (D) $\frac{1}{4}\pi^2 - \pi$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (3x+2)\cos^2 x\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi (3x+2)\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi (3x+2)\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi \cos 2x\,\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int_0^\pi x\cos 2x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3x^2}{2}+2x\right)\Big|_0^\pi + \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^\pi + \left(\frac{x\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin 2x}{2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{3\pi^2}{4} + \pi + \frac{\cos 2x}{4}\Big|_0^\pi\\ &= \frac{3\pi^2}{4} + \pi.\end{aligned}$$

Chọn phương án (B)

Câu 59. Bằng cách đặt $u = \ln x$, $\mathrm{d}v = x^2\,\mathrm{d}x$ thì tích phân $\int_1^3 x^2\ln x\,\mathrm{d}x$ biến đổi thành kết quả nào sau đây?

(A) $\frac{x^3\ln x}{3}\Big|_1^3 - \frac{1}{3}\int_1^3 x^2\,\mathrm{d}x$.

(B) $\frac{x^2\ln x}{2}\Big|_1^3 - \frac{1}{3}\int_1^3 x^2\,\mathrm{d}x$.

(C) $\frac{x^3\ln x}{3}\Big|_1^3 + \frac{1}{3}\int_1^3 x^2\,\mathrm{d}x$.

(D) $-\frac{x^3\ln x}{3}\Big|_1^3 - \frac{1}{3}\int_1^3 x^2\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

$$\begin{cases} u = \ln x\\ \mathrm{d}v = x^2\,\mathrm{d}x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ v = \frac{x^3}{3}\end{cases} \tag{14}$$

Khi đó $\int_1^3 x^2\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^3\ln x}{3}\Big|_1^3 - \frac{1}{3}\int_1^3 x^2\,\mathrm{d}x$.

Chọn phương án (A)

Câu 60. Cho $\int_0^1 (2x+1)\cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = a + b\cdot\mathrm{e}\quad (a,b\in\mathbb{Q})$. Tính tích $a\cdot b$.

(A) 3. (B) -1. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = 2x+1 \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^x \end{cases}$.

Khi đó $\int_0^1 (2x+1)\cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (2x+1)\cdot \mathrm{e}^x\Big|_0^1 - \int_0^1 2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 3\mathrm{e} - 1 - 2\mathrm{e}^x\Big|_0^1 = 3\mathrm{e} - 1 - (2\mathrm{e} - 2) = \mathrm{e} + 1$

$\Rightarrow a = 1; b = 1 \Rightarrow a\cdot b = 1$.

Chọn phương án D

Câu 61. Biết tích phân $\int\limits_1^2 (4x-1)\ln x\,\mathrm{d}x = a\ln 2 + b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $2a+b$.

A 5. **B** 8. **C** 10. **D** 13.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ v = (4x-1)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = 2x^2 - x \end{cases}$.

Khi đó $\int\limits_1^2 (4x-1)\ln x\,\mathrm{d}x = (2x^2 - x)\ln x\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 (2x-1)\mathrm{dx} = 6\ln 2 - (x^2 - x)\Big|_1^2 = 6\ln 2 - 2$

$\Rightarrow a = 6, b = -2$.

Vậy $2a + b = 10$.

Chọn phương án C

Câu 62. Biết rằng $\int\limits_0^1 x\cos 2x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}(a\sin 2 + b\cos 2 + c)$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A $a+b+c=1$. **B** $a-b+c=0$. **C** $2a+b+c=-1$. **D** $a+2b+c=1$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} U = x \\ \mathrm{d}V = \cos 2x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}U = \mathrm{d}x \\ V = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$. Theo công thức tích phân từng phần ta có

$$\int\limits_0^1 x\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sin 2x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sin 2x\Big|_0^1 + \frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\sin 2 + \frac{1}{4}\cos 2 - \frac{1}{4}.$$

Suy ra $a = 2$, $b = 1$ và $c = -1$ nên $a - b + c = 0$.

Chọn phương án B

Câu 63. Cho $\int\limits_1^3 (4x-6)\cdot \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = m\cdot \mathrm{e}^6 + n\cdot \mathrm{e}^2$ với $m, n \in \mathbb{N}$. Lúc đó $J = \int\limits_m^n (x^2+1)^4\mathrm{d}x$ bằng

A $J = 0$. **B** $J = 2$. **C** $J = 4$. **D** $J = -1$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^3 (4x-6)\cdot \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \int_1^3 (2x-3)\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x}) = (2x-3)\mathrm{e}^{2x}\Big|_1^3 - \int_1^3 2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = (2x-4)\mathrm{e}^{2x}\Big|_1^3 = 2\mathrm{e}^6 + 2\mathrm{e}^2$, suy ra $m = n = 2$. Do đó $J = 0$.

Chọn phương án A

Câu 64. Giả sử $\int\limits_1^2 (2x-1)\ln x\,\mathrm{d}x = a\ln 2 + b$, $(a;\, b \in \mathbb{Q})$. Tính $a+b$.

A $\frac{5}{2}$. **B** 2. **C** 1. **D** $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = (2x-1)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = x^2 - x \end{cases}$.

Ta có

$$\int\limits_1^2 (2x-1)\ln x\,\mathrm{d}x = (x^2-x)\ln x\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x = (x^2-x)\ln x\Big|_1^2 - \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^2 = 2\ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Khi đó $a = 2$, $b = -\frac{1}{2}$ suy ra $a + b = \frac{3}{2}$.

Chọn phương án D

D MỨC ĐỘ 4

Câu 65. Cho tích phân $I = \int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 32$. Tính tích phân $J = \int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x$.

A $J = 64$. **B** $J = 8$. **C** $J = 16$. **D** $J = 32$.

Lời giải.

Đặt $t = 2x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}t}{2} = \mathrm{d}x$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 2 \Rightarrow t = 4$.

Khi đó $J = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot 32 = 16$.

Chọn phương án C

Câu 66. Tìm giá trị của a để $\int\limits_1^2 \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x = \ln a$.

A 12. **B** $\frac{4}{3}$. **C** $\frac{1}{3}$. **D** $\frac{3}{4}$.

Lời giải.

$$\int_3^4 \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x = \int_3^4 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x = \left(\ln|x-2| - \ln|x-1|\right)\Big|_3^4 = \ln\frac{4}{3}.$$

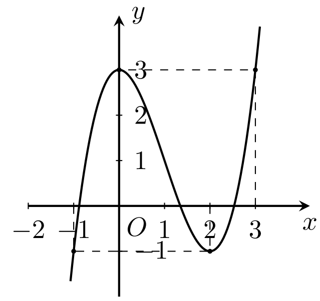
Suy ra $a = \dfrac{4}{3}$.

Chọn phương án B

Câu 67.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hình bên.

Tính tích phân $I = \displaystyle\int_1^2 f'(2x-1)\,\mathrm{d}x$.



A $I = -2$. **B** $I = -1$. **C** $I = 1$. **D** $I = 2$.

Lời giải.

Ta có: $I = \displaystyle\int_1^2 f'(2x-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^2 f'(2x-1)\mathrm{d}(2x-1) = \frac{1}{2}f(2x-1)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}[f(3) - f(1)] = 1.$

Chọn phương án C

Câu 68. Cho $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2018$. Tính $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)\cos 2x\,\mathrm{d}x$.

A $I = 2018$. **B** $I = -1009$. **C** $I = -2018$. **D** $I = 1009$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\cos 2x\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1$.

Khi đó $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot 2018 = 1009.$

Chọn phương án D

Câu 69. Cho $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 16$. Tính $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)\cdot\cos 2x\mathrm{d}x$.

A $I = 5$. **B** $I = 9$. **C** $I = 8$. **D** $I = 10$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\cos 2x\mathrm{d}x$.

Với $x = 0$ thì $t = 0$ và với $x = \dfrac{\pi}{4}$ thì $t = 1$. Do đó

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)\cdot\cos 2x\mathrm{d}x = \int_0^1 f(t)\frac{1}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 8.$$

Chọn phương án C

Câu 70. Biết $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^9 f(x)\,dx = 9$. Khi đó tính $I = \int\limits_2^5 f(3x-6)\,dx$.

(A) $I = 27$. (B) $I = 3$. (C) $I = 24$. (D) $I = 0$.

Lời giải.

Đặt $t = 3x - 6$ suy ra $dt = 3\,dx$. Khi đó

— Với $x = 2$ thì $t = 0$.

— Với $x = 5$ thì $t = 9$.

Vậy $I = \int\limits_2^5 f(3x-6)\,dx = \dfrac{1}{3}\int\limits_0^9 f(t)\,dt = \dfrac{1}{3}\int\limits_0^9 f(x)\,dx = 3$.

Chọn phương án (B)

Câu 71. Tính tích phân $I = \int\limits_{-2}^{2} \dfrac{x^{2018}}{e^x+1}\,dx$.

(A) $I = 0$. (B) $I = \dfrac{2^{2020}}{2019}$. (C) $I = \dfrac{2^{2019}}{2019}$. (D) $I = \dfrac{2^{2018}}{2018}$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_{-2}^{2} \dfrac{x^{2018}}{e^x+1}\,dx = \int\limits_{-2}^{0} \dfrac{x^{2018}}{e^x+1}\,dx + \int\limits_{0}^{2} \dfrac{x^{2018}}{e^x+1}\,dx = J + K$.

Ta tính tích phân $J = \int\limits_{-2}^{0} \dfrac{x^{2018}}{e^x+1}\,dx$.

Đặt $t = -x$, khi đó $dt = -dx$ và với $x = -2$ thì $t = 2$, với $x = 0$ thì $t = 0$. Khi đó

$J = -\int\limits_0^2 \dfrac{(-t)^{2018}}{e^{-t}+1}\,dt = \int\limits_0^2 \dfrac{e^t\cdot t^{2018}}{e^t+1}\,dt = \int\limits_0^2 \dfrac{e^x\cdot x^{2018}}{e^x+1}\,dx$.

Do đó $I = J + K = \int\limits_0^2 \dfrac{e^x\cdot x^{2018}}{e^x+1}\,dx + \int\limits_0^2 \dfrac{x^{2018}}{e^x+1}\,dx = \int\limits_0^2 x^{2018}\,dx = \left.\dfrac{x^{2019}}{2019}\right|_0^2 = \dfrac{2^{2019}}{2019}$.

Chọn phương án (C)

Câu 72. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,dx = 5$; $\int\limits_{2}^{3} f(x)\,dx = -2$. Tính $\int\limits_{-1}^{3} f(x)\,dx$.

(A) 7. (B) -7. (C) 3. (D) -3.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$ ta có

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 5 + (-2) = 3$$

Chọn phương án C

Câu 73. Cho $\int_0^1 f(4x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $I = 1$. **B** $I = 8$. **C** $I = 4$. **D** $I = 16$.

Lời giải.

Đặt $t = 4x \Rightarrow \mathrm{d}t = 4\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,\mathrm{d}t$.

Có $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = 1 \Rightarrow t = 4$.

$\Rightarrow 4 = \int_0^1 f(4x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 16$.

Chọn phương án D

Câu 74. Cho $\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 10$ và $\int_2^4 g(x)\,\mathrm{d}x = 5$. Tính $I = \int_2^4 [3f(x) - 5g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A $I = 5$. **B** $I = -5$. **C** $I = 10$. **D** $I = 15$.

Lời giải.

Ta có $I = \int_2^4 [3f(x) - 5g(x)]\,\mathrm{d}x = 3\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x - 5\int_2^4 g(x)\,\mathrm{d}x = 3 \times 10 - 5 \times 5 = 5$.

Chọn phương án A

Câu 75. Giả sử $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 2$, $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ với $a < b < c$ thì $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A 5. **B** 1. **C** -2. **D** -1.

Lời giải.

Có $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = 2 - 3 = -1$.

Chọn phương án D

Câu 76. Cho biết $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2018$. Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 \frac{f(|x|)\,\mathrm{d}x}{1 + 2018^x}$.

A $I = \mathrm{e}^{2018}$. **B** $I = 2018$. **C** $I = 1009$. **D** $I = 2019$.

Lời giải.

Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$. Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = -1; x = -1 \Rightarrow t = 1$. Ta có

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{f(|x|)\,\mathrm{d}x}{1+2018^x} = -\int_{1}^{-1} \frac{f(|-t|)\,\mathrm{d}t}{1+2018^{-t}} = \int_{-1}^{1} \frac{2018^t \cdot f(|t|)\,\mathrm{d}t}{1+2018^t} = \int_{-1}^{1} \frac{2018^x \cdot f(|x|)\,\mathrm{d}x}{1+2018^x}.$$

Khi đó $2I = \int_{-1}^{1} f(|x|)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} f(|x|)\,\mathrm{d}x \Rightarrow I = \int_{0}^{1} f(|x|)\,\mathrm{d}x$.

Vì hàm $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn trên $[-1;1]$, nên $I = \int_{0}^{1} f(|x|)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2018$.

Chọn phương án B

Câu 77. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + x \cdot f'(x) = 3x^2 + 2x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $f(1)$.

A 2. B 3. C 4. D 5.

Lời giải.

Theo giả thiết $f(x) + x \cdot f'(x) = 3x^2 + 2x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $(xf(x))' = 3x^2 + 2x \Rightarrow \int_{0}^{1} (xf(x))'\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} (3x^2+2x)\,\mathrm{d}x = 2 \Rightarrow (xf(x))\Big|_0^1 = 2 \Rightarrow f(1) = 2$.

Chọn phương án A

Câu 78. Cho $\int_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính $\mathrm{I} = \int_{-1}^{2} f(2x+1)\,\mathrm{d}x$.

A $\mathrm{I} = 2$. B $\mathrm{I} = \frac{5}{2}$. C $\mathrm{I} = 4$. D $\mathrm{I} = \frac{3}{2}$.

Lời giải.

Đặt $2x + 1 = t \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Với $x = -1 \Rightarrow t = -1$.

Với $x = 2 \Rightarrow t = 5$.

Suy ra $\mathrm{I} = \int_{-1}^{2} f(2x+1)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{5} f(t) \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$.

Chọn phương án A

Câu 79. Cho hàm số $y = f(x)$có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(x) = x.\ln\left(\frac{x^3}{x.f'(x) - f(x)}\right)$ và $f(1) = 0$. Tính tích phân $I = \int_{1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $12\ln 13 - 13$. B $13\ln 13 - 12$. C $12\ln 13 + 13$. D $13\ln 13 + 12$.

Lời giải.

Từ giả thiết và

$$f(x)=x.\ln\left(\frac{x^3}{x.f'(x)-f(x)}\right)\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}=\ln\frac{x^3}{x.f'(x)-f(x)}.$$
$$\Leftrightarrow\ \mathrm{e}^{\frac{f(x)}{x}}=\frac{x^3}{x.f'(x)-f(x)}\Leftrightarrow\frac{x.f'(x)-f(x)}{x^2}.\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{x}}=x.$$
$$\Leftrightarrow\ \left[\frac{f(x)}{x}\right]'.\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{x}}=x.\qquad(1)$$

Lấy nguyên hàm hai vế của (1) suy ra $\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{x}}=\dfrac{x^2}{2}+C$.

Do $f(1)=0\Rightarrow C=\dfrac{1}{2}$, nên $\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{x}}=\dfrac{x^2+1}{2}\Rightarrow f(x)=x\ln\dfrac{x^2+1}{2}$ với $x\in(0;+\infty)$.

$I=\displaystyle\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^5 x.\ln\frac{x^2+1}{2}\,\mathrm{d}x\qquad(2).$

Đặt $u=\ln\dfrac{x^2+1}{2}\Rightarrow du=\dfrac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$; $dv=x\,\mathrm{d}x$, chọn $v=\dfrac{x^2+1}{2}$.

Theo công thức tích phân từng phần, ta được:

$$I=\left(\frac{x^2+1}{2}.\ln\frac{x^2+1}{2}\right)\Bigg|_1^5-\int\limits_1^5 x\,\mathrm{d}x=13\ln 13-\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^5=13\ln 13-12.$$

Chọn phương án B

Câu 80. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp một, đạo hàm cấp hai liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_0^1\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\mathrm{e}^x f''(x)\,\mathrm{d}x\neq 0$. Giá trị của biểu thức $\dfrac{\mathrm{e}f'(1)-f'(0)}{\mathrm{e}f(1)-f(0)}$ bằng

A -1. B 1. C 2. D 2.

Lời giải.

Đặt $\displaystyle\int\limits_0^1\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\mathrm{e}^x f''(x)\,\mathrm{d}x=k$.

— $k=\displaystyle\int\limits_0^1\mathrm{e}^x f''(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}f'(x)=\mathrm{e}^x f'(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x f'(x)\Big|_0^1-k$.

Suy ra $2k=\mathrm{e}^x f'(x)\Big|_0^1$.

— $k=\displaystyle\int\limits_0^1\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}f(x)=\mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1-k$.

Suy ra $2k=\mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1$.

Vậy $\dfrac{\mathrm{e}f'(1)-f'(0)}{\mathrm{e}f(1)-f(0)}=\dfrac{\left.\mathrm{e}^x f'(x)\right|_0^1}{\left.\mathrm{e}^x f(x)\right|_0^1}=1.$

Chọn phương án B

Câu 81. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $f(0)=2018$, $f(2)=2019$. Tính $S=f(3)-f(-1)$.

A $S=\ln 4035$. **B** $S=4$. **C** $S=\ln 2$. **D** $S=1$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\displaystyle\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x=\ln|x-1|+C$

Khi đó $f(-1)=\ln 2+C_1$; $f(0)=C_2=2018$; $f(2)=C_3=2019$; $f(3)=\ln 2+C_4$

- $\displaystyle\int_2^3 f'(x)dx=\int_2^3\frac{1}{x-1}dx\Leftrightarrow f(3)-f(2)=\ln 2\Leftrightarrow \ln 2+C_4-C_3=\ln 2\Rightarrow C_3=C_4$
- $\displaystyle\int_{-1}^0 f'(x)dx=\int_{-1}^0\frac{1}{x-1}dx\Leftrightarrow f(0)-f(-1)=-\ln 2\Leftrightarrow C_2-C_1-\ln 2=-\ln 2\Rightarrow C_1=C_2$

Vậy $S=f(3)-f(-1)=C_4-C_1=2019-2018=1$.

Chọn phương án D

Câu 82. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x f(\cos^2 x)\,\mathrm{d}x=\int_1^8\frac{f\left(\sqrt[3]{x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x=6.$

Tính tích phân $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}}\frac{f\left(x^2\right)}{x}\,\mathrm{d}x.$

A 4. **B** 6. **C** 7. **D** 10.

Lời giải.

— Xét tích phân $I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x f(\cos^2 x)\,\mathrm{d}x=6.$

Đặt $t=\cos^2 x\Rightarrow\ \mathrm{d}t=-2\sin x\cos x\,\mathrm{d}x.$

Khi $x=0\Rightarrow t=1$, $x=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=\dfrac{1}{4}$. Ta có

$$I_1=-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{-2\sin x\cos x}{2\cos^2 x}f(\cos^2 x)\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{4}}^1\frac{f(t)}{2t}\,\mathrm{d}t=6\Rightarrow\int_{\frac{1}{4}}^2\frac{f(x)}{2x}\,\mathrm{d}x=6.$$

— Xét tích phân $I_2=\displaystyle\int_1^8\frac{f\left(\sqrt[3]{x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\sqrt[3]{x}\Rightarrow x=t^3\Rightarrow\ \mathrm{d}x=3t^2\,\mathrm{d}t.$

Khi $x = 1 \Rightarrow t = 1$, $x = 8 \Rightarrow t = 2$. Ta có

$$I_2 = \int\limits_1^2 \frac{3t^2 f(t)}{t^3}\, \mathrm{d}t = 6 \Rightarrow \int\limits_1^2 \frac{f(x)}{2x}\, \mathrm{d}x = 1.$$

— Xét tích phân $I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{f\left(x^2\right)}{x}\, \mathrm{d}x$.

Đặt $t = x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\, \mathrm{d}x$. Khi $x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$, khi $x = \sqrt{2} \Rightarrow t = 2$. Ta có

$$I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{2x f(x^2)}{2x^2}\, \mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(t)}{2t}\, \mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(x)}{2x}\, \mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{f(x)}{2x}\, \mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} \frac{f(x)}{2x}\, \mathrm{d}x = 6 + 1 = 7.$$

Chọn phương án C

Câu 83. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(x) + 2f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $\frac{3}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}^2}$. Ⓑ $\frac{3}{4} - \frac{1}{4\mathrm{e}^2}$. Ⓒ $\frac{1}{4} - \frac{1}{4\mathrm{e}^2}$. Ⓓ $-\frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}^2}$.

Lời giải.

Phương pháp: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

Cách giải: Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) + 2f(x) = 1 &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} f'(x) + \mathrm{e}^{2x} \cdot 2f(x) = \mathrm{e}^{2x} \\ &\Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{2x} \cdot f(x)\right)' = \mathrm{e}^{2x} \\ &\Rightarrow \mathrm{e}^{2x} \cdot f(x) = \int \mathrm{e}^{2x}\, \mathrm{d}x \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} \cdot f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C. \end{aligned}$$

Mà

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ \Rightarrow 1 &= \frac{1}{2} + C \\ \Rightarrow C &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \mathrm{e}^{2x} \cdot f(x) &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow f(x) &= \frac{\mathrm{e}^{2x} + 1}{2\mathrm{e}^{2x}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{2\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right)\mathrm{d}x\\ &= \left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}\right)\Big|_0^1\\ &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4\mathrm{e}^2}\right)-\left(-\frac{1}{4}\right)\\ &= \frac{3}{4}-\frac{1}{4\mathrm{e}^2}.\end{aligned}$$

Chọn phương án B

Câu 84. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$ và với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có $f'(x)\cdot f(x)-\sin 2x=f'(x)\cdot\cos x-f(x).\sin x$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $I=1$. **B** $I=\sqrt{2}-1$. **C** $I=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1$. **D** $I=2$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)\cdot f(x)-\sin 2x=f'(x)\cdot\cos x-f(x)\cdot\sin x \Leftrightarrow f'(x)\cdot f(x)-\sin 2x=[f(x)\cdot\cos x]'$.

Lấy nguyên hàm hai vế: $\int[f'(x)\cdot f(x)-\sin 2x]\,\mathrm{d}x=\int[f(x)\cdot\cos x]'\,\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \dfrac{f^2(x)}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x=\cos x\cdot f(x)+C$.

Vì $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1\Rightarrow C=0\Rightarrow f^2(x)+\cos 2x=2\cos x\cdot f(x)\Leftrightarrow f^2(x)-2\cos x\cdot f(x)+\cos^2 x=\sin^2 x$.

$\Leftrightarrow (f(x)-\cos x)^2=\sin^2 x\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)-\cos x=\sin x\\ f(x)-\cos x=-\sin x\end{array}\right.$.

Vì $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$ nên nhận $f(x)=\cos x-\sin x$.

Vậy $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,\mathrm{d}x=(\cos x-\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}-1$.

Chọn phương án B

Câu 85. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: $f(0)=2\sqrt{2}$, $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(x).f'(x)=(2x+1)\sqrt{1+f^2(x)}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Khi đó giá trị $f(1)$ bằng

A $\sqrt{15}$. **B** $\sqrt{23}$. **C** $\sqrt{24}$. **D** $\sqrt{26}$.

Lời giải.

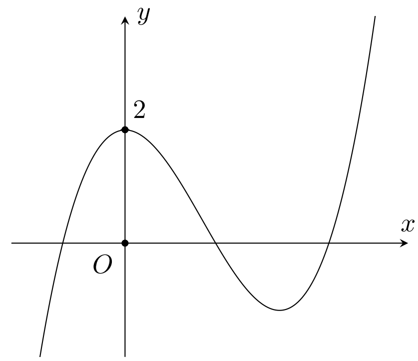
Từ giả thiết ta có $2x+1=\dfrac{f(x)\cdot f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}\Rightarrow\displaystyle\int\frac{f(x)\cdot f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}\,\mathrm{d}x=\int(2x+1)\,\mathrm{d}x$.

Bây giờ ta tính $I=\displaystyle\int\frac{f(x)\cdot f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\sqrt{1+f^2(x)}=t\Rightarrow 1+f^2(x)=t^2\Rightarrow 2f(x)f'(x)\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t\Rightarrow f(x)f'(x)\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$.

Do đó $I = \displaystyle\int \frac{t}{t}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}t = t + C = \sqrt{1+f^2(x)} + C$.
Ta nhận được $\sqrt{1+f^2(x)} + C = x^2 + x$. $f(0) = 2\sqrt{2} \Rightarrow C = -3$.
Từ đó $\sqrt{1+f^2(x)} - 3 = x^2 + x$. Khi $x = 1$ ta có
$\sqrt{1+f^2(1)} - 3 = 1 + 1 \Rightarrow 1 + f^2(1) = 25 \Rightarrow f(1) = \sqrt{24}$.
Chọn phương án C

Câu 86.
Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ bên. Biết $\displaystyle\int_1^4 x f''(x-1)\,\mathrm{d}x = 7$ và $\displaystyle\int_1^2 2x f'(x^2-1)\,\mathrm{d}x = -3$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 3$ là



A) $y = x - 4$.
B) $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{2}$.
C) $y = 2x - 7$.
D) $y = 3x - 10$.

Lời giải.
Từ đồ thị hàm số ta suy ra $f(0) = 2$ và $f'(0) = 0$.

Xét tích phân $\displaystyle\int\limits_1^2 2x f'(x^2-1)\,\mathrm{d}x$. Đặt $u = x^2 - 1 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow u = 0$; $x = 2 \Rightarrow u = 3$.

Do đó $\displaystyle\int\limits_1^2 2x f'(x^2-1)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^3 f'(u)\,\mathrm{d}u = f(u)\Big|_0^3 = f(3) - f(0) \Rightarrow f(3) - f(0) = -3 \Leftrightarrow f(3) = -1$.

Xét tích phân $\displaystyle\int\limits_1^4 x f''(x-1)\,\mathrm{d}x$. Đặt $u = x - 1 \Rightarrow x = u + 1 \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}u$.

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow u = 0$; $x = 4 \Rightarrow u = 3$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int\limits_1^4 x f''(x-1)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^3 (u+1) f''(u)\,\mathrm{d}u &= \int\limits_0^3 (u+1)\,\mathrm{d}f'(u) = (u+1)f'(x)\Big|_0^3 - \int\limits_0^3 f'(u)\,\mathrm{d}u \\ &= 4f'(3) - f'(0) - f(u)\Big|_0^3 = 4f'(3) - f'(0) - f(3) + f(0).\end{aligned}$$

Do đó $4f'(3) - f'(0) - f(3) + f(0) = 7 \Leftrightarrow 4f'(3) = 7 + f(3) - f(0) = 4 \Leftrightarrow f'(3) = 1$.
Như vậy, $f(3) = -1$, $f'(3) = 1$. Suy ra phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x = 3$ là $y = x - 4$.
Chọn phương án A

Câu 87. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Kết quả $I =$

$\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{f(x)}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $I = 8$. Ⓑ $I = 4$. Ⓒ $I = 2$. Ⓓ $I = \frac{1}{4}$.

Lời giải.

Đặt $t = -x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = -1$; $x = -1 \Rightarrow t = 1$, ta có

$$I = e\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{1}^{-1} \frac{f(-t)}{1+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-1}^{1} \frac{f(-x)}{1+\frac{1}{\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^x f(-x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x.$$

Do $f(x)$ là hàm số chẵn nên $f(x) = f(-x), \forall x \in [-1;1] \Rightarrow I = \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{\mathrm{e}^x f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

Từ đó suy ra

$$I + I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^x f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} \frac{(\mathrm{e}^x+1)\,f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 4.$$

Vậy $I = 2$.

Chọn phương án Ⓒ

Câu 88. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\mathbb{R}$, nhận giá trị dương trên khoảng $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1, f'(x) = f(x) \cdot (3x^2 + 2mx + m)$ với m là tham số. Giá trị của tham số m để $f(3) = e^{-4}$ là

Ⓐ $m = -2$. Ⓑ $m = \sqrt{3}$. Ⓒ $m = -3$. Ⓓ $m = 4$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 3x^2 + 2mx + m \Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int (3x^2 + 2mx + m)\,\mathrm{d}x$.

Nên $\ln[f(x)] = x^3 + mx^2 + mx + C \Rightarrow f(x) = e^{x^3+mx^2+mx+C}$.

Do $f(1) = 1 \Rightarrow e^{1+2m+C} = 1 \Rightarrow C = -2m - 1$.

Vậy $f(x) = e^{x^3+mx^2+mx-2m-1} \Rightarrow f(3) = e^{-4} \Leftrightarrow e^{26+10m} = e^{-4} \Leftrightarrow m = -3$.

Chọn phương án Ⓒ

BẢNG ĐÁP ÁN

1. D	2. D	3. C	4. B	5. B	6. A	7. C	8. C	9. A	10. B
11. A	12. D	13. B	14. A	15. B	16. C	17. C	18. C	19. B	20. A
21. B	22. D	23. B	24. A	25. D	26. B	27. D	28. B	29. D	30. D
31. C	32. A	33. C	34. A	35. C	36. B	37. D	38. C	39. B	40. B
41. C	42. C	43. C	44. A	45. D	46. B	47. C	48. C	49. B	50. B
51. C	52. D	53. B	54. C	55. D	56. A	57. A	58. B	59. A	60. D
61. C	62. B	63. A	64. D	65. C	66. B	67. C	68. D	69. C	70. B
71. C	72. C	73. D	74. A	75. D	76. B	77. A	78. A	79. B	80. B
81. D	82. C	83. B	84. B	85. C	86. A	87. C	88. C		

DẠNG 34. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x^2, y = -1, x = 0$ và $x = 1$ được tính bởi công thức nào dưới đây?

A $S = \pi \int_0^1 \left(2x^2 + 1\right) \mathrm{d}x$.

B $S = \int_0^1 \left(2x^2 - 1\right) \mathrm{d}x$.

C $S = \int_0^1 \left(2x^2 + 1\right)^2 \mathrm{dx}$.

D $S = \int_0^1 \left(2x^2 + 1\right) \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int\limits_0^1 \left|2x^2 + 1\right| \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(2x^2 + 1\right) \mathrm{d}x$ do $2x^2 + 1 > 0, \forall x \in [0; 1]$.

Chọn phương án D

Câu 1. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $S = \int_0^2 3^x \mathrm{d}x$.

B $S = \pi \int_0^2 3^{2x} \mathrm{d}x$.

C $S = \pi \int_0^2 3^x \mathrm{d}x$.

D $S = \int_0^2 3^{2x} \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $S = \int_0^2 |3^x| \mathrm{d}x = \int_0^2 3^x \mathrm{d}x$.

Chọn phương án A

Câu 2. Với hàm số $f(x)$ tùy ý liên tục trên $\mathbb{R}, a < b$, diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = a, x = b$ được xác định theo công thức

A $S = \int\limits_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$.

B $S = \pi \int\limits_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$.

C $S = \left|\int\limits_a^b f(x) \mathrm{d}x\right|$.

D $S = \left|\pi \int\limits_a^b f(x) \mathrm{d}x\right|$.

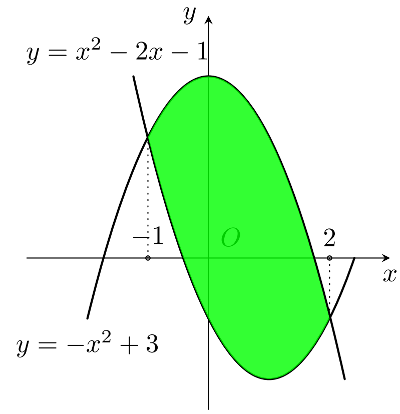
Lời giải.

Công thức tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường thẳng $y = 0, x = a, x = b (a < b)$và đồ thị hàm số $y = f(x)$là $S = \int\limits_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$.

Chọn phương án A

Câu 3.

Diện tích hình phẳng bôi đậm trong hình vẽ dưới đây được xác định theo công thức



Ⓐ $\displaystyle\int_{-1}^{2} \left(2x^2 - 2x - 4\right) \mathrm{d}x$.

Ⓑ $\displaystyle\int_{-1}^{2} \left(2x^2 + 2x - 4\right) \mathrm{d}x$.

Ⓒ $\displaystyle\int_{-1}^{2} \left(-2x^2 + 2x + 4\right) \mathrm{d}x$.

Ⓓ $\displaystyle\int_{-1}^{2} \left(-2x^2 - 2x + 4\right) \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy công thức tính diện tích hình phẳng cần tính là

$$\int_{-1}^{2} \left(-x^2 + 3 - x^2 + 2x + 1\right) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} \left(-2x^2 + 2x + 4\right) \mathrm{d}x.$$

Chọn phương án Ⓒ

Câu 4. Tìm nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3x + \dfrac{1}{x}$

Ⓐ $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} - \ln|x| + C$.

Ⓑ $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{1}{x^2} + C$.

Ⓒ $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} - \ln x + C$.

Ⓓ $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$.

Lời giải.

$$I = \int \left(x^2 - 3x + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$$

Chú ý khi giải: Dùng dấu giá trị tuyệt đối khi có $\ln|x|$, học sinh có thể chọn nhầm đáp án C.

Chọn phương án Ⓓ

Câu 5. Công thức tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ với $a < b$ là

Ⓐ $S = \displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Ⓑ $S = \displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$.

Ⓒ $S = \displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))^2\,\mathrm{d}x$.

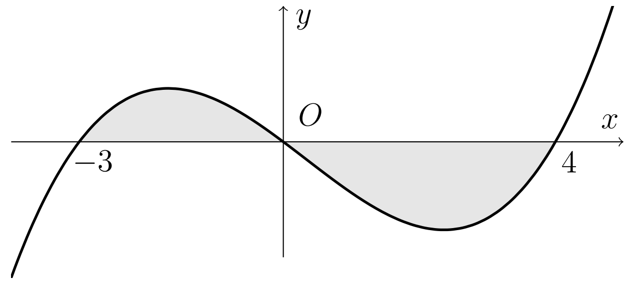
Ⓓ $S = \pi \displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo lý thuyết giáo khoa ta có hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} (C_1): y = f(x) \\ (C_2): y = g(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases}$ là $S = \displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn phương án Ⓐ

Câu 6. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích hình phẳng (phần tô đậm trong hình) là



A $S=\int\limits_{-3}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

B $S=\int\limits_{0}^{-3} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

C $S=\int\limits_{-3}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

D $S=\int\limits_{-3}^{0} f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Dựa vào hình vẽ ta được $S=\int\limits_{-3}^{0} f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

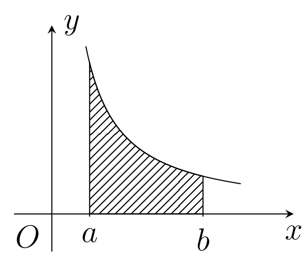
Chọn phương án D

Câu 7. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ liên tục, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ được tính bởi công thức nào?

A $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$. **B** $\pi\int\limits_{a}^{b} f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **C** $\int\limits_{a}^{b} |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **D** $\int\limits_{a}^{b} f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

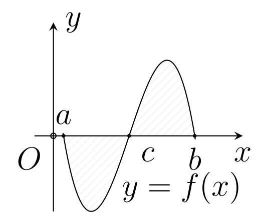
Diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\int\limits_{a}^{b} |f(x)|\,\mathrm{d}x$.



Chọn phương án C

Câu 8.

Kí hiệu S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x=a$, $x=b$ (như hình bên). Hỏi khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?



A $S=\left|\int\limits_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x\right|$.

B $S=\int\limits_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}+\int\limits_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x$.

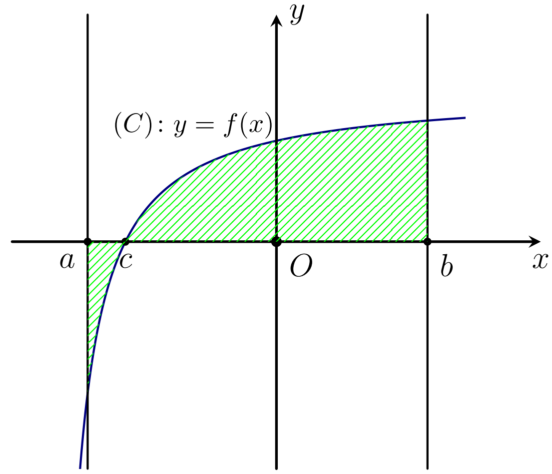
(C) $S=-\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$. (D) $S=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Dựa vào hình biểu diễn hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x=a$, $x=b$, ta có $S=-\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

Chọn phương án (C)

Câu 9. Diện tích của hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b\,(a<b)$ (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức



(A) $S=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(B) $S=-\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(C) $S=\left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

(D) $S=\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

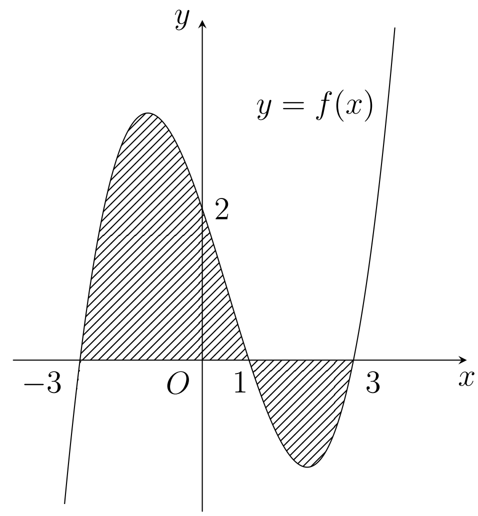
Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ta có

$$S=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^c [0-f(x)]\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b [f(x)-0]\,\mathrm{d}x=-\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Chọn phương án (B)

Câu 10.

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.
Diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục Ox (phần gạch sọc) được tính bởi công thức



Ⓐ $S = \left|\int\limits_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

Ⓑ $S = \int\limits_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓒ $S = \int\limits_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓓ $S = \int\limits_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta thấy $f(x) \geqslant 0$ với $x \in [-3; 1]$, $f(x) \leqslant 0$ với $x \in [1; 3]$.

Do đó $S = \int\limits_{-3}^{3} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-3}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{3} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn phương án Ⓒ

B MỨC ĐỘ 2

Câu 11. Diện tích hình phẳng H được giới hạn bởi hai đồ thị $y = x^3 - 2x - 1$ và $y = 2x - 1$ được tính theo công thức

Ⓐ $S = \int\limits_{-2}^{0} \left|x^3 - 4x\right|\mathrm{d}x$.

Ⓑ $S = \int\limits_{0}^{2} \left|x^3 - 4x\right|\mathrm{d}x$.

Ⓒ $S = \int\limits_{-2}^{2} \left(x^3 - 4x\right)\mathrm{d}x$.

Ⓓ $S = \int\limits_{-2}^{2} \left|x^3 - 4x\right|\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y = x^3 - 2x - 1$ và $y = 2x - 1$ là

$$x^3 - 2x - 1 = 2x - 1 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right. .$$

Vậy diện tích hình phẳng H được giới hạn bởi hai đồ thị $y = x^3 - 2x - 1$ và $y = 2x - 1$ được tính theo công thức $S = \int\limits_{-2}^{2} \left|x^3 - 4x\right|\mathrm{d}x$.

Chọn phương án (D)

Câu 12. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$,$x = 2$ biết rằng mỗi đơn vị dài trên các trục tọa độ là 2 cm.

(A) $\dfrac{15}{4}$ cm^2. (B) $\dfrac{17}{4}$ cm^2. (C) 17 cm^2. (D) 15 cm^2.

Lời giải.

Ta có $S = \displaystyle\int_{-1}^{2} \left|x^3\right| \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \left|x^3\right| \mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \left|x^3\right| \mathrm{d}x = -\int_{-1}^{0} x^3 \mathrm{d}x + \int_{0}^{2} x^3 \mathrm{d}x = -\left.\dfrac{x^4}{4}\right|_{-1}^{0} + \left.\dfrac{x^4}{4}\right|_{0}^{2} = \dfrac{17}{4}$.

Do mỗi đơn vị trên trục là 2 cm nên $S = \dfrac{17}{4} \cdot 2^2$ cm$^2 = 17$ cm^2.

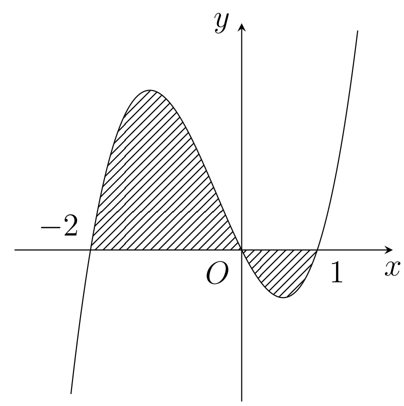
Chọn phương án (C)

Câu 13.

Đồ thị trong hình bên là của hàm số $y = f(x)$, S là diện tích hình phẳng (phần tô đậm trong hình). Chọn khẳng định đúng.

(A) $S = \displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$. (B) $S = \displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(C) $S = \displaystyle\int_{0}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$. (D) $S = \displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.



Lời giải.

Từ đồ thị ta có $f(x) \geq 0, \forall x \in [-2; 0]$ và $f(x) \leq 0, \forall x \in [0; 1]$.

Do đó $S = \displaystyle\int_{-2}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn phương án (D)

Câu 14. Diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi hai đường cong $y = -x^3 + 12x$ và $y = -x^2$ là

(A) $S = \dfrac{397}{4}$. (B) $S = \dfrac{937}{12}$. (C) $S = \dfrac{3943}{12}$. (D) $S = \dfrac{793}{4}$.

Lời giải.

Phương pháp: Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x)$ trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính theo công thức $S = \displaystyle\int_{a}^{b} |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Cách giải: Giải phương trình $-x^3 + 12x = -x^2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \\ x = -3. \end{array}\right.$

Diện tích S của hình phẳng (H) là

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_{-3}^{4} \left|\left(-x^3+12x\right)-\left(-x^2\right)\right| \mathrm{d}x = \int\limits_{-3}^{4} \left|-x^3+12x+x^2\right| \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{-3}^{0} \left|-x^3+12x+x^2\right| \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{4} \left|-x^3+12x+x^2\right| \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{-3}^{0} \left(-x^3+12x+x^2\right) \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{4} \left(-x^3+12x+x^2\right) \mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{1}{4}x^4-6x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-3}^{0} + \left(\frac{1}{4}x^4-6x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{0}^{4} \\ &= 0-\left(\frac{1}{4}\cdot 3^4-6\cdot 3^2+\frac{1}{3}\cdot 3^3\right)+\left(-\frac{1}{4}\cdot 4^4+6\cdot 4^2+\frac{1}{3}\cdot 4^3\right)-0=\frac{937}{12}. \end{aligned}$$

Chọn phương án B

Câu 15. Cho $f(x)=x^4-5x^2+4$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $S=\int\limits_{-2}^{2}|f(x)|\mathrm{d}x$.

B. $S=2\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|+2\left|\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x\right|$.

C. $S=2\int\limits_{0}^{2}|f(x)|\mathrm{d}x$.

D. $S=2\left|\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)=x^4-5x^2+4$ và trục hoành

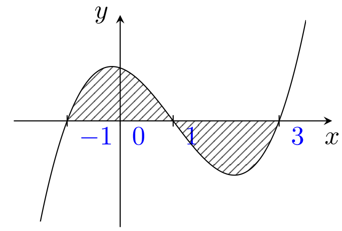
$$x^4-5x^2+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=\pm 2. \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_{-2}^{2}|f(x)|\mathrm{d}x \quad (1) \\ &= 2\int_0^2 |f(x)|\mathrm{d}x \quad (2) \text{ (do } f(x) \text{ là hàm số chẵn)} \\ &= 2\int\limits_{0}^{1}|f(x)|\mathrm{d}x + 2\int\limits_{1}^{2}|f(x)|\mathrm{d}x \\ &= 2\left|\int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x\right| + 2\left|\int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x\right| \quad (3) \text{ (do trong các khoảng} (0;1),(1;2) \text{ phương trình } f(x)=0 \text{ vô nghiệm} \end{aligned}$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra các đáp án A, B, C là đúng, đáp án D là sai.
Máy tính: Bấm máy kiểm tra, ba kết quả đầu bằng nhau nên đáp án là đáp án D.
Chọn phương án D

Câu 16.



Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{1}{3}x + 1$ và trục hoành như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S = 2\int\limits_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S = 2\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S = \int\limits_{-1}^{3} |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành:

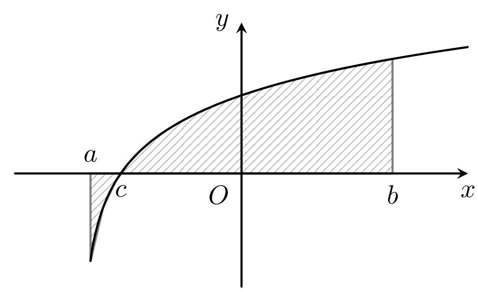
$$\frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{1}{3}x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Từ hình vẽ ta thấy $f(x) > 0, \forall x \in (-1;1)$ và $f(x) > 0, \forall x \in (1;3)$.

Do đó $S = \int\limits_{-1}^{3} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Suy ra các phương án A, C, D đúng.
Chọn phương án B

Câu 17.



Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ (phần tô đậm trong hình vẽ). Tính theo công thức nào dưới đây?

A. $S = -\int\limits_{a}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{c}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S = \left|\int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

C. $S = \int\limits_{a}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{c}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

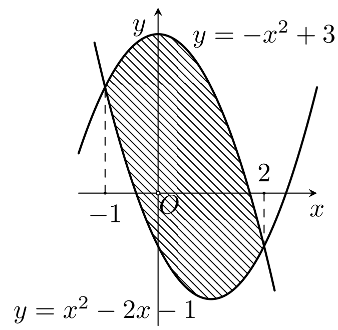
D. $S = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có: $S=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^c |f(x)|\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b |f(x)|\,\mathrm{d}x=-\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

Chọn phương án (A)

Câu 18.
Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



(A) $\int_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)\mathrm{d}x$.

(B) $\int_{-1}^{2}(-2x+2)\,\mathrm{d}x$.

(C) $\int_{-1}^{2}(2x-2)\,\mathrm{d}x$.

(D) $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

$S=\int_{-1}^{2}\left[\left(-x^2+3\right)-\left(x^2-2x-1\right)\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x.$

Chọn phương án (D)

Câu 19. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$, trục hoành, hai đường thẳng $x=-1, x=2$. Biết rằng mỗi đơn vị dài trên các trục bằng 2cm.

(A) $15\,\mathrm{cm}^2$.
(B) $\dfrac{15}{4}\,\mathrm{cm}^2$.
(C) $\dfrac{17}{4}\,\mathrm{cm}^2$.
(D) $17\,\mathrm{cm}^2$.

Lời giải.

Ta có: $\int\limits_{-1}^{2}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}\left|x^3\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2}\left|x^3\right|\mathrm{d}x=-\int\limits_{-1}^{0}x^3\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2}x^3\,\mathrm{d}x=\left(\dfrac{x^4}{4}\right)\Big|_0^{-1}+\left(\dfrac{x^4}{4}\right)\Big|_0^{2}=\dfrac{17}{4}.$

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S=4\cdot\dfrac{17}{4}=17\,\mathrm{cm}^2$

Chọn phương án (D)

Câu 20. Tính thể tích khối tròn xoay được tao thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=3x-x^2$ và trục hoành, quay quanh trục hoành.

(A) $\dfrac{81\pi}{10}$.
(B) $\dfrac{85\pi}{10}$.
(C) $\dfrac{41\pi}{7}$.
(D) $\dfrac{8\pi}{7}$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $3x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$.

Thể tích vật thể cần tìm được cho bởi công thức:

$V=\pi\int\limits_0^3[f(x)]^2\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^3\left[3x-x^2\right]^2\mathrm{d}x=\pi\left(\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{3x^4}{2}+3x^3\right)\Big|_0^3=\dfrac{81\pi}{10}(\text{ đvtt}).$

Chọn phương án (A)

Câu 21. Cho $0<a<1$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

(A) $\log_a x < 1$ khi $0 < x < a$.
(B) Đồ thị của hàm số $y = \log_a x$ nhận trục Oy làm tiệm cận đứng.
(C) Nếu $0 < x_1 < x_2$ thì $\log_a x_1 < \log_a x_2$.
(D) $\log_a x > 0$ khi $x > 1$.

Lời giải.

Đồ thị của hàm số $y = \log_a x$ nhận trục Oy làm tiệm cận đứng theo tính chất của đồ thị hàm số $y = \log_a x$.

Chọn phương án (B)

Câu 22. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 2x$, $y = -x^2 + x$.

(A) $\dfrac{9\pi}{8}$. (B) $\dfrac{27}{8}$. (C) $\dfrac{9}{8}$. (D) $\dfrac{27\pi}{8}$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 2x = -x^2 + x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

$$S_{\text{hp}} = \int_0^{\frac{3}{2}} \left|2x^2 - 3x\right| \mathrm{d}x = \left|\int_0^{\frac{3}{2}} (2x^2 - 3x) \mathrm{d}x\right| = \left|\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right)\Big|_0^{\frac{3}{2}}\right| = \frac{9}{8}.$$

Chọn phương án (C)

Câu 23. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị của các hàm số $y = x^2$ và $y = x$ là

(A) $\dfrac{1}{6}$. (B) $\dfrac{5}{6}$. (C) $-\dfrac{1}{6}$. (D) $\dfrac{\pi}{6}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị các hàm số đã cho là $x^2 = x$. Phương trình này có hai nghiệm là 0 và 1. Do đó, diện tích cần tính là

$$S = \int_0^1 \left|x^2 - x\right| \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x - x^2\right) \,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Chọn phương án (A)

Câu 24. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi $(P)\colon y = x^2 + 2x$ và $d\colon y = x + 2$ là

(A) $\dfrac{7}{2}$. (B) $\dfrac{9}{2}$. (C) $\dfrac{11}{2}$. (D) $\dfrac{5}{2}$.

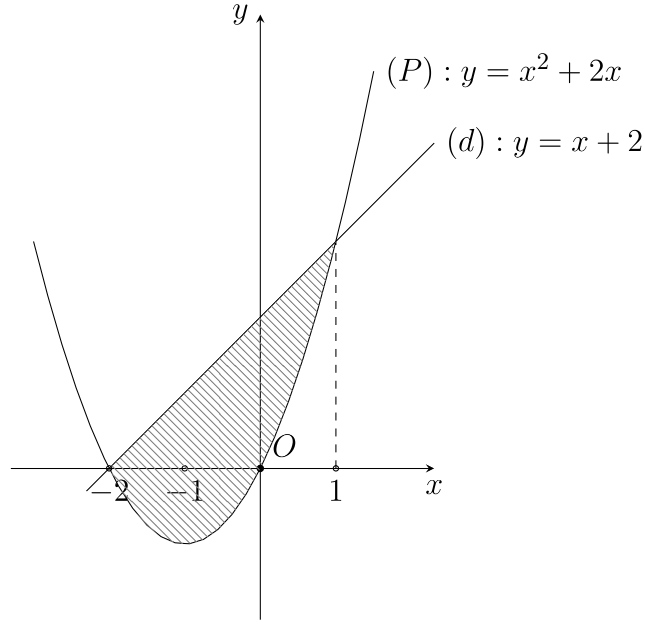
Lời giải.

Tọa độ giao điểm của $(P)\colon y = x^2 + 2x$ và $d\colon y = x + 2$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = x + 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3. \end{cases}$

Suy ra diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (P) và d bằng $S = \displaystyle\int_{-2}^{1} |(x^2 + 2x) - (x + 2)|\,\mathrm{d}x$

$= \displaystyle\int_{-2}^{1} |x^2 + x - 2|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\,\mathrm{d}x$



$= \left(-\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_{-2}^{1} = \left(-\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + 2\right) - \left(\dfrac{8}{3} - 2 - 4\right) = \dfrac{9}{2}.$

Chọn phương án B

Câu 25. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(C)\colon y = 3x^4 - 4x^2 + 5, Ox, x = 1, x = 2$ là

A $\dfrac{214}{15}$. **B** $\dfrac{213}{15}$. **C** $\dfrac{43}{3}$. **D** $\dfrac{212}{15}$.

Lời giải.

Do $3x^4 - 4x^2 + 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên ta có:

$$S = \int_{1}^{2} (3x^4 - 4x^2 + 5)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{3}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 5x\right)\Big|_{1}^{2} = \left(\frac{96}{5} - \frac{32}{3} + 10\right) - \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5} + 5\right) = \frac{214}{5}.$$

Chọn phương án A

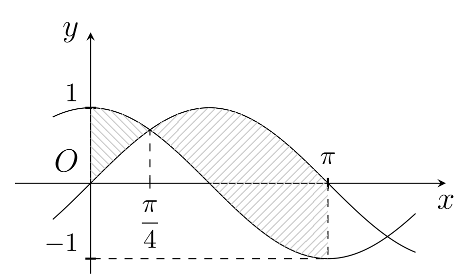
Câu 26. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y = \sin x$, $y = \cos x$ và các đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$ bằng

A $3\sqrt{2}$. **B** $\sqrt{2}$. **C** $2\sqrt{2}$. **D** $-2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Với $x \in [0; \pi]$, khi đó $\sin x = \cos x \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$.

Diện tích hình phẳng $S = \displaystyle\int_{0}^{\pi} |\sin x - \cos x|\,\mathrm{d}x$.



Ta được $S = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x)\,\mathrm{d}x$.

Vậy $S = [\sin x + \cos x]\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos x - \sin x]\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = (\sqrt{2} - 1) + (1 + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

Chọn phương án C

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(0) < 0 < f(-1)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = -1$ và $x = 1$. Xét các mệnh đề sau
1) $S = \int\limits_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 2) $S = \int\limits_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 3) $S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ 4) $S = \left|\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$ Số mệnh đề đúng là

(A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $f(0) < 0 < f(-1) \Rightarrow f(x) = 0$ có nghiệm $x \in (-1; 0)$.

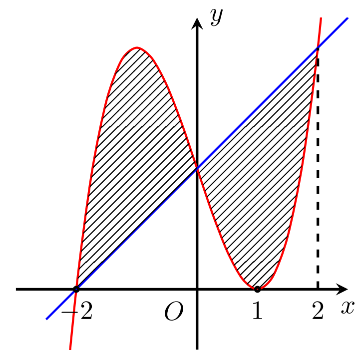
Do vậy chỉ có 1 mệnh đề $S = \int\limits_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ đúng.

Chọn phương án (B)

Câu 28. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ và $g(x) = x + 2$.

(A) $S = 8$. (B) $S = 4$. (C) $S = 12$. (D) $S = 16$.

Lời giải.



— Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là nghiệm phương trình

$$x^3 - 3x + 2 = x + 2 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

— Diện tích cần tìm là

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\Bigg|_{-2}^{0} - \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\Bigg|_{0}^{2} = 8. \end{aligned}$$

Chọn phương án (A)

Câu 29. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ và các trục tọa độ.

(A) $S = 3\ln\dfrac{3}{2} - 1$. (B) $S = 5\ln\dfrac{3}{2} - 1$. (C) $S = 3\ln\dfrac{5}{2} - 1$. (D) $S = 2\ln\dfrac{3}{2} - 1$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho cắt hai trục Ox tại điểm $A(-1; 0)$ và cắt trục Oy tại điểm $B\left(0; -\dfrac{1}{2}\right)$, do đó diện tích cần tìm là

$$S=\int_{-1}^{0}\left|\frac{x+1}{x-2}\right|\,\mathrm{d}x=\left|\int_{-1}^{0}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)\,\mathrm{d}x\right|=\left|(x+3\ln|x-2|)\Big|_{-1}^{0}\right|=3\ln\frac{3}{2}-1.$$

Chọn phương án A

Câu 30. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-4x$ và $x+y=-2$ là

A. $\frac{6}{5}$. B. $\frac{5}{2}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $x+y=-2\Leftrightarrow y=-x-2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y=x^2-4x$ và $x+y=-2$ là:

$$x^2-4x=-x-2\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right..$$

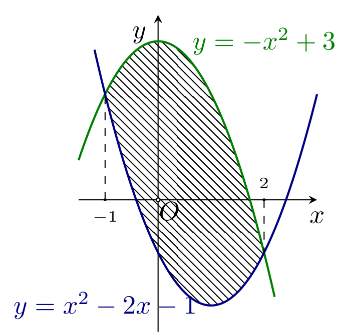
Diện tích hình phẳng đã cho là:

$$\begin{aligned}S&=\int_{1}^{2}\left|(x^2-4x)-(-x-2)\right|\,\mathrm{d}x\\&=\int_{1}^{2}\left|x^2-3x+2\right|\,\mathrm{d}x\\&=-\int_{1}^{2}\left(x^2-3x+2\right)\,\mathrm{d}x\\&=-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right)\Big|_{1}^{2}=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Chọn phương án C

Câu 31.

Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây ?



A. $\int_{-1}^{2}(2x^2-2x-4)\,\mathrm{d}x$. B. $\int_{-1}^{2}(-2x+2)\,\mathrm{d}x$.

C. $\int_{-1}^{2}(2x-2)\,\mathrm{d}x$. D. $\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

$$S=\int_{-1}^{2}\left[(-x^2+3)-(x^2-2x-1)\right]\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,\mathrm{d}x.$$

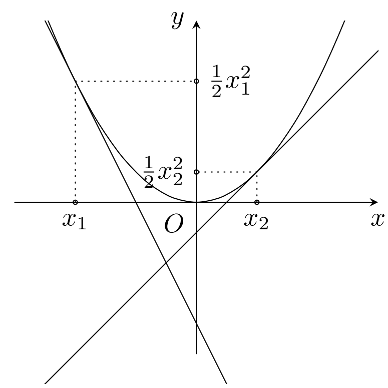
Chọn phương án D

Câu 32. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P). Xét các điểm A, B thuộc (P) sao cho tiếp tuyến tại A và B của (P) vuông góc với nhau, diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB bằng $\dfrac{9}{4}$. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của A và B. Giá trị của $(x_1+x_2)^2$ bằng

A 7. **B** 5. **C** 13. **D** 11.

Lời giải.

$(P): y=\dfrac{1}{2}x^2$



Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Ta có $y'=x$

Giả sử $A\left(x_1;\dfrac{1}{2}x_1^2\right); B\left(x_2;\dfrac{1}{2}x_2^2\right)\in(P)(x_1\neq x_2)$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm A của (P) là $y=x_1(x-x_1)+\dfrac{1}{2}x_1^2 \Leftrightarrow y=x_1x-\dfrac{1}{2}x_1^2(d_1)$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm B của (P) là $y=x_2(x-x_2)+\dfrac{1}{2}x_2^2 \Leftrightarrow y=x_2x-\dfrac{1}{2}x_2^2(d_2)$.

Do $(d_1)\perp(d_2)$ nên ta có $x_1x_2=-1\Leftrightarrow x_2=\dfrac{-1}{x_1}$.

Phương trình đường thẳng AB:

$$\begin{aligned}
&\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-\frac{1}{2}x_1^2}{\frac{1}{2}x_2^2-\frac{1}{2}x_1^2}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}(x-x_1)\left(x_2^2-x_1^2\right)=\left(y-\frac{1}{2}x_1^2\right)(x_2-x_1)\\
\Leftrightarrow\ &(x-x_1)(x_2+x_1)=2y-x_1^2\\
\Leftrightarrow\ &(x_1+x_2)x-2y-x_1x_2=0\\
\Leftrightarrow\ &y=\frac{1}{2}\left[(x_1+x_2)x-x_1x_2\right]=\frac{1}{2}\left[(x_1+x_2)x+1\right]
\end{aligned}$$

Do đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi AB, (P) là:

$$\begin{aligned}
& S=\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\left((x_1+x_2)\,x+1-x^2\right)dx\\
\Leftrightarrow\ & \frac{9}{4}=\frac{1}{2}\left((x_1+x_2)\frac{x^2}{2}+x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x_1}^{x_2}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{9}{4}=\frac{1}{2}\left[(x_1+x_2)\left(\frac{x_2^2}{2}-\frac{x_1^2}{2}\right)+(x_2-x_1)-\frac{x_2^3-x_1^3}{3}\right]\\
\Leftrightarrow\ & \frac{9}{4}=\frac{1}{2}(x_1+x_2)\left(x_2^2-x_1^2\right)+(x_2-x_1)-\frac{x_2^3-x_1^3}{3}\\
\Leftrightarrow\ & 27=3\left(x_1x_2^2-x_1^3+x_2^3-x_1^2x_2\right)+6\,(x_2-x_1)-2x_2^3+2x_1^3\\
\Leftrightarrow\ & 27=3x_1x_2^2-3x_1x_2^2+x_2^3-x_1^3+6(x_2-x_1)\\
\Leftrightarrow\ & 27=-3(x_2-x_1)+(x_2-x_1)\left(x_1^2+x_2^2-1\right)+6(x_2-x_1)\\
\Leftrightarrow\ & 27=3(x_2-x_1)+(x_2-x_1)\left(x_1^2+x_2^2-1\right)\\
\Leftrightarrow\ & 27=(x_2-x_1)\left(x_1^2+x_2^2+2\right)\\
\Leftrightarrow\ & 27=(x_2-x_1)\left(x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\right)\\
\Leftrightarrow\ & 27=(x_2-x_1)(x_2-x_1)^2=(x_2-x_1)^3\\
\Leftrightarrow\ & x_2-x_1=3
\end{aligned}$$

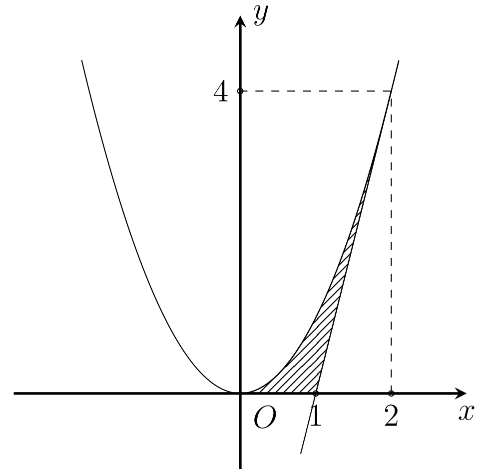
Thay $x_2=\dfrac{-1}{x_1}$ ta có:

$$\begin{aligned}
& \frac{-1}{x_1}-x_1=3\\
\Leftrightarrow\ & -1-x_1^2-3x_1=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x_2=\dfrac{2}{3+\sqrt{5}}\\ x_1=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x_2=\dfrac{-2}{-3+\sqrt{5}}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & (x_1+x_2)^2=5.
\end{aligned}$$

Chọn phương án B

Câu 33.

Cho hình (H) giới hạn bởi trục hoành, đồ thị của một parabol và một đường thẳng tiếp xúc với parabol đó tại điểm $A(2;4)$ như hình vẽ bên dưới. Thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi khi hình (H) quay quanh trục Ox bằng



A $\dfrac{16\pi}{15}$. **B** $\dfrac{32\pi}{5}$. **C** $\dfrac{2\pi}{3}$. **D** $\dfrac{22\pi}{5}$.

Lời giải.

Ta có phương trình Parabol là $y = x^2$

Phương trình tiếp tuyến với Parabol tại A là $y = 4x - 4$

$$V_H = \pi\left[\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x^4 - (4x-4)^2)\,\mathrm{d}x\right] = \frac{16\pi}{15}$$

Chọn phương án A

Câu 34. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \ln 8$. Đường thẳng $x = k$ $(0 < k < \ln 8)$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2. Tìm k để $S_1 = S_2$.

A $k = \ln\dfrac{9}{2}$. **B** $k = \ln 4$. **C** $k = \dfrac{2}{3}\ln 4$. **D** $k = \ln 5$.

Lời giải.

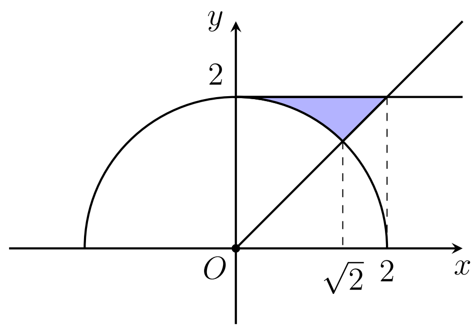
$S_1 = \displaystyle\int_0^k \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^k - 1$, $S_2 = \displaystyle\int_k^{\ln 8} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 8 - \mathrm{e}^k$. Từ đó, $\mathrm{e}^k - 1 = 8 - \mathrm{e}^k \Leftrightarrow k = \ln\dfrac{9}{2}$.

Chọn phương án A

Câu 35. Cho hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = x$ và $y = 2$ có diện tích là $S = a + b\pi$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $a > 1$ và $b > 1$. **B** $a + b < 1$. **C** $a + 2b = 3$. **D** $a^2 + 4b^2 \geq 5$.

Lời giải.



Ta có $S = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(2 - \sqrt{4 - x^2}\right) \mathrm{d}x + \int\limits_{\sqrt{2}}^{2} (2 - x)\mathrm{d}x = 2 - \frac{\pi}{2}$ suy ra $a = 2, b = -\frac{1}{2}$.

Chọn phương án D

Câu 36. Cho hình D giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2$ và $y = -|x|$. Khi đó diện tích của hình D là

A $\frac{13}{3}$. **B** $\frac{7}{3}$. **C** $\frac{7\pi}{3}$. **D** $\frac{13\pi}{3}$.

Lời giải.

Xét phương trình $x^2 - 2 = -|x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2 = x \text{ nếu } x < 0 \\ x^2 - 2 = -x \text{ nếu } x > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -1$ và $x = 1$.

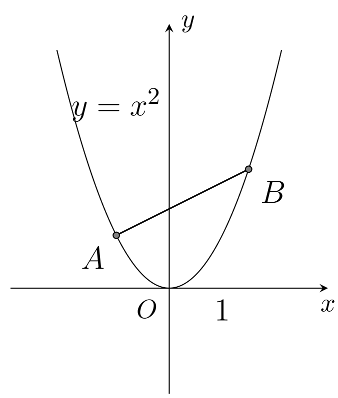
Do đó ta có $S = \int_{-1}^{0} (x + 2 - x^2)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (-x - x^2 + 2)\mathrm{d}x = \frac{7}{3}$.

Chọn phương án B

Câu 37. Cho parabol $(P) : y = x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) sao cho $AB = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng AB.

A $\frac{3}{2}$. **B** $\frac{4}{3}$. **C** $\frac{3}{4}$. **D** $\frac{5}{6}$.

Lời giải.



Gọi $A(a; a^2)$ và $B(b; b^2)$ là hai điểm thuộc (P) sao cho $AB = 2$.

Không mất tính tổng quát giả sử $a < b$.

Theo giả thiết ta có $AB = 2$ nên $(b - a)^2 + (b^2 - a^2)^2 = 4 \Leftrightarrow (b - a)^2[(b + a)^2 + 1] = 4$.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A và B là $y = (b + a)x - ab$.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng AB ta có

$$S = \int\limits_a^b \left[(a + b)x - ab - x^2\right] \mathrm{d}x = \left[(a + b)\frac{x^2}{2} - abx - \frac{x^3}{3}\right] \Bigg|_a^b = \frac{(b - a)^3}{6}.$$

Mặt khác $(b - a)^2[(b + a)^2 + 1] = 4$ nên $\left|b - a\right| \leq 2$ do $(b + a)^2 + 1 \geq 1$.

Suy ra $S = \frac{(b - a)^3}{6} \leq \frac{2^3}{6}$.

Vậy $S_{\max} = \frac{4}{3}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = -b = \pm 1$.

Chọn phương án (B)

Câu 38. Diện tích nhỏ nhất giới hạn bởi parabol $(P)\colon y = x^2 + 1$ và đường thẳng $d\colon y = mx + 2$ là

(A) $\frac{3}{4}$. (B) 1. (C) $\frac{4}{3}$. (D) $\frac{2}{5}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 + 1 = mx + 2 \Leftrightarrow x^2 - mx - 1 = 0$.

Vì $\Delta = m^2 + 4 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt là

$$x_1 = \frac{m - \sqrt{m^2+4}}{2} \text{ và } x_2 = \frac{m + \sqrt{m^2+4}}{2} \text{ với } x_1 < x_2.$$

Ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -1 \\ x_2 - x_1 = \sqrt{m^2+4}. \end{cases}$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và (d) là

$$\begin{aligned}
S &= \int_{x_1}^{x_2} |x^2 - mx - 1| \,\mathrm{d}x = \left| \int_{x_1}^{x_2} (x^2 - mx - 1)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \left(\frac{x^3}{2} - \frac{mx^2}{2} - x \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \right| \\
&= \left| \frac{1}{3}\left(x_2^3 - x_1^3\right) - \frac{m}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right) - (x_2 - x_1) \right| \\
&= (x_2 - x_1) \left| \frac{1}{3}\left(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2\right) - \frac{m}{2}(x_2 + x_1) - 1 \right| \\
&= (x_2 - x_1) \left| \frac{1}{3}(x_2 + x_1)^2 - x_2x_1 - \frac{m}{2}(x_2 + x_1) - 1 \right| \\
&= \sqrt{m^2+4} \left| \frac{m^2+1}{3} - \frac{m^2}{2} - 1 \right| = \sqrt{m^2+4} \left| -\frac{m^2}{6} - \frac{2}{3} \right| \\
&= \sqrt{m^2+4} \cdot \frac{m^2+4}{6} \geq \frac{4}{3}, \forall m \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Vậy diện tích S nhỏ nhất bằng $\frac{4}{3}$ khi $m = 0$.

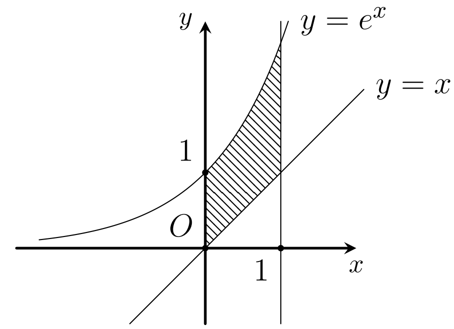
Chọn phương án (C)

Câu 39. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x$ và $y = \mathrm{e}^x$, trục tung và đường thẳng $x = 1$ được tính theo công thức nào dưới đây?

(A) $S = \int_0^1 |\mathrm{e}^x - 1| \,\mathrm{d}x$. (B) $S = \int_0^1 (\mathrm{e}^x - x) \,\mathrm{d}x$. (C) $S = \int_0^1 (x - \mathrm{e}^x) \,\mathrm{d}x$. (D) $S = \int_{-1}^1 |\mathrm{e}^x - x| \,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $S = \int\limits_0^1 |\mathrm{e}^x - x| \, \mathrm{d}x$.



Xét hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x - x$, hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$.
Ta có $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1 > 0, \forall x \in (0;1)$.
Suy ra $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[0;1]$.
Do đó, với $0 \leq x \leq 1$ ta có

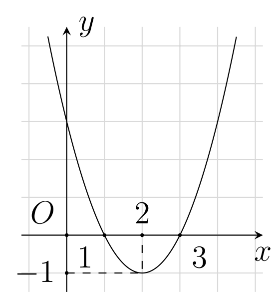
$$f(0) \leq f(x) \Leftrightarrow 0 \leq \mathrm{e}^x - x \Leftrightarrow e^x \geq x.$$

Vậy $S = \int\limits_0^1 (\mathrm{e}^x - x) \, \mathrm{d}x$.

Chọn phương án B

Câu 40.

Cho parabol (P) có đồ thị như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và trục hoành.



A 4. **B** 2. **C** $\frac{8}{3}$. **D** $\frac{4}{3}$.

Lời giải.

Parabol đã cho có dạng $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Vì (P) cắt trục hoành tại các điểm $(1;0)$, $(3;0)$ và đi qua điểm $(2;-1)$ nên ta có

$$\begin{cases} f(1) = f(3) = 0 \\ f(2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 3. \end{cases}$$

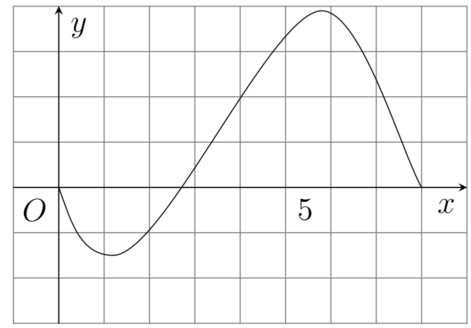
Dựa vào đồ thị của (P), ta có diện tích hình phẳng cần tìm là

$$-\int\limits_1^3 \left(x^2 - 4x + 3\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right)\Bigg|_1^3 = \frac{4}{3}.$$

Chọn phương án D

Câu 41.

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và các biểu thức E, F, G, H xác định bởi $E = \int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$, $F = \int\limits_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$, $G = \int\limits_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$, $H = f'(1)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A $F < E < G < H$. **B** $H < E < F < G$.
C $E < H < G < F$. **D** $G < H < E < F$.

Lời giải.

Dựa vào hình vẽ và diện tích hình phẳng, ta có

$$E = \int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_0^3 |f(x)|\,\mathrm{d}x < -2.$$

$$F = \int\limits_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x > 3.$$

$$0 < G = \int\limits_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x < 2.$$

$-1 < H = f'(1) < 0$. (hệ số góc của tiếp tuyến tại $x = 1$)

Như vậy $E < H < G < F$.

Chọn phương án C

C MỨC ĐỘ 3

Câu 42. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2, y = 0$. Quay (H) quanh trục hoành tạo thành khối tròn xoay có thể tích là

A $\int\limits_0^2 (2x - x^2)\mathrm{d}x$. **B** $\pi \int\limits_0^2 (2x - x^2)^2\mathrm{d}x$. **C** $\int\limits_0^2 (2x - x^2)^2\mathrm{d}x$. **D** $\pi \int\limits_0^2 (2x - x^2)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Theo công thức thể tích giới hạn bởi các đường ta có

$V = \pi \int\limits_0^2 (2x - x^2)^2\mathrm{d}x$

Chọn phương án B

Câu 43. Gọi (D) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \dfrac{x}{4}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$. Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay hình (D) quanh trục Ox.

A $\dfrac{15}{16}$. **B** $\dfrac{15\pi}{8}$. **C** $\dfrac{21\pi}{16}$. **D** $\dfrac{21}{16}$.

Lời giải.

Thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay hình (D) quanh trục Ox là

$$V=\pi\cdot\int\limits_1^4\left(\frac{x}{4}\right)^2 dx=\left.\frac{\pi x^3}{48}\right|_1^4=\frac{21\pi}{16}.$$

Chọn phương án (C)

Câu 44. Cho hình phẳng $\mathscr{D}$ giới hạn bởi đường cong $y=\mathrm{e}^x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay $\mathscr{D}$ quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

(A) $V=\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2}$.
(B) $V=\dfrac{\pi\left(\mathrm{e}^2+1\right)}{2}$.
(C) $V=\dfrac{\pi\left(\mathrm{e}^2-1\right)}{2}$.
(D) $V=\dfrac{\pi\mathrm{e}^2}{2}$.

Lời giải.

Ta có $V=\pi\int\limits_0^1\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\left.\dfrac{\pi}{2}\mathrm{e}^{2x}\right|_0^1=\dfrac{\pi\left(\mathrm{e}^2-1\right)}{2}$.

Chọn phương án (C)

Câu 45. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ xung quanh trục Ox.

(A) $\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.
(B) $\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.
(C) $\pi\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
(D) $2\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ xung quanh trục Ox là: $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn phương án (A)

Câu 46. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số liên tục $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$, xung quanh trục Ox.

(A) $V=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.
(B) $V=\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.
(C) $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.
(D) $V=\pi\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo lý thuyết $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn phương án (C)

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi (H) là hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox được tính theo công thức

(A) $V = \pi^2 \int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. (B) $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. (C) $V = \int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. (D) $V = \pi \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox là $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn phương án (B)

Câu 48. Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$ quanh trục Ox bằng

(A) $\dfrac{16\pi}{5}$. (B) $\dfrac{17\pi}{5}$. (C) $\dfrac{18\pi}{5}$. (D) $\dfrac{5\pi}{18}$.

Lời giải.

Thể tích của khối tròn xoay đã cho bằng

$$V = \pi \int\limits_{-1}^{2} \left(x^2 - 2x\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int\limits_{-1}^{2} \left(x^4 - 4x^3 + 4x^2\right) \mathrm{d}x = \pi \left(\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4}{3}x^3\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{18\pi}{5}.$$

Chọn phương án (C)

Câu 49. Tính thể tích V của khối tròn xoay được sinh ra khi xoay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{2x}, y = 0$ và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$ quanh trục Ox.

(A) $V = 3$. (B) $V = \pi$. (C) $V = 1$. (D) $V = 3\pi$.

Lời giải.

Thể tích V của khối tròn xoay được sinh ra khi xoay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{2}x, y = 0$ và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$ quanh trục Ox là

$V = \pi \int\limits_1^2 \left(\sqrt{2x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int\limits_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = \pi \cdot x^2\Big|_1^2 = 3\pi.$

Chọn phương án (D)

Câu 50. Tính thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \cos x, y = 0, x = 0, x = \pi$ quay xung quanh Ox.

(A) 0. (B) 2π. (C) $\dfrac{\pi^2}{2}$. (D) 2.

Lời giải.

Thể tích vật thể bằng

$$V = \pi \int\limits_0^\pi \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^\pi (1 + \cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

Chọn phương án (C)

Câu 51. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{-\mathrm{e}^x+4x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$; $x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục hoành. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây.

A $V=\pi\displaystyle\int_1^2(\mathrm{e}^x-4x)\,\mathrm{d}x$.

B $V=\displaystyle\int_1^2(\mathrm{e}^x-4x)\,\mathrm{d}x$.

C $V=\displaystyle\int_1^2(4x-\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$.

D $V=\pi\displaystyle\int_1^2(4x-\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Áp dụng công thức thể tích khối tròn xoay $V=\pi\displaystyle\int_a^b(f(x))^2\,\mathrm{d}x$, ta được $V=\pi\displaystyle\int_1^2\left(\sqrt{-\mathrm{e}^x+4x}\right)^2\,\mathrm{d}x=\pi\displaystyle\int_1^2(4x-\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn phương án D

Câu 52. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b\,(a<b)$ quay quanh Ox được tính bởi công thức nào dưới đây?

A $V=\displaystyle\int_a^b(f(x))^2\,\mathrm{d}x$. **B** $V=\displaystyle\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$. **C** $V=\pi\displaystyle\int_a^b(f(x))^2\,\mathrm{d}x$. **D** $V=\pi\displaystyle\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Rõ ràng $V=\pi\displaystyle\int_a^b(f(x))^2\,\mathrm{d}x$

Chọn phương án C

Câu 53. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{-x^2+4x}+2=2x$ là

A $S=\mathbb{R}$. **B** $S=\emptyset$. **C** $S=\left\{\dfrac{2}{5};2\right\}$. **D** $S=\{2\}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{-x^2+4x}=2x-2\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\-5x^2+12x-4=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2$.

Chọn phương án D

Câu 54. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$, trục hoành, hai đường thẳng $x=-1,x=2$. Biết rằng mỗi đơn vị dài trên các trục bằng 2cm.

A $15\,\mathrm{cm}^2$. **B** $\dfrac{15}{4}\,\mathrm{cm}^2$. **C** $\dfrac{17}{4}\,\mathrm{cm}^2$. **D** $17\,\mathrm{cm}^2$.

Lời giải.

Ta có: $\displaystyle\int_{-1}^2|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^0\left|x^3\right|\,\mathrm{d}x+\int_0^2\left|x^3\right|\,\mathrm{d}x=-\int_{-1}^0x^3\,\mathrm{d}x+\int_0^2x^3\,\mathrm{d}x=\left(\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^{-1}+\left(\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=\frac{17}{4}$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = 4 \cdot \dfrac{17}{4} = 17\,\text{cm}^2$

Chọn phương án D

Câu 55. Tính thể tích khối tròn xoay được tao thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x - x^2$ và trục hoành, quay quanh trục hoành.

A $\dfrac{81\pi}{10}$. B $\dfrac{85\pi}{10}$. C $\dfrac{41\pi}{7}$. D $\dfrac{8\pi}{7}$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Thể tích vật thể cần tìm được cho bởi công thức:

$V = \pi \displaystyle\int_0^3 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^3 \left[3x - x^2\right]^2\,\mathrm{d}x = \pi \left(\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{2} + 3x^3\right)\Bigg|_0^3 = \frac{81\pi}{10}(\text{ đvtt})\cdot$

Chọn phương án A

Câu 56. Cho $0 < a < 1$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A $\log_a x < 1$ khi $0 < x < a$.

B Đồ thị của hàm số $y = \log_a x$ nhận trục Oy làm tiệm cận đứng.

C Nếu $0 < x_1 < x_2$ thì $\log_a x_1 < \log_a x_2$.

D $\log_a x > 0$ khi $x > 1$.

Lời giải.

Đồ thị của hàm số $y = \log_a x$ nhận trục Oy làm tiệm cận đứng theo tính chất của đồ thị hàm số $y = \log_a x$.

Chọn phương án B

Câu 57. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 1$, $y = x^3 + 1$ quay quanh Ox.

A $V = \dfrac{47}{210}$. B $V = \dfrac{47\pi}{210}$. C $V = \dfrac{2}{35}$. D $V = \dfrac{2\pi}{35}$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $y = x^2 + 1$ và $y = x^3 + 1$.

$$x^2 + 1 = x^3 + 1 \Leftrightarrow x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Thể tích khối tròn xoay cần tính là

$$\begin{aligned} V &= \pi \int\limits_0^1 \left|\left(x^2+1\right)^2-\left(x^3+1\right)^2\right| \mathrm{d}x \\ &= \pi \left| \int\limits_0^1 \left[\left(x^2+1\right)^2-\left(x^3+1\right)^2\right] \mathrm{d}x \right| \\ &= \pi \left| \int\limits_0^1 \left(-x^6+x^4-2x^3+2x^2\right) \mathrm{d}x \right| \\ &= \pi \left| \left(\frac{-1}{7}x^7+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^1 \right| \\ &= \frac{47\pi}{210}. \end{aligned}$$

Chọn phương án B

Câu 58. Trong hệ trục tọa độ Oxy cho elip (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$. Hình phẳng (H) giới hạn bởi nửa elip nằm trên trục hoành và trục hoành. Quay hình (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay, tính thể tích khối tròn xoay đó.

A $V=60\pi$. **B** 30π. **C** $\dfrac{1188}{25}\pi$. **D** $\dfrac{1416}{25}\pi$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{y^2}{9}=1-\dfrac{x^2}{25} \Leftrightarrow y=\sqrt{9\left(1-\dfrac{x^2}{25}\right)}$ với $(-5 \le x \le 5)$.

Gọi V là thể tích cần tìm, ta có: $V=\pi\displaystyle\int_{-5}^{5}\left(9-\frac{9x^2}{25}\right)\mathrm{d}x=60\pi$.

Chọn phương án A

Câu 59. Tính thể tích V của vật thể sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}\mathrm{e}^x$, đường thẳng $x=1$ và trục hoành.

A $V=\dfrac{\pi}{4}(\mathrm{e}^2+1)$. **B** $V=\dfrac{1}{4}(\mathrm{e}^2+1)$. **C** $V=\dfrac{\pi}{4}(\mathrm{e}^4-1)$. **D** $V=\dfrac{1}{4}(\mathrm{e}^4-1)$.

Lời giải.

Thể tích cần tìm là

$$V=\pi\int\limits_0^1(\sqrt{x}\mathrm{e}^x)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x})=\frac{\pi}{2}\left(x\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1-\int_0^1\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x\right)=\frac{\pi}{4}(\mathrm{e}^2+1).$$

Chọn phương án A

Câu 60. Thể tích của khối tròn xoay có được khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\tan x$, trục Ox, đường thẳng $x=0$, đường thẳng $x=\dfrac{\pi}{3}$ quanh trục Ox là

Ⓐ $V=\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$. Ⓑ $V=\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{3}$. Ⓒ $V=\pi\sqrt{3}+\dfrac{\pi^2}{3}$. Ⓓ $V=\pi\sqrt{3}-\dfrac{\pi^2}{3}$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay là $V=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 x\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)\,\mathrm{d}x=\pi\,(\tan x-x)\big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\pi\sqrt{3}-\dfrac{\pi^2}{3}$.

Chọn phương án D

Câu 61. Thể tích vật thể tròn xoay giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}\cdot\mathrm{e}^x$, trục hoành và đường thẳng $x=1$ khi quay quanh Ox là

Ⓐ $\dfrac{\pi}{4}\left(e^2+1\right)$. Ⓑ $\dfrac{\pi}{4}\left(e^2-1\right)$. Ⓒ $\dfrac{\pi}{2}\left(e^2-1\right)$. Ⓓ $\dfrac{\pi}{2}\left(e^2+1\right)$.

Lời giải.

Gọi V là thể tích vật thể cần tính, khi đó:

$$\begin{aligned}V&=\pi\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x.\\&=\dfrac{\pi}{2}\int\limits_0^1 x\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{2x}\right).\\&=\dfrac{\pi}{2}\left(x\cdot\mathrm{e}^{2x}\right)\Big|_0^1-\dfrac{\pi}{2}\int\limits_0^1\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x\\&=\dfrac{\pi\mathrm{e}^2}{2}-\dfrac{\pi}{4}\cdot\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1\\&=\dfrac{\pi}{4}\left(\mathrm{e}^2+1\right).\end{aligned}$$

Chọn phương án A

Câu 62. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x-1}$, trục hoành, $x=2$, $x=5$ quanh trục Ox bằng

Ⓐ $\pi\int\limits_2^5\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x$. Ⓑ $\pi\int\limits_2^5(x-1)\,\mathrm{d}x$. Ⓒ $\pi\int\limits_2^5\left(y^2+1\right)^2\,\mathrm{d}x$. Ⓓ $\int\limits_2^5(x-1)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

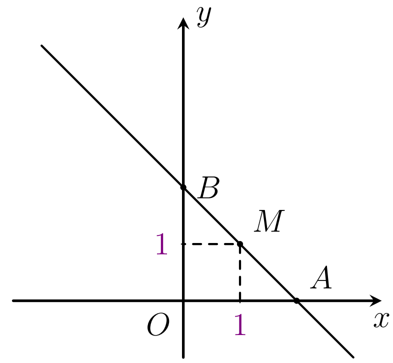
Ta có $V=\pi\int\limits_2^5\left(\sqrt{x-1}\right)^2\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_2^5(x-1)\,\mathrm{d}x$.

Chọn phương án B

Câu 63. Gọi d là đường thẳng tùy ý đi qua điểm $M(1;1)$ và có hệ số góc âm. Giả sử d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B. Quay tam giác OAB quanh trục Oy thu được một khối tròn xoay có thể tích là V. Giá trị nhỏ nhất của V bằng

Ⓐ 3π. Ⓑ $\dfrac{9\pi}{4}$. Ⓒ 2π. Ⓓ $\dfrac{5\pi}{2}$.

Lời giải.



Giả sử $A(a;0), B(0;b)$. Phương trình đường thẳng $d: \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1 \Rightarrow d: y=-\dfrac{b}{a}x+b(1)$.

Mà $M(1;1)\in d$ nên $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1 \Rightarrow a+b=ab(2)$.

Từ (1) suy ra d có hệ số góc là $k=-\dfrac{b}{a}$, theo giả thiết ta có $-\dfrac{b}{a}<0 \Rightarrow ab>0$.

Nếu $\begin{cases} a<0 \\ b<0 \end{cases}$ thì $a+b<0$ mâu thuẫn với (2). Suy ra $a>0, b>0$. Mặt khác từ (2) suy ra $b=\dfrac{a}{a-1}$ kết hợp với $a>0, b>0$ suy ra $a>1$.

Khi quay ΔOAB quanh trục Oy, ta được hình nón có chiều cao $h=b$ và bán kính đường tròn đáy $r=a$.

Thể tích khối nón là $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h=\dfrac{1}{3}\pi a^2.b=\dfrac{1}{3}\pi.\dfrac{a^3}{a-1}$.

Suy ra V đạt giá trị nhỏ nhất khi $\dfrac{a^3}{a-1}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}=x^2+x+1+\dfrac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$.

$f'(x)=2x+1-\dfrac{1}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}; f'(x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\frac{27}{4}$	↗	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất của V bằng $\dfrac{1}{3}\pi.f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{9\pi}{4}$.

Chọn phương án B

Câu 64. Tính thể tích khối tròn xoay sinh bởi Elip $(E): \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$ quay quanh trục Ox.

A $\dfrac{64\pi}{9}$. **B** $\dfrac{10\pi}{3}$. **C** $\dfrac{8\pi}{3}$. **D** $\dfrac{8\pi^2}{3}$.

Lời giải.

(E) có $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$. Do đó hai đỉnh thuộc trục lớn có tọa độ $A'(-2; 0)$ và $(2; 0)$.

Vì $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - \dfrac{x^2}{4}$.

Do đó thể tích khối tròn xoay là $V_{Ox} = \pi \displaystyle\int_{-2}^{2} y^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_{-2}^{2} \left(1 - \dfrac{x^2}{4}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{8\pi}{3}$.

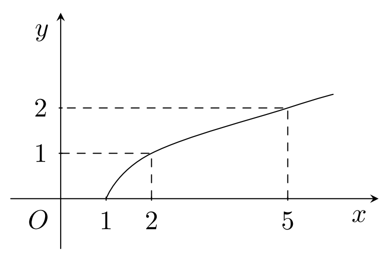
Vậy $V_{Ox} = \dfrac{8\pi}{3}$(đvtt).

Chọn phương án C

Câu 65. Một bình cắm hoa dạng khối tròn xoay, biết đáy bình và miệng bình có đường kính lần lượt là 2 dm và 4 dm. Mặt xung quanh của bình là một phần của mặt tròn xoay có đường sinh là đồ thị hàm số $y = \sqrt{x-1}$. Tính thể tích bình cắm hoa đó.

A 8π dm^2. **B** $\dfrac{15\pi}{2}$ dm^2. **C** $\dfrac{14\pi}{3}$ dm^3. **D** $\dfrac{15\pi}{2}$ dm^3.

Lời giải.



Vì đáy bình và miệng bình có đường kính lần lượt là 2 dm và 4 dm nên đáy và miệng có bán kính đáy lần lượt là 1 dm và 2 dm.

Ta có $\sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$ và $\sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x = 5$.

Vậy thể tích bình hoa là $S = \pi \displaystyle\int_{2}^{5} (\sqrt{x-1})^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{15\pi}{2}$ dm^3.

Chọn phương án D

Câu 66. Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh Ox với (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{4x - x^2}$ và trục hoành.

A $\dfrac{31\pi}{3}$. **B** $\dfrac{32\pi}{3}$. **C** $\dfrac{34\pi}{3}$. **D** $\dfrac{35\pi}{3}$.

Lời giải.

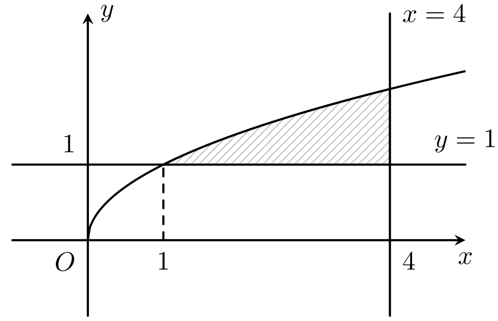
Ta có $\sqrt{4x - x^2} = 0 \Leftrightarrow 4x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4. \end{array}\right.$

Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_{0}^{4} \left(\sqrt{4x - x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_{0}^{4} \left(4x - x^2\right) \mathrm{d}x = \pi \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{32\pi}{3} \text{ đvtt.}$$

Chọn phương án B

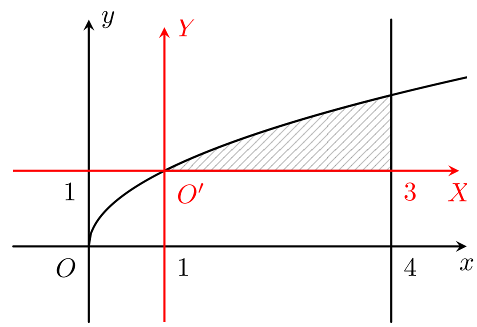
Câu 67. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị các hàm số sau $y=\sqrt{x}, y=1$ đường thẳng $x=4$ (tham khảo hình vẽ). Thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình (H) khi quay quanh đường thẳng $y=1$ bằng



Ⓐ $\dfrac{9}{2}\pi$. Ⓑ $\dfrac{119}{6}\pi$. Ⓒ $\dfrac{7}{6}\pi$. Ⓓ $\dfrac{21}{2}\pi$.

Lời giải.

Phương pháp: Gắn hệ trục tọa độ mới. Cho hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Khi đó thể tích vật thể tròn xoay giới hạn bởi hai đồ thị số $y=f(x), y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a, x=b$ khi quay quanh trục Ox là: $V=\pi\displaystyle\int\limits_a^b \left|f^2(x)-g^2(x)\right| \mathrm{d}x$.



Cách giải: Đặt $\begin{cases} X=x-1 \\ Y=y-1 \end{cases}$. Ta được hệ trục tọa độ OXY như hình vẽ:

Ta có: $y=\sqrt{x} \Leftrightarrow Y+1=\sqrt{X+1} \Leftrightarrow Y=\sqrt{X+1}-1$.

Thể tích cần tìm là

$$\begin{aligned} V &= \pi\int\limits_0^3 \left(\sqrt{X+1}-1\right)^2 \mathrm{d}X = \pi\int\limits_0^3 \left(X+2-2\sqrt{X+1}\right) \mathrm{d}X \\ &= \pi\left(\frac{1}{2}X^2+2X-\frac{4}{3}(X+1)\sqrt{X+1}\right)\Bigg|_0^3 = \pi\left[\left(\frac{9}{2}+6-\frac{32}{3}\right)-\left(-\frac{4}{3}\right)\right]=\frac{7\pi}{6}. \end{aligned}$$

Chọn phương án C

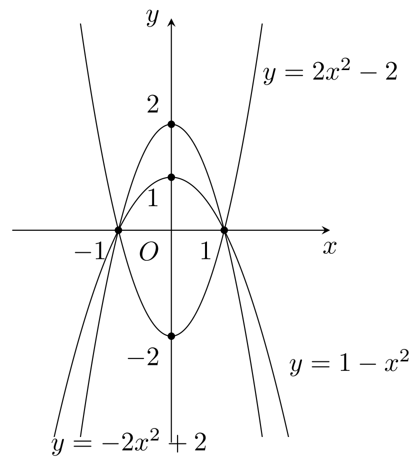
Câu 68. Cho hình phẳng D được giới hạn bởi hai đường $y=2(x^2-1); y=1-x^2$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành do D quay quanh trục Ox.

Ⓐ $\dfrac{64\pi}{15}$. Ⓑ $\dfrac{32}{15}$. Ⓒ $\dfrac{32\pi}{15}$. Ⓓ $\dfrac{64}{15}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y = 2(x^2 - 1)$ và $y = 1 - x^2$ là

$$2(x^2 - 1) = 1 - x^2 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$



Lấy đối xứng đồ thị hàm số $y = 2(x^2 - 1)$ qua trục Ox ta được đồ thị hàm số $y = 2(1 - x^2)$.
Ta có $2(1 - x^2) \geq 1 - x^2, \forall x \in [-1; 1]$.
Khi đó trên đoạn $[-1; 2]$ phần thể tích của hàm số $y = 2(x^2 - 1)$ chứa cả phần thể tích của hàm số $y = 1 - x^2$.

Suy ra thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \left[2(x^2 - 1)\right]^2 \mathrm{d}x = \frac{64\pi}{15}.$$

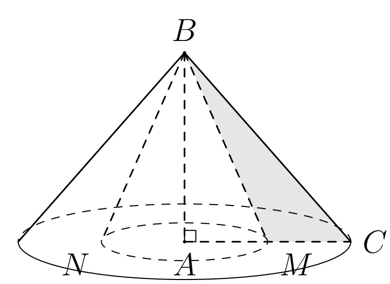
Chọn phương án A

Câu 69. Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh $AB = 6, AC = 8$ và M là trung điểm của cạnh AC. Khi đó thể tích của khối tròn xoay do tam giác BMC quanh cạnh AB là

A 86π. B 106π. C 96π. D 98π.

Lời giải.

Khi quay tam giác BMC quanh cạnh AB tạo ra 2 khối tròn xoay có thể tích là: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot AC^2 \cdot AB - \frac{1}{3}\pi \cdot AM^2 \cdot AB = \frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot 6 - \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 96\pi$.



Chọn phương án C

Câu 70. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $y = 2x - x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh Ox.

A $V = \frac{16}{15}\pi$. B $V = \frac{16}{15}$. C $V = \frac{4}{3}$. D $V = \frac{4}{3}\pi$.

Lời giải.

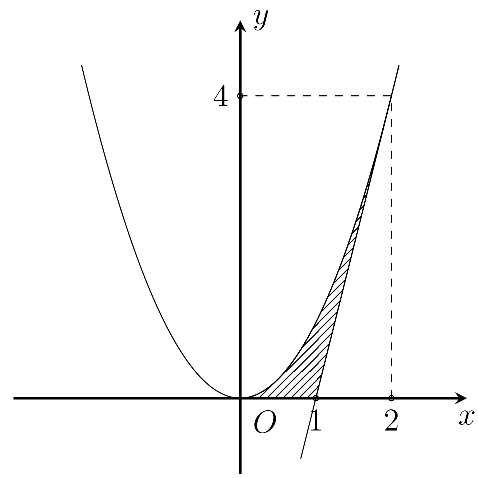
Phương trình hoành độ giao điểm là $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Thể tích $V = \pi \int_0^2 (2x - 2^2)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) \,\mathrm{d}x = \pi \left(4\frac{x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{16}{15}\pi.$

Chọn phương án A

Câu 71.

Cho hình (H) giới hạn bởi trục hoành, đồ thị của một parabol và một đường thẳng tiếp xúc với parabol đó tại điểm $A(2;4)$ như hình vẽ bên dưới. Thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi khi hình (H) quay quanh trục Ox bằng



A $\dfrac{16\pi}{15}$. **B** $\dfrac{32\pi}{5}$. **C** $\dfrac{2\pi}{3}$. **D** $\dfrac{22\pi}{5}$.

Lời giải.

Ta có phương trình Parabol là $y = x^2$

Phương trình tiếp tuyến với Parabol tại A là $y = 4x - 4$

$$V_H = \pi\left[\int\limits_0^1 x^4\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 (x^4 - (4x-4)^2)\,\mathrm{d}x\right] = \frac{16\pi}{15}$$

Chọn phương án A

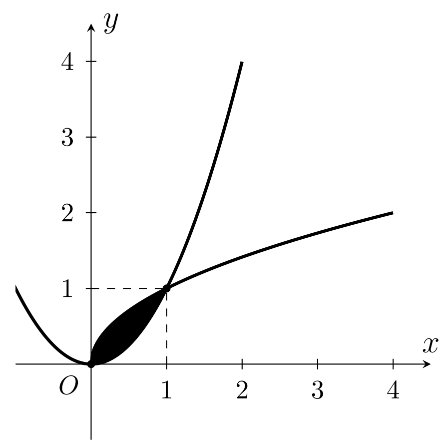
Câu 72. Tính thể tích V của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$ quanh trục Ox.

A $V = \dfrac{9\pi}{10}$. **B** $V = \dfrac{3\pi}{10}$. **C** $V = \dfrac{\pi}{10}$. **D** $V = \dfrac{7\pi}{10}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$ là

$$x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$$



Từ đồ thị, ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là

$$V = \pi\left(\int\limits_0^1 (x - x^4)\,\mathrm{d}x\right) = \frac{3\pi}{10}.$$

Chọn phương án B

D MỨC ĐỘ 4

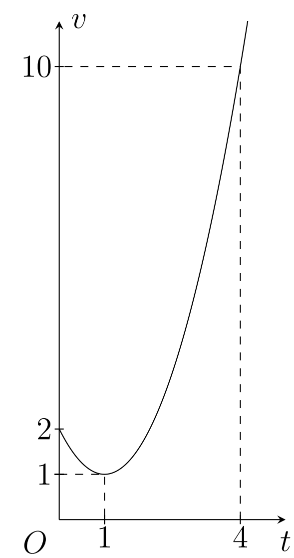
Câu 73. Một ô tô đang chạy với vận tốc 20m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều và sau đúng 4 giây thì ô tô bắt đầu dừng hẳn. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

A 20. **B** 50. **C** 40. **D** 30.

Lời giải.

Từ khi người lái đạp phanh ô tô chuyển động chậm dần đều ta có $v = 20 + at$ với a là gia tốc của ô tô.
Sau 4 giây thì ô tô dừng hẳn nên $20 + a \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow a = -5$.
Quảng đường xe đi được là $S = \int\limits_0^4 (20 - 5t)\,\mathrm{d}t = \left(20t - \dfrac{5}{2}t^2\right)\Big|_0^4 = 40$.
Chọn phương án C

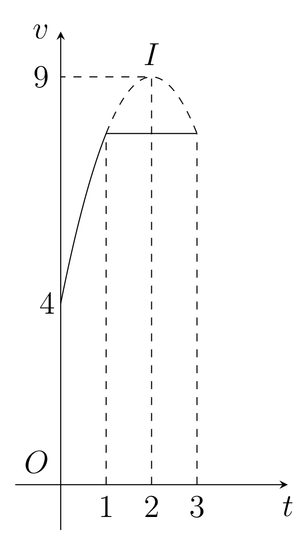
Câu 74.
Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



A $s = 6$ km. **B** $s = 8$ km. **C** $s = \dfrac{46}{3}$ km. **D** $s = \dfrac{40}{3}$ km.

Lời giải.
Hàm số biểu diễn vận tốc của vật là $v(t) = t^2 - 2t + 2$. Do đó, hàm số biểu diễn quãng đường di chuyển được của vật là $s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}t^3 - t^2 + 2t + C$. Do khi bắt đầu chuyển động thì quãng đường đi được bằng 0 nên $C = 0$. Vậy quãng đường vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát là $s(4) = \dfrac{40}{3}$ km.
Chọn phương án D

Câu 75.
Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường S mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A $S = 15{,}50$ (km). **B** $S = 21{,}58$ (km).
C $S = 23{,}25$ (km). **D** $S = 13{,}83$ (km).

Lời giải.

Gọi phương trình chuyển động của vật trong 1 giờ đầu là $v(t) = at^2 + bt + c$.

Từ đồ thị ta có $\begin{cases} v(0) = 4 \\ v(2) = 9 \\ -\dfrac{b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ 4a + b = 0 \\ 4a + 2b + c = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{5}{4} \\ b = 5 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow v(t) = -\dfrac{5}{4}t^2 + 5t + 4.$

Quãng đường đi được trong giờ đầu là $S_1 = \displaystyle\int_0^1 \left(-\dfrac{5}{4}t^2 + 5t + 4\right) \mathrm{d}t = \dfrac{73}{12}$ (km).

Tại thời điểm $t = 1$, vận tốc của vật là $v(1) = \dfrac{31}{4}$.

Quãng đường vật đi được trong 2 giờ tiếp theo là $S_2 = \dfrac{31}{4} \times 2 = \dfrac{31}{2}$ (km).

Vậy quãng đường vật di chuyển được trong 3 giờ là $S = S_1 + S_2 = \dfrac{259}{12} \approx 21{,}58$ (km).

Chọn phương án B

Câu 76. Một chuyến máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t) = t^2 + 10t$ m/s với t là thời gian được tính bằng giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc 200 m/s thì nó rời đường băng. Tính quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng.

A $\dfrac{2500}{3}$ m. **B** 2000 m. **C** 500 m. **D** $\dfrac{4000}{3}$ m.

Lời giải.

Khi $v = 200$, ta có

$$t^2 + 10t = 200 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 10 \\ t = -20 \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

Máy báy di chuyển trên đường băng từ thời điểm $t = 0$ đến thời điểm $t = 10$, do đó quãng đường đi được trên đường băng là

$$s = \int_0^{10} \left(t^2 + 10t\right) \mathrm{d}t = \left(\frac{t^3}{3} + 5t^2\right)\Bigg|_0^{10} = \frac{2500}{3} \text{ m.}$$

Chọn phương án A

Câu 77. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5s, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -70$ (m/s^2). Tính quãng đường $\mathcal{S}$ đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A $\mathcal{S} = 96{,}25$ (m). **B** $\mathcal{S} = 87{,}5$ (m). **C** $\mathcal{S} = 94$ (m). **D** $\mathcal{S} = 95{,}7$ (m).

Lời giải.

Ta có $v_1(t) = 7t \Rightarrow S_1(t) = \dfrac{7}{2}t^2$.

Quãng đường xe đi được sau 5s là $S_1 = \dfrac{7}{2} \times 5^2 = 87{,}5$ (m).

Vận tốc của xe sau 5s là $v_0 = 35$ (m/s).

Xe chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -70$ (m/s^2) nên $v_2(t) = v_0 + at = 35 - 70t$ (m/s).

Suy ra quãng đường xe chuyển động được tính theo công thức $S_2(t) = 35t - 35t^2$ (m).

Xe dừng hẳn thì $v_2 = 0 \Leftrightarrow 35 - 70t = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$ (s).

Quãng đường xe đi thêm cho tới khi dừng hẳn là $S_2 = 35 \times \dfrac{1}{2} - 35 \times \dfrac{1}{4} = 8{,}75\,(\text{m})$.

Vậy tổng quãng đường xe đi là $S_1 + S_2 = 96{,}25\,(\text{m})$.

Chọn phương án A

Câu 78. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 2t$ (m/s). Đi được 12 giây, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -12$ (m/s^2). Tính quãng đường s (m) đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

(A) $s = 168$ m. (B) $s = 166$ m. (C) $s = 144$ m. (D) $s = 152$ m.

Lời giải.

Quãng đường ô tô đi được từ lúc xe lăn bánh đến khi được phanh

$$s_1 = \int\limits_0^{12} v_1(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{12} 2t\,\mathrm{d}t = 144 \text{ (m)}.$$

Vận tốc $v_2(t)$ (m/s) của ô tô từ lúc được phanh đến khi dừng hẳn thỏa mãn

$$v_2(t) \int (-12)\,\mathrm{d}t = -12t + C,\ \ v_2(12) = v_1(12) = 24 \Rightarrow C = 168 \Rightarrow v_2(t) = -12t + 168 \text{ (m/s)}.$$

Thời điểm xe dừng hẳn tương ứng với t thỏa mãn $v_2(t) = 0 \Leftrightarrow t = 14$ (s).

Quãng đường ô tô đi được từ lúc xe được phanh đến khi dừng hẳn

$$s_2 = \int\limits_{12}^{14} v_2(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{12}^{14} (-12t + 168)\,\mathrm{d}t = 24 \text{ (m)}.$$

Quãng đường cần tính $s = s_1 + s_2 = 144 + 24 = 168$ (m).

Chọn phương án A

Câu 79. Một ô-tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5 (s), người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô-tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -70$ (m/s^2). Tính quãng đường S (m) đi được của ô-tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

(A) $S = 87{,}50$ (m). (B) $S = 94{,}00$ (m). (C) $S = 95{,}70$ (m). (D) $S = 96{,}25$ (m).

Lời giải.

Trong 5 giây đầu tiên xe đi được quãng đường $S_2 = \displaystyle\int\limits_0^5 7t\,\mathrm{d}t = \frac{7}{2}t^2\Big|_0^5 = 87{,}5$ m.

Kể từ khi phanh $v_2 = \displaystyle\int (-70)\,\mathrm{d}t = -70t + C$.

Lúc xe bắt đầu phanh $t = 0$ thì $v_2 = 35$ (m/s) suy ra $35 = -70 \cdot 0 + C \Rightarrow C = 35$.

Khi xe dừng hẳn $v_2 = 0 \Rightarrow -70t + 35 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}$.

Quãng đường xe đi được kể từ lúc đạp phanh $S_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (35 - 70t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{35}{4}$ m.

Quãng đường đi được của ô-tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn là $S = S_1 + S_2 = 96{,}25$ (m).

Chọn phương án D

Câu 80. Một ô tô đang chạy với vận tốc 54 km/h thì tăng tốc chuyển động nhanh dần đều với gia tốc $a(t) = 3t - 8$ (m/s^2) trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây. Quãng đường mà ô tô đi được sau 10s kể từ lúc tăng tốc là

A 150 m. **B** 250 m. **C** 246 m. **D** 540 m.

Lời giải.

Ta có 54 km/h = 15 m/s.

Vận tốc của ô tô có phương trình $v(t) = \displaystyle\int (3t - 8)\,\mathrm{d}t = \dfrac{3}{2}t^2 - 8t + C$.

Vì $v(0) = 15$ nên $v(t) = \dfrac{3}{2}t^2 - 8t + 15$.

Quãng đường đi được của ô tô có phương trình

$s(t) = \displaystyle\int \left(\dfrac{3}{2}t^2 - 8t + 15\right)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}t^3 - 4t^2 + 15t + C$.

Vì $s(0) = 0$ nên $C = 0$.

Vậy quãng đường đi được của ô tô sau 10 s là 250 m.

Chọn phương án B

Câu 81. Một vật chuyển động thẳng có vận tốc và gia tốc tại thời điểm t lần lượt là $v(t)$ m/s và $a(t)$ m/s^2. Biết rằng 1 giây sau khi chuyển động, vận tốc của vật là 1 m/s đồng thời $a(t) + v^2(t) \cdot (2t - 1) = 0$. Tính vận tốc của vật sau 3 giây.

A $v(3) = \dfrac{1}{13}$ m/s. **B** $v(3) = \dfrac{1}{7}$ m/s. **C** $v(3) = \dfrac{1}{12}$ m/s. **D** $v(3) = \dfrac{1}{6}$ m/s.

Lời giải.

Ta có $a(t) + v^2(t)(2t - 1) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a(t)}{v^2(t)} = 1 - 2t \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{v(t)}\right)' = 2t - 1$.

$\Rightarrow \dfrac{1}{v(t)} = t^2 - t + C$.

Mà $v(1) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow v(t) = \dfrac{1}{t^2 - t + 1} \Rightarrow v(3) = \dfrac{1}{7}$ (m/s).

Chọn phương án B

Câu 82. Một ô tô đang chạy với vận tốc v_0 m/s thì gặp chướng ngại vật nên người lái xe đã đạp phanh. Từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a(t) = -8t$ m/s^2 trong đó t là thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Biết từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được 12 m. Tính v_0.

A $\sqrt[3]{1269}$ m/s. **B** $\sqrt[3]{36}$ m/s. **C** 12 m/s. **D** 16 m/s.

Lời giải.

Ta có $v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t = -4t^2 + C$.

— Tại thời điểm $t = 0$, ta có $v_0 = C$.

— Tại thời điểm ô tô dừng hẳn $t = t_1$ ta có $v(t_1) = 0 \Leftrightarrow -4t_1^2 + C = 0 \Leftrightarrow t_1 = \dfrac{\sqrt{C}}{2}$.

Kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được 12 m, do đó

$$\int\limits_0^{t_1} v(t)\,\mathrm{d}t = 12 \Leftrightarrow \left(-\frac{4}{3}t^3 + Ct\right)\Big|_0^{t_1} = 12$$
$$\Leftrightarrow -\frac{4}{3}t_1^3 + Ct_1 = 12 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}\cdot\frac{C\sqrt{C}}{8} + \frac{C\sqrt{C}}{2} = 12$$
$$\Leftrightarrow C\sqrt{C} = 36 \Leftrightarrow C = \sqrt[3]{1296}.$$

Vậy $v_0 = \sqrt[3]{1296}$.

Chọn phương án (A)

Câu 83. Một ô tô chuyển động thẳng với vận tốc ban đầu bằng 10 m/s và gia tốc $a(t) = -2t + 8$ $\mathrm{m/s^2}$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây. Hỏi từ lúc chuyển động đến lúc có vận tốc lớn nhất thì xe đi được quãng đường bao nhiêu?

(A) $\dfrac{128}{3}$ m. (B) $\dfrac{248}{3}$ m. (C) 70 m. (D) 80 m.

Lời giải.

Ta có vận tốc ô tô là $v(t) = \int a(t)\mathrm{d}t = \int (-2t+8)\mathrm{d}t = -t^2 + 8t + C$. Vì vận tốc ban đầu là 10 m/s nên ta có $v(t) = -t^2 + 8t + 10 = -(t-4)^2 + 26 \geq 26$. Vậy vận tốc lớn nhất của ô tô bằng 26 m/s, đạt được khi $t = 4$. Do đó quãng đường xe đi được kể từ lúc chuyển động đến lúc có vận tốc lớn nhất là:

$$S = \int\limits_0^4 v(t)\mathrm{d}t = \int\limits_0^4 (-t^2 + 8t + 10)\mathrm{d}t = \frac{248}{3}.$$

Chọn phương án (B)

Câu 84. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ quanh trục Ox.

(A) $V = \pi(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e})$. (B) $V = \pi\mathrm{e}^2$. (C) $V = \pi(\mathrm{e}^2 + \mathrm{e})$. (D) $V = \pi\mathrm{e}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính thể tích vật thể tròn xoay ta có

$$V = \pi \int\limits_1^2 x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_1^2 x \,\mathrm{d}\mathrm{e}^x$$

$$= \pi x\mathrm{e}^x\Big|_1^2 - \pi \int\limits_1^2 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \pi \left(2\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\Big|_1^2\right) = \pi\mathrm{e}^2.$$

Chọn phương án B

Câu 85. Gọi $F(t)$ là số lượng vi khuẩn phát triển sau t giờ. Biết $F(t)$ thỏa mãn $F'(t) = \dfrac{10000}{1+2t}$ với $t \geq 0$ và ban đầu có 1000 con vi khuẩn. Hỏi sau 2 giờ số lượng vi khuẩn là bao nhiêu?

A. 17094. B. 9047. C. 32118. D. 8047.

Lời giải.

$F(t) = \displaystyle\int \frac{10000}{1+2t} \,\mathrm{d}t = 5000 \ln|1+2t| + C.$

$F(0) = 1000 \Leftrightarrow 5000 \ln|1+2\cdot 0| + C = 1000 \Leftrightarrow C = 1000.$

Số lượng vi khuẩn sau 2 giờ:

$F(2) = 5000 \ln|1+2\cdot 2| + 1000 = 5000 \ln(5) + 1000 \approx 9047.$

Chọn phương án B

Câu 86. Một vật đang chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2$ (m/s^2). Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{2200}{3}$ m. B. $\dfrac{4000}{4}$ m. C. $\dfrac{1900}{3}$ m. D. $\dfrac{4300}{3}$ m.

Lời giải.

Ta có $a(t) = v'(t) \Rightarrow v(t) = \displaystyle\int \left(3t + t^2\right) \mathrm{d}x = \frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} + c$, khi $t = 0$ thì $v = 10 \Rightarrow c = 10$.

Mặt khác $v(t) = s'(t) \Rightarrow s = \displaystyle\int\limits_0^{10} \left(\frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} + 10\right) \mathrm{d}x = \frac{4300}{3}.$

Chọn phương án D

Câu 87. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lại đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ m/s, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 10 m. B. 5 m. C. 20 m. D. 8 m.

Lời giải.

Thời điểm ô tô dừng hẳn $v(t) = -5t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ (s).

Quãng đường từ lúc đạp phanh tới khi ô tô dừng hẳn $s = \displaystyle\int\limits_0^2 (-5t + 10) \,\mathrm{d}t = 10$ (m).

Chọn phương án A

Câu 88. Một vật đang chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2$ m/s^2. Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là bao nhiêu?

(A) $\dfrac{43}{3}$ m. (B) $\dfrac{430}{3}$ m. (C) $\dfrac{4300}{3}$ m. (D) $\dfrac{43000}{3}$ m.

Lời giải.

Vận tốc của vật sau khi tăng tốc có phương trình $v(t) = \displaystyle\int (3t + t^2)\,\mathrm{d}t = \dfrac{3t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} + C$.

Vì $v(0) = 10$ nên $c = 10$. Suy ra $v(t) = \dfrac{3t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} + 10$.

Do đó, trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc vật được quảng đường

$$s = \int\limits_0^{10} \left(\frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + 10\right)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{12} + 10t\right)\Bigg|_0^{10} = \frac{4300}{3}\ (\mathrm{m}).$$

Chọn phương án (C)

Câu 89. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1 m. Một ô tô A đang chạy với vận tốc 16 m/s bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bằng công thức $v_{\mathrm{A}}(t) = 16 - 4t$ (m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để hai ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn thì khi dừng lại ô tô A phải hãm phanh cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

(A) 33 m. (B) 12 m. (C) 31 m. (D) 32 m.

Lời giải.

Dễ thấy ô tô A dừng lại sau 4 giây. Quãng đường mà ô tô A di chuyển từ lúc bắt đầu hãm phanh đến lúc dừng lại là

$$\int\limits_0^4 (16 - 4t)\,\mathrm{d}t = \left(16t - 2t^2\right)\Big|_0^4 = 32\ (\mathrm{m}).$$

Vậy ô tô A phải bắt đầu hãm phanh cách ô tô B một khoảng ít nhất $32 + 1 = 33$ m.

Chọn phương án (A)

Câu 90. Cho hai quả bóng A, B di chuyển ngược chiều nhau va chạm với nhau. Sau va chạm mỗi quả bóng nảy ngược lại một đoạn thì dừng hẳn. Biết sau khi va chạm, quả bóng A nảy ngược lại với vận tốc $v_A(t) = 8 - 2t\,(m/s)$ và quả bóng B nảy ngược lại với vận tốc $v_B(t) = 12 - 4t\,(m/s)$. Tính khoảng cách giữa hai quả bóng sau khi đã dừng hẳn (Giả sử hai quả bóng đều chuyển động thẳng).

(A) 36 mét. (B) 32 mét. (C) 34 mét. (D) 30 mét.

Lời giải.

Thời gian quả bóng A chuyển động từ lúc va chạm đến khi dừng hẳn $v_A(t) = 0 \Leftrightarrow 8 - 2t = 0 \Rightarrow t = 4s$.

Quãng đường quả bóng A di chuyển $S_A = \displaystyle\int_0^4 (8 - 2t)\,\mathrm{d}x = 16m$

Thời gian quả bóng B chuyển động từ lúc va chạm đến khi dừng hẳn $v_B(t) = 0 \Leftrightarrow 12 - 4t = 0 \Rightarrow t = 3s$.

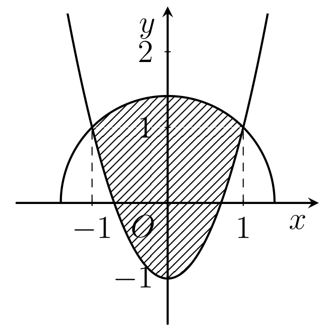
Quãng đường quả bóng B duy chuyển $S_B = \int_0^3 (12-4t)\,\mathrm{d}x = 18m$

Vậy: Khoảng cách hai quả bóng sau khi dừng hẳn là $S = S_A + S_B = 34m$.

Chọn phương án C

Câu 91.

Người ta cần trồng một vườn hoa Cẩm Tú Cầu theo hình giới hạn bởi một đường Parabol và nửa đường tròn có bán kính $\sqrt{2}$ mét (phần tô trong hình vẽ). Biết rằng: để trồng mỗi m^2 hoa cần ít nhất là 250000 đồng, số tiền tối thiểu để trồng xong vườn hoa Cẩm Tú Cầu gần bằng



A 893000 đồng. B 476000 đồng. C 809000 đồng. D 559000 đồng.

Lời giải.

Nửa đường tròn (T) có phương trình $y = \sqrt{2-x^2}$.

Xét parabol (P) có trục đối xứng Oy nên có phương trình dạng: $y = ax^2 + c$.

(P) cắt Oy tại điểm $(0;-1)$ nên ta có: $c = -1$.

(P) cắt (T) tại điểm $(1;1)$ thuộc (T) nên ta được: $a + c = 1 \Rightarrow a = 2$.

Phương trình của (P) là: $y = 2x^2 - 1$.

Diện tích miền phẳng D (tô màu trong hình) là:

$$S = \int\limits_{-1}^{1} \left(\sqrt{2-x^2} - 2x^2 + 1\right)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{1} \left(-2x^2+1\right)\,\mathrm{d}x.$$

$I_1 = \int\limits_{-1}^{1} \left(-2x^2+1\right)\,\mathrm{d}x = \left(-\dfrac{2}{3}x^3 + x\right)\Big|_{-1}^{1} = \dfrac{2}{3}.$

Xét $I_2 = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x$, đặt $x = \sqrt{2}\sin t, t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ thì $\mathrm{d}x = \sqrt{2}\cos t\,dt$.

Đổi cận: $x = -1$ thì $t = -\dfrac{\pi}{4}$, với $x = 1$ thì $t = \dfrac{\pi}{4}$, ta được:

$$I_2 = \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{2 - 2\sin^2 t}\sqrt{2}\cos t\,dt = \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} 2\cos^2 t\,dt$$

$$= \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} (1+\cos 2t)\,dt = \left(t + \dfrac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1 + \dfrac{\pi}{2}.$$

Suy ra $S = I_1 + I_2 = \dfrac{5}{3} + \dfrac{\pi}{2}$ m^2.

Số tiền trồng hoa tối thiểu là: $250000\left(\dfrac{5}{3} + \dfrac{\pi}{2}\right) \approx 809365$ đồng.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. C	4. D	5. A	6. D	7. C	8. C	9. B	10. C
11. D	12. C	13. D	14. B	15. D	16. B	17. A	18. D	19. D	20. A
21. B	22. C	23. A	24. B	25. A	26. C	27. B	28. A	29. A	30. C
31. D	32. B	33. A	34. A	35. D	36. B	37. B	38. C	39. B	40. D
41. C	42. B	43. C	44. C	45. A	46. C	47. B	48. C	49. D	50. C
51. D	52. C	53. D	54. D	55. A	56. B	57. B	58. A	59. A	60. D
61. A	62. B	63. B	64. C	65. D	66. B	67. C	68. A	69. C	70. A
71. A	72. B	73. C	74. D	75. B	76. A	77. A	78. A	79. D	80. B
81. B	82. A	83. B	84. B	85. B	86. D	87. A	88. C	89. A	90. C

DẠNG 35. SỐ PHỨC

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Cho hai số phức $z_1 = 3 - i$ và $z_2 = -1 + i$. Phần ảo của số phức $z_1 z_2$ bằng
(A) 4. (B) $4i$. (C) -1. (D) $-i$.

Lời giải.
Ta có: $z_1.z_2 = (3 - i)(-1 - i) = -2 + 4i$. Suy ra phần ảo của $z_1.z_2$ bằng 4.
Chọn phương án (A)

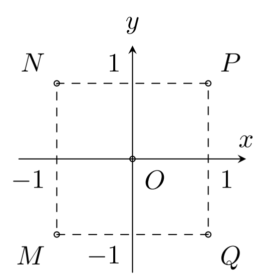
Câu 1. Cho hai số phức $z_1 = 2 - 2i, z_2 = -3 + 3i$. Khi đó số phức $z_1 - z_2$ là
(A) $-5 + 5i$. (B) $-5i$. (C) $5 - 5i$. (D) $-1 + i$.

Lời giải.
Ta có $z_1 - z_2 = (2 - 2i) - (-3 + 3i) = 5 - 5i$.
Chọn phương án (C)

Câu 2. Cho hai số phức $z_1 = 3 - 7i$ và $z_2 = 2 + 3i$. Tìm số phức $z = z_1 + z_2$.
(A) $z = 1 - 10i$. (B) $z = 5 - 4i$. (C) $z = 3 - 10i$. (D) $z = 3 + 3i$.

Lời giải.
Ta có $z = z_1 + z_2 = 3 - 7i + 2 + 3i = 5 - 4i$.
Chọn phương án (B)

Câu 3.
Cho số phức $z = -1 + 2i, w = 2 - i$. Điểm nào trong hình bên biểu diễn số phức $z + w$?
(A) P. (B) N. (C) Q. (D) M.



Lời giải.
Vì $z + w = -1 + 2i + 2 - i = 1 + i$ nên điểm biểu diễn là điểm $P(1; 1)$.
Chọn phương án (A)

Câu 4. Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 - i$. Tìm số phức $z = \dfrac{z_2}{z_1}$.
(A) $z = \dfrac{1}{5} + \dfrac{7}{5}i$. (B) $z = \dfrac{1}{10} + \dfrac{7}{10}i$. (C) $z = \dfrac{1}{5} - \dfrac{7}{5}i$. (D) $z = -\dfrac{1}{10} + \dfrac{7}{10}i$.

Lời giải.
Ta có: $z = \dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{1 + 2i}{3 - i} = \dfrac{(1 + 2i)(3 + i)}{10} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{7}{10}i$.
Chọn phương án (B)

Câu 5. Cho số phức $z = \dfrac{3 + i}{x + i}$ với $x \in \mathbb{R}$. Tổng phần thực và phần ảo của z là

(A) $\dfrac{2x-4}{2}$. (B) $\dfrac{4x+2}{2}$. (C) $\dfrac{4x-2}{x^2+1}$. (D) $\dfrac{2x+6}{x^2+1}$.

Lời giải.

Ta có $z = \dfrac{(3+i)(x-i)}{x^2+1} = \dfrac{3x+1+(x-3)i}{x^2+1} = \dfrac{3x+1}{x^2+1} + \dfrac{x-3}{x^2+1}i$.

Từ đó tổng phần thực và phần ảo của z là $\dfrac{3x+1}{x^2+1} + \dfrac{x-3}{x^2+1} = \dfrac{4x-2}{x^2+1}$.

Chọn phương án (C)

Câu 6. Tập nghiệm S của phương trình $(\sqrt{2}-i\sqrt{3})z + i\sqrt{2} = \sqrt{3} + 2i\sqrt{2}$ trên tập số phức là

(A) $S = \{i\}$. (B) $S = \{-5i\}$. (C) $S = \{5i\}$. (D) $S = \{-12-5i\}$.

Lời giải.

$$(\sqrt{2}-i\sqrt{3})z + i\sqrt{2} = \sqrt{3} + 2i\sqrt{2} \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{3}+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}} \Leftrightarrow z = i.$$

Chọn phương án (A)

Câu 7. Số phức z thỏa $\dfrac{\overline{z}}{4-3i} + (2-3i) = 5-2i$. Mô-đun của z bằng

(A) $|z| = 10\sqrt{2}$. (B) $|z| = \sqrt{10}$. (C) $|z| = 250$. (D) $|z| = 5\sqrt{10}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{\overline{z}}{4-3i} + (2-3i) = 5-2i &\Leftrightarrow \frac{\overline{z}}{4-3i} = 3+i \\ &\Leftrightarrow \overline{z} = (3+i)(4-3i) \\ &\Leftrightarrow \overline{z} = 15-5i \Leftrightarrow z = 15+5i. \end{aligned}$$

Vậy mô-đun của số phức z là $|z| = \sqrt{15^2+5^2} = 5\sqrt{10}$.

Chọn phương án (D)

Câu 8. Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)\overline{z} = 2+11i$. Tính giá trị của biểu thức $A = |z| + |\overline{z}|$.

(A) 5. (B) $\sqrt{10}$. (C) 10. (D) $\sqrt{5}$.

Lời giải.

$(2+i)\overline{z} = 2+11i \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{2+11i}{2+i} = 3+4i \Rightarrow z = 3-4i$.

Giá trị biểu thức $A = |z| + |\overline{z}| = 5+5 = 10$.

Chọn phương án (C)

Câu 9. Tìm số phức z thỏa mãn $(3-2i)z - 2 = z + 18i$.

(A) $z = -4+5i$. (B) $z = 4+5i$. (C) $z = 4-5i$. (D) $z = -4-5i$.

Lời giải.

Ta có $(3-2i)z - 2 = z + 18i \Leftrightarrow z = \dfrac{2+18i}{2-2i} = -4+5i$.

Chọn phương án (A)

Câu 10. Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)z + \dfrac{2(1+2i)}{1+i} = 7+8i$. Tính mô-đun của số phức $w = z+1-2i$.

(A) 7. (B) $\sqrt{7}$. (C) 25. (D) 4.

Lời giải.
Ta có

$$(2+i)z+\frac{2(1+2i)}{1+i}=7+8i \Leftrightarrow (2+i)z+3+i=7+8i$$
$$\Leftrightarrow (2+i)z=4+7i$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{4+7i}{2+i}=3+2i.$$

Suy ra $w=z+1-2i=3+2i+1-2i=4 \Rightarrow |w|=4$.
Chọn phương án D

Câu 11. Tính tổng $S=1+i^3+i^6+\cdots+i^{2016}$.

A $S=1$. **B** $S=-1$. **C** $S=i$. **D** $S=-i$.

Lời giải.
Ta có $1, i^3, i^6, \ldots, i^{2016}$ là một cấp số nhân có 673 số hạng với $u_1=1$ và $q=i^3$ nên

$$S=\frac{1-(i^3)^{673}}{1-i^3}=\frac{1-i^3\cdot(-i)^{672}}{1+i}=\frac{1-i^3}{1+i}=1.$$

Chọn phương án A

Câu 12. Phần ảo của số phức $z=\dfrac{1-(1-i)^{33}}{1-i}+\overline{(1-2i)}$ là

A $\frac{5}{2}$. **B** $\frac{5}{2}i$. **C** $-\frac{3}{2}i$. **D** $-\frac{3}{2}$.

Lời giải.
$z=\dfrac{1}{1-i}-(1-i)^{32}+1+2i=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i-(1-i)^{32}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i-(-2i)^{16}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i-(-4)^8$.
Vậy phần ảo của số phức z là $\dfrac{5}{2}$.
Chọn phương án A

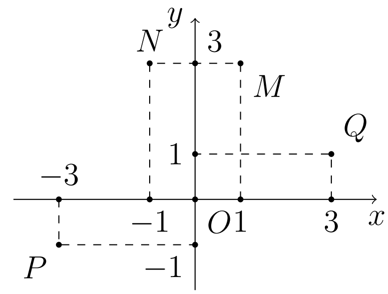
Câu 13. Cho số phức z thỏa mãn $\overline{z}=\dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^3}{1+i}$. Tính mô-đun của số phức $\overline{z}-iz$.

A $8\sqrt{2}$. **B** 8. **C** 16. **D** -8.

Lời giải.
Ta có $\overline{z}=-4+4i$, suy ra $z=-4-4i$. Vậy $|\overline{z}-iz|=|-8+8i|=8\sqrt{2}$.
Chọn phương án A

Câu 14.
Điểm nào trong hình vẽ dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $z=(1+i)(2-i)$?

A M. **B** P. **C** N. **D** Q.



Lời giải.

Ta có $z = (1+i)(2-i) = 3+i$ có điểm biểu diễn là $Q(3;1)$.
Chọn phương án (D)

Câu 15. Đẳng thức nào trong các đẳng thức sau đúng?

(A) $(1+i)^{2018} = 2^{1009}i$.
(B) $(1+i)^{2018} = -2^{1009}i$.
(C) $(1+i)^{2018} = 2^{1009}$.
(D) $(1+i)^{2018} = -2^{1009}$.

Lời giải.
Ta thấy $(1+i)^{2018} = \left[(1+i)^2\right]^{1009} = (2i)^{1009} = 2^{1009}i$.
Chọn phương án (A)

Câu 16. Cho $(2-2i)^{2018} = a+bi; a,b \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $P = a+b$.

(A) -8^{1009}.
(B) 8^{1009}.
(C) -4^{1009}.
(D) 4^{1009}.

Lời giải.
Ta có
$$(2-2i)^{2018} = 2^{2018}\cdot\left[(1-i)^2\right]^{1009} = 2^{2018}\cdot(-2i)^{1009} = -8^{1009}i.$$
Vậy $a=0$, $b=-8^{1009}$ và $P = a+b = -8^{1009}$.
Chọn phương án (A)

B MỨC ĐỘ 2

Câu 17. Cho số phức z thỏa mãn $z+4\overline{z} = 7+i(z-7)$. Khi đó, mô-đun của z bằng bao nhiêu?

(A) $|z| = \sqrt{3}$.
(B) $|z| = 3$.
(C) $|z| = \sqrt{5}$.
(D) $|z| = 5$.

Lời giải.
Giả sử $x = x+yi$ $(x,\ y \in \mathbb{R})$. Ta có
$$z+4\overline{z} = 7+i(z-7) \Leftrightarrow x+yi+4(x-yi) = 7+i(x+yi-7)$$
$$\Leftrightarrow\ (5x+y-7)+i(-x-3y+7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}5x+y-7=0\\ -x-3y+7=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=2.\end{cases}$$
Mô-đun của số phức z là $|z| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$.
Chọn phương án (C)

Câu 18. Số nào sau đây là số thuần ảo?

(A) $(1+i)^4$.
(B) $(1+i)^3$.
(C) $(1+i)^5$.
(D) $(1+i)^6$.

Lời giải.
Ta có

— $(1+i)^4 = (1+2i+i^2)^2 = 4i^2 = -4$.

— $(1+i)^3 = (1+i)^2\cdot(1+i) = 2i\cdot(1+i) = -2+2i$.

— $(1+i)^5 = (1+i)^4\cdot(1+i) = -4\cdot(1+i) = -4-4i$.

— $(1+i)^6 = (1+i)^5\cdot(1+i) = -4\cdot(1+i)(1+i) = -8i$ là số thuần ảo.

Chọn phương án (D)

Câu 19. Tìm số phức thỏa mãn $i(\overline{z}-2+3i)=1+2i$.

(A) $z=-4+4i$. (B) $z=-4-4i$. (C) $z=4-4i$. (D) $z=4+4i$.

Lời giải.

Ta có $i(\overline{z}-2+3i)=1+2i \Leftrightarrow -\overline{z}+2-3i=i-2 \Leftrightarrow \overline{z}=4-4i$.

Khi đó $z=4+4i$.

Chọn phương án (D)

Câu 20. Cho số phức $z_1=3+2i, z_2=6+5i$. Tìm số phức liên hợp của số phức $z=6z_1+5z_2$.

(A) $\overline{z}=51+40i$. (B) $\overline{z}=48-37i$. (C) $\overline{z}=51-40i$. (D) $\overline{z}=48+37i$.

Lời giải.

Ta có $z=6z_1+5z_2=6(3+2i)+5(6+5i)=48+37i$.

Vậy $\overline{z}=48-37i$.

Chọn phương án (B)

Câu 21. Tính giá trị của tổng phần thực và phần ảo của số phức z biết $z=(2+i)^2$.

(A) 7. (B) 6. (C) 8. (D) -1.

Lời giải.

Ta có $z=(2+i)^2=4+4i+i^2=3+4i$. Vậy tổng phần thực và phần ảo của z bằng 7.

Chọn phương án (A)

Câu 22. Cho số phức $z=-4+3i$. Tính mô-đun của số phức $w=iz+\overline{z}$.

(A) $|w|=7\sqrt{2}$. (B) $|w|=\sqrt{50}$. (C) $|w|=2\sqrt{7}$. (D) $|w|=25$.

Lời giải.

Ta có $w=iz+\overline{z}=i(-4+3i)-4-3i=-7-7i \Rightarrow |w|=7\sqrt{2}$.

Chọn phương án (A)

Câu 23. Số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-2|=|z|$ và $(z+1)(\overline{z}-i)$ là số thực. Giá trị của biểu thức $S=a+2b$ bằng bao nhiêu?

(A) $S=-3$. (B) $S=1$. (C) $S=0$. (D) $S=-1$.

Lời giải.

Ta có $|z-2|=|z| \Leftrightarrow |(a-2)+bi|=|a+bi| \Leftrightarrow (a-2)^2+b^2=a^2+b^2 \Leftrightarrow (a-2)^2=a^2 \Leftrightarrow a=1$.

Mặt khác $(z+1)(\overline{z}-i)=(2+bi)(1-(b+1)i)=2-2(b-1)i+bi+b(b-1)=2+(-b-2)i+b(b-1)$ là số thực khi và chỉ khi $-b-2=0 \Leftrightarrow b=-2$.

Vậy $S=a+2b=1+2\cdot(-2)=-3$.

Chọn phương án (A)

Câu 24. Cho số phức $w=(2+i)^2-3(2-i)$. Giá trị của $|w|$ là

(A) $\sqrt{54}$. (B) $2\sqrt{10}$. (C) $\sqrt{43}$. (D) $\sqrt{58}$.

Lời giải.

Ta có $w=-3+7i$ nên $|w|=\sqrt{(-3)^2+7^2}=\sqrt{58}$.

Chọn phương án (D)

Câu 25. Cho số phức z thỏa mãn $3\overline{z}+(1+i)z=1-5i$. Tìm mô-đun của z.

Ⓐ $|z|=5$. Ⓑ $|z|=\sqrt{5}$. Ⓒ $|z|=\sqrt{13}$. Ⓓ $|z|=\sqrt{10}$.

Lời giải.

Gọi $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$. Thay vào phương trình ta được:

$$3(a-bi)+(1+i)(a+bi)=1-5i\Leftrightarrow(4a-b)+(a-2b)=1-5i$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}4a-b=1\\a-2b=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}\Rightarrow z=1+3i\Rightarrow|z|=\sqrt{10}.$$

Chọn phương án Ⓓ

Câu 26. Cho $z=3-2i$. Tìm phần ảo của số phức $w=(1+2i)z$.

Ⓐ -4. Ⓑ 7. Ⓒ 4. Ⓓ $4i$.

Lời giải.

Ta có $w=(1+2i)z=(1+2i)(3-2i)=7+4i$.

Từ đây ta suy ra phần ảo của số phức w bằng 4.

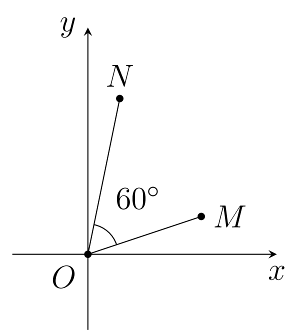
Chọn phương án Ⓒ

C MỨC ĐỘ 3

Câu 27. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=3$, $|z_2|=4$ và chúng được biểu diễn trong mặt phẳng phức lần lượt là các điểm M,N. Biết góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{ON}$ bằng 60°. Tìm môđun của số phức $z=\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$.

Ⓐ $|z|=\sqrt{3}$. Ⓑ $|z|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Ⓒ $|z|=\dfrac{\sqrt{481}}{13}$. Ⓓ $|z|=4\sqrt{3}$.

Lời giải.



Đặt $z_1=3(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $z_2=4(\cos(\varphi\pm60^\circ)+i\sin(\varphi\pm60^\circ))$, ta có

$$z=\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}=\frac{1+\frac{z_2}{z_1}}{1-\frac{z_2}{z_1}}=\frac{1+\frac{4}{3}(\cos60^\circ\pm i\sin60^\circ)}{1-\frac{4}{3}(\cos60^\circ\pm i\sin60^\circ)}=\frac{1+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{5\pm2i\sqrt{3}}{1\mp2i\sqrt{3}}$$

Suy ra $|z|=\dfrac{\sqrt{481}}{13}$.

Chọn phương án Ⓒ

Câu 28. Cho số phức $z = 1 - i$ và $\overline{z}$ là số phức liên hợp của z. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A $|\overline{z}| < 2$. **B** $\dfrac{z^3}{\overline{z}^3} = i$. **C** z^2 là số thuần ảo. **D** $\overline{z}^4$ là số thuần ảo.

Lời giải.

Ta có $\overline{z}^4 = (1+i)^4 = \left((1+i)^2\right)^2 = (2i)^2 = -4$ không phải số thuần ảo. Do đó mệnh đề $\overline{z}^4$ *là số thuần ảo* sai.

Chọn phương án D

Câu 29. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $az^2 + z + \dfrac{1}{a} = 0$ $\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right)$. Biết $|z_1| + |z_2| = 2$, khi đó a nhận giá trị bằng

A $\dfrac{1}{2}$. **B** 2. **C** 3. **D** 1.

Lời giải.

Theo giả thiết

$$az^2 + z + \frac{1}{a} = 0 \Leftrightarrow a^2z^2 + az + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(az + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$$

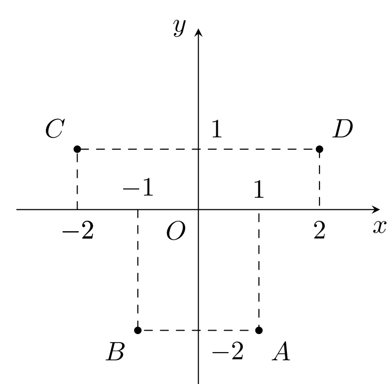
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} az + \dfrac{1}{2} = \dfrac{i\sqrt{3}}{2} \\ az + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{i\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \dfrac{1}{2a}\left(-1 + i\sqrt{3}\right). \\ z = -\dfrac{1}{2a}\left(1 + i\sqrt{3}\right). \end{array}\right. \quad (1)$$

Vì $|z_1| + |z_2| = 2$ nên từ (1) suy ra $\dfrac{1}{2a}(2+2) = 2 \Leftrightarrow a = 1$.

Chọn phương án D

Câu 30.

Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $z - (2+3i)\overline{z} = 1 - 9i$. Số phức $w = \dfrac{5}{iz}$ có điểm biểu diễn là điểm nào trong các điểm A, B, C, D ở hình bên?



A Điểm C. **B** Điểm A. **C** Điểm D. **D** Điểm B.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Theo đề bài ta có

$$a + bi - (2+3i)(a - bi) = 1 - 9i \Leftrightarrow -a - 3b + (3b - 3a)i = 1 - 9i \Leftrightarrow \begin{cases} -a - 3b = 1 \\ 3b - 3a = -9. \end{cases}$$

Giải hệ ta được $a = 2, b = -1$. Suy ra $w = \dfrac{5}{i(2-i)} = 1 - 2i$.

Vậy điểm biểu diễn số phức w là điểm $A(1; -2)$.

Chọn phương án B

Câu 31. Cho số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ có phần thực dương và thỏa mãn $z + 2 + i - |z|(1 + i) = 0$. Tính $P = a + b$.

A. $P = 7$.　B. $P = -1$.　C. $P = -5$.　D. $P = 3$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a > 0)$. Theo đề ta có

$$a + bi + 2 + i - \sqrt{a^2 + b^2}(1 + i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 - \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \\ b + 1 - \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 = b + 1 \\ b + 1 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 1 > 0 \\ (b + 1)^2 = (b - 1)^2 + b^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 1 \\ b > 1 \\ b^2 - 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = 4, a = 3.$$

Vậy $P = 7$.

Chọn phương án A

Câu 32. Cho z_1, z_2 là hai số phức liên hợp của nhau đồng thời thỏa mãn $\dfrac{z_1}{z_2^2} \in \mathbb{R}$ và $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{3}$. Tính mô-đun của số phức z_1.

A. $|z_1| = 3$.　B. $|z_1| = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.　C. $|z_1| = 2$.　D. $|z_1| = \sqrt{5}$.

Lời giải.

Gọi $z_1 = a + bi$ trong đó a, $b \in \mathbb{R}$.

Do z_1, z_2 là hai số phức liên hợp của nhau nên $z_2 = a - bi$.

Ta có $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow |2bi| = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow b^2 = 3$.

Lại có $\dfrac{z_1}{z_2^2} = \dfrac{a + bi}{(a - bi)^2} = \dfrac{(a + bi)^3}{(a - bi)^2(a + bi)^2} = \dfrac{a^3 - 3ab^2}{(a^2 + b^2)^2} + \dfrac{b(3a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)^2}i$

do $\dfrac{z_1}{z_2^2} \in \mathbb{R}$ nên $\begin{cases} b(3a^2 - b^2) = 0 \\ a \neq 0,\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b^2 = 3a^2 \end{array}\right. \\ a \neq 0,\ b \neq 0 \end{cases}$ mà theo trên ta có $b^2 = 3 \Rightarrow a^2 = 1$.

Khi đó $|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$.

Chọn phương án C

Câu 33. Cho số phức $z = a + bi$ thỏa mãn $z(1 + 2i)^2 + \overline{z} = -20 + 4i$. Giá trị của $a^2 - b^2$ bằng

A. 16.　B. 1.　C. 5.　D. 7.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& z(1+2i)^2+\overline{z}=-20+4i \\
\Leftrightarrow\ & (a+bi)(-3+4i)+(a-bi)=-20+4i \\
\Leftrightarrow\ & (-3a-4b)+(4a-3b)i+(a-bi)=-20+4i \\
\Leftrightarrow\ & (-2a-4b)+(4a-4b)i=-20+4i \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases}-2a-4b=-20 \\ 4a-4b=4\end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases}a=4 \\ b=3.\end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy $a^2-b^2=16-9=7$.

Chọn phương án D

Câu 34. Trong tập các số phức, cho phương trình $z^2-6z+m=0$, $m\in\mathbb{R}$ (1). Gọi m_0 là một giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $z_1.\overline{z_1}=z_2.\overline{z_2}$. Hỏi trong khoảng $(0;20)$ có bao nhiêu giá trị $m_0\in\mathbb{N}$?

A. 10. B. 11. C. 12. D. 13.

Lời giải.

Đề bài yêu cầu ta tìm các giá trị nguyên của m trong khoảng $(0;20)$, sao cho phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $z_1.\overline{z_1}=z_2.\overline{z_2}$, hay $|z_1|=|z_2|$ (*).

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt là $\Delta'>0$ hoặc $\Delta'<0$.

Nếu $\Delta'>0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm thực phân biệt. Khi đó:

$$(*)\Leftrightarrow z_1=-z_2\Leftrightarrow z_1+z_2=0.$$

Điều này không thể xảy ra do theo Định lý Vi-ét, $z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}=6\neq 0$. Vậy nếu $\Delta'>0$ ta không tìm được m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Nếu $\Delta'<0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 là hai số phức liên hợp. Khi đó hiển nhiêu ta sẽ có $|z_1|=|z_2|$.

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa (*) $\Leftrightarrow\Delta'<0\Leftrightarrow 9-m<0\Leftrightarrow m>9$.

Suy ra trong khoảng $(0;20)$ có 10 giá trị $m_0\in\mathbb{N}$.

Chọn phương án A

Câu 35. Số phức z thõa mãn điều kiện: $z+|z|=8+4i$. Tổng phần thực và ảo của số phức z là

A. 4. B. 5. C. 6. D. 7.

Lời giải.

$z+|z|=8+4i\Leftrightarrow z=8-|z|+4i$.

Lấy mô-đun hai vế ta được: $|z|=\sqrt{(8-|z|)^2+16}\Leftrightarrow |z|^2=|z|^2-16|z|+80\Leftrightarrow |z|=5$

nên $z+|z|=8+4i\Leftrightarrow z+5=8+4i\Rightarrow z=3+4i\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=4\end{cases}\Rightarrow a+b=7.$

Chọn phương án D

Câu 36. Cho số phức $z = a+bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $\left|\dfrac{z-1}{z-i}\right| = 1$ và $\left|\dfrac{z-3i}{z+i}\right| = 1$. Tính $P = a+b$.

Ⓐ $P = 7$. Ⓑ $P = -1$. Ⓒ $P = 1$. Ⓓ $P = 2$.

Lời giải.

Ta có $\left|\dfrac{z-1}{z-i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z-i| \Leftrightarrow |a-1+bi| = |a+(b-1)i| \Leftrightarrow 2a - 2b = 0$ (1).

$\left|\dfrac{z-3i}{z+i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-3i| = |z+i| \Leftrightarrow |a+(b-3)i| = |a+(b+1)i| \Leftrightarrow b = 1$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$. Vậy $P = 2$.

Chọn phương án D

Câu 37. Cho số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn phương trình $\dfrac{(|z|-1)(1+iz)}{z - \dfrac{1}{\overline{z}}} = i$. Tính $P = a + b$.

Ⓐ $P = 1 - \sqrt{2}$. Ⓑ $P = 1$. Ⓒ $P = 1 + \sqrt{2}$. Ⓓ $P = 0$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&\dfrac{(|z|-1)(1+iz)}{z - \dfrac{1}{\overline{z}}} = i \Leftrightarrow \dfrac{(|z|-1)(1+iz)\overline{z}}{z\overline{z} - 1} = i \quad (|z| \neq 1)\\
\Leftrightarrow\ & \dfrac{(|z|-1)(1+iz)\overline{z}}{|z|^2 - 1} = i \Leftrightarrow \dfrac{(1+iz)\overline{z}}{|z|+1} = i\\
\Leftrightarrow\ & \overline{z} + i|z|^2 = i(|z|+1) \Leftrightarrow a - bi + (a^2+b^2)i = i(\sqrt{a^2+b^2}+1)\\
\Leftrightarrow\ & a + (-b + a^2 + b^2)i = i(\sqrt{a^2+b^2}+1) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b^2 - b = |b| + 1 \end{cases}\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a = 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b < 0 \\ b = \pm 1 \end{cases} \quad \text{(loại)} \\ \begin{cases} b > 0 \\ b^2 - 2b - 1 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \left[\begin{array}{ll} b = 1 + \sqrt{2} & \text{(nhận)} \\ b = 1 - \sqrt{2} & \text{(loại)}. \end{array}\right. \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy $P = a + b = 1 + \sqrt{2}$.

Chọn phương án C

Câu 38. Cho số phức z. Gọi A, B lần lượt là các điểm trong mặt phẳng Oxy biểu diễn các số phức z và $(1+i)z$. Tính $|z|$ biết diện tích tam giác OAB bằng 8.

Ⓐ $|z| = 4$. Ⓑ $|z| = 2\sqrt{2}$. Ⓒ $|z| = 4\sqrt{2}$. Ⓓ $|z| = 2$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ với $z \neq 0$.

$(1+i)z = (1+i)(a+bi) = a - b + (a+b)i$.

Suy ra $A(a; b)$, $B(a-b; a+b)$, $\overrightarrow{AB} = (-b; a)$, $AB = \sqrt{a^2+b^2}$

Đường thẳng $AB : a(x-a)+b(y-b)=0 \Leftrightarrow ax+by-a^2-b^2=0$.

Chiều cao hạ từ O của tam giác OAB là $h = \mathrm{d}(O, AB) = \dfrac{\left|-a^2-b^2\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{a^2+b^2}$.

Diện tích tam giác OAB bằng 8 nên

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = 8 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}=4 \Leftrightarrow |z|=4.$$

Chọn phương án A

Câu 39. Số phức z có phần ảo lớn nhất thoả mãn $|z-1-i|=1$ là

A $z=2+2i$. B $z=1+2i$. C $z=2i$. D $z=-1+3i$.

Lời giải.

Giả sử $z=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$, theo bài ra ta có

$$|(x-1)+(y-1)i|=1 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=1.$$

Mà $(x-1)^2\ge 0$ nên $(y-1)^2\le 1 \Leftrightarrow -1\le y-1\le 1 \Leftrightarrow 0\le y\le 2$.

Vậy phần ảo của z có giá trị lớn nhất bằng 2.

Dấu bằng xảy ra khi $x=1; y=2$, hay $z=1+2i$.

Chọn phương án B

Câu 40. Tính môđun của số phức z thoả mãn $3z\cdot\bar{z}+2017\left(z-\bar{z}\right)=48-2016i$

A $|z|=4$. B $|z|=\sqrt{2016}$. C $|z|=\sqrt{2017}$. D $|z|=2$.

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi$, từ giả thiết ta có $3|z|^2=48-2016i-2b\cdot 2017i=48$ (vì $|z|^2\in\mathbb{R}$), suy ra $|z|=4$.

Chọn phương án A

Câu 41. Cho số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i)=0$ và $|z|>1$. Tính $P=a+b$.

A $P=3$. B $P=-1$. C $P=-5$. D $P=7$.

Lời giải.

Ta có $z+2+i-|z|(1+i)=0 \Leftrightarrow z=(|z|-2)+(|z|-1)\,i$.

Lấy mô-đun hai vế, ta được $|z|=\sqrt{(|z|-2)^2+(|z|-1)^2}$

$\Rightarrow |z|^2=2|z|^2-6|z|^2+5 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll}|z|=1 & \text{loại do } |z|>1\\ |z|=5 & \text{thỏa } |z|>1\end{array}\right.$.

Với $|z|=5 \Rightarrow z=(|z|-2)+(|z|-1)\,i=3+4i$.

Suy ra $a=3,\ b=4$.

Vậy $a+b=7$.

Chọn phương án D

Câu 42. Cho số phức z có phần thực là số nguyên và z thỏa mãn $|z|-2\bar{z}=-7+3i+z$. Mô-đun của số phức $w=1-z+z^2$.

A $|w|=\sqrt{37}$. B $|w|=\sqrt{425}$. C $|w|=\sqrt{457}$. D $|w|=\sqrt{445}$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi\,(a; b \in \mathbb{R})$.
Ta có:

$$\begin{aligned} & |z| - 2\overline{z} = -7 + 3i + z \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} - 2(a - bit) = -7 + 3i + a + bi \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{a^2+b^2} - 2a + 2bi = a - 7 + (b+3)i \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} 2b = b + 3 \Rightarrow b = 3 & (1) \\ \sqrt{a^2+b^2} - 2a = a - 7. & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Thay (1) vào (2) ta được $\sqrt{a^2+9} = 3a - 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 7 \geq 0 \\ a^2 + 9 = (3a-7)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \dfrac{7}{3} \\ \left[\begin{array}{l} a = 4 \\ a = \dfrac{5}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow a = 4.$

Vậy $z = 4 + 3i \Rightarrow w = 1 - z + z^2 = 4 + 21i \Rightarrow |w| = \sqrt{457}$.
Chọn phương án C

Câu 43. Gọi z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 5i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 6$. Tìm mô-đun của số phức $w = z_1 + z_2 - 6 + 10i$.

A $|w| = 10$. **B** $|w| = 32$. **C** $|w| = 16$. **D** $|w| = 8$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} w_1 = z_1 - 3 + 5i \\ w_2 = z_2 - 3 + 5i \end{cases} \Rightarrow w_1 + w_2 = z_1 + z_2 - 6 + 10i = w.$

Mà $\begin{cases} |w_1| = |w_2| = 5 \\ |w_1 - w_2| = |z_1 - z_2| = 6. \end{cases}$

Mặt khác $|w_1 + w_2|^2 + |w_1 - w_2|^2 = 2\left(|w_1|^2 + |w_2|^2\right) \Rightarrow |w_1 + w_2|^2 = 64$.
Vậy $|w| = |w_1 + w_2| = 8$.
Chọn phương án D

Câu 44. Cho số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ và $|z+2|^2 - |z-i|^2 = 33$. Môđun của số phức $z - 2 - i$ bằng

A $\sqrt{5}$. **B** 9. **C** 25. **D** 5.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

Khi đó

$$\begin{cases} |z-3-4i| = \sqrt{5} \\ |z+2|^2 - |z-i|^2 = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5 \\ (x+2)^2 + y^2 - [x^2 + (y-1)^2] = 33 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5 \\ y = 15 - 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + (11-2x)^2 = 5 \\ y = 15 - 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5. \end{cases}$$

Do đó $z = 5 + 5i \Rightarrow |z - 2 - i| = |3 + 4i| = 5$.

Chọn phương án D

Câu 45. Cho số phức $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $(z + 1 + i)(\overline{z} - i) + 3i = 9$ và $|\overline{z}| > 2$. Tính $P = a + b$.

A 2. B 1 . C -3 . D -1.

Lời giải.

Phương trình tương đương $|z|^2 - iz + (1+i)\overline{z} + 2i - 8 = 0 \quad (1)$.

Thay $z = a + bi$ vào (1) và biến đổi ta được

$$a^2 + b^2 + a + 2b - 8 + (2-b)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + a + 2b - 8 = 0 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -1 \\ b = 2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Vì $|\overline{z}| > 2$ nên ta chọn $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$. Vậy $P = a + b = 1$.

Chọn phương án B

Câu 46. Cho số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R}, a > 0)$ thỏa mãn $z \cdot \overline{z} - 12|z| + (z - \overline{z}) = 13 + 10i$. Tính $S = a + b$.

A $S = 7$. B $S = 17$. C $S = -17$. D $S = 5$.

Lời giải.

Ta có $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$ và $z - \overline{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi$. Khi đó

$$z \cdot \overline{z} - 12|z| + (z - \overline{z}) = 13 + 10i$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 12\sqrt{a^2 + b^2} + 2bi = 13 + 10i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 12\sqrt{a^2 + b^2} = 13 \\ 2b = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 12\sqrt{a^2 + 25} + 12 = 0 \quad (1) \\ b = 5. \end{cases}$$

Đặt $t = \sqrt{a^2 + 25}$ với $t \geq 25$ và $t^2 = a^2 + 25$. Phương trình (1) trở thành

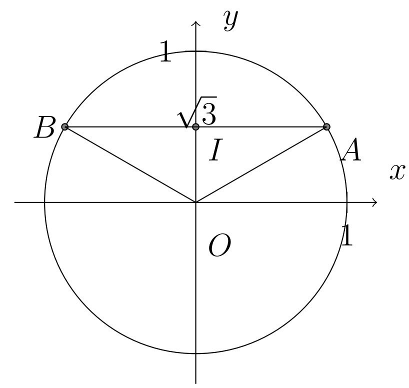
$$t^2 - 12t - 13 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = -1 & \text{(loại)} \\ t = 13. & \end{array}\right.$$

Với $t = 13 \Rightarrow \sqrt{a^2 + 25} = 13 \Leftrightarrow a^2 = 144 \Leftrightarrow a = 12$ vì $a > 0$.
Vậy $S = a + b = 12 + 5 = 17$.
Chọn phương án B

Câu 47. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|3z - i| = |3 + iz|$. Biết rằng $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$. Tính giá trị biểu thức $P = |z_1 + z_2|$.

A $P = 2\sqrt{2}$. **B** $P = \dfrac{1}{2}$. **C** $P = \dfrac{3}{2}$. **D** $P = 1$.

Lời giải.



Gọi A, B là hai điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 trong mặt phẳng tọa độ Oxy.
Gọi $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.
Ta có $|3z - i| = |3 + iz| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.
Suy ra A, B nằm trên đường tròn tâm O bán kính 1.
Từ $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$ ta có khoảng cách $AB = \sqrt{3}$.
Không mất tính tổng quát, ta vẽ hai điểm A, B đối xứng nhau qua trục tung thỏa $AB = \sqrt{3}$.
Gọi I là trung điểm AB suy ra $A = (\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1}{2})$ và $B(\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1}{2})$.
Vậy $|z_1 + z_2| = 1$.
Cách khác. $|z_1 - z_2| = \sqrt{3} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 3 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = -\dfrac{1}{2}$.
Khi đó $|z_1 + z_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) + 2(x_1x_2 + y_1y_2)} = 1$.
Chọn phương án D

Câu 48. Số phức $z = a + bi \quad (a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 2| = |z|$ và $(z + 1)(\overline{z} - i)$ là số thực. Giá trị của biểu thức $S = a + 2b$ bằng bao nhiêu?

A $S = -3$. **B** $S = 0$. **C** $S = -1$. **D** $S = 1$.

Lời giải.

$|z - 2| = |z| \Leftrightarrow \sqrt{(a - 2)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow (a - 2)^2 = a^2 \Leftrightarrow a = 1$.
$(z + 1)(\overline{z} - i) = (a + 1 + bi)(a - bi - i) = a(a + 1) + b(b + 1) - (a + b + 1)i$.
Vì $(z + 1)(\overline{z} - i)$ là số thực nên $a + b + 1 = 0 \Rightarrow b = -2$.
Vậy $S = a + 2b = -3$.
Chọn phương án A

D MỨC ĐỘ 4

Câu 49. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $2|z - i| = |z - \overline{z} + 2i|$ là

A một điểm. **B** một đường tròn. **C** một đường thẳng. **D** một Parabol.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$; $x, y \in \mathbb{R}$.
Ta có

$$\begin{aligned} & 2\left|z - i\right| = \left|z - \overline{z} + 2i\right| \\ \Leftrightarrow\ & 4\left|z - i\right|^2 = \left|z - \overline{z} + 2i\right|^2 \\ \Leftrightarrow\ & 4\left|x + yi - i\right|^2 = \left|x + yi - (x - yi) + 2i\right|^2 \\ \Leftrightarrow\ & 4\left[x^2 + (y-1)^2\right] = 4(y+1)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 4x^2 - 16y = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = 4y \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là một Parabol.
Chọn phương án (D)

Câu 50. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, tập hợp các điểm biểu biễn các số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = |\overline{z} + 1 + 2i|$ là đường thẳng có phương trình.

(A) $x - 2y + 1 = 0$. (B) $x + 2y = 0$. (C) $x - 2y = 0$. (D) $x + 2y + 1 = 0$.

Lời giải.
Đặt $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z} = x - yi$ và $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức z.
Ta có:

$$\begin{aligned} & |z - 1 + 2i| = |\overline{z} + 1 + 2i| \\ \Leftrightarrow\ & |x + yi - 1 + 2i| = |x - yi + 1 + 2i| \\ \Leftrightarrow\ & |(x-1) + (y+2)i| = |(x+1) + (2-y)i| \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (2-y)^2} \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 \\ \Leftrightarrow\ & x - 2y = 0. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu biễn các số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường thẳng có phương trình là $x - 2y = 0$.
Chọn phương án (C)

Câu 51. Xét số phức z thỏa mãn $(z + 2i)(\overline{z} + 2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn, tâm đường tròn đó có tọa độ là

(A) $(1; -1)$. (B) $(1; 1)$. (C) $(-1; 1)$. (D) $(-1; -1)$.

Lời giải.
Giả sử $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$, ta có

$$(z + 2i)(\overline{z} + 2) = [a + (b+2)i][(a+2) - bi] = [a(a+2) + b(b+2)] + [(a+2)(b+2) - ab]i.$$

$(z + 2i)(\overline{z} + 2)$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow a(a+2) + b(b+2) = 0 \Leftrightarrow (a+1)^2 + (b+1)^2 = 2$.
Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của z là một đường tròn có phương trình $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$ có tâm $I(-1; -1)$.
Chọn phương án (D)

Câu 52. Trong các số phức $(1+i)^3, (1+i)^4, (1+i)^5, (1+i)^6$ số phức nào là số thuần ảo?

Ⓐ $(1+i)^3$. Ⓑ $(1+i)^4$. Ⓒ $(1+i)^5$. Ⓓ $(1+i)^6$.

Lời giải.

Ta có $(1+i)^3 = -2+2i, (1+i)^4 = -4, (1+i)^5 = -4-4i, (1+i)^6 = -8i$

Chọn phương án Ⓓ

Câu 53. Tìm tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z biết số phức $(z-i)(2+i)$ là một số thuần ảo.

Ⓐ Đường thẳng $2x-y+1=0$. Ⓑ Đường thẳng $x+2y-2=0$.

Ⓒ Đường thẳng $2x+y-1=0$. Ⓓ Đường thẳng $2x-y-1=0$.

Lời giải.

Gọi $z = x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$.

$(z-i)(2+i) = (x+yi-i)(2+i) = (2x-y+1)+(x+2y-2)i$.

Để $(z-i)(2+i)$ là một số thuần ảo thì $2x-y+1=0$ hay tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z là đường thẳng $2x-y+1=0$.

Chọn phương án Ⓐ

Câu 54. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-3+4i|=5$ là

Ⓐ Một đường tròn. Ⓑ Một đường thẳng.

Ⓒ Một đường parabol. Ⓓ Một đường elip.

Lời giải.

Gọi $z = x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

Theo giải thiết $|z-3+4i|=5 \Leftrightarrow |(x-3)+(y+4)i|=5 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+4)^2=25$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(3;-4)$ bán kính $R=5$.

Chọn phương án Ⓐ

Câu 55. Trong các số phức z thỏa mãn: $|z-1+i| = |\overline{z}+1-2i|$, số phức z có mô đun nhỏ nhất có phần ảo là

Ⓐ $\dfrac{3}{10}$. Ⓑ $\dfrac{3}{5}$. Ⓒ $-\dfrac{3}{5}$. Ⓓ $-\dfrac{3}{10}$.

Lời giải.

Đặt $z = x+iy$ (với $x,\ y\in\mathbb{R}$ và $i^2=-1$). Khi đó,

$$\begin{aligned} & |z-1+i| = |\overline{z}+1-2i| \\ \Leftrightarrow\ & |(x-1)+i(y+1)| = |(x+1)-i(y+2)| \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)^2+(y+1)^2 = (x+1)^2+(y+2)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 4x+2y+3=0 \\ \Leftrightarrow\ & y=-2x-\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Ta có

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+\left(-2x-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{5\left(x+\frac{3}{5}\right)^2+\frac{9}{20}} \geq \sqrt{\frac{9}{20}}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = -\dfrac{3}{5} \\ y = -2x - \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{5} \\ y = -\dfrac{3}{10}. \end{cases}$

Chọn phương án D

Câu 56. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 16$, $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \int\limits_0^1 x.f'(2x)\,\mathrm{d}x$.

A) 7. B) 12. C) 20. D) 13.

Lời giải.

Đặt $t = 2x$, ta có $\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: + Với $x = 0 \Rightarrow t = 0$.

+ Với $x = 1 \Rightarrow t = 2$.

Khi đó, ta có

$$I = \frac{1}{4}\int\limits_0^2 tf'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Đặt $\begin{cases} u = t \\ \mathrm{d}v = f'(t)\,\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ v = f(t) \end{cases}$, ta có

$$\begin{aligned} & I = \frac{1}{4}\cdot 2\cdot f(2) - \frac{1}{4}\int\limits_0^2 f(t)dt \\ \Leftrightarrow\ & I = \frac{1}{2}f(2) - \frac{1}{4}\cdot 4 \\ \Leftrightarrow\ & I = 7. \end{aligned}$$

Chọn phương án A

Câu 57. Xét số phức z thỏa mãn $\dfrac{z+2}{z-2i}$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng

A) 1. B) $\sqrt{2}$. C) $2\sqrt{2}$. D) 2.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$ ta có:

$\dfrac{z+2}{z-2i} = \dfrac{(a+2)+bi}{a+(b-2i)i} = \dfrac{[(a+2)+bi]\,[a-(b-2)i]}{[a+(b-2)i]\,[a-(b-2)i]}$

$= \dfrac{(a+2)a-(a+2)(b-2)i+abi+b(b-2)}{a^2+(b-2)^2}$.

$= \dfrac{a^2+2a+b^2-2b}{a^2+(b-2)^2} - \dfrac{(a+2)\,(b-2)-ab}{a^2+(b-2)^2}i.$

Để số trên là số thuần ảo $\Rightarrow$ có phần thực bằng $0 \Rightarrow a^2+2a+b^2-2b = 0$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-1;1)$, bán kính $R = \sqrt{(-1)^2+1^2-0} = \sqrt{2}$.

Chọn phương án B

Câu 58. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 2$. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức $w = 3 - 2i + (2 - i)z$ là một đường tròn bán kính r. Tính r.

(A) $r = 7$. (B) $r = 20$. (C) $r = 2\sqrt{5}$. (D) $r = \sqrt{7}$.

Lời giải.

Ta có $w = 3 - 2i + (2 - i)z \Leftrightarrow z = \dfrac{w - 3 + 2i}{2 - i}$.

Suy ra $\Rightarrow |z| = \dfrac{|w - 3 + 2i|}{|2 - i|} \Rightarrow 2 = \dfrac{|w - 3 + 2i|}{\sqrt{5}} \Rightarrow |w - 3 + 2i| = 2\sqrt{5}$.

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(3; -2)$, bán kính $r = 2\sqrt{5}$.

Chọn phương án (C)

Câu 59. Gọi (H) là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thoả $1 \le |z - 1| \le 2$ trong mặt phẳng phức. Tính diện tích hình (H).

(A) 2π. (B) 3π. (C) 4π. (D) 5π.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$, khi đó: $1 \le |z - 1| \le 2 \Leftrightarrow 1 \le (x - 1)^2 + y^2 \le 4$, suy ra điểm biểu diễn số phức z nằm trong hình vành khuyên giới hạn bởi 2 hình tròn đồng tâm $I(1; 0)$ có bán kính lần lượt là $R_1 = 1$ và $R_2 = 2$. Từ đó suy ra diện tích hình (H) là: $S = \pi R_2^2 - \pi R_1^2 = 3\pi$.

Chọn phương án (B)

Câu 60. Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 3 - 2i + (4 - 3i)z$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

(A) $r = 5$. (B) $r = 2\sqrt{5}$. (C) $r = 10$. (D) $r = 20$.

Lời giải.

Cách 1:

Giả sử $w = x + yi \Rightarrow z = \dfrac{x + yi - 3 + 2i}{4 - 3i} = \dfrac{4x - 3y - 18}{25} + \dfrac{3x + 4y - 1}{25}i$.

Theo bài ra ta có

$$\begin{aligned}
|z| = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{(4x - 3y - 18)^2 + (3x + 4y - 1)^2}}{25} = 2 \\
&\Leftrightarrow \quad (4x - 3y - 18)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 2500 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 100 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 100.
\end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w theo yêu cầu là đường tròn có tâm $I(3, -2)$ và bán kính $r = 10$.

Cách 2:

Đặt $w = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$, ta có

$$\begin{aligned}
w = 3 - 2i + (4 - 3i)z &\Leftrightarrow w - (3 - 2i) = (4 - 3i)z \\
&\Leftrightarrow |w - (3 - 2i)| = |(4 - 3i)z| \\
&\Leftrightarrow |(x - 3) + (y + 2)i| = |4 - 3i||z| \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 2)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} \cdot 2 \\
&\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 100
\end{aligned}$$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 3 - 2i + (4 - 3i)z$ là một đường tròn có tâm $I(3, -2)$, bán kính $r = 10$.

Chọn phương án C

Câu 61. Cho số phức z thỏa $|z - 1 + 2i| = 3$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w = 2z + i$ trên mặt phẳng (Oxy) là một đường tròn. Tìm tâm của đường tròn đó.

(A) $I(2; -3)$. (B) $I(1; 1)$. (C) $I(0; 1)$. (D) $I(1; 0)$.

Lời giải.

Gọi M là điểm biểu diễn số phức w.

Ta có $w = 2z + i \Leftrightarrow z = \dfrac{w - i}{2}$.

Do đó $|z - 1 + 2i| = 3 \Leftrightarrow \left|\dfrac{w - i}{2} - 1 + 2i\right| = 3 \Leftrightarrow |w - 2 + 3i| = 6 \Leftrightarrow MI = 6$, với $I(2; -3)$.

Do đó tập hợp điểm M là đường tròn tâm $I(2; -3)$ và bán kính $R = 6$.

Chọn phương án A

Câu 62. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z + 1| = |1 - i - 2z|$ là đường tròn (C). Tính bán kính R của đường tròn (C).

(A) $R = \dfrac{10}{9}$. (B) $R = 2\sqrt{3}$. (C) $R = \dfrac{7}{3}$. (D) $R = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

Lời giải.

Gọi số phức $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

$|x + yi + 1| = |1 - i - 2(x + yi)| \Leftrightarrow \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = \sqrt{(1 - 2x)^2 + (-1 - 2y)^2} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 = 1 - 4x + 4x^2 + 1 + 4y + 4y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + \dfrac{4}{3}y + \dfrac{1}{3} = 0$.

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I\left(1; -\dfrac{2}{3}\right)$, bán kính $R = \sqrt{1 + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 - \dfrac{1}{3}} = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

Chọn phương án D

Câu 63. Cho số phức z có $|z| = 9$. Tập hợp các điểm M trong mặt phẳng tọa độ Oxy biểu diễn số phức $w = \bar{z} + 5i$ là một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

(A) 9. (B) $\dfrac{9}{5}$. (C) 3. (D) $9\sqrt{2}$.

Lời giải.

Có $w - 5i = \bar{z} \Rightarrow |w - 5i| = |\bar{z}| \Rightarrow |w - 5i| = |z| = 9$.

Giả sử $w = x + yi \Rightarrow |(x + (y - 5)i| = 9 \Leftrightarrow x^2 + (y - 5)^2 = 81$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn có bán kính bằng 9.

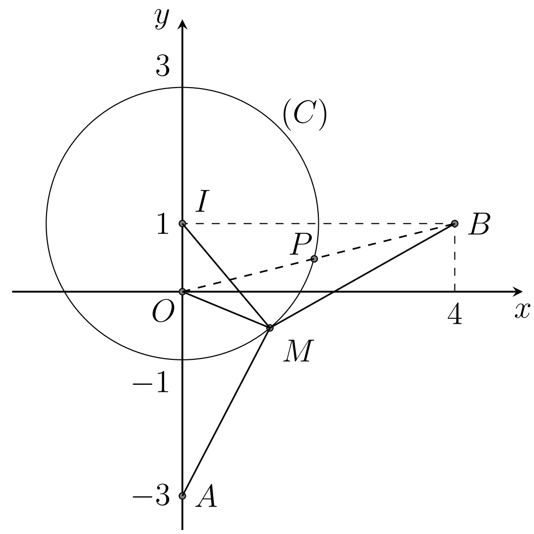
Chọn phương án A

Câu 64. Cho các số phức $z_1 = -3i$, $z_2 = 4 + i$ và z thỏa mãn $|z - i| = 2$. Biết biểu thức $T = |z - z_1| + 2|z - z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Hiệu $a - b$ bằng

(A) $\dfrac{3 - 6\sqrt{13}}{17}$. (B) $\dfrac{6\sqrt{13} - 3}{17}$. (C) $\dfrac{3 + 6\sqrt{13}}{17}$. (D) $-\dfrac{3 + 6\sqrt{13}}{17}$.

Lời giải.

— Trong mặt phẳng Oxy, điểm $A(0;-3)$ biểu diễn số phức $z_1 = -3i$; điểm $B(4;1)$ biểu diễn số phức $z_2 = 4+i$.
Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z. Giả thiết $|z-i| = 2 \Rightarrow$ tập hợp điểm M là đường tròn (C) tâm $I(0;1)$, bán kính $R = 2$.
Ta có $T = |z-z_1| + 2|z-z_2| = AM + 2BM$.
Trong mặt phẳng Oxy, ta sẽ tìm vị trí điểm D sao cho khi M di chuyển trên đường tròn (C) ta luôn có $AM = 2DM$.



— Nhận thấy $IA = 4 = 2R$, nên trên tia IA lấy điểm D sao cho $ID = \dfrac{1}{2}R \Rightarrow D \equiv O$.
Khi đó $IO.IA = R^2 = IM^2 \Rightarrow \triangle IAM \backsim \triangle IMO \Rightarrow \dfrac{AM}{MO} = \dfrac{IM}{IO} = 2$.
Suy ra $T = 2(OM + BM) \geqslant 2OB$.
Do đó, $T_{\min} = 2OB$ khi O, M, B thẳng hàng theo thứ tự đó, hay $M \equiv P$ (như hình vẽ).
Phương trình đường thẳng $OB\colon x - 4y = 0$. Ta có $P \in OB \Rightarrow P(4t;t)$ (với $t > 0$).
$P \in (C)\colon x^2 + (y-1)^2 = 4 \Rightarrow (4t)^2 + (t-1)^2 = 4 \Leftrightarrow 17t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1+2\sqrt{13}}{17}$.
$\Rightarrow M\left(\dfrac{4+8\sqrt{13}}{17}; \dfrac{1+2\sqrt{13}}{17}\right)$. Vậy $a - b = \dfrac{3+6\sqrt{13}}{17}$.

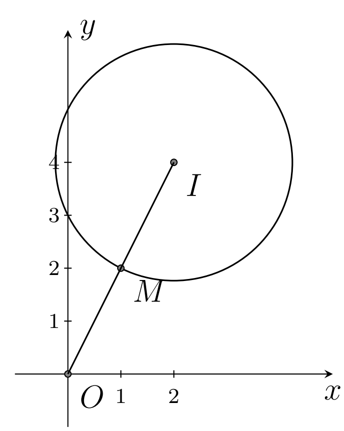
Chọn phương án C

Câu 65. Trong mặt phẳng tọa độ, hãy tìm số phức z có môđun nhỏ nhất, biết rằng số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i| = \sqrt{5}$.

A $z = -1-2i$. **B** $z = 1-2i$. **C** $z = -1+2i$. **D** $z = 1+2i$.

Lời giải.

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(2;4)$, bán kính $R = \sqrt{5}$. Đường thẳng qua gốc tọa độ và tâm I cắt đường tròn tại hai điểm, trong đó điểm $M(1;2)$ nằm giữa O và I nên số phức z thỏa mãn yêu cầu đề bài là $z = 1+2i$.



Chọn phương án D

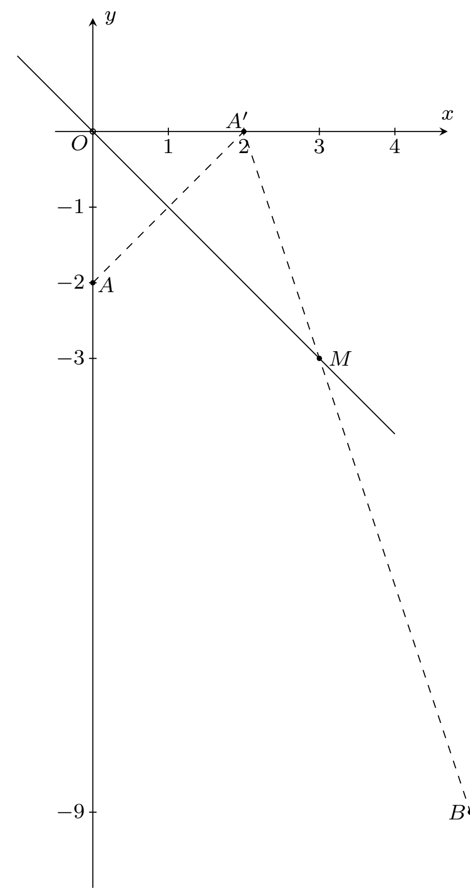
Câu 66. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2i| = |z+2|$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+2i| + |z-5+9i|$.

A $\sqrt{70}$. **B** $4\sqrt{5}$. **C** $\sqrt{74}$. **D** $3\sqrt{10}$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} & |z - 2i| = |z + 2| \\ \Leftrightarrow\ & |(x + yi) - 2i| = |x + yi + 2| \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + (y - 2)^2 = (x + 2)^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow\ & x + y = 0. \end{aligned}$$



$P = |z + 2i| + |z - 5 + 9i| = |z - (-2i)| + |z - (5 - 9i)|$.

Xét $A(0; -2)$, $B(5; -9)$. Bài toán trở thành cho điểm $M(x; y)$ thuộc đường thẳng $x + y = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $MA + MB$.

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua đường thẳng $x + y = 0 \Rightarrow A'(2; 0) \Rightarrow \overrightarrow{A'B} = (3; -9) \Rightarrow A'B = 3\sqrt{10}$.

$MA + MB = MA' + MB \geq A'B$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $3\sqrt{10}$.

Chọn phương án D

Câu 67. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1 - 2i| + |\overline{z} - 3| = \left|\sqrt{7} + 3i\right|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = |z - 2 - i|$.

A $P = 2$. **B** $P = \sqrt{2}$. **C** $P = \sqrt{3}$. **D** $P = 3$.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} 4 = \left|\sqrt{7} + 3i\right| &= |z - 1 - 2i| + |\overline{z} - 3| \\ &= \sqrt{(a-1)^2 + (b-2)^2} + \sqrt{(a-3)^2 + b^2} \\ &= \frac{1}{2}\left(2\sqrt{(a-1)^2 + (b-2)^2}\right) + \frac{1}{2}\left(2\sqrt{(a-3)^2 + b^2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{4 + (a-1)^2 + (b-2)^2}{2} + \frac{4 + (a-3)^2 + b^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[(a-2)^2 + (b-1)^2 + 6\right] = \frac{1}{2}\left(P^2 + 6\right) \\ &\Rightarrow P \geq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}2=\sqrt{(a-1)^2+(b-2)^2}\\2=\sqrt{(a-3)^2+b^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4=(a-1)^2+(b-2)^2\\(a-1)^2+(b-2)^2=(a-3)^2+b^2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}\\\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}\end{array}\right..$$

Ta cũng có thể tìm giá trị lớn nhất của P. Ta có

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2=(ad-bc)^2\geq 0\Rightarrow\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\geq ac+bd.$$

Ta đi chứng minh bất đẳng thức

$$\begin{aligned}&\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\\\Leftrightarrow&a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\geq(a+c)^2+(b+d)^2\\\Leftrightarrow&\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\geq ac+bd\text{(luôn đúng, xem chứng minh trên)}.\end{aligned}$$

Gọi $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned}4=\left|\sqrt{7}+3i\right|&=|z-1-2i|+|\overline{z}-3|\\&=|z-1-2i|+|z-3|\\&\geq\sqrt{(a-1)^2+(b-2)^2}+\sqrt{(a-3)^2+b^2}\\&\geq\sqrt{(a-1+a-3)^2+(b-2+b)^2}\\&=2\sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2}=2\,|z-2-i|=2P.\end{aligned}$$

Từ đây suy ra $P\leq 2$.

Chọn phương án B

Câu 68. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$. Tính mô-đun của số phức $w=M+mi$.

A $|w|=\sqrt{2315}$. **B** $|w|=\sqrt{1258}$. **C** $|w|=3\sqrt{137}$. **D** $|w|=2\sqrt{309}$.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có $P=(x+2)^2+y^2-\left[x^2+(y-1)^2\right]=4x+2y+3$.

Mặt khác $|z-3-4i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-4)^2=5$.

Đặt $x=3+\sqrt{5}\sin t$ và $y=4+\sqrt{5}\cos t$ thỏa $(x-3)^2+(y-4)^2=5$.

Suy ra $P=4\sqrt{5}\sin t+2\sqrt{5}\cos t+23$.

Xét hàm số $f(t)=4\sqrt{5}\sin t+2\sqrt{5}\cos t$.

Chia cả hai vế cho $\sqrt{\left(4\sqrt{5}\right)^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2}=10$ ta có

$$f(t)=4\sqrt{5}\sin t+2\sqrt{5}\cos t\Leftrightarrow\frac{f(t)}{10}=\frac{2\sqrt{5}}{5}\sin t+\frac{\sqrt{5}}{5}\cos t.$$

Đặt $\begin{cases} \cos u = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \\ \sin u = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$ ta có

$$\frac{f(t)}{10} = \cos u \sin t + \sin u \cos t \Leftrightarrow \frac{f(t)}{10} = \sin(t+u)$$

Suy ra

$$-1 \leq \frac{f(t)}{10} \leq 1 \Rightarrow -10 \leq f(t) \leq 10 \Rightarrow 13 \leq P \leq 33.$$

Vậy $M = \max P = 33$ và $m = \min P = 13$.

Khi đó $w = 33 + 13i$. Do đó $|w| = \sqrt{33^2 + 13^2} = \sqrt{1258}$.

Chọn phương án B

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. B	3. A	4. B	5. C	6. A	7. D	8. C	9. A	10. D
11. A	12. A	13. A	14. D	15. A	16. A	17. C	18. D	19. D	20. B
21. A	22. A	23. A	24. D	25. D	26. C	27. C	28. D	29. D	30. B
31. A	32. C	33. D	34. A	35. D	36. D	37. C	38. A	39. B	40. A
41. D	42. C	43. D	44. D	45. B	46. B	47. D	48. A	49. D	50. C
51. D	52. D	53. A	54. A	55. D	56. A	57. B	58. C	59. B	60. C
61. A	62. D	63. A	64. C	65. D	66. D	67. B	68. B		

DẠNG 36. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN NGHIỆM CỦA SỐ PHỨC

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Gọi z_0 là nghiệm có phần ảo âm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Môđun của số phức $z_0 + i$ bằng

(A) 2. (B) $\sqrt{2}$. (C) $\sqrt{10}$. (D) 10.

Lời giải.

Ta có: $z^2 - 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2z = 1 = -4 \Leftrightarrow (z-1)^2 = 4i^2 \left[\begin{array}{l} z = 1 - 2i \\ z = 1 + 2i \end{array}\right.$.

Vì z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm nên $z_0 = 1 - 2i \Rightarrow z_0 + i = 1 - 2i + i = 1 - i$.

Suy ra $|z_0 + i| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

Chọn phương án (B)

Câu 1. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 3z + 5 = 0$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng

(A) $2\sqrt{5}$. (B) 3. (C) $\sqrt{5}$. (D) 10.

Lời giải.

Phương trình $z^2 - 3z + 5 = 0$ có hai nghiệm là $z_1 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{11}}{2}i$; $z_2 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{11}}{2}i$.

Do đó $|z_1| + |z_2| = 2 \cdot \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{11}}{2}\right)^2} = 2\sqrt{5}$.

Chọn phương án (A)

Câu 2. Kí hiệu $z_1; z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2 - z + 1 = 0$. Tính $P = |z_1| + |z_2|$.

(A) $P = \dfrac{\sqrt{14}}{3}$. (B) $P = \dfrac{2}{3}$. (C) $P = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (D) $P = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $3z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{1 - i\sqrt{11}}{6} \\ z_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{11}}{6} \end{array}\right.$.

Do đó $P = |z_1| + |z_2| = 2\sqrt{\left(\dfrac{1}{6}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{11}}{6}\right)^2} = 2\sqrt{\dfrac{1}{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Chọn phương án (D)

Câu 3. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2 - z + 2 = 0$. Tính $T = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

(A) $T = \dfrac{2}{3}$. (B) $T = \dfrac{8}{3}$. (C) $T = \dfrac{4}{3}$. (D) $T = -\dfrac{11}{9}$.

Lời giải.

Ta có $3z^2 - z + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{1+\sqrt{23}i}{6} \Rightarrow |z_1|^2 = \dfrac{2}{3} \\ z_2 = \dfrac{1-\sqrt{23}i}{6} \Rightarrow |z_2|^2 = \dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$

Vậy $T = |z_1|^2 + |z_2|^2 = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$.

Chọn phương án C

Câu 4. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$.

A $1 + 2i; 1 - 2i$. **B** $1 + i; 1 - i$. **C** $-1 + 2i; -1 - 2i$. **D** $-1 + i; -1 - i$.

Lời giải.

Có $\Delta = -16 = (4i)^2$, suy ra nghiệm pt là $z_1 = -1 + 2i; z_2 = -1 - 2i$.

Chọn phương án C

Câu 5. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $4z^2 - 16z + 17 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = iz_0$?

A $M_2\left(-\dfrac{1}{2}; 2\right)$. **B** $M_1\left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$. **C** $M_3\left(-\dfrac{1}{4}; 1\right)$. **D** $M_4\left(\dfrac{1}{4}; 1\right)$.

Lời giải.

- Phương trình đã cho có 2 nghiệm $2 + \dfrac{1}{2}i$ và $2 - \dfrac{1}{2}i$. Do đó $z_0 = 2 + \dfrac{1}{2}i$.
- $w = iz_0 = -\dfrac{1}{2} + 2i \Rightarrow M\left(-\dfrac{1}{2}; 2\right)$.

Chọn phương án A

Câu 6. Tìm số phức z có phần ảo dương thỏa $z^2 - 2z + 10 = 0$.

A $z = 1 + 3i$. **B** $z = -1 + 3i$. **C** $z = 2 + 6i$. **D** $z = -2 + 6i$.

Lời giải.

Ta có $\Delta' = -9$. Phương trình đã cho có các nghiệm phức là $z = 1 \pm 3i$. Do đó, nghiệm phức có phần ảo dương là $z = 1 + 3i$.

Chọn phương án A

Câu 7. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 2 = 0$. Tính $|z_1|^2 + |z_2|^2$.

A 4. **B** $\dfrac{4}{3}$. **C** $\dfrac{8}{3}$. **D** 8.

Lời giải.

Ta có $z^2 - z + 2 = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{1 \pm \sqrt{7}i}{2} \Rightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 = 4$.

Chọn phương án A

Câu 8. Giải phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$ trên tập số phức ta được các nghiệm

A $-2 + \mathrm{i},\ -2 - \mathrm{i}$. **B** $2 + \mathrm{i},\ 2 - \mathrm{i}$. **C** $4 + \mathrm{i},\ 4 - \mathrm{i}$. **D** $-4 + \mathrm{i},\ -4 - \mathrm{i}$.

Lời giải.

Ta có biệt thức $\delta = 4^2 - 4 \cdot 5 = -4$, có hai căn bậc hai là $\pm 2\mathrm{i}$.

Phương trình có hai nghiệm là $z = \dfrac{4 + 2\mathrm{i}}{2} = 2 + \mathrm{i}$ và $z = \dfrac{4 - 2\mathrm{i}}{2} = 2 - \mathrm{i}$.

Chọn phương án B

Câu 9. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $z^2+z+1=0$ trên tập số phức. Số tập con của S là

Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ 0. Ⓓ 4.

Lời giải.

$z^2+z+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}\right.$.

Do đó tập nghiệm $S=\left\{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i;-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.

Vậy số tập con của S là $2^2=4$.

Chọn phương án Ⓓ

Câu 10. Giải phương trình $z^2+2z+2=0$ trên tập hợp số phức, ta có tập nghiệm S là

Ⓐ $S=\{1-i;1+i\}$. Ⓑ $S=\{1-i;-1+i\}$.

Ⓒ $S=\{-1-i;-1+i\}$. Ⓓ $S=\{-1-i;1+i\}$.

Lời giải.

$z^2+2z+2=0$ có $\Delta=2^2-4\cdot1\cdot2=-4<0$ nên phương tình có hai nghiệm phức

$$z_1=-1+i \text{ và } -1-i.$$

Vậy $S=\{-1-i;-1+i\}$.

Chọn phương án Ⓒ

Câu 11. Tập nghiệm của phương trình $x^2+9=0$ trên tập hợp số phức là tập hợp nào sau đây?

Ⓐ $\varnothing$. Ⓑ $\{-3;3\}$. Ⓒ $\{0;3\}$. Ⓓ $\{-3i,3i\}$.

Lời giải.

Ta có $x^2+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3i \\ x=-3i. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm phương trình là $S=\{-3i;3i\}$.

Chọn phương án Ⓓ

Câu 12. Biết phương trình $z^2+az+b=0$ $(a,b\in\mathbb{R})$ có nghiệm $z=-2+i$. Tính $a+b$.

Ⓐ 4. Ⓑ 9. Ⓒ -1. Ⓓ 1.

Lời giải.

Ta có $(-2+i)^2+a(-2+i)+b=0 \Leftrightarrow (a-4)i+(b+3-2a)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow a+b=9.$

Chọn phương án Ⓑ

Câu 13. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2+2z+3=0$. Tọa độ điểm M biểu diễn số phức z_1 là

Ⓐ $M\left(-1;-\sqrt{2}\right)$. Ⓑ $M(-1;2)$. Ⓒ $M(-1;-2)$. Ⓓ $M\left(-1;-\sqrt{2}i\right)$.

Lời giải.

Phương trình $z^2+2z+3=0$ có hai nghiệm là $z_1=-1-\sqrt{2}i$ và $z_2=-1+\sqrt{2}i$ nên $M\left(-1;-\sqrt{2}\right)$.

Chọn phương án Ⓐ

Câu 14. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+4z+7=0$. Khi đó $|z_1|^2+|z_2|^2$ bằng

(A) 7. (B) 10. (C) 14. (D) 21.

Lời giải.

Ta có $z^2+4z+7=0 \Leftrightarrow z=-2+i\sqrt{3} \vee z=-2-i\sqrt{3}$ nên $|z_1|^2+|z_2|^2=14$.

Chọn phương án (C)

Câu 15. Nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2-z+1=0$ là $z=a+bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Tính $a+\sqrt{3}b$.

(A) -2. (B) 1. (C) 2. (D) -1.

Lời giải.

$$z^2-z+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}\right. \Rightarrow a=\frac{1}{2}; b=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a+\sqrt{3}b=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2.$$

Chọn phương án (C)

Câu 16. Cho phương trình $z^2-6z+10=0$. Một nghiệm phức của phương trình đã cho là

(A) $z=2+3i$. (B) $z=5-4i$. (C) $z=1+i$. (D) $z=3-i$.

Lời giải.

$$z^2-6z+10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=3+i \\ z=3-i. \end{array}\right.$$

Chọn phương án (D)

Câu 17. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $2z^2-6z+5=0$. Số phức iz_0 bằng

(A) $-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$. (B) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$. (C) $-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$. (D) $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$.

Lời giải.

Ta có $2z^2-6z+5=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{3\pm i}{2}$.

Do đó $z_0=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i \Rightarrow iz_0=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$.

Chọn phương án (B)

Câu 18. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2+2z+5=0$. Tính $M=\left|z_1^2\right|+\left|z_2^2\right|$.

(A) $M=2\sqrt{34}$. (B) $M=4\sqrt{5}$. (C) $M=12$. (D) $M=10$.

Lời giải.

Phương trình $z^2+2z+5=0$ có hai nghiệm $z_1=-1-2i$ và $z_2=-1+2i$. Do đó

$$M=\left|z_1^2\right|+\left|z_2^2\right|=|-1-2i|^2+|-1+2i|^2=5+5=10.$$

Chọn phương án (D)

Câu 19. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2+2z+5=0$. Tính $M=|z_1|^2+|z_2|^2$.

(A) $M=2\sqrt{34}$. (B) $M=4\sqrt{5}$. (C) $M=12$. (D) $M=10$.

Lời giải.

Ta có z_1 và z_2 là hai số phức liên hợp của nhau và $z_1z_2 = 5$ nên

$$M = |z_1|^2 + |z_2|^2 = z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 = z_1z_2 + z_2z_1 = 2z_1z_2 = 2 \cdot 5 = 10.$$

Vậy $M = 10$.

Chọn phương án D

Câu 20. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Tính $P = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

A 10. **B** 5. **C** 12. **D** 14.

Lời giải.

Phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} z_1 = 1 + 2\mathrm{i} \\ z_2 = 1 - 2\mathrm{i}. \end{array}\right.$

Vậy $P = |z_1|^2 + |z_2|^2 = |1 + 2\mathrm{i}|^2 + |1 - 2\mathrm{i}|^2 = 10$.

Chọn phương án A

B MỨC ĐỘ 2

Câu 21. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 3z + 5 = 0$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng

A $2\sqrt{5}$. **B** $\sqrt{5}$. **C** 3. **D** 10.

Lời giải.

$$z^2 - 3z + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \dfrac{3 + \sqrt{11}i}{2} \\ z = \dfrac{3 - \sqrt{11}i}{2} \end{array}\right. \Rightarrow |z_1| = |z_2| = \sqrt{5} \Rightarrow |z_1| + |z_2| = 2\sqrt{5}.$$

Chọn phương án A

Câu 22. Cho số thực $a > 2$ và gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + a = 0$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A $z_1 + z_2$ là số thực. **B** $z_1 - z_2$ là số ảo. **C** $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$ là số ảo. **D** $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$ là số thực.

Lời giải.

Xét phương trình $z^2 - 2z + a = 0$. Ta có $\Delta' = 1 - a < 0$ ($\forall a > 2$).

Nên phương trình có 2 nghiệm phức là: $z_1 = 1 + \sqrt{a-1}i$; $z_2 = 1 - \sqrt{a-1}i$ (không làm mất tính tổng quát).

Ta có

— $z_1 + z_2 = 1 + \sqrt{a} - 1i + 1 - \sqrt{a} - 1i = 2$ là một số thực nên A đúng.

— $z_1 - z_2 = (1 + \sqrt{a-1}i) - (1 - \sqrt{a-1}i) = 2\sqrt{a-1}$ là một số ảo (với $\forall a > 2$) nên B đúng.

— $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{1 + \sqrt{a-1}i}{1 - \sqrt{a-1}i} + \dfrac{1 - \sqrt{a-1}}{1 + \sqrt{a-1}i} = \dfrac{4 - 2a}{a}$ là một số ảo (với $\forall a > 2$) nên C sai.

Chọn phương án C

Câu 23. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 3z + 5 = 0$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng

(A) $2\sqrt{5}$. (B) $\sqrt{5}$. (C) 3. (D) 10.

Lời giải.

$$z^2 - 3z + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \dfrac{3+\sqrt{11}i}{2} \\ z = \dfrac{3-\sqrt{11}i}{2} \end{array}\right. \Rightarrow |z_1| = |z_2| = \sqrt{5} \Rightarrow |z_1| + |z_2| = 2\sqrt{5}.$$

Chọn phương án (A)

Câu 24. Tìm nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 - z + 1 = 0$.

(A) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. (B) $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. (C) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. (D) $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Lời giải.

Vì phương trình $z^2 - z + 1 = 0$ có hai nghiệm phức là $\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ nên nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình là $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Chọn phương án (A)

Câu 25. Tìm phần thực của số phức $z_1^2 + z_2^2$, biết z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$.

(A) 4. (B) 6. (C) 8. (D) 5.

Lời giải.

$$z^2 - 4z + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2 + i \\ z = 2 - i \end{array}\right..$$

Vậy $z_1^2 + z_2^2 = 6$.

Chọn phương án (B)

Câu 26. Gọi z_1 và z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 1 = 0$. Giá trị của biểu thức $|z_1| + |z_2|$ bằng

(A) $2\sqrt{3}$. (B) 2. (C) $3\sqrt{2}$. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \\ z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \end{array}\right..$

Khi đó, $|z_1| + |z_2| = 2$.

Chọn phương án (B)

Câu 27. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 6z + 13 = 0$. Trong đó z_1 là số phức có phần ảo âm. Tìm số phức $w = z_1 + 2z_2$.

(A) $w = 9 + 2i$. (B) $w = -9 + 2i$. (C) $w = -9 - 2i$. (D) $w = 9 - 2i$.

Lời giải.

Phương trình $z^2 + 6z + 13 = 0$ có nghiệm là $z_1 = -3 - 2i, z_2 = -3 + 2i$

Suy ra $w = z_1 + 2z_2 = -9 + 2i$.

Chọn phương án B

Câu 28. Biết phương trình $z^2 + az + b = 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$ có một nghiệm phức là $z_0 = 1 + 2i$, tìm a, b.

A $\left[\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 5 \end{array}\right.$. **B** $\begin{cases} a = -2 \\ b = 5 \end{cases}$. **C** $\left[\begin{array}{l} a = 5 \\ b = -2 \end{array}\right.$. **D** $\begin{cases} a = 5 \\ b = -2 \end{cases}$.

Lời giải.

Nhận xét: Phương trình bậc 2 luôn có 2 nghiệm phức liên hợp.

Do đó, 2 nghiệm của phương trình đã cho là $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 1 - 2i$.

Ta có $\begin{cases} z_1 + z_2 = -a \\ z_1.z_2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 5 \end{cases}$

Chọn phương án B

Câu 29. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $5z^2 - 8z + 5 = 0$. Tính $S = |z_1| + |z_2| + z_1z_2$.

A $S = 3$. **B** $S = 15$. **C** $S = \dfrac{13}{5}$. **D** $S = -\dfrac{3}{5}$.

Lời giải.

Ta có phương trình $5z^2 - 8z + 5 = 0$ có hai nghiệm là $z_1 = \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}i$ và $z_2 = \dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{5}i \Rightarrow S = |z_1| + |z_2| + z_1z_2 = 3$.

Chọn phương án A

Câu 30. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 4z + 9 = 0$. Tính $P = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}$.

A $P = -\dfrac{4}{9}$. **B** $P = \dfrac{4}{9}$. **C** $P = \dfrac{9}{4}$. **D** $P = -\dfrac{9}{4}$.

Lời giải.

Phương trình $2z^2 - 4z + 9 = 0$ có hai nghiệm $z_1 = 1 + \dfrac{\sqrt{14}}{2}i$, $z_2 = 1 - \dfrac{\sqrt{14}}{2}i$.

Vậy $P = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{\sqrt{14}}{2}i} + \dfrac{1}{1 - \dfrac{\sqrt{14}}{2}i} = \dfrac{4}{9}$.

Chọn phương án B

Câu 31. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 7 = 0$. Biết $z_1 - z_2$ có phần ảo là số thực âm. Tìm phần thực của số phức $w = 2z_1^2 - z_2^2$.

A $6\sqrt{6}$. **B** $-6\sqrt{6}$. **C** 5. **D** -5.

Lời giải.

Phương trình $z^2 - 2z + 7 = 0$ có nghiệm là $1 + \sqrt{6}i$ và $1 - \sqrt{6}i$. Do $z_1 - z_2$ có phần ảo là số thực âm nên $z_1 = 1 - \sqrt{6}i$ và $z_2 = 1 + \sqrt{6}i$. Suy ra $w = 2(1 - \sqrt{6}i)^2 - (1 + \sqrt{6}i)^2 = -5 - 6\sqrt{6}i$.

Vậy phần thực của w bằng -5.

Chọn phương án D

Câu 32. Kí hiệu z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 6z + 10 = 0$ (z_1 có phần ảo là số âm). Tìm số phức liên hợp của số phức $w = 3z_1^2 - 2z_2^2 + 1$.

A $\overline{w} = 9 + 30i$. **B** $\overline{w} = 9 - 30i$. **C** $\overline{w} = 9 - 10i$. **D** $\overline{w} = 30 - 9i$.

Lời giải.
Phương trình $z^2-6z+10=0$ có các nghiệm $z_1=3-i$, $z_2=3+i$.
Ta có $w=3z_1^2-2z_2^2+1=3(3-i)^2-2(3+i)^2+1=9-30i$. Từ đó có $\overline{w}=9+30i$.
Chọn phương án A

Câu 33. Cho phương trình $z^2+bz+c=0$ với $b,c\in\mathbb{R}$. Xác định b và c nếu phương trình nhận $z=1-3i$ làm một nghiệm.

A. $b=-2, c=10$. B. $b=6, c=10$. C. $b=-6, c=-10$. D. $b=-6, c=10$.

Lời giải.
Thay $z=1-3i$ vào phương trình, ta có

$$(1-3i)^2+b(1-3i)+c=0 \Leftrightarrow \begin{cases}3b+6=0\\ b+c-8=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-2\\ c=10\end{cases}.$$

Chọn phương án A

Câu 34. Gọi z_1 và z_2 lần lượt là nghiệm của phương trình: $z^2-2z+5=0$. Tính $P=|z_1|+|z_2|$.

A. $2\sqrt{5}$. B. 10. C. 3. D. 6.

Lời giải.
Ta có: $z^2-2z+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z_1=1+2i\\ z_2=1-2i.\end{array}\right.$
Khi đó $P=|z_1|+|z_2|=\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$.
Chọn phương án A

Câu 35. Gọi z_1 và z_2 lần lượt là nghiệm của phươngtrình: $z^2-2z+5=0$. Tính $P=|z_1|^2+|z_2|^2$.

A. $P=2\sqrt{5}$. B. $P=20$. C. $P=10$. D. $P=\sqrt{5}$.

Lời giải.
Ta có $z^2-2z+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z=1-2i\\ z=1+2i\end{array}\right.$. Khi đó, $P=|z_1|^2+|z_2|^2=2\sqrt{5}$.
Chọn phương án A

Câu 36. Cho $z=2+3i$ là một số phức. Hãy tìm một phương trình bậc hai với hệ số thực nhận z và $\overline{z}$ làm nghiệm.

A. $z^2+4z+13=0$. B. $z^2-4z+12=0$. C. $z^2+4z+12=0$. D. $z^2-4z+13=0$.

Lời giải.
Phương trình bậc hai nhận $z=2+3i$ và $\overline{z}=2-3i$ làm nghiệm có dạng

$$(z-2-3i)(z-2+3i)=0 \Leftrightarrow z^2-4z+13=0.$$

Chọn phương án D

Câu 37. Tìm tất cả các nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $(z^2+9)(z^2-z+1)=0$.

A. $z=-3i$. B. $z=-3i; z=\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

C. $z=-3i; z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. D. $z=-2i; z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Lời giải.

$(z^2+9)(z^2-z+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\pm 3i \\ z=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}. \end{array}\right.$

Các nghiệm phức có phần ảo âm là $z=-3i; z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Chọn phương án C

Câu 38. Gọi z_1, z_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình $2z^2-2z+5=0$. Tính $A=|z_1|+|z_2|$.

(A) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$. (B) $2\sqrt{5}$. (C) 1. (D) $\sqrt{10}$.

Lời giải.

$\Delta'=1-10=-9$. Phương trình có hai nghiệm phức $z_1=\dfrac{1+3i}{2}$, $z_2=\dfrac{1-3i}{2}$.

$A=\left|\dfrac{1+3i}{2}\right|+\left|\dfrac{1-3i}{2}\right|=\sqrt{10}$.

Chọn phương án D

Câu 39. Phương trình bậc hai nào dưới đây nhận hai số phức $2-3i$ và $2+3i$ làm nghiệm ?

(A) $z^2+4z+13=0$. (B) $z^2+4z+3=0$. (C) $z^2-4z+13=0$. (D) $z^2-4z+3=0$.

Lời giải.

Đặt $z_1=2-3i$; $z_2=2+3i$. Khi đó

$S=z_1+z_2=4$; $P=z_1\cdot z_2=(2-3i)(2+3i)=4+9=13$.

Do đó z_1 và z_2 là nghiệm của phương trình: $z^2-Sz+P=0$ hay $z^2-4z+13=0$.

Vậy $z^2-4z+13=0$ là phương trình cần tìm.

Chọn phương án C

Câu 40. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-z+3=0$. Tính $P=\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}$.

(A) $P=\dfrac{1}{6}$. (B) $P=\dfrac{1}{3}$. (C) $P=3$. (D) $P=-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $z^2-z+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{11}}{2}i \\ z_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{11}}{2}i. \end{array}\right.$

Vậy $P=\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}=\dfrac{1}{3}$.

Cách khác: Ta có $z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}=1$, $z_1\cdot z_2=\dfrac{c}{a}=3$. Khi đó $P=\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}=\dfrac{z_1+z_2}{z_1\cdot z_2}=\dfrac{1}{3}$.

Chọn phương án B

C MỨC ĐỘ 3

Câu 41. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-z+1=0$. Tính giá trị $P=\dfrac{1}{|z_1|}+\dfrac{1}{|z_2|}$.

(A) $P=0$. (B) $P=4$. (C) $P=2$. (D) $P=1$.

Lời giải.

Giải phương trình $z^2 - z + 1 = 0$ được hai nghiệm là $z_{1,2} = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.
Do đó $|z_1| = |z_2| = 1$. Vậy $P = 2$.
Chọn phương án C

Câu 42. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 + 2z + 3 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào sau đây là điểm biểu diễn số phức z_1?

A $P(-1; -\sqrt{2}i)$. **B** $Q(-1; \sqrt{2}i)$. **C** $N(-1; \sqrt{2})$. **D** $M(-1; -\sqrt{2})$.

Lời giải.

Ta có $z^2 + 2z + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -1 + \sqrt{2}i \\ z = -1 - \sqrt{2}i \end{array}\right.$. Vì z_1 có phần ảo âm nên $z_1 = -1 - \sqrt{2}i$.
Vậy điểm biểu diễn số phức z_1 là điểm $M(-1; -\sqrt{2})$.
Chọn phương án D

Câu 43. Cho a, b là các số thực thỏa phương trình $z^2 + az + b = 0$ có nghiệm $3 - 2i$, tính $S = a + b$.

A $S = 19$. **B** $S = -7$. **C** $S = 7$. **D** $S = -19$.

Lời giải.

Thay $z = 3 - 2i$ vào phương trình $z^2 + az + b = 0$ ta được phương trình

$$\begin{aligned} & (3-2i)^2 + a(3-2i) + b = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 9 - 4 + 3a + b = 0 \\ -12 - 2a = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a = -6 \\ b = 13 \end{cases}. \end{aligned}$$

Khi đó $S = a + b = -6 + 13 = 7$.
Chọn phương án C

Câu 44. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 3z + 3 = 0$ trên tập $\mathbb{C}$. Tính $T = |z_1| + |z_2|$.

A $2\sqrt{3}$. **B** $2\sqrt{5}$. **C** 6. **D** $3\sqrt{2}$.

Lời giải.

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 3 = -3 = \left(\pm\sqrt{3}i\right)^2$.

Phương trình $z^2 + 3z + 3 = 0$ có nghiệm $\left[\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{3 - \sqrt{3}i}{2} \\ z_2 = \dfrac{3 + \sqrt{3}i}{2} \end{array}\right.$.

$T = |z_1| + |z_2| = \left|\dfrac{3 - \sqrt{3}i}{2}\right| + \left|\dfrac{3 + \sqrt{3}i}{2}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 2\sqrt{3}$.

Chọn phương án A

Câu 45. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 + 4z + 5 = 0$. Đặt $w = (1 + z_1)^{100} + (1 + z_2)^{100}$. Khi đó

A $w = 2^{50}i$. **B** $w = -2^{51}$. **C** $w = 2^{51}$. **D** $w = -2^{50}i$.

Lời giải.

Có $z^2+4z+5=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1=-2+i \\ z_2=-2-i. \end{cases}$

$$\begin{aligned} w &= (1+z_1)^{100}+(1+z_2)^{100}=(-1+i)^{100}=(1+i)^{100} \\ &= \left((1-i)^2\right)^{50}+\left((1+i)^2\right)^{50} \\ &= (-2i)^{50}+(2i)^{50}=-2^{50}-2^{50}=-2^{51}. \end{aligned}$$

Chọn phương án B

Câu 46. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+4z+29=0$. Tính giá trị biểu thức $|z_1|^4+|z_2|^4$.

A 1682. B 58. C 841. D 1282.

Lời giải.

Ta có $\Delta=4^2-4\cdot1\cdot29=-112$.

Suy ra 2 nghiệm của phương trình là $z_1=-2+5i$ và $z_2=-2-5i$ nên $|z_1|=|z_2|=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$.

Khi đó $|z_1|^4+|z_2|^4=1682$.

Chọn phương án A

Câu 47. Cho hai số phức z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2-6z+13=0$. Khi đó $|z_1|+|z_2|$ bằng

A $3\sqrt{2}$. B $2\sqrt{3}$. C $\sqrt{13}$. D $2\sqrt{13}$.

Lời giải.

Ta có $z^2-6z+13=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=3+2i \\ z_2=3-2i \end{array}\right.$.

$|z_1|+|z_2|=2\sqrt{13}$.

Chọn phương án D

Câu 48. Trên tập hợp số phức, khẳng định nào sau đây **sai**?

A Phương trình $z^2+1=0$ vô nghiệm.

B Phương trình $z^3+8=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

C Phương trình $z^2-4z+5=0$ có hai nghiệm phân biệt.

D $z^2=-4 \Leftrightarrow z=2i$ hoặc $z=-2i$.

Lời giải.

Xét phương trình: $z^2+1=0 \Leftrightarrow z^2=-1 \Leftrightarrow z^2=i^2 \Leftrightarrow z=\pm i$.

Vậy khẳng định "Phương trình $z^2+1=0$ vô nghiệm" là khẳng định **sai**.

Chọn phương án A

Câu 49. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $2z^2-2z+13=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w=iz_0$?

A $M\left(\frac{5}{4};\frac{1}{4}\right)$. B $N\left(\frac{5}{4};-\frac{1}{4}\right)$. C $P\left(\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)$. D $Q\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Phương trình $2z^2-2z+13=0 \Leftrightarrow z=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$ (loại) hay $z=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$ (nhận).

Nên ta có $w=iz_0=i\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i\right)=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i$. Vậy điểm biểu diễn của w là $Q\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Chọn phương án D

Câu 50. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Tính $F = |z_1| + |z_2|$.

A $F = 2\sqrt{5}$. **B** $F = 6$. **C** $F = 10$. **D** $F = 3$.

Lời giải.

$z_{1,2} = 1 \pm 2i$ nên $|z_1| = |z_2| = \sqrt{5}$. Suy ra $F = 2\sqrt{5}$.

Chọn phương án A

Câu 51. Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z - 3\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|w - 4\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$. Biết rằng $|z - w|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z = z_0$, $w = w_0$. Tính $|3z_0 - w_0|$.

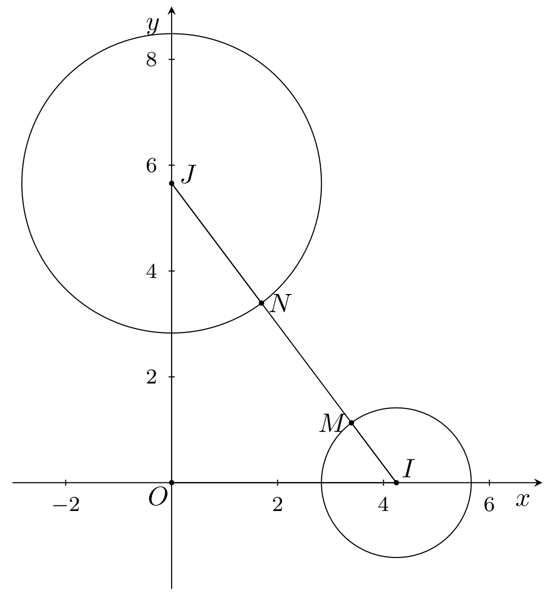
A $2\sqrt{2}$. **B** $4\sqrt{2}$. **C** 1. **D** $6\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có:

— $|z - 3\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn M biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I(3\sqrt{2}; 0)$, bán kính $r = \sqrt{2}$.

— $|w - 4\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn N biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $J(0; 4\sqrt{2})$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$.



Suy ra $|z - w| = MN$.

Mặt khác $IM + MN + NJ \geq IJ$

$\Rightarrow MN \geq IJ - IM - NJ$.

Hay $MN \geq 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Suy ra $\min MN = 2\sqrt{2}$ khi I, M, N, J thẳng hàng và M, N nằm giữa I, J (Hình vẽ).

Khi đó ta có:

$|3z_0 - w_0| = |3\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}|$, $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{IJ}; \overrightarrow{IN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$.

Mặt khác $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{OI} + \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$; $3\overrightarrow{OM} = 3(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}) = 3(\overrightarrow{OI} + \frac{1}{5}\overrightarrow{IJ}) = 3\overrightarrow{OI} + \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$.

Suy ra $|3z_0 - w_0| = |3\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}| = |3\overrightarrow{OI} + \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ} - (\overrightarrow{OI} + \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ})| = |2\overrightarrow{OI}| = 6\sqrt{2}$.

Chọn phương án D

Câu 52. Định tất cả các số thực m để phương trình $z^2 - 2z + 1 - m = 0$ có nghiệm phức z thỏa mãn $|z| = 2$.

A $m = -3$. **B** $m = -3; m = 9$.

C $m = 1; m = 9$. **D** $m = -3; m = 1; m = 9$.

Lời giải.

Nếu $m \geq 0$ thì $\Delta' \geq 0$ nên phương trình có nghiệm $z = 1 \pm \sqrt{m}$. Khi đó

$$|z|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1+\sqrt{m}=2\\1+\sqrt{m}=-2\\1-\sqrt{m}=2\\1-\sqrt{m}=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{m}=1\\\sqrt{m}=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\m=9\end{array}\right.$$

Nếu $m<0$ thì $\Delta'<0$ nên phương trình có nghiệm $z=1\pm\sqrt{-m}.i$. Khi đó
$|z|=2 \Leftrightarrow 1-m=4 \Leftrightarrow m=-3$.

Chọn phương án D

Câu 53. Cho số phức z thỏa mãn $11z^{2018}+10iz^{2017}+10iz-11=0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $|z|\in[2;3)$. **B** $|z|\in[0;1)$. **C** $|z|\in(1;2)$. **D** $|z|\in\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải.

Gọi $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned}&11z^{2018}+10iz^{2017}+10iz-11=0\\ \Leftrightarrow\ & z^{2017}(11z+10i)=11-10iz \Leftrightarrow z^{2017}=\frac{11-10iz}{11z+10i}\\ \Rightarrow\ & |z|^{2017}=\sqrt{\frac{(11+10b)^2+(10a)^2}{(11a)^2+(11b+10)^2}}=\sqrt{\frac{100(a^2+b^2)+220b+121}{121(a^2+b^2)+220b+100}}=k.\end{aligned}$$

Xét hiệu

$$H=121(a^2+b^2)+220b+100-\left[100(a^2+b^2)+220b+121\right]=21\left(a^2+b^2-1\right).$$

— Nếu $|z|>1\Rightarrow a^2+b^2>1\Rightarrow H>0\Leftrightarrow k<1$ (vô lý).

— Nếu $|z|<1\Rightarrow a^2+b^2<1\Rightarrow H<0\Leftrightarrow k>1$ (vô lý).

$\Rightarrow |z|=1\in\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Chọn phương án D

Câu 54. Tìm tổng các giá trị số thực a sao cho phương trình $z^2+3z+a^2-2a=0$ có nghiệm phức z_0 thỏa $|z_0|=2$.

A 0. **B** 2. **C** 6. **D** 4.

Lời giải.

Có 3 trường hợp sau:

Trường hợp 1. $z_0=2$ là nghiệm phương trình $z^2+3z+a^2-2a=0$ nên $a^2-2a+10=0$ vô nghiệm.

Trường hợp 2. $z_0=-2$ là nghiệm phương trình $z^2+3z+a^2-2a=0$ nên $a^2-2a-2=0\Rightarrow a_1+a_2=2$.

Trường hợp 3. $z_0\notin\mathbb{R}$ là nghiệm phương trình $z^2+3z+a^2-2a=0$ nên $a^2-2a=4\Rightarrow a_3+a_4=2$.

Vậy tổng tất cả các giá trị của số thực a để phương trình $z^2+3z+a^2-2a=0$ có nghiệm phức z_0 thỏa $|z_0|=2$ là 4.

Chọn phương án D

Câu 55. Cho phương trình $z^4-2z^3+6z^2-8z+9=0$ có bốn nghiệm phức phân biệt là z_1,z_2,z_3,z_4. Tính giá trị của biểu thức $T=\left(z_1^2+4\right)\left(z_2^2+4\right)\left(z_3^2+4\right)\left(z_4^2+4\right)$.

(A) $T = 1$. (B) $T = 0$. (C) $T = 2i$. (D) $T = -2i$.

Lời giải.

Đặt $f(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 9$. Do phương trình $f(z) = 0$ có bốn nghiệm phức phân biệt z_1, z_2, z_3, z_4, suy ra $f(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$.

Ta có

$$\begin{aligned} T &= \left(z_1^2 + 4\right)\left(z_2^2 + 4\right)\left(z_3^2 + 4\right)\left(z_4^2 + 4\right) \\ &= (z_1 - 2i)(z_1 + 2i) \cdot (z_2 - 2i)(z_2 + 2i) \cdot (z_3 - 2i)(z_3 + 2i) \cdot (z_4 - 2i)(z_4 + 2i) \\ &= (2i - z_1)(2i - z_2)(2i - z_3)(2i - z_4) \cdot (-2i - z_1)(-2i - z_2)(-2i - z_3)(-2i - z_4) \\ &= f(2i) \cdot f(-2i) = 1. \end{aligned}$$

Chọn phương án (A)

D MỨC ĐỘ 4

Câu 56. Cho số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Biết tập hợp các điểm A biểu diễn hình học số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(4; 3)$ và bán kính $R = 3$. Đặt M là giá trị lớn nhất, m là giá trị nhỏ nhất của $F = 4a + 3b - 1$. Tính giá trị $M + m$.

(A) $M + m = 63$. (B) $M + m = 48$. (C) $M + m = 50$. (D) $M + m = 41$.

Lời giải.

Ta có phương trình đường tròn $(C) : (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 9$.

Do điểm A nằm trên đường tròn (C) nên ta có $(a - 4)^2 + (b - 3)^2 = 9$.

Ta có $F = 4a + 3b - 1 \Rightarrow a = \dfrac{F + 1 - 3b}{4}$

$$(a - 4)^2 + (b - 3)^2 = 9 \Rightarrow \left(\frac{F + 1 - 3b}{4} - 4\right)^2 + b^2 - 6b + 9 = 9 \Leftrightarrow 25b^2 - 2(3F + 3)b + F^2 + 225 = 0$$

$$\Delta' = (3F + 3)^2 - 25F^2 - 5625 \geq 0 \Leftrightarrow -16F^2 + 18F - 5625 \geq 0 \Leftrightarrow 9 \leq F \leq 39$$

Khi đó $M = 39, m = 9$. Vậy $M + m = 48$

Chọn phương án (B)

Câu 57. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + z + 1 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = \left|z_1^{2019} + z_2^{2019}\right|$.

(A) $P = 2$. (B) $P = 3$. (C) $P = 2\sqrt{3}$. (D) $P = 4038$.

Lời giải.

Ta có $z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} z_1 &= \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \\ z_2 &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}. \end{aligned}\right.$

Ta có $z_1^3 = \dfrac{1}{8}\left(1 - \sqrt{3}i\right)^3 = \dfrac{1}{8}\left(1 - 3\sqrt{3}i - 9 + 3\sqrt{3}i\right) = -1$; $z_2^3 = \dfrac{1}{8}\left(1 + \sqrt{3}i\right)^3 = \dfrac{1}{8}\left(1 + 3\sqrt{3}i - 9 - 3\sqrt{3}i\right) =$

-1.
Mặt khác $z_1^{2019} = \left(z_1^3\right)^{673} = -1, z_2^{2019} = \left(z_2^3\right)^{673} = -1 \Rightarrow \left|z_1^{2019} + z_2^{2019}\right| = |-1-1| = 2$.
Vậy $\left|z_1^{2019} + z_2^{2019}\right| = 2$.
Chọn phương án A

Câu 58. Cho hai số thực b, c $(c > 0)$. Kí hiệu A, B là hai điểm của mặt phẳng phức biểu diễn hai nghiệm của phương trình $z^2 + 2bz + c = 0$. Tìm điều kiện của b và c sao cho tam giác OAB là tam giác vuông (với O là gốc tọa độ).

A $c = 2b^2$. B $c = b$. C $c = b^2$. D $b^2 = 2c$.

Lời giải.

Từ yêu cầu bài toán ta có phương trình $z^2 + 2bz + c = 0$ có hai nghiệm phức

$$z_1 = -b - i\sqrt{c - b^2}, z_2 = -b + i\sqrt{c - b^2}.$$

Chú ý $\Delta' = b^2 - c < 0$.
Gọi $A(-b; -\sqrt{c - b^2}), B(-b; \sqrt{c - b^2})$. Ta được $\overrightarrow{OA}(-b; -\sqrt{c - b^2}), \overrightarrow{OB}(-b; \sqrt{c - b^2})$.
Ta có tam giác OAB cân tại O, A và B đối xứng qua trục hoành.
Tam giác OAB vuông tại $O \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow b^2 - (c - b^2) = 0 \Leftrightarrow b^2 = c - b^2 \Leftrightarrow c = 2b^2$.
Chọn phương án A

Câu 59. Cho số phức z thỏa mãn $z^2 - 2z + 3 = 0$. Tính $|w|$ biết $w = z^{2018} - z^{2017} + z^{2016} + 3z^{2015} + 3z^2 - z + 9$

A $9\sqrt{3}$. B $\sqrt{3}$. C $5\sqrt{3}$. D $2018\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $w = z^{2016}\left(z^2 - 2z + 3\right) + z^{2015}\left(z^2 - 2z + 3\right) + 3\left(z^2 - 2z + 3\right) + 5z = 5z$. Vậy $|w| = 5|z|$.
Từ phương trình dễ dàng tìm được $|z| = \sqrt{3}$. Vậy $|w| = 5\sqrt{3}$.
Chọn phương án C

Câu 60. Định tất cả các số thực m để phương trình $z^2 - 2z + 1 - m = 0$ có nghiệm phức z thỏa mãn $|z| = 2$.

A $m = -3$. B $m = -3; m = 9$.
C $m = 1; m = 9$. D $m = -3; m = 1; m = 9$.

Lời giải.

Nếu $m \geq 0$ thì $\Delta' \geq 0$ nên phương trình có nghiệm $z = 1 \pm \sqrt{m}$. Khi đó

$$|z| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 + \sqrt{m} = 2 \\ 1 + \sqrt{m} = -2 \\ 1 - \sqrt{m} = 2 \\ 1 - \sqrt{m} = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{m} = 1 \\ \sqrt{m} = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 9 \end{array}\right.$$

Nếu $m < 0$ thì $\Delta' < 0$ nên phương trình có nghiệm $z = 1 \pm \sqrt{-m}.i$. Khi đó
$|z| = 2 \Leftrightarrow 1 - m = 4 \Leftrightarrow m = -3$.
Chọn phương án D

Câu 61. Cho số phức z thỏa mãn $5|z - i| = |z + 1 - 3i| + 3|z - 1 + i|$. Tìm giá trị lớn nhất M của $|z - 2 + 3i|$?

A $M = \dfrac{10}{3}$. **B** $M = 1 + \sqrt{13}$. **C** $M = 4\sqrt{5}$. **D** $M = 9$.

Lời giải.

Gọi $A(0;1)$, $B(-1;3)$, $C(1;-1)$. Ta thấy A là trung điểm của BC nên suy ra

$$MA^2 = \frac{MB^2 + MC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} \Leftrightarrow MB^2 + MC^2 = 2MA^2 + \frac{BC^2}{2} = 2MA^2 + 10.$$

Ta lại có $5|z-i| = |z+1-3i| + 3|z-1+i| \Leftrightarrow 5MA = MB + 3MC \le \sqrt{10}.\sqrt{MB^2+MC^2}$.

Do đó $25MA^2 \le 10\left(2MA^2+10\right) \Rightarrow MC \le 2\sqrt{5}$.

Mà $|z-2+3i| = |(z-i)+(-2+4i)| \le |z-i| + |2-4i| \le |z-i| + 2\sqrt{5} \le 4\sqrt{5}$.

Dấu "=" xảy ra khi

$$\begin{cases} |z-i| = 2\sqrt{5} \\ \dfrac{a}{-2} = \dfrac{b-1}{4} \end{cases} \text{ với } z = a+bi; a,b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &z = 2-3i \text{ (loại)} \\ &z = -2+5i. \end{aligned}\right.$$

Chọn phương án C

Câu 62. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2| = |z-2i|$. Tìm số phức z biết $\left|z + \dfrac{3}{2} - 5i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A $z = \sqrt{\dfrac{331}{8}}$. **B** $z = 1 + i$. **C** $z = \dfrac{7}{4} + \dfrac{7}{4}i$. **D** $z = -\dfrac{3}{2} + 5i$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó $|z-2| = z - 2i \Leftrightarrow |x-2+yi| = |x+(y-2)i|$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = x^2 + (y-2)^2 \Leftrightarrow x = y$.

Tập hợp $M(x;y)$ biểu diễn số phức z là đường thẳng $y = x$.

Ta có
$$\begin{aligned} \left|z + \frac{3}{2} - 5i\right| &= \left|x + \frac{3}{2} + (y-5)i\right| \\ &= \sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + (y-5)^2} \\ &= \sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + (x-5)^2} \\ &= \sqrt{2\cdot\left(x-\frac{7}{4}\right)^2 + \frac{169}{8}} \ge \sqrt{\frac{169}{8}}. \end{aligned}$$

Suy ra $z + \dfrac{3}{2} - 5i$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = y = \dfrac{7}{4}$.

Chọn phương án C

Câu 63. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2+3i| + |z+2+i| = 4\sqrt{5}$. Tính giá trị lớn nhất của $P = |z-4+4i|$.

A $\max P = 4\sqrt{5}$. **B** $\max P = 7\sqrt{5}$. **C** $\max P = 5\sqrt{5}$. **D** $\max P = 6\sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có bất đẳng thức mô-đun số phức sau:

$$||z_1| - |z_2|| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

Đặt $w = z - 4 + 4i \Rightarrow P = |w|$.
Ta có $|z - 2 + 3i| + |z + 2 + i| = 4\sqrt{5} \Leftrightarrow |w + 2 - i| + |w + 6 - 3i| = 4\sqrt{5}$.
Mà $\begin{cases} ||w + 2 - i| \geq |w| - |2 - i| = |w| - \sqrt{5} \\ |w + 6 - 3i| \geq |w| - |6 - 3i| = |w| - 3\sqrt{5} \end{cases}$,
suy ra $4\sqrt{5} \geq \left(|w| - \sqrt{5}\right) + \left(|w| - 3\sqrt{5}\right) \Leftrightarrow |w| \leq 4\sqrt{5}$.
Vậy $\max P = 4\sqrt{5}$ khi $w = k(2 - i) = -4(2 - i)$ hay $z = -4$.
Chọn phương án A

Câu 64. Cho số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Biết tập hợp các điểm A biểu diễn hình học số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(4; 3)$ và bán kính $R = 3$. Đặt M là giá trị lớn nhất, m là giá trị nhỏ nhất của $F = 4a + 3b - 1$. Tính giá trị $M + m$.

A $M + m = 63$. **B** $M + m = 48$. **C** $M + m = 50$. **D** $M + m = 41$.

Lời giải.

Ta có phương trình đường tròn $(C) : (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 9$.
Do điểm A nằm trên đường tròn (C) nên ta có $(a - 4)^2 + (b - 3)^2 = 9$.
Ta có $F = 4a + 3b - 1 \Rightarrow a = \dfrac{F + 1 - 3b}{4}$

$$(a - 4)^2 + (b - 3)^2 = 9 \Rightarrow \left(\frac{F + 1 - 3b}{4} - 4\right)^2 + b^2 - 6b + 9 = 9 \Leftrightarrow 25b^2 - 2(3F + 3)b + F^2 + 225 = 0$$

$$\Delta' = (3F + 3)^2 - 25F^2 - 5625 \geq 0 \Leftrightarrow -16F^2 + 18F - 5625 \geq 0 \Leftrightarrow 9 \leq F \leq 39$$

Khi đó $M = 39, m = 9$. Vậy $M + m = 48$
Chọn phương án B

Câu 65. Cho số phức z và w thỏa mãn $(2+i)|z| = \dfrac{z}{w}+1-i$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = |w+1-i|$.

A $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. **B** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **D** $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Nhận xét $z = 0$ không thỏa mãn giả thiết của bài toán.
Đặt $|z| = R, R > 0$. Ta có

$$\begin{aligned} & (2 + i)|z| = \frac{z}{w} + 1 - i \Leftrightarrow (2R - 1) + (R + 1)i = \frac{z}{w} \\ \Rightarrow\ & \frac{R}{|w|} = \sqrt{5R^2 - 2R + 2} \\ \Rightarrow\ & \frac{1}{|w|} = \sqrt{\frac{5R^2 - 2R + 2}{R^2}} = \sqrt{5 - \frac{2}{R} + \frac{2}{R^2}} = \sqrt{2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}, \forall R > 0. \end{aligned}$$

Suy ra $|w| \leq \dfrac{\sqrt{2}}{3}, \forall R > 0$. ta có

$$T = |w + 1 - i| \leq |w| + |1 - i| \leq \frac{\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi
$$\begin{cases}|z|=2\\ w=k(1-i), k>0\\ (2+i)|z|=\dfrac{z}{w}+1-i\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=2\\ =\dfrac{1}{3}(1-i).\end{cases}$$

Vậy $\max T=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Chọn phương án A

Câu 66. Cho số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $\dfrac{|z-3+4i|+1}{3|z-3+4i|-3}=\dfrac{1}{2}$ và mô-đun $|z|$ lớn nhất. Tính tổng $S=a+b$.

A $S=2$. **B** $S=-1$. **C** $S=-2$. **D** $S=1$.

Lời giải.

Đặt $t=|z-3+4i|$, ta được phương trình $\dfrac{t+11}{3t-3}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow 2t+2=3t-3\Rightarrow t=5$.

$|z-3+4i|=5\Leftrightarrow |a+bi-3+4i|=5\Leftrightarrow |(a-3)+(b+4)i|=5\Leftrightarrow (a-3)^2+(b+4)^2=25\Leftrightarrow a^2+b^2-6a+8b=0\Leftrightarrow a^2+b^2=6a-8b$.

Ta có $(6a-8b)^2\le 100(a^2+b^2)$, suy ra $|z|^4\le 100|z|^2\Leftrightarrow |z|^4-100|z|^2\le 0\Leftrightarrow 0\le |z|^2\le 100\Leftrightarrow 0\le |z|\le 10$. Giá trị lớn nhất của $|z|$ bằng 10 khi $\begin{cases}a^2+b^2=100\\ a^2+b^2=6a-8b\\ \dfrac{a}{6}=-\dfrac{b}{8}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6a-8b=100\\ 4a+3b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=6\\ b=-8\end{cases}$

$\Rightarrow S=a+b=-2$.

Chọn phương án C

Câu 67. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$. Môđun của số phức $w=M+mi$ là

A $|w|=3\sqrt{137}$. **B** $|w|=\sqrt{1258}$. **C** $|w|=2\sqrt{309}$. **D** $|w|=2\sqrt{314}$.

Lời giải.

Gọi $z=a+bi$. Khi đó ta có
$$\begin{aligned}P&=|a+2+bi|^2-|a+(b-1)i|^2\\&=(a+2)^2+b^2-a^2-(b-1)^2\\&=a^2+4a+4+b^2-a^2-b^2+2b-1\\&=4a+2b+3.\end{aligned}$$

Vậy $P=4a+2b+3$.

Ta có $|a-3+i(b-4)|=\sqrt{5}\Rightarrow |a-3+i(b-4)|^2=5\Rightarrow (a-3)^2+(b-4)^2=5$.

Do đó ta có thể đặt $\begin{cases}a=3+\sqrt{5}\sin t\\ b=4+\sqrt{5}\cos t\end{cases}$, với $t\in[0;\pi]$

$\Rightarrow P=4\sqrt{5}\sin t+2\sqrt{5}\cos t+23$.

Xét $f(t)=4\sqrt{5}\sin t+2\sqrt{5}\cos t$.

Chia hai vế của $f(t)$ cho $\sqrt{(4\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5})^2}=10$.

$\Rightarrow \dfrac{f(t)}{10}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\sin t+\dfrac{\sqrt{5}}{5}\cos t$.

Vì $\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2=1$ nên ta có thể đặt $\begin{cases}\cos u=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\\ \sin u=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\end{cases}$ với $u\in[0;\pi]$.

Khi đó $\dfrac{f(t)}{10}=\cos u\sin t+\sin u\cos t=\sin(t+u)$.

Vì $-1\le\sin(u+t)\le 1$ nên $-1\le\dfrac{f(t)}{10}\le 1\Rightarrow -10\le f(t)\le 10\Rightarrow 13\le f(t)+23\le 33$ hay $13\le P\le 33$.

Suy ra $M=33; m=13\Rightarrow w=33+13i$.

Khi đó $|w|=\sqrt{33^2+13^2}=\sqrt{1258}$.

Chọn phương án B

Câu 68. Cho số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{-2-3i}{3-2i}z+1\right|=2$. Giá trị lớn nhất của mô-đun số phức z là

(A) $\sqrt{3}$. (B) 3. (C) 2. (D) $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $\left|\dfrac{-2-3i}{3-2i}z+1\right|=2\Leftrightarrow|-iz+1|=2\Leftrightarrow|i|\cdot|-iz+1|=2\Leftrightarrow|z+i|=2$.

Sử dụng bất đẳng thức về mô-đun ta có $2=|z+i|=|z-(-i)|\ge|z|-|-i|$.

Suy ra $|z|\le 3$.

Chọn phương án B

Câu 69. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi m,M lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P=\left|z^5+\overline{z}^3+6z\right|-\left|z^4+1\right|$. Tính $M-m$

(A) $M-m=1$. (B) $M-m=3$. (C) $M-m=6$. (D) $M-m=12$.

Lời giải.

Ta có $|z|=1\Leftrightarrow\left|z^2\right|=1\Leftrightarrow z^2+\overline{z}^2\in\mathbb{R}$ và $-2\le z^2+\overline{z}^2\le 2$.

Ta có $P=$

$$\begin{aligned}
&=\left|z^5+\overline{z}^3+6z\right|-\left|z^4+1\right|\\
&=\left|z\left(z^4+\frac{\overline{z}^3}{z}+6\right)\right|-\left|z^2\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)\right|\\
&=\left|z^4+\overline{z}^4+6\right|-\left|z^2+\overline{z}^2\right|\\
&=\left|\left(z^2+\overline{z}^2\right)^2+4\right|-\left|z^2+\overline{z}^2\right|\\
&=\left(z^2+\overline{z}^2\right)^2+4-2\left|z^2+\overline{z}^2\right|\\
&=\left(\left|z^2+\overline{z}^2\right|-1\right)^2+3.
\end{aligned}$$

Khi đó $m=3; M=4$. Vậy $M-m=1$.

Chọn phương án A

Câu 70. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|iz_1+\sqrt{2}|=\dfrac{1}{2}$ và $z_2=iz_1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1-z_2|$ bằng

A $2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B** $2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C** $\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **D** $\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{2}=|iz_1+\sqrt{2}|\geq\left||iz_1|-\sqrt{2}\right|=\left||z_1|-\sqrt{2}\right|$.

Suy ra $|z_1|-\sqrt{2}\geq-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow|z_1|\geq\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}$.

Do đó $|z_1-z_2|=|z_1-iz_1|=|(1-i)z_1|=\sqrt{2}|z_1|\geq\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\right)=2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $z_1=\left(\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\right)i$.

Chọn phương án B

BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. D	3. C	4. C	5. A	6. A	7. A	8. B	9. D	10. C
11. D	12. B	13. A	14. C	15. C	16. D	17. B	18. D	19. D	20. A
21. A	22. C	23. A	24. A	25. B	26. B	27. B	28. B	29. A	30. B
31. D	32. A	33. A	34. A	35. A	36. D	37. C	38. D	39. C	40. B
41. C	42. D	43. C	44. A	45. B	46. A	47. D	48. A	49. D	50. A
51. D	52. D	53. D	54. D	55. A	56. B	57. A	58. A	59. C	60. D
61. C	62. C	63. A	64. B	65. A	66. C	67. B	68. B	69. A	70. B

DẠNG 37. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$,cho điểm $M(2;1;0)$ và đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z+1}{-2}$. Mặt phẳng đi qua M và vuông góc với Δ có phương trình là

(A) $3x+y-z-7=0$.
(B) $x+4y-2z+6=0$.
(C) $x+4y-2z-6=0$.
(D) $3x+y-z+7=0$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ: $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z+1}{-2}$ nhận vectơ $\vec{u} = (1;4;-2)$ là một vectơ chỉ phương.

Mặt phẳng đi qua M và vuông góc với Δ nhận vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;4;-2)$ của Δ là vectơ pháp tuyến.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm $1.(x-2)+4.(y-2)-2.(z-0)=0 \Leftrightarrow x+4y-2z-6=0$.

Chọn phương án (C)

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, tìm phương trình mặt phẳng (α) cắt ba trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại ba điểm $A(-3;0;0), B(0;4;0), C(0;0;-2)$.

(A) $4x-3y+6z-12=0$.
(B) $4x+3y-6z+12=0$.
(C) $4x-3y+6z+12=0$.
(D) $4x+3y+6z+12=0$.

Lời giải.

Phương trình (α) : $\dfrac{x}{-3} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{-2} = 1 \Leftrightarrow 4x-3y+6z=-12 \Leftrightarrow 4x-3y+6z+12=0$.

Chọn phương án (C)

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;1)$ và $B(1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB.

(A) $(P): x+3y+4z-26=0$.
(B) $(P): x+y+2z-3=0$.
(C) $(P): x+y+2z-6=0$.
(D) $(P): x+3y+4z-7=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véctơ pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (1;1;2)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là: $x+y-1+2(z-1)=0$ hay $(P): x+y+2z-3=0$.

Chọn phương án (B)

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;-1)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và chứa trục Ox là

(A) $x+y=0$.
(B) $x+z=0$.
(C) $y-z=0$.
(D) $y+z=0$.

Lời giải.

Mp(P) có vtpt $\vec{n} = (0;1;1)$ và đi qua điểm $A(1;1;-1)$. Suy ra phương trình $(P): y+z=0$.

Chọn phương án (D)

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(3;-1;4)$, đồng thời vuông góc với giá của vectơ $\vec{a}(1;1;2)$ có phương trình là

(A) $3x-y+4z-12=0$. **(B)** $3x-y+4z+12=0$.
(C) $x-y+2z-12=0$. **(D)** $x-y+2z+12=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) nhận vectơ $\vec{a}(1;1;2)$ làm vectơ pháp tuyến và đi qua điểm $M(3;-1;4)$ nên có phương trình là

$$1(x-3)-1(y+1)+2(z-4)=0 \Leftrightarrow x-y+2z-12=0.$$

Chọn phương án (C)

Câu 5. Trong không gian$Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(3;-1;4)$, đồng thời vuông góc với giá của vectơ $\vec{a}(1;-1;2)$ có phương trình là

(A) $x-y+2z+12=0$. **(B)** $x-y+2z-12=0$.
(C) $3x-y+4z-12=0$. **(D)** $3x-y+4z+12=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) nhận vectơ $\vec{a}(1;-1;2)$làm vectơ pháp tuyến và đi qua điểm $M(3;-1;4)$nên có phương trình là:

$1(x-3)-1(y+1)+2(z-4)=0 \Leftrightarrow x-y+2z-12=0$

Chọn phương án (B)

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1;2;3)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;4;6)$. Phương trình nào sau đây **không** phải là của đường thẳng Δ?

(A) $\begin{cases} x=-5-2t \\ y=-10-4t \\ z=-15-6t \end{cases}$. **(B)** $\begin{cases} x=2+t \\ y=4+2t \\ z=6+3t \end{cases}$. **(C)** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+4t \\ z=3+6t \end{cases}$. **(D)** $\begin{cases} x=3+2t \\ y=6+4t \\ z=12+6t \end{cases}$.

Lời giải.

Thay tọa độ điểm $M(1;2;3)$ vào các phương trình, dễ thấy M không thỏa mãn phương trình $\begin{cases} x=3+2t \\ y=6+4t \\ z=12+6t \end{cases}$.

Chọn phương án (D)

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxz) có phương trình là

(A) $z=0$. **(B)** $x+y+z=0$. **(C)** $y=0$. **(D)** $x=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oxz) đi qua điểm $O(0;0;0)$ và nhận $\vec{j}=(0;1;0)$ là một véc-tơ pháp tuyến nên phương trình của mặt phẳng (Oxz) là $y=0$.

Chọn phương án (C)

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-3y+4z-5=0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

(A) $\vec{n}=(2;-3;4)$. **(B)** $\vec{n}=(2;3;4)$. **(C)** $\vec{n}=(2;4;5)$. **(D)** $\vec{n}=(2;-3;-5)$.

Lời giải.
Mặt phẳng $ax + by + cz + d = 0$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b; c)$.
Mặt phẳng $(P) : 2x - 3y + 4z - 5 = 0$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; -3; 4)$.
Chọn phương án (A)

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; -1; 1)$ và véctơ $\vec{n} = (1; 3; 4)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2; -1; 1)$ và có véctơ pháp tuyến $\vec{n}$.

A $2x - y + z + 3 = 0$. **B** $2x - y + z - 3 = 0$. **C** $x + 3y + 4z + 3 = 0$. **D** $x + 3y + 4z - 3 = 0$.

Lời giải.
Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) có dạng:
$(x - 2) + 3(y + 1) + 4(z - 1) = 0 \iff x + 3y + 4z - 3 = 0$
Chọn phương án (D)

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2; 3; 1)$, $B(0; 1; 2)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB là

A (P): $2x + 2y - z = 0$. **B** (P): $2x + 2y - z - 9 = 0$.
C (P): $2x + 4y + 3z - 19 = 0$. **D** (P): $2x + 4y + 3z - 10 = 0$.

Lời giải.
$\overrightarrow{AB} = (-2 - 2; 1)$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).
Phương trình của mặt phẳng (P) là $-2(x - 2) - 2(y - 3) + (z - 1) = 0$ hay $2x + 2y - z - 9 = 0$.
Chọn phương án (B)

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1; 1; 4), B(2; 7; 9)$ và $C(0; 9; 13)$.

A $2x + y + z + 1 = 0$. **B** $x - y + z - 4 = 0$. **C** $7x - 2y + z - 9 = 0$. **D** $2x + y - z - 2 = 0$.

Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 6; 5), \overrightarrow{AC} = (-1; 8; 9), \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (14; -14; 14) = 14(1; -1; 1)$. Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $A(1; 1; 4)$ và nhận $\vec{n} = (1; -1; 1)$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình là:

$$x - 1 - (y - 1) + z - 4 = 0 \Leftrightarrow x - y + z - 4 = 0.$$

Chọn phương án (B)

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $M(1; -1; 2)$, $N(3; 1; -4)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của MN.

A $x + y + 3z + 5 = 0$. **B** $x + y - 3z - 5 = 0$. **C** $x + y + 3z + 1 = 0$. **D** $x + y - 3z + 5 = 0$.

Lời giải.
Mặt phẳng trung trực của MN nhận $\frac{1}{2}\overrightarrow{MN} = (1; 1; -3)$ làm véc-tơ pháp tuyến và đi qua trung điểm $I(2; 0; -1)$ của MN nên nó có phương trình $x + y - 3z - 5 = 0$.
Chọn phương án (B)

Câu 13. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1; 2; 3)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (-2; 0; 1)$ là

A $-2x+z+1=0$. **B** $-2y+z-1=0$. **C** $-2x+z-1=0$. **D** $-2x+y-1=0$.

Lời giải.

Phương trình của mặt phẳng cần tìm là $-2(x-1)+0(y-2)+1(z-3)=0 \Leftrightarrow -2x+z-1=0$.

Chọn phương án C

Câu 14. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng Oxz?

A $y=0$. **B** $x=0$. **C** $z=0$. **D** $y-1=0$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng Oxz là $y=0$.

Chọn phương án A

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(2;0;0)$, $B(0;-2;0)$ và $C(0;0;-1)$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

A $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{1}=0$. **B** $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{1}=1$. **C** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{1}=1$. **D** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{-1}=1$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{-1}=1.$$

Chọn phương án D

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2-1)$ và có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;0;-3)$?

A $2x-3z-5=0$. **B** $2x-3z+5=0$. **C** $x+2y-z-6=0$. **D** $x+2y-z-5=0$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng qua $M(1;2;-1)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;0;-3)$ là $2(x-1)-3(z+1)=0 \Leftrightarrow 2x-3z-5=0$.

Chọn phương án A

Câu 17. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;0;0)$, $B(0;3;0)$ và $C(0;0;2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (ABC)?

A $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{-2}=1$. **B** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{3}=1$. **C** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{-2}=1$. **D** $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{2}=1$.

Lời giải.

Áp dụng công thức phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn ta được $(ABC)\colon \dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{2}=1$.

Chọn phương án D

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-3;4;-2)$ và $\vec{n}=(-2;3;-4)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và nhận $\vec{n}$ làm véc-tơ pháp tuyến là

A $-3x+4y-2z+26=0$. **B** $-2x+3y-4z+29=0$.

C $2x-3y+4z+29=0$. **D** $2x-3y+4z+26=0$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(-3;4;-2)$ và nhận $\vec{n}=(-2;3;-4)$ làm véc-tơ pháp tuyến là

$$-2(x+3)+3(y-4)-4(z+2)=0 \Leftrightarrow 2x-3y+4z+26=0.$$

Chọn phương án D

Câu 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng cắt ba trục tọa độ tại ba điểm $A(4;0;0)$, $B(0;-2;0)$ và $C(0;0;6)$. Phương trình của (α) là

A $\frac{x}{4}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{6}=0$. **B** $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=1$.

C $\frac{x}{4}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{6}=1$. **D** $3x-6y+2z-1=0$.

Lời giải.

Ta có phương trình theo đoạn chắn của (α) là $\frac{x}{4}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{6}=1$.

Chọn phương án C

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (Oxz) là

A $x=0$. **B** $x+z=0$. **C** $z=0$. **D** $y=0$.

Lời giải.

Do mặt phẳng (Oxz) đi qua điểm $O(0;0;0)$ và nhận $\vec{j}=(0;1;0)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên có phương trình tổng quát là $y=0$.

Chọn phương án D

B MỨC ĐỘ 2

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxz) có phương trình là

A $z=0$. **B** $x+y+z=0$. **C** $y=0$. **D** $x=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oxz) có phương trình là $y=0$

Chọn phương án C

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;-1;0)$ và $C(0;0;2)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A $x-2y+z=0$. **B** $x-y+\frac{z}{2}=1$. **C** $x+\frac{y}{2}-z=1$. **D** $2x-y+z=0$.

Lời giải.

Áp dụng phương trình mặt phẳng đoạn chắn ta có phương trình mặt phẳng (ABC) là $x-y+\frac{z}{2}=1$.

Chọn phương án B

Câu 23. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1:\frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-6}{-2}$; $d_2:\frac{x-4}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z+1}{3}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song với d_2 là

A $(P): x+8y+5z+16=0$. **B** $(P): x+8y+5z-16=0$.

C $(P): 2x+y-6=0$. **D** $(P): x+4y+3z-12=0$.

Lời giải.

Phương trình tham số d_1: $\begin{cases} x=2+2t_1 \\ y=-2+t_1, (t_1\in\mathbb{R}). \\ z=6-2t_1 \end{cases}$

d_1 đi qua điểm $M(2;-2;6)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u_1}=(2;1;-2)$.

Phương trình tham số $d_2: \begin{cases} x = 4 + t_2 \\ y = -2 - 2t_2, (t_2 \in \mathbb{R}). \\ z = -1 + 3t_2 \end{cases}$

d_2 đi qua điểm $N(4; -2; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (1; -2; 3)$.

Vì mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song với d_2, ta có: $\begin{cases} \vec{n}_{(P)} \perp \vec{u}_1 \\ \vec{n}_{(P)} \perp \vec{u}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_{(P)} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = -(1; 8; 5)$.

Mặt phẳng (P) đi qua $M(2; -2; 6)$ và vectơ pháp tuyến $\vec{u}_{(P)} = (1; 8; 5)$, nên phương trình mặt phẳng $(P): (x - 2) + 8(y + 2) + 5(z - 6) = 0$ hay $(P): x + 8y + 5z - 16 = 0$.

Chọn phương án B

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -1; -3)$ và mặt phẳng (P): $3x - 2y + 4z - 5 = 0$. Mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là

A (Q): $3x - 2y + 4z - 4 = 0$.
B (Q): $3x - 2y + 4z + 4 = 0$.
C (Q): $3x - 2y + 4z + 5 = 0$.
D (Q): $3x + 2y + 4z + 8 = 0$.

Lời giải.

Do mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3; -2; 4)$.

Phương trình mặt phẳng (Q): $3(x - 2) - 2(y + 1) + 4(z + 3) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y + 4z + 4 = 0$.

Chọn phương án B

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4; -1; 3)$, $B(0; 1; -5)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A $(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 21$.
B $(x - 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 17$.
C $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 27$.
D $(x + 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 21$.

Lời giải.

Vì mặt cầu (S) có đường kính AB nên mặt cầu có tâm là trung điểm $I(2; 0; -1)$ của AB và bán kính $R = \dfrac{AB}{2} = \sqrt{21}$.

Vậy phương trình mặt cầu là $(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 21$.

Chọn phương án A

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua các điểm $A(-2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau?

A $3x - 2y + 2z + 6 = 0$.
B $2x + 2y - z - 1 = 0$.
C $x + y + z + 1 = 0$.
D $x - 2y - z - 3 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có phương trình $\dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{-3} = 1 \Leftrightarrow 3x - 2y + 2z + 6 = 0$.

Suy ra (P) có một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_p} = (3; -2; 2)$.

Xét A: $3x - 2y + 2z + 6 = 0$ có $\vec{a} = (3; -2; 2)$ là 1 VTPT và $\vec{a} \cdot \overrightarrow{n_P} = 9 + 4 + 4 = 17 \neq 0$.

Xét B: $2x + 2y - z - 1 = 0$ có $\vec{b} = (2; 2; -1)$ là 1 VTPT và $\vec{b} \cdot \overrightarrow{n_P} = 6 - 4 - 2 = 0 \Rightarrow \vec{b} \perp \overrightarrow{n_P}$.

Vậy (P) vuông góc với mặt phẳng $2x + 2y - z - 1 = 0$.

Chọn phương án B

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (α)là mặt phẳng song song với mặt phẳng

$(\beta): 2x-4y+4z+3=0$ và cách điểm $A(2;-3;4)$ một khoảng $k=3$. Phương trình mặt phẳng (α) là

(A) $2x-4y+4z-5=0$ hoặc $2x-4y+4z-13=0$.

(B) $x-2y+2z-25=0$.

(C) $x-2y+2z-7=0$.

(D) $x-2y+2z-25=0$ hoặc $x-2y+2z-7=0$.

Lời giải.

Vì $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow (\alpha): 2x-4y+4z+m=0$ $(m \neq 3)$.

Giả thiết có $d(A,(\alpha))=3 \Leftrightarrow \dfrac{|32+m|}{6}=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-14 \\ m=-50. \end{array}\right.$

Vậy $(\alpha): x-2y+2z-7=0, (\alpha): x-2y+2z-25=0$.

Chọn phương án (D)

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và SA vuông góc với đáy. Cho biết $B(2;3;7)$, $D(4;1;3)$. Lập phương trình mặt phẳng (SAC).

(A) $x+y-2z+9=0$. (B) $x-y-2z-9=0$. (C) $x-y-2z+9=0$. (D) $x-y+2z+9=0$.

Lời giải.

Dễ dàng chứng minh được (SAC) là mặt phẳng trung trực của BD.

Chọn véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAC) là $\overrightarrow{BD}=(2;-2;-4)$.

Mặt phẳng (SAC) đi qua trung điểm $I(3;2;5)$ của BD và có vtcp $\overrightarrow{BD}$ nên có phương trình: $x-y-2z+9=0$.

Chọn phương án (C)

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x-3y+2z-1=0$, $(Q): x-z+2=0$. Mặt phẳng (α) vuông góc với cả (P) và (Q) đồng thời cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3. Phương trình của mp (α) là:

(A) $x+y+z-3=0$. (B) $x+y+z+3=0$. (C) $-2x+z+6=0$. (D) $-2x+z-6=0$.

Lời giải.

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_p}=(1;-3;2)$, (Q) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}=(1;0;-1)$.

Vì mặt phẳng (α) vuông góc với cả (P) và (Q)

nên (α) có một vectơ pháp tuyến là $\left[\overrightarrow{n_p};\overrightarrow{n_Q}\right]=(3;3;3)=3(1;1;1)$.

Vì mặt phẳng (α) cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3 nên (α)đi qua điểm $M(3;0;0)$.

Vậy (α) đi qua điểm $M(3;0;0)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;1;1)$

nên (α) có phương trình $x+y+z-3=0$.

Chọn phương án (A)

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$và $B(3;3;0)$. Mặt phẳng trung trực của đường thẳng AB có phương trình là

(A) $x+y-z-2=0$. (B) $x+y-z+2=0$. (C) $x+2y-z-3=0$. (D) $x+2y-z+3=0$.

Lời giải.

Ta có: $A(1;-1;2); B(3;3;0) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(2;4;-2)$.

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Khi đó $M(2;1;1)$.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là mặt phẳng đi qua điểm M và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm véc-tơ pháp tuyến.
Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là:

$$\begin{aligned} & 2(x-2)+4(y-1)-2(z-1)=0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x-4+4y-4-2z+2=0 \\ \Leftrightarrow\ & x+2y-z-3=0 \end{aligned}$$

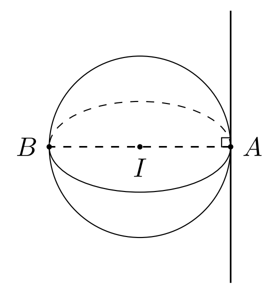
.
Chọn phương án C

Câu 31. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có đường kính AB, với $A(6;2;-5)$, $B(-4;0;7)$. Viết phương trình (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A.

A $(P): 5x+y-6z+62=0$. **B** $(P): 5x+y-6z-62=0$.
C $(P): 5x-y-6z-62=0$. **D** $(P): 5x+y+6z+62=0$.

Lời giải.

Vì mặt cầu (S) có đường kính là AB nên tâm I của mặt cầu (S) là trung điểm của AB.
Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$.
Vì (P) tiếp xúc với (S) tại A nên (P) đi qua A và nhận $\overrightarrow{IA}=(5;1;-6)$ làm vec-tơ pháp tuyến.
Suy ra $(P): 5(x-6)+(y-2)-6(z+5)=0 \Rightarrow (P): 5x+y-6z-62=0$.



Chọn phương án B

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(5;-4;2)$ và $B(1;2;4)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB là?

A $3x-y+3z-25=0$. **B** $2x-3y-z+8=0$.
C $3x-y+3z-13=0$. **D** $2x-3y-z-20=0$.

Lời giải.

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua $A(5;-4;2)$ và vuông góc với đường thẳng AB.
Do (α) vuông góc với AB nên véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}_\alpha=\overrightarrow{AB}=(-4;6;2)$.
Vậy phương trình mặt phẳng (α) là:

$$-4(x-5)+6(y+4)+2(z-2)=0 \Leftrightarrow 2x-3y-z-20=0.$$

Chọn phương án D

Câu 33. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;4;1)$ và điểm $B(-1;1;3)$ và mặt phẳng (P): $x-3y+2z-5=0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với (P) có dạng $ax+by+cz-11=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $a+b+c=5$. **B** $a+b+c=15$. **C** $a+b+c=-5$. **D** $a+b+c=-15$.

Lời giải.

Vì (Q) vuông góc với (P) nên (Q) nhận véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)} = (1; -3; 2)$ làm véc-tơ chỉ phương.
Mặt khác do (Q) đi qua hai điểm A, B nên nhận $\overrightarrow{AB} = (-3; -3; 2)$ làm véc-tơ chỉ phương.
Vậy (Q) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)} = [\vec{n}_{(P)}, \overrightarrow{AB}] = (0; 8; 12)$.
Vậy phương trình mặt phẳng (Q) là: $0(x-2) + 8(y-4) + 12(z-1) = 0 \Leftrightarrow 2y + 3z - 11 = 0$.
Vậy $a + b + c = 5$.
Chọn phương án A

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $A(0; 1; 2)$, $B(0; -1; 2)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

A $z - 2 = 0$. **B** $x - z + 2 = 0$. **C** $x = 0$. **D** $y = 0$.

Lời giải.
Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow M(0; 0; 2)$.
Suy ra (P) là mặt phẳng trung trực của AB đi qua M và nhận $\overrightarrow{AB} = (0; -2; 0)$ làm véc-tơ pháp tuyến.
$\Rightarrow (P)\colon y = 0$.
Chọn phương án D

Câu 35. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua $A(2; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 4)$ có phương trình là

A $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{2} = 2$. **B** $2x + 4y + 4z = 0$. **C** $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{4} = 0$. **D** $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{2} = 1$.

Lời giải.
Mặt phẳng đi qua $A(2; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 4)$ có phương trình $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{4} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{2} = 2$.
Chọn phương án A

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Ox và vuông góc với mặt phẳng $(Q)\colon x + y + z - 3 = 0$. Phương trình mặt phẳng (P) là

A $y - z - 1 = 0$. **B** $y - 2z = 0$. **C** $y + z = 0$. **D** $y - z = 0$.

Lời giải.
(Q) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}(1; 1; 1)$. Từ giả thiết, ta suy ra (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $[\vec{n}; \vec{i}] = (0; 1; -1)$. Do (P) đi qua gốc tọa độ O nên phương trình của (P) là $y - z = 0$.
Chọn phương án D

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0; 1; 2)$, $B(2; -2; 0)$, $C(-2; 0; 1)$. Mặt phẳng (P) đi qua A, trực tâm H của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A $4x - 2y - z + 4 = 0$. **B** $4x - 2y + z + 4 = 0$. **C** $4x + 2y + z - 4 = 0$. **D** $4x + 2y - z + 4 = 0$.

Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -3; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (-2; -1; -1)$ nên $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (1; 6; -8)$.
Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $x + 6y - 8z + 10 = 0$.
Phương trình mặt phẳng qua B và vuông góc với AC là: $2x + y + z - 2 = 0$.
Phương trình mặt phẳng qua C và vuông góc với AB là: $2x - 3y - 2z + 6 = 0$.
Giao điểm của ba mặt phẳng trên là trực tâm H của tam giác ABC nên $H\left(-\dfrac{22}{101}; \dfrac{70}{101}; \dfrac{176}{101}\right)$.

Mặt phẳng (P) đi qua A, H nên $\overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{AH} = \left(-\dfrac{22}{101}; -\dfrac{31}{101}; -\dfrac{26}{101}\right) = -\dfrac{1}{101}(22; 31; 26)$.
Mặt phẳng $(P) \perp (ABC)$ nên $\overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n}_{(ABC)} = (1; 6; -8)$.
Vậy $\left[\overrightarrow{n}_{(ABC)}; \overrightarrow{u}_{AH}\right] = (404; -202; -101)$ là một vectơ pháp tuyến của (P).
Chọn $\overrightarrow{n}_P = (4; -2; -1)$ nên phương trình mặt phẳng (P) là $4x - 2y - z + 4 = 0$.
Chọn phương án A

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(1; -1; 2)$, $B(2; 1; 1)$ và mặt phẳng $P: x + y + z + 1 = 0$. Mặt phẳng (Q) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P). Tìm phương trình mặt phẳng (Q).

(A) $-x + y = 0$. (B) $3x - 2y - x + 3 = 0$. (C) $x + y + z - 2 = 0$. (D) $3x - 2y - x - 3 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{n_P} = (1; 1; 1)$; $\overrightarrow{AB} = (1; 2; -1)$.
Do mặt phẳng Q chứa A,B và vuông góc với mặt phẳng $(P) \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} = \left[\overrightarrow{n_P}; \overrightarrow{AB}\right] = (-3; 2; 1)$.
Do đó $Q: 3x - 2y - z - 3 = 0$.
Chọn phương án D

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(-1; 3; 1)$, $B(1; -1; 2)$, $C(2; 1; 3)$ và $D(0; 1; -1)$. Mặt phẳng (P) chứa AB và song song với CD có phương trình là

(A) $(P): 8x + 3y - 4z + 3 = 0$. (B) $(P): x + 2y + 6z - 11 = 0$.
(C) $(P): x + 2z - 4 = 0$. (D) $(P): 2x + y - 1 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -4; 1)$, $\overrightarrow{CD} = (-2; 0; -4) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = (8; 3; -4)$.
Mặt phẳng (P) đi qua $A(-1; 3; 1)$, nhận $\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = (8; 3; -4)$ là véc-tơ pháp tuyến, có phương trình là $8(x + 1) + 3(y - 3) - 4(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 8x + 3y - 4z + 3 = 0$
(thỏa mãn song song CD nên thỏa mãn đề bài).
Chọn phương án A

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$. Gọi M, N, P là hình chiếu vuông góc của điểm A trên ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz. Viết phương trình mặt phẳng (MNP).

(A) $(MNP): 6x + 3y - 2z - 6 = 0$. (B) $(MNP): 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.
(C) $(MNP): x + 2y - 3z - 1 = 0$. (D) $(MNP): 6x + 3y - 2z + 6 = 0$.

Lời giải.

Có $M(1; 0; 0)$, $N(0; 2; 0)$, $P(0; 0; -3)$ là hình chiếu của A lên các trục tọa độ nên mặt phẳng cần tìm là

$$(MNP): \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-3} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y - 2z - 6 = 0.$$

Chọn phương án A

C MỨC ĐỘ 3

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1; 0; 3)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $3OA = 2OB = OC \neq 0$?

(A) 3. (B) 8. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có thể coi $A(2a;0;0)$, $B(0;3b;0)$, $C(0;0;6c)$ (với $|a|=|b|=|c|\neq 0$). Khi đó, phương trình mặt phẳng (P) là $\dfrac{x}{2a}+\dfrac{y}{3b}+\dfrac{z}{6c}=1$.

Do (P) đi qua $M(-1;0;3)$ nên $-\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2c}=1$. Theo trên, $c=\pm a$, kết hợp với phương trình vừa thu được, ta suy ra $a=-1, c=1$.

Cũng theo trên, $b=\pm a$, nên có 2 giá trị của b. Suy ra có 2 bộ (a,b,c) thỏa mãn, hay có 2 mặt phẳng thỏa yêu cầu đề bài.

Chọn phương án D

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $H(2;1;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua H và cắt các trục tọa độ tại A, B, C sao cho H là trực tâm tam giác ABC. Hãy viết trình mặt phẳng (P).

A $2x+y+z-6=0$. **B** $x+2y+z-6=0$. **C** $x+2y+2z-6=0$. **D** $2x+y+z+6=0$.

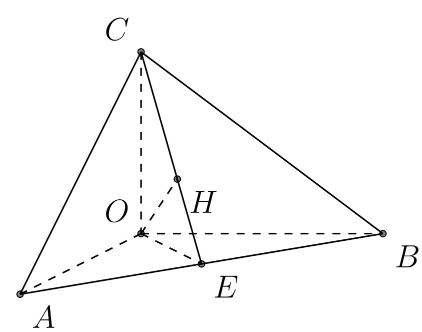
Lời giải.

Ta có $\begin{cases}AB\perp OC\\AB\perp CH\end{cases}\Rightarrow AB\perp OH$,

tương tự $BC\perp OH$.

Do đó $OH\perp(ABC)\Rightarrow \vec{n}_{ABC}=\overrightarrow{OH}=(2;1;1)$.

Suy ra (P): $2x+y+z-6=0$.



Chọn phương án A

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;1)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua M và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho M là trực tâm của tam giác ABC.

A $3x+y+2z-14=0$.
B $3x+2y+z-14=0$.
C $\dfrac{x}{9}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6}=1$.
D $\dfrac{x}{12}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{4}=1$.

Lời giải.

Xét tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Ta có

$$\begin{cases}AB\perp CM\\AB\perp OC\end{cases}\Rightarrow AB\perp(COM)\Rightarrow AB\perp OM.$$

Chứng minh tương tự, ta được $AC\perp OM$. Từ đó $OM\perp(ABC)$. Suy ra phương trình mặt phẳng (ABC) đi qua $M(3;2;1)$ và nhận $\overrightarrow{OM}=(3;2;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến là:

$$3(x-3)+2(y-2)+z-1=0\Leftrightarrow 3x+2y+z-14=0.$$

Chọn phương án B

Câu 44. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 27 = 0$ đi qua hai điểm $A(3;2;1)$, $B(-3;5;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x + y + z + 4 = 0$. Tính tổng $S = a + b + c$.

Ⓐ $S = -12$. Ⓑ $S = 2$. Ⓒ $S = -4$. Ⓓ $S = -2$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có hệ $\begin{cases} 3a + 2b + c - 27 = 0 \\ -3a + 5b + 2c - 27 = 0 \\ 3a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 27 \\ c = -45 \end{cases}$.

Vì vậy ta có $S = a + b + c = -12$.

Chọn phương án A

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng trung trực (α) của đoạn thẳng AB với $A(0;-4;1)$ và $B(-2;2;3)$ là

Ⓐ $(\alpha): x - 3y + z = 0$. Ⓑ $(\alpha): x - 3y + z - 4 = 0$.

Ⓒ $(\alpha): x - 3y - z = 0$. Ⓓ $(\alpha): x - 3y - z - 4 = 0$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow M(-1;-1;2)$.

Phương trình mặt phẳng (α) đi qua M và nhận $\overrightarrow{AM} = (-1;3;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến

$\Rightarrow (\alpha): -x + 3y + z = 0 \Rightarrow (\alpha): x - 3y - z = 0$.

Chọn phương án C

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác O). Viết phương trình mặt phẳng (P) sao cho M là trực tâm của tam giác ABC.

Ⓐ $6x + 3y - 2z - 6 = 0$. Ⓑ $x + 2y + 3z - 14 = 0$.

Ⓒ $x + 2y + 3z - 11 = 0$. Ⓓ $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 3$.

Lời giải.

Ta có $AM \perp BC$ và $OA \perp BC$ nên $BC \perp OM$.

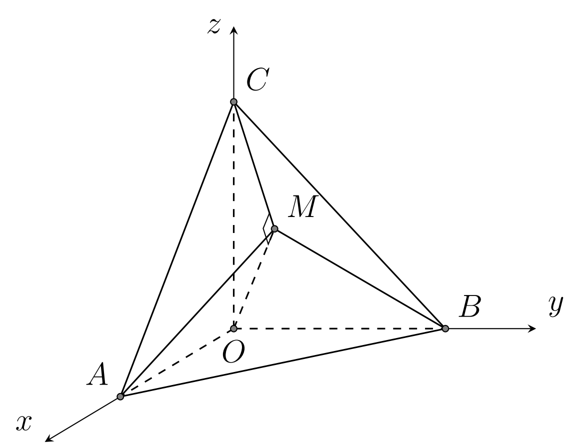
Ta có $BM \perp AC$ và $OB \perp AC$ nên $AC \perp OM$.

Vậy $OM \perp (ABC)$ nên (P) nhận $\overrightarrow{OM} = (1;2;3)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Do (P) đi qua $M(1;2;3)$ nên

$(P)\colon x - 1 + 2(y-2) + 3(z-3) = 0$

$\Leftrightarrow x + 2y + 3z - 14 = 0$



Chọn phương án B

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(3;4;4)$, $C(2;6;6)$ và $I(a;b;c)$

là trực tâm tam giác ABC. Tính $a+b+c$.

Ⓐ $\frac{46}{5}$. Ⓑ $\frac{31}{3}$. Ⓒ $\frac{63}{5}$. Ⓓ 10.

Lời giải.

$\overrightarrow{BC}=(-1;2;2)$, $\overrightarrow{AC}=(1;4;3)$, $\overrightarrow{AI}=(a-1;b-2;c-3)$, $\overrightarrow{BI}=(a-3;b-4;c-4)$, $(ABC)\colon 2x-5y+6z-10=0$

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ I\in(ABC)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(-1(a-1)+2(b-2)+2(c-3)=0\\ 1(a-3)+4(b-4)+3(c-4)=0\\ 2a-5b+6c-10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{27}{5}\\ b=4\\ c=\frac{16}{5}\end{cases}$

Suy ra $a+b+c=\frac{63}{5}$

Chọn phương án C

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C không trùng với gốc tọa độ O sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Trong các mặt phẳng sau mặt phẳng nào song song với mặt phẳng (P)?

Ⓐ $3x+2y+z+14=0$. Ⓑ $2x+3y+z+14=0$.

Ⓒ $3x+2y+z-14=0$. Ⓓ $2x+3y+z-14=0$.

Lời giải.

Theo giả thuyết suy ra $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a,b,c\neq 0$. Mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Do $M(3;2;1)\in(P)$ nên $\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=1$. (1)

Do M là trực tâm tam giác ABC nên $\begin{cases}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2b+c=0 & (1)\\ -3a+c=0 & (2)\end{cases}$

Từ $(1),(2)$ và (3) ta được $a=\frac{14}{3}$, $b=7$, $c=14$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(P)\colon \frac{3x}{14}+\frac{y}{7}+\frac{z}{14}=1$ hay $3x+2y+z-14=0$.

Chọn phương án A

Câu 49. Trong không gian với tọa độ $Oxyz$ cho $A(2;-3;0)$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x+2y-z+3=0$. Tìm phương trình mặt phẳng (P) đi qua A sao cho (P) vuông góc với (α) và (P) song song với trục Oz?

Ⓐ $y+2z+3=0$. Ⓑ $2x+y-1=0$. Ⓒ $x+2y-z+4=0$. Ⓓ $2x-y-7=0$.

Lời giải.

Vì $(P)\perp(\alpha)$ nên $\vec{n}_P\perp\vec{n}_\alpha$ và $(P)\parallel Oz$ nên $\vec{n}_P\perp\vec{k}$. Chọn $\vec{n}_P=[\vec{n}_\alpha,\vec{k}]=(2;-1;0)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $2x-y-7=0$.

Chọn phương án D

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;-2;0)$, $B(0;-4;0)$, $C(0;0;-3)$. Phương trình mặt phẳng (P) nào dưới đây đi qua A, gốc tọa độ O và cách đều hai điểm B và C?

Ⓐ $(P)\colon 2x-y+3z=0$. Ⓑ $(P)\colon 6x-3y+5z=0$.

Ⓒ $(P)\colon 2x - y - 3z = 0.$ Ⓓ $(P)\colon -6x + 3y + 4z = 0.$

Lời giải.

Vì (P) đi qua O nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng $ax + by + cz = 0$ $(a^2 + b^2 + c^2 > 0)$. Vì $A \in (P)$ và B, C cách đều (P) nên

$$\begin{cases} -a - 2b = 0 \\ |4b| = |3c| \end{cases}$$

Chọn $a = -6$, ta có $b = 3$, suy ra $c = \pm 4$. Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn là $-6x + 3y - 4z = 0$ hoặc $-6x + 3y + 4z = 0$.

Chọn phương án Ⓓ

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon x - y + z - 3 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (β) sao cho phép đối xứng qua mặt phẳng (Oxy) biến mặt phẳng (α) thành mặt phẳng (β).

Ⓐ $(\beta)\colon x + y - z + 3 = 0.$ Ⓑ $(\beta)\colon x - y - z + 3 = 0.$

Ⓒ $(\beta)\colon x + y + z - 3 = 0.$ Ⓓ $(\beta)\colon x - y - z - 3 = 0.$

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của mặt phẳng (α) với các trục tọa độ là $A(3;0;0), B(0;-3;0), C(0;0;3)$. Ta có A và $B \in (Oxy)$ và $C \in Oz$.

Kí hiệu $Đ_{(Oxy)}$ là phép đối xứng qua mặt phẳng Oxy.

Ta có $Đ_{(Oxy)} : (\alpha) \to (\beta) \Rightarrow Đ_{(Oxy)} : (A;B;C) \to (A;B;C')$, (ảnh của A, B trùng với chính nó vì $A, B \in (Oxy)$). Do C' đối xứng với $C(0;0;3)$ qua mặt phẳng Oxy, suy ra $C'(0;0;-3)$.

Từ đó suy ra mặt phẳng (β) có phương trình theo đoạn chắn là

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{-3} = 1 \Leftrightarrow (\beta)\colon x - y - z - 3 = 0.$$

Chọn phương án Ⓓ

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;1)$. Mặt phẳng (P) qua M và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Phương trình mặt phẳng (P) là

Ⓐ $x + y + z - 6 = 0.$ Ⓑ $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{1} = 0.$

Ⓒ $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{1} = 1.$ Ⓓ $3x + 2y + z - 14 = 0.$

Lời giải.

Giả sử $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, khi đó phương trình mặt phẳng $(ABC)\colon \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

Ta có $\overrightarrow{BC} = (0;-b;c)$, $\overrightarrow{CA} = (a;0;-c)$ và $\overrightarrow{AM} = (3-a;2;1)$, $\overrightarrow{BM} = (3;2-b;1)$.

Vì M là trực tâm tam giác ABC nên ta có hệ

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b + c = 0 \\ 3a - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2b \\ c = 3a. \end{cases}$$

Mặt khác vì M thuộc (ABC) nên $\dfrac{3}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{1}{c} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{3}{a} + \dfrac{2}{\frac{3a}{2}} + \dfrac{1}{3a} = 1 \Leftrightarrow a = \dfrac{14}{3}$.

Thay $a = \dfrac{14}{3}$, $b = 7$, $c = 14$ ta được phương trình mặt phẳng $(ABC)\colon 3x + 2y + z - 14 = 0$.
Chọn phương án D

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) biết (P) đi qua hai điểm $M(0;-1;0)$, $N(-1;1;1)$ và vuông góc với mặt phẳng (Oxz).

A. $(P)\colon x + z + 1 = 0$. B. $(P)\colon x - z = 0$. C. $(P)\colon z = 0$. D. $(P)\colon x + z = 0$.

Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{MN} = (-1;2;1)$ và (Oxz) có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{j} = (0;1;0)$.
Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n} = \left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{j}\right] = (-1;0;-1)$. Do đó, (P) có phương trình là $-1(x-0) + 0(y+1) - 1(z-0) = 0 \Leftrightarrow x + z = 0$.
Chọn phương án D

Câu 54. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) cắt ba trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C; trực tâm tam giác ABC là $H(1;2;3)$. Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. $x + 2y + 3z - 14 = 0$. B. $x + 2y + 3z + 14 = 0$.
C. $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 1$. D. $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 0$.

Lời giải.
Do mặt phẳng (P) cắt ba trục tọa độ tại ba điểm A, B, C mà $\triangle ABC$ nhận H làm trực tâm nên $OH \perp (P)$.
Vậy (P) đi qua điểm H và nhận véc-tơ $\overrightarrow{OH} = (1;2;3)$ làm véc-tơ pháp tuyến.
Suy ra mặt phẳng $(P)\colon x + 2y + 3z - 14 = 0$.
Chọn phương án A

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-2;3;1)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(Q)\colon x - 3y + 2z - 1 = 0$; $(R)\colon 2x + y - z - 1 = 0$ là

A. $-2x + 3y + z - 10 = 0$. B. $x - 3y + 2z - 1 = 0$.
C. $x + 5y + 7z - 20 = 0$. D. $x + 5y + 7z + 20 = 0$.

Lời giải.
Ta có vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) và mặt phẳng (R) là $\overrightarrow{n}_Q = (1;-3;2)$ và $\overrightarrow{n}_R = (2;1;-1)$.
Vì mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) và mặt phẳng (R) nên 1 vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (R) là $\overrightarrow{n}_P = [\overrightarrow{n}_Q, \overrightarrow{n}_R] = (1;5;7)$.
Vậy phương trình mặt phẳng (P) là

$$1(x+2) + 5(y-3) + 7(z-1) = 0 \Leftrightarrow x + 5y + 7z - 20 = 0.$$

Chọn phương án C

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x - y + z - 7 = 0$, $(Q)\colon 3x + 2y - 12z + 5 = 0$. Phương trình mặt phẳng (R) đi qua gốc tọa độ O và vuông góc với hai mặt phẳng nói trên là

A. $x + 3y + z = 0$. B. $2x + 3y + z = 0$. C. $x + 2y + z = 0$. D. $3x + 2y + z = 0$.

Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{n}_P = (1;-1;1)$; $\overrightarrow{n}_Q = (3;2;-12)$.
Mặt phẳng (R) vuông góc với hai mặt phẳng $(P);(Q)$ nên $\overrightarrow{n}_R = [\overrightarrow{n}_P, \overrightarrow{n}_Q] = (10;15;5) \Rightarrow \overrightarrow{n}_R = (2;3;1)$. Khi đó mặt phẳng (R) có phương trình $2x + 3y + z = 0$.

Chọn phương án B

Câu 57. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;-1)$, $B(1;-2;-3)$ và $(P)\colon 3x-2y+z-9=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa hai điểm A, B và vuông góc với (P).

A $x-5y-2z+19=0$.
B $x+y-z-2=0$.
C $x+y-z+2=0$.
D $3x-2y+z+13=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-5;-2)$; $\vec{n}_P=(3;-2;1)$.

Mặt phẳng (Q) chứa AB và vuông góc với (P) nên $\vec{n}_Q=[\overrightarrow{AB},\vec{n}_P]=(-9;-9;9)$.

Khi đó phương trình

$(Q)\colon -9(x+2)-9(y-3)+9(z+1)=0 \Leftrightarrow -x-y+z+2=0 \Leftrightarrow x+y-z-2=0$.

Chọn phương án B

Câu 58. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;-3)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+4=0$, $(\beta): 3y-z+5=0$ có phương trình là

A $-x+2y+6z+15=0$.
B $x+2y+6z+13=0$.
C $x+2y-6z-23=0$.
D $x-2y+6z+21=0$.

Lời giải.

Gọi mặt phẳng (P) đi qua $M(1;2;-3)$ và vuông góc với hai mặt phẳng (α) và (β) nên véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=\left[\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\beta\right]=(1;2;6)$.

Suy ra phương trình mặt phẳng $(P)\colon x+2y+6z+13=0$.

Chọn phương án B

Câu 59. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua $M(1;-3;8)$ và chắn trên tia Oz một đoạn thẳng dài gấp đôi các đoạn thẳng mà nó chắn trên các tia Ox và Oy. Giả sử $(P)\colon ax+by+cz+d=0$, với a,b,c,d là các số nguyên và $d\neq 0$. Tính $S=\dfrac{a+b+c}{d}$.

A $S=-\dfrac{5}{4}$.
B $S=\dfrac{5}{4}$.
C $S=3$.
D $S=-3$.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta suy ra các giao điểm của (α) với các tia Ox, Oy, Oy lần lượt là $A(a;0;0)$, $B(0;a;0)$ và $C(0;0;2a)$, với $a>0$. Suy ra phương trình (đoạn chắn) của (α) là $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}+\dfrac{z}{2a}=1$. Do (α) đi qua M nên $a=2$. Suy ra $(\alpha)\colon 2x+2y+z-4=0$. Từ đó, ta tính được $S=\dfrac{a+b+c}{d}=\dfrac{2+2+1}{-4}=-\dfrac{5}{4}$.

Chọn phương án A

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;-1)$, $B(1;-2;-3)$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x-2y+z+9=0$. Mặt phẳng (α) chứa hai điểm A, B và vuông góc với (P) có phương trình là

A $x+y-z-2=0$.
B $3x-2y+z+13=0$.
C $x+y-z+2=0$.
D $x-5y-2z+19=0$.

Lời giải.

Véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{a}=(3;-2;1)$ và $\overrightarrow{AB}=(3;-5;-2)$.

Gọi $\vec{n}$ là véc-tơ pháp tuyến của (α).

Ta có $\vec{n} = [\vec{a}; \overrightarrow{AB}] = (9; 9; -9) = 9(1; 1; -1)$.
Phương trình mặt phẳng (α): $x + y - z - 2 = 0$.
Chọn phương án A

D MỨC ĐỘ 4

Câu 61. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P) : x+2y-2z+2018 = 0, (Q) : x + my + (m-1)z + 2017 = 0$. Khi hai mặt phẳng (P) và (Q) tạo với nhau một góc nhỏ nhất thì điểm M nào dưới đây nằm trong (Q)?

A $M(-2017; 1; 1)$. B $M(2017; -1; 1)$. C $M(-2017; 1; -1)$. D $M(1; 1; -2017)$.

Lời giải.

(P) có VTPT là $\overrightarrow{n_{(P)}} = (1; 2; -2)$.
(Q) có VTPT là $\overrightarrow{n_{(Q)}} = (1; m; m-1)$.
Gọi α là góc giữa (P) và (Q).

$$\cos\alpha = \frac{|1 + 2m - 2m + 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}.\sqrt{1^2 + m^2 + (m-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}} = \frac{1}{\sqrt{2\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}}}$$

Để α nhỏ nhất thì $\cos\alpha$ lớn nhất $\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.
Khi đó $(Q) : x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + 2017 = 0$. Khi đó (Q) đi qua $M(-2017; 1; 1)$.
Chọn phương án A

Câu 62. Trong không gian, với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0; 1; 2)$, $B(2; -2; 0)$, $C(-2; 0; 1)$. Mặt phẳng (P) đi qua A, trực tâm H của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A $4x + 2y - z + 4 = 0$. B $4x + 2y + z - 4 = 0$. C $4x - 2y - z + 4 = 0$. D $4x - 2y + z + 4 = 0$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB} = (2, -3, -2)$; $\overrightarrow{AC} = (-2; -1; -1)$; $\overrightarrow{BC} = (-4; 2; 1)$.
$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1; 6; -8)$.
Gọi tọa độ trực tâm $H(a; b; c)$. $\overrightarrow{AH} = (a; b-1; c-2)$; $\overrightarrow{BH} = (a-2; b+2, c)$.
Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{AH} \cdot [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4a + 2(b-1) + c - 2 = 0 \\ -2(a-2) - 1(b+2) - c = 0 \\ a + 6(b-1) - 8(c-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{22}{101} \\ b = \frac{70}{101} \\ c = \frac{176}{101} \end{cases} \Rightarrow H\left(-\frac{22}{101}; \frac{70}{101}; \frac{176}{101}\right).$$

$\overrightarrow{AH} = \left(-\frac{22}{101}; -\frac{31}{101}; -\frac{26}{101}\right)$.
Gọi $\vec{n}$ là VTPT của mặt phẳng (P).

Ta có $\begin{cases}\vec{n} \perp \overrightarrow{AH} \\ \vec{n} \perp \vec{n}_{(ABC)}\end{cases} \Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AH}, \vec{n}_{(ABC)}] = (4; -2; -1)$

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(0;1;2)$ có một VTPT là $\vec{n} = (4; -2; -1)$ là

$4(x-0) - 2(y-1) - 1(z-2) = 0 \Leftrightarrow 4x - 2y - z + 4 = 0$.

Vậy $(P): 4x - 2y - z + 4 = 0$.

Chọn phương án C

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;1;1), B(0;1;2), C(-2;1;4)$ và mặt phẳng $(P): x - y + z + 2 = 0$. Tìm điểm $N \in (P)$ sao cho $S = 2NA^2 + NB^2 + NC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A $N(-1;2;1)$. **B** $N\left(-\frac{4}{3}; 2; \frac{4}{3}\right)$. **C** $N\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{4}; \frac{3}{4}\right)$. **D** $N(-2;0;1)$.

Lời giải.

Gọi I là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Ta tìm được $I(0;1;2)$.

Khi đó, $S = 4NI^2 + 2IA^2 + IB^2 + IC^2$.

S nhỏ nhất khi NI nhỏ nhất. Khi đó N là hình chiếu của I lên P.

Gọi $N(a;b;c)$ là hình chiếu vuông góc của điểm I lên mặt phẳng (P).

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{IN} \parallel \vec{n}_{(P)} \\ N \in (P)\end{cases}$.

Hay: $\begin{cases}\dfrac{a}{1} = \dfrac{b-1}{-1} = \dfrac{c-2}{1} \\ a - b + c + 2 = 0\end{cases}$.

Giải hệ ta được tọa độ điểm $N(-1;2;1)$.

Chọn phương án A

Câu 64. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $OA = OB = 2OC \neq 0$?

A 3. **B** 5. **C** 4. **D** 6.

Lời giải.

Đặt $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $abc \neq 0$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A, B, C có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Do $OA = OB = 2OC$ nên ta có $|a| = |b| = 2|c|$. Suy ra $a = \pm 2c, b = \pm 2c$.

— Nếu $a = 2c$ và $b = 2c$ thì mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{2c} + \frac{y}{2c} + \frac{z}{c} = 1$. Vì (P) đi qua M nên

$$\frac{1}{2c} + \frac{2}{2c} + \frac{3}{c} = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{2c} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{9}{2}.$$

Ta có (P): $x + y + 2z - 9 = 0$.

— Nếu $a = 2c$ và $b = -2c$ thì mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{2c} + \frac{y}{-2c} + \frac{z}{c} = 1$. Vì (P) đi qua M nên

$$\frac{1}{2c} - \frac{2}{2c} + \frac{3}{c} = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{2c} = 1 \Rightarrow c = \frac{5}{2}.$$

Ta có (P): $x - y + 2z - 5 = 0$.

— Nếu $a=-2c$ và $b=2c$ thì mặt phẳng (P) có dạng $\dfrac{x}{-2c}+\dfrac{y}{2c}+\dfrac{z}{c}=1$. Vì (P) đi qua M nên

$$-\frac{1}{2c}+\frac{2}{2c}+\frac{3}{c}=1 \Leftrightarrow \frac{7}{2c}=1 \Rightarrow c=\frac{7}{2}.$$

Ta có $(P)\colon -x+y+2z-7=0$.

— Nếu $a=-2c$ và $b=-2c$ thì mặt phẳng (P) có dạng $\dfrac{x}{-2c}+\dfrac{y}{-2c}+\dfrac{z}{c}=1$. Vì (P) đi qua M nên

$$-\frac{1}{2c}-\frac{2}{2c}+\frac{3}{c}=1 \Leftrightarrow \frac{3}{2c}=1 \Rightarrow c=\frac{3}{2}.$$

Ta có $(P)\colon -x-y+2z-3=0$.

Vậy có bốn mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn phương án C

Câu 65. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1;1;1)$, $B(2;0;2)$, $C(-1;-1;-0)$, $D(0;3;4)$. Trên các cạnh AB, AC, AD lần lượt lấy các điểm B', C', D' sao cho $\dfrac{AB}{AB'}+\dfrac{AC}{AC'}+\dfrac{AD}{AD'}=4$. Viết phương trình mặt phẳng $(B'C'D')$ biết tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích nhỏ nhất.

A $16x+40y-44z+39=0$.

B $16x+40y+44z-115=0$.

C $16x+40y+44z+39=0$.

D $16x+40y-44z-39=0$.

Lời giải.

Nhận thấy rằng V_{ABCD} là hằng số.

Áp dụng công thức tỷ số thể tích và bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương, ta có

$$\frac{V_{ABCD}}{V_{AB'C'D'}}=\frac{AB}{AB'}\cdot\frac{AC}{AC'}\cdot\frac{AD}{AD'}\le\left(\frac{\dfrac{AB}{AB'}+\dfrac{AC}{AC'}+\dfrac{AD}{AD'}}{3}\right)^3=\left(\frac{4}{3}\right)^3.$$

Do đó $V_{AB'C'D'}\ge\dfrac{27}{64}V_{ABCD}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{AB}{AB'}=\dfrac{AC}{AC'}=\dfrac{AD}{AD'}=\dfrac{4}{3}$.

Vì B', C', D' lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC, AD nên

$$\overrightarrow{AB'}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\Rightarrow B'\left(\frac{7}{4};\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right).$$

Lúc đó mặt phẳng $(B'C'D')$ đi qua B' và song song mặt phẳng (BCD) nên có phương trình là

$$16x+40y-44z+39=0.$$

Chọn phương án A

Câu 66. Biết rằng có n mặt phẳng với phương trình tương ứng là $(P_i): x+a_iy+b_iz+c_i=0 (i=1,2,...n)$ đi qua $M(1;2;3)$ (nhưng không đi qua O) và cắt các trục tọa độ Ox,Oy, Oz theo thứ tự tại A, B, C sao cho hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều. Tính tổng $S=a_1+a_2+...+a_n$

A $S = 3$. **B** $S = 1$. **C** $S = -4$. **D** $S = -1$.

Lời giải.

Giả sử $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, với $a,b,c \neq 0$. Khi đó trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\frac{a}{3};\frac{b}{3};\frac{c}{3}\right)$, mặt phẳng (P_i) có dạng : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Leftrightarrow x+\frac{a}{b}y+\frac{a}{c}z-a=0$

Theo bài ra (P_i) đi qua $M(1;2;3)$ nên ta có $1+\frac{2a}{b}+\frac{3a}{c}-a=0 \quad (1)$.

Mặt khác, vì $O.ABC$ là hình chóp đều nên tam giác ABC đều nên
$AB=BC=AC \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{b^2+c^2} \Leftrightarrow a^2=b^2=c^2$, kết hợp với (1) ta có các trường hợp sau

— $a=b=c \Rightarrow a=1+2+3=6$ nên $(P_1): x+y+z-6=0$

— $a=b=-c \Rightarrow a=1+2-3=0$ không thỏa yêu cầu.

— $a=-b=c \Rightarrow a=1-2+3=2$ nên $(P_2): x-y+z-2=0$

— $a=-b=-c \Rightarrow a=1-2-3=-5$ nên $(P_3): x-y-z+5=0$

— $-a=-b=c \Rightarrow a=1+2-3=0$, không thỏa yêu cầu

— $-a=b=-c \Rightarrow a=1-2+3=2$ nên $(P): x-y+z-2=0$ trùng với (P_2)

— $-a=b=c \Rightarrow a=1-2-3=-5$ nên $(P): x-y-z+5=0$ trùng với (P_3)

— $-a=-b=-c \Rightarrow a=1+2+3=6$ nên $(P): x+y+z-6=0$ trùng với (P_1)

Vậy $S=a_1+a_2+a_3=1-1-1=-1$.

Chọn phương án **D**

Câu 67. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-3;2)$, $B(-2;-1;5)$ và $C(3;2;-1)$. Gọi (P) là mặt phẳng qua A và trực tâm của tam giác ABC, đồng thời vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tìm phương trình mặt phẳng (P).

A $5x+3y+4z-22=0$. **B** $5x+3y+4z-4=0$.
C $5x+3y-6z+16=0$. **D** $5x+3y-6z-8=0$.

Lời giải.

Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Ta có (P) cắt (ABC) theo giao tuyến AH.

Hơn nữa, đường thẳng $BC \subset (ABC)$ và $BC \perp AH$ nên $BC \perp (P)$. Vậy $\vec{n}_{(P)}=\overrightarrow{BC}=(5;3;-6)$.

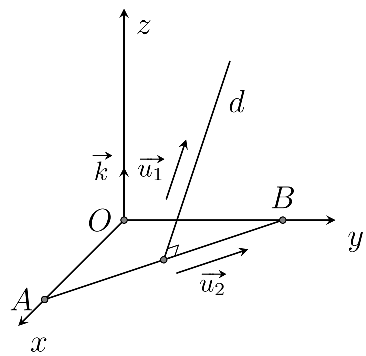
Do đó (P): $5(x-1)+3(y+3)-6(z-2)=0 \Leftrightarrow 5x+3y-6z+16=0$.

Chọn phương án **C**

Câu 68. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho đường thẳng AB vuông góc với d.

A (P): $x+2y+5z-4=0$. **B** (P): $x+2y+5z-5=0$.
C (P): $x+2y-z-4=0$. **D** (P): $2x-y-3=0$.

Lời giải.



Đường thẳng d qua điểm $M(2;1;0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(1;2;-1)$.
Gọi $\overrightarrow{u_2}$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB.
Do $\overrightarrow{u_2}\perp\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}\perp\overrightarrow{k}=(0;0;1)$ nên $\overrightarrow{u_2}=[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{k}]=(2;-1;0)$.
Mặt phẳng (P) chứa d và AB nên có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}=[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]=(-1;-2;-5)$.
Phương trình mặt phẳng (P) qua M và nhận $\overrightarrow{n}$ làm véc-tơ pháp tuyến là

$$-1(x-2)-2(y-1)-5z=0 \Leftrightarrow x+2y+5z-4=0.$$

Chọn phương án A

Câu 69. Trong không gian $Oxyz$, biết mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(1;1;1)$, $B(0;2;2)$ đồng thời (P) cắt các trục tọa độ Ox, Oy theo thứ tự tại hai điểm M, N (M, N đều không trùng với gốc tọa độ) thỏa mãn $OM=ON$. Biết mặt phẳng (P) có hai phương trình là $x+b_1y+c_1z+d_1=0$ và $x+b_2y+c_2z+d_2=0$. Tính đại lượng $T=b_1+b_2$.

A $T=2$. **B** $T=0$. **C** $T=4$. **D** $T=-4$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB}=(-1;1;1)$.

— Nếu mặt phẳng (P) song song với trục Oz.
(P) đi qua $A(1;1;1)$ có VTPT $\overrightarrow{n}=[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{k}]=(1;1;0)$.
Khi đó (P): $x+y-2=0$.
Dễ thấy (P) cắt Ox tại $M(2;0;0)$ cắt Oy tại $M(0;2;0)$. Ta thấy $OM=ON$ nên (P) thỏa mãn.

— Nếu mặt phẳng (P) cắt trục Oz. Áp dụng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn ta có

$$(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\ (a,b,c\neq 0)$$

Do đó phương trình (P) có dạng $x+By+Cz+D=0$ $(B,C,D\neq 0)$. (P) đi qua hai điểm A, B nên

$$\begin{cases}B+C+D=-1\\2B+2C+D=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2B+2C+2D=-2\\2B+2C+D=0\end{cases}\Rightarrow D=-2.$$

(P) cắt trục Ox tại $M(-D;0;0)$, cắt Oy tại $N(0;\dfrac{-D}{B};0)$.

Vì $OM = ON$ nên $|-D| = |\dfrac{-D}{B}| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -D = -\dfrac{D}{B} \Rightarrow B = 1 \text{ (loại vì } C \neq 0) \\ -D = \dfrac{D}{B} \Rightarrow B = -1 \Rightarrow C = 2. \end{array}\right.$

Do đó $(P): x - y + 2z - 2 = 0$. Vậy $b_1 + b_2 = 1 - 1 = 0$.

Chọn phương án B

Câu 70. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;1;-1), B(1;1;2), C(-1;2;-2)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 1 = 0$. Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua A, vuông góc với mặt phẳng (P) cắt đường thẳng BC tại I sao cho $IB = 2IC$ biết tọa độ điểm I là số nguyên.

A $(\alpha): 2x + 3y + 2z - 3 = 0$.
B $(\alpha): 4x + 3y - 2z - 9 = 0$.
C $(\alpha): 2x - y - 2z - 3 = 0$.
D $(\alpha): 6x + 2y - z - 9 = 0$.

Lời giải.

Đường thẳng BC qua $B(1;1;2)$ có VTCP $\vec{a} = (-2;1;-4)$ có phương trình là $\begin{cases} 1 - 2t \\ 1 + t \\ 2 - 4t \end{cases}$.

$I \in BC$ nên $I(x = 1 - 2t; y = 1 + t; z = 2 - 4t)$.
Ta có

$$\begin{aligned} & IB = 2IC \\ \Leftrightarrow\ & IB^2 = 4IC^2 \\ \Leftrightarrow\ & (2t)^2 + t^2 + (4t)^2 = 4[(2t-2)^2 + (1-t)^2) + (4t-4)^2] \\ \Leftrightarrow\ & 3t^2 - 8t + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = \dfrac{2}{3} \end{array}\right. . \end{aligned}$$

Với $t = 2$ thì $I(-3;3;-6)$.
Với $t = \dfrac{2}{3}$ thì $I(-\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3};-\dfrac{2}{3})$ (loại vì tọa độ điểm I là số nguyên).
Ta có $\vec{n}_{(P)} = (1;-2;2)$, $\overrightarrow{IA} = (4;-2;5)$.
$[\vec{n}_{(P)}, \overrightarrow{IA}] = (-6;3;6)$ là một VTPT của (α).
Vậy mặt phẳng (α) qua A có phương trình là $2x - y - 2z - 3 = 0$.
Chọn phương án C

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. B	3. D	4. C	5. B	6. D	7. C	8. A	9. D	10. B
11. B	12. B	13. C	14. A	15. D	16. A	17. D	18. D	19. C	20. D
21. C	22. B	23. B	24. B	25. A	26. B	27. D	28. C	29. A	30. C
31. B	32. D	33. A	34. D	35. A	36. D	37. A	38. D	39. A	40. A
41. D	42. A	43. B	44. A	45. C	46. B	47. C	48. A	49. D	50. D
51. D	52. D	53. D	54. A	55. C	56. B	57. B	58. B	59. A	60. A
61. A	62. C	63. A	64. C	65. A	66. D	67. C	68. A	69. B	70. C

DẠNG 38. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG $OXYZ$

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;0;1)$ và $N(3;2;-1)$. Đường thẳng MN có phương trình tham số là

Ⓐ $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng MN nhận $\overrightarrow{MN}=(2;2;-2)$ hoặc $\vec{u}=(1;1;-1)$ là vectơ chỉ phương nên ta loại ngay phương án A,B và C.

Thay tọa độ $M(1;0;l)$ vào phương trình ở phương án D ta thấy thỏa mãn.

Chọn phương án D

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, trục Ox có phương trình tham số là

Ⓐ $x=0$. Ⓑ $y+z=0$. Ⓒ $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$.

Lời giải.

Trục Ox đi qua $O(0;0;0)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{i}(1;0;0)$ nên có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x=0+1.t \\ y=0+0.t \\ z=0+0.t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=0. \\ z=0 \end{cases}$$

Chọn phương án D

Câu 2. Đường thẳng đi qua $A(2;-1;3)$ và nhận $\vec{a}=(1;1;-1)$ làm véc-tơ chỉ phương có phương trình

Ⓐ $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=-1+3t \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t. \\ z=3-t \end{cases}$ Ⓒ $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t. \\ z=3+t \end{cases}$ Ⓓ $\begin{cases} x=2-t \\ y=-1-t. \\ z=3-t \end{cases}$

Lời giải.

Đường thẳng đi qua $A(2;-1;3)$ và nhận $\vec{a}=(1;1;-1)$ làm véc-tơ chỉ phương có phương trình $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t. \\ z=3-t \end{cases}$

Chọn phương án B

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(3;3;-2)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;3;1)$. Viết phương trình đường thẳng d.

A $d\colon \dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-2}{1}$.

B $d\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+2}{1}$.

C $d\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-1}{-2}$.

D $d\colon \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z+1}{-2}$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua điểm $M(3;3;-2)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;3;1)$. Phương trình đường thẳng d là

$$d\colon \frac{x-3}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+2}{1}.$$

Chọn phương án B

Câu 4. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;2), B(2;-1;3)$. Viết phương trình đường thẳng AB.

A $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$.

B $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$.

C $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$.

D $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB là $\overrightarrow{AB}=(1;-2;1)$.

Suy ra phương trình đường thẳng AB là: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$.

Chọn phương án B

Câu 5. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(1;-2;3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-1;-2)$ có phương trình là

A $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{-2}$.

B $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$.

C $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$.

D $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{-2}$.

Lời giải.

Do giả thiết ta suy ra phương trình chính tắc của đường thẳng là $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{-2}$.

Chọn phương án A

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d)\colon \begin{cases} x=3-t \\ y=-1+2t \\ z=-3t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng (d)?

A $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-3}$.

B $\dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-3}$.

C $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{-3}$.

D $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-3}$.

Lời giải.

Đường thẳng (d) đi qua điểm $M(3;-1;0)$ và nhận $\vec{u}=(-1;2;-3)$ làm véc-tơ chỉ phương. Phương trình chính tắc của (d): $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-3}$.

Chọn phương án A

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-4}{4}$ có phương trình tham số là

A $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = -4 + 4t. \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$.

B $\begin{cases} x = 2 - 3m \\ y = -1 + 2m \\ z = 4 - 4m. \end{cases}$; $m \in \mathbb{R}$.

C $\begin{cases} x = -2 + 3\tan t \\ y = 1 - 2\tan t \\ z = -4 + 4\tan t. \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$.

D $\begin{cases} x = 2 - 3\cos t \\ y = -1 + 2\cos t \\ z = -4 - 4\cos t. \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Gọi $\vec{u}$ véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d, ta chọn $\vec{u}\,(-3; 2; -4)$. Giả sử $M_0 \in d$, chọn $M_0\,(2, -1; 4)$ suy ra phương trình tham số d là $\begin{cases} x = 2 - 3m \\ y = -1 + 2m \\ z = 4 - 4m \end{cases}$; $m \in \mathbb{R}$.

Chọn phương án B

Câu 8. Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M\,(2; 0; -1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{a} = (4; -6; 2)$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là

A $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases}$ $, t \in \mathbb{R}$.

B $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -6t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ $, t \in \mathbb{R}$.

C $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -3t \\ z = 2 + t \end{cases}$ $, t \in \mathbb{R}$.

D $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$ $, t \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M\,(2; 0; -1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -3; 1)$ nên có phương trình tham số $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$ $, t \in \mathbb{R}$.

Chọn phương án D

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-1}{-1}$. Phương trình tham số của đường thẳng d là

A $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 - t \end{cases}$ $, (t \in \mathbb{R})$.

B $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$ $, (t \in \mathbb{R})$.

C $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$ $, (t \in \mathbb{R})$.

D $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = -1 - t \end{cases}$ $, (t \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

Chọn phương án B

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng đi qua hai điểm $A(1; 2; -3)$ và $B(2; -3; 1)$ có phương trình tham số là

Ⓐ $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 5t \\ z = 2 + 4t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

Ⓑ $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -8 + 5t \\ z = 5 - 4t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

Ⓒ $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 5t \\ z = -3 - 2t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

Ⓓ $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 5t \\ z = 1 + 4t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB} = (1; -5; 4)$.

Đường thẳng đi qua hai điểm $A(1; 2; -3)$ và $B(2; -3; 1)$ có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 5t \\ z = -3 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Với $t = -2$, ta được $M(3; -8; 5)$ thuộc đường thẳng AB. Khi đó, đường thẳng AB có phương trình tham số $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -8 + 5t \\ z = 5 - 4t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$

Chọn phương án B

$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 5t \\ z = -3 - 2t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua $A(2; -1; 2)$ và nhận $\vec{u} = (-1; 2; -1)$ làm véc-tơ chỉ phương có phương trình chính tắc là

Ⓐ $\Delta\colon \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$.

Ⓑ $\Delta\colon \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$.

Ⓒ $\Delta\colon \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{-1}$.

Ⓓ $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua $A(2; -1; 2)$ và nhận $\vec{u} = (-1; 2; -1)$ làm véc-tơ chỉ phương có phương trình chính tắc là

$\Delta : \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$.

Chọn phương án A

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;3;-1)$, $B(1;2;4)$. Phương trình đường thẳng nào được cho dưới đây không phải là phương trình đường thẳng AB?

A $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-1}{-5}$.

B $\begin{cases} x=2-t \\ y=3-t \\ z=-1+5t \end{cases}$.

C $\begin{cases} x=1-t \\ y=2-t \\ z=4+5t \end{cases}$.

D $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-4}{-5}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA}=(1;1;-5)$.

Vì điểm $A(2;3;-1)\notin \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-1}{-5}$ nên $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-1}{-5}$ không phải là phương trình đường thẳng AB.

Các đường thẳng còn lại đều có véc-tơ chỉ phương là $(1;1;-5)$ và đi qua điểm $A(2;3;-1)$ hoặc đi qua điểm $B(1;2;4)$.

Chọn phương án A

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, hãy viết phương trình của đường thẳng d đi qua điểm $M(-1;0;0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon x+2y-z+1=0$.

A $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-1}$. **B** $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-1}$. **C** $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$. **D** $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua điểm $M(-1;0;0)$ và có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;2;-1)$ nên d có phương trình chính tắc là $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-1}$.

Chọn phương án A

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{a}=(4;-6;2)$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là

A $\begin{cases} x=-2+4t \\ y=-6t \\ z=1+2t. \end{cases}$.
B $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-3t \\ z=1+t. \end{cases}$.
C $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t. \end{cases}$.
D $\begin{cases} x=4+2t \\ y=-3t \\ z=2+t. \end{cases}$.

Lời giải.

Do Δ nhận $\vec{a}=(4;-6;2)=2(2;-3;1)$ làm véc-tơ chỉ phương nên ta suy ra phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t. \end{cases}$

Chọn phương án C

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=2-t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$. Phương trình chính tắc của đường thẳng d là

Nhóm: PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA

Ⓐ $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$. Ⓑ $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{1}$. Ⓒ $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$. Ⓓ $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{1}$.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(-1;1;1)$ và đi qua điểm $M(2;1;0)$.

Do đó d có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$.

Chọn phương án C

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng đi qua $M(1;2;3)$ và song song với trục Oy có phương trình là

Ⓐ $\begin{cases}x=1+t\\y=2\\z=3\end{cases},t\in\mathbb{R}$. Ⓑ $\begin{cases}x=1\\y=2+t\\z=3\end{cases},t\in\mathbb{R}$. Ⓒ $\begin{cases}x=1\\y=2\\z=3+t\end{cases},t\in\mathbb{R}$. Ⓓ $\begin{cases}x=1-t\\y=2+t\\z=3-t\end{cases},t\in\mathbb{R}$.

Lời giải.

Đường thẳng cần tìm có véc-tơ chỉ phương là $(0;1;0)$.

Phương trình tham số của đường thẳng là $\begin{cases}x=1\\y=2+t\\z=3\end{cases},t\in\mathbb{R}$.

Chọn phương án B

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;1;2)$ và $B(2;-1;0)$ là

Ⓐ $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{2}$. Ⓑ $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{2}$.

Ⓒ $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-4}{-2}$. Ⓓ $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+2}{-2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1,-2,-2)$. Phương trình đường thẳng AB đi qua $B(2;-1;0)$ nhận véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ làm véc-tơ chỉ phương nên có phương trình là $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{2}$.

Chọn phương án B

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $A(1;2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha):4x+3y-7z+1=0$. Phương trình tham số của d là

Ⓐ $\begin{cases}x=1+3t\\y=2+4t\\z=3-7t\end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases}x=-1+4t\\y=-2+3t\\z=-3-7t\end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases}x=4+t\\y=3+2t\\z=-7+3t\end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases}x=1+4t\\y=2+3t\\z=3-7t\end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) nên nhận véc-tơ $\vec{n}_\alpha$ làm véc-tơ chỉ phương. Suy ra, phương trình đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+4t\\y=2+3t\\z=3-7t\end{cases}$.

Chọn phương án D

Câu 19. Phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua điểm $M(2;0;-1)$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{a}(4;-6;2)$ là

A $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+1}{1}$.

B $\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z-1}{2}$.

C $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-1}{1}$.

D $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+6}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(2;0;-1)$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{a}(4;-6;2)$ nên có phương trình $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+1}{1}$.

Chọn phương án A

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho Δ là đường thẳng đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(4;-6;2)$. Phương trình chính tắc của Δ là

A $\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y}{-6}=\dfrac{z-1}{2}$.

B $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-1}{1}$.

C $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+1}{1}$.

D $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+6}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$.

Lời giải.

Ta có: $\vec{u}=(4;-6;2)\Rightarrow \vec{u'}=(2;-3;1)$.

Phương trình đường thẳng Δ là $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+1}{1}$.

Chọn phương án C

B MỨC ĐỘ 2

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+z-2=0$. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình là

A $\begin{cases}x=3+t\\y=2\\z=-1+t\end{cases}$.

B $\begin{cases}x=3+t\\y=2+t\\z=-1\end{cases}$.

C $\begin{cases}x=3+t\\y=2t\\z=1-t\end{cases}$.

D $\begin{cases}x=3+t\\y=1+2t\\z=-t\end{cases}$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P)\colon x+z-2=0$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(1;0;1)$.

Đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với (P) nhận $\vec{n}_{(P)}$ làm véc-tơ chỉ phương có phương trình là

$$\begin{cases}x=3+t\\y=2\\z=-1+t.\end{cases}$$

Chọn phương án A

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-1=0$. Đường thẳng đi qua A đồng thời song song với (P) và mặt phẳng (Oxy) có phương trình là

A $\begin{cases}x=3+t\\y=2t\\z=1-t\end{cases}$.

B $\begin{cases}x=2+t\\y=-t\\z=-1\end{cases}$.

C $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1\\z=-t\end{cases}$.

D $\begin{cases}x=3+t\\y=1+2t\\z=-t\end{cases}$.

Lời giải.

Ta có: $\vec{n}_{(P)} = (1;1;0)$, $\vec{n}_{(Oxy)} = (0;0;1)$.

Gọi d là đường thẳng đi qua A đồng thời song song với (P) và mặt phẳng (Oxy).

Khi đó $\begin{cases} \vec{u}_d \perp \vec{n}_{(P)} \\ \vec{u}_d \perp \vec{n}_{(Oxy)} \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_d = \left[\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Oxy)}\right] = (1;-1;0)$.

Vậy d: $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -t \\ z = -1. \end{cases}$

Chọn phương án B

Câu 23. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;5;3)$ và hai mặt phẳng (P): $2x+y+2z-8=0$, (Q): $x-4y+z-4=0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và song song với hai mặt phẳng (P) và (Q).

A $\begin{cases} x = 3+t \\ y = 5-t \\ z = 3 \end{cases}$.

B $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5+t \\ z = 3-t \end{cases}$.

C $\begin{cases} = 3+t \\ y = 5 \\ z = 3-t \end{cases}$.

D $\begin{cases} x = 3+t \\ y = 5 \\ z = 3+t \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}_{(P)} = (2;1;2)$ và $\vec{n}_{(Q)} = (1;-4;1)$.

$\left[\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}\right] = (9;0;-9)$. Do đường thẳng d song song với hai mặt phẳng (P) và (Q) nên d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;0;-1)$.

Vậy phương trình đường thẳng d là $\begin{cases} x = 3+t \\ y = 5 \\ z = 3-t. \end{cases}$

Chọn phương án C

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng (d): $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng (β): $x+y-2z+1=0$. Hỏi giao tuyến của (α) và (β) đi qua điểm nào dưới đây?

A $(1;-2;0)$. **B** $(2;3;3)$. **C** $(5;6;8)$. **D** $(0;1;3)$.

Lời giải.

Ta (α): $\begin{cases} d \subset (\alpha) \\ (\beta) \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(2;3;0) \in d \Rightarrow A \in (\alpha) \\ \vec{n}_\alpha \perp \vec{u}_d = (1;1;2) \\ \vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\beta = (1;1;-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(2;3;0) \in (\alpha) \\ \vec{n}_\alpha = \left[\vec{u}_d; \vec{n}_\beta\right] = (-4;4;0). \end{cases}$

Suy ra (α): $x-y+1=0$.

Khi đó giao tuyến thỏa hệ

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-2z+1=0. \end{cases}$$

Thay các phương án vào hệ, ta nhận phương án $(2;3;3)$.

Chọn phương án B

Câu 25 (2H3B3-2). Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-3;1)$ là

Ⓐ $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3 \\ z=1-t \end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-3t \\ z=1+t \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t \end{cases}$.

Lời giải.

Phương pháp: Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$ là $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct. \end{cases}$

Cách giải: Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-3;1)$ là $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t. \end{cases}$

Chọn phương án Ⓓ

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}, d_2\colon \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$. Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;2;3)$ vuông góc với d_1 và cắt đường thẳng d_2 có phương trình là

Ⓐ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$. Ⓑ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{-3}$.

Ⓒ $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{-5}$. Ⓓ $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{4}$.

Lời giải.

Phương pháp:

— Gọi $B=\Delta\cap d_2 \Rightarrow$ Tham số hóa tọa độ điểm B.

— Đường thẳng $\Delta\perp d_1 \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}_{d_1}=0 \Rightarrow$ Tọa độ điểm B.

— Viết phương trình Δ.

Cách giải: $d_2\colon \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$ có PTTS là $\begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \\ z=-1-t. \end{cases}$

Gọi giao điểm của Δ và d_2 là $B\,(1-t;1+2t;-1-t) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(-t;2t-1;-t-4)$.

Đường thẳng $\Delta\perp d_1 \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}_{d_1}=0$.

$\Rightarrow -t\cdot 3+(2t-1)\cdot 2+(-t-4)(-1)=0 \Leftrightarrow 2t+2=0 \Leftrightarrow t=-1$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(1;-3;-3)$ là 1 véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

Phương trình $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{-3}$.

Chọn phương án Ⓑ

Câu 27. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-3;4)$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-5}{-5} = \dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+z-2=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M vuông góc với d và song song với (P).

A $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-4}{-2}$.

B $\Delta\colon \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-4}{-2}$.

C $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-4}{-2}$.

D $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z+4}{2}$.

Lời giải.

Đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-5}{-5} = \dfrac{z-2}{-1}$ có vec tơ chỉ phương $\vec{u}_d = (3;-5;-1)$.

Mặt phẳng $(P)\colon 2x+z-2=0$ có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)} = (2;0;1)$.

Đường thẳng Δ vuông góc với d nên vec tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta \perp \vec{u_d}$.

Đường thẳng Δ song song với (P) nên $\vec{u}_\Delta \perp \vec{n}_{(P)}$.

Ta có $\left[\vec{u}_d, \vec{n}_{(P)}\right] = (-5;-5;10)$.

Suy ra vec tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}_\Delta - -\dfrac{1}{5}\cdot\left[\vec{u}_d, \vec{n}_{(P)}\right] = (1;1;-2)$.

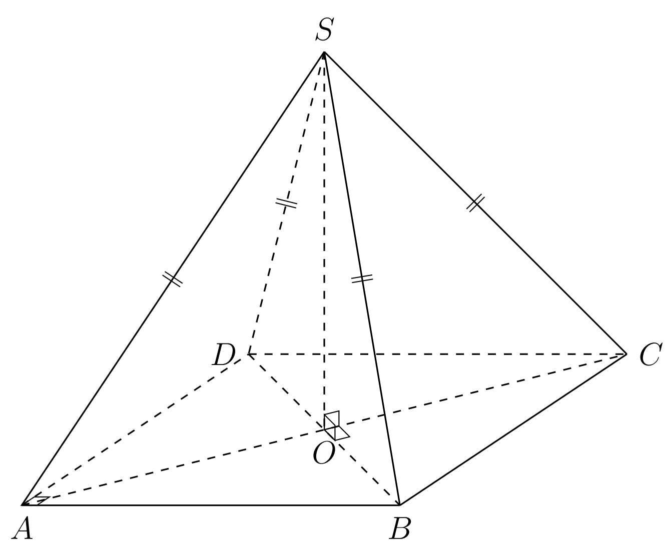
Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-4}{-2}$.

Chọn phương án C

Câu 28. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên SC tạo với mặt đáy một góc 45°. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **B** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **C** $V = \dfrac{2a^3}{3}$. **D** $V = 2a^3$.

Lời giải.



Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có SO là đường cao hình chóp $S.ABCD$. Vì cạnh bên SC tạo với đáy một góc 45° nên $\widehat{SCA} = 45^\circ$, suy ra ΔSAC vuông cân tại S, do đó $SO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Chọn phương án B

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-7}{1} = \dfrac{z-3}{4}$ và d_2 là giao tuyến của hai mặt phẳng $2x+3y-9=0, y+2z+5=0$. Vị trí tương đối của hai đường thẳng là

(A) song song. **(B)** chéo nhau. **(C)** cắt nhau. **(D)** trùng nhau.

Lời giải.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} 2x+3y-9=0 \\ y+2z+5=0 \end{cases}$.

Cho $y=1 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ z=-3 \end{cases} \Rightarrow A(3;1;-3) \in d_2$

Cho $y=3 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=-4 \end{cases} \Rightarrow B(0;3;-4) \in d_2$

Đường thẳng d_1 đi qua $M(1;7;3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}(2;1;4)$

Đường thẳng d_2 đi qua $A(3;1;-3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}(-3;2;-1) = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AM}(2;-6;-6)$

Ta có $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = (-9;-10;7) \Rightarrow [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}]\overrightarrow{AM} = -2.9+6.10-6.7=0$.

Do đó d_1 và d_2 cắt nhau.

Chọn phương án C

Câu 30. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $d\colon \dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x+5y-z-2=0$.

(A) $(1;0;1)$. **(B)** $(0;0;-2)$. **(C)** $(1;1;6)$. **(D)** $(12;9;1)$.

Lời giải.

Gọi I là giao điểm của d và (P).

Ta có $I \in d \Leftrightarrow I(4t+12;3t+9;t+1)$.

$I \in (P) \Leftrightarrow 3(4t+12)+5(3t+9)-(t+1)-2=0 \Leftrightarrow 26t=-78 \Leftrightarrow t=-3$.

Suy ra $I(0;0;-2)$.

Chọn phương án B

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng song song $d\colon \begin{cases} x=2-t \\ y=1+2t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z=4-2t \end{cases}$ và $d'\colon \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{2}$. Viết phương trình đường thẳng nằm trong mặt phẳng (d,d'), đồng thời cách đều hai đường thẳng d và d'.

(A) $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-4}{-2}$. **(B)** $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z+2}{2}$.

(C) $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-2}{2}$. **(D)** $\dfrac{x+3}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+2}{-2}$.

Lời giải.

Lấy $M(2;1;4) \in d$, $N(4;-1;0) \in d'$. Đường thẳng cần tìm đi qua trung điểm của MN, là điểm $I(3;0;2)$, và song song với d và d'. Phương trình đường thẳng cần tìm là $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-2}{2}$.

Chọn phương án C

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;1), B(-1;2;1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB).

A $\Delta:\begin{cases}x=t\\y=1+t\\z=1-t\end{cases}$. **B** $\Delta:\begin{cases}x=t\\y=1+t\\z=1+t\end{cases}$. **C** $\Delta:\begin{cases}x=3+t\\y=4+t\\z=1-t\end{cases}$. **D** $\Delta:\begin{cases}x=-1+t\\y=t\\z=3-t\end{cases}$.

Lời giải.

Tam giác OAB vuông tại O nên tâm đường tròn ngoại tiếp là trung điểm AB có tọa độ $I(0;1;1)$.

Mặt phẳng (OAB) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(-2;-2;2)$.

Suy ra đường thẳng Δ có $\vec{u}=(1;1;-1)$ và đi qua $I(0;1;1)$. Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\Delta:\begin{cases}x=t\\y=1+t\\z=1-t\end{cases}$.

Chọn phương án A

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và véc-tơ chỉ phương $\vec{a}=(4;-6;2)$. Phương trình tham số của Δ là

A $\begin{cases}x=-2+4t\\y=-6t\\z=1+2t\end{cases}$. **B** $\begin{cases}x=-2+2t\\y=-3t\\z=1+t\end{cases}$. **C** $\begin{cases}x=4+2t\\y=-6-3t\\z=2+t\end{cases}$. **D** $\begin{cases}x=2+2t\\y=-3t\\z=-1+t\end{cases}$.

Lời giải.

- Δ: $\begin{cases}x=2+4t\\y=-6t\\z=-1+2t\end{cases}$. Đặt $2t=t'$ ta có Δ: $\begin{cases}x=2+2t'\\y=-3t'\\z=-1+t'\end{cases}$.

Chọn phương án D

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng (d): $\begin{cases}x=1-t\\y=-1+2t\\z=2-t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Đường thẳng đi qua điểm $M(0;1;-1)$ và song song với đường thẳng (d) có phương trình là

A $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$. **B** $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$.

C $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$. **D** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$.

Lời giải.

Rõ ràng $M\notin(d)$.

Đường thẳng (d) có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(-1;2;-1)$.

Đường thẳng đi qua $M(0;1;-1)$ và song song với đường thẳng (d) có phương trình là $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$.

Chọn phương án A

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;3;4)$ và mặt phẳng $(P): 2x+3y-7z+1=0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua M và vuông góc với (P).

A $d: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+7}{4}$.
B $d: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-4}{-7}$.
C $d: \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-7}{4}$.
D $d: \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z+4}{-7}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;3;-7)$. Véc-tơ này là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d. Do đó, phương trình của d là $d: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-4}{-7}$.

Chọn phương án B

Câu 36. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $A(1;4;7)$ và vuông góc với mặt phẳng (P): $x+2y-2z-3=0$ là

A $\begin{cases} x=1+2t \\ y=4+4t \\ z=7-4t \end{cases}$.
B $\begin{cases} x=-4+t \\ y=3+2t \\ z=-1-2t \end{cases}$.
C $\begin{cases} x=1+4t \\ y=4+3t \\ z=7+t \end{cases}$.
D $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+4t \\ z=-2+7t \end{cases}$.

Lời giải.

(P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;2;-2)$.

Do đường thẳng d song song mặt phẳng (P) nên d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;2;-2)$.

Phương trình tham số d: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=4+4t \\ z=7-4t \end{cases}$.

Chọn phương án A

Câu 37. Phương trình nào sau đây là chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;2;-3)$ và $B(3;-1;1)$?

A $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{1}$.
B $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-3}$.
C $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+3}{4}$.
D $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-3}{4}$.

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng qua A và B.

Véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(2;-3;4)$.

Phương trình chính tắc d: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+3}{4}$.

Chọn phương án C

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua hai điểm $M(-1;0;0)$ và $N(0;1;2)$ có phương trình là

A $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{2}$.
B $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$.
C $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{2}$.
D $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$.

Lời giải.

Đường thẳng trên đi qua $M(-1;0;0)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{MN}=(1;1;2)$ nên có phương trình dạng chính tắc là $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$.

Chọn phương án D

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-3;4)$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-5}{-5}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+z-2=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M vuông góc với d và song song với (P).

Ⓐ $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-4}{-2}$.
Ⓑ $\Delta\colon \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-4}{-2}$.
Ⓒ $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$.
Ⓓ $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-4}{2}$.

Lời giải.

Vì $\vec{u}_\Delta\cdot\vec{n}_{(P)}=0$ và $\vec{u}_\Delta\cdot\vec{u}_d=0$ nên ta có thể chọn $\vec{u}_\Delta=\left[\vec{n}_{(P)};\vec{u}_d\right]=(-5;-5;10)$. Để cho gọn ta có thể chọn $\vec{u}_\Delta=(1;1;-2)$.

Phương trình đường thẳng Δ qua M có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta$ là $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$.

Chọn phương án Ⓒ

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, hãy viết phương trình của đường thẳng d đi qua hai điểm $M(0;-2;0)$, $N(1;-3;1)$.

Ⓐ $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{1}$.
Ⓑ $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{1}$.
Ⓒ $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{1}$.
Ⓓ $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{1}$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua hai điểm $M(0;-2;0)$, $N(1;-3;1)$ có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{MN}=(1;-1;1)$, suy ra phương trình chính tắc của đường thẳng d là $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{1}$.

Chọn phương án Ⓒ

C MỨC ĐỘ 3

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện đều $ABCD$ có $A(4;-1;2)$, $B(1;2;2)$, $C(1;-1;5)$, $D(x_D;y_D;z_D)$ với $y_D>0$. Tính $P=2x_D+y_D-z_D$.

Ⓐ $P=-3$.
Ⓑ $P=1$.
Ⓒ $P=-7$.
Ⓓ $P=5$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, suy ra $G(2;0;3)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;3;0)$, $\overrightarrow{AC}=(-3;0;3)\Rightarrow\vec{n}=[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=(1;1;1)$ và $AB=3\sqrt{2}$.

Đường thẳng đi qua G vuông góc với (ABC) có phương trình $\begin{cases}x=2+t\\y=t\\z=3+t.\end{cases}$

Do đó $D(2+t;t;3+t)$. Mà $AD=AB\Rightarrow(t-2)^2+2(t+1)^2=18\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=-2\end{array}\right.$.

Vì $y_D>0\Rightarrow y=2\Rightarrow 2x_D+y_D-z_D=5$.

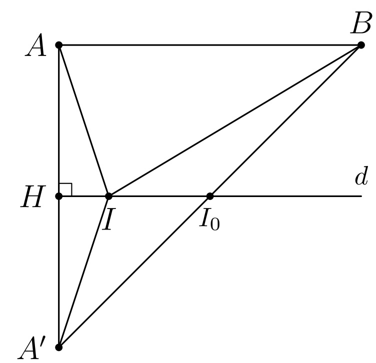
Chọn phương án Ⓓ

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(3;-4;-2)$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=2+4t \\ y=-6t \\ z=-1-8t \end{cases}$.
Điểm $I(a;b;c)$ thuộc d là điểm thỏa mãn $IA+IB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T=a+b+c$ bằng

Ⓐ $\dfrac{23}{58}$. Ⓑ $-\dfrac{43}{58}$. Ⓒ $\dfrac{65}{29}$. Ⓓ $-\dfrac{21}{58}$.

Lời giải.

Cách giải:



$d\colon \begin{cases} x=2+4t \\ y=-6t \\ z=-1-8t \end{cases}$ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(4;-6;-8)$.

$A=(1;-1;2), B=(3;-4;-2) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(2;-3;-4)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-3;-4)$ cùng phương với $\vec{u}=(4;-6;-8)$.

Mà $A(1;-1;2)\notin d \Rightarrow \overrightarrow{AB}\parallel d \Rightarrow A, B, d$ đồng phẳng.

Xét mặt phẳng chứa AB và d. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua d, (α) là mặt phẳng qua A, vuông góc với d.

Khi đó, giao điểm H của d với (α) là trung điểm của AA'.

(α) có 1 véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-3;-4)$ đi qua $A(1;-1;2)$ có phương trình:

$2(x-1)-3(y+1)-4(z-2)=0 \Leftrightarrow 2x-3y-4z+3=0$.

$H\in d\colon \begin{cases} x=2+4t \\ y=-6t \\ z=-1-8t \end{cases} \Rightarrow$ giả sử $H(2+4t;-6t;-1-8t)$.

$H\in(\alpha) \Rightarrow 2\,(2+4t)-3\,(-6t)-4\,(-1-8t)+3=0 \Leftrightarrow 58t+11=0$.

$\Leftrightarrow t=-\dfrac{11}{58} \Rightarrow H\left(\dfrac{36}{29};\dfrac{33}{29};\dfrac{15}{29}\right)$.

Ta có $IA+IB=IA'+IB'\geq A'B \Rightarrow \min(IA+IB)=A'B$ khi và chỉ khi I trùng với I_0 là giao điểm của $A'B$ và d.

HI_0 là đường trung bình của tam giác $A'AB$

$$\Rightarrow \overrightarrow{HI_0}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{I_0}-\dfrac{36}{29}=\dfrac{1}{2}\cdot 2 \\ y_{I_0}-\dfrac{33}{29}=\dfrac{1}{2}\cdot(-3) \\ z_{I_0}-\dfrac{15}{29}=\dfrac{1}{2}\cdot(-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{I_0}=\dfrac{65}{29} \\ y_{I_0}=-\dfrac{21}{58} \\ z_{I_0}=-\dfrac{43}{29} \end{cases}.$$

$\Rightarrow I_0\left(\dfrac{65}{29};-\dfrac{21}{58};-\dfrac{43}{29}\right)$.

Vậy để $IA+IB$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $I\left(\dfrac{65}{29};-\dfrac{21}{58};-\dfrac{43}{29}\right) \Rightarrow a+b+c=\dfrac{65}{29}-\dfrac{21}{58}-\dfrac{43}{29}=-\dfrac{21}{58}$.

Chọn phương án D

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ và hai điểm $A(-1;3;1)$ và $B\,(0;2;-1)$. Gọi $C\,(m;n;p)$ là điểm thuộc đường thẳng d sao cho diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{2}$. Giá trị của tổng $m+n+p$ bằng

Ⓐ -1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ -5.

Lời giải.

Phương trình tham số của đường thẳng $d:\begin{cases} x=-1+2t \\ y=t \\ z=2-t \end{cases}$.

Vì C thuộc d nên tọa độ của C có dạng $C(-1+2t;t;2-t)$.
Ta có $\overrightarrow{AB}(1;-1;-2)$ và $\overrightarrow{AC}(2t;t-3;1-t)$.
Suy ra $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(3t-7;-3t-1;3t-3)$.
Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(3t-7)^2+(-3t-1)^2+(3t-3)^2}$.
Theo bài ra ta có $S_{\triangle ABC}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sqrt{27t^2-54t+59}=2\sqrt{2}.\Leftrightarrow 27t^2-54t+59=32\Leftrightarrow(t-1)^2=0$ $\Leftrightarrow t=1$.
Với $t=1$ thì $C(1;1;1)$ nên $m=1;n=1;p=1$. Vậy giá trị của tổng $m+n+p=3$.

Chọn phương án C

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P):x+y-2z+5=0$ và $A(1;-1;2)$. Đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN. Một vectơ chỉ phương của Δ là

A $\vec{u}=(2;3;2)$. B $\vec{u}=(1;-1;2)$. C $\vec{u}=(-3;5;1)$. D $\vec{u}=(4;5;-13)$.

Lời giải.
Gọi $M(-1+2t;t;2+t)$.
Vì $A(1;-1;2)$ là trung điểm của đoạn MN nên ta có $N(3-2t;-2-t;2-t)$.
Lại có $N\in(P)$ nên $3-2t-2-t-2(2-t)+5=0\Leftrightarrow t=2\Rightarrow M(3;2;4)$.
Một vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{AM}=(2;3;2)$.
Chọn phương án A

Câu 45. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường thẳng $(d):\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P):2x-z-4=0,(Q):$ $x-2y-2=0$ là

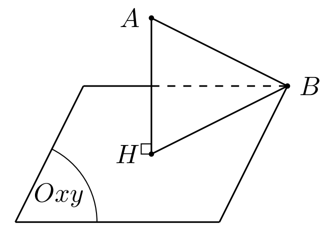
A $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5$. B $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\sqrt{5}$.
C $(S):(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=5$. D $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=3$.

Lời giải.
Gọi tâm mặt cầu là $I(a;a+1;a+2)\in(d)$.
Do mặt cầu tiếp xúc với (P) và (Q) nên $d(I;(P))=d(I;(Q))$.
Suy ra $\dfrac{|2a-a-2-4|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|a-2(a+1)-2|}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow|a-6|=|-a-4|\Leftrightarrow a=1$.
Tâm mặt cầu là $I(1;2;3)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.
Phương trình mặt cầu là $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5$.
Chọn phương án A

Câu 46. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-3)$, $B(3;-1;0)$. Viết phương trình tham số của đường thẳng d là hình chiếu vuông góc của đường thẳng AB trên mặt phẳng (Oxy).

A $d:\begin{cases}x=0\\y=-t\\z=-3+3t\end{cases}$. **B** $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=0\\z=-3+3t\end{cases}$. **C** $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-t\\z=0\end{cases}$. **D** $d:\begin{cases}x=0\\y=0\\z=-3+3t\end{cases}$.

Lời giải.



Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oxy) là $H(1;0;0)$.

Vì $B\in(Oxy)$ nên hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng (Oxy) trùng với điểm B.

Phương trình d cần tìm đi qua H và B.

Đường thẳng d đi qua H, có vec-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{HB}=(2;-1;0)$.

Suy ra phương trình tham số của d là $\begin{cases}x=1+2t\\y=-t\\z=0.\end{cases}$

Chọn phương án C

Câu 47. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;4)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$. Tìm hình chiếu vuông góc H của M lên đường thẳng d.

A $H(1;0;1)$. **B** $H(-2;3;0)$. **C** $H(0;1;-1)$. **D** $H(2;-1;3)$.

Lời giải.

Gọi $H(x;y;z)$ là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng $d\Rightarrow H\in d$.

do đó $H(t;1-t;-1+2t)\Rightarrow\overrightarrow{MH}=(t-1;1-t;2t-5)$.

Vì $MH\perp d$ nên $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow 1\cdot(t-1)-(1-t)+2(2t-5)=0\Leftrightarrow t=2$.

Suy ra $H\left(2;-1;3\right)$.

Chọn phương án D

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+5}{-2}$ và $\Delta_2\colon\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{1}$. Giả sử $M\in\Delta_1$, $N\in\Delta_2$ sao cho MN là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2. Tính $\overrightarrow{MN}$.

A $\overrightarrow{MN}=(5;-5;10)$. **B** $\overrightarrow{MN}=(2;-2;4)$. **C** $\overrightarrow{MN}=(3;-3;6)$. **D** $\overrightarrow{MN}=(1;-1;2)$.

Lời giải.

Δ_1 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1=(3;-1;-2)$ và Δ_2 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2=(1;3;1)$.

Gọi $M\left(4+3t;1-t;-5-2t\right)\in\Delta_1$ và $N\left(2+s;-3+3s;s\right)\in\Delta_2$.

Suy ra $\overrightarrow{MN}=(-2-3t+s;t+3s-4;2t+s+5)$.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{MN}\cdot\vec{u}_1=0\\\overrightarrow{MN}\cdot\vec{u}_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2s-t-3=0\\s-8t-9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}s=1\\t=-1.\end{cases}$

Vậy $\overrightarrow{MN}=(2;-2;4)$.

Chọn phương án B

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $(a,b\neq 0)$. Tập hợp tất cả các điểm cách đều ba điểm O,A,B là một đường thẳng có phương trình là

(A) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x = \dfrac{a}{2} \\ y = \dfrac{b}{2} \\ z = t \end{cases}$. (C) $\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = t \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = at \\ y = bt \\ z = t \end{cases}$.

Lời giải.

Tập hợp tất cả các điểm cách đều ba điểm O, A, B là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB). Dễ thấy tam giác OAB vuông tại O nên $I\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{b}{2};0\right)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp. Phương trình đường thẳng cần tìm là

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{2} \\ y = \dfrac{b}{2} \\ z = t \end{cases}.$$

Chọn phương án (B)

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và đường thẳng $(d): \begin{cases} x = 4 - t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

Tìm tọa độ hình chiếu A' của A trên (d).

(A) $A'(2;3;0)$. (B) $A'(-2;3;0)$. (C) $A'(3;0;2)$. (D) $A'(-3;0;-2)$.

Lời giải.

Đường thẳng (d) có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (-1;-1;1)$ và điểm A' có tọa độ $A'(4-t;1-t;1+t)$.

Ta có $\overrightarrow{A'A} = (t-3;t;-t)$.

Ta có $\overrightarrow{A'A} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 3 - t - t - t = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Từ đó có $A'(3;0;2)$.

Chọn phương án (C)

Câu 51. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 6x - 2y + z - 35 = 0$ và điểm $A(-1;3;6)$. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (P). Tính OA'.

(A) $OA' = 5\sqrt{3}$. (B) $OA' = 3\sqrt{26}$. (C) $OA' = \sqrt{46}$. (D) $OA' = \sqrt{186}$.

Lời giải.

Đường thẳng AA' qua $A(-1;3;6)$ nhận $\vec{n}_P = (6;-2;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Suy ra $AA'\colon \dfrac{x+1}{6} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-6}{1}$. Gọi $H = AA' \cap (P)$.

Tọa độ H là nghiệm của hệ $\begin{cases} \dfrac{x+1}{6} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-6}{1} \\ 6x - 2y + z - 35 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(5;1;7)$.

Ta có H là trung điểm AA' suy ra $A'(11;-1;8)$. Suy ra $OA' = \sqrt{186}$.

Chọn phương án (D)

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, gọi H là hình chiếu của điểm $A(-1;\,-1;\,-4)$ lên đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-2}$. Khi đó hoành độ điểm H là

(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) −2.

Lời giải.

$$\Delta\colon \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-2}\Rightarrow \Delta:\begin{cases}x=1+t\\ y=-1+t\\ z=-2t\end{cases},\ (t\in\mathbb{R}).$$

Đường thẳng Δ có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;\ 1;\ -2)$.

$H\in(\Delta)\Rightarrow H\left(1+t;\ -1+t;\ -2t\right)$.

$\overrightarrow{AH}=(2+t;\ t;\ 4-2t)$.

H là hình chiếu của A lên $\Delta\Rightarrow\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{u_\Delta}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{u_\Delta}=0\Leftrightarrow 2+t+t-2\cdot(4-2t)=0\Leftrightarrow t=1$.

$\Rightarrow H\left(2;0;-2\right)$.

Chọn phương án (B)

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-6}{4}$ và $d'\colon\begin{cases}x=5+t\\ y=-1-4t\\ z=20+t\end{cases}$. Tìm tọa độ giao điểm I của d và d'.

(A) $I\left(-3;-2;6\right)$. (B) $I\left(5;-1;20\right)$. (C) $I\left(3;7;18\right)$. (D) $I\left(13;-33;28\right)$.

Lời giải.

Thế d' vào d ta được:

$$\frac{8+t}{2}=\frac{1-4t}{3}=\frac{14+t}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{8+t}{2}=\dfrac{1-4t}{3}\\ \dfrac{1-4t}{3}=\dfrac{14+t}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}24+3t=2-8t\\ 4-16t=42+3t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-2\\ t=-2\end{cases}\Leftrightarrow t=-2.$$

Vậy $I\left(3;7;18\right)$.

Chọn phương án (C)

Câu 54. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon(x-5)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=36$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y+2z+5=0$ tiếp xúc nhau. Tìm tiếp điểm H của (S) và (P).

(A) $H\left(1;-1;-2\right)$. (B) $H\left(-3;-1;0\right)$. (C) $H\left(-3;0;-1\right)$. (D) $H\left(3;-3;-1\right)$.

Lời giải.

Ta có mặt cầu (S) có tâm $I\left(5;1;3\right)$.

Gọi d là đường thẳng đi qua qua $I\left(5;1;3\right)$ và vuông góc với $(P)\Rightarrow$ VTCP $\vec{u}_d=\vec{n}_P=(1;2;2)$.

Phương trình $d\colon\begin{cases}x=5+t\\ y=1+2t\\ z=3+2t\end{cases}$. Khi đó $H=d\cap(P)$.

Tọa độ điểm H là nghiệm phương trình: $5+t+2\left(1+2t\right)+2\left(3+2t\right)+5=0\Leftrightarrow t=-2$.

Vậy $H\left(3;-3;-1\right)$.

Chọn phương án (D)

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;4;2)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-1=0$. Tọa độ hình chiếu H của điểm M trên mặt phẳng (P) là

(A) $H(2;2;-3)$. (B) $H(-1;-2;4)$. (C) $H(-1;2;0)$. (D) $H(2;5;3)$.

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng qua M qua vuông góc với (P). Phương trình của d là $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

Hình chiếu H chính là giao điểm của d và (P), do đó tọa độ của nó là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 + t \\ z = 2 + t \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow H(-1; 2; 0).$$

Chọn phương án C

Câu 56. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+1}{1}$ và điểm $A(1; 2; 3)$. Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng d.

A $H(3; 1; -5)$. **B** $H(-3; 0; 5)$. **C** $H(3; 0; -5)$. **D** $H(2; 1; -1)$.

Lời giải.

Phương trình (α) qua A và vuông góc với d là $3(x-1) - 1(y-2) + 1(z-3) = 0 \Leftrightarrow 3x - y + z - 4 = 0$.

Phương trình tham số của đường thẳng d: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + t. \end{cases}$

Do $H \in d$ nên $H(2 + 3t; 1 - t; -1 + t)$.

Mặt khác $H \in (\alpha)$ nên $3(2 + 3t) - (1 - t) + (-1 + t) - 4 = 0 \Leftrightarrow 11t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow H(2; 1; -1)$.

Chọn phương án D

Câu 57. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 2 - 2t \\ 3 \\ z = t \end{cases}$. Viết phương trình mặt cầu có đường kính là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

A $\left(x + \dfrac{11}{6}\right)^2 + \left(y + \dfrac{13}{6}\right)^2 + \left(z - \dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{25}{9}$. **B** $\left(x + \dfrac{11}{6}\right)^2 + \left(y + \dfrac{13}{6}\right)^2 + \left(z - \dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{5}{6}$.

C $\left(x - \dfrac{11}{6}\right)^2 + \left(y - \dfrac{13}{6}\right)^2 + \left(z + \dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{25}{9}$. **D** $\left(x - \dfrac{11}{6}\right)^2 + \left(y - \dfrac{13}{6}\right)^2 + \left(z + \dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{5}{6}$.

Lời giải.

Hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau.

Gọi $A(2 + t; 1 - t; 2t) \in d_1$, $B(2 - 2t'; 3; t') \in d_2$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2t' - t; t + 2; t' - 2t)$.

d_1 có một VTCP là $\vec{u_1} = (1; -1; 2)$, d_2 có một VTCP là $\vec{u_2} = (-2; 0; 1)$.

Để AB là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 thì

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2t' - t) - (t + 2) + 2(t' - 2t) = 0 \\ -2(-2t' - t) + (t' - 2t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{1}{3} \\ t' = 0 \end{cases}$$

Suy ra $A\left(\frac{5}{3};\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right)$, $B(2;3;0)$.
Gọi I là trung điểm AB thì $I\left(\frac{11}{6};\frac{13}{6};-\frac{1}{3}\right)$.
Phương trình mặt cầu tâm I, bán kính $\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{30}}{6}$ là $\left(x-\frac{11}{6}\right)^2+\left(y-\frac{13}{6}\right)^2+\left(z+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{6}$.
Chọn phương án D

Câu 58. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+2)^2+(y-1)^2+z^2=18$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1 \\ y=2-t \\ z=-4+t \end{cases}$, biết d cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm tọa độ hai điểm A và B.

A. $A(1;1;-3), B(1;2;0)$.
B. $A(1;1;3), B(1;-2;0)$.
C. $A(1;1;-3), B(1;-2;0)$.
D. $A(1;-1;-3), B(1;-2;0)$.

Lời giải.

— Xét phương trình $(1+2)^2+(2-t-1)^2+(-4+t)^2=18 \Leftrightarrow 2t^2-10t+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=4. \end{array}\right.$

— Vậy $A(1;1;-3), B(1;-2;0)$.

Chọn phương án C

Câu 59. Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng $d\colon \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{-1}$ và cắt hai đường thẳng $d_1\colon \frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-1}$, $d_2\colon \frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{3}$.

A. $\frac{x+1}{-1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{1}$.
B. $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$.
C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{-1}$.
D. $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{1}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}_d=(1;1;-1)$, $\vec{u}_{d_1}=(2;1;-1)$, $\vec{u}_{d_2}=(-1;1;3)$.
Gọi (P) là mặt phẳng song song với d và chứa d_1 thì (P) đi qua $A(-1;-1;2)$ và có một VTPT là $\vec{n}_1=[\vec{u}_d,\vec{u}_{d_1}]=(0;-1;-1)$. Do đó $(P)\colon y+z-1=0$.
Gọi (Q) là mặt phẳng song song với d và chứa d_2
Ta có (Q) đi qua $B(1;2;3)$ và có một VTPT là $\vec{n}_2=[\vec{u}_d,\vec{u}_{d_2}]=(4;-2;2)$. Do đó $(Q)\colon 2x-y+z-3=0$.
Khi đó, đường thẳng cần tìm Δ là giao điểm của (P) và (Q), ta có

$$\Delta\colon \begin{cases} y+z-1=0 \\ 2x-y+z-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases} (t\in\mathbb{R}).$$

Hay $\Delta\colon \frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$.
Chọn phương án B

Câu 60. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;-6)$ và hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$, $d_2\colon \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{2}$. Đường thẳng đi qua điểm M và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 tại A, B. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A $2\sqrt{10}$. **B** $\sqrt{38}$. **C** 8. **D** 12.

Lời giải.

Giả sử A, B tồn tại. Vì $A\in d_1\Rightarrow A(1+2a;1-a;-1+a)$, $B\in d_2\Rightarrow B(-2+3b;-1+b;2+2b)$.

Ta có $\overrightarrow{MA}=(2a-1;2-a;a+5)$, $\overrightarrow{MB}=(3b-4;b;2b+8)$.

Vì $M,\ A,\ B$ thẳng hàng nên $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ cùng phương. Điều này tương đương với

$$\begin{cases}2a-1=k(3b-4)\\2-a=kb\\a+5=k(2b+8)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a-3kb+4k=1\\a+kb=2\\a-2kb-8k=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\kb=1\\k=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=2.\end{cases}$$

Vậy $A(3;0;0)$, $B(4;1;6)$ và $AB=\sqrt{(4-3)^2+1^2+6^2}=\sqrt{38}$.

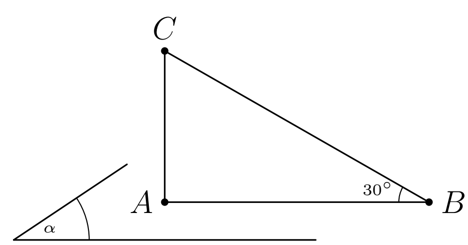
Chọn phương án B

D MỨC ĐỘ 4

Câu 61. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{ABC}=30^\circ$, $BC=3\sqrt{2}$, đường thẳng BC có phương trình $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z+7}{-4}$, đường thẳng AB nằm trong mặt phẳng (α) : $x+z-3=0$. Biết rằng đỉnh C có cao độ âm. Tìm hoành độ của đỉnh A.

A $\dfrac{3}{2}$. **B** 3. **C** $\dfrac{9}{2}$. **D** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.



Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z+7}{-4}\\x+z-3=0\end{cases}\Rightarrow B(2;3;1).$$

Do $C\in BC$ nên $C(4+c;5+c;-7-4c)$. Theo giả thiết $BC=3\sqrt{2}$ nên

$$18(2+c)^2=18\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&c=-1\Rightarrow C(3;4;-3)\\&c=-3\Rightarrow C(1;2;5)\end{aligned}\right..$$

Mặt khác đỉnh C có cao độ âm nên $C(3;4;-3)$.

Gọi $A(x;y;3-x)\in(\alpha)$. Do $\widehat{ABC}=30^\circ$ nên

$$\begin{cases}AB=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\\ AC=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^2+(y-3)^2+(2-x)^2=\dfrac{27}{2}\\ (x-3)^2+(y-4)^2+(6-x)^2=\dfrac{9}{2}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-8x+y^2-6y+\dfrac{7}{2}=0\\ 2x^2-18x+y^2-8y+\dfrac{113}{2}=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}10x+2y-53=0\\ 2x^2-8x+y^2-6y+\dfrac{7}{2}=0.\end{cases}$$

Từ (1) suy ra $y=\dfrac{53-10x}{2}$. Thay vào (2) ta có

$$\begin{aligned}&2x^2-8x+\left(\frac{53-10x}{2}\right)^2-6\cdot\frac{53-10x}{2}+\frac{7}{2}=0\\ \Leftrightarrow\ &108x^2-972x+2187=0\Leftrightarrow(2x-9)^2=0\\ \Leftrightarrow\ &x=\frac{9}{2}.\end{aligned}$$

Vậy $A\left(\dfrac{9}{2};4;-\dfrac{3}{2}\right)$.

Chọn phương án C

Câu 62. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;1),B(0;3;-1)$. Điểm M nằm trên mặt phẳng $(P):2x+y+z-4=0$ sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất là

A. $(1;0;2)$. B. $(0;1;3)$. C. $(1;2;0)$. D. $(3;0;2)$.

Lời giải.

Thay tọa độ của A,B vào vế trái của phương trình mặt phẳng $(P):2x+y+z-4=0$ ta được: $(2.2+1+1-4)(2.0+3-1-4)=-4<0$

Suy ra A,B nằm về hai phía của mặt phẳng (P).

Vậy $MA+MB\ge AB$ dấu "$=$" xảy ra khi $M=AB\cap(P)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;2;-2)$ chọn vtcp của đường thẳng $AB:\vec{u}=(1;-1;1)$.

Vậy phương trình đường thẳng $AB:\begin{cases}x=2+t\\ y=1-t\ (t\in\mathbb{R}).\\ z=1+t\end{cases}$

Tọa độ $(x;y;z)$ của M là nghiệm hệ

$$\begin{cases}x=2+t\\ y=1-t\\ z=1+t\\ 2x+y+z-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2+t\\ y=1-t\\ z=1+t\\ 2.(2+t)+1-t+1+t-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\\ z=0\\ t=-1\end{cases}\Rightarrow M(1;2;0).$$

Chọn phương án C

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x = 1 \\ y = t' \\ z = -t' \end{cases}$. Phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng trên là

A $\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z+2)^2 = \dfrac{9}{4}$.

B $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z-2)^2 = \dfrac{9}{4}$.

C $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z-2)^2 = \dfrac{3}{2}$.

D $\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z+2)^2 = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Gọi $A(4-2t; t; 3) \in d_1, B(1; t', -t') \in d_2$ lần lượt là 2 tiếp điểm.

Phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với d_1 và d_2 khi AB nhỏ nhất.

Khi đó AB là đường vuông góc chung của d_1 và d_2.

Ta có hệ $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4t + 6 + t' - t = 0 \\ t' - t + t' + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = -1 \end{cases}$.

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I\left(\dfrac{3}{2}; 0; 2\right)$. Bán kính $R = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S): \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z-2)^2 = \dfrac{9}{4}$.

Chọn phương án B

Câu 64. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-1; 0; 1)$, $B(1; 1; -1)$; $C(5; 0; -2)$. Tìm tọa độ điểm H sao cho tứ giác $ABCH$ lập thành hình thang cân với hai đáy AB, CH.

A $H(3; -1; 0)$. **B** $H(7; 1; -4)$. **C** $H(-1; -3; 4)$. **D** $H(1; -2; 2)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 1; -2)$; $M\left(0; \dfrac{1}{2}; 0\right)$ là trung điểm AB.

Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của $AB \Rightarrow (\alpha)\colon 2x + y - 2z - \dfrac{1}{2} = 0$.

Gọi d là đường thẳng qua C và song song $AB \Rightarrow d\colon \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$.

Gọi I là hình chiếu của C lên (α). Tọa độ I là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = t \\ z = -2 - 2t \\ 2x + y - 2z - \dfrac{1}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -\dfrac{3}{2} \\ z = 1 \\ t = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Suy ra $I\left(2; -\dfrac{3}{2}; 1\right)$. Do $ABCH$ là hình thang cân nên H và C đối xứng nhau qua mp(α).

$\Rightarrow I$ là trung điểm $CH \Rightarrow H(-1;-3;4)$.

Chọn phương án C

Câu 65. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;3;-2)$ và hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{1}$, $d_2\colon \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{4}$. Đường thẳng d qua M cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A $AB=3$. **B** $AB=2$. **C** $AB=\sqrt{6}$. **D** $AB=\sqrt{5}$.

Lời giải.

d_1 qua điểm $C(1;2;0)$, có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1=(1;3;1)$.
d_2 qua điểm $D(-1;1;2)$, có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2=(-1;2;4)$.
Xét mặt phẳng (P) chứa d_1 và điểm M. Suy ra $\vec{n}_P=\left[\overrightarrow{CM},\vec{u}_1\right]=(7;-4;5)$.
Xét mặt phẳng (Q) chứa d_2 và điểm M. Suy ra $\vec{n}_Q=\left[\overrightarrow{DM},\vec{u}_2\right]=(16;-12;10)$.
Đường thẳng d qua M và cắt d_1 nên $d\subset(P)$; Đường thẳng d qua M và cắt d_2 nên $d\subset(Q)$.
Khi đó $d=(P)\cap(Q)\Rightarrow \vec{u}_d=\left[\vec{n}_P,\vec{n}_Q\right]=(20;10;-20)$.
Suy ra phương trình đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$.
A là giao điểm d và $d_1\Rightarrow A(1;2;0)$; B là giao điểm d và $d_2\Rightarrow B(-1;1;2)$.
Vậy $AB=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3$.

Chọn phương án A

Câu 66. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-3=0$ và ba điểm $A(-1;-3;1)$, $B(0;-7;0)$, $C(-2;-1;1)$. Gọi $D(a;b;c)$ thuộc (S) sao cho thể tích tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất. Tính tổng $P=a+b+c$.

A $P=\dfrac{1}{3}$. **B** $P=1$. **C** $P=5$. **D** $P=\dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

— Ta có $V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot \mathrm{d}(D,(ABC))\cdot S_{ABC}$.

— Do S_{ABC} cố định nên V_{ABCD} đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow \mathrm{d}(D,(ABC))$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow D$ là giao điểm của mặt cầu (S) với đường thẳng qua tâm I, vuông góc với mặt phẳng (ABC) và thỏa mãn $\mathrm{d}(D,(ABC))=\mathrm{d}(I,(ABC))+R$.

— Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-2)$. Gọi d là đường thẳng qua I và vuông góc với (ABC).

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-4;-1), \overrightarrow{AC}=(-1;2;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(2;-1;-2)$.

Suy ra $d\colon \begin{cases} x=1+2t\\ y=-t\\ z=-2t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Giao điểm của d với (S) là $D\left(\dfrac{7}{3};-\dfrac{2}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$ hoặc $D\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3}\right)$.

— Ta có $(ABC)\colon 2x-y-2z-7=0$.

Với $D\left(\frac{7}{3};-\frac{2}{3};-\frac{4}{3}\right)$ ta có $\mathrm{d}(D,(ABC))=\frac{1}{3}$. Với $D\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$ ta có $\mathrm{d}(D,(ABC))=\frac{11}{3}$.

— Vậy $\mathrm{d}(D,(ABC))$ lớn nhất là $\frac{11}{3}$ khi $D\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)\Rightarrow a=-\frac{1}{3}, b=\frac{2}{3}, c=\frac{4}{3}\Rightarrow P=\frac{5}{3}$.

Chọn phương án D

Câu 67. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;1;1)$, đường trung tuyến kẻ từ B và đường cao kẻ từ C lần lượt có phương trình $\frac{x-8}{10}=\frac{y+7}{-9}=\frac{z-5}{5}$, $\frac{x-7}{2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-3}{-1}$. Biết $B(a;b;c)$, khi đó $a+b+c$ bằng

A 0. **B** 1. **C** -2. **D** 2.

Lời giải.

Giả sử đường cao là $CH\colon \frac{x-7}{2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-3}{-1}$ ta có véc-tơ chỉ phương của CH là $\vec{u}=(2;5;-1)$.

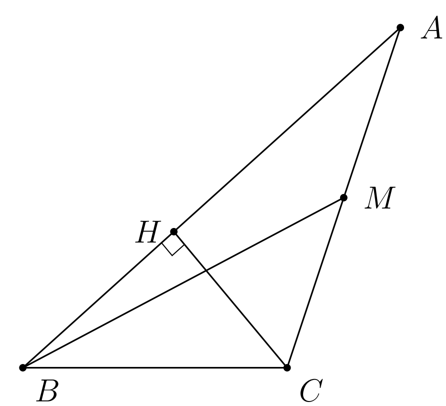
B thuộc đường trung tuyến $BM\colon \frac{x-8}{10}=\frac{y+7}{-9}=\frac{z-5}{5}$ nên $B(8+10t;-7-9t;5+5t)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}=(7+10t;-8-9t;4+5t)$.

Vì $CH\perp AB$ nên $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow -30t-30=0\Leftrightarrow t=-1$

$\Rightarrow B(-2;2;0)$.

Vậy $a+b+c=0$.



Chọn phương án A

Câu 68. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC vuông tại C, $\widehat{ABC}=60^\circ$, $AB=3\sqrt{2}$, đường thẳng AB có phương trình $\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+8}{-4}$, đường thẳng AC nằm trên mặt phẳng $(\alpha): x+z-1=0$. Biết B là điểm có hoành độ dương, gọi $(a;b;c)$ là tọa độ của C. Tính $a+b+c$.

A 3. **B** 2. **C** 4. **D** 7.

Lời giải.

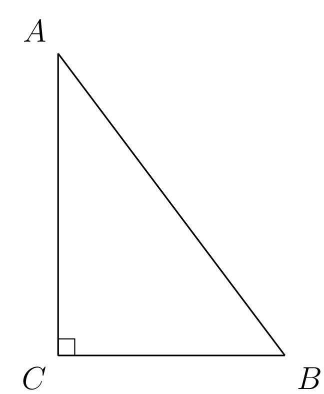
Ta thấy đường thẳng AB có một VTCP là $\vec{u}=(1;1;-4)$, mặt phẳng (α) có một VTPT là $\vec{n}=(1;0;1)$ nên góc giữa AB và (α) là φ với

$$\sin\varphi=\frac{|1\cdot1+1\cdot0+(-4)\cdot1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{1}{2}.$$

Suy ra $\varphi=30^\circ=\widehat{BAC}$.

Hơn nữa, $AC\subset(\alpha)$ và $BC\perp AC$ nên C là hình chiếu của B trên (α).

Ta tìm tọa độ của B.



Ta viết lại $AB:\begin{cases}x=3+t\\y=4+t\\z=-8-4t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Điểm A là giao điểm của AB và (α).

Xét phương trình $(3+t)+(-8-t)-1=0\Leftrightarrow t=-2$. Vậy $A(1;2;0)$.

Gọi $B(3+t';4+t';-8-4t')$, ta có $AB=3\sqrt{2}\Leftrightarrow(t'+2)^2+(t'+2)^2+(-4t'-8)^2=18$.

Suy ra $t'=-1$ hoặc $t'=-3$. Mà B có hoành độ dương nên ta chọn $t=-1$, khi đó $B(2;3;-4)$.

Đường thẳng BC vuông góc với (α) nên nhận $\vec{n}=(1;0;1)$ làm một VTCP, do đó

$$BC:\begin{cases}x=2+t\\y=3\\z=-4+t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R}).$$

C chính là giao điểm của BC và (α). Xét phương trình $(2+t)+(-4+t)-1=0\Leftrightarrow t=\dfrac{3}{2}$.

Suy ra $C\left(\dfrac{7}{2};3;-\dfrac{5}{2}\right)$. Vậy $a+b+c=4$.

Chọn phương án C

Câu 69. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z+3=0$ và hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$, $d_2\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+3}{1}$. Hai điểm $A\in d_1$ và $B\in d_2$ sao cho AB song song với mặt phẳng (P). Khi A,B thay đổi, tập hợp trung điểm của AB là

A một đường thẳng có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(-9;8;-5)$.

B một đường thẳng có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(-5;9;8)$.

C một mặt phẳng có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-2;-5)$.

D một mặt phẳng có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;5;-2)$.

Lời giải.

Ta có $A\left(3a;1-a;-1+a\right),B(2+b;1-2b;-3+b)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(2+b-3a;-2b+a;-2+b-a)$.

Ta có $AB\parallel(P)\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}_{(P)}=0\Rightarrow 2b=3a$.

Toạ độ trung điểm $I\left(\dfrac{2+3a+b}{2};\dfrac{2-a-2b}{2};\dfrac{-4+a+b}{2}\right)\Rightarrow I\left(1+\dfrac{3}{2}b;1-\dfrac{4}{3}b;-2+\dfrac{5}{6}b\right)$.

Vậy tập hợp trung điểm của AB là một đường thẳng có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(-9;8;-5)$.

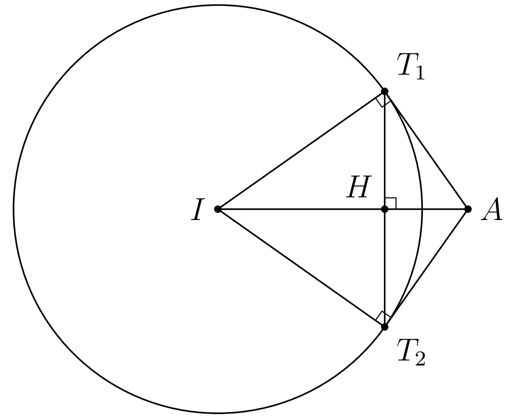
Chọn phương án A

Câu 70. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-13}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{4}$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-67=0$. Qua d dựng các mặt phẳng tiếp xúc với (S) lần lượt tại T_1,T_2. Tìm tọa độ trung điểm H của T_1T_2.

A $H(7;-4;6)$. **B** $H(9;6;4)$. **C** $H(2;10;-2)$. **D** $H(8;1;5)$.

Lời giải.

Mặt cầu đã cho có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=9$. Gọi A là hình chiếu của I trên đường thẳng d, khi đó các điểm I, T_1, T_2, A đồng phẳng (cùng thuộc mặt phẳng qua I, vuông góc với đường thẳng d). Do $A \in d$ nên $A(13-t; t-1; 4t)$, suy ra $\overrightarrow{IA}=(12-t; t-3; 4t-3)$. Vì $IA \perp d$ nên



$$\overrightarrow{IA}\cdot\vec{u}_d = 0 \Rightarrow t=\frac{3}{2}.$$

Suy ra $A\left(\frac{23}{2};\frac{1}{2};6\right)$ và $\overrightarrow{IA}=\left(\frac{21}{2};-\frac{3}{2};3\right)$. Ta có

$$\overrightarrow{IH}=\frac{IH}{IA}\overrightarrow{IA}=\frac{IT_1^2}{IA^2}\overrightarrow{IA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{IA}=(7;-1;2)$$

Vậy $H(8;1;5)$.

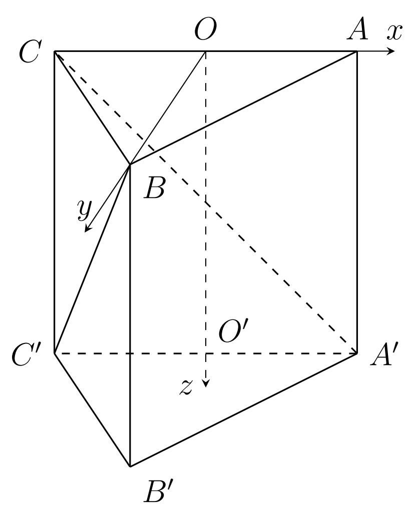
Chọn phương án D

Câu 71. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng cạnh đáy. Đường thẳng MN $(M \in A'C, N \in BC')$ là đường vuông góc chung của $A'C$ và BC'. Tỉ số $\dfrac{NB}{NC'}$ bằng

A $\frac{3}{2}$. **B** $\frac{2}{23}$. **C** 1. **D** $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Cách 1.



Gọi O, O' lần lượt là trung điểm AC, $A'C'$. Ta chọn hệ trục tọa độ sao cho $O(0;0;0)$, $A(1;0;0)$, $B\left(0;\sqrt{3};0\right)$, $O'(0;0;2)$. Khi đó $C(-1;0;0)$, $A'(1;0;2)$, $C'(-1;0;2)$. Suy ra phương trình của hai đường thẳng $A'C$ và BC' lần lượt là

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=2+t \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x=-1+t' \\ y=\sqrt{3}t' \\ z=2-2t'. \end{cases}$$

Do đó ta có thể coi $M\left(t+1;0;t+2\right)$ và $N\left(t'-1;\sqrt{3}t';-2t'+2\right)$. Suy ra $\overrightarrow{NM}\left(t-t'+2;-\sqrt{3}t';t+2t'\right)$. Do MN là đường vuông góc chung của $A'C$ và BC' nên

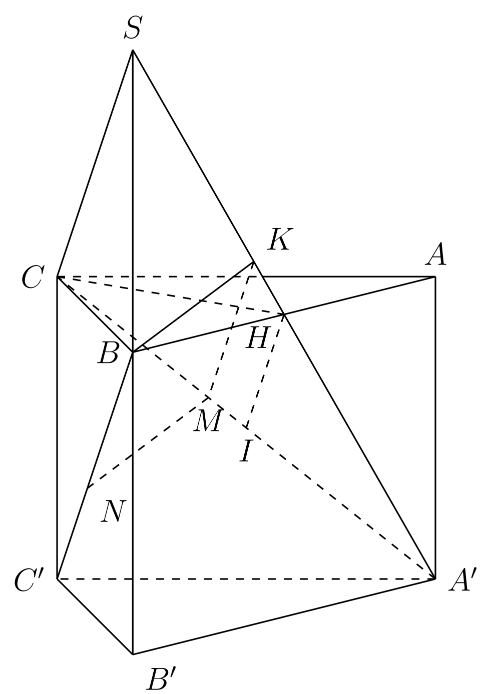
$$\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{CA'}=\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{C'B}=0.$$

hay ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}2t+t'+2=0\\ t+8t'-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-\dfrac{6}{5}\\ t'=\dfrac{2}{5}.\end{cases}$$

Suy ra $N\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{2\sqrt{3}}{5};\dfrac{6}{5}\right)$, do đó $NB=\dfrac{6\sqrt{2}}{5}$, $NC'=\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$. Vậy $\dfrac{NB}{NC'}=\dfrac{3}{2}$.

Cách 2.



Gọi H, I lần lượt là trung điểm của AB, AC'. Suy ra $HI\parallel BC'$. Trong mặt phẳng $(ABB'A')$, tia $A'H$ cắt tia $B'B$ tại S, gọi K là hình chiếu của B trên SH. Dễ thấy $BK\perp(SCH)$. Gọi M là hình chiếu của K trên $A'C$, chú ý rằng $CH=HA'$ nên $HI\perp A'C$, do đó $KM\parallel HI\parallel BC'$. Trong mặt phẳng $(BC'MK)$ lấy điểm N trên BC' sao cho $BKMN$ là hình bình hành. Khi đó MN là đoạn vuông góc chung cần tìm. Ta có

$$\frac{NB}{BC'}=\frac{MK}{2HI}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{HK}{A'H}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{HK}{HS}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{HB^2}{HS^2}\right).$$

Do $2HB=SB$ nên

$$\frac{NB}{BC'}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{HB^2}{HB^2+SB^2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{HB^2}{HB^2+4HB^2}\right)=\frac{3}{5}.$$

Vậy $\dfrac{NB}{NC'}=\dfrac{3}{2}$.

Chọn phương án A

Câu 72. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ có bán kính $R=\sqrt{19}$, đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=5+t \\ y=-2-4t \\ z=-1-4t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x-y-3z-1=0$. Trong các số $\{a;b;c;d\}$ theo thứ tự dưới đây, số nào thỏa mãn $a+b+c+d=43$, đồng thời tâm I của (S) thuộc đường thẳng d và (S) tiếp xúc mặt phẳng (P)?

A. $\{-6;-12;-14;75\}$. B. $\{6;10;20;7\}$. C. $\{-10;4;2;47\}$. D. $\{3;5;6;29\}$.

Lời giải.

Ta có $I\in d \Rightarrow I(5+t;2-4t;-1-4t)$.

Do (S) tiếp xúc với (P) nên $d(I;(P))=R=\sqrt{19}\Leftrightarrow |19+19t|=19\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-2 \end{array}\right.$

Mặt khác (S) có tâm $I(-\dfrac{a}{2};-\dfrac{b}{2};-\dfrac{c}{2})$; bán kính $R=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4}-d}=\sqrt{19}$.

Xét khi $t=0\Rightarrow I(5;-2;-1)\Rightarrow \{a;b;c;d\}=\{-10;4;2;47\}$.

Do $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4}-d\neq 19$ nên ta loại trường hợp này.

Xét khi $t=2\Rightarrow \{a;b;c;d\}=\{-6;-12;-14;75\}$.

Do $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4}-d=19$ nên $t=2$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn phương án A

Câu 73. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y+z+1=0$ và $(Q)\colon 2x-y+2z+4=0$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (Q) nằm trên trục hoành. Tìm tung độ của điểm M.

A. 4. B. 2. C. -3. D. -5.

Lời giải.

Gọi N là điểm đối xứng của điểm M qua mặt phẳng (Q), suy ra $N(n;0;0)$.

Gọi I thuộc (Q) là trung điểm của đoạn MN suy ra (Q) là mặt phẳng trung trực của đoạn MN.

Khi đó MN có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=\vec{n}_Q=(2;-1;2)$.

Phương trình đường thẳng MN là

$$MN\colon \begin{cases} x=n+2t \\ y=-t \\ z=2t \end{cases} \Rightarrow I(n+2t;-t;2t).$$

Vì I thuộc (Q) nên tọa độ điểm I thỏa mãn phương trình

$$2n+4t+t+4t+4=0\Leftrightarrow t=-\frac{2n+4}{9}.$$

Khi đó $I\left(\dfrac{5n-8}{9};\dfrac{2n+4}{9};-\dfrac{4n+8}{9}\right)$ suy ra $M\left(\dfrac{n-16}{9};\dfrac{4n+8}{9};-\dfrac{8n+16}{9}\right)$.

Do M thuộc (P) nên tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình

$$\frac{n-16}{9}+2\cdot\frac{4n+8}{9}-\frac{8n+16}{9}+1=0\Leftrightarrow n=7.$$

Vậy tung độ của điểm M bằng $\dfrac{4n+8}{9}=\dfrac{4\cdot 7+8}{9}=4$.

Chọn phương án A

Câu 74. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;1;-2)$, $B(-1;1;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z+1=0$. Điểm $C\in(P)$ sao cho tam giác ABC vuông cân tại B. Cao độ điểm C bằng

A 1 hoặc $-\dfrac{2}{3}$. **B** -1 hoặc $\dfrac{2}{3}$. **C** -3 hoặc $\dfrac{1}{3}$. **D** -1 hoặc $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA}=(-1;0;-2)$ mặt phẳng (Q) qua B vuông góc với BA có phương trình $x+2z+1=0$.

Ta có C thuộc giao tuyến của $(P),(Q)\Rightarrow\begin{cases}x+2z+1=0\\x+y+z+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1-2t\\y=t\\z=t\end{cases}\Rightarrow C(-1-2t;t;t)$.

Ta có $BA^2=BC^2\Leftrightarrow 5=(-2t)^2+(t-1)^2+t^2\Leftrightarrow 6t^2-2t-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-\dfrac{2}{3}.\end{array}\right.$

— Với $t=1\Rightarrow C(-3;1;1)$.

— Với $t=-\dfrac{2}{3}\Rightarrow C\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$.

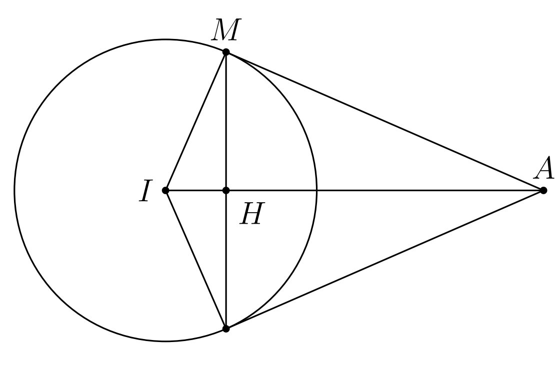
Vậy cao độ của C bằng $-\dfrac{2}{3}$ hoặc 1.

Chọn phương án A

Câu 75. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=16$ và điểm $A(-1;-1;-1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S), M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

A $3x+4y-2=0$. **B** $3x+4y+2=0$. **C** $6x+8y+11=0$. **D** $6x+8y-11=0$.

Lời giải.



Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-1)$ bán kính $R=4$.

Có $\overrightarrow{IA}=(-3;-4;0)\Rightarrow IA=5$.

Mặt phẳng cố định đi qua điểm H là hình chiếu của M xuống IA và nhận $\overrightarrow{IA}$ làm véc-tơ pháp tuyến

Do hai $\triangle MHI$ và $\triangle AMI$ đồng dạng nên $IM^2=IH\cdot IA\Rightarrow IH=\dfrac{IM^2}{IA}=\dfrac{16}{5}$.

Suy ra $\overrightarrow{IH}=\dfrac{16}{25}\overrightarrow{IA}\Rightarrow H\left(\dfrac{2}{25};\dfrac{11}{25};-1\right)$.

Mặt phẳng cần tìm có phương trình $-3\left(x-\dfrac{2}{25}\right)-4\left(y-\dfrac{11}{25}\right)=0\Leftrightarrow 3x+4y-2=0$.

Chọn phương án A

BẢNG ĐÁP ÁN

1. D	2. B	3. B	4. B	5. A	6. A	7. B	8. D	9. B	10. B
11. A	12. A	13. A	14. C	15. C	16. B	17. B	18. D	19. A	20. C
21. A	22. B	23. C	24. B	25. D	26. B	27. C	28. B	29. C	30. B
31. C	32. A	33. D	34. A	35. B	36. A	37. C	38. D	39. C	40. C
41. D	42. D	43. C	44. A	45. A	46. C	47. D	48. B	49. B	50. C
51. D	52. B	53. C	54. D	55. C	56. D	57. D	58. C	59. B	60. B
61. C	62. C	63. B	64. C	65. A	66. D	67. A	68. C	69. A	70. D
71. A	72. A	73. A	74. A	75. A					

DẠNG 39. XÁC SUẤT

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Có 6 chiếc ghế được kê thành một hàng ngang. Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh, gồm 3 học sinh lớp A, 2 học sinh lớp B và I học sinh lớp C, ngồi vào hàng ghế đó, sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh. Xác suất để học sinh lớp C chỉ ngồi cạnh học sinh lớp B bằng

A $\frac{1}{6}$. **B** $\frac{3}{20}$. **C** $\frac{2}{15}$. **D** $\frac{1}{5}$.

Lời giải.

Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh thành hàng ngang, không gian mẫu có số phần tử 6!.

Gọi M là biến cố "học học lớp C chỉ ngồi cạnh học sinh lớp B".

Xét các trường hợp

Trường hợp 1 Học sinh lớp C ngồi đầu dãy.

— Chọn vị trí cho học sinh lớp C có 2 cách.

— Chọn 1 học sinh lớp B ngồi cạnh học sinh lớp C có 2 cách.

— Hoán vị các học sinh còn lại cho nhau có 4! cách.
Trường hợp này thu được $2.2.4! = 96$ cách.

Trường hợp 2 Học sinh lớp C ngồi giữa hai học sinh lớp B , ta gộp thành 1 nhóm, khi đó:

— Hoán vị 4 phần tử gồm 3 học sinh lớp A và nhóm gồm học sinh lớp B và lớp C có: 4! cách.

— Hoán vị hai học sinh lớp B cho nhau có: 2! cách.
Như vậy số phần tử của biến cố M là: $48 + 96 = 144$.
Xác suất của biến cô M là $P(M) = \frac{144}{6!} = \frac{1}{5}$.

Chọn phương án **D**

Câu 1. Một người gọi điện nhưng quên hai số cuối và chỉ nhớ rằng hai chữ số đó phân biệt khác 0. Tính xác suất để người đó gọi một lần đúng số cần gọi.

A $\frac{1}{36}$. **B** $\frac{1}{72}$. **C** $\frac{1}{90}$. **D** $\frac{1}{45}$.

Lời giải.

Ta có $|\Omega| = 9 \cdot 8 = 72$. Suy ra xác suất cần tìm là $\frac{1}{72}$.

Chọn phương án **B**

Câu 2. Có 20 thẻ được đánh số từ 1 đến 20. Lấy ngẫu nhiên một thẻ. Tính xác suất P để thẻ lấy được đánh số chẵn.

A $P = \frac{1}{10}$. **B** $P = \frac{1}{2}$. **C** $P = 1$. **D** $P = \frac{1}{20}$.

Lời giải.

Trong 20 thẻ được đánh số từ 1 đến 20 có 10 thẻ đánh số chẵn, nên xác suất cần tìm là:

$$\mathrm{P} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

Chọn phương án (B)

Câu 3. Gieo một con súc sắc cân đối đồng chất một lần. Tính xác xuất để xuất hiện mặt chẵn.

(A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{6}$. (C) $\frac{1}{4}$. (D) $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Không gian mẫu $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$.

Gọi A là biến cố " con súc sắc xuất hiện mặt chẵn" $\Rightarrow n(A) = 3$.

Xác suất tìm được là: $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Chọn phương án (A)

Câu 4. Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 3 quyển sách lý, 2 quyển sách hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất để trong ba quyển sách lấy ra có ít nhất một quyển là toán.

(A) $\frac{2}{7}$. (B) $\frac{3}{4}$. (C) $\frac{37}{42}$. (D) $\frac{10}{21}$.

Lời giải.

Số kết quả có thể khi chọn bất kì 3 quyển sách trong 9 quyển sách là $C_9^3 = 84$.

Gọi A là biến có "Lấy được ít nhất 1 sách toán trong 3 quyển sách."

$\overline{A}$ là biến cố "Không lấy được sách toán trong 3 quyển sách."

Ta có xác suất để xảy ra A là $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{C_5^3}{84} = \frac{37}{42}$.

Chọn phương án (C)

Câu 5. Gieo một con xúc sắc cân đối đồng chất một lần. Tính xác suất để số chấm xuất hiện là số lẻ?

(A) $\frac{1}{6}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có: $n\left(\Omega\right) = 6$.

Gọi A là biến cố: "Số chấm xuất hiện là số lẻ "thì $n(A) = 3$. Do đó $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}$

Chọn phương án (B)

.

Câu 6. Gieo một con súc sắc cân đối, đồng chất một lần. Xác suất để xuất hiện mặt chẵn?

(A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{6}$. (C) $\frac{1}{4}$. (D) $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Gọi A: "Xuất hiện mặt chẵn", suy ra $A = \{2; 4; 6\}$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$.

Chọn phương án (A)

Câu 7. Lớp 11A có 35 học sinh. Trong đó có 20 bạn học tiếng Anh, 14 bạn học tiếng Nhật và 10 bạn học cả tiếng Anh và tiếng Nhật. Tính xác suất P để gọi ngẫu nhiên trong lớp 11A được một học sinh học tiếng Anh.

A $P = \dfrac{2}{7}$. **B** $P = \dfrac{2}{5}$. **C** $P = \dfrac{4}{7}$. **D** $P = \dfrac{3}{5}$.

Lời giải.

Xác suất để gọi ngẫu nhiên trong lớp 11A được một học sinh học tiếng Anh là $P = \dfrac{20}{35} = \dfrac{4}{7}$.

Chọn phương án C

Câu 8. Một bình chứa 7 viên bi trắng, 6 viên bi đen và 3 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 viên bi. Xác suất để trong 3 viên bi lấy ra không có viên bi nào màu đỏ bằng

A $\dfrac{143}{280}$. **B** $\dfrac{1}{16}$. **C** $\dfrac{1}{560}$. **D** $\dfrac{1}{28}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{16}^3$.

Gọi A là biến cố "3 viên bi lấy ra không có viên bi nào màu đỏ".

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $n(A) = \mathrm{C}_{13}^3$.

Vậy xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\mathrm{C}_{13}^3}{\mathrm{C}_{16}^3} = \dfrac{143}{280}$.

Chọn phương án A

Câu 9. Năm đoạn thẳng có độ dài 1 cm, 3 cm, 5 cm, 7 cm, 9 cm. Lấy ngẫu nhiên ba đoạn thẳng trong năm đoạn thẳng trên. Xác suất để ba đoạn thẳng lấy ra có thể tạo thành ba cạnh của một tam giác là

A $\dfrac{2}{5}$. **B** $\dfrac{7}{10}$. **C** $\dfrac{3}{5}$. **D** $\dfrac{3}{10}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_5^3 = 10$.

Gọi A là biến cố "ba đoạn thẳng lấy ra có thể tạo thành ba cạnh của một tam giác". Khi đó các trường hợp thuận lợi cho biến cố A thì độ dài các đoạn thẳng lấy ra chỉ có thể là $(3;5;7)$, $(3;7;9)$ và $(5;7;9)$ nên $n(A) = 3$.

Vậy xác suất cần tìm là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{10}$.

Chọn phương án D

Câu 10. Từ một đội văn nghệ gồm 5 nam và 8 nữ cần lập một nhóm gồm 4 người hát tốp ca. Xác suất để trong 4 người được chọn đều là nam bằng

A $\dfrac{\mathrm{C}_8^4}{\mathrm{C}_{13}^4}$. **B** $\dfrac{\mathrm{C}_5^4}{\mathrm{C}_{13}^4}$. **C** $\dfrac{\mathrm{C}_8^4}{\mathrm{A}_{13}^4}$. **D** $\dfrac{\mathrm{A}_5^4}{\mathrm{C}_8^4}$.

Lời giải.

Chọn 4 học sinh trong 13 học sinh có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{13}^4$.

Gọi biến cố A: "Chọn 4 học sinh nam trong 5 học sinh nam" có $n(A) = \mathrm{C}_5^4$.

Suy ra $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{\mathrm{C}_5^4}{\mathrm{C}_{13}^4}$.

Chọn phương án B

Câu 11. Một bình đựng 4 quả cầu xanh và 6 quả cầu trắng. Chọn ngẫu nhiên 3 quả cầu. Xác suất để được 3 quả cầu toàn màu xanh là

(A) $\frac{3}{10}$. (B) $\frac{1}{15}$. (C) $\frac{1}{20}$. (D) $\frac{1}{30}$.

Lời giải.

$n(\Omega) = C_{10}^3 = 120$.

Gọi A: "Lấy được 3 quả cầu toàn màu xanh".

$n(A) = C_4^3 = 4$.

Suy ra $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{30}$.

Chọn phương án (D)

Câu 12. Gieo một con súc sắc cân đối, đồng chất. Tính xác suất xuất hiện mặt có số chấm là chẵn.

(A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{3}{5}$. (C) $\frac{1}{6}$. (D) $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Dễ thấy không gian mẫu là $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Gọi A là biến cố xuất hiện mặt có số chấm là chẵn, khi đó $A = \{2; 4; 6\}$. Vậy xác suất cần tìm là $\frac{|\Omega|}{|A|} = \frac{1}{2}$.

Chọn phương án (A)

Câu 13. Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc một lần. Tính xác suất để mặt 6 chấm xuất hiện.

(A) $\frac{5}{6}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{1}{6}$. (D) $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là 6. Xác suất để mặt 6 chấm xuất hiện là $\frac{1}{6}$.

Chọn phương án (C)

Câu 14. Gieo ngẫu nhiên một con xúc sắc cân đối đồng chất hai lần. Tính xác suất để số chấm của hai lần gieo là bằng nhau

(A) $\frac{1}{8}$. (B) $\frac{1}{6}$. (C) $\frac{1}{7}$. (D) $\frac{1}{5}$.

Lời giải.

Gọi số chấm ở hai lần gieo là cặp số $(x; y)$ trong đó x, y lần lượt là kết quả của việc gieo con xúc sắc lần một và lần hai và gọi "A : là biến cố số chấm hai lần gieo bằng nhau".

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 36$.

Số trường hợp thuận lợi của biến cố A là $n(A) = 6$, do đó xác suất cần tìm là $P(A) = \frac{1}{6}$.

Chọn phương án (B)

Câu 15. Gieo một con xúc sắc cân đối đồng chất một lần. Tính xác suất để xuất hiện một mặt có số chấm là một số nguyên tố.

(A) $\frac{1}{4}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{2}{3}$. (D) $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là 6. Số phần tử của biến cố "Xuất hiện mặt có số chấm là số nguyên tố" là 3 (bao gồm các mặt 2, 3, 5. Vậy xác suất cần tìm là $\frac{1}{2}$.

Chọn phương án (B)

Câu 16. Một hộp chứa 20 thẻ được đánh số từ 1 đến 20. Lấy ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp đó. Tính xác suất để thẻ lấy được ghi số lẻ và chia hết cho 3.

(A) 0,3. (B) 0,5. (C) 0,2. (D) 0,15.

Lời giải.

Trong các thẻ đánh số từ 1 đến 20 các thẻ đánh số lẻ và chia hết cho 3 là $3; 9; 15$. Vậy xác suất để thẻ lấy được ghi số lẻ và chia hết cho 3 là $\dfrac{3}{20} = 0{,}15$.

Chọn phương án (D)

Câu 17. Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 3 quyển sách lý, 2 quyển sách hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Xác suất để 3 quyển được lấy ra có ít nhất một quyển là toán bằng

(A) $\dfrac{37}{42}$. (B) $\dfrac{2}{7}$. (C) $\dfrac{5}{42}$. (D) $\dfrac{1}{21}$.

Lời giải.

Tổng số quyển sách trên giá là 4+3+2=9 (quyển).

Số cách lấy ra 3 quyển sách từ 9 quyển sách đó là C_9^3.

Số cách lấy ra 3 quyển sách trong đó không có quyển sách toán nào là C_5^3.

Xác suất để 3 quyển được lấy ra có ít nhất một quyển là toán là $\dfrac{C_9^3 - C_5^3}{C_9^3} = \dfrac{37}{42}$.

Chọn phương án (A)

Câu 18. Một tổ học sinh có 7 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 người. Tính xác suất sao cho hai người được chọn đều là nữ.

(A) $\dfrac{1}{15}$. (B) $\dfrac{7}{15}$. (C) $\dfrac{8}{15}$. (D) $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Chọn ngẫu nhiên hai người từ 10 người có C_{10}^2 cách.

Chọn ngẫu nhiên 2 nữ từ 3 nữ có C_3^2 cách.

$\Rightarrow$ Xác suất cần tính là $P = \dfrac{\mathrm{C}_3^2}{\mathrm{C}_{10}^2} = \dfrac{1}{15}$.

Chọn phương án (A)

Câu 19. Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất một lần. Tính xác suất để xuất hiện mặt có số chấm chia hết cho 3.

(A) 1. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) 3. (D) $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là $n(\Omega) = 6$.

Gọi biến cố A: "mặt có số chấm chia hết cho 3".

Khi đó $A = \{3; 6\}$ nên và $n(A) = 2$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{3}$.

Chọn phương án (B)

B MỨC ĐỘ 2

Câu 20. Một đề trắc nghiệm có 50 câu hỏi gồm 20 câu mức độ nhận biết, 20 câu mức độ vận dụng và 10 câu mức độ vận dụng cao. Xác suất để bạn An làm hết 20 câu mức độ nhận biết là $0,9$; 20 câu mức độ vận dụng là $0,8$ và 10 câu mức độ vận dụng cao là $0,6$. Xác suất để bạn An làm trọn vẹn 50 câu là

(A) $0,432$. (B) $0,008$. (C) $0,228$. (D) 1.

Lời giải.

Xác suất để bạn An làm trọn vẹn 50 câu là $0,9.0,8.0,6 = 0,432\cdot$

Chọn phương án (A)

Câu 21. Một cái túi có chứa 7 viên bi đen và 5 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên từ túi 4 viên bi. Xác suất để trong 4 viên bi rút ra có cả bi đen và bi trắng là

(A) $\dfrac{7}{99}$. (B) $\dfrac{1}{99}$. (C) $\dfrac{8}{99}$. (D) $\dfrac{91}{99}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là: $n\left(\Omega\right) = \mathrm{C}_{12}^4 = 495$.

Gọi A là biến cố: "4 viên bi rút ra có cả bi đen và bi trắng".

$\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố: "4 viên bi rút ra chỉ có bi đen hoặc bi trắng" $\Rightarrow n\left(\overline{A}\right) = \mathrm{C}_7^4 + \mathrm{C}_5^4 = 40$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \dfrac{40}{495} = \dfrac{455}{495} = \dfrac{91}{99}$.

Chọn phương án (D)

Câu 22. Có ba chiếc hộp, mỗi hộp chứa ba cái thẻ được đánh số $1, 2, 3$. Rút ngẫu nhiên từ mỗi hộp một cái thẻ. Xác suất để ba thẻ được rút ra có tổng bằng 6 là?

(A) $\dfrac{2}{9}$. (B) $\dfrac{1}{27}$. (C) $\dfrac{7}{27}$. (D) $\dfrac{8}{27}$.

Lời giải.

Ta có $n\left(\Omega\right) = 3^3 = 27$. Để rút từ mỗi cái hộp một cái thẻ mà tổng ba thẻ bằng 6 thì phải rút được 3 tấm thẻ là bộ $(1; 2; 3)$. Khi đó $n(A) = 6 \Rightarrow \mathrm{P}(A) = \dfrac{6}{27} = \dfrac{2}{9}$.

Chọn phương án (B)

Câu 23. Một lớp học có 4 tổ, mỗi tổ có 4 học sinh nam và 6 học sinh nữ. Xác suất để giáo viên gọi được một học sinh lên bảng dò bài sao cho học sinh đó là nam hoặc ở tổ 4 là

(A) $\dfrac{13}{40}$. (B) $\dfrac{11}{20}$. (C) $\dfrac{2}{5}$. (D) $\dfrac{13}{20}$.

Lời giải.

Số học sinh của lớp là $10 \cdot 4 = 40$ nên có 40 cách gọi một học sinh bất kỳ lên bảng.

Có 10 cách gọi một học sinh ở tổ 4 và có 12 cách gọi một học sinh nam không ở tổ 4 nên có tất cả $10 + 12 = 22$ cách gọi một học sinh lên bảng sao cho học sinh đó là nam hoặc ở tổ 4.

Vậy xác suất cần tìm là $\mathrm{P} = \dfrac{22}{40} = \dfrac{11}{20}$.

Chọn phương án (B)

Câu 24. Gieo một con súc sắc cân đối, đồng chất hai lần. Tính xác suất sao cho kết quả trong hai lần gieo khác nhau.

A $\frac{5}{6}$. **B** $\frac{2}{3}$. **C** $\frac{1}{6}$. **D** $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Không gian mẫu $\Omega = \{(i;j) : 1 \leq i, j \leq 6\}$ với i, j là các số nguyên.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 6 \cdot 6 = 36$.

Gọi A là biến cố kết quả trong hai lần gieo khác nhau.

Số phần tử của biến cố A là $n(A) = 6 \cdot 5 = 30$.

Xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{30}{36} = \dfrac{5}{6}$.

Chọn phương án A

Câu 25. Một người bán bánh bao có 10 chiếc bánh, trong đó có 4 chiếc bánh cũ hấp lại. Một người khách tự chọn mua ngẫu nhiên đồng thời 2 chiếc trong 10 chiếc bánh đó. Xác suất để người khách đó mua phải một chiếc bánh bao cũ và một chiếc bánh bao mới là

A $\frac{8}{15}$. **B** $\frac{4}{15}$. **C** $\frac{2}{15}$. **D** $\frac{7}{15}$.

Lời giải.

Xác suất cần tính là $\dfrac{C_6^1 \cdot C_4^1}{C_{10}^2} = \dfrac{8}{15}$.

Chọn phương án A

Câu 26. Gieo một con súc sắc đồng chất và cân đối. Gọi A là biến cố "số chấm xuất hiện trên mặt con súc sắc chia hết cho 3". Tính $P(A)$.

A $P(A) = 3$. **B** $P(A) = \frac{2}{3}$. **C** $P(A) = \frac{1}{3}$. **D** $P(A) = 1$.

Lời giải.

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = 6$.

Ta có $A = \{3; 6\} \Rightarrow n(A) = 2$.

Vậy $P(A) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Chọn phương án C

Câu 27. Gieo một đồng xu cân đối đồng chất liên tiếp 3 lần. Tính xác suất của biến cố A: "có đúng 2 lần xuất hiện mặt sấp".

A $P(A) = \frac{1}{2}$. **B** $P(A) = \frac{1}{4}$. **C** $P(A) = \frac{3}{8}$. **D** $P(A) = \frac{7}{8}$.

Lời giải.

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = 2^3 = 8$.

$A = \{SSN, SNS, NSS\} \Rightarrow n(A) = 3$.

Vậy $P(A) = \dfrac{3}{8}$.

Chọn phương án C

Câu 28. Một bình chứa 16 viên bi, trong đó có 7 viên bi trắng, 6 viên bi trắng, 3 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất P để lấy được 3 viên bi đỏ.

A $P = \frac{143}{280}$. **B** $P = \frac{1}{560}$. **C** $P = \frac{1}{16}$. **D** $P = \frac{1}{28}$.

Lời giải.

Số cách chọn 3 viên bi trong bình là: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{16}^3 = 560$.
Số cách chọn 3 viên bi đỏ là: 1.
Vậy xác suất cần tìm là $P = \dfrac{1}{560}$.
Chọn phương án B

Câu 29. Gieo ngẫu nhiên 2 con súc sắc cân đối đồng chất. Tính xác suất P của biến cố: "Hiệu số chấm xuất hiện trên 2 con súc sắc bằng 1.

A $P = \dfrac{1}{9}$. **B** $P = \dfrac{2}{9}$. **C** $P = \dfrac{5}{6}$. **D** $P = \dfrac{5}{18}$.

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = 6 \cdot 6 = 36$.
Gọi A là biến cố cần tính xác suất. Khi đó $n(A) = 1 + 2 \cdot 4 + 1 = 10$.
Vậy xác suất của A là $P = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$.
Chọn phương án D

Câu 30. Một tổ học sinh có 7 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 học sinh trong tổ. Tính xác suất P sao cho 2 học sinh được chọn đều là nữ.

A $P = \dfrac{1}{5}$. **B** $P = \dfrac{7}{15}$. **C** $P = \dfrac{8}{15}$. **D** $P = \dfrac{1}{15}$.

Lời giải.
Số học sinh trong tổ là: $7 + 3 = 10$. Số cách chọn 2 học sinh trong tổ là: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^2 = 45$.
Số cách chọn 2 học sinh nữ trong tổ là: $\mathrm{C}_3^2 = 3$.
Vậy xác suất cần tìm là $P = \dfrac{3}{45} = \dfrac{1}{15}$.
Chọn phương án D

Câu 31. Một hộp có 4 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 2 viên từ hộp trên. Tính xác suất để được 2 viên bi xanh.

A $\dfrac{4}{7}$. **B** $\dfrac{3}{7}$. **C** $\dfrac{1}{7}$. **D** $\dfrac{2}{7}$.

Lời giải.
Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp trên: $C_7^2 \Rightarrow n\left(\Omega\right) = C_7^2$
Gọi A là biến cố "Lấy được 2 viên bi xanh từ hộp trên" $\Rightarrow n(A) = C_3^2$
$P = \dfrac{n(A)}{n\left(\Omega\right)} = \dfrac{C_3^2}{C_7^2} = \dfrac{1}{7}$.
Chọn phương án C

Câu 32. Gieo hai con súc sắc cân đối đồng chất. Xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai mặt của hai con súc sắc bằng 7 là

A $\dfrac{1}{18}$. **B** $\dfrac{1}{6}$. **C** $\dfrac{1}{12}$. **D** $\dfrac{5}{36}$.

Lời giải.
Ta có $n(\Omega) = 36$. Gọi A là biến cố để tổng số chấm xuất hiện trên hai mặt của hai con súc sắc bằng 7. Khi đó

$$A = \{(1;6), (2;5), (3;4), (4;3), (5;2), (6;1)\}.$$

Suy ra $n(A) = 6$. Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

Chọn phương án B

Câu 33. Trong một lớp học có 20 học sinh nam và 24 học sinh nữ. Chọn ra ngẫu nhiên 2 học sinh đi trực nhật. Khi đó, xác suất để đội trực nhật có 1 học sinh nam và 1 học sinh nữ là

A. 1. B. $\dfrac{1}{480}$. C. $\dfrac{240}{473}$. D. $\dfrac{120}{473}$.

Lời giải.

Tổng số học sinh của lớp là 44 học sinh nên có C_{44}^2 cách chọn hai học sinh tùy ý đi trực nhật.

Để chọn được đội trực nhật có 1 học sinh nam và 1 học sinh nữ, ta có $20 \cdot 24$ cách chọn.

Vậy xác suất để chọn được đội trực nhật thỏa bài toán là $P = \dfrac{20 \cdot 24}{\mathrm{C}_{44}^2} = \dfrac{240}{473}$.

Chọn phương án C

Câu 34. Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối và đồng chất. Tìm xác suất để con súc sắc xuất hiện mặt chấm lẻ.

A. $\dfrac{1}{2}$. B. $\dfrac{1}{2}$. C. $\dfrac{2}{3}$. D. $\dfrac{5}{6}$.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = 6$

Gọi A là biến cố "con súc sắc xuất hiện mặt chấm lẻ" $\Rightarrow n(A) = 3$.

Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn phương án A

Câu 35. Một hộp đựng 20 viên bi đều khác nhau. Bạn Hải chọn 4 bi từ hộp rồi trả lại. Bạn Nam chọn 4 bi từ hộp rồi trả lại. Tính xác suất sao cho Hải và Nam chọn 4 bi đều giống nhau.

A. $\dfrac{1}{4845}$. B. $\dfrac{1}{2}$. C. $\dfrac{1}{9690}$. D. $\dfrac{182}{969}$.

Lời giải.

$n(\Omega) = \mathrm{C}_{20}^4 = 4845$.

Gọi A là biến cố "Hải và Nam chọn được 4 bi đều giống nhau"$\Rightarrow n(A) = 1$.

Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{4845}$.

Chọn phương án A

Câu 36. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có 2 chữ số nhỏ hơn 50. Tính xác suất của biến cố A: "số được chọn là số nguyên tố".

A. $\mathrm{P}(A) = \dfrac{11}{40}$. B. $\mathrm{P}(A) = \dfrac{2}{15}$. C. $\mathrm{P}(A) = \dfrac{6}{25}$. D. $\mathrm{P}(A) = \dfrac{12}{49}$.

Lời giải.

Có 40 số tự nhiên có hai chữ số và nhỏ hơn 50 $\Rightarrow$ không gian mẫu có số phần tử là 40.

Trong 40 số kể trên có đúng 11 số nguyên tố $\Rightarrow |\Omega_A| = 11$.

Do đó $\mathrm{P}(A) = \dfrac{11}{40}$.

Chọn phương án A

Câu 37. Hai xạ thủ bắn mỗi người một viên đạn vào bia, xác suất bắn trúng vòng 10 của xạ thủ thứ nhất là 0,75 và xác suất bắn trúng vòng 10 của xạ thủ thứ hai là 0,85. Tính xác suất của biến cố A: "Có đúng một viên đạn trúng vòng 10".

(A) $\mathrm{P}(A) = 0{,}325$. (B) $\mathrm{P}(A) = 0{,}6375$. (C) $\mathrm{P}(A) = 0{,}0375$. (D) $\mathrm{P}(A) = 0{,}9625$.

Lời giải.

Xác suất bắn không trúng vòng 10 của xạ thủ thứ nhất là 0,25 và xác suất bắn không trúng vòng 10 của xạ thủ thứ hai là 0,15.

$\mathrm{P}(A) = 0{,}75 \times 0{,}15 + 0{,}25 \times 0{,}85 = 0{,}325$.

Chọn phương án (A)

Câu 38. Trong một tổ có 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 bạn trong tổ tham gia đội tình nguyện. Tính xác suất để 3 bạn được chọn toàn nam.

(A) $\dfrac{2}{3}$. (B) $\dfrac{4}{5}$. (C) $\dfrac{1}{5}$. (D) $\dfrac{1}{6}$.

Lời giải.

$n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^3$. Gọi A là biến cố chọn được toàn nam, $n(A) = \mathrm{C}_6^3$. Vậy xác suất chọn được toàn nam là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{\mathrm{C}_6^3}{\mathrm{C}_{10}^3} = \dfrac{1}{6}$.

Chọn phương án (D)

Câu 39. Xét tất cả các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 1, 3, 5, 7, 9. Xác suất để tìm được số không bắt đầu bởi 135 là

(A) $\dfrac{5}{6}$. (B) $\dfrac{1}{60}$. (C) $\dfrac{1}{6}$. (D) $\dfrac{59}{60}$.

Lời giải.

Số các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 1, 3, 5, 7, 9 là 5! số.

Xét số các số bắt đầu bằng 135 có $1 \times 2! = 2!$ số.

Do đó số các số không bắt đầu bằng 135 là $5! - 2!$ số.

Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{5! - 2!}{5!} = \dfrac{59}{60}$.

Chọn phương án (D)

Câu 40. Trong một hộp đựng 7 bi xanh, 5 bi đỏ và 3 bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi, tính xác suất để lấy được ít nhất 2 bi vàng.

(A) $\dfrac{37}{455}$. (B) $\dfrac{22}{455}$. (C) $\dfrac{50}{455}$. (D) $\dfrac{121}{455}$.

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu. Ta có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^3$; A là biến cố :"Có ít nhất 2 bi vàng".

TH1: 2 bi vàng và 1 bi xanh có: $\mathrm{C}_3^2 \cdot \mathrm{C}_7^1$ cách chọn.

TH2: 2 bi vàng và 1 bi đỏ có: $\mathrm{C}_3^2 \cdot \mathrm{C}_5^1$ cách chọn.

TH3: 3 bi vàng có: C_3^3 cách chọn.

Từ đó: $n(A) = \mathrm{C}_3^2 \cdot \mathrm{C}_7^1 + \mathrm{C}_3^2 \cdot \mathrm{C}_5^1 + \mathrm{C}_3^3$. Suy ra $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{\mathrm{C}_3^2 \cdot \mathrm{C}_7^1 + \mathrm{C}_3^2 \cdot \mathrm{C}_5^1 + \mathrm{C}_3^3}{\mathrm{C}_{15}^3} = \dfrac{37}{455}$.

Chọn phương án (A)

C MỨC ĐỘ 3

Câu 41. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có ba chữ số. Tính xác suất để số được chọn không vượt quá 600 và chia hết cho 5.

(A) $\dfrac{501}{900}$. (B) $\dfrac{101}{900}$. (C) $\dfrac{100}{900}$. (D) $\dfrac{500}{900}$.

Lời giải.

Ta có $|\Omega| = 9 \cdot 10^2 = 900$.

Số tự nhiên nhỏ nhất có 3 chữ số và chia hết cho 5 là $100 = 5 \cdot 20$.

Số tự nhiên lớn nhất có 3 chữ số không vượt quá 600 và chia hết cho 5 là $600 = 5 \cdot 120$.

Do đó số các số tự nhiên có ba chữ số không vượt quá 600 và chia hết cho 5 là $120 - 20 + 1 = 101$.

Suy ra xác suất cần tìm là $\dfrac{101}{900}$.

Chọn phương án (B)

Câu 42. Trong một chiếc hộp có 20 viên bi, trong đó có 9 viên bi màu đỏ, 6 viên bi màu xanh và 5 viên bi màu vàng. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 viên bi. Tìm xác suất để 3 viên bi lấy ra có không quá 2 màu.

(A) $\dfrac{29}{38}$. (B) $\dfrac{9}{38}$. (C) $\dfrac{183}{190}$. (D) $\dfrac{82}{95}$.

Lời giải.

Số cách lấy 3 viên bi từ hộp chứa 20 viên bi là $\mathrm{C}_{20}^3 = 1140$.

Số cách lấy 3 viên bi có đủ 3 màu là $9 \cdot 6 \cdot 5 = 270$.

Do đó, số cách lấy được 3 viên bi không quá 2 màu là $1140 - 270 = 870$.

Vậy xác suất để 3 viên bi lấy ra có không quá 2 màu là $\dfrac{870}{1140} = \dfrac{29}{38}$.

Chọn phương án (A)

Câu 43. Từ một hộp chứa 5 viên bi đỏ, 4 viên bi xanh và 3 viên bi vàng lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để 3 viên bi lấy ra có đủ 3 màu.

(A) $\dfrac{3}{11}$. (B) $\dfrac{1}{22}$. (C) $\dfrac{3}{220}$. (D) $\dfrac{11}{3}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^3 = 220$.

Gọi A là biến cố: "3 viên bi lấy ra có đủ 3 màu".

Số phần tử của biến cố A là $n(A) = \mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^1 = 60$.

Xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{60}{220} = \dfrac{3}{11}$.

Chọn phương án (A)

Câu 44. Một dãy phố có 5 cửa hàng bán quần áo. Có 5 người khách đến mua quần áo, mỗi người khách vào ngẫu nhiên một trong 5 cửa hàng đó. Tính xác suất để có ít nhất một cửa hàng có nhiều hơn 2 người khách vào.

(A) $\dfrac{181}{625}$. (B) $\dfrac{36}{125}$. (C) $\dfrac{161}{625}$. (D) $\dfrac{141}{625}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 5^5$.

Gọi A là biến cố "Có ít nhất một của hàng có nhiều hơn 2 người khách vào"

TH1. Một cửa hàng có 3 khách.

$\Rightarrow \mathrm{C}_5^3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 800$ cách.

TH2. Một cửa hàng có 4 khách.

$\Rightarrow \mathrm{C}_5^4 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ cách.

TH3. Một cửa hàng có 5 khách.

$\Rightarrow \mathrm{C}_5^5 \cdot 5 = 5$ cách.

Số phần tử của biến cố A là $n(A) = 800 + 100 + 5 = 905$.

Xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{905}{5^5} = \dfrac{181}{625}$.

Chọn phương án (A)

Câu 45. Từ một hộp chứa 10 cái thẻ được đánh số từ 1 đến 10, chọn ngẫu nhiên 2 thẻ. Tính xác suất để tổng 2 số ghi trên 2 thẻ được chọn lớn hơn 3.

(A) $\dfrac{1}{45}$. (B) $\dfrac{44}{45}$. (C) $\dfrac{43}{45}$. (D) $\dfrac{2}{45}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^2 = 45$.

Gọi A là biến cố: "Tổng 2 số ghi trên 2 thẻ được chọn lớn hơn 3".

Suy ra $\overline{A}$ là biến cố: "Tổng 2 số ghi trên 2 thẻ được chọn nhỏ hơn hoặc bằng 3".

Ta có: $\overline{A} = \{(1;1), (1;2), (2;1)\}$

Số phần tử của biến cố $n(\overline{A}) = 3$.

Xác suất của biến cố A là $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{3}{45} = \dfrac{2}{45}$.

Chọn phương án (D)

Câu 46. Một lớp học có 30 học sinh gồm cả nam và nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh để tham gia hoạt động của Đoàn trường. Xác suất chọn được 2 học sinh nam và 1 học sinh nữ là $\dfrac{12}{29}$. Số học sinh nữ của lớp là

(A) 16. (B) 14. (C) 13. (D) 15.

Lời giải.

Gọi số học sinh nữ là x. Ta được phương trình

$$\frac{\mathrm{C}_{30-x}^2 \cdot \mathrm{C}_x^1}{\mathrm{C}_{30}^3} = \frac{12}{29} \Leftrightarrow x = 14.$$

Chọn phương án (B)

Câu 47. Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 3 quyển sách lý, 2 quyển sách hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách trên giá. Tính xác suất P để 3 quyển sách được lấy ra có ít nhất một quyển sách toán.

(A) $P = \dfrac{1}{21}$. (B) $P = \dfrac{37}{42}$. (C) $P = \dfrac{5}{42}$. (D) $P = \dfrac{2}{7}$.

Lời giải.

Số quyển sách trên giá là $4+3+2=9$ (quyển).

Số cách lấy 3 quyển sách trên giá là: $n(\Omega)=\mathrm{C}_9^3=84$.

Số cách lấy 3 quyển sách không có sách toán là: $\mathrm{C}_5^3=10$ Số cách lấy 3 quyển sách có ít nhất một quyển sách toán là: $84-10=74$.

Vậy xác suất cần tìm là $P=\dfrac{74}{84}=\dfrac{37}{42}$.

Chọn phương án B

Câu 48. Có 8 bạn học sinh lớp 11A trong đó có An và Bình được xếp ngẫu nhiên theo một hàng ngang. Tính xác suất P để An và Bình ngồi cạnh nhau.

A $P=\dfrac{1}{8}$. B $P=\dfrac{1}{4}$. C $P=\dfrac{1}{64}$. D $P=\dfrac{1}{25}$.

Lời giải.

Số cách xếp 8 học sinh thành một hàng ngang là $n(\Omega)=8!$

Số cách xếp 8 học sinh trong đó An và Bình ngồi cạnh nhau là: $7!\cdot 2!$

Vậy xác suất cần tìm là $P=\dfrac{7!\cdot 2!}{8!}=\dfrac{1}{4}$.

Chọn phương án B

Câu 49. Một lớp có 20 nam và 15 nữ. Giáo viên chọn ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất P để 4 học sinh được chọn có cả nam và nữ.

A $P=\dfrac{4615}{5263}$. B $P=\dfrac{4610}{5236}$. C $P=\dfrac{4615}{5236}$. D $P=\dfrac{4651}{5236}$.

Lời giải.

Số học sinh của lớp là: $20+15=35$.

Số cách chọn 4 học sinh trong lớp là: $n(\Omega)=\mathrm{C}_{35}^4=52360$

Số cách chọn 4 học sinh nam trong lớp là: $\mathrm{C}_{20}^4=4845$.

Số cách chọn 4 học sinh nữ trong lớp là: $\mathrm{C}_{15}^4=1365$.

Số cách chọn 4 học sinh có cả nam và nữ là: $52360-4845-1365=46150$

Vậy xác suất cần tìm là $P=\dfrac{46150}{52360}$.

Chọn phương án C

Câu 50. Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 3 quyển sách lý, 2 quyển sách hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách trên giá. Tính xác suất P để lấy được 3 quyển sách thuộc ba môn khác nhau.

A $P=\dfrac{37}{42}$. B $P=\dfrac{2}{7}$. C $P=\dfrac{1}{21}$. D $P=\dfrac{5}{42}$.

Lời giải.

Số quyển sách trên giá là $4+3+2=9$ (quyển).

Số cách lấy 3 quyển sách trên giá là: $n(\Omega)=\mathrm{C}_9^3=84$.

Số cách lấy 3 quyển sách thuộc ba môn khác nhau là: $4\cdot 3\cdot 2=24$.

Vậy xác suất cần tìm là $P=\dfrac{24}{84}=\dfrac{2}{7}$.

Chọn phương án B

Câu 51. Trong một lớp học có 54 học sinh, trong đó có 22 nam và 32 nữ. Cho rằng ai cũng có thể tham gia làm cán sự lớp. Chọn ngẫu nhiên 4 người để làm ban cán sự lớp gồm 1 lớp trưởng, 1 lớp phó học tập, 1 bí thư đoàn, 1 lớp phó lao động (mỗi người một chức vụ). Tính xác suất P để ban cán sự lớp đều là nữ.

(A) $P = \dfrac{C_{32}^4}{4!C_{54}^4}$. (B) $P = \dfrac{A_{32}^2 C_{22}^4}{A_{54}^4}$. (C) $P = \dfrac{C_{32}^2 C_{22}^4}{A_{54}^4}$. (D) $P = \dfrac{A_{32}^4}{4!C_{54}^4}$.

Lời giải.

Số cách chọn 4 bạn trong lớp làm ban cán sự là: A_{54}^4.

Số cách chọn 4 bạn nữ làm ban cán sự là: A_{32}^4.

Vậy xác suất cần tìm là $P = \dfrac{A_{32}^4}{A_{54}^4} = \dfrac{A_{32}^4}{4!C_{54}^4}$.

Chọn phương án (D)

Câu 52. Có hai hộp, mỗi hộp chứa 20 quả cầu được đánh số từ 1 đến 20. Chọn ngẫu nhiên mỗi hộp một quả cầu. Tính xác suất để tích số ghi trên hai quả cầu là một số chia hết cho 6.

(A) $\dfrac{120}{400}$. (B) $\dfrac{159}{400}$. (C) $\dfrac{153}{400}$. (D) $\dfrac{162}{400}$.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = 20 \cdot 20 = 400$.

Gọi A:"Tích số ghi trên hai quả cầu là một số chia hết cho 6".

TH 1. Hộp 1 chọn 6; 12; 18. Hộp 2 chọn bất kì. Có $3 \cdot 20 = 60$ cách.

TH 2. Hộp 1 chọn 2; 4; 8; 10; 14; 16; 20. Hộp 2 chọn các quả có số chia hết cho 3. Có $7 \cdot 6 = 42$ cách.

TH 3. Hộp 1 chọn 3; 9; 15. Hộp 2 chọn các quả có số chia hết cho 2. Có $3 \cdot 10 = 30$ cách.

TH 4. Hộp 1 chọn các quả còn lại. Hộp 2 chọn các quả có số chia hết cho 6. Có $7 \cdot 3 = 21$ cách.

Suy ra $n(A) = 60 + 42 + 30 + 21 = 153$.

Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{153}{400}$.

Chọn phương án (C)

Câu 53. Cho $P(A) = \dfrac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \dfrac{1}{2}$. Biết A, B là 2 biến cố độc lập thì $P(B)$ bằng bao nhiêu?

(A) $\dfrac{1}{3}$. (B) $\dfrac{1}{8}$. (C) $\dfrac{1}{4}$. (D) $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = \dfrac{1}{3} + P(B) - \dfrac{1}{3}P(B) = \dfrac{1}{2}$

Suy ra $P(B) = \dfrac{1}{4}$

Chọn phương án (C)

Câu 54. Trên một giá sách có 9 quyển sách Văn, 6 quyển sách Anh. Lấy lần lượt 3 quyển và không để lại trên giá. Xác suất để lấy được 2 quyển đầu là sách Văn và quyển thứ 3 là sách Anh là bao nhiêu?

(A) $\dfrac{72}{455}$. (B) $\dfrac{73}{455}$. (C) $\dfrac{74}{455}$. (D) $\dfrac{71}{455}$.

Lời giải.

Gọi biến cố A là "Lấy được 2 quyển đầu là sách Văn và quyển thứ 3 là sách Anh".
Số cách chọn lần lượt 3 quyển sách trong 15 quyển sách là $n(\Omega) = 15 \cdot 14 \cdot 13$.
Do lấy lần lượt các quyển sách nên có $9 \cdot 8 \cdot 6$ cách chọn 2 quyển sách Văn và 1 quyển sách Anh.
Suy ra $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 6}{15 \cdot 14 \cdot 13} = \dfrac{72}{455}$.

Chọn phương án A

Câu 55. Gieo ba con súc sắc cân đối, đồng chất. Xác suất để tích số chấm xuất hiện trên mặt của ba con súc sắc lập thành một số nguyên tố là

A. 0. B. $\dfrac{1}{6}$. C. $\dfrac{1}{24}$. D. $\dfrac{1}{72}$.

Lời giải.

Để tích số chấm của ba con súc sắc là một số nguyên tố thì phải có hai con súc sắc được số 1 và con súc sắc còn lại là một trong các số nguyên tố 2, 3, 5. Vậy có 9 cách để thỏa bài toán
Chọn phương án C

Câu 56. Có bao nhiêu cách xếp 4 viên bi đỏ bán kính khác nhau và 3 viên bi xanh bán kính giống nhau vào một dãy có 8 ô trống?

A. 5040 cách. B. 40302 cách. C. 6720 cách. D. 144 cách.

Lời giải.

Số cách xếp 4 viên bi đỏ bán kính khác nhau và 3 viên bi xanh bán kính giống nhau vào một dãy có 8 ô trống là $\mathrm{C}_8^7 \cdot \mathrm{A}_7^4 \cdot \mathrm{C}_3^3$=6720 cách.
Chọn phương án C

Câu 57. Chọn ngẫu nhiên 3 đoạn thẳng trong 5 đoạn thẳng có độ dài 1 cm, 3 cm, 5 cm, 7 cm, 9 cm. Xác suất để 3 đoạn thẳng được chọn là 3 cạnh của một tam giác là

A. $\dfrac{3}{10}$. B. $\dfrac{1}{20}$. C. $\dfrac{1}{15}$. D. $\dfrac{7}{10}$.

Lời giải.

Chọn ngẫu nhiên 3 đoạn thẳng trong 5 đoạn thẳng có $\mathrm{C}_5^3 = 10$ cách.
Các kết quả để 3 đoạn thẳng tạo thành một tam giác là $\{(3;5;7),(3;7;9),(5;7;9)\}$.
Suy ra có 3 kết quả để 3 đoạn thẳng tạo thành một tam giác.
Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{3}{10}$.
Chọn phương án A

Câu 58. Một hộp đựng 15 viên bi trong đó có 7 viên bi xanh và 8 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp. Xác suất để trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất 1 viên bi màu đỏ là

A. $\dfrac{12}{13}$. B. $\dfrac{418}{455}$. C. $\dfrac{1}{13}$. D. $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Lấy ngẫu nhiên 3 bi trong tổng số 15 bi có $\mathrm{C}_{15}^3 = 455$ cách.
Số cách lấy 3 bi không có bi đỏ là $\mathrm{C}_7^3 = 35$ cách.
Suy ra số cách lấy 3 bi có ít nhất 1 bi đỏ là $455 - 35 = 420$ cách.
Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{420}{455} = \dfrac{12}{13}$.

Chọn phương án A

Câu 59. Gieo 2 con súc sắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất để tổng số chấm trên 2 con súc sắc bằng 4.

A. $\frac{1}{12}$. B. $\frac{1}{9}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{5}{36}$.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = 6^2 = 36$.

Gọi biến cố A: "Tổng số chấm trên 2 con súc sắc bằng 4".

Ta có $A = \{(2;2), (1;3), (3;1)\} \Rightarrow n(A) = 3$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Chọn phương án A

Câu 60. Một hộp đựng 10 viên bi xanh và 5 viên bi vàng. Có bao nhiêu cách lấy ngẫu nhiên 4 viên bi trong đó có ít nhất 2 viên bi màu xanh?

A. 1260. B. 1050. C. 105. D. 1200.

Lời giải.

Số cách lấy 4 viên bi trong đó có ít nhất 2 viên bi màu xanh là

$n(A) = \mathrm{C}_{10}^2 \cdot \mathrm{C}_5^2 + \mathrm{C}_{10}^3 \cdot \mathrm{C}_5^1 + \mathrm{C}_{10}^4 \cdot \mathrm{C}_5^0 = 1260$.

Chọn phương án A

D MỨC ĐỘ 4

Câu 61. Cho một đa giác đều có 18 đỉnh nội tiếp trong một đường tròn tâm O. Gọi X là tập hợp các tam giác có các đỉnh là các đỉnh của đa giác đều trên. Tính xác suất P để chọn được một tam giác từ tập X là tam giác cân nhưng không phải tam giác đều.

A. $P = \frac{144}{136}$. B. $P = \frac{7}{816}$. C. $P = \frac{23}{136}$. D. $P = \frac{21}{136}$.

Lời giải.

Số tam giác được tạo thành là: $n(X) = \mathrm{C}_{18}^3 = 816$.

Số tam giác đều được tạo thành là: $\frac{18}{3} = 6$.

Có 18 cách chọn một đỉnh của đa giác, mỗi đỉnh có 8 cách chọn 2 đỉnh còn lại để được một tam giác cân. Do đó số tam giác cân được tạo thành là $18 \cdot 8 = 144$.

Số tam giác cân không phải tam giác đều được tạo thành là $144 - 6 = 138$.

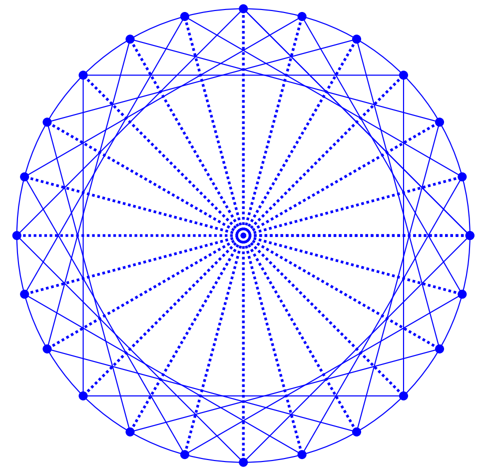
Vậy xác suất cần tìm là $P = \frac{138}{816} = \frac{23}{136}$.

Chọn phương án D

Câu 62. Cho hình đa giác đều H có 24 đỉnh, chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh thuộc H. Tính xác suất để 4 đỉnh được chọn lập thành hình vuông?

A. $\frac{120}{1771}$. B. $\frac{2}{1771}$. C. $\frac{1}{161}$. D. $\frac{1}{1771}$.

Lời giải.



Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{24}^4 = 10626$.
Gọi biến cố A: " 4 đỉnh được chọn lập thành tam giác vuông"
Đa giác đều 24đỉnh nội tiếp đường tròn nên đường tròn có 24 đường kính tạo ra từ các đỉnh của đa giác. Mỗi đường kính tùy ý có duy nhất một đường kính vuông góc với đường kính ban đầu và hai đường kính vuông góc tạo ra một hình vuông. Suy ra $n(A) = 6$.
Xác suất của biến cố là A là $P(A) = \dfrac{6}{10626} = \dfrac{1}{1771}$

Chọn phương án D

Câu 63. Một hộp chứa 11 viên bi được đánh số từ 1 đến 11. Chọn ngẫu nhiên 6 viên bi từ hộp. Tính xác suất để tổng các số trên các viên bi được chọn là số lẻ?

A $\dfrac{103}{231}$. **B** $\dfrac{215}{462}$. **C** $\dfrac{118}{231}$. **D** $\dfrac{115}{231}$.

Lời giải.

Chọn 6 bi trong tổng số 11 bi có $\mathrm{C}_{11}^6 = 462$ cách.
Có tất cả 6 viên bi đánh số lẻ và 5 viên bi đánh số chẵn.
Để tổng các viên bi được chọn là số lẻ thì số bi lẻ phải là số lẻ, ta có các trường hợp sau:
TH1: Chọn 1 bi đánh số lẻ có $\mathrm{C}_6^1 \cdot \mathrm{C}_5^5 = 6$ cách;
TH2: Chọn 3 bi đánh số lẻ có $\mathrm{C}_6^3 \cdot \mathrm{C}_5^3 = 200$ cách;
TH3: Chọn 5 bi đánh số lẻ có $\mathrm{C}_6^5 \cdot \mathrm{C}_5^1 = 30$ cách.
Do đó số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán là $6 + 200 + 30 = 236$ cách.
Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{236}{462} = \dfrac{118}{231}$.
Chọn phương án C

Câu 64. Một hộp đựng 6 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Lấy lần lượt 2 viên bi từ hộp đó. Xác suất để viên bi được lấy lần thứ 2 màu xanh là

A $\dfrac{4}{5}$. **B** $\dfrac{1}{5}$. **C** $\dfrac{2}{5}$. **D** $\dfrac{3}{5}$.

Lời giải.

Gọi A là biến cố "Bi thứ hai xanh", A_1 là biến cố "Bi thứ nhất đỏ, bi thứ hai xanh", A_2 là biến cố "Bi thứ nhất xanh, bi thứ hai xanh".
Xác suất để lấy viên bi đầu tiên màu đỏ là $\dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$. Sau khi lấy bi đầu tiên đỏ, xác suất để lấy bi thứ hai xanh là $\dfrac{4}{9}$.
Vậy $\mathrm{P}(A_1) = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{4}{9} = \dfrac{4}{15}$.
Xác suất để lấy viên bi đầu tiên màu xanh là $\dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$. Sau khi lấy bi đầu tiên đỏ, xác suất để lấy bi thứ hai xanh là $\dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$.
Vậy $\mathrm{P}(A_2) = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{15}$.

Vì A_1 và A_2 là hai biến cố xung khắc nên
$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1 \cup A_2) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) = \dfrac{4}{15} + \dfrac{2}{15} = \dfrac{2}{5}$.
Chọn phương án C

Câu 65. Gọi X là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Lấy ngẫu nhiên một số trong X. Tính xác suất để chọn được một số chia hết cho 3.

A 0,32. **B** 0,2. **C** 0,26. **D** 0,14.

Lời giải.
Gọi số có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5$ là $\overline{abcd}$.

— a có 5 cách chọn.

— b có 5 cách chọn.

— c có 4 cách chọn.

— d có 3 cách chọn.

Do đó, có $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ số $\overline{abcd}$ khác nhau được tạo thành.
Các số tự nhiên chia hết cho 3 thì có tổng các chữ số chia hết cho 3. Các bộ 4 số có tổng chia hết cho 3 gồm $\{0, 1, 2, 3\}$, $\{0, 1, 3, 5\}$, $\{0, 2, 3, 4\}$, $\{0, 3, 4, 5\}$, $\{1, 2, 4, 5\}$
Số các số có 4 chữ số khác nhau lập từ $\{0, 1, 2, 3\}$ là $4! - 3! = 18$.
Số các số có 4 chữ số khác nhau lập từ $\{0, 1, 3, 5\}$ là $4! - 3! = 18$.
Số các số có 4 chữ số khác nhau lập từ $\{0, 2, 3, 4\}$ là $4! - 3! = 18$.
Số các số có 4 chữ số khác nhau lập từ $\{0, 3, 4, 5\}$ là $4! - 3! = 18$.
Số các số có 4 chữ số khác nhau lập từ $\{1, 2, 4, 5\}$ là $4! = 24$.
Do đó, số các số chia hết cho 3 là $18 + 18 + 18 + 18 + 24 = 96$.
Vậy xác suất cần tìm là $\mathrm{P} = \dfrac{96}{300} = 0{,}32$.
Chọn phương án A

Câu 66. Trong buổi giao lưu văn nghệ tại trường A, cần sắp xếp 3 học sinh của trường A và 6 học sinh của trường B vào một dãy ghế kê theo hàng ngang. Tính xác suất để sắp xếp được 3 học sinh trường A không ngồi liền kề nhau.

A $\dfrac{1}{12}$. **B** $\dfrac{11}{12}$. **C** $\dfrac{1}{84}$. **D** $\dfrac{83}{84}$.

Lời giải.
Không gian mẫu có $9!$ phần tử.
Số kết quả thuận lợi cho biến cố: "Xếp 9 học sinh trên vào ghế sao cho 3 học sinh trường A ngồi kề nhau" là $3! \times 7!$.
Xác suất cần tìm là $1 - \dfrac{3! \times 7!}{9!} = \dfrac{11}{12}$.
Chọn phương án B

Câu 67. Trong một cuộc liên hoan có 5 cặp nam nữ, trong đó có 3 cặp là vợ chồng. Chọn ngẫu nhiên ra 3 người tham gia trò chơi. Tính xác suất để trong ba người được chọn không có cặp vợ chồng nào.

(A) $\frac{2}{5}$. (B) $\frac{1}{5}$. (C) $\frac{3}{5}$. (D) $\frac{4}{5}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^3 = 120$.

Số phần tử thuận lợi của biến cố "Trong ba người được chọn có một cặp là vợ chồng" là: $3.8 = 24$.

Suy ra, số phần tử thuận lợi của biến cố "Trong ba người được chọn không có cặp vợ chồng nào" là: $120 - 24 = 96$.

Xác suất cần tìm là $\mathrm{P} = \frac{96}{120} = \frac{4}{5}$.

Chọn phương án (D)

Câu 68. Có 15 câu hỏi trắc nghiệm, trong đó có 4 câu khó, 5 câu trung bình và 6 câu dễ. Chọn ngẫu nhiên 4 câu. Tính xác suất để trong 4 câu được chọn có không quá 2 câu dễ.

(A) $\frac{1}{91}$. (B) $\frac{6}{7}$. (C) $\frac{1}{13}$. (D) $\frac{225}{455}$.

Lời giải.

- Số cách chọn ngẫu nhiên 4 câu là $\mathrm{C}_{15}^4 = 1365$.
- Chọn 4 câu sao cho có không quá 2 câu dễ: $\mathrm{C}_9^4 + 6 \cdot \mathrm{C}_9^3 + \mathrm{C}_6^2 \cdot \mathrm{C}_9^2 = 1170$.

Xác suất cần tìm là $P = \frac{1170}{2365} = \frac{6}{7}$.

Chọn phương án (B)

Câu 69. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Chọn ngẫu nhiên hai số từ S. Tính xác suất để cả hai số được chọn đều là số chẵn (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

(A) 42%. (B) 51%. (C) 26%. (D) 30%.

Lời giải.

+ Số phần tử của S là $7 \cdot 7 \cdot 6 = 294$.

+ Số phần tử là số chẵn của S là $1 \cdot 7 \cdot 6 + 3 \cdot 6 \cdot 6 = 150$.

Xác suất cần tính là $P(A) = \frac{\mathrm{C}_{150}^2}{\mathrm{C}_{294}^2} = \frac{3725}{14375}$.

Chọn phương án (C)

Câu 70. Một hộp chứa 5 viên bi màu trắng, 15 viên bi màu xanh và 35 viên bi màu đỏ. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 7 viên bi. Tính xác suất để trong số 7 viên bi được lấy ra có ít nhất 1 viên bi màu đỏ.

(A) $\frac{\mathrm{C}_{35}^7}{\mathrm{C}_{55}^7}$. (B) $\mathrm{C}_{35}^1 \cdot \mathrm{C}_{20}^6$. (C) $\frac{\mathrm{C}_{55}^7 - \mathrm{C}_{20}^7}{\mathrm{C}_{55}^7}$. (D) C_{35}^1.

Lời giải.

Chọn ngẫu nhiên 7 viên bi từ hộp có 55 viên nên không gian mẫu có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{55}^7$ kết quả đồng khả năng xảy ra.

Gọi A : "Có ít nhất 1 viên bi màu đỏ" thì $\overline{A}$: "Không có viên bi màu đỏ nào"

$n(\overline{A}) = \mathrm{C}_{20}^{7} \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{\mathrm{C}_{20}^{7}}{\mathrm{C}_{55}^{7}} = \dfrac{\mathrm{C}_{55}^{7} - \mathrm{C}_{20}^{7}}{\mathrm{C}_{55}^{7}}$.

Chọn phương án C

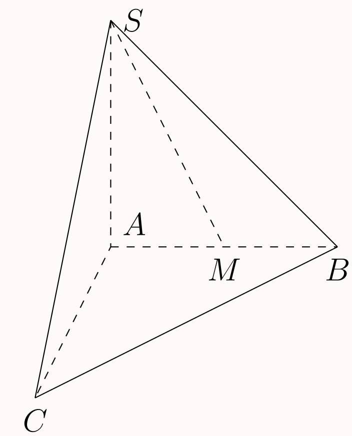
BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. B	3. A	4. C	5. B	6. A	7. C	8. A	9. D	10. B
11. D	12. A	13. C	14. B	15. B	16. D	17. A	18. A	19. B	20. A
21. D	22. B	23. B	24. A	25. A	26. C	27. C	28. B	29. D	30. D
31. C	32. B	33. C	34. A	35. A	36. A	37. A	38. D	39. D	40. A
41. B	42. A	43. A	44. A	45. D	46. B	47. B	48. B	49. C	50. B
51. D	52. C	53. C	54. A	55. C	56. C	57. A	58. A	59. A	60. A
61. D	62. D	63. C	64. C	65. A	66. B	67. D	68. B	69. C	70. C

DẠNG 40. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

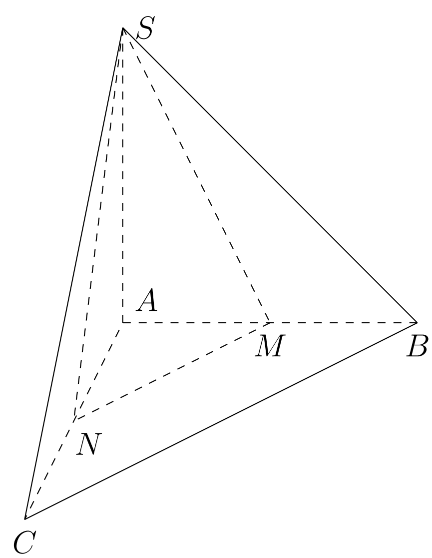
A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = 2a, AC = 4a, SA$ vuông góc
với mặt phẳng đáy và $SA = a$ (minh họa như hình bên). Gọi M là trung điểm của AB . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC bằng



Ⓐ $\frac{2a}{3}$.
Ⓑ $\frac{\sqrt{6}a}{3}$.
Ⓒ $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.
Ⓓ $\frac{a}{2}$.

Lời giải.

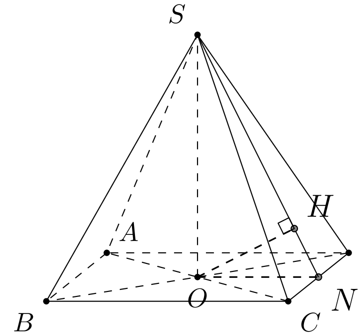


Gọi N là trung điểm của AC, ta có $MN \parallel BC$ nên ta được $BC \parallel (SMN)$.
Do đó $d(BC, MB) = d(BC, (SMN)) = d(B, (SMN)) = d(A, (SMN)) = h$.
$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow d = \frac{2a}{3}$.
Chọn phương án A

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = a$. Khoảng cách giữa SC và AB bằng

Ⓐ $\frac{a\sqrt{3}}{15}$.
Ⓑ $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.
Ⓒ $\frac{2a\sqrt{3}}{15}$.
Ⓓ $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm của các cạnh CD,
H là hình chiếu vuông góc của O trên SN. Vì $AB \| CD$ nên
$d(AB, SC) = d\left(AB, (SCD)\right) = d\left(A, (SCD)\right) = 2d\left(O, (SCD)\right)$
(vì O là trung điểm đoạn MN.)

Ta có $\begin{cases} CD \perp SO \\ CD \perp ON \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SON) \Rightarrow CD \perp OH.$

Khi đó $\begin{cases} CD \perp OH \\ OH \perp SN \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SCD)$

$\Rightarrow d\left(O; (SCD)\right) = OH.$

Tam giác SON vuông tại O nên: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{ON^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{1}{\frac{a^2}{4}} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{a^2}$

$\Rightarrow OH = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$. Vậy $d(AB, SC) = 2OH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

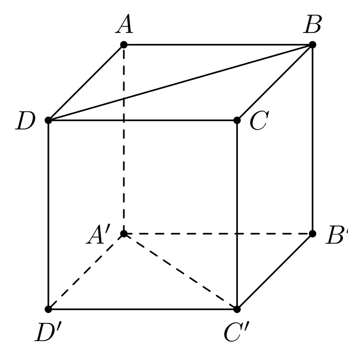
Chọn phương án D

Câu 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

A $a\sqrt{2}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C** $a\sqrt{3}$. **D** a.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}(BD, A'C') = \mathrm{d}((ABCD), (A'B'C'D')) = AA' = a$.



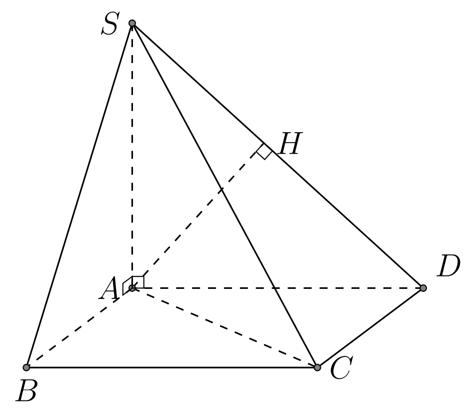
Chọn phương án D

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD.

A $2a$. **B** $a\sqrt{2}$. **C** a. **D** $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

Trong mặt phẳng (SAD) hạ $AH \perp SD$. Do $SA \perp (ABCD)$ suy ra $SA \perp AB \quad (1)$.
Theo giả thiết $AB \perp AD \quad (2)$.
Từ (1) và (2) suy ra $AB \perp (SAD)$ nên $AB \perp AH$. Vậy $\mathrm{d}(AB, SD) = AH$.
Xét tam giác vuông SAC, do $SA = AD = 2a$ nên $AH = \dfrac{SD}{2}$.
Mà $SD = SA\sqrt{2} \Leftrightarrow SD = 2\sqrt{2}a$ suy ra $SD = a\sqrt{2}$.



Chọn phương án B

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = a$. Khoảng cách giữa SC và AB bằng

A $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{15}$. **D** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

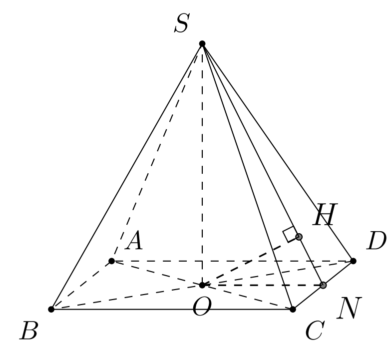
Lời giải.

Gọi N là trung điểm của các cạnh CD,
H là hình chiếu vuông góc của O trên SN. Vì $AB \| CD$ nên
$d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) = 2d(O, (SCD))$
(vì O là trung điểm đoạn MN.)

Ta có $\begin{cases} CD \perp SO \\ CD \perp ON \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SON) \Rightarrow CD \perp OH$.

Khi đó $\begin{cases} CD \perp OH \\ OH \perp SN \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SCD)$

$\Rightarrow d(O; (SCD)) = OH$.



Tam giác SON vuông tại O nên: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{ON^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{1}{\frac{a^2}{4}} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{a^2}$

$\Rightarrow OH = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$. Vậy $d(AB, SC) = 2OH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

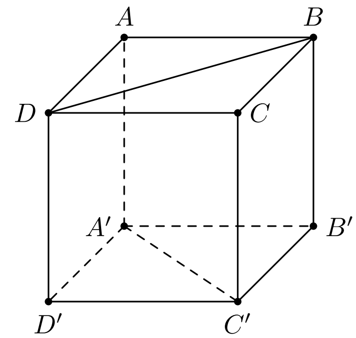
Chọn phương án D

Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

A $a\sqrt{2}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C** $a\sqrt{3}$. **D** a.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}(BD, A'C') = \mathrm{d}((ABCD), (A'B'C'D')) = AA' = a$.



Chọn phương án D

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD.

A $2a$. **B** $a\sqrt{2}$. **C** a. **D** $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

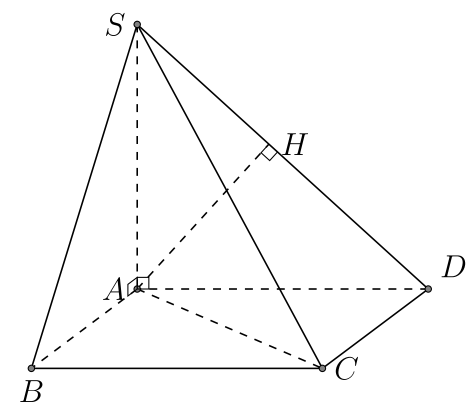
Trong mặt phẳng (SAD) hạ $AH \perp SD$. Do $SA \perp (ABCD)$ suy ra $SA \perp AB \quad (1)$.

Theo giả thiết $AB \perp AD \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $AB \perp (SAD)$ nên $AB \perp AH$. Vậy $\mathrm{d}\,(AB, SD) = AH$.

Xét tam giác vuông SAC, do $SA = AD = 2a$ nên $AH = \dfrac{SD}{2}$.

Mà $SD = SA\sqrt{2} \Leftrightarrow SD = 2\sqrt{2}a$ suy ra $SD = a\sqrt{2}$.



Chọn phương án B

Câu 7. Cho hình chóp đều $S.ABCD$, cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy là $60°$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).

A $\dfrac{a}{4}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D** $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải.

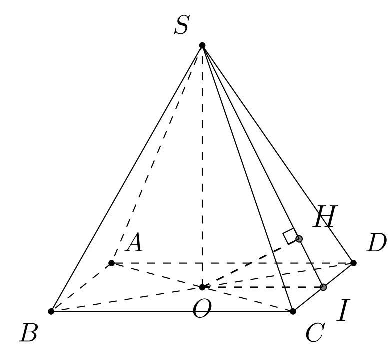
Ta có: $\dfrac{d\,(B;(SCD))}{d\,(O;(SCD))} = \dfrac{BD}{OD} = 2$

$\Rightarrow d\,(B;(SCD)) = 2.d\,(O;(SCD)) = 2OH$.

Trong đó H là hình chiếu vuông góc của O lên (SCD).

Gọi I là trung điểm của CD ta có: $\begin{cases} SI \perp CD \\ OI \perp CD \end{cases}$

$\Rightarrow ((SCD);(ABCD)) = (OI;SI) = \widehat{SIO} = 60°$.



Xét tam giác SOI vuông tại O ta có: $SO = OI.\tan 60 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do $SOCD$ là tứ diện vuông tại O nên: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OC^2} + \dfrac{1}{OD^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{16}{3a^2}$

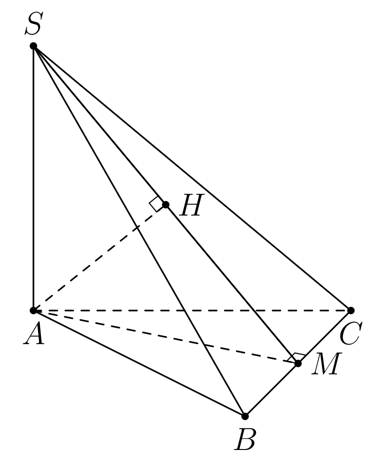
$\Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow d\left(B;(SCD)\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn phương án C

Câu 8. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Khoảng cách từ A đến (SBC) là

A $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BC thì $AM \perp BC, AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SM, ta có $AH \perp (SBC)$. Trong tam giác vuông SAM, ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

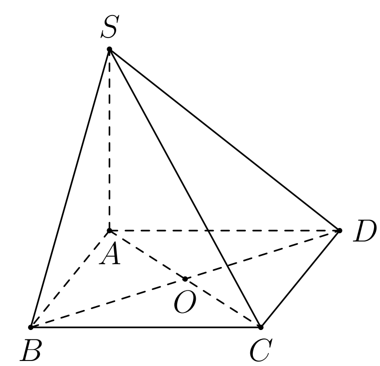
Vậy $\mathrm{d}(A,(SBC)) = AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Chọn phương án A

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, SA vuông góc với mặt đáy. Hỏi mệnh đề nào sau đây là sai?

A $\mathrm{d}(B,(SCD)) = 2\mathrm{d}(O,(SCD))$. **B** $\mathrm{d}(A,(SBD)) = \mathrm{d}(B,(SAC))$.
C $\mathrm{d}(C,(SAB)) = \mathrm{d}(C,(SAD))$. **D** $\mathrm{d}(S,(ABCD)) = SA$.

Lời giải.



Vì $BC = 2OC$ nên $\mathrm{d}\left(B,(SCD)\right) = 2\mathrm{d}\left(O,(SCD)\right)$.
Ta có $\mathrm{d}\left(C,(SAB)\right) = CB; \mathrm{d}\left(C,(SAD)\right) = CD$ mà $CB = CD$ nên $\mathrm{d}\left(C,(SAB)\right) = \mathrm{d}\left(C,(SAD)\right)$.
Vì SA vuông góc với mặt đáy nên $\mathrm{d}\left(S,(ABCD)\right) = SA$. Do đó đáp án sai là $\mathrm{d}(A,(SBD)) = \mathrm{d}(B,(SAC))$.

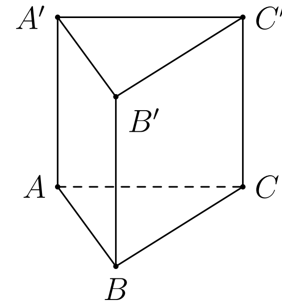
Chọn phương án B

Câu 10. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a, AA' = 3a$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$.

A $2a$. **B** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C** $3a$. **D** a.

Lời giải.

Ta có $(ABC) \parallel (A'B'C')$ và $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên $\mathrm{d}\left((ABC), (A'B'C')\right) = AA' = 3a$.



Chọn phương án C

B MỨC ĐỘ 2

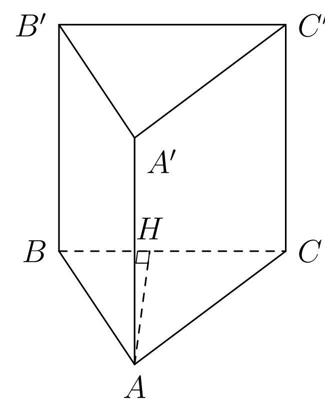
Câu 11. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A có $BC = 2a$; $AB = a\sqrt{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC là:

A $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.   **B** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.   **C** $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.   **D** $\dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.

Lời giải.

Phương pháp

Xác định đường vuông góc chung giữa hai đường thẳng sau đó tính khoảng cách.



Cách giải:

Ta có: $AA' \parallel (BCC'B') \Rightarrow d(AA'; BC) = d(A, (BCC'B'))$

Kẻ $AH \perp BC$

$\Rightarrow AH \perp (BCC'B') \Rightarrow AH = (AA'; BC)$

$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$

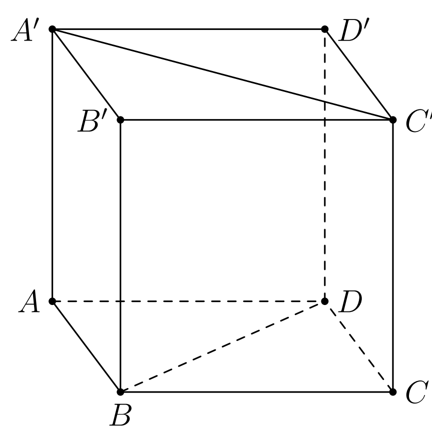
$\Rightarrow AH = d(AA'; BC) = \dfrac{AB.AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \dfrac{a.a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn phương án B

Câu 12.

Cho hình hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a như hình vẽ bên. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

A a.   **B** $\sqrt{2}a$.   **C** $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.   **D** $\sqrt{3}a$.



Lời giải.

Do giả thiết ta có $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$ nên

$$\mathrm{d}\left(BD; A'C'\right) = \mathrm{d}\left[(ABCD); \left(A'B'C'D'\right)\right]$$

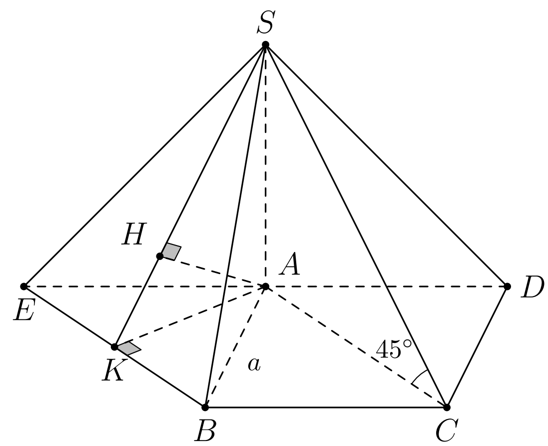
$$= \mathrm{d}\left(A; \left(A'B'C'D'\right)\right) = AA' = a.$$

Chọn phương án A

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, góc giữa SC và mặt đáy bằng $45°$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SB và AC.

(A) $d = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. (B) $d = \dfrac{2\sqrt{2}a}{5}$. (C) $d = \dfrac{\sqrt{3}a}{5}$. (D) $d = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.



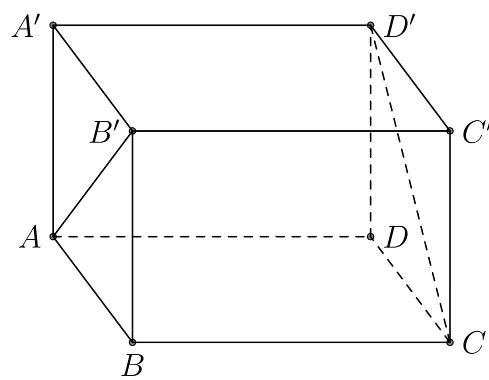
Góc giữa SC và mặt đáy bằng $45° \Rightarrow \widehat{SCA} = 45°$.
Xét tam giác SAC vuông tại A, có $SA = AC \cdot \tan 45° = a\sqrt{2}$.
Dựng hình bình hành $ACBE$ $\Rightarrow BE \parallel AC \Rightarrow AC \parallel (SBE)$.
Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (SBE).
$\mathrm{d}(SB, AC) = \mathrm{d}(AC; (SBE)) = \mathrm{d}(A; (SBE)) = AH$.
Xét hình tứ diện vuông $SABE$ có
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AE^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{2a^2}$.
$\Rightarrow AH^2 = \dfrac{2a^2}{5} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

Chọn phương án A

Câu 14. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và CD'.

(A) $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. (B) a. (C) $\sqrt{2}a$. (D) $2a$.

Lời giải.



Do giả thiết ta có $(AA'B'B) \parallel (CC'D'D)$.
Nên

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(AB', CD'\right) &= \mathrm{d}\left(AB', \left(CC'D'D\right)\right) \\ &= \mathrm{d}\left(A, \left(CC'D'D\right)\right) = AD \end{aligned}$$

Vậy khoảng cách giữa AB' và CD' bằng a.

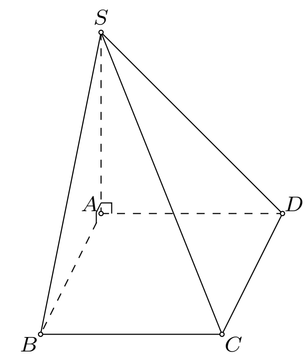
Chọn phương án B

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{3}, BC = a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa SB và DC bằng:

(A) $a\sqrt{2}$. (B) $\dfrac{2a}{3}$. (C) $a\sqrt{3}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Vì $DC \mathbin{//} AB$ nên khoảng cách giữa SB và DC bằng khoảng cách giữa mặt phẳng (SAB) và DC.
Do đó: $d(DC, SB) = d(DC, (SAB)) = d(D, (SAB)) = AD = a\sqrt{2}$.



Chọn phương án A

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy bằng $45°$. Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt đáy là điểm H thuộc đoạn AB sao cho $HA = 2HB$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

A $\dfrac{a\sqrt{210}}{45}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{210}}{20}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{210}}{15}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{210}}{30}$.

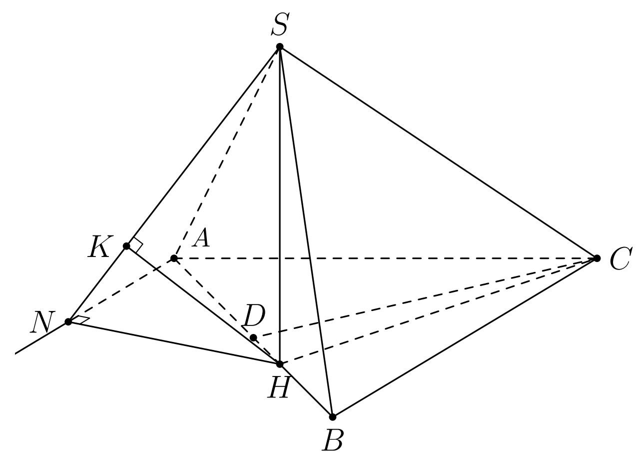
Lời giải.

Ta có $\widehat{SCH}$ là góc giữa SC và mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow \widehat{SCH} = 45°$.
Gọi D là trung điểm cạnh AB. Ta có:

$$HD = \frac{a}{6}, \qquad CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$HC = \sqrt{HD^2 + CD^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}.$$

$$SH = HC \cdot \tan 45° = \frac{a\sqrt{7}}{3}.$$



Kẻ Ax song song với BC, gọi N, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên Ax và SN. Ta có BC song song với mặt phẳng (SAN) và $BA = \dfrac{3}{2}HA$. Nên

$$\mathrm{d}(SA, BC) = \mathrm{d}(B, (SAN)) = \frac{3}{2}\mathrm{d}(H, (SAN)) = \frac{3}{2}HK.$$

Mà $AH = \dfrac{2a}{3}$; $HN = AH \sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$$HK = \frac{SH \cdot HN}{\sqrt{SH^2 + HN^2}} = \frac{a\sqrt{210}}{30}.$$

Vậy $\mathrm{d}(SA, BC) = \dfrac{3}{2}HK = \dfrac{a\sqrt{210}}{20}$.
Chọn phương án B

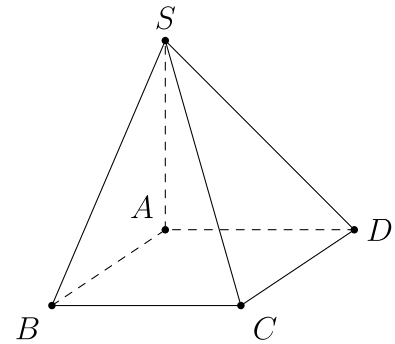
Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{3}, BC = a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa SB và DC bằng

(A) $a\sqrt{2}$. (B) $\dfrac{2a}{3}$. (C) $a\sqrt{3}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Vì $DC \parallel AB$ nên khoảng cách giữa SB và DC bằng khoảng cách giữa mặt phẳng (SAB) và DC.

Do đó: $\mathrm{d}(DC, SB) = \mathrm{d}(DC, (SAB))$
$= \mathrm{d}(D, (SAB)) = AD = a\sqrt{2}$.



Chọn phương án (A)

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA = SB$ và $(SAB) \perp (ABCD)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SBA}$.

(B) $(SAB) \perp (SAD)$.

(C) Khoảng cách giữa BC và SA là AB.

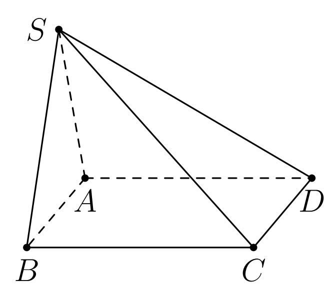
(D) Góc giữa BD và (SAD) bằng 45°.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}(SAB) \perp (ABCD) \\ BC \perp BA\end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Từ B kẻ $BK \perp SA \Rightarrow \mathrm{d}(BC, SA) = BK$.

Ta có $\triangle SAB$ cân tại S, do vậy $\mathrm{d}(BC, SA) = BK \neq AB$.



Chọn phương án (C)

Câu 19. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') có số đo bằng 60°. Khoảng cách $\mathrm{d}(A'D', CD)$ bằng

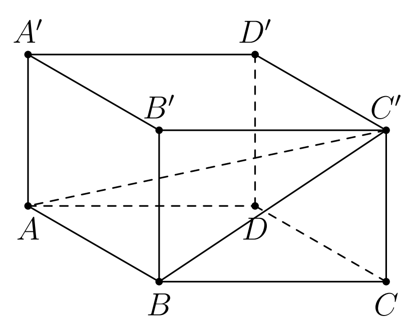
(A) $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. (B) $2a\sqrt{3}$. (C) $3a$. (D) $a\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') là $\widehat{C'BC} = 60^\circ$.

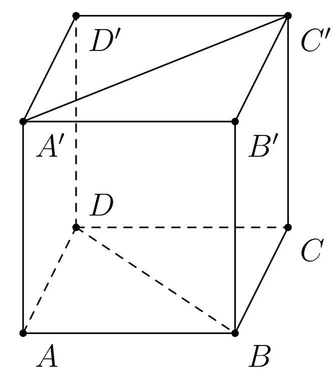
Ta được $CC' = a\sqrt{3}$.

Ta có $\mathrm{d}(A'D', DC) = DD' = CC' = a\sqrt{3}$.



Chọn phương án (D)

Câu 20.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng



A a. **B** $\sqrt{2}a$. **C** $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. **D** $\sqrt{3}a$.

Lời giải.

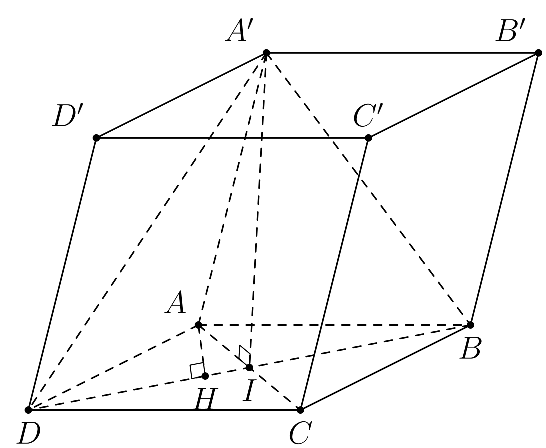
Do $\begin{cases} A'C' \subset \left(A'B'C'D'\right) \\ DB \subset (ABCD) \\ (ABCD) \parallel \left(A'B'C'D'\right) \end{cases}$ nên $\mathrm{d}(A'C', BD) = \mathrm{d}((ABCD), (A'B'C'D')) = AA' = a$.

Chọn phương án A

Câu 21. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD. Khoảng cách từ B' đến mặt phẳng $(A'BD)$ là

A $\dfrac{a}{2}$. **B** $a\sqrt{3}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Gọi I là giao điểm của AC và BD.

Dựng $AH \perp BD$.

Ta có $A'I \perp (ABCD)$ mà $AH \subset (ABCD)$ nên $A'I \perp AH$.

Từ đó ta được $AH \perp (A'BD)$.

Suy ra $d(B', (A'BD)) = d(A, (A'BD)) = AH$.

Xét ΔABC vuông tại A có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = \sqrt{\frac{AB^2 \cdot AD^2}{AB^2 + AD^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $d(B', (A'BD)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn phương án D

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đường cao $SA = 2a$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông ở A và D, $AB = 2a$, $AD = CD = a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. **B** $\dfrac{2a}{\sqrt{2}}$. **C** $\dfrac{2a}{3}$. **D** $a\sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi K là trung điểm $AB \Rightarrow AK = KB = a$.

Dễ thấy tứ giác $ADCK$ là hình vuông nên $CK = a$.

ΔACB có trung tuyến $CK = \dfrac{1}{2}AB \Rightarrow \Delta ACB$ vuông tại C.

Ta có $\begin{cases} CB \perp AC \\ CB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAC) \Rightarrow (SBC) \perp (SAC)$.

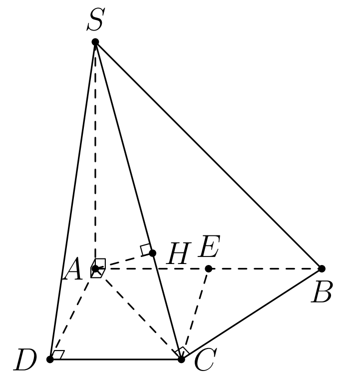
Trong ΔSAC kẻ $AH \perp SC$ tại $H \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Vậy $d(A;(SBC)) = AH$.

Ta có ΔSAC vuông tại A nên

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{(2a)^2} + \dfrac{1}{(a\sqrt{2})^2} = \dfrac{3}{4a^2}$

$\Rightarrow d(A;(SBC)) = AH = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.



Chọn phương án D

Câu 23. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = a$, $AC = 2a$. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ACD') là

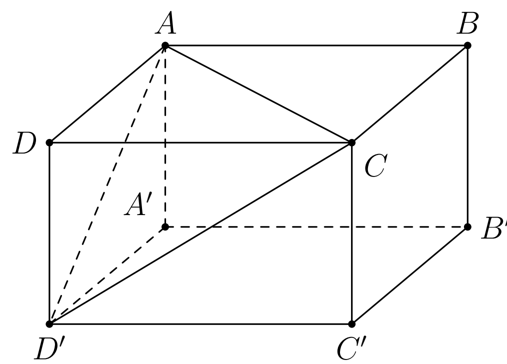
A $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải.

Ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3}a$. Do đó $DA = \sqrt{3}a$; $DC = DD' = a$

Tứ diện $DACD'$ vuông tại D nên ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} &= \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC^2} + \frac{1}{DD'^2} \\ &= \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} \\ &= \frac{7}{3a^2}. \end{aligned}$$



Suy ra $h = \sqrt{\dfrac{3}{7}}a = \dfrac{\sqrt{21}}{7}a$.

Chọn phương án D

Câu 24. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = a$, $AC = 2a$. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ACD') là

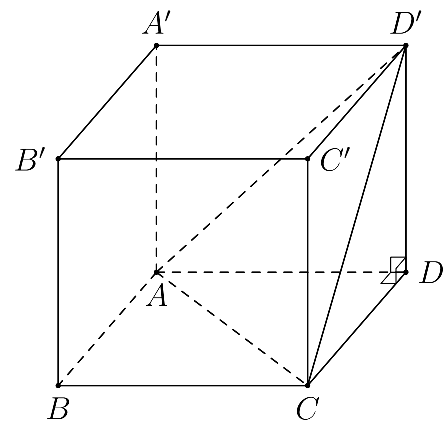
A $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải.

Ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.
Do đó $DA = a\sqrt{3}$; $DC = DD' = a$.
Gọi $h = \mathrm{d}(D, (ACD'))$, do tứ diện $DACD'$ vuông tại D nên ta có

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC'^2} + \frac{1}{DD'^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2}$$

suy ra $h = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.



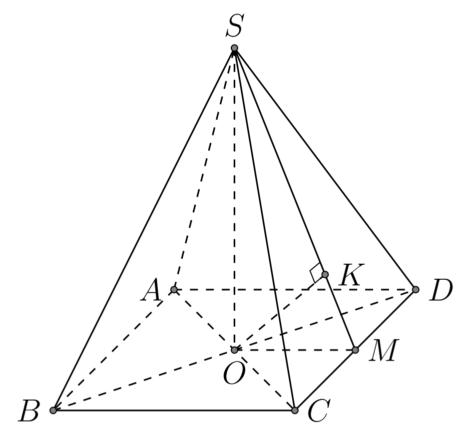
Chọn phương án D

Câu 25. Cho hình chóp đều $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh là $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng

A $\dfrac{a\sqrt{14}}{3}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{14}}{4}$. **C** $a\sqrt{14}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

Lời giải.

Gọi tâm của đáy là O, M là trung điểm của CD.
Trong (SOM), kẻ OK vuông góc với SM tại K.
Khi đó ta có $\mathrm{d}(A, (SCD)) = 2\mathrm{d}(O, (SCD)) = 2OK$.
$SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{9a^2 - 2a^2} = \sqrt{7a^2} = a\sqrt{7}$.
$\dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{1}{7a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{8}{7a^2}$.
Suy ra $\mathrm{d}(A, (SCD)) = 2OK = \dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.



Chọn phương án D

Câu 26. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\dfrac{a}{3}$.

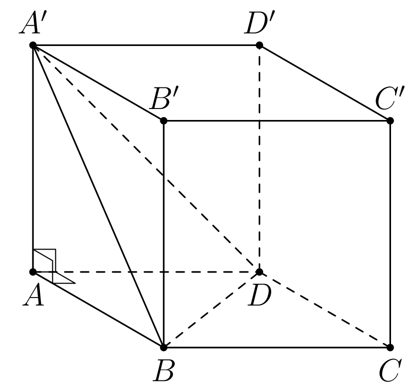
B Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(CDD'C')$ bằng a.

C Độ dài AC' bằng $a\sqrt{a3}$.

D Khoảng cách giữa BD và CD' bằng $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Ta có $A.A'BD$ là tam diện vuông đỉnh A.
Ta có $\dfrac{1}{[\mathrm{d}(A,(A'BD))]^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2}$.
$\Rightarrow \mathrm{d}(A,(A'BD)) = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.



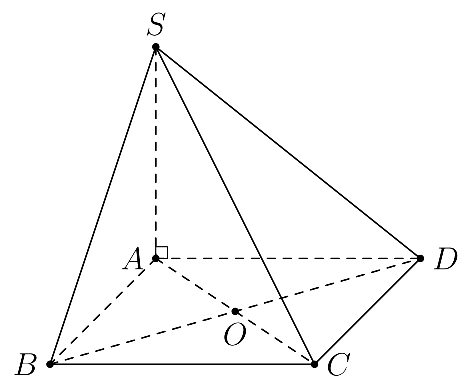
Chọn phương án A

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng $\dfrac{6a}{7}$. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) bằng

A $\dfrac{6a}{7}$. **B** $\dfrac{12a}{7}$. **C** $\dfrac{3a}{7}$. **D** $\dfrac{4a}{7}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$, ta có AC cắt mặt phẳng (SBD) tại O và O là trung điểm của đoạn thẳng AC nên $\mathrm{d}[C,(SBD)] = \mathrm{d}[A,(SBD)] = \dfrac{6a}{7}$.



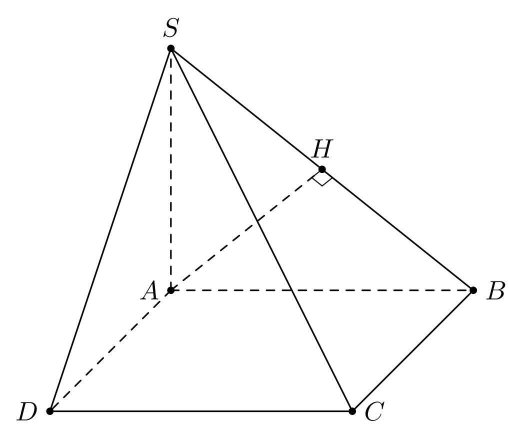
Chọn phương án A

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = a, SA \perp (ABCD)$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) là

A $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B** a. **C** $a\sqrt{2}$. **D** $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải.

Kẻ $AH \perp SB$ $(H \in SB)$.
Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.
Mà $AH \perp SB$ nên $AH \perp (SBC)$ hay $AH = \mathrm{d}(A;(SBC))$.
Vì tam giác SAB vuông cân nên $AH = \dfrac{1}{2}SB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



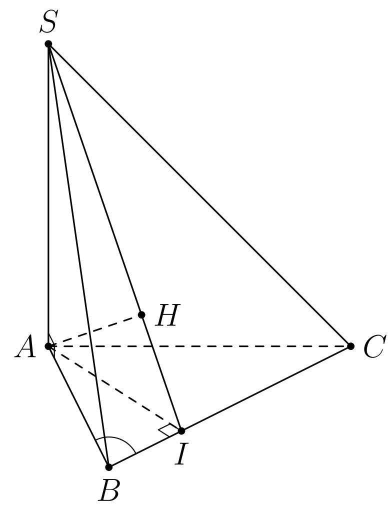
50 DẠNG TOÁN PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA LẦN 2

Chọn phương án A

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy ABC. Biết $SA = 3a$, $AB = a$, $BC = 2a$ và góc $\widehat{ABC}$ bằng $60°$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $3a\sqrt{3}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $\dfrac{3a\sqrt{13}}{13}$. D. $\dfrac{a\sqrt{3}}{13}$.

Lời giải.



Kẻ $AI \perp BC$. Xét $\triangle ABI$ vuông tại I, $AI = AB \cdot \sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA\,(SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI)$.

Trong (SAI) kẻ $AH \perp SI$, ta có $\begin{cases} AH \perp SI \\ AH \perp BC\,(BC \perp (SAI)). \end{cases}$

Suy ra $AH \perp (SBC)$. Do đó $\mathrm{d}(A, (SBC)) = AH$.

Xét $\triangle SAI$ vuông tại A, ta có

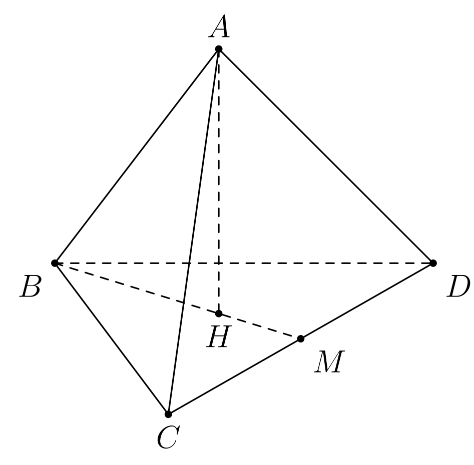
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{9a^2} = \frac{13}{9a^2} \Rightarrow AH = \frac{3a\sqrt{13}}{13}.$$

Chọn phương án C

Câu 30. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD).

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. B. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. C. $\dfrac{3a}{2}$. D. $2a$.

Lời giải.



Gọi hình chiếu của A xuống mặt phẳng (BCD) là H và M là trung điểm CD.

Vì tứ diện $ABCD$ đều nên H là trọng tâm tam giác BCD, suy ra $BH = \dfrac{2}{3}BM = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

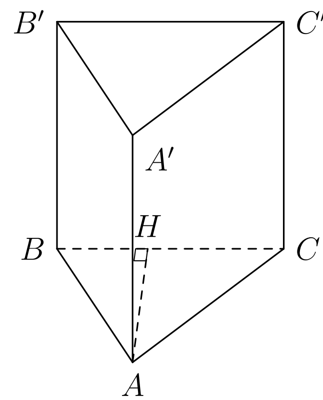
Khi đó $\mathrm{d}\,(A, (BCD)) = AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Chọn phương án B

Câu 31. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A có $BC = 2a$; $AB = a\sqrt{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC là:

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. B. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. D. $\dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.

Lời giải.



Phương pháp

Xác định đường vuông góc chung giữa hai đường thẳng sau đó tính khoảng cách.

Cách giải:

Ta có: $AA' \parallel (BCC'B') \Rightarrow d(AA'; BC) = d(A, (BCC'B'))$

Kẻ $AH \perp BC$

$\Rightarrow AH \perp (BCC'B') \Rightarrow AH = (AA'; BC)$

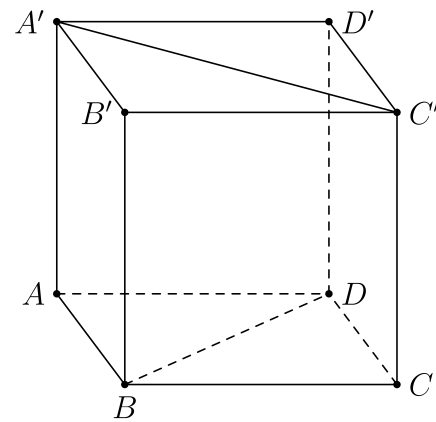
$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$

$\Rightarrow AH = d(AA'; BC) = \dfrac{AB.AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \dfrac{a.a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn phương án B

Câu 32.

Cho hình hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a như hình vẽ bên. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng



A a. **B** $\sqrt{2}a$. **C** $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. **D** $\sqrt{3}a$.

Lời giải.

Do giả thiết ta có $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$ nên

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(BD; A'C'\right) &= \mathrm{d}\left[(ABCD); \left(A'B'C'D'\right)\right] \\ &= \mathrm{d}\left(A; \left(A'B'C'D'\right)\right) = AA' = a. \end{aligned}$$

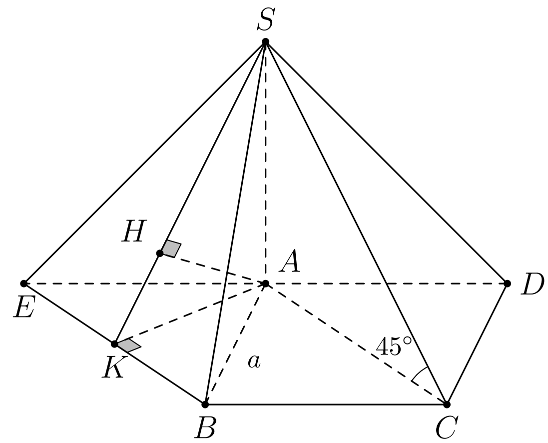
Chọn phương án A

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, góc giữa SC và mặt đáy bằng $45°$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SB và AC.

A $d = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. **B** $d = \dfrac{2\sqrt{2}a}{5}$. **C** $d = \dfrac{\sqrt{3}a}{5}$. **D** $d = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Góc giữa SC và mặt đáy bằng $45^\circ \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ$.
Xét tam giác SAC vuông tại A, có $SA = AC \cdot \tan 45^\circ = a\sqrt{2}$.
Dựng hình bình hành $ACBE \Rightarrow BE \parallel AC \Rightarrow AC \parallel (SBE)$.
Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (SBE).
$\mathrm{d}(SB, AC) = \mathrm{d}(AC; (SBE)) = \mathrm{d}(A; (SBE)) = AH$.
Xét hình tứ diện vuông $SABE$ có
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AE^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{2a^2}$.
$\Rightarrow AH^2 = \dfrac{2a^2}{5} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.



Chọn phương án A

Câu 34. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và CD'.

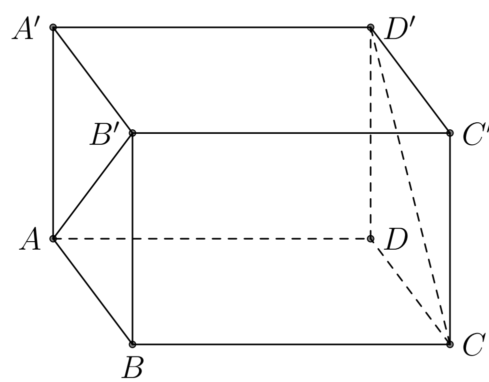
A $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. B a. C $\sqrt{2}a$. D $2a$.

Lời giải.

Do giả thiết ta có $(AA'B'B) \parallel (CC'D'D)$.
Nên

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(AB', CD'\right) &= \mathrm{d}\left(AB', \left(CC'D'D\right)\right)\\ &= \mathrm{d}\left(A, \left(CC'D'D\right)\right) = AD\end{aligned}$$

Vậy khoảng cách giữa AB' và CD' bằng a.



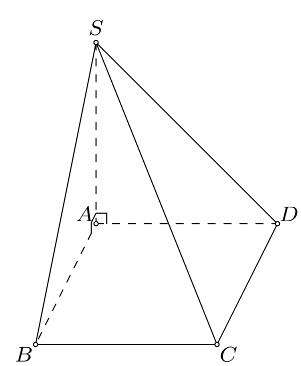
Chọn phương án B

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{3}, BC = a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa SB và DC bằng:

A $a\sqrt{2}$. B $\dfrac{2a}{3}$. C $a\sqrt{3}$. D $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Vì DC // AB nên khoảng cách giữa SB và DC bằng khoảng cách giữa mặt phẳng (SAB) và DC.
Do đó: $d\,(DC, SB) = d\,(DC, (SAB)) = d\,(D, (SAB)) = AD = a\sqrt{2}$.



Chọn phương án A

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy bằng $45°$. Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt đáy là điểm H thuộc đoạn AB sao cho $HA = 2HB$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

A $\dfrac{a\sqrt{210}}{45}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{210}}{20}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{210}}{15}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{210}}{30}$.

Lời giải.

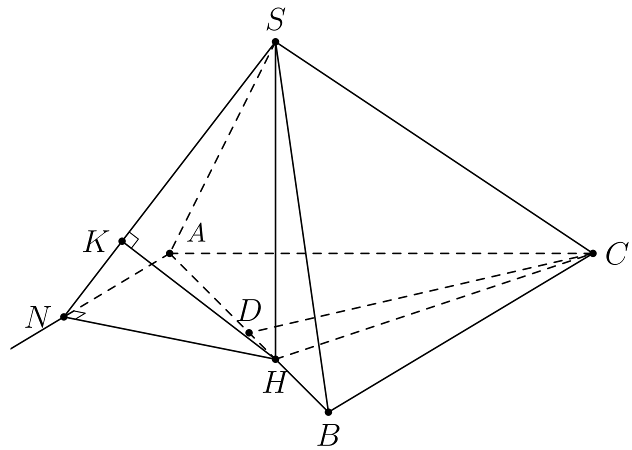
Ta có $\widehat{SCH}$ là góc giữa SC và mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow \widehat{SCH} = 45°$.

Gọi D là trung điểm cạnh AB. Ta có:

$$HD = \frac{a}{6}, \qquad CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$HC = \sqrt{HD^2 + CD^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}.$$

$$SH = HC \cdot \tan 45° = \frac{a\sqrt{7}}{3}.$$



Kẻ Ax song song với BC, gọi N, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên Ax và SN. Ta có BC song song với mặt phẳng (SAN) và $BA = \dfrac{3}{2}HA$. Nên

$$\mathrm{d}(SA, BC) = \mathrm{d}(B, (SAN)) = \frac{3}{2}\mathrm{d}(H, (SAN)) = \frac{3}{2}HK.$$

Mà $AH = \dfrac{2a}{3}$; $HN = AH \sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$$HK = \frac{SH \cdot HN}{\sqrt{SH^2 + HN^2}} = \frac{a\sqrt{210}}{30}.$$

Vậy $\mathrm{d}(SA, BC) = \dfrac{3}{2}HK = \dfrac{a\sqrt{210}}{20}$.

Chọn phương án B

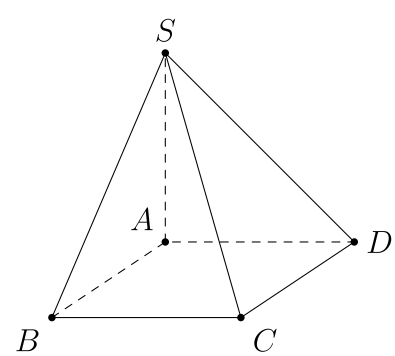
Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{3}, BC = a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa SB và DC bằng

A $a\sqrt{2}$. **B** $\dfrac{2a}{3}$. **C** $a\sqrt{3}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Vì $DC \parallel AB$ nên khoảng cách giữa SB và DC bằng khoảng cách giữa mặt phẳng (SAB) và DC.

Do đó: $\mathrm{d}(DC, SB) = \mathrm{d}(DC, (SAB)) = \mathrm{d}(D, (SAB)) = AD = a\sqrt{2}$.



Chọn phương án A

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA = SB$ và $(SAB) \perp (ABCD)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SBA}$.

B. $(SAB) \perp (SAD)$.

C. Khoảng cách giữa BC và SA là AB.

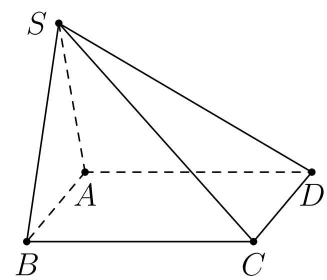
D. Góc giữa BD và (SAD) bằng 45°.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}(SAB) \perp (ABCD) \\ BC \perp BA\end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Từ B kẻ $BK \perp SA \Rightarrow \mathrm{d}(BC, SA) = BK$.

Ta có $\triangle SAB$ cân tại S, do vậy $\mathrm{d}(BC, SA) = BK \neq AB$.



Chọn phương án C

Câu 39. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') có số đo bằng 60°. Khoảng cách $\mathrm{d}(A'D', CD)$ bằng

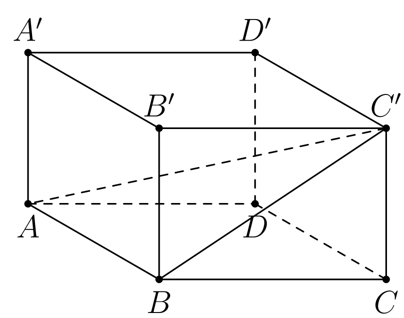
A. $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. B. $2a\sqrt{3}$. C. $3a$. D. $a\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') là $\widehat{C'BC} = 60^\circ$.

Ta được $CC' = a\sqrt{3}$.

Ta có $\mathrm{d}(A'D', DC) = DD' = CC' = a\sqrt{3}$.

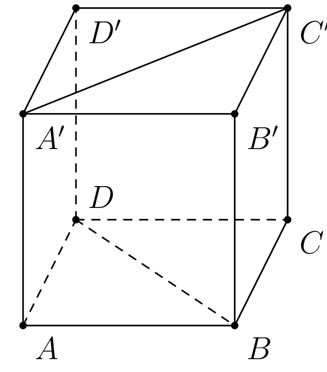


Chọn phương án D

Câu 40.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

A. a. B. $\sqrt{2}a$. C. $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. D. $\sqrt{3}a$.



Lời giải.

Do $\begin{cases} A'C' \subset \left(A'B'C'D'\right) \\ DB \subset (ABCD) \\ (ABCD) \parallel \left(A'B'C'D'\right) \end{cases}$ nên $\mathrm{d}(A'C', BD) = \mathrm{d}((ABCD), (A'B'C'D')) = AA' = a$.

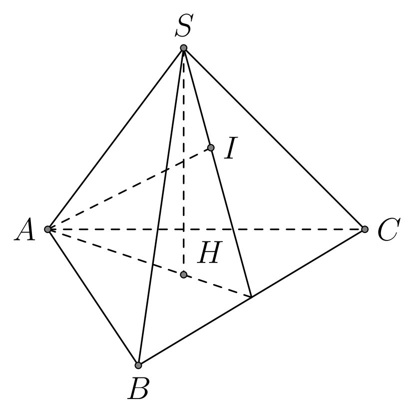
Chọn phương án A

C MỨC ĐỘ 3

Câu 41. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, mặt bên tạo với đáy một góc 60°. Khi đó khoảng cách từ A đến mặt phẳng (ABC) bằng

A $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C** $a\sqrt{3}$. **D** $\dfrac{3a}{4}$.

Lời giải.



Gọi H là trọng tâm tam giác ABC, ta có $SH \perp (ABC)$.

Gọi M là trung điểm của BC, ta có $BC \perp (SAM)$.

Do đó góc giữa (SBC) và (ABC) bằng $\widehat{SMH} = 60^\circ$.

Kẻ $AI \perp SM$ tại I. Khi đó $AI \perp (SBC)$

$\Rightarrow AI = d(A, (SBC))$.

Ta có $HM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $SH = \dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow SM = \dfrac{HM}{\cos 60^\circ} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

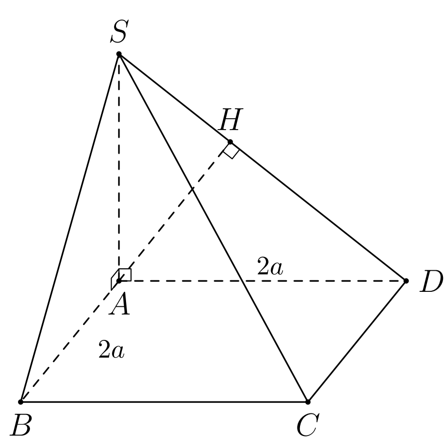
$\Rightarrow AI = \dfrac{SH \cdot AH}{SM} = \dfrac{3a}{4}$.

Chọn phương án D

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, khoảng cách C đến (SBD) là $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. Tính khoảng cách từ A đến (SCD).

A $x = a\sqrt{3}$. **B** $2a$. **C** $x = a\sqrt{2}$. **D** $x = 3a$.

Lời giải.



Ta có: $CD \perp (SAD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD)$ theo giao tuyến SD.

Trong (SAD) kẻ $AH \perp SD, H \in SD \Rightarrow AH \perp (SCD)$.

Vậy $x = \mathrm{d}(A, (SCD)) = AH$.
Đặt $h = \mathrm{d}(A, (SBD))$. Ta có $h = \mathrm{d}(A, (SBD)) = \mathrm{d}(C, (SBD))$.
Theo bài $\mathrm{d}(C, (SBD)) = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ nên $h = \mathrm{d}(A, (SBD)) = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.
Vì tứ diện $SABD$ có ba cạnh AS, AB, AD đôi một vuông góc nên
$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2} - \frac{1}{(2a)^2} - \frac{1}{(2a)^2} = \frac{1}{4a^2} \Rightarrow SA = 2a.$$
Do đó $\triangle SAD$ vuông cân tại A có: $SD = AD\sqrt{2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow x = AH = \dfrac{SD}{2} = a\sqrt{2}$.

Chọn phương án C

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. **B** $\dfrac{\sqrt{15}a}{7}$. **C** $\dfrac{\sqrt{21}a}{3}$. **D** $\dfrac{\sqrt{15}a}{3}$.

Lời giải.

Diện tích hình thoi $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích hình chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Ta có $SD = a\sqrt{2}$, $AC = a\sqrt{3}$, $SC = 2a$, nửa chu vi $\triangle SCD$ là $p_{\triangle SCD} = \dfrac{3a + a\sqrt{2}}{2}$.

$S_{\triangle SCD} = \sqrt{p(p-a)(p-2a)(p-a\sqrt{2})} = \dfrac{a^2\sqrt{7}}{4}$.

Khi đó $\mathrm{d}(B, (SCD)) = \dfrac{3V_{S.BCD}}{S_{\triangle SCD}} = \dfrac{3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{6}}{\frac{a^2\sqrt{7}}{4}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

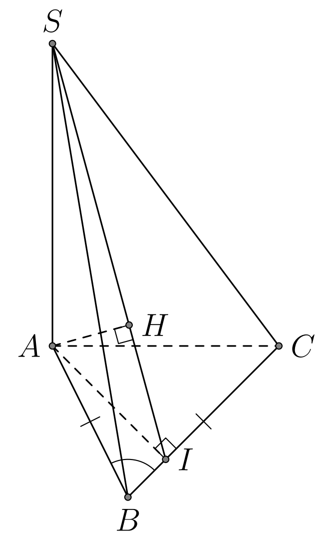
Chọn phương án A

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 3a$ và $SA \perp (ABC)$. Biết $AB = BC = 2a$ và $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A $\dfrac{3a}{2}$. **B** $\dfrac{a}{2}$. **C** a. **D** $2a$.

Lời giải.

Gọi I là hình hình chiếu vuông góc của A trên BC, ta có $AI \perp BC$. (1)
Mặt khác $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (SIA)$. (3)
Gọi H là hình hình chiếu vuông góc của A trên SI, ta có $AH \perp SI$. (4)
Từ (3) và (4) suy ra $AH \perp (SBC)$ nên khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là AH.



Xét tam giác BIA vuông tại I, ta có

$$AI = AB \cdot \sin 120^\circ = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Xét tam giác SAI vuông tại A, ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AI^2} \Rightarrow AH = \sqrt{\frac{AS^2 \cdot AI^2}{AS^2 + AI^2}} = \sqrt{\frac{(3a)^2 \cdot (a\sqrt{3})^2}{(3a)^2 + (a\sqrt{3})^2}} = \frac{3a}{2}.$$

Vậy khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{3a}{2}$.

Chọn phương án A

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD = 2a$; $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng

A $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B** $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$. **C** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D** $\frac{3a\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải.

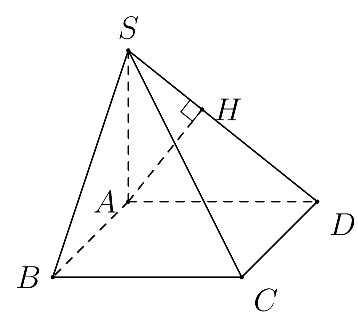
Ta có $\left.\begin{array}{l} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD)$ theo giao tuyến SD.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên $SD \Rightarrow AH \perp (SCD)$
$\Rightarrow \mathrm{d}(A, (SCD)) = AH$.

Xét ΔSAD vuông tại A đường cao AH.

$$AH = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{a \cdot 2a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

$$\Rightarrow d(A, (SCD)) = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$



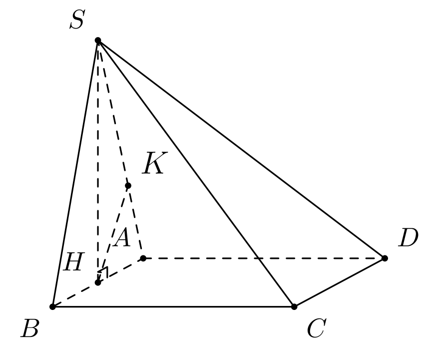
Chọn phương án C

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính khoảng cách d từ điểm C đến mặt phẳng (SAD).

A $d = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. **B** $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C** $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D** $d = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AB. Vì $\triangle SAB$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.



$BC \parallel (SAD) \Rightarrow \mathrm{d}(C,(SAD)) = \mathrm{d}(B,(SAD)) = 2\mathrm{d}(H,(SAD))$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên SA.

Ta có :

$$\begin{cases} HK \perp SA \\ HK \perp AD \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SAD) \Rightarrow \mathrm{d}(H,(SAD)) = HK.$$

Trong $\triangle SAH$ vuông tại H, ta có : $HK = \dfrac{SH \cdot HA}{\sqrt{SA^2 + HA^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Chọn phương án B

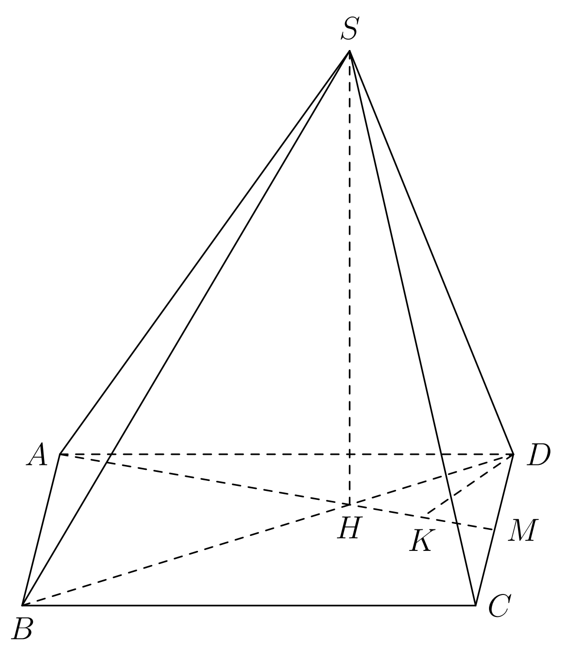
Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có diện tích bằng $2a^2$, $AB = a\sqrt{2}$, $BC = 2a$. Gọi M là trung điểm của DC. Hai mặt phẳng (SBD) và (SAM) cùng vuông góc với đáy. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAM) bằng

A $\dfrac{4a\sqrt{10}}{15}$. **B** $\dfrac{3a\sqrt{10}}{5}$. **C** $\dfrac{2a\sqrt{10}}{5}$. **D** $\dfrac{3a\sqrt{10}}{15}$.

Lời giải.

Gọi $H = AM \cap BD$

Ta có $\begin{cases} (SBD) \perp (ABC) \\ (SAM) \perp (ABC) \\ (SBD) \cap (SAM) = SH \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC)$



Vì AB song song CD nên theo định lý Ta-lét ta có

$$\frac{HB}{HD} = \frac{AB}{DM} = 2 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}(B;(SAM))}{\mathrm{d}(D;(SAM))} = \frac{HB}{HD} = 2$$

$\Rightarrow \mathrm{d}(B;(SAM)) = 2\mathrm{d}(D;(SAM))$.

Kẻ $DK \perp AM$ tại K.

Ta có $\begin{cases} DK \perp AM \\ DK \perp SH (SH \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow DK \perp (SAM)$ tại $K \Rightarrow \mathrm{d}(D;(SAM)) = DK$

Nên $d(B;(SAM)) = 2DK$

Vì M là trung điểm của DC và $ABCD$ là hình bình hành có diện tích $2a^2$ nên ta có $S_{ADM} = \dfrac{1}{2}S_{ADC} = \dfrac{1}{4}S_{ABCD} = \dfrac{2a^2}{4} = \dfrac{a^2}{2}$.

Lại có $CD = AB = a\sqrt{2} \Rightarrow DM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $AD = BC = 2a$.

Khi đó $S_{ADM} = \dfrac{1}{2}AD \cdot DM \cdot \sin D \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot 2a \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sin D \Rightarrow \sin D = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{D} = 45°$.

Do vậy xét trong tam giác ADM ta có

$$\begin{aligned} AM^2 &= AD^2 + DM^2 - 2AD.DM \cdot \cos 45^\circ \\ &= 4a^2 + \frac{a^2}{2} - 2 \cdot 2a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{5a^2}{2}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow AM = \dfrac{\sqrt{10}}{2}a.$

Lại có $S_{ADM} = \dfrac{1}{2}DK \cdot AM \Rightarrow DK = \dfrac{2S_{ADM}}{AM} = \dfrac{2a}{\sqrt{10}} = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}.$

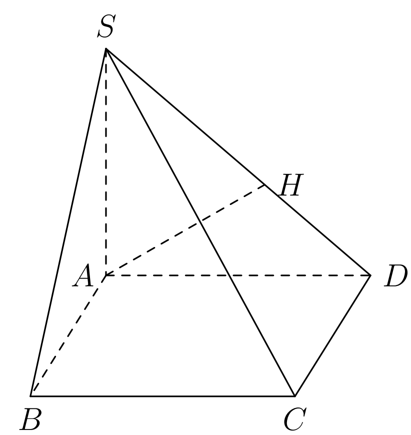
Từ đó $\mathrm{d}(B;(SAM)) = 2. \cdot DK = \dfrac{2a\sqrt{10}}{5}.$

Chọn phương án C

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng:

A $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **B** $a\sqrt{3}$. **C** $\dfrac{a}{2}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Phương pháp

Chứng minh để tìm khoảng cách sau đó áp dụng hệt thức lượng trong tam giác vuông để tính toán.

Cách giải:

Kẻ $AH \perp SB = \{H\}$

Ta có: $\begin{cases} SA \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

$\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A;(SBC)) = AH$

Áp dụng hệ thức lượng trong $\triangle SAB$ có đường cao AH ta có:

$d(A;(SBC)) = AH = \dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2 + a^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

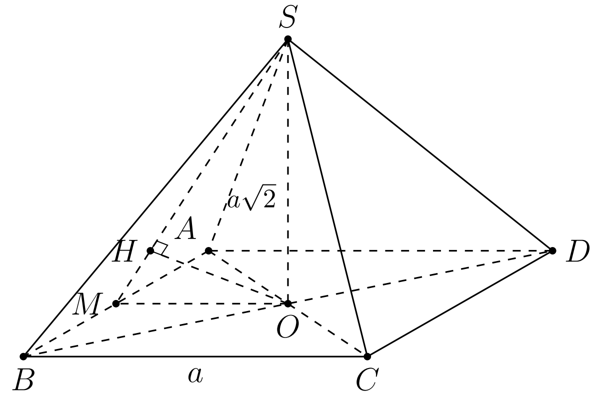
Chọn phương án D

Câu 49. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách d từ tâm O của đáy $ABCD$ đến một mặt bên theo a.

A $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **B** $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **C** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D** $d = \dfrac{2a\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm AB, H là hình chiếu của O lên OM ta có $OH \perp (SAB)$. Xét tam giác SOM, ta có
$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{9}{2a^2}$
$\Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.



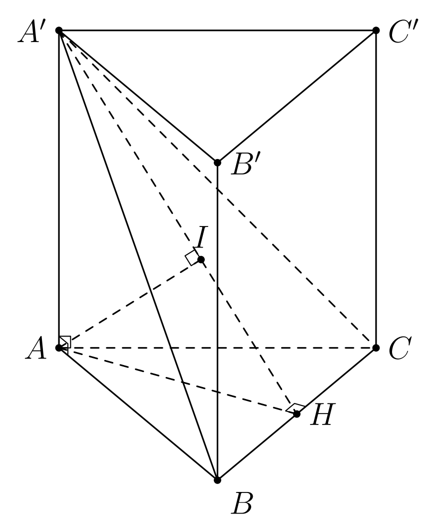
Chọn phương án A

Câu 50. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **C** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của BC, do giả thiết $\triangle ABC$ đều nên $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AH \perp BC$ (1).
Do $AA' \perp (ABC)$ suy ra $AA' \perp BC$ (2).
Từ (1), (2) ta suy ra $BC \perp (AA'H)$.
Trong mặt phẳng $(AA'H)$ kẻ $AI \perp A'H$ (3).
Theo chứng minh trên $BC \perp (AA'H)$ nên $BC \perp AI$ (4).
Từ (3), (4) suy ra $AI \perp (AA'H)$ do đó khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ là AI.
Xét $\triangle AA'H$ ta có $\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{3a^2}$
suy ra $AI^2 = \frac{3a^2}{7} \Leftrightarrow AI = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.



Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BA'C)$ bằng $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

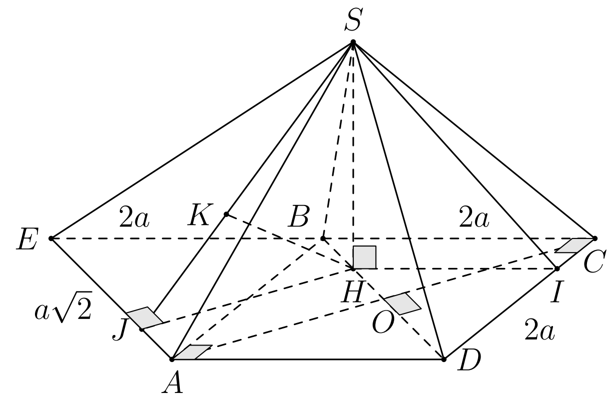
Chọn phương án B

Câu 51. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn BD sao cho $HD = 3HB$. Biết góc giữa mặt (SCD) và mặt phẳng đáy bằng 45°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD là:

A $\frac{2a\sqrt{38}}{17}$. **B** $\frac{2a\sqrt{13}}{3}$. **C** $\frac{2a\sqrt{51}}{13}$. **D** $\frac{3a\sqrt{34}}{17}$.

Lời giải.

Kẻ $HI \parallel BC (I \in CD)$ ta có: $\begin{cases} CD \perp HI \\ CD \perp SI. \end{cases}$



Suy ra góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng đáy là góc $\widehat{SIH} = 45°$.

Dựng hình bình hành $ADBE$.

Ta có $BD \parallel (SAE) \Rightarrow \mathrm{d}_{(SA,BD)} = \mathrm{d}_{(BD,(SAE))} = \mathrm{d}_{(B,(SAE))} = \mathrm{d}_{(H,(SAE))}$.

— Kẻ $HJ \perp AE (J \in AE)$ ta có $AE \perp (SHJ) \Rightarrow (SAE) \perp (SHJ)$ theo giao tuyến SJ.

— Kẻ $HK \perp SJ (K \in SJ)$ ta có $HK \perp (SAE) \Rightarrow HK = \mathrm{d}_{(H,(SAE))}$.

Ta có $HK = \dfrac{HJ \cdot HS}{SJ} = \dfrac{HJ \cdot HS}{\sqrt{HJ^2 + HS^2}}$.

Với $HJ = AO = a\sqrt{2}$, $HS = HI = \dfrac{3}{4}BC = \dfrac{3a}{2}$

Vậy $HK = \dfrac{a\sqrt{2} \cdot \dfrac{3a}{2}}{\sqrt{2a^2 + \dfrac{9a^2}{4}}} = \dfrac{3a\sqrt{34}}{17}$.

Chọn phương án D

Câu 52. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và AB' bằng

A $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{7}}{4}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

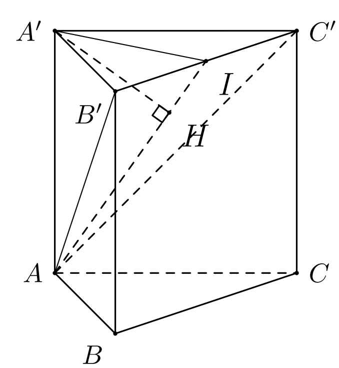
Lời giải.

Ta có $BC \| B'C' \Rightarrow BC \| (AB'C')$.

Suy ra:

$d(BC, AB') = d(BC, (AB'C')) = d(B, (AB'C')) = d(A', (AB'C'))$.

Gọi I và H lần lượt là hình chiếu vuông góc của A' trên $B'C'$ và AI.



Ta có: $B'C' \perp A'I$ và $B'C' \perp A'A$

nên $B'C' \perp (A'AI) \Rightarrow B'C' \perp A'H$.

Mà $AI \perp A'H$. Do đó $(AB'C') \perp A'H$.

Khi đó: $d(A', (AB'C')) = A'H = \dfrac{A'A.A'I}{\sqrt{A'A^2 + A'I^2}} = \dfrac{a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

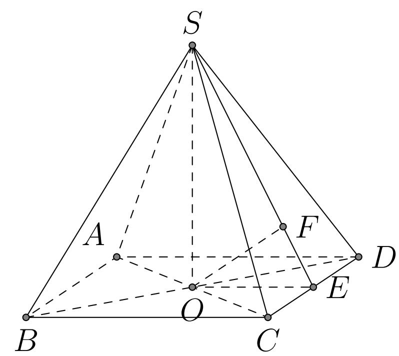
Vậy khoảng cách cần tìm là $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn phương án A

Câu 53. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a. SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách d giữa SC và AB.

A $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{5}$. **B** $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **D** $d = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.



Gọi E là trung điểm của CD và F là hình chiếu của O lên SE.

Ta có $AB \parallel CD \subset (SCD)$ suy ra $AB \parallel (SCD)$ nên

$$d = \mathrm{d}\left(AB, SC\right) = \mathrm{d}\left(AB, (SCD)\right) = \mathrm{d}\left(A, (SCD)\right) = 2 \cdot \mathrm{d}\left(O, (SCD)\right).$$

Do $\begin{cases} CD \perp OE \\ CD \perp SO \end{cases}$ suy ra $CD \perp (SOE) \supset OF$ nên $OF \perp SE$.

Mà $OF \perp SE$ suy ra $OF \perp (SCD)$, do đó $\mathrm{d}\left(O, (SCD)\right) = OF$.

Xét tam giác SOE vuông tại O, ta có $OF = \dfrac{SO \cdot OE}{\sqrt{SO^2 + OE^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Vậy $d = \mathrm{d}\left(AB, SC\right) = 2 \cdot \mathrm{d}\left(O, (SCD)\right) = 2 \cdot OF = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Chọn phương án D

Câu 54. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng $ABCD$ và $SO = a$. Khoảng cách giữa SC và AB bằng

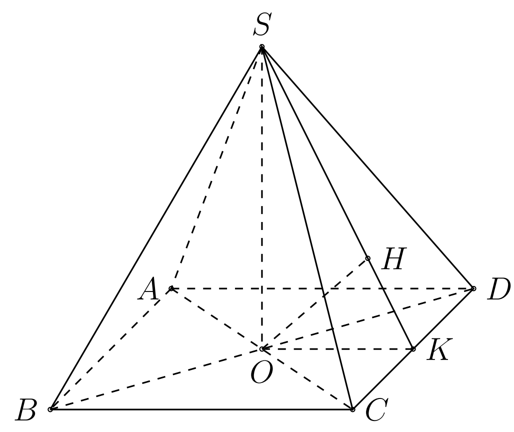
A $\dfrac{2a\sqrt{3}}{15}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$. **D** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{15}$.

Lời giải.

Vì $AB \parallel (SCD)$ nên $\mathrm{d}(AB, SC) = \mathrm{d}(AB, (SCD)) = \mathrm{d}(A, (SCD)) = 2\mathrm{d}(O, (SCD))$.

Gọi K là trung điểm của CD. Khi đó $OK \perp CD \Rightarrow CD \perp (SOK)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên $SK \Rightarrow OH \perp (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(O, (SCD)) = OH$. Ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OK^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $\mathrm{d}(AB, SC) = 2OH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

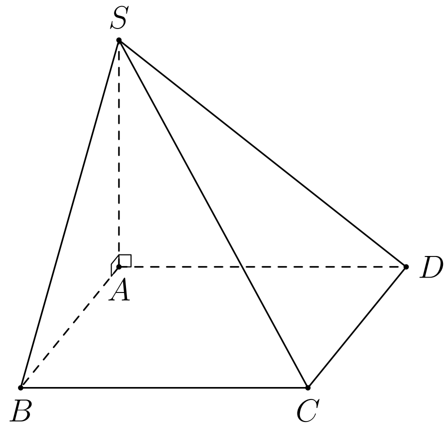


Chọn phương án D

Câu 55. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với đường chéo $AC = 2a$, SA vuông góc mặt phẳng $ABCD$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là:

A $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **B** $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **C** $a\sqrt{2}$. **D** $a\sqrt{3}$.

Lời giải.



Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$ tại B và $BC \perp CD$ tại C.

Suy ra BC là đoạn vuông góc chung của SB và CD.

$\Rightarrow d(SB, CD) = BC = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} - a\sqrt{2}$.

Chọn phương án C

Câu 56. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng $4a$. Cạnh bên $SA = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $S.ABCD$ là trung điểm của H của đoạn thẳng AO. Tính khoảng cách d giữa các đường SD và AB.

A $\mathrm{d} = 4a$. **B** $\mathrm{d} = \dfrac{4a\sqrt{22}}{11}$. **C** $\mathrm{d} = 2a$. **D** $\mathrm{d} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

Lời giải.

Do $AB // CD$ nên $\mathrm{d}(SD, AB) = \mathrm{d}(AB, (SCD))$

$= \mathrm{d}(A, (SCD)) = \dfrac{4}{3}\mathrm{d}(H, (SCD))$ (do $AC = \dfrac{4}{3}HC$).

Kẻ $HE \perp CD$, kẻ $HL \perp SE$ suy ra $\mathrm{d}(H, (SCD) = HL$.

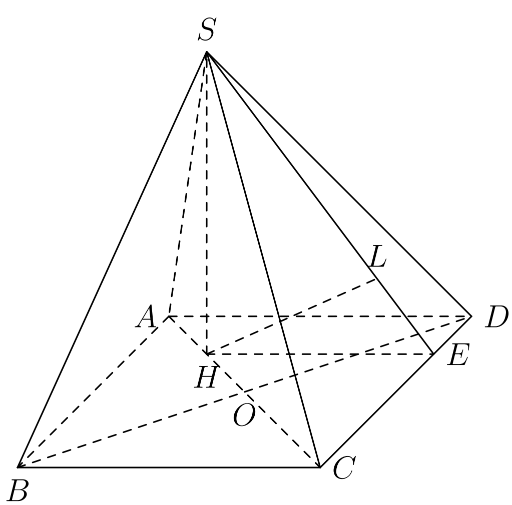
Ta có $SA = 2a,\ AC = 4a\sqrt{2} \Rightarrow AH = \dfrac{1}{4}AC = a\sqrt{2}$.

$\Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = a\sqrt{2}$.

$\dfrac{HE}{AD} = \dfrac{CH}{CA} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow HE = \dfrac{3}{4}AD = 3a$.

Khi đó $\mathrm{d}(H, (SCD) = HL = \dfrac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

Vậy $\mathrm{d}(SD, AB) = \dfrac{4}{3}HL = \dfrac{4a\sqrt{22}}{11}$.

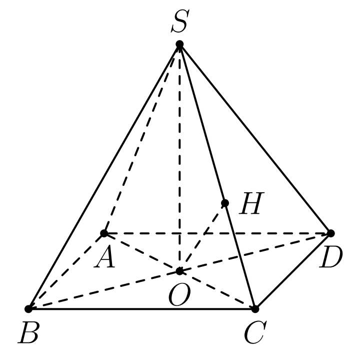


Chọn phương án B

Câu 57. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh $2a$, cạnh bên $SA = a\sqrt{5}$. Khoảng cách giữa BD và SC là

A $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{30}}{5}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{15}}{6}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{30}}{6}$.

Lời giải.



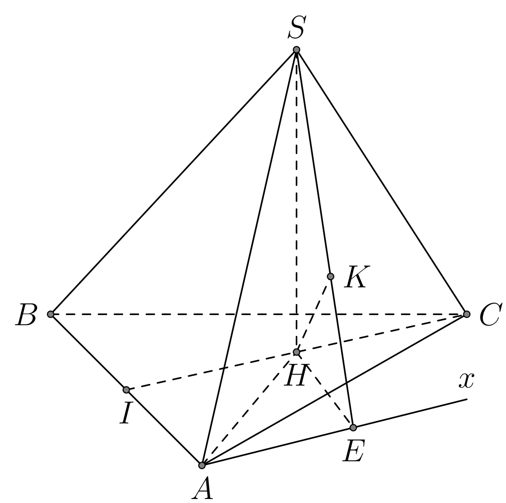
Vì chóp $S.ABCD$ đều nên $SO \perp (ABCD)$.
Trong (SOC) kẻ $OH \perp SC\,(H \in SC)$.
Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SOC) \Rightarrow OH \perp BD$.
Suy ra OH là đoạn vuông góc chung của BD và SC.
Do đó $d\,(BD; SC) = OH$.
Ta có $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$ nên $OC = \dfrac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$.
Suy ra $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{5a^2 - 2a^2} = a\sqrt{3}$.

Trong $\triangle SOC$ vuông tại O có $OH = \dfrac{SO \cdot OC}{SC} = \dfrac{a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{5}} = \dfrac{a\sqrt{30}}{5}$.
Vậy $d\,(BD; SC) = OH = \dfrac{a\sqrt{30}}{5}$.
Chọn phương án B

Câu 58. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, I là trung điểm của AB, hình chiếu S lên mặt đáy là trung điểm H của CI, góc giữa SA và đáy là 45°. Khoảng cách giữa SA và CI bằng

A $\dfrac{a}{2}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{77}}{22}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{7}}{4}$.

Lời giải.



a) $SH \perp (ABC) \Rightarrow (SA, (ABC)) = \widehat{SAH} = 45^\circ$. Do đó, tam giác SAH vuông cân tại H nên $SH = AH$. Xét tam giác AIH vuông tại I ta có $AH = \sqrt{AI^2 + HI^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{4} \Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{7}}{4}$.

b) Vẽ Ax song song CI và HE vuông góc Ax tại E. Ta có $IC \parallel AE$ nên $IC \parallel (SAE) \Rightarrow \mathrm{d}(IC; SA) = \mathrm{d}(IC; (SAE)) = \mathrm{d}(H; (SAE))$.

c) Vẽ $HK \perp SE$ tại K. Ta có $\begin{cases} AE \perp HE \\ AE \perp SH \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SHE) \Rightarrow AE \perp HK$, mà $HK \perp SE$ nên $HK \perp (SAE)$, do đó $\mathrm{d}(H; (SAE)) = HK$.

d) Ta có $AHIE$ là hình bình hành nên $HE = AI = \dfrac{a}{2}$.

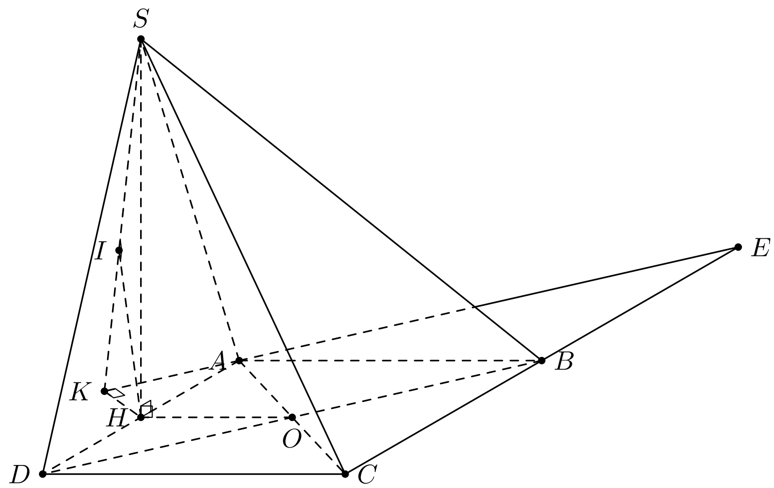
e) Tam giác SHE vuông tại H nên $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HE^2} = \dfrac{44}{7a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{77}}{22}$.

Chọn phương án C

Câu 59. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d gữa hai đường thẳng SA và BD.

A $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **B** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C** $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **D** $d = a$.

Lời giải.



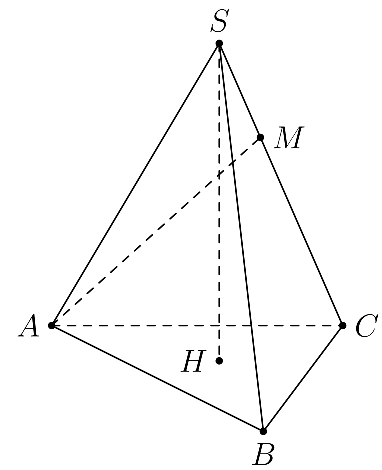
Gọi H là trung điểm AD suy ra $SH \perp (ABCD)$ vì $(SAD) \perp (ABCD)$ và tam giác SAD đều.
Dựng hình bình hành $ADBE$ khi đó $BD \parallel (SAE)$ do đó $d\,(SA, BD) = \mathrm{d}\,(D; (SAE)) = 2\mathrm{d}\,(H; (SAE))$.
Gọi K là hình chiếu của H trên AE và I là hình chiếu của H trên SK.
Ta có $HI = \mathrm{d}\,(H; (SAE))$.
Do tam giác SAD đều và $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $HK = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.
Do đó ta tính được $HI = a\sqrt{\dfrac{3}{28}}$, suy ra $\mathrm{d}\,(SA; BD) = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
Chọn phương án C

Câu 60. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA = 9a$, $AB = 6a$. Gọi M là điểm thuộc cạnh SC sao cho $SM = \dfrac{1}{3}SC$. Côsin góc giữa hai đường thẳng SB và AM bằng

A $\dfrac{7}{2\sqrt{48}}$. **B** $\dfrac{1}{2}$. **C** $\dfrac{\sqrt{19}}{7}$. **D** $\dfrac{14}{3\sqrt{48}}$.

Lời giải.

Ta có



$$\begin{aligned}\cos\widehat{ASB} &= \frac{SA^2+SB^2-AB^2}{2\cdot SA\cdot SB}\\ &= \frac{(9a)^2+(9a)^2-(6a)^2}{2\cdot 9a\cdot 9a} = \frac{7}{9}.\end{aligned}$$

Do giả thiết suy ra $\cos\widehat{CSB} = \cos\widehat{ASC} = \dfrac{7}{9}$.

Xét $\triangle ASM$ theo định lý hàm số côsin ta có

$$\begin{aligned}AM^2 &= SA^2+SM^2-2\cdot SA\cdot SM\cdot\cos\widehat{ASC}\\ &= (9a)^2+(3a)^2-2\cdot 9a\cdot 3a\cdot\frac{7}{9} = 81a^2+9a^2-42a^2 = 48a^2.\end{aligned}$$

suy ra $AM = 4\sqrt{3}a$.

Mà $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{SM} - \overrightarrow{SA} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}$.

Do đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{SB} &= \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}\right)\cdot\overrightarrow{SB}\\ &= \frac{1}{3}\cdot SC\cdot SB\cdot\cos\widehat{BSC} - SA\cdot SB\cdot\cos\widehat{ASB}\\ &= \frac{1}{3}\cdot 9a\cdot 9a\cdot\frac{7}{9} - 9a\cdot 9a\cdot\frac{7}{9} = 21a^2-63a^2 = -42a^2\end{aligned}$$

nên $\cos(AM;SB) = \dfrac{|AM\cdot SB|}{AM\cdot SB} = \dfrac{42a^2}{4\sqrt{3}a\cdot 9a} = \dfrac{14}{3\sqrt{48}}$.

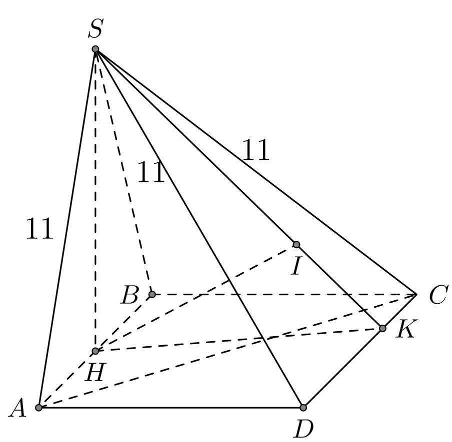
Chọn phương án D

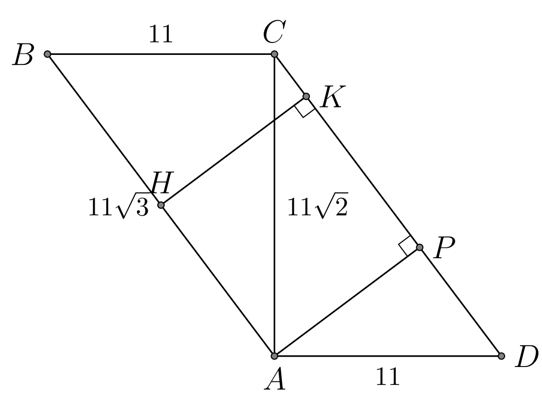
D MỨC ĐỘ 4

Câu 61. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và $SA = SB = SC = 11$, $\widehat{SAB} = 30^\circ$, $\widehat{SBC} = 60^\circ$ và $\widehat{SCA} = 45^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SD?

A $d = 4\sqrt{11}$. **B** $d = 2\sqrt{22}$. **C** $d = \dfrac{\sqrt{22}}{2}$. **D** $d = \sqrt{22}$.

Lời giải.



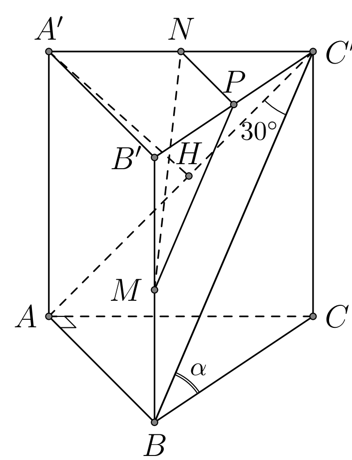


Dựa vào định lý cosin ta dễ dàng tính được $AB = 11\sqrt{3}$, $BC = 11$, $AC = 11\sqrt{2}$.
Khi đó ΔABC vuông tại C. Do $SA = SB = SC$, nên hình chiếu của S xuống mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của AB. Nên $SH \perp (ABCD)$, $SH = SA \cdot \sin \widehat{SAB} = \dfrac{11}{2}$.
Kẻ $HK \perp CD$, $AP \perp CD$, tứ giác $APKH$ là hình chữ nhật, $HK = AP = \dfrac{11\sqrt{6}}{3}\left(\dfrac{1}{AP^2} = \dfrac{1}{AD^2} + \dfrac{1}{AC^2}\right)$.
Trong tam giác vuông SHK, kẻ $HI \perp SK$. Do $AB \parallel CD$ nên $\mathrm{d}(AB,SD) = \mathrm{d}(H,SD) = HI$.
Ta có, $\dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{HI^2} + \dfrac{1}{HI^2} \Rightarrow HI = \sqrt{22}$.
Vậy $\mathrm{d}(AB,SD) = \sqrt{22}$.
Chọn phương án D

Câu 62. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AC = a\sqrt{3}$. Biết BC' hợp với mặt phẳng $(AA'C'C)$ với một góc 30° và hợp với mặt phẳng đáy góc α sao cho $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh BB' và $A'C'$. Khoảng cách MN và AC' là

A $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{5}}{4}$. **D** $\dfrac{a}{3}$.

Lời giải.



Ta có $(BC', (AA'C'C)) = \widehat{BC'A} = 30^\circ$ và $(BC', (ABC)) = \widehat{C'BC} = \alpha$.
Đặt $AB = x \Rightarrow BC = \sqrt{3a^2 + x^2}$.
$CC' = BC \cdot \tan\alpha = \sqrt{\dfrac{3(x^2+3a^2)}{5}}$.
$AC' = AB \cdot \cot 30^\circ = x\sqrt{3}$.
Ta có $AC^2 + CC'^2 = AC'^2 \Rightarrow x = a\sqrt{2} \Rightarrow CC' = a\sqrt{3}, AC' = a\sqrt{6}$.
Gọi P là trung điểm của $B'C'$, suy ra $(MNP) \parallel (ABC')$,
$d(MN, AC') = d(N, (ABC')) = \dfrac{1}{2}d(A', (ABC'))$.
Kẻ $A'H \perp AC'$ tại $H \Rightarrow A'H \perp (ABC')$,

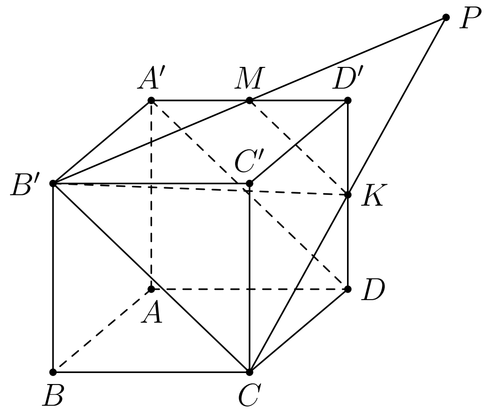
$$d(A', (ABC')) = A'H = \frac{AA'.A'C'}{AC'} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Suy ra: $d(MN, AC') = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$
Chọn phương án A

Câu 63. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm của DD'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK, $A'D$.

A a. **B** $\dfrac{3a}{8}$. **C** $\dfrac{2a}{5}$. **D** $\dfrac{a}{3}$.

Lời giải.



Cách 1:

Trong mặt phẳng $(CDD'C)$ gọi P là giao điểm của CK và $C'D'$.

Suy ra KD' là đường trung bình của $\Delta PCC' \Rightarrow D'$ là trung điểm của PC'.

Trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$ gọi M là giao điểm của PB' và $A'D'$.

Ta có $A'D \parallel B'C \Rightarrow A'D \parallel (AKB') \Rightarrow \mathrm{d}\left(CK, A'D\right) = \mathrm{d}\left(A', (CKB')\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(C', (CPB')\right)$.

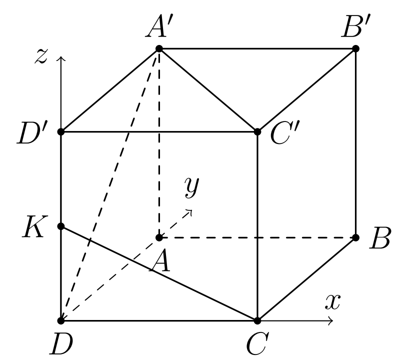
Tứ diện $PCC'B'$ có $C'P, C'B$ và $C'B$ đôi một vuông góc với nhau.

Đặt $\mathrm{d}\left(C', (CPB')\right) = x$, thì $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{CC'^2} + \dfrac{1}{C'B'^2} + \dfrac{1}{C'P} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{9}{4a^2}$.

Suy ra $\mathrm{d}\left(C', (CPB')\right) = x = \dfrac{2a}{3}$.

Vậy $\mathrm{d}\left(CK, A'D\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(C', (CPB')\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3}a = \dfrac{a}{3}$.

Cách 2: (Đã học chương 3, HH12) Chọn hệ trục tọa độ sao cho: $D(0;0;0)$, trục Ox trùng với cạnh DC, trục Oy trùng với cạnh DA, trục Oz trùng với cạnh DD' , chọn $a = 1$.



Ta có : $C\left(1;0;0\right), K\left(0;0;\dfrac{1}{2}\right), A'\left(0;1;1\right)$.

$\overrightarrow{CK} = \left(-1;0;\dfrac{1}{2}\right), \overrightarrow{A'D} = \left(0;-1;-1\right), \overrightarrow{DK} = \left(0;0;\dfrac{1}{2}\right)$

nên $\left[\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{A'D}\right] = \left(\dfrac{1}{2};-1;1\right)$.

$\mathrm{d}\left(CK; A'D\right) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{A'D}\right].\overrightarrow{DK}\right|}{\left[\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{A'D}\right]} = \dfrac{1}{3}$.

Chọn phương án D

Câu 64. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Biết đáy ABC là tam giác vuông có $BA = BC = a$, gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

A $\mathrm{d}\left(AM, B'C\right) = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

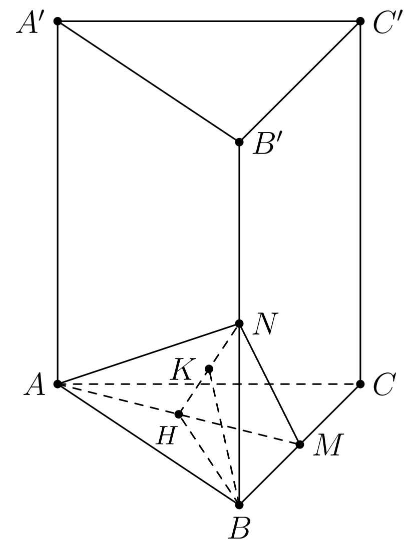
B $\mathrm{d}\left(AM, B'C\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

C $\mathrm{d}\left(AM, B'C\right) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

D $\mathrm{d}\left(AM, B'C\right) = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải.

Gọi N là trung điểm của BB' suy ra $MN \parallel B'C$.
Suy ra $B'C \parallel (AMN)$.
Do đó



$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(AM, B'C\right) &= \mathrm{d}\left(B'C, (AMN)\right) \\ &= \mathrm{d}\left(B', (AMN)\right) \\ &= \mathrm{d}\left(B, (AMN)\right). \end{aligned}$$

Kẻ $BH \perp AM, BK \perp HN \Rightarrow BK \perp (AMN)$
Suy ra $\mathrm{d}\left(AM, B'C\right) = \mathrm{d}\left(B, (AMN)\right) = BK$.
Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{BH^2} &= \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BM^2} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} \\ &= \frac{5}{a^2} \\ \Rightarrow BH &= \frac{a}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Ta có $BN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Tam giác ABM vuông tại B nên

$$\begin{aligned} \frac{1}{BK^2} &= \frac{1}{BH^2} + \frac{1}{BN^2} \\ &= \frac{5}{a^2} + \frac{2}{a^2} \\ &= \frac{7}{a^2} \\ \Rightarrow BK &= \frac{a\sqrt{7}}{7}. \end{aligned}$$

Vậy : $\mathrm{d}\left(AM, B'C\right) = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Chọn phương án D

Câu 65. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa SC và BD bằng

A $\dfrac{2a}{3}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C** $\dfrac{4a}{3}$. **D** $\dfrac{3a}{2}$.

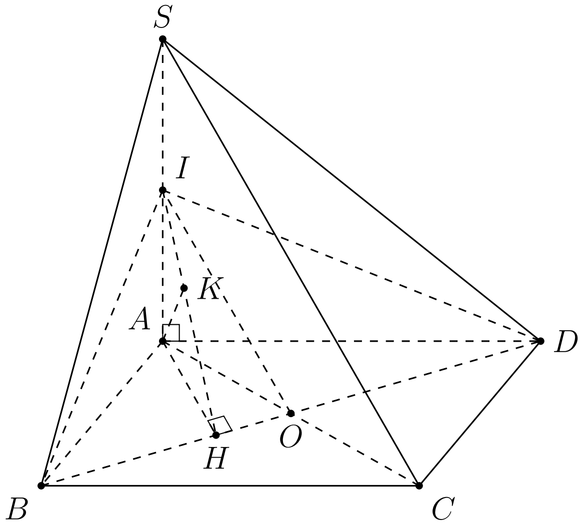
Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$. I là trung điểm của SA.
OI là đường trung bình của $\triangle SAC$ nên $OI \parallel SC$, suy ra $SC \parallel (IBD)$.
Do đó

$$\mathrm{d}(SC, BD) = \mathrm{d}(SC, (IBD)) = \mathrm{d}(C, (IBD)).$$

Kết hợp với $OA = OC$, ta suy ra

$$\mathrm{d}(C, (IBD)) = \mathrm{d}(A, (IBD)).$$



Trong $(ABCD)$, kẻ $AH \perp BD\,(H \in BD)$. Mà $BD \perp AI$ nên $BD \perp (AHI)$.
Trong (AHI) kẻ $AK \perp HI\,(K \in HI)$ thì $\mathrm{d}(A, (IBD)) = AK$.
Xét $\triangle ABD$ vuông tại A, AH là đường cao, ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{5}{4a^2}.$$

Xét $\triangle AHI$ vuông tại A, AK là đường cao, ta có

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{5}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow AK = \frac{2a}{3}.$$

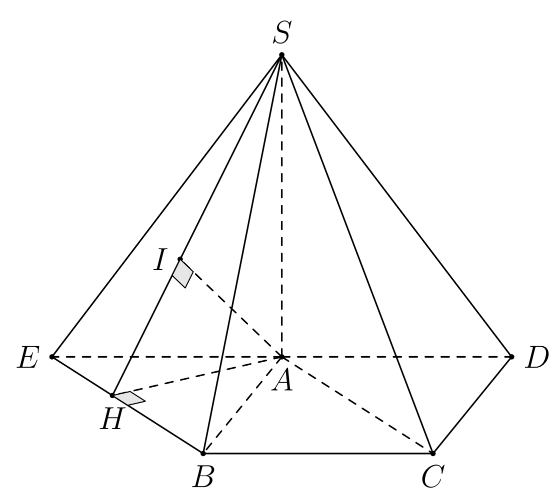
Chọn phương án A

Câu 66. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

A $\frac{a}{3}$. **B** $\frac{\sqrt{6}a}{2}$. **C** $\frac{a}{2}$. **D** $\frac{2a}{3}$.

Lời giải.

Dựng hình bình hành $ACBE$, $AH \perp BE$, $AI \perp SH$
$\Rightarrow AC \parallel (SBE)$.
$\Rightarrow \mathrm{d}\,[AC, SB] = \mathrm{d}\,[AC, (SBE)] = \mathrm{d}\,[A, (SBE)] = AI$.
$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{9}{4a^2}$
$\Rightarrow AI = \frac{2a}{3}$.
Vậy khoảng cách giữa AC và SB bằng $\frac{2a}{3}$.

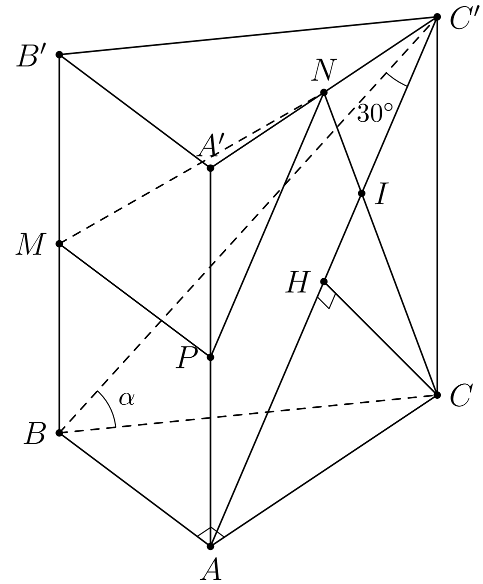


Chọn phương án D

Câu 67. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AC = a\sqrt{3}$. Biết BC' hợp với mặt phẳng $(AA'C'C)$ một góc 30° và hợp với mặt phẳng đáy góc α sao cho $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh BB' và $A'C'$. Khoảng cách giữa MN và AC' là

A $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{5}}{4}$. **D** $\dfrac{a}{3}$.

Lời giải.



Do $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $\widehat{C'BC}$ là góc giữa BC' và mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow \widehat{C'BC} = \alpha$; Do $BA \perp (AA'C'C)$ nên $\widehat{AC'B}$ là góc giữa BC' và mặt phẳng $(AA'C'C) \Rightarrow \widehat{AC'B} = 30^\circ$.

Gọi P là trung điểm của AA', $I = NC \cap AC'$.

Có $(MNP) \parallel (ABC') \Rightarrow MN \parallel (ABC') \Rightarrow \mathrm{d}(MN, AC') = \mathrm{d}(MN, (ABC') = \mathrm{d}(N, (ABC')$.

Có $NC \cap (ABC') = I \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}(N,(ABC'))}{\mathrm{d}(C,(ABC'))} = \dfrac{NI}{CI} = \dfrac{NC'}{AC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ $\mathrm{d}(N,(ABC')) = \dfrac{1}{2}\cdot \mathrm{d}(C,(ABC'))$.

Có $BA \perp (AA'C'C) \Rightarrow (ABC') \perp (AA'C'C)$. Kẻ $CH \perp AC' \Rightarrow CH \perp (ABC')$. Vậy CH là khoảng cách từ C đến mặt phẳng (ABC').

Đặt $CC' = x\,(x > 0)$. Xét $\triangle BCC'$ có $BC' = \dfrac{CC'}{\sin\alpha} = \dfrac{4x}{\sqrt{6}}$;

Xét $\triangle ACC'$ vuông tại C có $AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = \sqrt{3a^2 + x^2}$.

Xét $\triangle ABC'$ vuông tại A có $\cos 30^\circ = \dfrac{AC'}{BC'} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3a^2 + x^2}}{4x} \Leftrightarrow x^2 = 3a^2$.

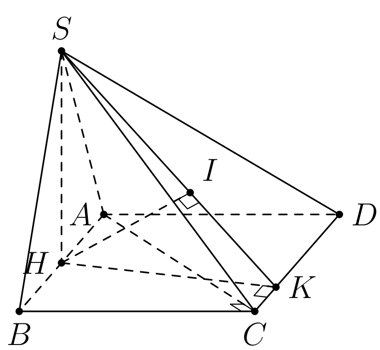
Xét $\triangle ACC'$ vuông tại C có CH là đường cao nên $\dfrac{1}{CH^2} = \dfrac{1}{CA^2} + \dfrac{1}{CC'^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{2}{3a^2} \Rightarrow CH = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

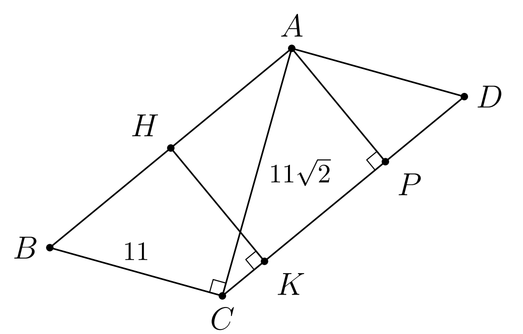
Vậy $\mathrm{d}(N,(ABC')) = \dfrac{1}{2}CH = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Chọn phương án A

Câu 68. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và $SA = SB = SC = 11$, $\widehat{SAB} = 30^\circ$, $\widehat{SBC} = 60^\circ$ và $\widehat{SCA} = 45^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SD.

A $d = 4\sqrt{11}$. **B** $d = 2\sqrt{22}$. **C** $d = \dfrac{\sqrt{22}}{2}$. **D** $d = \sqrt{22}$.





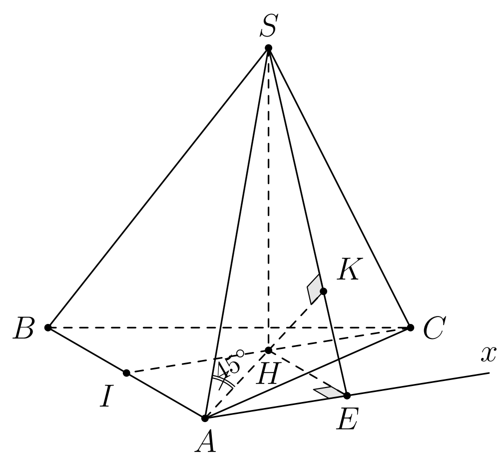
Lời giải.

Dựa vào định lý cô-sin ta dễ dàng tính được $AB = 11\sqrt{3}$, $BC = 11$ và $AC = 11\sqrt{2}$.
Từ đó suy ra được $\triangle ABC$ vuông tại C.
Do $SA = SB = SC$ nên hình chiếu của S xuống mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của AB tức là $SH \perp (ABCD)$.
Ta có $SH = SA \cdot \sin SAB = \dfrac{11}{2}$.
Kẻ $HK \perp CD$ tại $K \in CD$, $AP \perp CD$ tại $P \in CD$ thì tứ giác $APKH$ là hình chữ nhật.
Ta có $HK = AP = \dfrac{AC \cdot AD}{CD} = \dfrac{11 \cdot 11\sqrt{2}}{11\sqrt{3}} = \dfrac{11\sqrt{6}}{3}$.
Trong tam giác vuông SHK, kẻ $HI \perp SK$ tại $I \in SK$.
Do $AB \parallel CD$ nên $\mathrm{d}(AB, SD) = \mathrm{d}\left(AB, (SCD)\right) = \mathrm{d}\left(H, (SCD)\right) = HI = \dfrac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \sqrt{22}$.
Vậy $\mathrm{d}(AB, SD) = \sqrt{22}$.
Chọn phương án D

Câu 69. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, I là trung điểm của AB, hình chiếu S lên mặt đáy là trung điểm I của CI, góc giữa SA và đáy là 45°. Khoảng cách giữa SA và CI bằng

A $\dfrac{a}{2}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{77}}{22}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{7}}{4}$.

Lời giải.



Kẻ đường thẳng Ax song song với IC.
Kẻ HE vuông góc với Ax tại E.
Vì $IC \parallel (SAE)$ nên

$$\mathrm{d}(IC; SA) = \mathrm{d}(IC; (SAE)) = \mathrm{d}(H; (SAE)).$$

Kẻ $HK \perp SE$ tại K, $K \in SE$. (1).
$Ax \perp HE, Ax \perp SH$
$\Rightarrow Ax \perp (SHE) \Rightarrow Ax \perp HK$ (2).
Từ (1), (2) suy ra $HK \perp (SAE)$. Vậy

$$\mathrm{d}(H; (SAE)) = HK.$$

$CH = IH = \dfrac{1}{2}IC = \dfrac{1}{2}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$;
$AH = \sqrt{IH^2 + IA^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{4}$.
$\widehat{(SA; (ABC))} = \widehat{SAH} = 45^\circ \Rightarrow \triangle SAH$ vuông cân tại H nên $SH = AH = \dfrac{a\sqrt{7}}{4}$.
Ta có $HE = IA = \dfrac{a}{2}$ (vì tứ giác $AIHE$ là hình chữ nhật).

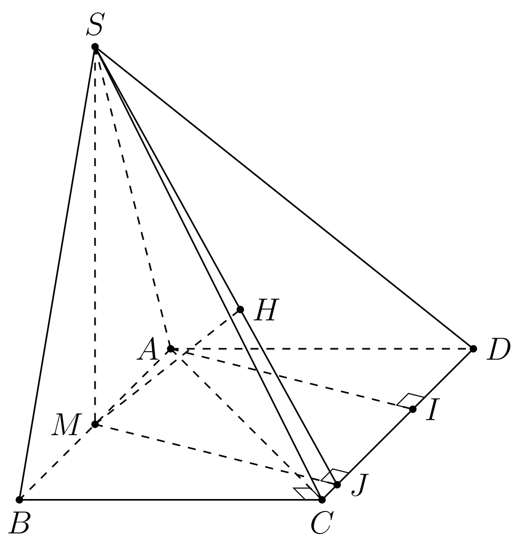
Nên $HK = \dfrac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{7}}{4} \cdot \dfrac{a}{2}}{\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{7}}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{77}}{22}$.

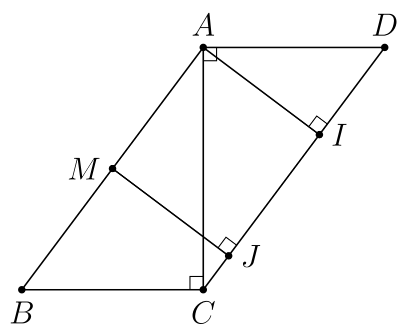
Chọn phương án (C)

Câu 70. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và $SA = SB = SC = 11$, $\widehat{SAB} = 30^\circ$, $\widehat{SBC} = 60^\circ$ và $\widehat{SCA} = 45^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SD.

(A) $d = 4\sqrt{11}$. **(B)** $d = 2\sqrt{22}$. **(C)** $d = \dfrac{\sqrt{22}}{2}$. **(D)** $d = \sqrt{22}$.

Lời giải.





Tam giác SBC có $SB = SC = 11$ và $\widehat{SBC} = 60^\circ$ nên SBC là tam giác đều, suy ra $BC = 11$.
Tam giác SAB cân tại S có $\widehat{SAB} = 30^\circ$, suy ra $\widehat{ASB} = 120^\circ$. Khi đó

$$AB = \sqrt{SA^2 + SB^2 - 2SA \cdot SB \cdot \cos \widehat{ASB}} = 11\sqrt{3}.$$

Tam giác SAC cân tại S có $\widehat{SCA} = 45^\circ$ nên SAC là tam giác vuông tại S. Khi đó

$$AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = 11\sqrt{2}.$$

Lại có $BC^2 + AC^2 = 11^2 + \left(11\sqrt{2}\right)^2 = \left(11\sqrt{3}\right)^2 = AB^2$ nên tam giác ABC vuông tại C.
Gọi M là trung điểm của AB, khi đó M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, suy ra $SM \perp (ABCD)$.
Ta có $AB \parallel CD$ nên $AB \parallel (SCD)$. Do đó

$$\mathrm{d}(AB, SD) = \mathrm{d}(AB, (SCD)) = \mathrm{d}(M, (SCD)).$$

Từ M kẻ $MJ \perp CD$ tại J, kẻ $MH \perp SJ$ tại H.
Ta có $CD \perp MJ$ và $CD \perp SM$ nên $CD \perp (SMJ)$, suy ra $CD \perp MH$.
Lại có $MH \perp SJ$ và $MH \perp CD$ nên $MH \perp (SJD)$ hay $MH \perp (SCD)$.
Vì vậy $\mathrm{d}(M, (SCD)) = MH$.
Tam giác SAM vuông tại M nên

$$\tan \widehat{SAM} = \frac{SM}{AM} \Leftrightarrow SM = AM \tan \widehat{SAM} = \frac{11\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{11}{2}.$$

Kẻ $AI \perp CD$ tại I, khi đó $MJ = AI = \dfrac{AD \cdot AC}{\sqrt{AD^2 + AC^2}} = \dfrac{11 \cdot 11\sqrt{2}}{\sqrt{11^2 + (11\sqrt{2})^2}} = \dfrac{11\sqrt{6}}{3}$.

Trong tam giác SMJ vuông tại M ta có

$$MH = \frac{SM \cdot MJ}{\sqrt{SM^2 + MJ^2}} = \frac{\dfrac{11}{2} \cdot \dfrac{11\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{\left(\dfrac{11}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{11\sqrt{6}}{3}\right)^2}} = \sqrt{22}.$$

Vậy $\mathrm{d}(AB, SD) = \sqrt{22}$.

Chọn phương án D

Câu 71. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác $ABC, AA' = 2a$. M là trung điểm của $B'C'$. Khi đó khoảng cách từ C' đến mặt phẳng $(A'BM)$ là

A $\dfrac{a\sqrt{11}}{\sqrt{47}}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{26}}{\sqrt{107}}$. **D** $\dfrac{a}{2}$.

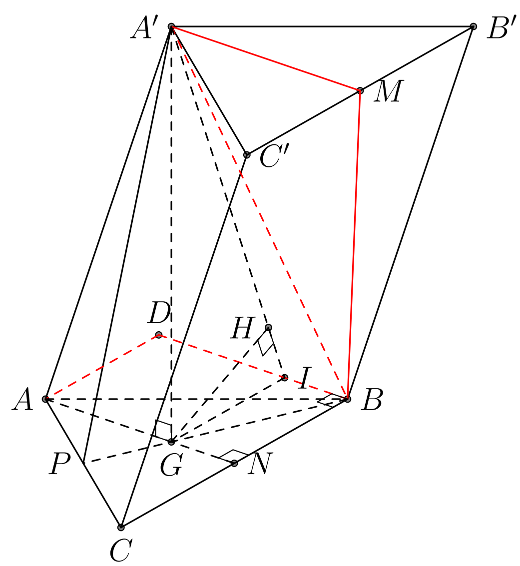
Lời giải.

Phương pháp:

$$\begin{cases} (P) \parallel (Q) \\ A \in (P) \end{cases} \Rightarrow d((P),(Q)) = d(A,(Q)).$$

$$\begin{cases} a \parallel (Q) \\ A, B \in a \end{cases} \Rightarrow d(A,(Q)) = d(B,(Q)) = d(a,(Q)).$$

Cách giải:



Gọi N là trung điểm của BC, G là trọng tâm tam giác ABC. Dựng hình chữ nhật $ANBD$. Kẻ $GI \parallel BC (I \in BD), GH \perp A'I (H \in A'I)$.

+) Ta có: $C'N \parallel (A'MB)$ (do $C'N \parallel MB$). Suy ra $d(C', (A'BM)) = d(N, (A'BM))$.

Mà $GN \parallel (A'BM)$ (do $GN \parallel A'M$) $\Rightarrow d(N, (A'BM)) = d(G, (A'BM)) \Rightarrow d(C', (A'BM)) = d(G, (A'BM))$.

+) Ta có: $BD \parallel AN, AN \parallel A'M \Rightarrow BD \parallel A'M \Rightarrow A', M, B, D$ đồng phẳng.

+) $\begin{cases} BD \perp GI (\text{do } ANBD \text{ là HCN}) \\ BD \perp A'G (\text{do } A'G \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BD \perp (A'GI) \Rightarrow BD \perp GH.$

Mà $A'I \perp GH \Rightarrow GH \perp (A'MB) \Rightarrow d(G, (A'BM)) = GH$.

+) Tính GH:

ΔABC đều, cạnh $a \Rightarrow AN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, AG = \dfrac{2}{3}AN = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$\Delta AA'G$ vuông tại $G \Rightarrow A'G = \sqrt{AA'^2 - AG^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{\sqrt{33}}{3}a$.

$GNBI$ là hình chữ nhật $\Rightarrow GI = NB = \dfrac{a}{2}$.

$\Delta A'GI$ vuông tại G có $GH \perp A'I$ nên $\dfrac{1}{GH^2} = \dfrac{1}{GI^2} + \dfrac{1}{A'G^2} = \dfrac{1}{\frac{a^2}{4}} + \dfrac{1}{\frac{11a^2}{3}} = \dfrac{47}{11a^2}$.

Suy ra $GH = \sqrt{\dfrac{11}{47}}a$. Vậy $d(C', (A'BM)) = \dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{47}}a$.

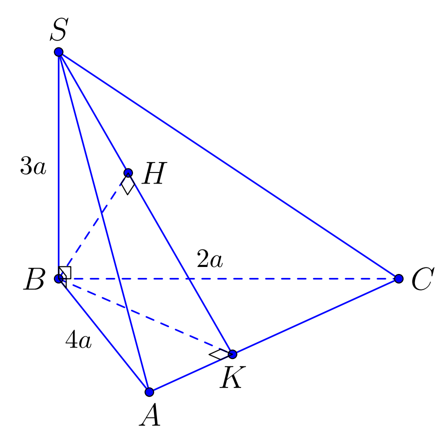
Chọn phương án A

Câu 72. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và cạnh bên SB vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $SB = 3a, AB = 4a, BC = 2a$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng

A. $\dfrac{12\sqrt{61}a}{61}$. B. $\dfrac{3\sqrt{14}a}{14}$. C. $\dfrac{4a}{5}$. D. $\dfrac{12\sqrt{29}a}{29}$.

Lời giải.

Kẻ $BK \perp AC, BH \perp SK$



— $d(B, (SAC)) = BBH$.

— $\dfrac{1}{BK^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{BC^2} = \dfrac{1}{16a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{5}{16a^2}$.

— $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{BK^2} + \dfrac{1}{BS^2} = \dfrac{5}{16a^2} + \dfrac{1}{9a^2} = \dfrac{61}{144a^2}$.

Vậy $BH = \dfrac{12a}{\sqrt{61}}$.

Chọn phương án A

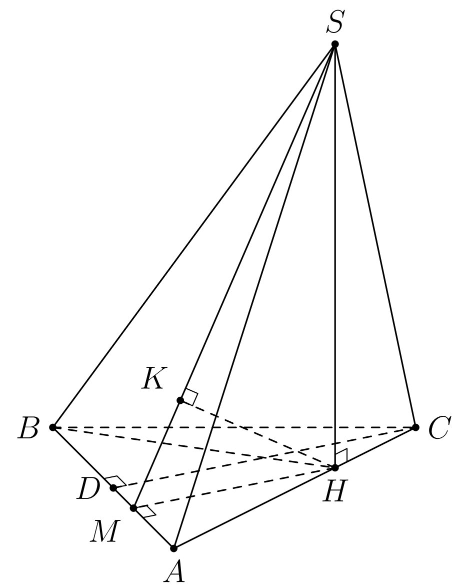
Câu 73. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $3a$. Điểm H thuộc cạnh AC với $HC = a$. Dựng đoạn SH vuông góc với mặt phẳng (ABC) với $SH = 2a$. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\dfrac{3a}{7}$. B. $\dfrac{3\sqrt{21}a}{7}$. C. $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. D. $3a$.

Lời giải.

Gọi D là trung điểm của AB, do giả thiết suy ra $CD \perp AB$. Trong (ABC) kẻ $HM \parallel CD$ suy ra $HM \perp AB$ (1). Do giả thiết $SH \perp (ABC)$ suy ra $SH \perp AB$ (2).
Từ (1), (2) suy ra $AB \perp (SHM)$.
Trong mặt phẳng (SHM) kẻ $HK \perp SM$ (3), theo chứng minh trên suy ra $HK \perp AB$ (4).
Do đó từ (3), (4) suy ra $HK \perp (SAB)$ nên $\mathrm{d}(H; (SAB)) = HK$.
Dễ thấy $CH \cap (SAB) = \{A\}$ nên

$$\frac{\mathrm{d}(C; (SAB))}{\mathrm{d}(H; (SAB))} = \frac{CA}{HA} = \frac{3}{2}.$$



Do đó $\mathrm{d}(C; (SAB)) = \frac{3}{2} \cdot \mathrm{d}(H; (SAB)) = \frac{3}{2} \cdot HK$. Theo giả thiết $\triangle ABC$ đều suy ra $CD = \frac{3\sqrt{3}a}{2}$.
Xét $\triangle ABC$ do $HM \parallel CD$ theo định lý Ta-lét ta có $\frac{HM}{CD} = \frac{AH}{AC} = \frac{2}{3}$ suy ra

$$HM = \frac{2}{3} \cdot CD \Leftrightarrow HM = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}a}{2} = \sqrt{3}a.$$

Áp dụng hệ thức lượng trong $\triangle SHM$ vuông tại H, ta có

$$HK = \frac{SH \cdot HM}{\sqrt{SH^2 + HM^2}} = \frac{2a \cdot \sqrt{3}a}{\sqrt{4a^2 + 3a^2}} = \frac{2\sqrt{21}a}{7}.$$

Do đó $\mathrm{d}(C; (SAB)) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2\sqrt{21}a}{7} = \frac{3\sqrt{21}a}{7}$.

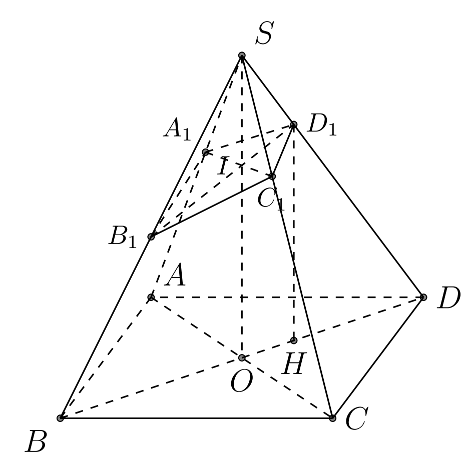
Chọn phương án B

Câu 74. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có chiều cao bằng 10. Trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A_1, B_1, C_1 sao cho $\frac{SA_1}{SA} = \frac{2}{3}$; $\frac{SB_1}{SB} = \frac{1}{2}$; $\frac{SC_1}{SC} = \frac{1}{3}$. Mặt phẳng đi qua A_1, B_1, C_1 cắt SD tại D_1. Tính khoảng cách từ điểm D_1 đến mặt phẳng đáy của hình chóp $S.ABCD$.

A 4. **B** 6. **C** $\frac{11}{2}$. **D** 5.

Lời giải.

Gọi O là trọng tâm $ABCD$, trong mặt phẳng (SAC) gọi I là giao điểm của SO và A_1C_1.
Do giả thiết suy ra $SO \perp (ABCD)$. Trong mặt phẳng (SBD) kẻ $D_1H \parallel SO$ suy ra $D_1H \perp (ABCD)$.
Do đó $\mathrm{d}(D_1, (ABCD)) = D_1H$.
Mặt khác ta có $\frac{S_{\triangle SA_1C_1}}{S_{\triangle SAC}} = \frac{SA_1}{SA} \cdot \frac{SC_1}{SC}$ (1).
Tương tự $\frac{S_{\triangle SA_1I}}{S_{\triangle SAO}} = \frac{SA_1}{SA} \cdot \frac{SI}{SO}$ (2).
và $\frac{S_{\triangle SC_1I}}{S_{\triangle SCO}} = \frac{SC_1}{SC} \cdot \frac{SI}{SO}$ (3).



Mà
$$\frac{S_{\triangle SA_1C_1}}{S_{\triangle SAC}} = \frac{1}{2}\left(\frac{S_{\triangle SA_1I}}{S_{\triangle SAO}} + \frac{S_{\triangle SC_1I}}{S_{\triangle SCO}}\right)$$
Từ (1), (2) và (3) và giả thiết ta suy ra
$$\frac{SA_1}{SA}\cdot\frac{SC_1}{SC} = \frac{1}{2}\left(\frac{SA_1}{SA}\cdot\frac{SI}{SO} + \frac{SC_1}{SC}\cdot\frac{SI}{SO}\right)$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{SI}{SO} + \frac{1}{3}\cdot\frac{SI}{SO}\right) \Leftrightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{4}{9}$$
Chứng minh tương tự ta có
$$\frac{SB_1}{SB}\cdot\frac{SD_1}{SD} = \frac{1}{2}\left(\frac{SB_1}{SB}\cdot\frac{SI}{SO} + \frac{SD_1}{SD}\cdot\frac{SI}{SO}\right)$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{2}\cdot\frac{SD_1}{SD} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9} + \frac{4}{9}\cdot\frac{SD_1}{SD}\right) \Leftrightarrow \frac{SD_1}{SD} = \frac{2}{5}$$
Xét tam giác SOD vì $D_1H \parallel SO$ nên theo định lý Ta-lét ta có
$$\frac{DD_1}{DS} = \frac{DH}{DO} = \frac{HD_1}{SO}$$
Theo chứng minh trên ta có $\dfrac{DD_1}{DS} = \dfrac{3}{5}$ suy ra $\dfrac{HD_1}{SO} = \dfrac{3}{5} \Leftrightarrow HD_1 = \dfrac{3}{5}\cdot 10 = 6$.

Chọn phương án B

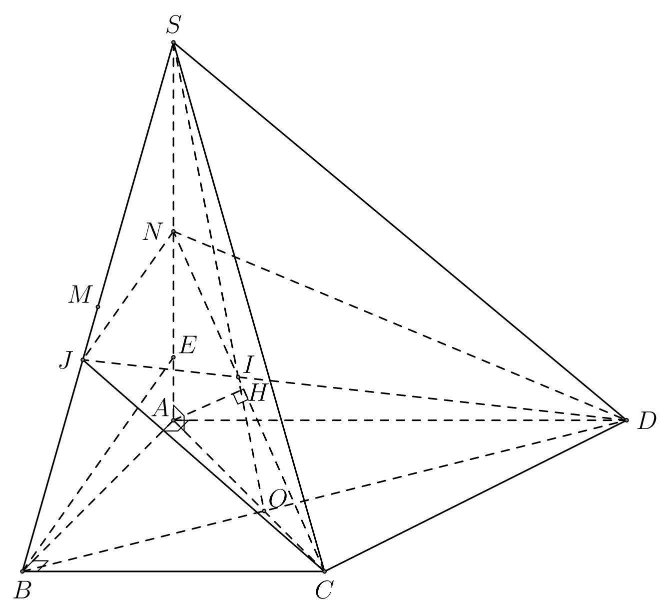
Câu 75. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, biết $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SB, SA. Tính khoảng cách từ M đến (NCD) theo a.

A $\dfrac{a\sqrt{66}}{11}$. B $\dfrac{a\sqrt{66}}{22}$. C $2a\sqrt{66}$. D $\dfrac{a\sqrt{66}}{44}$.

Lời giải.

Ta có hai tam giác OBC và OAD đồng dạng và $BC = \dfrac{1}{2}AD$ nên $\dfrac{CO}{CA} = \dfrac{1}{3}$ và $\dfrac{DB}{DO} = \dfrac{3}{2}$.

Áp dụng định lý Mê-nê-la-uýt cho tam giác SAO, ta có
$$\frac{NS}{NA}\cdot\frac{CA}{CO}\cdot\frac{IO}{IS} = 1 \Rightarrow \frac{IO}{IS} = \frac{1}{3}.$$
Áp dụng định lý Mê-nê-la-uýt cho tam giác SBO, ta có
$$\frac{IO}{IS}\cdot\frac{JS}{JB}\cdot\frac{DB}{DO} = 1 \Rightarrow \frac{JS}{JB} = 2.$$



Gọi E là điểm thuộc đoạn SA sao cho $BE \parallel JN$ suy ra $AN = 2EN$.

Suy ra $\mathrm{d}(M,(NCD)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(B,(NCD)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(E,(NCD)) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\mathrm{d}(A,(NCD))$.

Gọi H là hình chiếu của A lên NC, ta có $AH \perp (CND)$ (do $AH \perp NC$, $AH \perp CD$).

Suy ra $\mathrm{d}(A,(NCD)) = AH = \dfrac{AN \cdot AC}{\sqrt{AN^2 + AC^2}} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{3a^2}{4} + 2a^2}} = \dfrac{a\sqrt{66}}{11}$.

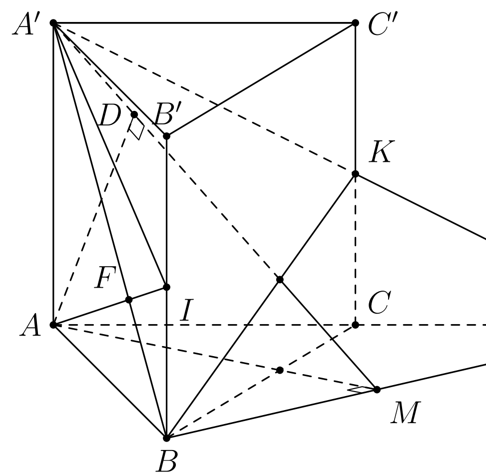
Do đó, $\mathrm{d}(M,(NCD)) = \dfrac{a\sqrt{66}}{44}$.

Chọn phương án D

Câu 76. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AC = 2a$, $AA' = 2a\sqrt{5}$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi K, I lần lượt là trung điểm của các cạnh CC', BB'. Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng $(A'BK)$ bằng

A $a\sqrt{15}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{5}}{6}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{15}}{3}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.



Kéo dài $A'K$ và AC cắt nhau tại E, AI cắt $A'B$ tại F.

Gọi M là hình chiếu vuông góc của A lên BE, D là hình chiếu vuông góc của A lên $A'M$.

Ta có $\begin{cases} BE \perp A'A \\ BE \perp AM \end{cases} \Rightarrow BE \perp AD$. Cùng với đó, ta có $AD \perp A'M \Rightarrow AD \perp (A'BE) \Rightarrow \mathrm{d}\left(A,(A'BK)\right) = AD$.

Ta có
$$\frac{IF}{FA} = \frac{IB}{A'A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{d}\left(I,(A'BK)\right) = \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(A,(A'BK)\right).$$

Do CK là đường trung bình của $\triangle EAA'$ nên ta có
$$AE = 2AC \Rightarrow S_{\triangle BAE} = 2S_{\triangle BAC} = AB \cdot AC \cdot \sin A = a \cdot 2a \cdot \sin 120^\circ = a^2\sqrt{3}.$$

Xét tam giác $\triangle ABE$, ta có
$$BE = \sqrt{AB^2 + AE^2 - 2AB \cdot AE \cdot \cos A} = a\sqrt{21} \Rightarrow AM = \frac{2S_{\triangle ABE}}{BE} = \frac{2\sqrt{7}}{7}a.$$

Xét tam giác $AA'M$ vuông tại A ta có
$$\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{20a^2} + \frac{7}{4a^2} \Rightarrow AD = \frac{a\sqrt{5}}{3}.$$

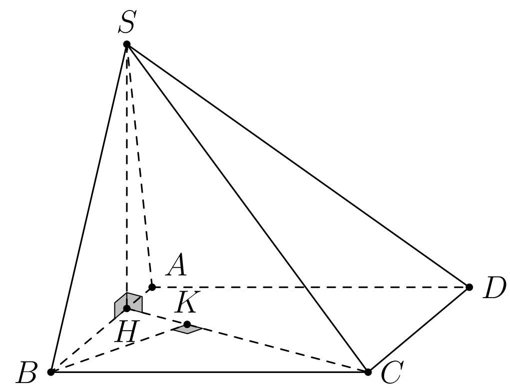
Từ đây suy ra khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(A'BK)$ là
$$\mathrm{d}\left(I,(A'BK)\right) = \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(A,(A'BK)\right) = \frac{1}{2}AD = \frac{a\sqrt{5}}{6}.$$

Chọn phương án B

Câu 77. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $4a$. Gọi H là điểm thuộc đường thẳng AB sao cho $3\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}=\vec{0}$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SHC) đều vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SHC).

A $\frac{5a}{6}$. **B** $\frac{12a}{5}$. **C** $\frac{6a}{5}$. **D** $\frac{5a}{12}$.

Lời giải.



Ta có $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SHC)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(SHC)=SH\end{cases} \Rightarrow SH\perp(ABCD)$

Kẻ $BK\perp HC$ tại K.

Mặt khác $BK\perp SH$ (do $SH\perp(ABCD)$).

Suy ra $BK\perp(SHC)\Rightarrow \mathrm{d}(B,(SHC))=BK$.

Do $3\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}=\vec{0}$ nên $HB=3HA\Rightarrow HB=3a$.

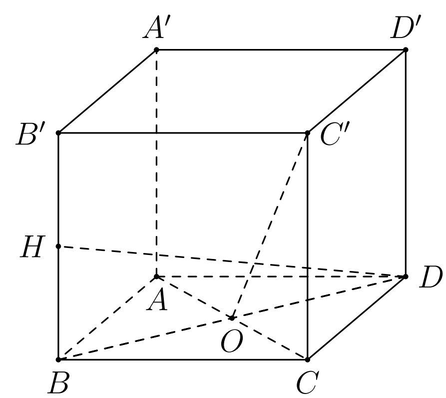
Ta có

$$BK=\frac{BH\cdot BC}{\sqrt{BH^2+BC^2}}=\frac{3a\cdot 4a}{\sqrt{9a^2+16a^2}}=\frac{12a}{5}.$$

Chọn phương án B

Câu 78.

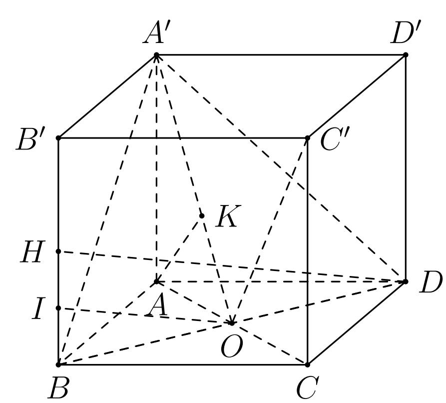
Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh a, $\widehat{BAD}=120°$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. Gọi H là trung điểm cạnh BB'. Giá trị cô-sin của góc giữa HD và OC' bằng



A $\cos(HD,OC')=\frac{1}{3}$. **B** $\cos(HD,OC')=\frac{\sqrt{14}}{21}$.

C $\cos(HD,OC')=\frac{2\sqrt{14}}{21}$. **D** $\cos(HD,OC')=\frac{4\sqrt{14}}{21}$.

Lời giải.



Dựng $AK\perp A'O$, dễ dàng chứng minh được $AK\perp(A'BD)$.

Ta có $AK=\mathrm{d}(A,(A'BD))=\mathrm{d}(C,(A'BD))=\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Tam giác ABD có $AB=AD=a,\widehat{BAD}=120°\Rightarrow AO=\frac{a}{2}$.

Xét $\Delta A'AO$ ta có $\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AO^2}+\frac{1}{AA'^2}\Rightarrow AA'=a\sqrt{2}$.

Gọi I là trung điểm $HB\Rightarrow OI\parallel HD$ và $BI=\frac{1}{4}AA'=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Xét ΔOBI ta có $OI^2=OB^2+BI^2=\frac{7a^2}{8}$,

Xét $\Delta C'CO$ ta có $OC'^2=OC^2+CC'^2=\frac{9a^2}{4}$.

Xét $\Delta C'B'I$ ta có $C'I^2=C'B'^2+B'I'^2=\frac{17a^2}{8}$.

Áp dụng định lý hàm số cô-sin trong $\Delta C'OI$ suy ra

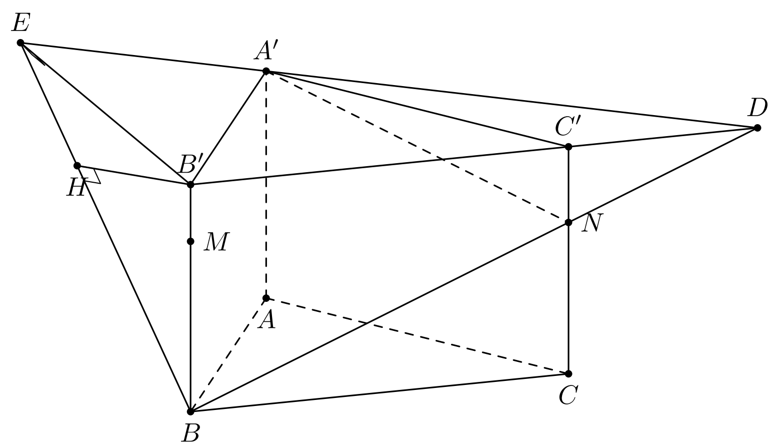
$$\cos(HD, OC') = \cos(OI, OC') = \frac{OI^2 + OC'^2 - C'I^2}{2OI \cdot OC'} = \frac{2\sqrt{14}}{21}.$$

Chọn phương án C

Câu 79. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = 1$, $AC = 2$, $AA' = 3$ và $\widehat{BAC} = 120°$. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh BB', CC' sao cho $BM = 3B'M$, $CN = 2C'N$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BN)$.

A $\frac{9\sqrt{138}}{184}$. **B** $\frac{3\sqrt{138}}{46}$. **C** $\frac{9\sqrt{3}}{16\sqrt{46}}$. **D** $\frac{9\sqrt{138}}{46}$.

Lời giải.



Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos \widehat{BAC} = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cos 120° = 7$. Suy ra $BC = \sqrt{7}$.

Ta cũng có $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \dfrac{1^2 + \sqrt{7}^2 - 2^2}{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{7}} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$, suy ra $\cos \widehat{A'B'C'} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

Gọi $D = BN \cap B'C'$, suy ra $\dfrac{DC'}{DB'} = \dfrac{C'N}{BB'} = \dfrac{1}{3}$, nên $DB' = \dfrac{3}{2}B'C' = \dfrac{3\sqrt{7}}{2}$.

Từ đó ta có $A'D^2 = A'B'^2 + B'D^2 - 2 \cdot A'B' \cdot B'D \cos \widehat{A'B'D} = 1^2 + \left(\dfrac{3\sqrt{7}}{2}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \dfrac{3\sqrt{7}}{2} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{7}} = \dfrac{43}{4}$.

Suy ra $A'D = \dfrac{\sqrt{43}}{2}$.

Kẻ $B'E \perp A'D$ và $B'H \perp BE$, suy ra $B'H \perp (A'BN)$. Do đó $\mathrm{d}\left(B', (A'BN)\right) = B'H$.

Từ $\cos \widehat{A'B'C'} = \dfrac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow \sin \widehat{A'B'C'} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Do đó $S_{A'B'D} = \dfrac{1}{2} \cdot A'B' \cdot B'D \cdot \sin \widehat{A'B'D} = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot \dfrac{3\sqrt{7}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

$$B'E = \frac{2S_{A'B'D}}{A'D} = \frac{2 \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{\sqrt{43}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}}.$$

$$\frac{1}{B'H^2} = \frac{1}{B'E^2} + \frac{1}{B'B^2} = \frac{1}{\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}}\right)^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{46}{27} \Rightarrow B'H = \sqrt{\frac{27}{46}}.$$

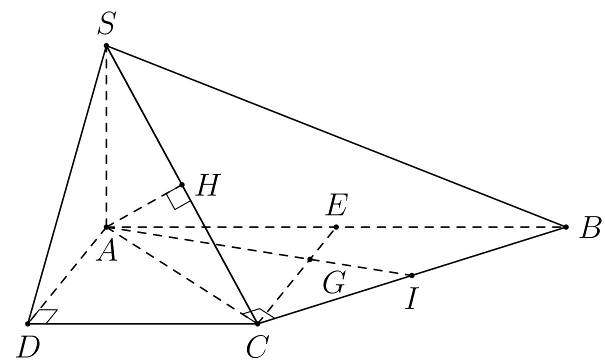
Từ $BM = 3B'M$ suy ra $\mathrm{d}\left(M, (A'BN)\right) = \dfrac{3}{4}\mathrm{d}\left(B', (A'BN)\right) = \dfrac{3}{4} \cdot B'H = \dfrac{3}{4} \cdot \sqrt{\dfrac{27}{46}} = \dfrac{9\sqrt{138}}{184}$.

Chọn phương án A

Câu 80. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, $AD = DC = a$, $AB = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy; mặt bên (SBC) tạo với đáy một góc $60°$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) bằng

A $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải.



— Gọi I là trung điểm của BC, G là trọng tâm tam giác ABC.
$\Rightarrow AI = 3GI$
$\Rightarrow \mathrm{d}(A, (SBC)) = 3\mathrm{d}(G, (SBC))$.

— Gọi E là trung điểm của AB
$\Rightarrow AE = \dfrac{1}{2}AB = a$.
$\Rightarrow$ Tứ giác $ADCE$ là hình vuông
$\Rightarrow CE = a = \dfrac{1}{2}AB$.
$\Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại C.
$\Rightarrow BC \perp AC$

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \ \ (SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC$.

Do $\begin{cases} AC \perp BC \\ SC \perp BC \\ (SBC) \cap (ABCD) = BC \end{cases}$

Nên góc giữa (SBC) và mặt đáy $(ABCD)$ bằng góc $\widehat{SCA} = 60°$.

Tam giác vuông SCA có $\tan 60° = \dfrac{SA}{AC} \Rightarrow SA = AC\sqrt{3} = a\sqrt{6}$.

Kẻ $AH \perp SC$ trong tam giác vuông SCA.

Ta có: $AH \perp BC$ vì $BC \perp (SAC)$.

$\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}(A, (SBC)) = AH$.

Mà $AH = AC \cdot \sin 60° = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

$\Rightarrow \mathrm{d}(G, (SBC)) = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}(A, (SBC)) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Chọn phương án C

BẢNG ĐÁP ÁN

1. D	2. D	3. B	4. D	5. D	6. B	7. C	8. A	9. B	10. C
11. B	12. A	13. A	14. B	15. A	16. B	17. A	18. C	19. D	20. A
21. D	22. D	23. D	24. D	25. D	26. A	27. A	28. A	29. C	30. B
31. B	32. A	33. A	34. B	35. A	36. B	37. A	38. C	39. D	40. A
41. D	42. C	43. A	44. A	45. C	46. B	47. C	48. D	49. A	50. B
51. D	52. A	53. D	54. D	55. C	56. B	57. B	58. C	59. C	60. D
61. D	62. A	63. D	64. D	65. A	66. D	67. A	68. D	69. C	70. D
71. A	72. A	73. B	74. B	75. D	76. B	77. B	78. C	79. A	80. C

DẠNG 41. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3+mx^2+4x+3$ đồng biến trên

(A) 5. (B) 4. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=x^2+2mx+4$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f'(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ (Dấu "=" xảy ra tại hữu hạn điểm).

Ta có: $f'(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \Delta'\leq 0\Leftrightarrow \Delta'=m^2-4\leq 4\Leftrightarrow -2\leq m\leq 2$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$. Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn phương án (A)

Câu 1. Giá trị của m để hàm số $y=\frac{\cot x}{\cot x-m}$ nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ là

(A) $\left[\begin{array}{l} m\leq 0 \\ 1\leq m<2 \end{array}\right.$. (B) $1\leq m<2$. (C) $m\leq 0$. (D) $m>2$.

Lời giải.

Ta có $y'=\frac{2-m}{(\cot x-m)^2}\cdot(\cot x)'=\frac{2-m}{(\cot x-m)^2}\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}$.

Khi $x\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ thì $\cot x\in(0;1)$ Để hàm số đồng biến trên $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ thì

$$\begin{cases}\cot x-m\neq 0 \\ y'>0\end{cases}, \forall x\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\begin{cases} m\notin(0;1) \\ 2-m>0, \forall x\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\leq 0 \\ 1\leq m<2.\end{cases}$$

Chọn phương án (A)

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3-2(2m+3)x+4$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $-1\leq m\leq 3$. (B) $-3<m<1$. (C) $-1<m<3$. (D) $-3\leq m\leq 1$.

Lời giải.

Ta có $y'=-x^2+2mx-2m-3$.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $y'=-x^2+2mx-2m-3\leq 0\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\Delta'\leq 0\Leftrightarrow m^2-2m-3\leq 0\leq\Leftrightarrow -1\leq m\leq 3$. Chọn A.

Chọn phương án (A)

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^4-2(m-1)x^2+m-2$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$?

(A) $m\in(-\infty;-5)$. (B) $m\in[5;2)$. (C) $m\in(2;+\infty)$. (D) $m\in(-\infty;2]$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = 4x^3 - 4(m-1)x$.

— **Trường hợp 1**: $m \leq 1$

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $(1;3)$.

— **Trường hợp 2**: $m > 1$

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m-1}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{m-1}$		0		$\sqrt{m-1}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-\sqrt{m-1})$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(\sqrt{m-1})$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy để hàm số đồng biến trên $(1;3) \Rightarrow \sqrt{m-1} \leq 1 \Leftrightarrow m \leq 2$.

Suy ra $m \in (1;2]$ thì hàm số đồng biến trên $(1;3)$.

Vậy $m \in (-\infty;1] \cup (1;2] = (-\infty;2]$ thì hàm số đã cho đồng biến trên $(1;3)$.

Chọn phương án D

Câu 4. Tìm tất cá các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + 4x - 5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A $0 < m < 1$. **B** $-1 \leq m \leq 1$. **C** $0 \leq m \leq 1$. **D** ˘$1 < m < 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 4mx + 4$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' = (-2m)^2 - 4 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leqslant m \leqslant 1$.

Chọn phương án B

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số

$$y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-3)x - m + 2$$

luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

(A) $m \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.
(B) $-3 \le m \le 1$.
(C) $m \le 1$.
(D) $-3 < m < 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -x^2 - 2mx + 2m - 3$.

Hàm số đã cho là hàm bậc ba nên hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi chỉ khi

$$\begin{aligned} y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 \le 0 \\ &\Leftrightarrow -3 \le m \le 1. \end{aligned}$$

Chọn phương án B

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (m-1)x^3 + (m-1)x^2 - (2m+1)x + 5$ nghịch biến trên tập xác định.

(A) $-\frac{5}{4} \le m \le 1$.
(B) $-\frac{2}{7} \le m < 1$.
(C) $-\frac{7}{2} \le m < 1$.
(D) $-\frac{2}{7} \le m \le 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3(m-1)x^2 + 2(m-1)x - (2m+1)$.

+ Xét $m = 1$. Ta có $y' = -3 < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên tập xác định.

+ Xét $m \ne 1$. Để hàm số trên nghịch biến trên tập xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m - 1 < 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 + 3(m-1)(2m+1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 7m^2 - 5m - 2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{7} \le m < 1.$$

Vậy, với $-\frac{2}{7} \le m < 1$ thì hàm số đã cho nghịch biến trên tập xác định.

Chọn phương án D

Câu 7. Tìm tập các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x^3}{3} + x^2 + (m-1)\,x + 2018$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(A) $[1; +\infty)$.
(B) $[1;2]$.
(C) $(-\infty; 2]$.
(D) $[2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có: $y' = x^2 + 2x + m - 1$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \ge 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \le 0 \Leftrightarrow m \ge 2$.

Chọn phương án D

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+2-m}{x+1}$ nghịch biến trên các khoảng mà nó xác định?

(A) $m \leq 1$. (B) $m < 1$. (C) $m < -3$. (D) $m \leq -3$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Có $y' = \dfrac{m-1}{(x+1)^2}$.

Hàm số nghịch bến trên mỗi khoảng của tập xác định $\Leftrightarrow \dfrac{m-1}{(x+1)^2} < 0,\ \forall x \in \mathscr{D} \Leftrightarrow m < 1$.

Chọn phương án (B)

Câu 9. Số giá trị nguyên của m để hàm số $y = \dfrac{mx-2}{-2x+m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$ là

(A) 4. (B) 5. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{m^2-4}{(-2x+m)^2}$. Hàm số $y = \dfrac{mx-2}{-2x+m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ \dfrac{m}{2} \leq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq 1$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 0; 1\}$.

Chọn phương án (C)

Câu 10. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y = -\dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-3)x - m + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $-3 \leq m \leq 1$. (B) $m \leq 1$. (C) $\left[\begin{array}{l} m \leq -3 \\ m \geq 1 \end{array}\right.$. (D) $-3 < m < 1$.

Lời giải.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = -x^2 - 2mx + 2m - 3$.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì:

$y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 0 \\ m^2 + 2m - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1$

Chọn phương án (A)

B MỨC ĐỘ 2

Câu 11. Cho hàm số $y = \dfrac{mx+4}{x+m}$. Giá trị của m để hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$ là?

(A) $m > 2$. (B) $\left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2 \end{array}\right.$. (C) $m \leq -2$. (D) $m < -2$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số $x \neq m$.

Đạo hàm $y' = \dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$y' > 0,\ \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4>0 \\ -m \notin (2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ -m \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ m \ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow m>2.$$

Vậy khi $m>2$ thì hàm số đã cho đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Chọn phương án A

Câu 12. Cho hàm số $y=2x^3-3(3m+1)x^2+6(2m^2+m)x-12m^2+3m+1$. Tính tổng tất cả giá trị nguyên dương của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.

A 0. **B** 3. **C** 1. **D** 2.

Lời giải.

Ta có

$y'=6x^2-6(3m+1)x+6(2m^2+m)$.

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=2m+1 \end{array}\right.$

Vì m nguyên dương nên $m<2m+1$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3) \Leftrightarrow m \leqslant 1 < 3 \leqslant 2m+1 \Leftrightarrow m=1$.

Chọn phương án C

Câu 13. Gọi S là tập hợp các số nguyên m để hàm số $y=f(x)=\dfrac{x+2m-3}{x-3m+2}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-14)$. Tính tổng T của các phần tử trong S?

A $T=-10$. **B** $T=-9$. **C** $T=-6$. **D** $T=-5$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{3m-2\}$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{-5m+5}{(x-3m+2)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-14) \Leftrightarrow \begin{cases} -5m+5>0 \\ 3m-2 \notin (-\infty;-14) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ 3m-2 \ge -14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ m \ge -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -4 \le m < 1.$$

Vậy $S=\{-4;-3;-2;-1;0\} \Rightarrow T=-4-3-2-1=-10$.

Chọn phương án A

Câu 14. Cho hàm số $y=\dfrac{mx+2}{2x+m}$, m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$. Tìm số phần tử của S.

A 1. **B** 5. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{m}{2}\right\}$. $y' = \dfrac{m^2-4}{(2x+m)^2}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4<0 \\ \dfrac{-m}{2} \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{-m}{2} \le 0 \\ \dfrac{-m}{2} \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ \left[\begin{array}{l} m \ge 0 \\ m \le -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m < 2.$

Chọn phương án C

Câu 15. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \dfrac{2x+m+1}{x+m+1}$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-4)$ và $(11;+\infty)$?

A 13. B 12. C Vô số. D 14.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq -m+1$, $y' = \dfrac{m-3}{(x+m-1)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-4)$ và $(11;+\infty)$ thì hàm số phải xác định trên mỗi khoảng $(-\infty;-4)$ và $(11;+\infty)$, $\Rightarrow -4 \le -m+1 \le 11 \Leftrightarrow -10 \le m \le 5$.

Khi đó để hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-4)$ và $(11;+\infty)$ thì $m-3<0 \Leftrightarrow m<3$, lấy giao với $-10 \le m \le 5 \Rightarrow -10 \le m < 3$.

Từ đó có các giá trị nguyên của $m \in \{-10;-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$.

Suy ra đáp án A.

Chọn phương án A

Câu 16. Tập tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A $m \in [-1;1]$. B $m \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$.

C $m \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$. D $m \in (-1;1)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho là hàm số bậc ba có $a = 1 > 0$, có $y' = 3x^2 - 6mx + 3$. Do đó y đồng biến trên $\mathbb{R}$ nếu và chỉ nếu phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta' = 9m^2 - 9 \le 0$.

Vậy $m \in [-1;1]$.

Chọn phương án A

Câu 17. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m-9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ là

A $(-\infty;0]$. B $\left[-\dfrac{3}{4};+\infty\right)$. C $\left(-\infty;-\dfrac{3}{4}\right]$. D $[0;+\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m-9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ tương đương

$$\begin{aligned} & y' = -3x^2 - 12x + 4m - 9 \le 0,\ \forall x \in (-\infty;-1) \\ \Leftrightarrow\ & 4m \le 3x^2 + 12x + 9,\ \forall x \in (-\infty;\ -1). \end{aligned}$$

Đặt $g(x) = 3x^2 + 12x + 9 \Rightarrow g'(x) = 6x + 12$, suy ra $\min\limits_{(-\infty;-1]} g(x) = g(-2) = -3$.

Vậy $4m \leq -3 \Leftrightarrow m \leq -\dfrac{3}{4}$.

Chọn phương án C

Câu 18. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

(A) 2007. (B) 2030. (C) 2005. (D) 2018.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 12x + m$.

Hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$

$\Leftrightarrow m \leq -3x^2 + 12x, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \geq \max\limits_{(0;+\infty)} (-3x^2 + 12x) \Leftrightarrow m \geq 12$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $-2018 \leq m \leq 2018$ nên $m \in \{12, 13, 14, \cdots, 2018\}$.

Vậy có 2007 số nguên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án A

Câu 19. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019; 2019]$ để hàm số $y = (m-1)x^3 + 3mx^2 + (4m+4)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

(A) 4036. (B) 2017. (C) 2018. (D) 4034.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 3(m-1)x^2 + 6mx + 4m + 4$.

Để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ thì $y' \geq 0$, $\forall x \in (-\infty; +\infty)$ ($y' = 0$ tại hữu hạn điểm).

• TH1: $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ thì $y' = 6x + 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{4}{3}$ (không thỏa mãn).

• TH2: $\begin{cases} a = m - 1 > 0 \\ \Delta'_{y'} = (3m)^2 - 3(m-1)(4m+4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -3m^2 + 12 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ \left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2$.

Vì m là số nguyên và $m \in [-2019; 2019] \Rightarrow m = \{2; 3; 4; \ldots; 2019\}$.

Vậy có 2018 số nguyên m thuộc khoảng $m \in [-2019; 2019]$.

Chọn phương án C

Câu 20. Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$ (với m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

(A) 7. (B) 6. (C) 5. (D) 8.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 - 2mx + 4m + 9$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad y' \leq 0, \forall x \in (-\infty; +\infty) \\ &\Leftrightarrow \quad -3x^2 - 2mx + 4m + 9 \leq 0, \forall x \in (-\infty; +\infty) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<0 \\ m^2+12m+27 \le 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow -9 \le m \le -3$$
$$\Rightarrow m \in \{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3\} \text{ (vì } m \text{ là số nguyên)}$$

Chọn phương án A

C MỨC ĐỘ 3

Câu 21. Cho hàm số $y = \left|x^3 - mx + 1\right|$. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên m sao cho hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$. Tìm số phần tử của S.

A 3. **B** 10. **C** 1. **D** 9.

Lời giải.

Cách giải:

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - mx + 1$, $f'(x) = 3x^2 - m$.

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = |f(x)| = |x^3 - mx + 1|$ được dựng từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ bằng cách giữ lại phần đồ thị hàm số phái trên trục Ox và lấy đối xứng phần phái dưới Ox qua trục Ox (xóa bỏ phần đồ thị của $y = f(x)$ nằm phái dưới Ox).

TH1: Với $m = 0$ ta có hàm số $y = f(x) = x^3 + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Có $f(1) = 2 > 0 \Rightarrow$ Hàm số $y = |f(x)| = |x^3 - mx + 1|$ đồng biến trên $[1;+\infty)$.

$\Rightarrow m = 0$: thỏa mãn.

TH2: Với $m > 0$ ta có:

$f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Để hàm số $y = |x^3 - mx + 1|$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ thì

$$\begin{cases} m > 0 \\ x_1 < x_2 \le 1 \\ f(1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -\dfrac{m}{3} + 1 \ge 0 \\ 2 - m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \le 2.$$

Mà $m \in \mathbb{N} \Rightarrow m \in \{1; 2\}$.

Vậy, $S = \{0; 1; 2\}$. Số phần tử của S là 3.

Chọn phương án A

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-2)(x^2-6x+m)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $g(x) = f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

A 2010. **B** 2012. **C** 2011. **D** 2009.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} g'(x) &= -f'(1-x) = -(1-x)^2(1-x-2)\left[(1-x)^2 - 6(1-x) + m\right] \\ &= -(x-1)^2(-1-x)(x^2+4x+m-5) = (x-1)^2(x+1)(x^2+4x+m-5). \end{aligned}$$

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \ g'(x) \le 0 \text{ với mọi } x \in (-\infty; -1) \\ &\Leftrightarrow \ (x+1)(x^2+4x+m-5) \le 0 \text{ với mọi } x \in (-\infty; -1) \\ &\Leftrightarrow \ x^2+4x+m-5 \ge 0 \text{ với mọi } x \in (-\infty; -1) \ (\text{Do } x \in (-\infty; -1) \Rightarrow x+1 < 0) \\ &\Leftrightarrow \ h(x) = x^2+4x-5 \ge -m \text{ với mọi } x \in (-\infty; -1) \\ &\Leftrightarrow \ -m \le \min_{x \in (-\infty; -1]} h(x). \end{aligned}$$

Ta có $h'(x) = 2x+4$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$. Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	-9	$\nearrow$	

Do đó $-m \le -9 \Leftrightarrow m \ge 9$. Mặt khác $m \in [-2019; 2019]$ và m nguyên nên $m \in \{9; 10; 11; \cdots; 2019\}$ hay có $2019 - 9 + 1 = 2011$ giá trị của m thỏa mãn.

Chọn phương án C

Câu 23. Tìm tất cả các giá trị khác nhau của tham số m để hàm số $y = \dfrac{5^{-x}+2}{5^{-x}-m}$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

A $m < -2$. **B** $m \le -2$. **C** $-2 < m \le 1$. **D** $-2 < m < 1$.

Lời giải.

ĐK: $5^{-x} \ne m$. Đặt $t = 5^{-x}$ là hàm nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ (1), suy ra $t \in (1; +\infty)$.

Xét hàm số $y = f(t) = \dfrac{t+2}{t-m}$, $f'(t) = \dfrac{-m-2}{(t-m)^2}$.

Do (1), để hàm số $y = \dfrac{5^{-x}+2}{5^{-x}-m}$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$ thì hàm số $f(t) = \dfrac{t+2}{t-m}$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow f'(t) < 0, \forall t \in (1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m-2 < 0 \\ m \notin (1, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \le 1.$$

Chọn phương án C

Câu 24. Tìm các mối liên hệ giữa các tham số a và b sao cho hàm số $y = f(x) = 2x + a\sin x + b\cos x$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$?

(A) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$. (B) $a + 2b \geq \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$. (C) $a^2 + b^2 \leq 4$. (D) $a + 2b = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = f'(x) = 2 + a\cos x - b\sin x$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2 + a\cos x + b\sin x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Mà $2 + a\cos x + b\sin x \geq 2 - \sqrt{a^2+b^2}, \forall x \in \mathbb{R}$ (dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{a}{\cos x} = \dfrac{b}{\sin x} < 0$).

Do đó $\min\limits_{\mathbb{R}} f'(x) = 2 - \sqrt{a^2+b^2}$.

Suy ra $(*) \Leftrightarrow 2 - \sqrt{a^2+b^2} \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 4$.

Chọn phương án (C)

Câu 25. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \dfrac{1}{5}m^2x^5 - \dfrac{1}{3}mx^3 + 10x^2 - (m^2 - m - 20)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tổng các giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

(A) $\dfrac{5}{2}$. (B) -2. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= m^2x^4 - mx^2 + 20x - m^2 + m + 20 \\ &= (x+1)\left[m^2x^3 - m^2x^2 + (m^2-m)x - m^2 + m + 20\right] \\ &= (x+1)\left[(x+1)(m^2x^2 - 2m^2x + 3m^2 - m) - 4m^2 + 2m + 20\right]. \end{aligned}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x + 1 = 0 & (1) \\ (x+1)(m^2x^2 - 2m^2x + 3m^2 - m) - 4m^2 + 2m + 20 = 0 & (2) \end{array}\right..$$

Hàm số đồng biến trên R tương đương với $y' \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra $x = -1$ là nghiệm kép của $y' = 0$ tức là $x = -1$ là nghiệm của phương trình (2) $\Rightarrow -4m^2 + 2m + 20 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = \dfrac{5}{2} \end{array}\right.$.

Với $m = -2$, ta có $f'(x) = (x+1)^2 \cdot (4x^2 - 8x + 14) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Với $m = \dfrac{5}{2}$, ta có $f'(x) = \dfrac{5}{4}(x+1)^2 \cdot (5x^2 - 10x + 13) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy $m = -2$ và $m = \dfrac{5}{2}$ đều thỏa yêu cầu bài toán. Do đó tổng cần tìm bằng $\dfrac{1}{2}$.

Chọn phương án (C)

Câu 26. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m nhỏ hơn 2018 để hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x + 3$ nghịch biến trên khoảng có độ dài lớn hơn 3.

(A) 2009. (B) 2010. (C) 2011. (D) 2012.

Lời giải.

Ta có $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2) = 6\left[x^2 + (m-1)x + (m-2)\right]$.

$$\begin{aligned} & y' = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + (m-1)x + (m-2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 - m \end{array}\right. \end{aligned}$$

Yêu cầu bài toán khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -1 \neq 2 - m \\ |-1 - 2 + m| > 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} m \neq 3 \\ |m - 3| > 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} m \neq 3 \\ \left[\begin{array}{l} m - 3 > 3 \\ m - 3 < -3 \end{array}\right. \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} m \neq 3 \\ \left[\begin{array}{l} m > 6 \\ m < 0. \end{array}\right. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $m \in (-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$.

Do m nguyên dương nên $m \in \{7; 8; 9 \ldots 2017\}$. Do đó có 2011 số m thỏa đề bài.

Chọn phương án C

Câu 27. Cho hàm số $y = 2\cos^3 x - 3\cos^2 x - m\cos x$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $m \in \left[-\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$. B. $m \in \left(-2; \dfrac{3}{2}\right)$. C. $m \in \left(\dfrac{3}{2}; 2\right)$. D. $m \in \left(-\infty; -\dfrac{3}{2}\right]$.

Lời giải.

Cách 1:

$y' = -6\cos^2 x \sin x + 6\cos x \sin x + m\sin x = sin\left(-6\cos^2 x + 6\cos x + m\right)$

Hàm số $y = 2\cos^3 x - 3\cos^2 x - m\cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$\Leftrightarrow \sin x\left(-6\cos^2 x + 6\cos x + m\right) \leq 0,\ \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ (vì $\sin x > 0,\ \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$)

$\Leftrightarrow \left(-6\cos^2 x + 6\cos x + m\right) \leq 0,\ \forall \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -6\cos^2 x + 6\cos x \leq -m,\ \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ (1)

Xét $f(x) = -6\cos^2 x + 6\cos x,\ \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Đặt $t = \cos x$. Vì $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos x \in (0; 1)$.

Ta có $f(t) = -6t^2 + 6t,\ \forall t \in (0; 1)$ là Parabol có đỉnh $I\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$ và hệ số $a < 0$ nên có giá trị lớn nhất là $\dfrac{3}{2}$ tại $t = \dfrac{1}{2}$.

Để (1) xảy ra $\Leftrightarrow \max\limits_{(0;1} f(x) \leq -m \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} \leq -m \Leftrightarrow m \leq -\dfrac{3}{2}$

Cách 2: Đặt $t = \cos x$. Vì $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos x \in (0;1)$.

Ta có $y = 2t^3 - 3t^2 - mt \Leftrightarrow y' = 6t^2 - 6t - m$.

Hàm số $y = 2\cos^3 x - 3\cos^2 x - m\cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $y = 2t^3 - 3t^2 - mt$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$

$\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall t \in (0;1)$

$\Leftrightarrow 6t^2 - 6t - m \geq 0, \forall t \in (0;1) \Leftrightarrow f(t) = 6t^2 - 6t \geq m, \forall t \in (0;1)$.

Xét $f(t) = 6t^2 - 6t, \forall t \in (0;1)$; $f'(t) = 12t^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$

t	0		$\dfrac{1}{2}$		1
$f'(t)'$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m \leq -\dfrac{3}{2}$.

Chọn phương án D

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m\sin x - 1$ đồng biến trên đoạn $\left[\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right]$

A $m \geq -3$. **B** $m \geq 0$. **C** $m \leq -3$. **D** $m \leq 0$.

Lời giải.

— Ta có $y = f(x) = \sin^3 x + 3\sin^2 x - m\sin x - 4 \quad (1)$. Đặt $t = \sin x$, do $x \in \left[\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1;0]$.

— Hàm số (1) trở thành $y = g(t) = t^3 + 3t^2 - mt - 4. \quad (2)$

— Hàm số (1) đồng biến trên $\left[\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ khi và chỉ khi hàm số (2) nghịch biến trên $[-1;0] \Leftrightarrow g'(t) \leq 0, \forall t \in [-1;0]$ ($g'(t) = 0$ tại hữa hạn điểm).

— Xét hàm số $y = g(t) = t^3 + 3t^2 - mt - 4$ trên $[-1;0]$. Ta có $g'(t) = 3t^2 + 6t - m$. Suy ra

$$\begin{aligned} g'(t) \leq 0,\ t \in [-1;0] \quad &\Leftrightarrow \quad 3t^2 + 6t - m \leq 0 \quad \forall t \in [-1;0] \\ &\Leftrightarrow \quad 3t^2 + 6t \leq m, \quad \forall t \in [-1;0]. \end{aligned}$$

— Xét hàm số $y = h(t) = 3t^2 + 6t$ trên đoạn $[-1;0]$.
Ta có $h'(t) = 6t + 6 \geq 0, \quad t \in [-1;0] \Rightarrow h(t)$ đồng biến trên $[-1;0]$. Vậy $\max \lim\limits_{[-1;0]} h(t) = h(0) = 0$.
Tức là $g'(t) \leq 0, \quad t \in [-1;0] \Leftrightarrow \max \lim\limits_{[-1;0]} h(t) \leq m, \quad t \in [-1;0]$. Do đó, $m \geq 0$.
Hàm số (1) đồng biến trên $\left[\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ khi và chỉ khi $m \in [0;+\infty)$.

Chọn phương án B

Câu 29 (2D1G1-3). Cho hàm số $y = \left|\sin^3 x - m\sin x + 1\right|$. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên m sao cho hàm số đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Tính số phần tử của S.

A 1. **B** 2. **C** 3. **D** 0.

Lời giải.

Trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, hàm số $y = \sin x$ đồng biến.

Đặt $t = \sin x, x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$.

Khi đó hàm số $y = \left|\sin^3 x - m\sin x + 1\right|$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi $y = f(t) = \left|t^3 - mt + 1\right|$ đồng biến trên $(0; 1)$.

Xét hàm số $y = f(t) = \left|t^3 - mt + 1\right|$ trên khoảng $(0; 1)$ có $f'(t) = 3t^2 - m$.

— Khi $m = 0: f'(x) = 3x^2 > 0, \forall x \Rightarrow y = f(x) = x^3 + 1$ đồng biến trên $(0; 1)$.
Và đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 + 1$ cắt Ox tại điểm duy nhất $x = -1$.
$\Rightarrow y = g(x) = \left|x^3 - mx + 1\right|$ đồng biến trên $(0; 1) \Rightarrow m = 0$ thoả mãn.

— $m > 0: f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = -\sqrt{\frac{m}{3}}, x_2 = \sqrt{\frac{m}{3}}$.
Hàm số $y = f(x) = x^3 - mx + 1$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\sqrt{\frac{m}{3}}\right)$ và $\left(\sqrt{\frac{m}{3}}; +\infty\right)$.
Nhận xét: $(0; 1) \not\subset \left(\sqrt{\frac{m}{3}}; +\infty\right), (0; 1) \not\subset \left(-\infty; -\sqrt{\frac{m}{3}}\right), \forall m > 0$.

TH1: $-\sqrt{\frac{m}{3}} < 0 < \sqrt{\frac{m}{3}} < 1 \Leftrightarrow 0 < m < 3$

x		$-\sqrt{\frac{m}{3}}$		0		$\sqrt{\frac{m}{3}}$		1	
$f'(x)$	$+$		$-$		$-$		$+$		$+$

Để $y = g(x) = \left|x^3 - mx + 1\right|$ đồng biến trên $(0; 1)$ thì $x^3 - mx + 1 = 0$ có nghiệm (bội lẻ) là $x = \sqrt{\frac{m}{3}}$

$\Rightarrow \frac{m\sqrt{m}}{3\sqrt{3}} - \frac{m\sqrt{m}}{\sqrt{3}} + 1 = 0 \Leftrightarrow -2m\sqrt{m} + 3\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow m\sqrt{m} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow m = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$(TM).

TH2: $-\sqrt{\frac{m}{3}} < 0 < 1 \leq \sqrt{\frac{m}{3}} \Leftrightarrow m \geq 3$

x		$-\sqrt{\frac{m}{3}}$		0		1		$\sqrt{\frac{m}{3}}$	
$f'(x)$	$+$		$-$		$-$		$-$		$+$

Để $y = g(x) = \left|x^3 - mx + 1\right|$ đồng biến trên $(0; 1)$ thì $x^3 - mx + 1 \leq 0, \forall x \in (0; 1)$

$\Rightarrow mx \leq x^3 + 1, \forall x \in (0; 1) \Rightarrow m \leq x^2 + \frac{1}{x}, \forall x \in (0; 1)$.

Xét hàm số $y = x^2 + \frac{1}{x}, \forall x \in (0; 1) \Rightarrow y' = 2x - \frac{1}{x^2}, y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \in (0; 1)$.

Hàm số liên tục trên $(0; 1)$ và $y\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}; y(1) = 2; \lim\limits_{x \to 0^+} y = +\infty \Rightarrow \min\limits_{(0;1)} y = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

Để $m \leq x^2 + \frac{1}{x}, \forall x \in (0; 1)$ thì $m \leq \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow$ không có giá trị của m thoả mãn.

Vậy chỉ có giá trị $m = 0$ thoả mãn.

Chọn phương án (A)

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ để hàm số $y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m \sin x - 1$ đồng biến trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$?

(A) 2020. (B) 2019. (C) 2028. (D) 2018.

Lời giải.

Phương pháp:

— Sử dụng công thức $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, đặt ẩn phụ $t = \sin x$.

— Để hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b) \Rightarrow f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a; b)$.

Cách giải:

$y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m \sin x - 1 = \sin^3 x - 3\left(1 - \sin^2 x\right) - m \sin x - 1$.

$y = \sin^3 x + 3\sin^2 x - m \sin x - 4$.

Đặt $t = \sin x$, với $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [0; 1]$.

Bài toán trở thành tìm m để hàm số $y = t^3 + 3t^2 - mt - 4$ đồng biến trên $[0; 1]$.

TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3t^2 + 6t - m$.

Để hàm số đồng biến trên $[0; 1]$

$\Rightarrow y' \geq 0\ \forall t \in [0; 1] \Rightarrow 3t^2 + 6t - m \geq 0\ \forall t \in [0; 1] \Leftrightarrow m \leq 3t^2 + 6t\ \forall t \in [0; 1]$.

$\Rightarrow m \leq f(t) = 3t^2 + 6t\ \forall t \in [0; 1] \Leftrightarrow m \leq \min\limits_{[0;1]} f(t)$.

Xét hàm số $f(t) = 3t^2 + 6t$, ta có $f(0) = 0, f(1) = 9 \Rightarrow \min\limits_{[0;1]} f(t) = 0 \Leftrightarrow m \leq 0$.

Kết hợp điều kiện đề bài $\Rightarrow \begin{cases} m \in (-2019; 0] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$ Có 2019 giá trị của m thoả mãn.

Chọn phương án (B)

D MỨC ĐỘ 4

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x}{x - m}$ nghịch biến trên $[1; +\infty)$.

(A) $m > 1$. (B) $0 < m \leq 1$. (C) $0 \leq m < 1$. (D) $0 < m < 1$.

Lời giải.

Hàm số xác định trên $[1; +\infty)$ khi $m < 1$ $(*)$

$y' = \dfrac{-m}{(x - m)^2}$. Phải có $y' < 0, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow -m < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Kết hợp điều kiện $(*)$ ta được $0 < m < 1$.

Chọn phương án (D)

Câu 32. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1 - 2\sin x}{2\sin x + m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

(A) $m > 0$. (B) $m < -1$. (C) $m \geq -1$. (D) $m \geq 0$.

Lời giải.

$\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow 0 < \sin x < 1$. Để hàm số xác định trên $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ thì $\left[\begin{array}{l} -\frac{m}{2} \leq 0 \\ -\frac{m}{2} \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 0 \\ m \leq -2 \end{array}\right.$ $(*)$.

$y' = \dfrac{-2(m+1)\cos x}{(2\sin x + m)^2}$.

Phải có $y' > 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right) \Leftrightarrow m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$. Kết hợp điều kiện $(*)$ được $m \geq 0$.

Nhận xét: Ta có thể giải bài này bằng cách thử lần lượt $m = 0, m = -1$ để chọn được phương án đúng.

Chọn phương án (D)

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = 2x^3 - mx^2 + 2x$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

(A) $m \geq \frac{13}{2}$. (B) $m \leq 2\sqrt{3}$. (C) $m \geq -\frac{13}{2}$. (D) $m \geq -2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán tương đương với $y' = 6x^2 - 2mx + 2 \geq 0, \forall x \in (-2;0)$

$\Leftrightarrow m \geq \dfrac{3x^2+1}{x} = g(x), \forall x \in (-2;0) \Leftrightarrow m \geq \max\limits_{(-2;0)} g(x) \Leftrightarrow m \geq -2\sqrt{3}$.

Chọn phương án (D)

Câu 34. Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1-2m)x - 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

(A) $m \geq 1$. (B) $m \in \varnothing$. (C) $m = 1$. (D) $m \neq 1$.

Lời giải.

$y' = -3x^2 + 6mx + 3(1-2m)$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$.

Chọn phương án (C)

Câu 35. Cho hàm số $y = \frac{4}{3}\sin^3 x + 2\cos^2 x - (2m^2 - 5m + 2)\sin x - 2017$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Tìm số phần tử của S.

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) Vô số.

Lời giải.

Ta có $y = \frac{4}{3}\sin^3 x + 2(1 - \sin^2 x) - (2m^2 - 5m + 2)\sin x - 2017$.

$y' = \left[4\sin^2 x - 4\sin x - (2m^2 - 5m + 2)\right]\cos x$.

Ta có ycbt $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \left[4\sin^2 x - 4\sin x - (2m^2 - 5m + 2)\right]\cos x \geq 0, \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Do $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên $\cos x > 0$, suy ra ycbt $\Leftrightarrow 4\sin^2 x - 4\sin x - (2m^2 - 5m + 2) \geq 0, \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow 0 < t < 1$, ycbt $\Leftrightarrow 2m^2 - 5m + 2 \leq 4t^2 - 4t, \forall t \in (0;1)$.

$\Leftrightarrow 2m^2 - 5m + 2 \leq \min\limits_{t \in (0,1)} (4t^2 - 4t) \Leftrightarrow 2m^2 - 5m + 2 \leq -1 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq \frac{3}{2}$. Vậy S có 1 phần tử.

Chọn phương án (B)

Câu 36. Bất phương trình $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}\geq 2\sqrt{3}$ có tập nghiệm là $[a;b]$. Hỏi tổng $a+b$ có giá trị bao nhiêu?

A 5. **B** -2. **C** 4. **D** 3.

Lời giải.

Đặt $f(x)=\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}-2\sqrt{3}=\sqrt{(x+2)(2x^2-x+18)}-\sqrt{4-x}-2\sqrt{3}$ với $x\in[-2;4]$

$f'=\dfrac{6x^2+6x+6}{2\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}}+\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}>0 \quad \forall x\in[-2;4]$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[-2;4]$.

Ta có: $f(1)=0\Rightarrow$ Bất phương trình có nghiệm $x\in[1;4]$

$\Rightarrow a+b=5$.

Chọn phương án A

Câu 37. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{\sin x+1}{\sin x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?

A $\left[\begin{array}{l}m>1\\-1<m<0\end{array}\right.$. **B** $\left[\begin{array}{l}m\geq 1\\-1<m\leq 0\end{array}\right.$. **C** $m\geq 1$. **D** $m>-1$.

Lời giải.

Đặt $t=\sin x\Rightarrow t\in(0;1)$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t+1}{t-m}$ $(m\neq -1)$. Để hàm số y nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $f(t)$ nghịch biến trên $(0;1)\Rightarrow f'(t)<0$ với $\forall t\in(0;1)\Leftrightarrow \dfrac{-m-1}{(t-m)^2}<0$ với $\forall t\in(0;1)\Leftrightarrow \begin{cases}-m-1<0\\t-m\neq 0 \text{ với } \forall t\in(0;1)\end{cases}$

$\begin{cases}m>-1\\m\leq 0 \text{ hoặc } m\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<m\leq 0\\m\geq 1\end{array}\right.$.

Chọn phương án B

Câu 38. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-x^3+2x^2+(3m-1)x+2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

A $m\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{9}\right]$. **B** $m\in\left[-\dfrac{1}{9};+\infty\right)$. **C** $m\in(-\infty;8]$. **D** $m\in\left(-\infty;\dfrac{8}{3}\right]$.

Lời giải.

Ta có: $y'=-3x^2+4x+3m-1$. Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ thì:

$-3x^2+4x+3m-1\leq 0$ với $\forall x\in(-\infty;-1)\Leftrightarrow m\leq x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{3}$ với $\forall x\in(-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow m\leq \min\limits_{(-\infty;-1)} f(x)$, với $f(x)=x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow m\leq -\dfrac{1}{9}$.

Chọn phương án A

Câu 39. Để phương trình $-2\sin^2 x+3\sin x+1=m$ có hai nghiệm phân biệt trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Ta phải có tập giá trị của m là

(A) $\left[2; \frac{17}{8}\right)$. **(B)** $\left(1; \frac{17}{8}\right)$. **(C)** $\left(-\infty; \frac{17}{8}\right)$. **(D)** $\left(\frac{17}{8}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x$, $t \in [0; 1]$.

Khí đó, phương trình đã cho trở thành $-2t^2 + 3t + 1 = m$. Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để $-2t^2 + 3t + 1 = m$ có hai nghiệm phân biệt $t \in [0; 1]$

Xét $f(t) = -2t^2 + 3t + 1$; $t \in [0; 1]$

$f'(t) = -4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{4}$.

Ta có bảng biến thiên

x	0		$\frac{3}{4}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{17}{8}$	$\searrow$	2

$\Rightarrow m$ có tập giá trị là $\left[2; \frac{17}{8}\right)$

Chọn phương án (A)

Câu 40. Cho hàm số $y = \dfrac{mx - 4m + 5}{x + 3m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

(A) 2. **(B)** 4. **(C)** 3. **(D)** 5.

Lời giải.

$y' = \dfrac{3m^2 + 4m - 5}{(x + 3m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến thì $3m + 4m - 5 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{2 - \sqrt{19}}{3} < m < \dfrac{2 + \sqrt{19}}{3}$.

Vậy các giá trị nguyên của m là $0, 1, 2$.

Chọn phương án (C)

BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. D	4. B	5. B	6. D	7. D	8. B	9. C	10. A
11. A	12. C	13. A	14. C	15. A	16. A	17. C	18. A	19. C	20. A
21. A	22. C	23. C	24. C	25. C	26. C	27. D	28. B	29. A	30. B
31. D	32. D	33. D	34. C	35. B	36. A	37. B	38. A	39. A	40. C

DẠNG 42. HÀM SỐ MŨ - HÀM SỐ LOGARITS (BÀI TOÁN THỰC TẾ)

A MỨC ĐỘ 1

Ví dụ 1. Để quảng bá cho sản phẩm A, một công ty dụ định tổ chức quảng cáo theo hình thức quảng cáo trên truyền hình. Nghiên cứu của công ty cho thấy: nếu sau n lần quảng cáo được phát thì tỉ lệ người xem quảng cáo đó mua sản phẩm A tuân theo công thức $P(n) = \dfrac{1}{1+49\mathrm{e}^{-0{,}015\mathrm{n}}}$. Hỏi cần phát ít nhất bao nhiêu lần quảng cáo để tỉ lệ người xem mua sản phẩm đạt trên 30

Ⓐ 202. Ⓑ 203. Ⓒ 206. Ⓓ 207.

Lời giải.

Theo bài ra ta có $\dfrac{1}{1+49\mathrm{e}^{-0{,}015n}} > 0,3 \Leftrightarrow 1+49\mathrm{e}^{-0{,}015n} < \dfrac{10}{3} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}015n} < \dfrac{7}{147}$

$\Leftrightarrow -0,015n < \ln\dfrac{7}{147} \Leftrightarrow n > -\dfrac{1}{0,015}\ln\dfrac{7}{147} \simeq 202,97$.

Vậy có ít nhất 203 lần quảng cáo.

Chọn phương án B

Câu 1. Ông Toán gửi ngân hàng 150 triệu đồng với lãi suất 0,8%/tháng, sau mỗi tháng tiền lãi được nhập vào vốn. Hỏi sau một năm số tiền lãi ông Toán thu được là bao nhiêu? (làm tròn đến nghìn đồng)

Ⓐ 15.050.000 đồng. Ⓑ 165.050.000 đồng. Ⓒ 165.051.000 đồng. Ⓓ 15.051.000 đồng.

Lời giải.

Ta có $P_n = P_0 \cdot (1+r)^n$, trong đó P_0 là số tiền gửi ban đầu; r là lãi suất; n là số kỳ hạn đã gửi.

Số tiền ông Toán thu được sau 1 năm là $P_{12} = 150.000.000 \cdot (1+0.8\%)^{12} = 165.050.000$ đồng.

Chọn phương án B

Câu 2. Đầu mỗi tháng anh A gửi vào ngân hàng 3 triệu đồng với lãi suất kép là 0,6% mỗi tháng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng (khi ngân hàng đã tính lãi) thì anh A có được số tiền cả lãi và gốc nhiều hơn 100 triệu, biết lãi suất không đổi trong quá trình gửi.

Ⓐ 30 tháng. Ⓑ 40 tháng. Ⓒ 35 tháng. Ⓓ 31 tháng.

Lời giải.

Ta có $T = \dfrac{M}{r}\left[(1+r)^n - 1\right](1+r)$.

Giả sử sau n tháng sau anh A nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu, khi đó ta có

$$\frac{3}{0,6\%}\left[(1+0,6\%)^n - 1\right](1+0,6\%) > 100 \Leftrightarrow n > 30{,}3.$$

Vậy sau ít nhất sau 31 tháng thì anh A có được số tiền cả lãi và gốc nhiều hơn 100 triệu.

Chọn phương án D

Câu 3. Một người gửi 50 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $8,4\%$/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập làm vốn ban đầu để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm, người đó được lĩnh số tiền không ít hơn 80 triệu đồng (cả vốn ban đầu lẫn lãi), biết rằng trong suốt thời gian gửi tiền người đó không rút tiền và lãi suất không thay đổi?

A. 4 năm. B. 7 năm. C. 5 năm. D. 6 năm.

Lời giải.

Số tiền người đó thu được sau n năm là $P = A\left(1+r\right)^n = 50\left(1+8{,}4\%\right)^n$ (triệu đồng).

$P \geq 80 \Leftrightarrow 1{,}084^n \geq \dfrac{8}{5} \Leftrightarrow n \geq \log_{1{,}084}\dfrac{8}{5} \approx 5{,}83$.

Chọn phương án D

Câu 4. Một người gửi vào Ngân hàng 50 triệu đồng thời hạn 15 tháng, lãi suất $0,6\%$ tháng (lãi kép). Hỏi hết kì hạn thì số tiền người đó là bao nhiêu?

A. $55,664000$ triệu. B. $54,694000$ triệu. C. $55,022000$ triệu. D. $54,368000$ triệu.

Lời giải.

Sau khi hết kì hạn, số tiền người đó nhận được là

$$T = 50\cdot 10^6\cdot\left(1+0,6\%\right)^{15} = 54,694000 \text{ triệu.}$$

Chọn phương án B

Câu 5. Một người lần đầu gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng theo thể thức lãi kép (tức là tiền lãi của kỳ trước được cộng vào vốn của kỳ kế tiếp) với kì hạn 3 tháng, lãi suất 2% một quý. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kỳ hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được sau 1 năm gửi tiền vào ngân hàng gần bằng với kết quả nào sau đây. Biết rằng trong suốt thời gian gửi tiền lãi suất ngân hàng không thay đổi và người đó không rút tiền ra.

A. 212 triệu đồng. B. 216 triệu đồng. C. 210 triệu đồng. D. 220 triệu đồng.

Lời giải.

Số tiền người đó có được sau 6 tháng (2 kỳ hạn) là

$$100000000\cdot\left(1+0{,}02\right)^2 = 104040000 \text{ (đồng).}$$

Người đó gửi thêm vào 100 triệu nên số tiền gốc mới là 204040000 đồng.

Số tiền người đó có được sau 1 năm (thêm 2 kỳ hạn nữa) là

$$204040000\cdot\left(1+0{,}02\right)^2 = 212238216 \text{ (đồng).}$$

Chọn phương án A

Câu 6. Chị Thanh gửi ngân hàng 155 triệu đồng, với lãi suất $1,02\%$ một quý. Hỏi sau một năm số tiền chị Thanh nhận được là bao nhiêu triệu đồng? (làm tròn đến hàng phần nghìn)

A. $161,325$. B. $161,422$. C. $161,421$. D. $161,324$.

Lời giải.

Áp dụng công thức lãi kép, thì sau một năm chị Thanh sẽ nhận được số tiền là

$A = 155\left(1+1,02\%\right)^4 = 161,421$

Chọn phương án C

Câu 7. Một người gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất không thay đổi là 8%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Người đó định gửi tiền trong vòng 3 năm, sau đó rút tiền ra để mua ô tô trị giá 500 triệu đồng. Hỏi số tiền ít nhất người đó phải gửi vào ngân hàng để có đủ tiền mua ô tô (kết quả làm tròn đến hàng triệu) là bao nhiêu?

(A) 395 triệu đồng. (B) 394 triệu đồng. (C) 397 triệu đồng. (D) 396 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi A, T lần lượt là tiền vốn ban đầu và số tiền sau 3 năm người đó nhận được. Ta có

$$T = A(1+0{,}08)^3 \Leftrightarrow 500 = A(1+0{,}08)^3 \Rightarrow A = 397 \text{ triệu đồng.}$$

Chọn phương án (C)

Câu 8. Một người gửi 150 triệu đồng vào một ngân hàng với lại suất 0.4%/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau đúng 8 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

(A) 154.423.000 đồng. (B) 153.636.000 đồng. (C) 154.868.000 đồng. (D) 154.251.000 đồng.

Lời giải.

Số tiền mà người đó nhận được sau 8 tháng là

$S = 150 \cdot (1+0.4\%)^8 = 154,868$ (triệu đồng)= 154.868.000 đồng.

Chọn phương án (C)

B MỨC ĐỘ 2

Câu 9. Ông A gửi tiết kiệm vào ngân hàng 300 triệu đồng, với loại kì hạn 3 tháng và lãi suất 12,8%/năm. Biết trong thời gian gửi ông không rút lãi ra khỏi ngân hàng. Hỏi sau 4 năm 6 tháng thì số tiền T ông nhận được là bao nhiêu?

(A) $T = 3 \cdot 10^8(1{,}032)^{18}$ (triệu đồng). (B) $T = 3 \cdot 10^8(1{,}032)^{54}$ (triệu đồng).

(C) $T = 3 \cdot 10^2(1{,}032)^{18}$ (triệu đồng). (D) $T = 3 \cdot 10^2(1{,}023)^{18}$ (triệu đồng).

Lời giải.

Lãi suất trong một kì hạn là $r = \dfrac{12{,}8\%}{4} = 3{,}2\%$ / kì hạn. Sau 4 năm 6 tháng số kì hạn ông A đã gửi là 18 kì hạn.

Số tiền T ông nhận được là $T = M(1+r)^n = 300(1+3{,}2\%)^{18} = 3 \cdot 10^2(1{,}032)^{18}$ (triệu đồng).

Chọn phương án (C)

Câu 10. Đầu năm 2018, ông A đầu từ 500 triệu vốn vào kinh doanh. Cứ sau mỗi năm, số tiền của ông tăng thêm 15% so với năm trước. Hỏi đến năm nào dưới đây là năm đầu tiên ông A có tổng số tiền lớn hơn 1 tỷ đồng?

(A) 2023. (B) 2022. (C) 2024. (D) 2025.

Lời giải.

Tổng số tiền ông A có được sau n năm là $P_n = 500(1 + 0{,}15)^n$ (triệu đồng).
Theo yêu cầu bài toán, ta cần có $P_n > 1000 \Leftrightarrow n > 4{,}95$ nên bắt đầu từ $n = 5$ hay từ năm 2023 thì ông A có tổng số tiền lớn hơn 1 tỷ đồng.

Chọn phương án A

Câu 11. Cho biết sự tăng trưởng dân số được tính theo công thức tăng trưởng liên tục $S = A \cdot \mathrm{e}^{Nr}$, trong đó A là dân số tại thời điểm mốc, S là số dân sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Năm 2013 dân số thế giới vào khoảng 7.095 triệu người. Biết rằng tỉ lệ tăng dân số thế giới hàng năm là $1,32\%$, nếu tỉ lệ tăng dân số không thay đổi thì đến năm 2020 dân số thế giới gần nhất với giá trị nào sau đây?

A 7.879 triệu người. B 7.680 triệu người. C 7.782 triệu người. D 7.777 triệu người.

Lời giải.

Áp dụng công thức $S = A \cdot \mathrm{e}^{Nr}$ với $A = 7.095$, $N = 7$; $r = 0.0132$.

Ta có $S = 7.095 \cdot \mathrm{e}^{7 \cdot 0{,}0132} \approx 7.782$ triệu người.

Chọn phương án C

Câu 12. Sự tăng dân số ước tính theo công thức $P_n = P_0 \mathrm{e}^{nr}$, trong đó P_0 là dân số của năm lấy làm mốc tính, P_n là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78685800 và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%. Hỏi cứ tăng dân số với tỉ lệ như trên thì đến năm nào dân số nước ta đạt mức 100 triệu người?

A 2018. B 2017. C 2016. D 2015.

Lời giải.

$P_n = P_0 \mathrm{e}^{nr} \Rightarrow n = \dfrac{1}{r} \ln \dfrac{P_n}{P_0} = \dfrac{1}{0{,}017} \ln \dfrac{100000000}{7865800} \approx 14.$

Vậy đến năm 2015 thì dân số nước ta đạt mức 100 triệu người.

Chọn phương án D

Câu 13. Một người gửi số tiền 2 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $0,65\%$/tháng. Biết rằng nếu người đó không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Số tiền người đó lãnh được sau hai năm, nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền ra và lãi suất không đổi là bao nhiêu?

A $(2,0065)^{24}$ triệu đồng. B $2 \cdot (2,0065)^{24}$ triệu đồng.
C $(1,0065)^{24}$ triệu đồng. D $2 \cdot (1,0065)^{24}$ triệu đồng.

Lời giải.

Số tiền lĩnh sau 2 năm (24 tháng) là $2 \cdot 10^6 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}65}{100}\right)^{24} = 2 \cdot (2{,}0065)^{24}$ triệu đồng.

Chọn phương án D

Câu 14. Anh Việt muốn mua một ngôi nhà trị giá 500 triệu đồng sau 3 năm nữa. Vậy ngay từ bây giờ Việt phải gửi tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép là bao nhiêu tiền để có đủ tiền mua nhà, biết rằng lãi suất hàng năm vẫn không đổi là 8% một năm và lãi suất được tính theo kỳ hạn một năm? (kết quả làm tròn đến hàng triệu)

A 397 triệu đồng. B 396 triệu đồng. C 395 triệu đồng. D 394 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi A (triệu đồng) là số tiền mà anh Việt cần gởi theo yêu cầu bài toán.

Áp dụng công thức tính lãi kép ta có : $500 = A \cdot (1 + 8\%)^3 \Rightarrow A = 396,916 \approx 397$ (triệu đồng).

Chọn phương án A

Câu 15. Một người gửi tiền tiết kiệm với lãi suất 7,5% một năm và lãi suất hằng năm được nhập vào vốn. Hỏi sau bao nhiêu năm người đó thu được cả vốn lẫn lãi gấp đôi số tiền ban đầu?

A 7 năm. **B** 9 năm. **C** 10 năm. **D** 8 năm.

Lời giải.

Gọi số tiền ban đầu là A.

Ta có sau n năm thì cả vốn lẫn lời là $A \cdot (1 + 0,075)^n$.

Theo đề: $A \cdot (1 + 0,075)^n = 2A \Leftrightarrow n = \log_{1,075} 2 = 9,58$

Chọn phương án C

Câu 16. Bà A gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép (đến kỳ hạn mà người gửi không rút lãi ra thì tiền lãi được tính vào vốn của kỳ tiếp theo) với lãi suất 7%/năm. Hỏi sau 2 năm bà A thu được lãi là bao nhiêu? (Giả sử lãi suất không thay đổi).

A 20 triệu đồng. **B** 14,50 triệu đồng. **C** 14,49 triệu đồng. **D** 15 triệu đồng.

Lời giải.

Tiền lãi của kỳ thứ nhất (hết năm đầu tiên) là: $100 \cdot 7\% = 7$ triệu đồng.

Vốn của kỳ thứ hai là: $100 + 7 = 107$ triệu.

Tiền lãi của kỳ thứ hai (hết hai năm) là: $107 \cdot 7\% = 7{,}49$ triệu đồng.

Vậy sau hai năm bà A thu được tiền lãi là: $7 + 7{,}49 = 14,49$ triệu đồng.

Chọn phương án C

Câu 17. Một người đem 100000000 (đồng) đi gửi tiết kiệm với lãi suất 7%/tháng, sau mỗi tháng số tiền lãi được nhập vào vốn. Hỏi sau khi hết kì hạn 6 tháng, người đó được lĩnh về bao nhiêu tiền?

A $10^8 \cdot (1{,}07)^6$ (đồng). **B** $10^8 \cdot (1{,}07)^7$ (đồng). **C** $10^8 \cdot (0{,}07)^6$ (đồng). **D** $10^8 \cdot (1{,}07)^5$ (đồng).

Lời giải.

Số tiền người này nhận được sau 6 tháng là

$$100000000 \cdot \left(1 + \frac{7}{100}\right)^6 = 10^8 \cdot (1{,}07)^6 \text{ đồng.}$$

Chọn phương án A

Câu 18. Một khu rừng ban đầu có trữ lượng gỗ là $4 \cdot 10^5$ mét khối gỗ. Gọi tốc độ sinh trưởng mỗi năm của khu rừng đó là $a\%$. Biết sau 5 năm thì sản lượng gỗ là xấp xỉ $4{,}8666 \cdot 10^5$ mét khối. Giá trị của a xấp xỉ

A 3,5%. **B** 4%. **C** 4,5%. **D** 5%.

Lời giải.

Trữ lượng gỗ sau một năm của khu rừng là: $N = 4 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^5 \cdot a\% = 4 \cdot 10^5(1 + a\%)$.

Trữ lượng gỗ sau năm thứ hai của khu rừng là: $N = 4 \cdot 10^5(1 + a\%)^2$

⋮

Trữ lượng gỗ sau 5 năm của khu rừng: $N = 4 \cdot 10^5(1 + a\%)^5 = 4{,}8666 \cdot 10^5 \Rightarrow a \approx 4\%$.

Chọn phương án (B)

Câu 19. Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép, kỳ hạn 1 năm với lãi suất 7% một năm. Hỏi sau bao nhiêu năm người gửi sẽ có ít nhất 200 triệu đồng từ số tiền gửi ban đầu (giả sử trong suốt quá trình gửi lãi suất không thay đổi và người gửi không rút tiền)?

(A) 11 năm. (B) 10 năm. (C) 12 năm. (D) 9 năm.

Lời giải.

Đặt $r = 0{,}07$. Số tiền người đó nhận được sau n năm gửi với hình thức lãi kép là

$$A_n = A_0 \cdot (1 + r)^n.$$

với A_0 là số tiền gửi ban đầu. Từ giả thiết ta có

$$n > \log_{1+r} 2 \approx 10{,}24.$$

Vậy sau 11 năm người gửi có ít nhất 200 triệu đồng.

Chọn phương án (A)

Câu 20. Một người gửi 200 triệu đồng vào một ngân hàng với lại suất $0,6\%$/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau đúng 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

(A) 207 309 000 đồng. (B) 207 307 000 đồng. (C) 207 310 000 đồng. (D) 207 300 000 đồng.

Lời giải.

Theo công thức lãi kép $A = a\,(1 + r)^n = 200\,000\,000\,(1 + 0.6\%)^6 = 207\,308\,868$ đồng.

Chọn phương án (A)

Câu 21. Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng theo thể thức lãi kép, với lãi suất $1,85\%$ trên một quý. Hỏi sau tối thiểu bao nhiêu quý, người đó nhận được ít nhất 72 triệu đồng (cả vốn ban đầu và lãi), nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền và lãi suất không thay đổi?

(A) 20 quý. (B) 19 quý. (C) 14 quý. (D) 15 quý.

Lời giải.

Theo công thức tính lãi kép ngân hàng ta có: $S = A(1 + r)^n$.

Biết $A = 50$ triệu đồng, $r = 1,85\%$.

Theo yêu cầu bài toán: $S = 50\,(1 + 1,85\%)^n \geqslant 72 \Rightarrow (1 + 1,85\%)^n \geqslant \dfrac{72}{50}$.

$\Rightarrow n \geqslant \log_{1+1{,}85\%} \dfrac{72}{50} \Rightarrow n \geqslant 19,89$.

Để nhận được ít nhất 72 triệu đồng thì tối thiểu phải gửi 20 quý.

Chọn phương án (A)

Câu 22. Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 8,4%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau đúng 6 năm, người đó lĩnh được số tiền (*cả vốn lẫn lãi*) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong thời gian đó người này không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

(A) 166 846 000 đồng. (B) 164 246 000 đồng. (C) 160 246 000 đồng. (D) 162 246 000 đồng.

Lời giải.

Tổng số tiền thu được sau 6 năm gửi là $S = 100000000 \cdot (1 + 8{,}4\%)^6 \approx 162246000$ đồng.

Chọn phương án (D)

Câu 23. Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78685800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A \cdot \mathrm{e}^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người?

(A) 2022. (B) 2020. (C) 2025. (D) 2026.

Lời giải.

Ta có $S = A \cdot \mathrm{e}^{Nr} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{Nr} = \dfrac{S}{A} \Leftrightarrow N = \dfrac{1}{r} \ln \dfrac{S}{A} \approx 25$.

Vậy dân số nước ta ở mức 120 triệu người là năm 2026.

Chọn phương án (D)

Câu 24. Một người gửi ngân hàng 50 triệu đồng với lãi suất 4% một tháng, sau mỗi tháng tiền lãi được nhập vào vốn. Hỏi sau một năm người đó rút tiền thì tổng số tiền nhận được là bao nhiêu?

(A) $50 \cdot (1{,}004)^{12}$ (triệu đồng). (B) $50 \cdot (1 + 12 \cdot 0{,}04)^{12}$ (triệu đồng).
(C) $50 \cdot (1 + 0{,}04)^{12}$ (triệu đồng). (D) $50 \cdot 1{,}004$ (triệu đồng).

Lời giải.

Theo công thức lãi kép ta được tổng số tiền nhận được là $T_{12} = 50 \cdot (1 + 0{,}04)^{12}$ (triệu đồng).

Chọn phương án (C)

Câu 25. Bà Mai gửi tiết kiệm ngân hàng Vietcombank số tiền 50 triệu đồng với lãi suất $0,79\%$ một tháng, theo phương thức lãi kép. Tính số tiền cả vốn lẫn lãi bà Mai nhận được sau 2 năm ? (làm tròn đến hàng nghìn)

(A) 60393000. (B) 50793000. (C) 50790000. (D) 59480000.

Lời giải.

Đây là bài toán lãi kép với chu kỳ là một tháng, ta áp dụng công thức $\mathrm{P}_n = P(1 + r)^n$ với $P = 50$ triệu đồng, $r = 0,79\% = 0,0079$ và $n = 2 \cdot 12 = 24$ tháng.

$\mathrm{P}_{24} = 50 \cdot (1 + 0,0079)^{24} \approx 60,393$ triệu đồng.

Chọn phương án (A)

Câu 26. Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78.685.800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A \cdot \mathrm{e}^{Nr}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 150 triệu người?

(A) 2042. (B) 2030. (C) 2035. (D) 2038.

Lời giải.

Theo giả thiết ta được $150.000.000 = 78.685.800 \cdot e^{0,017N} \Leftrightarrow N \approx 37.95$ (năm)

Tức là đến năm 2038 dân số nước ta ở mức 150 triệu người.

Chọn phương án (D)

Câu 27. Một người lần đầu gửi ngân hàng 200 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 4%/quý và lãi từng quý sẽ được nhập vào vốn. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 150 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó. Hỏi tổng số tiền người đó nhận được sau hai năm kể từ khi gửi thêm tiền lần hai là bao nhiêu?

(A) 480,05 triệu đồng. (B) 463,51 triệu đồng. (C) 501,33 triệu đồng. (D) 521,39 triệu đồng.

Lời giải.

Số tiền nhận được sau 6 tháng đầu

$$200(1+0{,}04)^2 = 216{,}32(\text{triệu đồng}).$$

Số tiền nhận được sau 2 năm kể từ khi gửi thêm

$$(216{,}32+150)(1+0{,}04)^8 \approx 501{,}33(\text{triệu đồng}).$$

Chọn phương án (C)

Câu 28. Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = s(0)\cdot 2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 20 triệu con?

(A) 48 phút. (B) 7 phút. (C) 8 phút. (D) 12 phút.

Lời giải.

Áp dụng công thức $s(t) = s(0)\cdot 2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút.

Ta có: $625000 = s(0)\cdot 2^3 \Rightarrow s(0) = 78125$.

Khi đó, theo đề bài: $20000000 = 78125\cdot 2^t \Rightarrow 2^t = 256 = 2^8 \Rightarrow t = 8$.

Vậy sau 8 phút kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 20 triệu con.

Chọn phương án (C)

Câu 29. Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất $8,4\%$ /năm và tiền lãi hàng năm được nhập vào tiền vốn. Tính số năm tối thiểu người đó cần gửi để số tiền thu được nhiều hơn 2 lần số tiền gửi ban đầu.

(A) 10 năm. (B) 9 năm. (C) 8 năm. (D) 11 năm.

Lời giải.

Gọi số tiền gửi ban đầu là A và số năm tối thiểu thỏa yêu cầu bài toán là n.

Ta có $A\left(1+8,4\%\right)^n = 2A \Leftrightarrow 1,084^n = 2 \Leftrightarrow n = \log_{1,084} 2 = 8,59$.

Vậy số năm tối thiểu là 9 năm.

Chọn phương án (B)

Câu 30. Bà Mai gửi tiết kiệm ngân hàng Vietcombank số tiền 50 triệu đồng với lãi suất $0,79\%$ một tháng, theo phương thức lãi kép. Tính số tiền cả vốn lẫn lãi bà Mai nhận được sau 2 năm? (làm tròn đến hàng nghìn).

(A) 60393000. (B) 50793000. (C) 50790000. (D) 59480000.

Lời giải.

Đây là bài toán lãi kép với chu kỳ là một tháng, ta áp dụng công thức $A(1+r)^n$ với $A = 50$ triệu đồng, $r\% = 0,79\%$ và $n = 2 \cdot 12 = 24$ tháng.

$50 \cdot (1 + 0{,}79\%)^2 4 \approx 60.393.290$.

Chọn phương án (A)

MỨC ĐỘ 3

Câu 31. Tỉ lệ tăng dân số ở Việt Nam được duy trì ở mức 1,05%. Theo số liệu của Tổng cục thống kê, dân số Việt Nam năm 2014 có 90.728.900 người. Với tốc độ tăng dân số như thế đến năm 2030 thì dân số của Việt Nam là bao nhiêu?

(A) 105.971.355 người. (B) 106.118.331 người. (C) 107.232.573 người. (D) 107.232.574 người.

Lời giải.

Phương pháp:

Công thức lãi kép, không kỳ hạn: $A_n = M(1 + r\%)^n$.

Với: A_n là số tiền nhận được sau tháng thứ n,

M là số tiền gửi ban đầu,

n là thời gian gửi tiền (tháng),

r là lãi suất định kì (%).

Cách giải:

Từ năm 2014 đến năm 2030 cách nhau số năm là: $2030 - 2014 = 16$ năm.

Dân số Việt Nam năm 2030: $A_{16} = 90728900(1 + 1{,}05\%)^{16} \approx 107232574$ (người).

Chọn phương án (D)

Câu 32. Một sinh viên A mua máy tính xách tay theo hình thức trả góp với giá tiền 20 triệu đồng, mức lãi suất $1,2\%$/tháng trong năm đầu tiên, mỗi tháng anh A phải trả 800 ngàn đồng, cả gốc và lãi. Sau một năm lãi suất tăng lên là $1,5\%$/tháng và anh A phải trả 1 triệu đồng cả gốc và lãi mỗi tháng (trừ tháng cuối). Hỏi sau tối đa bao nhiêu tháng anh A trả hết nợ (tháng cuối trả không quá 500 ngàn đồng)

(A) 28 tháng. (B) 26 tháng. (C) 25 tháng. (D) 27 tháng.

Lời giải.

Phương pháp:

Giả sử anh A nợ ngân hàng a (ngàn đồng), mỗi tháng anh A gửi vào ngân hàng x ngàn đồng, lãi suất ngân hàng là $r(\%)$/tháng. Số tiền anh A còn nợ ngân hàng :

- Gọi P_n là số tiền còn nợ lại sau tháng thứ n.

- ***Sau tháng thứ nhất*** số tiền gốc và lãi là: $a + ar = a(1 + r) = ad$ với $d = 1 + r$.
  Trả x đồng thì số tiền còn lại ***sau tháng thứ nhất*** là: $P_1 = ad - x = ad - x.\dfrac{d-1}{d-1}$.

- ***Sau tháng thứ hai*** số tiền gốc và lãi là: $ad - x + (ad - x)r = (ad - x)(1 + r) = (ad - x)d$.
  Trả x đồng thì số tiền còn lại ***sau tháng thứ 2*** là:
  $P_2 = (ad - x)d - x = ad^2 - xd - x = ad^2 - x(d + 1) = ad^2 - x.\dfrac{d^2-1}{d-1}$.
  Trả x đồng thì số tiền còn lại ***sau tháng thứ 3*** là:
  $P_3 = [ad^2 - x(d + 1)]d - x = ad^3 - xd^2 - xd - x = ad^3 - x(d^2 + d + 1) = ad^3 - x.\dfrac{d^3-1}{d-1}$.
  ....

- Số tiền còn lại ***sau tháng thứ*** n là
  $P_n = ad^n - x.\dfrac{d^n-1}{d-1} \Leftrightarrow P_n = a(1 + r)^n - x.\dfrac{(1+r)^n-1}{r}$.
  Với $d = 1 + r$.

- Do sau tháng thứ n người vay tiền đã trả hết số tiền đã vay ta có
  $P_n = 0 \Leftrightarrow ad^n - x.\dfrac{d^n-1}{d-1} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{a(1+r)^n.r}{(1+r)^n-1} \Leftrightarrow n = \log_{1+r}\left(\dfrac{x}{x-ar}\right)$.

Cách giải:

Số tiền sinh viên A còn nợ sau 1 năm (12 tháng) đầu là:

$P_{12} = 20 \cdot 10^6 \cdot (1 + 1,2\%)^{12} - 800 \cdot 10^3 \cdot \dfrac{(1+1,2\%)^{12}-1}{1,2\%} \approx 12.818.000$ (đồng).

Gọi n là số tháng (tính từ năm thứ hai) mà sinh viên A trả được hết nợ, với số tiền nợ gốc $a = 12.818.000$ đồng, ta có:

$$\begin{aligned}P_n = 0 &\Leftrightarrow a(1+r)^n - x.\frac{(1+r)^n-1}{r} = 0\\ &\Leftrightarrow n = \log_{1+r}\left(\frac{x}{x-ar}\right)\\ &\Leftrightarrow n = \log_{1+1,5\%}\left(\frac{10^6}{10^6 - 12818 \cdot 10^3 \cdot 1,5\%}\right) \approx 14{,}3.\end{aligned}$$

Vậy, số tháng để sinh viên A trả hết nợ là: $12 + 15 = 27$ (tháng).

Chọn phương án D

Câu 33. Do thời tiết ngày càng khắc nghiệt và nhà cách xa trường học, nên một thầy giáo muốn đúng 5 năm nữa có 500 triệu đồng để mua ô tô đi làm. Để đạt nguyện vọng, thầy có ý định mỗi tháng dành ra một số tiền cố định gửi vào ngân hàng (hình thức lãi kép) với lãi suất 0, 5%/tháng. Hỏi số tiền ít nhất cần dành ra mỗi tháng để gửi tiết kiệm là bao nhiêu (chọn đáp án gần nhất với số tiền thực)?

A 7.632.000. B 6.820.000. C 7.540.000. D 7.131.000.

Lời giải.

Gọi số tiền ít nhất mà thầy giáo cần dành ra mỗi tháng để gửi tiền tiết kiệm là x (đồng).

Số tiền tiết kiệm gửi vào ngân hàng sau 60 tháng là

$T_{60} = x\left(1{,}005^1 + 1{,}005^2 + \cdots + 1{,}005^{60}\right) = x \cdot 1{,}005 \cdot \dfrac{1{,}005^{60} - 1}{0{,}005}$

Theo đề bài ta có: $x \cdot 1{,}005 \cdot \dfrac{1{,}005^{60} - 1}{0{,}005} = 5 \cdot 10^8 \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \cdot 10^8 \cdot 0{,}005}{1{,}005\left(1{,}005^{60} - 1\right)} = 7130747$.

Chọn phương án D

Câu 34. Một người gửi 100 triệu đồng vào tài khoản tiết kiệm ngân hàng với lãi suất $0,6\%$ / tháng, cứ sau mỗi tháng người đó rút ra 500 nghìn đồng. Hỏi sau đúng 36 lần rút tiền, số tiền còn lại trong tài khoản của người đó gần nhất với phương án nào dưới đây? (biết rằng lãi suất không thay đổi và tiền lãi mỗi tháng tính theo số tiền có thực tế trong tài khoản của tháng đó).

A 104 triệu đồng. **B** 106 triệu đồng. **C** 102 triệu đồng. **D** 108 triệu đồng.

Lời giải.

Số tiền còn lại trong tài khoản sau tháng thứ 1 là $100.1,006 - 0{,}5$ (triệu đồng).

Số tiền còn lại trong tài khoản sau tháng thứ 2 là

$(100 \cdot 1{,}006 - 0{,}5) \cdot 1{,}006 - 0,5 = 100 \cdot (1{,}006)^2 - 0{,}5\,(1 + 1{,}006)$ (triệu đồng).

Số tiền còn lại trong tài khoản sau tháng thứ 3 là

$100 \cdot (1{,}006)^3 - 0{,}5\left[1 + 1{,}006 + (1{,}006)^2\right]$ (triệu đồng).

Cứ như vậy, số tiền còn lại trong tài khoản sau tháng thứ 36 là

$100 \cdot (1{,}006)^{36} - 0,5 \cdot \left[1 + 1{,}006 + (1{,}006)^2 + \cdots + (1{,}006)^{35}\right] = 100 \cdot (1{,}006)^{36} - 0,5 \cdot \dfrac{1 - (1{,}006)^{36}}{1 - 1{,}006}$

$= 104{,}0050268$ (triệu đồng).

Chọn phương án A

Câu 35. Chị Lan có 400 triệu đồng mang đi gửi tiết kiệm ở hai loại kì hạn khác nhau đều theo thể thức lãi kép. Chị gửi 200 triệu đồng theo kì hạn quý với lãi suất 2,1% một quý, 200 triệu đồng còn lại chị gửi theo kì hạn tháng với lãi suất 0,73% một tháng. Sau khi gửi được đúng 1 năm, chị rút ra một nửa số tiền ở loại kì hạn theo quý và gửi vào loại kì hạn theo tháng. Hỏi sau đúng 2 năm kể từ khi gửi tiền lần đầu, chị Lan thu được tất cả bao nhiêu tiền lãi (làm tròn đến hàng nghìn)?

A 70656000 đồng. **B** 65393000 đồng. **C** 79760000 đồng. **D** 74813000 đồng.

Lời giải.

Số tiền chị Loan thu được ở năm thứ nhất là

+ Gửi kỳ hạn theo quý: $200000000(1 + r_1)^4 = A$.

+ Gửi kỳ hạn theo tháng: $200000000(1 + r_2)^{12} = B$.

Số tiền chị Loan thu được ở sau năm thứ hai là

+ Gửi kỳ hạn theo quý: $\dfrac{A}{2}(1 + r_1)^4$.

+ Gửi kỳ hạn theo tháng: $\left(\dfrac{A}{2} + B\right)(1 + r_2)^{12}$.

Số tiền lãi chị Loan thu được là $\dfrac{A}{2}(1 + r_1)^4 + \left(\dfrac{A}{2} + B\right)(1 + r_2)^{12} - 400000000 = 74813000$ (đồng).

Chọn phương án D

Câu 36. Để đầu tư dự án trồng rau sạch theo công nghệ mới bác Năm đã làm hợp đồng xin vay vốn ngân hàng với số tiền 100 triệu đồng với lãi xuất $x\%$ trên một năm. Điều kiện kèm theo của hợp đồng là số tiền lãi tháng trước sẽ được tính làm vốn để sinh lãi cho tháng sau. Sau hai năm thành công với dự án rau sạch của mình, bác Năm đã thanh toán hợp đồng ngân hàng số tiền làm tròn là 129.512.000 đồng. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $x = 13$. (B) $x = 15$. (C) $x = 12$. (D) $x = 14$.

Lời giải.

Lãi suất mỗi tháng là $\dfrac{x}{12}\%$. Theo công thức lãi kép, ta có

$$100 \cdot \left(1 + \frac{x}{12}\%\right)^{24} = 129{,}512 \Rightarrow \frac{x}{12}\% = \sqrt[24]{\frac{129{,}100}{100}} - 1 \approx 0{,}0108.$$

Vậy $x \approx 13$.

Chọn phương án (D)

Câu 37. Dân số thế giới cuối năm 2010, ước tính khoảng 7 tỉ người. Hỏi với mức tăng trưởng $1,5\%$ mỗi năm thì sau ít nhất bao nhiêu năm nữa dân số thế giới sẽ lên đến 10 tỉ người?

(A) 2. (B) 28. (C) 23. (D) 24.

Lời giải.

Áp dụng công thức: $S_n = A(1+r)^n$

Suy ra: $n = \log_{(1+r)}\left(\dfrac{S_n}{A}\right)$

Trong đó: $A = 7; S_n = 10; r = 1,5\% = \dfrac{1,5}{100}$.

Ta được $n = 23,95622454$.

Chọn phương án (D)

Câu 38. Một người gửi tiết kiệm ngân hàng, mỗi tháng gửi 1 triệu đồng, với lãi suất kép 1% trên tháng. Sau hai năm 3 tháng (tháng thứ 28) người đó có công việc nên đã rút toàn bộ gốc và lãi về. Hỏi người đó được rút về bao nhiêu tiền?

(A) $100 \cdot [(1{,}01)^{27} - 1]$ triệu đồng. (B) $101 \cdot [(1{,}01)^{26} - 1]$ triệu đồng.

(C) $101 \cdot [(1{,}01)^{27} - 1]$ triệu đồng. (D) $100 \cdot [(1{,}01)6 - 1]$ triệu đồng.

Lời giải.

Gọi a là số tiền cứ đầu mỗi tháng gửi tiết kiệm ngân hàng, r là lãi suất kép trên tháng.

T_n là số tiền thu được cả gốc lẫn lãi sau n tháng.

Cuối tháng thứ 1: $a(1+r)$.

Cuối tháng thứ 2: $a(1+r) + a(1+r)^2$.

Cuối tháng thứ 3: $a(1+r) + a(1+r)^2 + a(1+r)^3$.

...

Cuối tháng thứ n: $T_n = a(1+r) + a(1+r)^2 + a(1+r)^3 + \cdots + a(1+r)^n$.

$\Rightarrow T_n = a[(1+r) + (1+r)^2 + \cdots + (1+r)^n] = a(1+r)\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$.

$\Rightarrow T_n = \dfrac{a}{r}(1+r)[(1+r)^n - 1]$.

Áp dụng công thức $T_n = \dfrac{a}{r}(1+r)[(1+r)^n - 1] = \dfrac{1}{0{,}01}(1{,}01)[(1{,}01)^{27} - 1] = 101[(1{,}01)^{27} - 1]$.

Chọn phương án C

Câu 39. Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 0,5% tháng và ông ta rút đều đặn mỗi tháng một triệu đồng kể từ sau ngày gửi một tháng cho đến khi hết tiền (tháng cuối cùng có thể không còn đủ một triệu đồng). Hỏi ông ta rút hết tiền sau bao nhiêu tháng?

A 139. B 140. C 100. D 138.

Lời giải.

Gọi số tiền lúc đầu người đó gửi là A triệu đồng, lãi suất gửi ngân hàng một tháng là r, S_n là số tiền còn lại sau n tháng.

Sau 1 tháng kể từ ngày gửi tiền, số tiền còn lại của người đó là: $S_1 = A(1+r) - 1$.

Sau 2 tháng kể từ ngày gửi tiền, số tiền còn lại của người đó là:

$$S_2 = [A(1+r)-1](1+r) - 1 = A(1+r)^2 - (1+r) - 1$$

Sau n tháng kể từ ngày gửi tiền, số tiền còn lại của người đó là:

$$S_n = A(1+r)^n - (1+r)^{n-1} - (1+r)^{n-2} - \cdots - (1+r) - 1 = A(1+r)^n - \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Giả sử sau n tháng người đó rút hết tiền. Khi đó ta có

$$S_n = 0 \Leftrightarrow A(1+r)^n - \frac{(1+r)^n-1}{r} = 0 \Leftrightarrow (1+r)^n(Ar-1) + 1 = 0 \quad (15)$$

$$\Leftrightarrow n = \log_{1+r}\frac{1}{1-Ar} \Leftrightarrow n = -\log_{1+r}(1-Ar). \quad (16)$$

Với $A = 100$ triệu đồng, $r = 0{,}005$ ta có $n \approx 138{,}9757216$.

Chọn phương án A

Câu 40. Một người vay ngân hàng số tiền 50 triệu đồng, mỗi tháng trả ngân hàng số tiền 4 triệu đồng và phải trả lãi suất cho số tiền còn nợ là 1,1% một tháng theo hình thức lãi kép. Giả sử sau n tháng người đó trả hết nợ. Khi đó n gần với số nào dưới đây?

A 13. B 15. C 16. D 14.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
& P(1+r)^n = \frac{M}{r}\left[(1+r)^n - 1\right] \\
\Leftrightarrow\ & 50(1+1{,}1\%)^n = \frac{4}{1{,}1\%}\left[(1+1{,}1\%)^n - 1\right] \\
\Leftrightarrow\ & 50(1+1{,}1\%)^n = \frac{4}{1{,}1\%}(1+1{,}1\%)^n - \frac{4}{1{,}1\%} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{4}{1{,}1\%} = \frac{3450}{11}(1+1{,}1\%)^n \\
\Leftrightarrow\ & (1+1{,}1\%)^n = \frac{80}{69} \Rightarrow n = \log_{1+1{,}106}\frac{80}{69} \approx 13{,}52.
\end{aligned}$$

Chọn phương án D

Câu 41. Một người gửi gói tiết kiệm linh hoạt của ngân hàng cho con với số tiền là 500000000 VNĐ, lãi suất 7%/năm. Biết rằng người ấy không lấy lãi hàng năm theo định kỳ sổ tiết kiệm. Hỏi sau 18 năm, số tiền người ấy nhận về là bao nhiêu? (Biết rằng, theo định kì rút tiền hằng năm, nếu không lấy lãi thì số tiền sẽ được nhập vào thành tiền gốc và sổ tiết kiệm sẽ chuyển thành kì hạn 1 năm tiếp theo).

(A) 1.689.966.000 VNĐ. (B) 2.639.636.000 VNĐ. (C) 3.689.966.000 VNĐ. (D) 1.669.266.000 VNĐ.

Lời giải.

Áp dụng công thức lãi kép ta có số tiền nhận được sau 18 năm gửi là

$500000000(1+0,07)^{18} = 1.689.966.000$ (VNĐ).

Chọn phương án (A)

Câu 42. Vào 4 năm trước, chị Thương có gửi vào ngân hàng một số tiền là 20 triệu đồng theo hình thức lãi kép có kỳ hạn. Số tiền hiện tại chị nhận được là 29,186792 triệu đồng. Biết rằng, lãi suất ngân hàng tại thời điểm mà chị Thương gửi tiền là 0,8%/tháng. Hỏi kỳ hạn k mà chị Thương đã chọn là bao nhiêu tháng?

(A) $k = 3$ tháng. (B) $k = 5$ tháng. (C) $k = 4$ tháng. (D) $k = 6$ tháng.

Lời giải.

Đặt $a = 0{,}8\% = 0{,}008,\ N_0 = 20\,\text{triệu}, N = 29{,}186792\,\text{triệu}$.

Đổi 4 năm $= 48$ tháng.

Chị Thương gửi kỳ hạn k tháng nên lãi suất mỗi kỳ là ka, số chu kì tính lãi trong 48 tháng là $\dfrac{48}{k}$.

Áp dụng công thức tính lãi kép, số tiền chị Thương nhận được cả gốc và lãi là $N = N_0(1+ak)^{\frac{48}{k}}$.

Thay số và thử $k = 4$, ta được đẳng thức đúng.

Chọn phương án (C)

Câu 43. Lãi suất gửi tiền tiết kiệm của các ngân hàng trong thời gian qua liên tục thay đổi. Bác Mạnh gửi vào một ngân hàng số tiền 5 triệu đồng với lãi suất 0,7 %/tháng. Sau sáu tháng gửi tiền, lãi suất tăng lên 0,9 %/tháng. Đến tháng thứ 10, sau khi gửi tiền, lãi suất giảm xuống 0,6 %/tháng và giữ ổn định. Biết rằng nếu bác Mạnh không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (ta gọi đó là lãi kép). Sau một năm gửi tiền, bác Mạnh rút được số tiền là bao nhiêu? (biết trong khoảng thời gian này, bác Mạnh không rút tiền ra)

(A) 5436521,164 đồng. (B) 5452711,729 đồng. (C) 5436566,169 đồng. (D) 5452733,453 đồng.

Lời giải.

Gọi A là số tiền gửi ban đầu; r % là lãi suất trên một kỳ gửi; N là số kỳ gửi và C là số tiền thu được cả gốc và lãi sau N kỳ. Khi đó ta có công thức tính: $C = A\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^N$. Áp dụng công thức này vào bài toán, ta có sau một năm gửi tiền, bác Mạnh rút được số tiền (đồng) là:

$$C = 5\cdot 10^6\cdot(1+0{,}007)^6\cdot(1+0{,}009)^3\cdot(1+0{,}006)^3 = 5452733{,}453.$$

Chọn phương án (D)

Câu 44. Tính đến đầu năm 2011, dân số toàn thành phố A đạt xấp xỉ 905.300 người. Mỗi năm dân số thành phố tăng thêm 1,37%. Để thành phố A thực hiện tốt chủ trương 100% trẻ em đúng độ tuổi đều vào lớp 1 thì đến năm học 2024 – 2025 số phòng học cần chuẩn bị cho học sinh lớp 1 (mỗi phòng 35 học sinh) gần nhất với số nào sau đây; biết rằng sự di cư đến, đi khỏi thành phố và số trẻ tử vong trước 6 tuổi đều không đáng kể, ngoài ra trong năm sinh của lứa học sinh lớp 1 đó toàn thành phố có 2400 người chết?

Ⓐ 322. Ⓑ 321. Ⓒ 459. Ⓓ 458.

Lời giải.

Từ năm 2011 đến năm 2018 (năm có học sinh vào lớp 1 của năm học 2024 – 2025) dân số tăng là $905300(1+0{,}0137)^8 - 905300(1+0{,}0137)^7 + 2400 \approx 16042.0367$ người.

Đến năm học 2024 – 2025 số phòng học cần chuẩn bị cho học sinh lớp 1 là

$\dfrac{16042.0367}{35} \approx 458$ phòng.

Chọn phương án D

Câu 45. Ông Tú dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất $6,5\%$ một năm. Biết rằng, cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Tính số tiền tối thiểu x (triệu đồng, $x \in \mathbb{N}$) ông Tú gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua một chiếc xe gắn máy giá trị 30 triệu đồng.

Ⓐ $x = 145$ triệu đồng. Ⓑ $x = 154$ triệu đồng. Ⓒ $x = 150$ triệu đồng. Ⓓ $x = 140$ triệu đồng.

Lời giải.

Ta có công thức lãi kép $T = A\,(1+r)^n$.

Tiền lãi ông Tú có sau 3 năm sẽ là tiền gốc cộng lãi trừ đi số tiền gốc ban đầu.

Ta có $A\,(1+6,5\%)^3 - A \geq 30 \Leftrightarrow A \geq \dfrac{30}{(1+6,5\%)^3 - 1} \approx 144,26$ triệu.

Chọn phương án A

Câu 46. Sự tăng trưởng của một loài vi khuẩn tuân theo công thức $N = A.e^{rt}$ trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng $(r > 0)$ và t là thời gian tăng trưởng. Biết số lượng vi khuẩn ban đầu có 250 con và sau 12 giờ là 1500 con. Hỏi sau bao lâu thì số lượng vi khuẩn tăng gấp 216 lần số lượng vi khuẩn ban đầu?

Ⓐ 66 giờ. Ⓑ 48 giờ. Ⓒ 36 giờ. Ⓓ 24 giờ.

Lời giải.

Theo công thức ta có $1500 = 250 \cdot e^{12r} \Leftrightarrow e^{12r} = 6 \Leftrightarrow r = \dfrac{1}{12} \cdot \ln 6$.

Khi đó $54000 = 250 \cdot e^{\frac{t}{12}\ln 6} \Leftrightarrow 6^{\frac{t}{12}} = 216 \Leftrightarrow \dfrac{t}{12} = \log_6 216 = 3 \Leftrightarrow t = 36$ giờ.

Chọn phương án C

Câu 47. Một người gửi tiết kiệm số tiền 80 000 000 đồng với lãi suất là $6,9\%$/năm. Biết rằng tiền lãi hàng năm được nhập vào tiền gốc, hỏi sau đúng 5 năm người đó có rút được cả gốc và lãi số tiền gần với con số nào nhất sau đây?

Ⓐ 116 570 000 đồng. Ⓑ 107 667 000 đồng. Ⓒ 105 370 000 đồng. Ⓓ 111 680 000 đồng.

Lời giải.

Số tiền thu được là $8.10^7(1+6,9\%)^5 \approx 111\,680\,000$ đồng.

Chọn phương án D

Câu 48. Ông A vay ngân hàng 96 triệu đồng với lãi suất 1% tháng theo hình thức mỗi tháng trả góp số tiền giống nhau sao cho đúng hai năm thì hết nợ. Hỏi số tiền ông phải trả hàng tháng là bao nhiêu? (làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).

(A) 4,53 triệu đồng. (B) 4,54 triệu đồng. (C) 4,51 triệu đồng. (D) 4,52 triệu đồng.

Lời giải.

Đặt $T = 96$ triệu đồng, $r = 1\%$, số tiền ông A phải trả hàng tháng là m.

Số tiền gốc sau 1 tháng là $T + T \cdot r - m = T(1 + r) - m$.

Số tiền gốc sau 2 tháng là $[T(1 + r) - m] - [T(1 + r) - m]\, x - m = T(1 + r)^2 - m\,[(1 + r) + 1]$.

Số tiền gốc sau 3 tháng là $T(1 + r)^3 - m\left[(1 + r)^2 + (1 + r) + 1\right]$.

Tương tự, số tiền gốc còn lại sau 24 tháng là $T(1 + r)^{24} - m\left[(1 + r)^{23} + \ldots + (1 + r) + 1\right] = 0$ (vì hết nợ).

Do đó $m = \dfrac{T(1 + r)^{24}}{(1 + r)^{23} + \ldots + (1 + r) + 1} = \dfrac{Tr}{1 - \dfrac{1}{(1 + r)}} \backsimeq 4{,}519$ triệu đồng.

Chọn phương án (D)

Câu 49. Ông An gửi tiết kiệm 50 triệu đồng vào ngân hàng với kỳ hạn 3 tháng, lãi suất 8,4%/năm theo hình thức lãi kép. Ông gửi được đúng 3 kỳ hạn thì ngân hàng thay đổi lãi suất, ông gửi tiếp 12 tháng nữa với kỳ hạn như cũ và lãi suất trong thời gian này là 12%/năm thì ông rút tiền về. Số tiền ông An nhận được cả gốc và lãi tính từ lúc gửi tiền ban đầu là bao nhiêu? (làm tròn đến chữ số hàng đơn vị)

(A) 63.545.193 đồng. (B) 100.214.356 đồng. (C) 83.737.371 đồng. (D) 59.895.767 đồng.

Lời giải.

— Lãi suất cho chu kỳ đầu (3 kỳ hạn đầu tiên) là $\dfrac{8{,}4\% \times 3}{12} \approx 2{,}1\%$.

— Lãi suất cho chu kỳ cuối (4 kỳ hạn cuối) là $\dfrac{12\% \times 3}{12} \approx 3\%$.

Vậy số tiền ông thu được là $50 \times (1{,}021)^3 \times (1{,}03)^4 = 59.895.767$ đồng.

Chọn phương án (D)

Câu 50. Ông Bình gửi tổng cộng 320 triệu đồng ở hai ngân hàng X và Y theo phương thức lãi kép. Số tiền thứ nhất gửi ở ngân hàng X với lãi suất 2,1 % một quý, gửi trong 15 tháng. Số tiền còn lại gửi ở ngân hàng Y với lãi suất 0,73 % một tháng trong vòng 9 tháng. Tổng lợi tức ông Bình có được sau khi rút tiền ở hai ngân hàng là 27507768,13 đồng. Hỏi số tiền ông Bình lần lượt gửi ở hai ngân hàng X và Y là bao nhiêu?

(A) 140 triệu đồng và 180 triệu đồng. (B) 200 triệu đồng và 120 triệu đồng.

(C) 180 triệu đồng và 140 triệu đồng. (D) 120 triệu đồng và 200 triệu đồng.

Lời giải.

Đổi 15 tháng = 5 quý. Gọi số tiền gửi trong ngân hàng X là x triệu đồng và trong ngân hàng Y là $320 - x$ triệu đồng. Khi đó tổng lợi tức mà ông nhận được ở hai ngân hàng là

$$x(1+2{,}1\%)^5+(320-x)(1+0{,}73\%)^9-320=27507768{,}13.$$

Giải ra $x=140$ triệu đồng. Vậy số tiền ông Bình lần lượt gửi ở hai ngân hàng X và Y là 140 triệu đồng và 180 triệu đồng.
Chọn phương án A

Câu 51. Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S=A\mathrm{e}^{rt}$, trong đó A là số vi khuẩn ban đầu, r là tỷ lệ tăng trưởng, t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Để số lượng vi khuẩn ban đầu tăng gấp đôi thì thời gian tăng trưởng t gần với kết quả nào sau đây nhất?

(A) 3 giờ 9 phút. (B) 3 giờ 2 phút. (C) 3 giờ 30 phút. (D) 3 giờ 18 phút.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có $300=100\cdot\mathrm{e}^{5r}\Rightarrow r=\dfrac{\ln 3}{5}$.
Khi số vi khuẩn tăng gấp đôi ban đầu, ta có

$$200=100\cdot\mathrm{e}^{t\cdot\frac{\ln 3}{5}}\Rightarrow t\approx 3{,}155.$$

Suy ra $t=3$ giờ 9 phút.
Chọn phương án A

Câu 52. Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép, lãi xuất $r=0{,}5\%$ một tháng (kể từ tháng thứ 2, tiền lãi được tính theo phần trăm tổng tiền có được của tháng trước đó với tiền lãi của tháng trước đó). Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu.

(A) 45 tháng. (B) 46 tháng. (C) 47 tháng. (D) 44 tháng.

Lời giải.

Gọi T_0, r, n, T_n lần lượt là số tiền gốc ban đầu, lãi suất một tháng, số tháng gửi ngân hàng và tổng số tiền có được sau n tháng gửi.
Theo giả thiết $T_0=100$ triệu, $r=0,5\%, T_n\geq 125$.
Ta có: $T_n=T_0(1+r)^n\Rightarrow(1+r)^n=\dfrac{T_n}{T_0}\Leftrightarrow n=\log_{1+r}\dfrac{T_n}{T_0}$
$\Rightarrow n\geq\log_{1+0{,}5\%}\dfrac{125}{100}\approx 44,74.$
Vậy cần ít nhất 45 tháng để người đó có nhiều hơn 125 triệu.
Chọn phương án A

Câu 53. Một người lập kế hoạnh gửi tiết kiệm ngân hàng như sau: Đầu tháng 1 năm 2018, người đó gửi 10 triệu đồng; sau mỗi đầu tháng tiếp theo, người đó gửi số tiền nhiều hơn 10% so với số tiền đã gửi ở tháng liền trước đó. Biết rằng lãi suất ngân hàng không đổi là $0,5\%$ mỗi tháng và được tính theo hình thức lãi kép. Với kế hoạnh như vậy, đến hết tháng 12 năm 2019, số tiền của người đó trong tài khoản tiết kiệm là bao nhiêu (Làm tròn đến hàng nghìn)?

(A) 922.756.000 đồng. (B) 832.765.000 đồng. (C) 918.165.000 đồng. (D) 926.281.000 đồng.

Lời giải.

Với $A=10$ triệu, $a=0,1$, $r=0,005$.
Đầu tháng 2: $A(1+r)+A(1+a)$.

Đầu tháng 3: $A(1+r)^2 + A(1+a)(1+r) + A(1+a)^2$.
Đầu tháng 4: $A(1+r)^3 + A(1+a)(1+r)^2 + A(1+a)^2(1+r) + A(1+a)^3$.
...
Đầu tháng n: $A\left[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2}(1+a) + \cdots + (1+r)(1+a)^{n-2} + (1+a)^{n-1}\right]$.
Hết tháng n: $A\left[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2}(1+a) + \cdots + (1+r)(1+a)^{n-2} + (1+a)^{n-1}\right](1+r)$.
Gọi B là số tiền của người đó trong tài khoản tiết kiệm đến hết tháng 12 năm 2019.
Khi đó $n = 24$.
Ta có $B = A \cdot \dfrac{(1+a)^n - (1+r)^n}{a-r}(1+r) = 922.756.396,2$.
Chọn phương án A

Câu 54. Một người gửi 200 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,4%/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi được nhập vào tiền vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau đó đúng 6 tháng người đó được lĩnh số tiền (cả vốn lẫn lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây biết trong thời gian này người đó không rút tiền và lãi xuất không đổi?

A 204848000 đồng. B 204847000 đồng. C 204034000 đồng. D 204032000 đồng.

Lời giải.
Số tiền nhận được sau 6 tháng là $2 \cdot 10^8 \cdot 1{,}004^6 = 204848256{,}8$ đồng.
Chọn phương án A

Câu 55. Một kỹ sư nhận được mức lương khởi điểm là 8.000.000 đồng/tháng. Biết rằng cứ sau hai năm thì mức lương của kỹ sư đó tăng thêm 10%. Tính tổng số tiền T (đồng) mà kỹ sư đó nhận được sau 10 năm làm việc (kết quả làm tròn đến hàng nghìn).

A 633.600.000. B 1.172.179.000. C 1.529.993.000. D 3.059.985.000.

Lời giải.
Sau 10 năm, tổng số tiền mà kỹ sư đó có được là

$$T = 24 \cdot 8.000.000 \cdot \left[1 + (1+0{,}1)^2 + \cdots + (1+0{,}1)^5\right] \approx 1.172.179.000 \text{ triệu đồng.}$$

Chọn phương án B

D MỨC ĐỘ 4

Câu 56. Với mức tiêu thụ thức ăn của trang trại A không đổi như dự định thì lượng thức ăn dự trữ sẽ hết sau 100 ngày. Nhưng thực tế, mức tiêu thụ thức ăn tăng thêm 4% mỗi ngày (ngày sau tăng 4% so với ngày trước đó). Hỏi thực tế, lượng thức ăn dự trữ đó sẽ hết sau khoảng bao nhiêu ngày? (làm tròn đến hàng đơn vị)

A 37 ngày. B 41 ngày. C 40 ngày. D 43 ngày.

Lời giải.
Phương pháp:
Lượng thức ăn mà trang trại ăn hết ở ngày thứ k là: $M(1+4\%)^{k-1}, k \in \mathbb{N}^*$.
Cách giải:
Theo dự định, mỗi ngày, trang trại ăn hết $1 : 100 = \dfrac{1}{100}$ (lượng thức ăn).

Lượng thức ăn mà trang trại ăn hết ở ngày thứ k là: $\frac{1}{100}(1+4\%)^{k-1}, k \in \mathbb{N}^*$.
Xác định số tự nhiên n nhỏ nhất để

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{100}(1+4\%)+\frac{1}{100}(1+4\%)^2+\cdots+\frac{1}{100}(1+4\%)^{n-1} \geq 1.$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{100}+\frac{1}{100}\cdot 1,04+\frac{1}{100}\cdot 1,04^2+\cdots+\frac{1}{100}\cdot 1,04^{n-1} \geq 1.$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{100}\left(1+1,04+1,04^2+\cdots+1,04^{n-1}\right) \geq 1.$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{100}\cdot\frac{1,04^{n-1}-1}{1,04-1} \geq 1.$$
$$\Leftrightarrow 1,04^{n-1}-1 \geq 4 \Leftrightarrow n-1 \geq \log_{1,04} 5 \Leftrightarrow n \geq \log_{1,04} 5+1 \Leftrightarrow n \geq 42,03 \Rightarrow n_{\min}=43.$$

Vậy thực tế lượng thức ăn dự trữ đó sẽ hết sau khoảng 43 ngày.
Chọn phương án D

Câu 57. Ông A vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 1% /tháng. Ông ta muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là như nhau và ông A trả hết nợ sau đúng 5 năm kể từ ngày vay. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi số tiền mỗi tháng ông ta cần trả cho ngân hàng gần nhất với số tiền nào dưới đây ?

A. 2,22 triệu đồng. B. 3,03 triệu đồng. C. 2,25 triệu đồng. D. 2,20 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi số tiền vay ban đầu là M, số tiền hoàn nợ mỗi tháng là m, lãi suất một tháng là r.
Hết tháng thứ nhất, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là $M+Mr=M(1+r)$.
Ngay sau đó ông A hoàn nợ số tiền m nên số tiền để tính lãi cho tháng thứ hai là $M(1+r)-m$.
Do đó hết tháng thứ hai, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là

$$[M(1+r)-m](1+r)=M(1+r)^2-m(1+r).$$

Ngay sau đó ông A lại hoàn nợ số tiền m nên số tiền để tính lãi cho tháng thứ ba là

$$M(1+r)^2-m(1+r)-m.$$

Do đó hết tháng thứ ba, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là

$$[M(1+r)^2-m(1+r)-m](1+r)=M(1+r)^3-m(1+r)^2-m(1+r)-m.$$

Cứ tiếp tục lập luận như vậy ta thấy sau tháng thứ n, $n \geq 2$, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là

$$M(1+r)^n-m(1+r)^{n-1}-m(1+r)^{n-2}-\ldots-m(1+r)-m=M(1+r)^n-\frac{m[(1+r)^{n-1}-1]}{r}.$$

Sau tháng thứ n trả hết nợ thì ta có

$$M(1+r)^n-\frac{m[(1+r)^{n-1}-1]}{r}=0 \Rightarrow m=\frac{M(1+r)^n r}{(1+r)^n-1}.$$

Thay số với $M = 100.000.000$, $r = 1\%$, $n = 5 \times 12 = 60$ ta được $m \approx 2,22$ (triệu đồng).
Chọn phương án A

Câu 58. Bác An gửi vào ngân hàng số tiền 5 triệu đồng với lãi xuất $0,7\%$/tháng. Sau sáu tháng gửi tiền, lãi xuất tăng lên $0,9\%$/tháng. Đến tháng thứ 10 sau khi gửi tiền, lãi xuất giảm xuống $0,6\%$/ tháng và giữ ổn định. Biết rằng nếu bác An không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi là lãi kép). Hỏi sau một năm gửi tiền, bác An rút được số tiền gần nhất với số nào sau đây?

A 5.453.000 đồng. **B** 5.436.000 đồng. **C** 5.468.000 đồng. **D** 5.463.000 đồng.

Lời giải.
Gọi số tiền gửi vào là M đồng, lãi xuất r/ tháng.
Cuối tháng thứ n: số vốn tích lũy được là:
$T_n = M(1+r)^n$.
Số vốn tích lũy của bác An sau 6 tháng gửi tiền với lãi suất $0,7\%$/ tháng là:
$T_1 = 5(1,007)^6$ triệu đồng.
Số vốn tích lũy của bác An sau 9 tháng gửi tiền (3 tháng tiếp theo với lãi suất $0,9\%$/ tháng) là:
$T_2 = T_1.(1,009)^3 = 5.(1,007)^6.(1,009)^3$ triệu đồng.
Do đó số tiền bác An lĩnh được sau 1 năm (12 tháng) từ ngân hàng (3 tháng tiếp theo sau đó với lãi suất $0,6\%$/ tháng) là:
$T = T_2.(1,006)^3 = 5.(1,007)^6.(1,009)^3.(1,006)^3$ triệu đồng $\approx 5452733,453$ đồng.
Chọn phương án A

Câu 59. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m+3)16^x + (2m-1)\,4^x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

A $-3 < m < -1$. **B** $-1 < m < -\dfrac{3}{4}$. **C** $-1 < m < 0$. **D** $m \geq -3$.

Lời giải.
Đặt $t = 4^x, t > 0$ thì phương trình thành $(m+3)t^2 + (2m-1)t + m + 1 = 0 \quad (2)$.
Phương trình ban đầu có hai nghiệm trái dấu tương đương với (2) có hai nghiệm $0 < t_1 < 1 < t_2$.
Đặt $P(t) = (m+3)t^2 + (2m-1)t + m + 1$.

$$\begin{cases} m+3 \neq 0 \\ (m+3)P(1) < 0 \\ (m+3)P(0) > 0 \\ \dfrac{t_1+t_2}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)(4m+3) < 0 \\ (m+3)(m+1) > 0 \\ \dfrac{-(2m-1)}{2(m+3)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < \dfrac{-4}{3} \\ \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > -1 \end{array}\right. \\ -3 < m < \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < -\frac{3}{4}.$$

Chọn phương án B

Câu 60. Ông A vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 1%/tháng. Ông ta muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là như nhau và ông A trả hết nợ sau đúng 5 năm kể từ ngày vay. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi số tiền mỗi tháng ông ta cần trả cho ngân hàng gần nhất với số tiền nào dưới đây?

(A) 2,22 triệu đồng. (B) 3,03 triệu đồng. (C) 2,25 triệu đồng. (D) 2,20 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi số tiền vay ban đầu là M, số tiền hoàn nợ mỗi tháng là m, lãi suất một tháng là r.
Hết tháng thứ nhất, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là $M + Mr = M(1+r)$.
Ngay sau đó ông A hoàn nợ số tiền m nên số tiền để tính lãi cho tháng thứ hai là $M(1+r) - m$.
Do đó hết tháng thứ hai, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là

$$[M(1+r) - m](1+r) = M(1+r)^2 - m(1+r).$$

Ngay sau đó ông A lại hoàn nợ số tiền m nên số tiền để tính lãi cho tháng thứ ba là

$$M(1+r)^2 - m(1+r) - m.$$

Do đó hết tháng thứ ba, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là

$$\left[M(1+r)^2 - m(1+r) - m\right](1+r) = M(1+r)^3 - m(1+r)^2 - m(1+r) - m.$$

Cứ tiếp tục lập luận như vậy ta thấy sau tháng thứ n, $n \geq 2$, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là

$$M(1+r)^n - m(1+r)^{n-1} - m(1+r)^{n-2} - \ldots - m(1+r) - m = M(1+r)^n - \frac{m\left[(1+r)^n - 1\right]}{r}.$$

Sau tháng thứ n trả hết nợ thì ta có

$$M(1+r)^n - \frac{m\left[(1+r)^{n-1} - 1\right]}{r} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{M(1+r)^n r}{(1+r)^n - 1}.$$

Thay số với $M = 100.000.000$, $r = 1\%$, $n = 5 \times 12 = 60$ ta được $m \approx 2,22$ (triệu đồng).
Chọn phương án (A)

Câu 61. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên m trong đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình

$$\ln(mx) = 2\ln(x+2)$$

có hai nghiệm phân biệt?

(A) 2009. (B) 2011. (C) 2010. (D) 4020.

Lời giải.

Điều kiện $x > -2$. Phương trình tương đương

$$\ln(mx) = \ln(x+2)^2 \Leftrightarrow mx = (x+2)^2$$

Rõ ràng $x = 0$ không là nghiệm, phương trình tương đương $m = \dfrac{(x+2)^2}{x}$. Lập bảng biến thiên ta có điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt là $m > 8$. Vậy có tất cả 2010 giá trị thỏa mãn.
Chọn phương án (C)

Câu 62. Tìm m để phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^3+mx^2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{x^3+4mx^2-m} = 2x^3 - 6mx^2 + 2m$ có nghiệm duy nhất.

(A) $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$.
(B) $m < -\frac{1}{2}$.
(C) $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$ và $m \neq 0$.
(D) $m > -\frac{1}{4}$.

Câu 63. Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $\ln x + \ln y \geq \ln(x^2 + y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x + y$.

(A) $P = 2 + 3\sqrt{2}$.
(B) $P = 6$.
(C) $P = 2\sqrt{2} + 3$.
(D) $P = \sqrt{17} + \sqrt{3}$.

Lời giải.

Từ $\ln x + \ln y \geq \ln(x^2 + y) \Leftrightarrow xy \geq x^2 + y \Leftrightarrow (x-1)y \geq x^2$.

Nếu $0 < x \leq 1$ thì $y \geq xy \geq x^2 + y \Leftrightarrow 0 \geq x^2$ (vô lý).

Nếu $x > 1$ thì $(x-1)\,y \geq x^2 \Leftrightarrow y \geq \dfrac{x^2}{x-1}$. Vậy $P = x + y \geq x + \dfrac{x^2}{x-1}$.

Xét hàm số $f(x) = x + \dfrac{x^2}{x-1}$ trên $(1; +\infty)$. $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 1}{x^2 - 2x + 1} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \text{ (loại)} \\ x = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \text{ (nhận)}. \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên suy ra $\min\limits_{(1;+\infty)} f(x) = f\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 3$.

Chọn phương án (C)

Câu 64. Trong thời gian liên tục 25 năm, một người lao động luôn gởi đúng 4.000.000 đồng vào một ngày cố định của tháng ở ngân hàng A với lãi suất không thay đổi trong suốt thời gian gởi tiền là $0,6\%$ / tháng. Gọi A đồng là số tiền người đó có được sau 25 năm. Hỏi mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $3.500.000.000 < A < 3.550.000.000$.
(B) $3.400.000.000 < A < 3.450.000.000$. .
(C) $350.000.000 < A < 3.400.000.000$.
(D) $3.450.000.000 < A < 3.500.000.000$.

Lời giải.

Gọi a (đồng) là số tiền người đó gởi vào ngân hàng mỗi tháng, r là lãi suất của ngân hàng.

Cuối tháng thứ nhất, người đó có số tiền là: $T_1 = a + a.r = a(1+r)$. Đầu tháng thứ hai, người đó có số tiền là: $a(1+r) + a = a\left[(1+r)+1\right] = \dfrac{a}{[(1+r)-1]}\left[(1+r)^2 - 1\right] = \dfrac{a}{r}.\left[(1+r)^2 - 1\right]$.

Cuối tháng thứ hai, người đó có số tiền là:

$T_2 = \dfrac{a}{r}.\left[(1+r)^2 - 1\right] + \dfrac{a}{r}.\left[(1+r)^2 - 1\right].r = \dfrac{a}{r}.\left[(1+r)^2 - 1\right](1+r)$.

Tổng quát, cuối tháng thứ n thì người đó tích lũy được số tiền là: $T_n = \dfrac{a}{r}.\left[(1+r)^n - 1\right](1+r)$.

Theo đề bài ta có: $a = 4000000$, $r = 0,006$, $n = 300$ (tháng). Vậy số tiền người ấy có được sau 25 năm là: $A = T_{300} = \dfrac{4000000}{0,006}\left[(1+0,006)^{300} - 1\right](1+0,006) = 3.364.866.655$ (đồng).

Chọn phương án (C)

Câu 65. Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng với mãi suất 12 %/ năm theo thỏa thuận: Cứ mỗi tháng ông A phải trả cho ngân hàng a triệu đồng và lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ (a tính theo đơn vị triệu đồng). Hỏi giá trị a bằng bao nhiêu để ông

A trả hết nợ ngân hàng sau đúng 3 tháng.

A $a = \dfrac{100 \cdot (0{,}01)^3}{3}$ triệu đồng. **B** $a = \dfrac{(1{,}01)^3}{(1{,}01)^3 - 1}$ triệu đồng.

C $a = \dfrac{100 \cdot (0{,}03)^3}{3}$ triệu đồng. **D** $a = \dfrac{120 \cdot (1{,}12)^3}{(1{,}12)^3 - 1}$ triệu đồng.

Lời giải.

Ta có lãi suất 12% /năm nên lãi suất theo tháng là 1% / tháng.

Đặt $M = 100,\ r = 0{,}01,\ h = r + 1 = 1{,}01$.

Nợ của ông A sau 1 tháng là $M \cdot h - a$

Nợ của ông A sau 2 tháng là $(M \cdot h - a) \cdot h - a = M \cdot h^2 - a \cdot (h + 1)$

Nợ của ông A sau 3 tháng là $(M \cdot h^2 - a \cdot (h + 1))h - a = M \cdot h^3 - a \cdot \dfrac{h^3 - 1}{h - 1}$.

Vì ông A trả hết nợ sau 3 tháng nên

$M \cdot h^3 - a \cdot \dfrac{h^3 - 1}{h - 1} = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{M \cdot h^3 \cdot (h - 1)}{h^3 - 1} = \dfrac{(1{,}01)^3}{(1{,}01)^3 - 1}$.

Chọn phương án B

Câu 66. Một người mua một căn hộ chung cư với giá 500 triệu đồng. Người đó trả trước 100 triệu đồng. Số tiền còn lại người đó thanh toán theo hình thức trả góp với lãi suất tính theo tổng số tiền còn nợ là 0,5% mỗi tháng. Kể từ ngày mua, mỗi tháng người đó trả số tiền cố định là 4 triệu đồng (cả gốc lẫn lãi). Tính thời gian tối thiểu (làm tròn đến hàng đơn vị) để người đó trả hết nợ.

A 140 tháng. **B** 136 tháng. **C** 133 tháng. **D** 144 tháng.

Lời giải.

— Đặt $P_0 = 400$ triệu đồng, $a = 4$ triệu đồng, $r = 0{,}5\%$.

— Số tiền người đó còn lại sau tháng thứ n được tính theo công thức

$$P_n = P_0 \cdot (1 + r)^n - a \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r}.$$

— Người đó trả hết nợ khi

$$P_n \leq 0 \Leftrightarrow -0,5 \cdot 1{,}005^n + 1 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow n \geq \log_{1{,}005} 2.$$

Chọn phương án A

Câu 67. Để đầu tư dự án trồng rau sạch theo công nghệ mới, bác A đã làm hợp đồng xin vay vốn ngân hàng với số tiền 100 triệu đồng với lãi suất $x\%$ trên một năm. Điều kiện kèm theo của hợp đồng là số tiền lãi tháng trước sẽ được tính làm vốn để sinh lãi cho tháng sau. Sau hai năm thành công với dự án rau sạch của mình, bác A đã thanh toán hợp đồng ngân hàng số tiền làm tròn là 129.512.000 đồng. Hỏi lãi suất trong hợp đồng giữa bác A và ngân hàng là bao nhiêu?

A $x = 14$. **B** $x = 15$. **C** $x = 13$. **D** $x = 12$.

Lời giải.

Theo công thức lãi kép ta có $129.512.000 = 100.000.000\left(1+\dfrac{x}{1200}\right)^{24}$.

Suy ra $x = \left(\sqrt[24]{\dfrac{129.512.000}{100.000.000}} - 1\right)\cdot 1200 \simeq 13$.

Chọn phương án C

Câu 68. Bạn Hùng trúng tuyển vào trường đại học Bách Khoa Hà Nội nhưng do không đủ tiền nộp học phí nên Hùng quyết định vay ngân hàng trong 4 năm, mỗi năm vay 3.000.000 đồng để nộp học phí với lãi suất 3%/năm. Sau khóa học 4 năm, Hùng phải trả nợ (cả gốc lẫn lãi) bằng hình thức trả góp hàng tháng, mỗi tháng trả T đồng (T không đổi), và phải trả hết nợ trong 5 năm. Tìm T (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng từ khi bắt đầu trả nợ, ngân hàng tính lãi theo lãi suất mới là $0,25\%$/tháng.

A 253.982. B 232.289. C 345.821. D 567.900.

Lời giải.

Sau 1 năm học số tiền Hùng nợ là $3 + 3r = 3(1+r)$.

Sau 2 năm học số tiền Hùng nợ là $3(1+r)^2 + 3(1+r)$.

Tương tự sau 4 năm học số tiền Hùng nợ là

$$3(1+r)^4 + 3(1+r)^3 + 3(1+r)^2 + 3(1+r) = 12.927.407,43 = A$$

Số tiền nợ A này bắt đầu được tính lãi và được trả góp trong 5 năm.

Sau 1 tháng số tiền còn nợ là $A + Ar - T = A(1+r) - T$.

Sau 2 tháng số tiền còn nợ là $A(1+r) - T + (A(1+r)-T)\,r - T = A(1+r)^2 - T(1+r) - T$.

Tương tự, sau 60 tháng số tiền còn nợ là $A(1+r)^{60} - T(1+r)^{59} - T(1+r)^{58} - \cdots - T(1+r) - T$.

Bạn Hùng trả hết nợ khi $A(1+r)^{60} - T(1+r)^{59} - T(1+r)^{58} - \cdots - T(1+r) - T = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ A(1+r)^{60} - T\left[(1+r)^{59} - (1+r)^{58} - \cdots - (1+r) - 1\right] = 0\\
&\Leftrightarrow\ A(1+r)^{60} - T\frac{(1+r)^{60}-1}{1+r-1} = 0\\
&\Leftrightarrow\ T = \frac{Ar(1+r)^{60}}{(1+r)^{60}-1}
\end{aligned}$$

Suy ra $T = \dfrac{12.927.407,4\cdot(1+0,0025)^{60}\cdot 0,0025}{(1+0,0025)^{60}-1} \approx 232,289$ đồng.

Chọn phương án B

Câu 69. Anh Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng Vietcombank. Lãi suất hàng năm không thay đổi là $7,5\%$/năm. Nếu anh Nam hàng năm không rút lãi thì sau 5 năm số tiền anh Nam nhận được cả vốn lẫn lãi (kết quả làm tròn đến hàng ngàn) là

A 143.563.000 đồng. B 2.373.047.000 đồng. C 137.500.000 đồng. D 133.547.000 đồng.

Lời giải.

Gọi t là số tiền vốn gửi tiết kiệm, p là lãi suất hàng năm, n là số năm gửi tiết kiệm.

Sau một năm số tiền nhận được là $T(1) = t + t\cdot p = t(1+p)$.

Sau hai năm số tiền nhận được là $T(2) = T(1) + T(1) \cdot p = T(1)(1+p) = t(1+p)^2$.
Vậy sau n năm số tiền nhận được là $T(n) = t(1+p)^n$.
Suy ra sau 5 năm số tiền nhận được là $T(5) = 100.000.000(1+0,075)^5 \approx 143.563.000$.
Chọn phương án A

Câu 70. Ông Nam vay ngân hàng 500 triệu đồng để mở cửa hàng điện dân dụng với lãi suất $0,8\%$ /tháng theo thỏa thuận như sau: Sau đúng 6 tháng kể từ ngày vay ông Nam bắt đầu trả nợ, hai lần trả nợ liên tiếp cách nhau 1 tháng với số tiền trả mỗi tháng là 10 triệu đồng. Biết rằng mỗi tháng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi kể từ ngày vay, sau thời gian bao lâu ông Nam trả hết nợ cho ngân hàng? (Giả thiết trong thời gian đó lãi suất cho vay không thay đổi và tháng cuối cùng ông Nam có thể trả ít hơn 10 triệu).

A 73 tháng. **B** 67 tháng. **C** 68 tháng. **D** 72 tháng.

Lời giải.

Sau đúng 6 tháng kể từ ngày vay ông Nam thiếu nợ ngân hàng số tiền là
$A = 500 \cdot (1+0,008)^6 \approx 524,5$ (triệu đồng).
Gọi n là số tháng kể từ lúc ông Nam bắt đầu trả nợ cho đến lúc hết nợ, $x = 10$ (triệu) là số tiền trả góp hàng tháng; $r = 0,8\%$ là lãi suất hàng tháng của ngân hàng.
Ta có phương trình
$A(1+r)^{n-1} - \dfrac{x}{r}[(1+r)^n - 1] = 0 \Leftrightarrow (1+r)^n = \dfrac{x}{x-Ar} \Leftrightarrow n = \log_{(1+r)} \dfrac{x}{x-Ar} \approx 68$ (tháng).
Vậy sau $68 + 5 = 73$ tháng kể từ ngày vay, ông Nam trả hết nợ cho ngân hàng.
Chọn phương án A

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. D	3. D	4. B	5. A	6. C	7. C	8. C	9. C	10. A
11. C	12. D	13. D	14. A	15. C	16. C	17. A	18. B	19. A	20. A
21. A	22. D	23. D	24. C	25. A	26. D	27. C	28. C	29. B	30. A
31. D	32. D	33. D	34. A	35. D	36. D	37. D	38. C	39. A	40. D
41. A	42. C	43. D	44. D	45. A	46. C	47. D	48. D	49. D	50. A
51. A	52. A	53. A	54. A	55. B	56. D	57. A	58. A	59. B	60. A
61. C	62. A	63. C	64. C	65. B	66. A	67. C	68. B	69. A	70. A

DẠNG 43. XÁC ĐỊNH HỆ SỐ CỦA HÀM SỐ

Ví dụ 1. Cho hàm số có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	1

Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

A 2. **B** 3. **C** 1. **D** 0.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = \dfrac{ax+1}{bx+c}$ có đường tiệm cận đứng là $x = -\dfrac{c}{b}$ và đường tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{b}$.

Từ bảng biến thiên ta có: $\begin{cases} -\dfrac{c}{b} = 2 \\ \dfrac{a}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = -\dfrac{c}{2}$ (1)

Mặt khác $f'(x) = \dfrac{ac-b}{(bx+c)^2}$. Vì hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ nên

$f'(x) = \dfrac{ac-b}{(bx+c)^2} > 0 \Leftrightarrow ac - b > 0$ (2)

Thay (1) vào (2), ta được $-\dfrac{c^2}{2} + \dfrac{c}{2} > 0 \Leftrightarrow -c^2 + c > 0 \Leftrightarrow 0 < c < 1$.

Suy ra c là số dương và a, b là số âm.

Chọn phương án C

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax + m^2 + 4}{bx + c}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$	$+$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	1

Trong các số a , b và c có bao nhiêu số dương?

A 2. **B** 3. **C** 1. **D** 0.

Lời giải.

Tiệm cận đứng:$x = 3 > 0 \Rightarrow -\dfrac{c}{b} > 0 \Rightarrow bc < 0$.

Tiệm cận ngang:$y = 1 > 0 \Rightarrow \dfrac{a}{b} > 0 \Rightarrow ab > 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x > 3 > 0 \Rightarrow -\dfrac{m^2+4}{a} > 0 \Rightarrow a < 0 \Rightarrow b < 0$ $\Rightarrow c > 0$.

Chọn phương án C

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax+9}{bx+c}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	3 ↘		$-\infty$ || $+\infty$		↘ 3

Trong các số a , b và c có bao nhiêu số dương?

A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Lời giải.

Tiệm cận đứng:$x = -2 < 0 \Rightarrow -\dfrac{c}{b} < 0 \Rightarrow bc > 0$.

Tiệm cận ngang:$y = 3 > 0 \Rightarrow \dfrac{a}{b} > 0 \Rightarrow ab > 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x < -2 < 0 \Rightarrow -\dfrac{9}{a} < 0 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow b > 0 \Rightarrow c > 0$.

Chọn phương án B

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	2 ↘		$-\infty$ || $+\infty$		↘ 2

Trong các mệnh đề dưới đây,mệnh đề nào đúng?

A. $b > 0$,$c > 0$,$d > 0$. B. $b < 0$,$c > 0$,$d < 0$. C. $b < 0$,$c < 0$,$d < 0$. D. $b > 0$,$c < 0$,$d < 0$.

Lời giải.

Tiệm cận ngang:$y = 2 > 0 \Rightarrow \dfrac{a}{c} > 0$,mà $a > 0 \Rightarrow c > 0$.

Tiệm cận đứng:$x = -1 < 0 \Rightarrow -\dfrac{d}{c} < 0 \Rightarrow \dfrac{d}{c} > 0$,mà $c > 0 \Rightarrow d > 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x < -1 < 0 \Rightarrow -\dfrac{b}{a} < 0 \Rightarrow \dfrac{b}{a} > 0 \Rightarrow b > 0$.

Chọn phương án A

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2

Trong các mệnh đề dưới đây,mệnh đề nào đúng?

A $b > 0$,$c > 0$,$d > 0$. **B** $b < 0$,$c > 0$,$d < 0$. **C** $b < 0$,$c < 0$,$d < 0$. **D** $b > 0$,$c < 0$,$d > 0$.

Lời giải.

Tiệm cận ngang:$y = 2 > 0 \Rightarrow \dfrac{a}{c} > 0$,mà $a < 0 \Rightarrow c < 0$.

Tiệm cận đứng:$x = 1 > 0 \Rightarrow -\dfrac{d}{c} > 0 \Rightarrow \dfrac{d}{c} < 0$,mà $c < 0 \Rightarrow d > 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x > 1 > 0 \Rightarrow -\dfrac{b}{a} > 0 \Rightarrow \dfrac{b}{a} < 0 \Rightarrow b > 0$.

Chọn phương án D

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax - 2}{bx + c}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

Trong các số a , b và c có bao nhiêu số dương?

A 2. **B** 3. **C** 1. **D** 0.

Lời giải.

Tiệm cận đứng:$x = 1 > 0 \Rightarrow -\dfrac{c}{b} > 0 \Rightarrow bc < 0$.

Tiệm cận ngang:$y = 1 > 0 \Rightarrow \dfrac{a}{b} > 0 \Rightarrow ab > 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x > 1 > 0 \Rightarrow \dfrac{2}{a} > 0 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow b > 0 \Rightarrow c < 0$.

Chọn phương án A

Câu 6. Cho hàm $f(x) = \dfrac{ax + 2020}{bx + c}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		4		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	$-\dfrac{1}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{1}{3}$

Kết quả nào sau đây đúng?

A $a < 0,\ b > 0,\ c > 0$. **B** $a < 0,\ b > 0,\ c < 0$. **C** $a > 0,\ b > 0,\ c < 0$. **D** $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$.

Lời giải.

+Tiệm cận đứng:$x = 4 > 0 \Rightarrow -\dfrac{c}{b} > 0 \Rightarrow bc < 0$

+Tiệm cận ngang:$y = -\dfrac{1}{3} < 0 \Rightarrow \dfrac{a}{b} < 0 \Rightarrow ab < 0$

+Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $x > 4 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow -\dfrac{2020}{a} > 0 \Rightarrow a < 0 \Rightarrow b > 0 \Rightarrow c < 0$.

Chọn phương án B

Câu 7. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c\,(a \neq 0)$ có bảng biến thiên dưới đây:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Tính $P = a - 2b + 3c$.

A $P = 3$. **B** $P = 6$. **C** $P = -2$. **D** $P = 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$,$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -\dfrac{b}{2a} \end{array}\right.$.

Căn cứ vào bảng biến thiên ta thấy $a < 0$; $b > 0$,hàm đạt cực đại tại $x = \pm 1$ và $y\,(\pm 1) = 2$,hàm đạt cực tiểu tại $x = 0$ và $y\,(0) = 1$ .Suy ra,$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 1 \\ a + b + c = 2 \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$.

Do đó:$P = a - 2b + 3c = -2$.

Chọn phương án C

Câu 8. Cho đồ thị hàm số $f\,(x) = ax^4 + bx^2 + c$ như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $a > 0,\ b < 0,\ c > 0$. **B** $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$. **C** $a > 0,\ b < 0,\ c < 0$. **D** $a < 0,\ b < 0,\ c > 0$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$ nên $a > 0$.
Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm $(0;3)$ do đó $c = 3 > 0$.
Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị nên: $ab < 0 \Rightarrow b < 0$.
Chọn phương án A

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a,b,c,d \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

A 2. B 3. C 1. D 0.

Lời giải.
Từ dạng đồ thị suy ra $a > 0$.
Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$
Vì hàm số có 2 cực trị nên $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$.
Nên theo công thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{3a} \end{cases}$.
Dựa vào hoành độ 2 điểm cực trị ta có: $\begin{cases} -\dfrac{2b}{3a} > 0 \\ \dfrac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 0 \\ c > 0 \end{cases}$.
Chọn phương án A

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a,b,c,d \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Trong các số a, b và c có bao nhiêu số âm?

A 2. B 3. C 1. D 0.

Lời giải.
Từ dạng đồ thị suy ra $a < 0$.
$x = 0 \Rightarrow y = d = -1 \Rightarrow d < 0$.
Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$
Vì hàm số có 2 cực trị nên $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$.

Nên theo công thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{3a} \end{cases}$.

Dựa vào hoành độ 2 điểm cực trị ta có: $\begin{cases} -\dfrac{2b}{3a} > 0 \\ \dfrac{c}{3a} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > 0 \\ c = 0 \end{cases}$.

Chọn phương án A

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

A 2. **B** 3. **C** 1. **D** 0.

Lời giải.

Từ dạng đồ thị suy ra $a < 0$.

$x = 0 \Rightarrow y = d > 0$.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

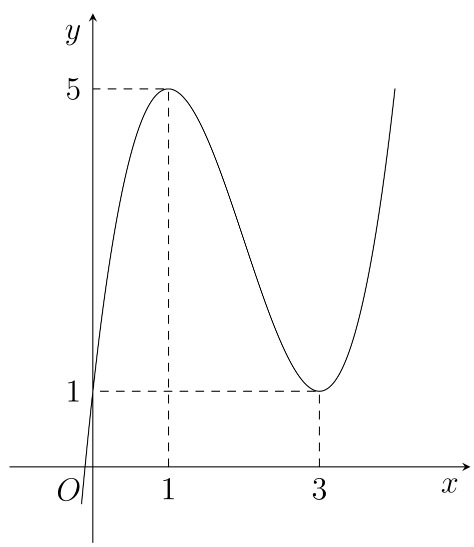
Vì hàm số có 2 cực trị nên $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$.

Nên theo công thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{3a} \end{cases}$.

Dựa vào hoành độ 2 điểm cực trị ta có: $\begin{cases} -\dfrac{2b}{3a} = 0 \\ \dfrac{c}{3a} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c > 0 \end{cases}$.

Chọn phương án A

Câu 12. Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Mệnh đề nào sau đây đúng.

(A) $a < 0; b > 0; c > 0; d > 0$.
(B) $a < 0; b > 0; c < 0; d > 0$.
(C) $a < 0; b < 0; c < 0; d > 0$.
(D) $a < 0; b < 0; c > 0; d > 0$.

Lời giải.

Có $a < 0$ do điểm cuối đồ thị có hướng đi xuống.

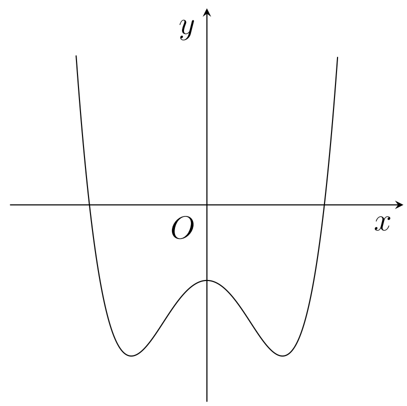
$d > 0$ do giao điểm của đồ thị với Oy nằm phía trên Ox .

Đồ thị có 2 cực trị trái dấu nên $3a.c < 0 \Rightarrow c > 0$.

Hoành độ điểm uốn dương nên $-\dfrac{b}{3a} > 0 \Rightarrow b > 0$.

Chọn phương án (A)

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $a > 0;\ b > 0; c < 0$. (B) $a > 0;\ b < 0; c < 0$. (C) $a < 0;\ b > 0; c < 0$. (D) $a < 0;\ b > 0; c > 0$.

Lời giải.

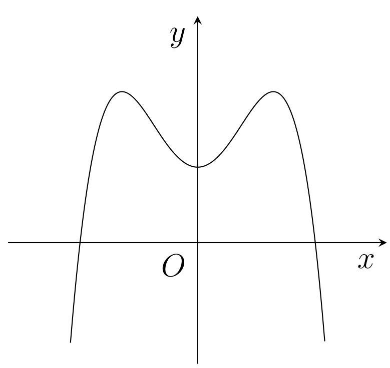
+Dựa vào dạng đồ thị ta thấy: $a > 0$.

+Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị nên: $ab < 0 \Rightarrow b < 0$.

+Với $x = 0$ ta có: $y(0) = c < 0$.

Chọn phương án (B)

Câu 14. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $a > 0,\ b > 0,\ c = 0,\ d < 0$.
(B) $a > 0,\ b = 0,\ c < 0,\ d < 0$.

C $a > 0,\ b = 0,\ c > 0,\ d < 0$. **D** $a > 0,\ b = 0,\ c > 0,\ d < 0$.

Lời giải.

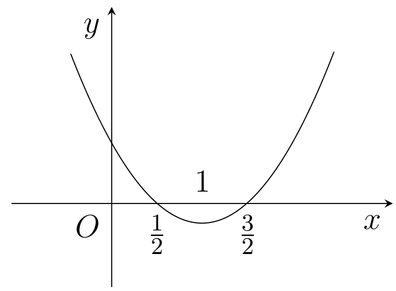
Do nhánh cuối của đồ thị đi lên nên ta có $a > 0$.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ .Do cực tiểu của hàm số thuộc trục tung và có giá trị âm nên $d < 0$ và $x = 0$ là nghiệm của phương trình $y' = 0 \Rightarrow c = 0$.

Lại có $3ax^2 + 2bx \Leftrightarrow = 0 \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\dfrac{2b}{3a} \end{array}\right. \Rightarrow -\dfrac{2b}{3a} < 0 \Rightarrow a > 0, b > 0$.

Chọn phương án A

Câu 15. Cho hàm số bậc ba $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Giá trị của $\dfrac{c}{b}$ là

A $-\dfrac{1}{3}$. **B** $\dfrac{3}{4}$. **C** $\dfrac{1}{3}$. **D** $-\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Tập xác định .

Đạo hàm cấp 1 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Ta có $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3a}{4} + b + c$ và $f'\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{27a}{4} + 3b + c$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\begin{cases} 3a + 4b + 4c = 0 \\ 27a + 12b + 4c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 27a + 36b + 36c = 0 \\ 27a + 12b + 4c = 0 \end{cases}$.

$\Rightarrow 24b + 32c = 0 \Rightarrow \dfrac{c}{b} = -\dfrac{3}{4}$.

Vậy $\dfrac{c}{b} = -\dfrac{3}{4}$.

Chọn phương án D

BẢNG ĐÁP ÁN

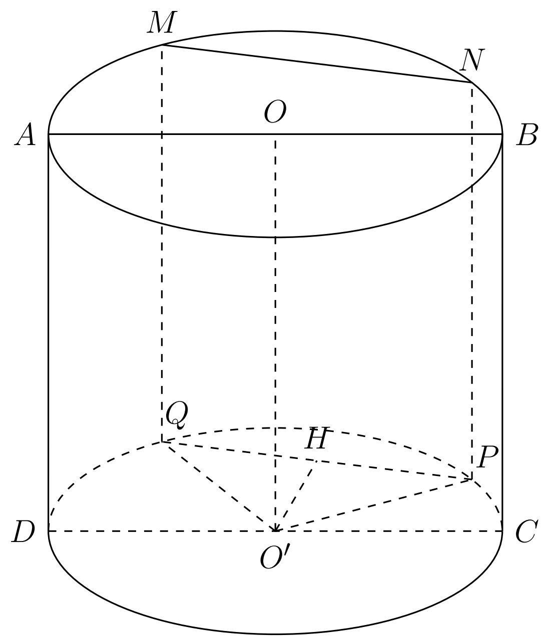
1. C	2. B	3. A	4. D	5. A	6. B	7. C	8. A	9. A	10. A
11. A	12. A	13. B	14. A	15. D					

DẠNG 44. KHỐI NÓN -TRỤ- CẦU

Ví dụ 1. Cho hình trụ có chiều cao bằng 6a. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, thiết diện thu được là một hình vuông. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

A $216\pi a^3$. **B** $150\pi a^3$. **C** $54\pi a^3$. **D** $108\pi a^3$.

Lời giải.

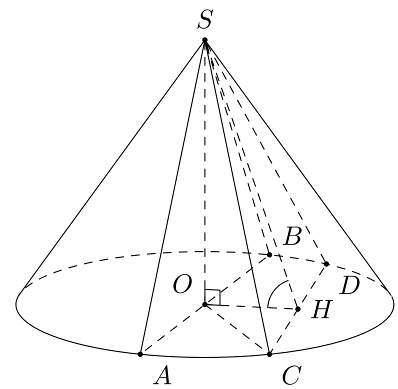


Lấy 2 điểm M, N lần lượt nằm trên đường tròn tâm O sao cho $MN = 6a$.
Từ M, N lần lượt kẻ các đường thẳng song song với trục OO', cắt đường tròn tâm O' tại P, Q. Thiết diện ta thu được là hình vuông $MNPQ$ có cạnh bằng $6a$.
Gọi H là trung điểm của PQ, suy ra $OH \perp PQ$.
Vì $OO' \parallel (MNPQ)$ nên ta có $d(OO', (MNPQ)) = d(O', (MNPQ)) = O'H$.
Từ giả thiết, ta có $O'H = 3a$. Do đó tam giác $O'HP$ là tam giác vuông cân tại H.
Suy ra bán kính đường tròn đáy của hình trụ là $O'P = \sqrt{O'P^2 + HP^2} = 3a\sqrt{2}$.
Vậy thể tích của khối trụ cần tìm là $V = 6a.\pi\left(3a\sqrt{2}\right)^2 = 108\pi a^3$.
Chọn phương án D

Câu 1. Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a. Một thiết diện qua đỉnh tạo với đáy một góc $60°$. Diện tích của thiết diện này bằng

A $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **B** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$. **C** $2a^2$. **D** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.



Gọi thiết diện qua trục là $\triangle SAB$ và thiết diện qua đỉnh nón tạo với đáy một góc 60° là $\triangle SCD$.
Gọi H là trung điểm của $CD \Rightarrow CD \perp (SOH) \Rightarrow \widehat{SHO} = 60^\circ$.
Khi đó diện tích thiết diện SCD là $S_{SCD} = \dfrac{1}{2} SH \cdot CD$.

Ta có $AB = a\sqrt{2} \Rightarrow R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = SO$.

Tam giác SHO vuông tại O, ta có $SH = \dfrac{SO}{\sin 60^\circ} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Ta có $CD = 2CH = 2\sqrt{OC^2 - OH^2} = 2\sqrt{\dfrac{a^2}{2} - \dfrac{SH^2}{4}} = 2\sqrt{\dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a^2}{6}} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

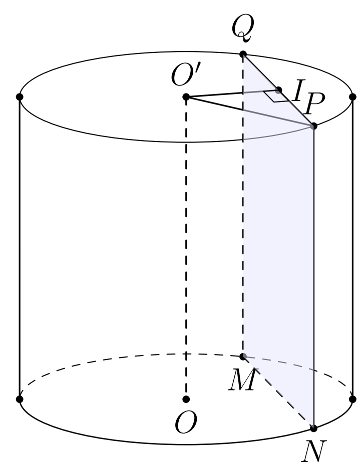
Vậy $S_{SCD} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

Chọn phương án B

Câu 2. Cho hình trụ có trục OO' và có bán kính đáy bằng 4. Một mặt phẳng song song với trục OO' và cách OO' một khoảng bằng 2 cắt hình trụ theo thiết diện là một hình vuông. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A $26\sqrt{3}\pi$. **B** $8\sqrt{3}\pi$. **C** $16\sqrt{3}\pi$. **D** $32\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm đoạn QP, khi đó ta có $O'I \perp PQ$.
Suy ra $O'I \perp (MNPQ)$.
hay $O'I = d(O';(MNPQ)) = d(OO';(NMPQ)) = 2$.
Ta có $PI = \sqrt{R^2 - O'I^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow PQ = 4\sqrt{3}$.
Từ giả thiết $MNPQ$ là hình vuông suy ra $l = NP = PQ = 4\sqrt{3}$.
Diện tích xung quanh hình trụ là $S = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot l = 2\pi \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} = 32\sqrt{3}\pi$.

Chọn phương án D

Câu 3. Cho khối nón có thiết diện qua trục là tam giác cân có một góc bằng 120° và cạnh bên bằng a. Tính thể tích khối nón.

A $\dfrac{\pi a^3}{8}$. **B** $\dfrac{3\pi a^3}{8}$. **C** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$. **D** $\dfrac{\pi a^3}{4}$.

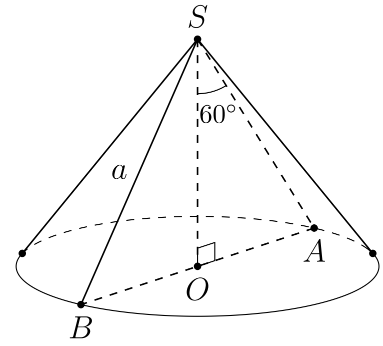
Lời giải.

Theo giả thiết suy ra tam giác SAB cân tại S và $\widehat{ASB} = 120°$. Suy ra $\triangle SOA$ là nửa của tam giác đều. Từ đó

$$SO = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2},\ OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy thể tích của khối nón bằng

$$V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{\text{đáy}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{a^3\pi}{8}.$$



Chọn phương án A

Câu 4. Cho hình nón có chiều cao $h = 20$ (cm), bán kính đáy $r = 25$ (cm). Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12 (cm). Tính diện tích của thiết diện đó.

A $S = 300$ (cm^2). **B** $S = 500$ (cm^2). **C** $S = 400$ (cm^2). **D** $S = 406$ (cm^2).

Lời giải.

Gọi thiết diện là tam giác SMN.

Vẽ $OI \perp MN$ tại I (I là trung điểm MN) và $OH \perp SI$ tại H.

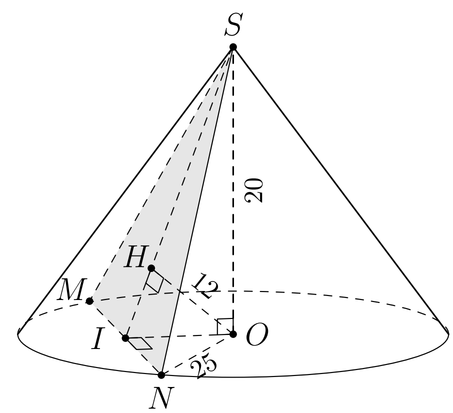
Khi đó $\mathrm{d}(O, (SMN)) = OH = 12$ (cm).

Có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OI^2} \Rightarrow OI = 15$ (cm).

Có $SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = 25$ (cm).

Có $MN = 2IN = 2\sqrt{ON^2 - OI^2} = 40$ (cm).

Vậy $S_{SMN} = \dfrac{1}{2} SI \cdot MN = 500$ (cm^2).



Chọn phương án B

Câu 5. Cho hình trụ bán kính đáy là 5 và chiều cao bằng 6. Cắt hình chóp bởi một mặt phẳng cách trục một khoảng 4. Tìm diện tích thiết diện.

A 6. **B** 36. **C** 30. **D** 24.

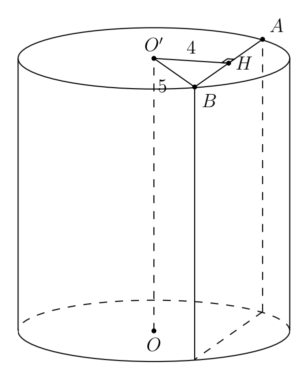
Lời giải.

Vì OO' song song với thiết diện nên khoảng cách từ O' đến thiết diện là 4.

Gọi giao điểm của thiết diện và đường tròn (O') là A và B. Vẽ $O'H \perp AB$ ta có $O'A = O'B = 5$ và $O'H = 4$.

Ta có $HB = \sqrt{O'B^2 - O'H^2} = 3 \Rightarrow AB = 6$.

Do đó diện tích thiết diện là $S = 6 \cdot 6 = 36$.



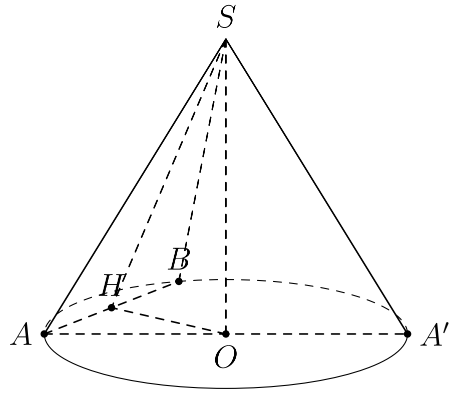
Chọn phương án B

Câu 6. Cho hình nón có bán kính đáy bằng a và chiều cao $a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón cắt hình nón này theo một thiết diện. Tính giá trị lớn nhất của thiết diện này.

A $2a^2\sqrt{3}$. **B** $a^2\sqrt{3}$. **C** $2a^2$. **D** $a^2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Xét hình nón như hình vẽ.



Giả sử (P) đi qua đỉnh cắt hình nón theo một thiết diện là $\triangle SAB$ (theo hình vẽ). Ta có

$SA = SB = \sqrt{SO^2 + OA^2} = 2a$.

Do đó $\triangle SAA'$ là tam giác đều.

$S_{\triangle SAB} = \dfrac{1}{2} SA \cdot SB \cdot \sin \widehat{ASB}$.

$S_{\triangle SAB}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \sin \widehat{ASB}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \widehat{ASB} = 90^\circ$.

Vậy $\max\left(S_{\triangle SAB}\right) = 2a^2$.

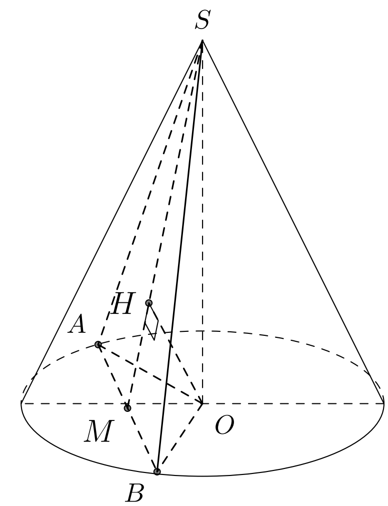
Chọn phương án C

Câu 7. Cho hình nón tròn xoay có chiều cao $h = 20$, bán kính $r = 25$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12. Tính diện tích của thiết diện đó.

A $S = 500$. **B** $S = 400$. **C** $S = 300$. **D** $S = 406$.

Lời giải.

Giả sử thiết diện qua đỉnh của hình nón (N) là tam giác cân SAB.



Gọi M là trung điểm AB và H là hình chiếu của O lên SM.

Ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{OS^2} \Rightarrow OM = 15$.

Tam giác SMO vuông nên $SO \cdot OM = OH \cdot SM$

$\Rightarrow SM = \dfrac{SO \cdot OM}{OH} = 25$ cm.

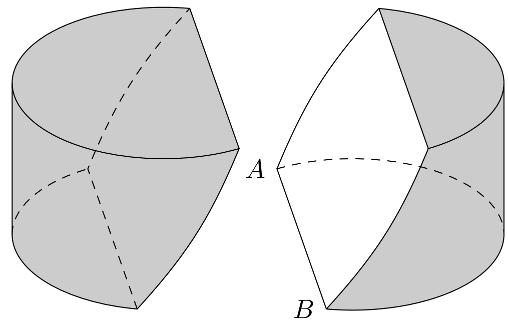
Tam giác OMA vuông tại M nên $MA^2 = \sqrt{OA^2 - OM^2} = 20$.

Diện tích thiết diện: $S_{\Delta SAB} = 20 \cdot 25 = 500$.

Chọn phương án A

Câu 8.

Một khối gỗ có hình trụ với bán kính đáy bằng 6 và chiều cao bằng 8. Trên một đường tròn đáy nào đó lấy hai điểm A, B sao cho cung AB có số đo $120°$. Người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua A, B và tâm của hình trụ (tâm của hình trụ là trung điểm của đoạn nối tâm hai đáy) để được thiết diện như hình vẽ. Biết diện tích thiết diện thu được có dạng $S = a\pi + b\sqrt{3}$. Tính $P = a + b$.



A $P = 60$. **B** $P = 30$. **C** $P = 50$. **D** $P = 45$.

Lời giải.

Gọi (α) là mặt phẳng chứa thiết diện.

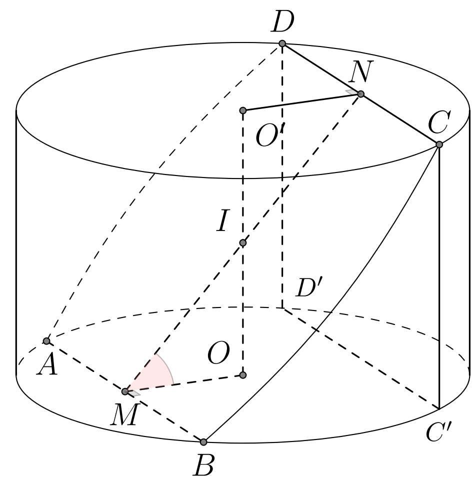
Gọi M là trung điểm AB; I là trung điểm OO'.

MI cắt đáy trên tại N; kẻ CD qua N, song song với AB thì ta được thiết diện được giới hạn bởi các đoạn thẳng AB, CD và các cung AD, BC như hình vẽ.

M là trung điểm AB thì $OM \perp AB$ nên góc giữa (α) và (ABO) là $\widehat{IMO}$.

Ta có $OM = OB \cdot \cos 60° = 3 \Rightarrow MI = 5$ nên $\cos\left((\alpha), (ABO)\right) = \dfrac{3}{5}$.

Gọi C', D' lần lượt là hình chiếu của C, D lên (ABO) thì $ABC'D'$ là hình chiếu của $ABCD$ lên (ABO).



Ta có

$$S_{ABC'D'} = 2\left(S_{\triangle OAB} + S_{\text{quạt}OBC'}\right) = 2\left(\frac{1}{2}OB \cdot OA \cdot \sin 120° + \frac{1}{6}\pi \cdot 36\right) = 18\sqrt{3} + 12\pi.$$

Suy ra $S_{ABCD} = \dfrac{S_{ABC'D'}}{\cos\left((\alpha), (ABO)\right)} = 30\sqrt{3} + 20\pi$.

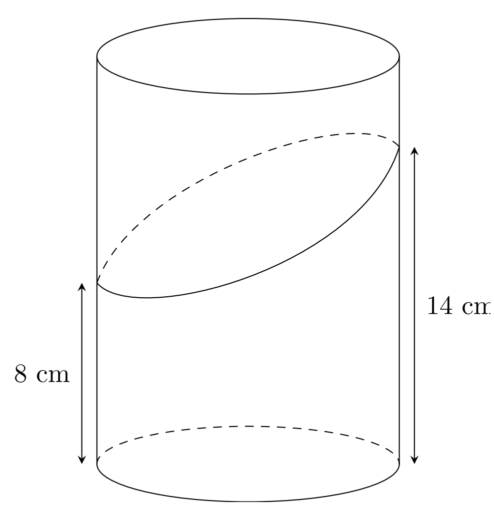
Vậy $P = 20 + 30 = 50$.

Chọn phương án C

Câu 9.

Cắt một khối trụ cao 18 cm bởi một mặt phẳng, ta được khối hình dưới đây. Biết rằng thiết diện là một elip, khoảng cách từ điểm thuộc thiết diện gần đáy nhất và điểm thuộc thiết diện xa mặt đáy nhất lần lượt là 8 cm và 14 cm. Tính tỉ số thể tích của hai khối được chia ra (khối nhỏ chia khối lớn).

A $\dfrac{2}{11}$. **B** $\dfrac{1}{2}$. **C** $\dfrac{5}{11}$. **D** $\dfrac{7}{11}$.



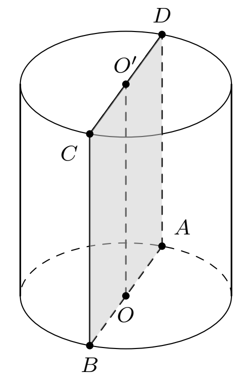
Lời giải.

Thể tích khối trụ là $V = 18\pi R^2$, với R là bán kính khối trụ.
Thể tích khối bên dưới là $V_1 = \dfrac{\pi R^2(8+14)}{2} = 11\pi R^2$.
Thể tích khối bên trên là $V_2 = V - V_1 = 7\pi R^2$.
Vậy tỉ số thể tích cần tìm là $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{7\pi R^2}{11\pi R^2} = \dfrac{7}{11}$.
Chọn phương án D

Câu 10. Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có AB và CD thuộc hai đáy của hình trụ, $AB = 4a$, $AC = 5a$. Thể tích của khối trụ là?

A $4\pi a^3$. B $16\pi a^3$. C $12\pi a^3$. D $8\pi a^3$.

Lời giải.



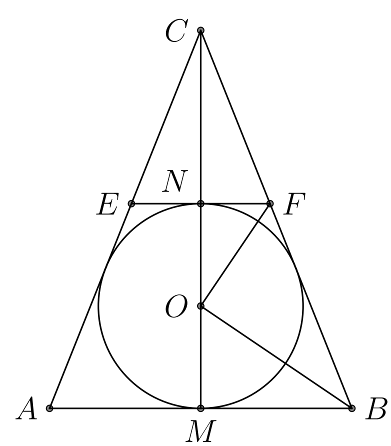
$r = \dfrac{AB}{2} = 2a$.
$l = h = BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 3a$.
$V = \pi r^2 h = \pi(2a)^2 3a = 12\pi a^3$.
Chọn phương án C

Câu 11. Một hình nón cắt bởi mặt phẳng (P) song song với đáy. Mặt phẳng (P) chia hình nón thành 2 phần (N_1) và (N_2). Cho hình cầu nội tiếp (N_2) sao cho thể tích hình cầu bằng một nửa thể tích của (N_2). Một mặt phẳng đi qua trục hình nón và vuông góc với đáy cắt (N_2) theo thiết diện là hình thang cân, tang góc nhọn của hình thang cân là

A 1. B 4. C 2. D $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Xét mặt cắt qua trục của hình nón (như hình vẽ).
Đặt $MB = x > 0$ và $\widehat{MBF} = \alpha$. Ta có



— $OM = MB \cdot \tan \widehat{MBO} = x \cdot \tan \dfrac{\alpha}{2}$;

— thể tích khối cầu là $V_1 = \dfrac{4}{3}\pi OM^3 = \dfrac{4}{3}\pi x^3 \tan^3 \dfrac{\alpha}{2}$;

— $\widehat{NFB} + \widehat{MBF} = 180^\circ$ (trong cùng phía)
$\Rightarrow 2\widehat{NFO} + 2\widehat{MBO} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{NFO} = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$;

— $NF = ON \cdot \cot \widehat{NFO} = x \cdot \tan \dfrac{\alpha}{2} \cdot \tan \dfrac{\alpha}{2} = x \cdot \tan^2 \dfrac{\alpha}{2}$;

— $MN = 2OM = 2x \tan \dfrac{\alpha}{2}$;

— thể tích hình nón cụt (N_2) là

$$V_2 = \frac{\pi \cdot MN}{3}\left(MB^2 + NF^2 + MB \cdot NF\right) = \frac{2\pi x \tan \frac{\alpha}{2}}{3}\left(x^2 + x^2 \tan^4 \frac{\alpha}{2} + x^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2}\right);$$

Ta có $V_2 = 2V_1 \Leftrightarrow \tan\dfrac{\alpha}{2}\cdot\left(1+\tan^4\dfrac{\alpha}{2}+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}\right) = 4\tan^3\dfrac{\alpha}{2}$.

Đặt $t = \tan\dfrac{\alpha}{2}$. Do $\alpha \in \left(0;\dfrac{pi}{2}\right)$ nên $t=\tan\dfrac{\alpha}{2} \in (0;1)$. Ta có phương trình

$$t\cdot(t^4+t^2+1) = 4t^3 \Leftrightarrow t^4+t^2+1 = 4t^2 \Leftrightarrow t^4-3t^2+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} & \text{(loại vì } t\in(0;1)) \\ t^2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} & \text{(nhận).}\end{array}\right.$$

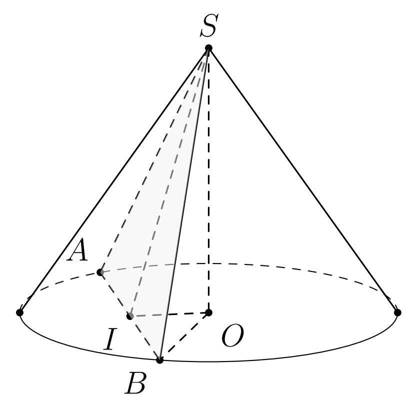
$t^2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow t = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{2t}{1-t^2} = 2.$

Chọn phương án C

Câu 12. Một hình nón có đường sinh bằng a và góc ở đỉnh bằng 90°. Cắt hình nón bằng mặt phẳng (P) đi qua đỉnh sao cho góc giữa (P) và mặt đáy hình nón bằng 60°. Khi đó diện tích thiết diện là

A $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$. **B** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **C** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$. **D** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.



Giả sử mặt phẳng (P) cắt mặt phẳng đáy tại hai điểm A, B. Khi đó thiết diện của hình nón cắt bởi mặt phẳng (P) là tam giác cân SAB.

Vì hình nón có góc ở đỉnh bằng 90° nên $\widehat{BSO} = 45^\circ$.

Do đó tam giác SBO vuông cân tại O, suy ra

$$SO = OB = \frac{SB}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Gọi I là trung điểm AB. Khi đó $OI \perp AB$ và do đó góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng đáy là góc $\widehat{SIO}$.

Xét tam giác SIO vuông tại O, ta có $OI = \dfrac{SO}{\tan 60^\circ} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$ và $SI = \dfrac{SO}{\sin 60^\circ} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Suy ra $AB = 2IB = 2\sqrt{OB^2-OI^2} = 2\sqrt{\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{a^2}{6}} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

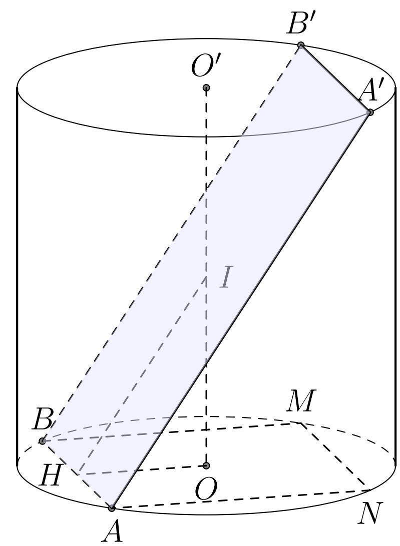
Vậy diện tích thiết diện là $S_{\Delta SAB} = \dfrac{1}{2}AB\cdot SI = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

Chọn phương án A

Câu 13. Cho khối trụ có chiều cao $h = 16$ và hai đáy là hai hình tròn tâm O, O' với bán kính $R = 12$. Gọi I là trung điểm của OO' và AB là một dây cung của đường tròn (O) sao cho $AB = 12\sqrt{3}$. Tính diện tích thiết diện của khối trụ với mặt phẳng (IAB).

A $120\sqrt{3}+80\pi$. **B** $48\pi+24\sqrt{3}$. **C** $60\sqrt{3}+40\pi$. **D** $120\sqrt{3}$.

Lời giải.



(IAB) cắt khối trụ theo thiết diện như hình vẽ.
Gọi α là góc giữa (IAB) và đáy; H là trung điểm của AB.
Ta có: $IH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{12^2 - (6\sqrt{3})^2} = 6$.
$\Rightarrow IH = \sqrt{IO^2 + OH^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.
Ta có: $\cos\alpha = \cos\widehat{IHO} = \dfrac{OH}{IH} = \dfrac{6}{10}$.
Diện tích của thiết diện của khối trụ cắt bởi (IAB) là S.
Hình chiếu của S trên mặt đáy tâm O là hình giới hạn bởi đường tròn tâm O, bán kính 12 và hai đường thẳng AB và MN; gọi diện tích của hình này là S_1.

Khi đó, $S_1 = 4\displaystyle\int_0^6 \sqrt{144 - x^2}\mathrm{d}x = 4\left(18\sqrt{3} + 12\pi\right) = 72\sqrt{3} + 48\pi$.

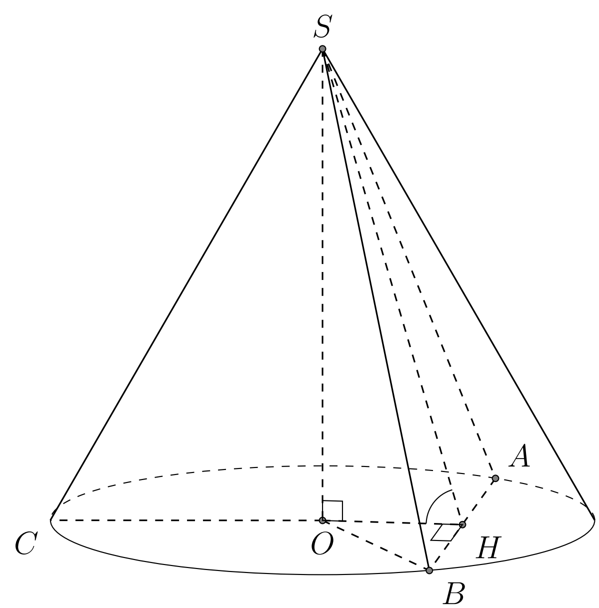
Ta có: $S_1 = S \cdot \cos\alpha \Rightarrow S = \dfrac{10}{6}\left(72\sqrt{3} + 48\pi\right) = 120\sqrt{3} + 80\pi$.

Chọn phương án A

Câu 14. Cho hình nón có đường sinh bằng $2a$ và góc ở đỉnh bằng 90°. Cắt hình nón bằng mặt phẳng (P) đi qua đỉnh sao cho góc giữa (P) và mặt đáy hình nón bằng 60°. Tính diện tích S của thiết diện tạo thành.

A $S = \dfrac{4\sqrt{2}a^2}{3}$. **B** $S = \dfrac{\sqrt{2}a^2}{3}$. **C** $S = \dfrac{8\sqrt{2}a^2}{3}$. **D** $S = \dfrac{5\sqrt{2}a^2}{3}$.

Lời giải.



Theo bài ra ta có tam giác SOC vuông cân ở O suy ra $OC = SO = a\sqrt{2}$.
Giả sử mặt phẳng (P) cắt đường tròn đáy theo dây cung AB. Gọi H là trung điểm của AB suy ra $OH \perp AB$, kết hợp với SO vuông góc với đáy suy ra $AB \perp (SOH)$, từ đó suy ra $\widehat{SHO} = 60^\circ$.
Trong tam giác vuông SOH có

$$OH = SO\tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{3},$$

$$SH = \frac{SO}{\sin 60^\circ} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}.$$

Trong tam giác vuông OHB có

$$BH^2 = OB^2 - OH^2 = 2a^2 - \frac{6a^2}{9} = \frac{12a^2}{9} \Rightarrow BH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Từ đó ta có diện tích thiết diện $S_{\triangle SAB} = \dfrac{SH \cdot AB}{2} = SH \cdot BH = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3} \cdot \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{4a^2\sqrt{2}}{3}$.

Chọn phương án A

Câu 15. Một hình trụ có bán kính đáy $r = 5$ cm và khoảng cách giữa hai đáy bằng 7 cm. Cắt khối trụ bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục 3 cm. Tính diện tích S của thiết diện đó.

(A) $S = 56$ cm^2. (B) $S = 54$ cm^2. (C) $S = 60$ cm^2. (D) $S = 62$ cm^2.

Lời giải.

Ta có thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ như hình vẽ.

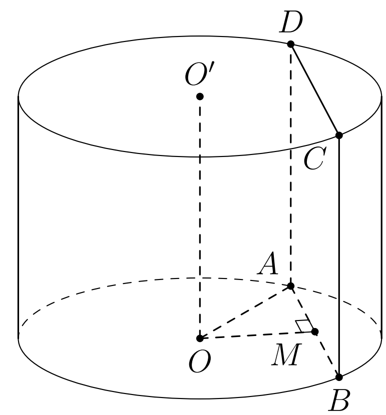
Gọi M là trung điểm của AB.

Ta có $OM \perp AB$ và $\mathrm{d}\left(OO', (ABCD)\right) = 3 = OM$.

Khi đó, $AM = \sqrt{AO^2 - OM^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Rightarrow AB = 8$ cm.

Mặt khác $BC = OO' = 7$ cm.

Vậy diện tích thiết diện là $S_{ABCD} = 7 \cdot 8 = 56$ cm^2.



Chọn phương án (A)

Câu 16. Cho khối trụ có bán kính đáy bằng 4 cm và chiều cao bằng 5 cm. Gọi AB là một dây cung của đáy sao cho $AB = 4\sqrt{3}$ cm. Người ta dựng một mặt phẳng (P) đi qua A, B và tạo với mặt phẳng đáy của hình trụ góc 60°. Diện tích của thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (P) và hình trụ là bao nhiêu?

(A) $\dfrac{8(4\pi - 3\sqrt{3})}{3}$cm^2. (B) $\dfrac{4(4\pi - \sqrt{3})}{3}$cm^2. (C) $\dfrac{4(4\pi - 3\sqrt{3})}{3}$cm^2. (D) $\dfrac{8(4\pi - \sqrt{3})}{3}$cm^2.

Lời giải.

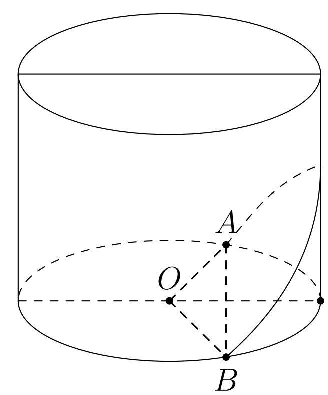
Gọi S, S' lần lượt là diện tích của thiết diện và hình chiếu của thiết diện trên mặt phẳng đáy.

Khi đó ta có $S' = S \cdot \cos 60^\circ$, suy ra $S = 2S'$.

Ta lại có $S' = S_{\text{quạt}OAB} - S_{\triangle OAB}$.

Trong đó, $\widehat{AOB} = 120^\circ$, $S_{\text{quạt}OAB} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2\pi}{3} \cdot OA^2 = \dfrac{16\pi}{3}$; $S_{\triangle OAB} = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

Vậy $S = 2 \cdot \left(\dfrac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}\right) = 8 \cdot \left(\dfrac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3}\right)$ (cm^2).



Chọn phương án (A)

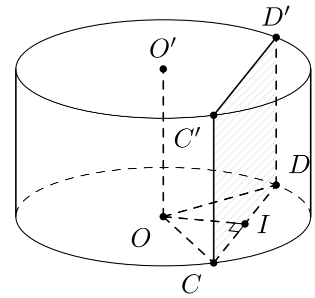
Câu 17. Một hình trụ có bán kính R, chiều cao bằng $R\sqrt{3}$. Thiết diện song song và cách trục một khoảng bằng $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ có diện tích là

(A) $\dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}$. (B) $R^2\sqrt{3}$. (C) $\dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$. (D) $\dfrac{R^2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Giả sử thiết diện song song với trục là hình chữ nhật $CDD'C'$ như hình vẽ bên.
Gọi I là trung điểm CD. Ta chứng minh được $OI \perp (CDD'C')$.
Mặt khác, do $OO' \parallel (CDD'C')$ nên

$$\mathrm{d}(OO', (CDD'C')) = \mathrm{d}(O, (CDD'C')) = OI = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$



$CD = 2IC = 2\sqrt{OC^2 - OI^2} = 2\sqrt{R^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2} = R.$
Suy ra $S_{CDD'C'} = CD \cdot CC' = R \cdot R\sqrt{3} = R^2\sqrt{3}.$
Chọn phương án B

Câu 18. Cho hình nón tròn xoay có chiều cao $h = 20$ cm, bán kính đáy $r = 25$ cm. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12 cm. Tính diện tích của thiết diện đó.

A $S = 400\text{ cm}^2$. **B** $S = 500\text{ cm}^2$. **C** $S = 406\text{ cm}^2$. **D** $S = 300\text{ cm}^2$.

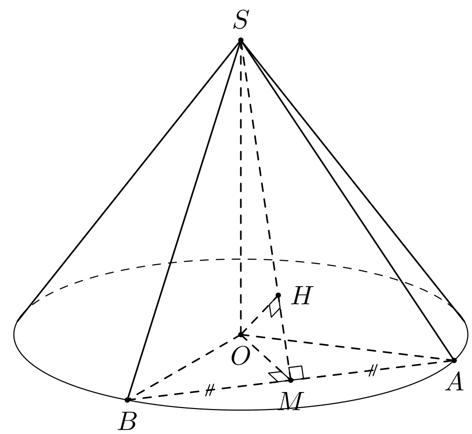
Lời giải.

Giả sử thiết diện đã cho là tam giác SAB, với S là đỉnh và O là tâm đường tròn đáy của hình nón.
Gọi M là trung điểm AB, H là hình chiếu vuông góc của O trên SM. Khi đó ta có $OH \perp (SAB)$, suy ra

$$OH = \mathrm{d}\left[O; (SAB)\right] = 12\,\text{cm}.$$

Xét tam giác SOM vuông tại O, ta có

$$\frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OH^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{12^2} - \frac{1}{20^2} = \frac{1}{225}$$
$$\Rightarrow OM = 15.$$



$AM = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20 \Rightarrow AB = 2AM = 40$ cm.
$SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$ cm.
Diện tích thiết diện SAB là

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot SM = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 25 = 500\,\text{cm}^2.$$

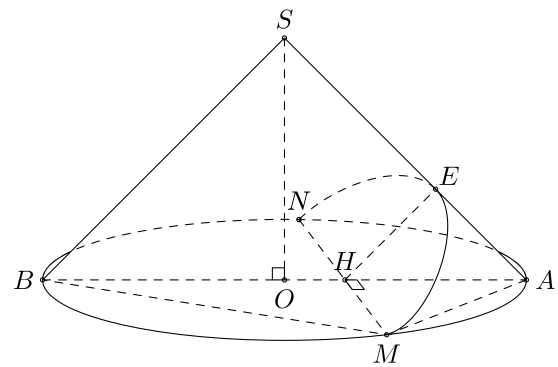
Chọn phương án B

Câu 19. Khi cắt hình nón chiều cao bằng 16 cm, đường kính đáy bằng 24 cm bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện có diện tích lớn nhất gần với giá trị nào sau đây?

A 170. **B** 208. **C** 294. **D** 260.

Lời giải.

Cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện là một parabol. Với dây cung bất kỳ chứa đoạn MH như hình vẽ, suy ra tồn tại đường kính $AB \perp MH$.
Trong tam giác SAB, kẻ $HE \parallel SB$, $E \in SA$ nên thiết diện là parabol nhận HE làm trục.



Đặt $AH = x$ (với $0 < x < 24$).
Trong tam giác ABM có: $HM^2 = BH \cdot AH = x(24 - x)$.
Trong tam giác SAB có: $\dfrac{HE}{BS} = \dfrac{AH}{AB} \Leftrightarrow HE = \dfrac{AH}{AB} \cdot BS = \dfrac{AH}{AB} \cdot \sqrt{SO^2 + OB^2} = \dfrac{5x}{6}$.
Thiết diện thu được là một parabol có diện tích:

$$\begin{aligned} S &= \frac{4}{3}MH \cdot HE = \frac{10}{9} \cdot \sqrt{24x^3 - x^4} \\ &= \frac{10}{9}\sqrt{x \cdot x \cdot x(24 - x)} \\ &= \frac{10}{9\sqrt{3}} \cdot \sqrt{x \cdot x \cdot x \cdot (72 - 3x)} \\ &\leq \frac{10}{9\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{x + x + x + (72 - 3x)}{4}\right)^4} \approx 207{,}8 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

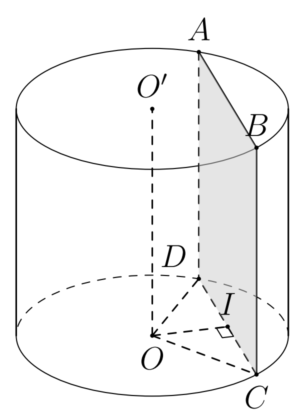
Dấu "=" xảy ra khi $x = 72 - 3x \Leftrightarrow x = 18$.
Vậy thiết diện có diện tích lớn nhất là: $\dfrac{10}{9}\sqrt{34992} \approx 207{,}8 \text{ cm}^2$.
Chọn phương án B

Câu 20. Một hình trụ có bán kính đáy bằng a và chiều cao bằng $2a$. Mặt phẳng (P) song song với trục của hình trụ và cắt hình trụ theo thiết diện là hình chữ nhật có diện tích bằng a^2. Tính khoảng cách giữa trục của hình trụ và mặt phẳng (P)

A $2\pi a$. **B** $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{15}}{4}$.

Lời giải.

Giả sử $ABCD$ là thiết diện thỏa yêu cầu bài toán.
Suy ra $a^2 = 2a \cdot CD \Leftrightarrow CD = \dfrac{a}{2}$.
Gọi I là hình chiếu vuông góc của O trên CD suy ra I là trung điểm của CD nên $CI = \dfrac{1}{2}CD = \dfrac{a}{4}$.
Trong $\triangle OIC$, ta có $OI = \sqrt{OC^2 - IC^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a}{4}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{4}$.
Vậy $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



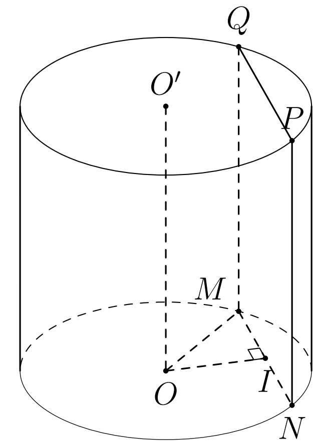
Chọn phương án D

Câu 21. Một hình trụ có chiều cao bằng $9a$. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một đoạn $d = 3a$ ta được thiết diện có diện tích là $S = 72a^2$. Thể tích khối trụ bằng

A $225\pi a^3$. **B** $\dfrac{70\pi a^3}{3}$. **C** $350\pi a^3$. **D** $45\pi a^3$.

Lời giải.

Gọi M, N, P, Q là giao điểm của mặt phẳng với hai đường tròn tâm (O) và (O').



Khi đó $MNPQ$ là hình chữ nhật với $MQ = 9a$. Gọi I là trung điểm của MN, ta có $OI = 3a$.

Theo giả thiết $S_{MNPQ} = 72a^2$, suy ra $72a^2 = MQ \cdot MN \Rightarrow MN = 8a \Rightarrow IM = 4a$.

Xét tam giác vuông MOI, ta có

$MO = \sqrt{OI^2 + IM^2} = \sqrt{9a^2 + 16a^2} = 5a$.

Vậy hình trụ có bán kính đáy $R = 5a$, chiều cao $h = 9a$. Từ đó suy ra thể tích hình trụ là $V = \pi R^2 \cdot h = 225\pi a^3$.

Chọn phương án A

Câu 22. Một hình nón đỉnh S bán kính $R = a\sqrt{3}$, góc ở đỉnh là 120°. Mặt phẳng qua đỉnh hình nón cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác. Diện tích lớn nhất của tam giác đó bằng

A $\sqrt{3}a^2$. **B** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$. **C** $2\sqrt{3}a$. **D** $2a^2$.

Lời giải.

Trong tam giác SOB có $h = SO = \dfrac{OM}{\tan 60^\circ} = a$.

Đặt $OH = x \Rightarrow BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{3a^2 - x^2}$

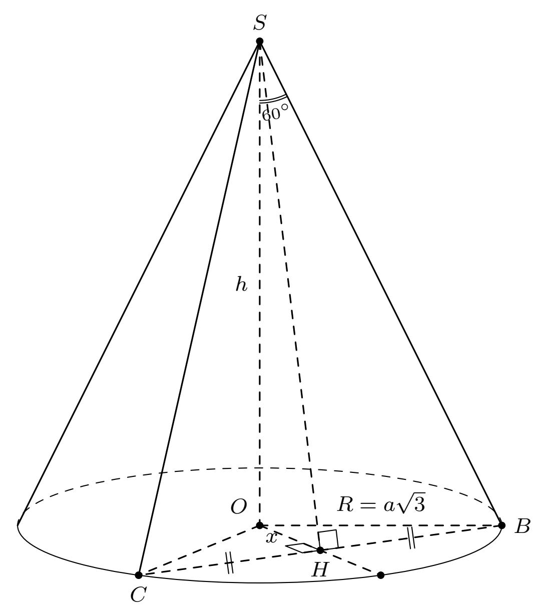
$\Rightarrow BC = 2BH = 2\sqrt{3a^2 - x^2}$.

$SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = \sqrt{a^2 + x^2}$.

Diện tích của tam giác SBC

$$\begin{aligned} S_{SBC} &= \frac{1}{2} SH \cdot BC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + x^2} \cdot 2\sqrt{3a^2 - x^2} \\ &= \sqrt{-x^4 + 2a^2x^2 + 3a^4} \\ &= \sqrt{-\left(x^2 - a^2\right) + 4a^4} \le 2a^2. \end{aligned}$$

Vậy diện tích $\triangle SBC$ lớn nhất bằng $2a^2$.



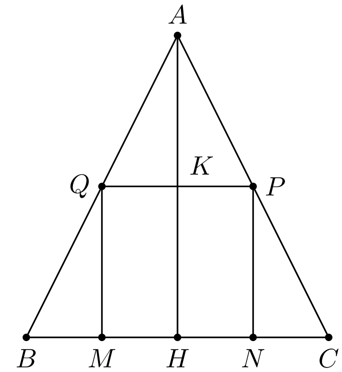
Chọn phương án D

Câu 23. Cho hình nón có bán kính đáy R, chiều cao h. Bán kính r của hình trụ nội tiếp hình nón mà có thể tích lớn nhất là

A $r = \dfrac{R}{4}$. **B** $r = \dfrac{R}{2}$. **C** $r = \dfrac{2R}{3}$. **D** $r = \dfrac{R}{3}$.

Lời giải.

Cắt hình nón (N) theo mặt phẳng đi qua trục AH của nó ta được thiết diện là tam giác cân ABC, mặt phẳng này cắt hình trụ (T) nội tiếp hình nón theo thiết diện là hình chữ nhật $MNPQ$ (như hình vẽ).



Gọi h' là độ dài đường cao của hình trụ. Ta có

$$\frac{h'}{h} = \frac{KH}{AH} = \frac{QB}{AB} = \frac{AB - AQ}{AB} = 1 - \frac{AQ}{AB} = 1 - \frac{r}{R}.$$

Do đó $h' = h\left(1 - \frac{r}{R}\right)$.

Thể tích khối trụ nội tiếp hình nón là

$$V = \pi r^2 h' = \pi h\left(r^2 - \frac{r^3}{R}\right).$$

Xét hàm số $f(r) = \pi h\left(r^2 - \frac{r^3}{R}\right)$ với $0 < r < R$.

Ta có $f'(r) = \pi h\left(2r - \frac{3r^2}{R}\right)$, $f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \frac{2R}{3}$.

Bảng biến thiên

r	0		$\frac{2R}{3}$		R
$f'(r)$		$+$	0	$-$	
$f(r)$	0	$\nearrow$	$\frac{4\pi R^2}{27}$	$\searrow$	0

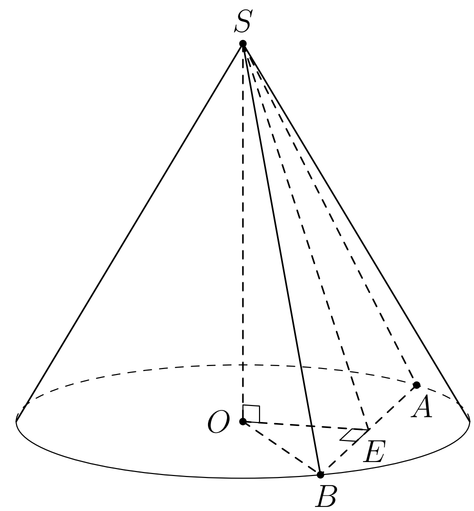
Từ bảng biến thiên ta có $\max V = \frac{4\pi R^2}{27}$ đạt được khi $r = \frac{2R}{3}$.

Chọn phương án C

Câu 24. Hình nón $\mathcal{N}$ có đỉnh S, tâm đường tròn đáy là O, góc ở đỉnh bằng 120°. Một mặt phẳng qua S cắt hình nón $\mathcal{N}$ theo thiết diện là tam giác vuông SAB. Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO bằng 3. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón $\mathcal{N}$.

A. $S_{xq} = 27\sqrt{3}\pi$. B. $S_{xq} = 18\sqrt{3}\pi$. C. $S_{xq} = 9\sqrt{3}\pi$. D. $S_{xq} = 36\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.



Gọi E là trung điểm của AB, ta có $\mathrm{d}(SO, AB) = OE = 3$.

Giả sử bán kính đường tròn đáy của hình nón là R, ta có $OB = R \Rightarrow SB = \dfrac{OB}{\sin 60^\circ} = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$.

$\triangle SEB$ vuông cân nên $BE = SE = \dfrac{SB}{\sqrt{2}} = \dfrac{2R}{\sqrt{6}}$.

$\triangle EBO$ vuông tại E nên $OB^2 = OE^2 + BE^2$

$\Rightarrow R^2 = 3^2 + \left(\dfrac{2R}{\sqrt{6}}\right)^2 \Rightarrow R = 3\sqrt{3}$.

Suy ra $SB = \dfrac{2 \cdot 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 6$.

Vậy diện tích xung quanh hình nón là

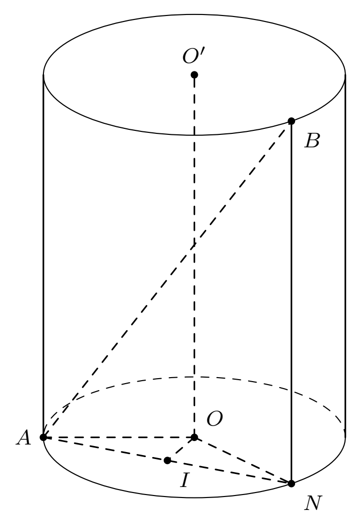
$S_{xq} = \pi \cdot 3\sqrt{3} \cdot 6 = 18\sqrt{3}\pi$.

Chọn phương án B

Câu 25. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), thiết diện qua trục là hình vuông. Gọi A, B là hai điểm lần lượt nằm trên hai đường tròn (O) và (O'). Biết $AB = 2a$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OO' bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Bán kính đáy bằng

A $\dfrac{a\sqrt{14}}{3}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{14}}{4}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{14}}{9}$.

Lời giải.



Kẻ $BN \parallel OO'$, đặt $ON = x$, khi đó $BN = 2x$.

Do $OO' \parallel BN \Rightarrow OO' \parallel (ABN)$ nên

$\mathrm{d}(OO', AB) = \mathrm{d}(OO', (ABN)) = \mathrm{d}(O, (ABN))$.

Gọi I là trung điểm AN thì $OI \perp (ABN)$.

Vậy $\mathrm{d}(O, (ABN)) = OI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét $\triangle ABN$ vuông tại N, ta có

$AN^2 = AB^2 - BN^2 = 4a^2 - 4x^2$.

Xét $\triangle OIN$ vuông tại I, ta có

$ON^2 = OI^2 + IN^2 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{1}{4}(4a^2 - 4x^2) \Rightarrow x = \dfrac{a\sqrt{14}}{4}$.

Vậy bán kính đáy là $R = \dfrac{a\sqrt{14}}{4}$.

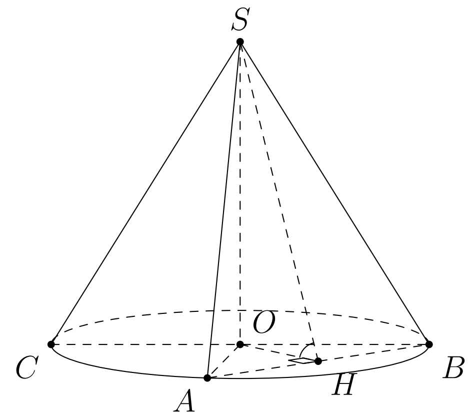
Chọn phương án C

Câu 26. Cho hình nón có bán kính đáy là R và góc ở đỉnh là 60°. Một thiết diện qua đỉnh hình nón và chắn trên đáy một cung có số đo 90°. Tính diện tích của thiết diện.

A $\dfrac{3R^2}{2}$. **B** $\dfrac{R^2\sqrt{6}}{2}$. **C** $\dfrac{R^2\sqrt{7}}{2}$. **D** $\dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi thiết diện là tam giác SAB, góc ở đỉnh là $\widehat{CSB}$, O là tâm đường tròn đáy và H là trung điểm của AB.



Theo giả thiết, góc $\widehat{CSB} = 60^\circ$ nên tam giác SCB đều, suy ra $SB = BC = 2R$ và $SO = R\sqrt{3}$.

Tam giác OAB vuông tại O có $OA = OB = R$ suy ra $AB = R\sqrt{2}$ và $OH = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = \dfrac{R\sqrt{14}}{2}$.

Suy ra $S_{SAB} = \dfrac{1}{2}SH \cdot AB = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{R\sqrt{14}}{2} \cdot R\sqrt{2} = \dfrac{R^2\sqrt{7}}{2}$.

Chọn phương án C

Câu 27. Một hình trụ có bán kính đáy bằng R và thiết diện qua trục là hình vuông. Tính thể tích của khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp hình trụ.

A) $2R^3$. B) $3R^3$. C) $4R^3$. D) $5R^3$.

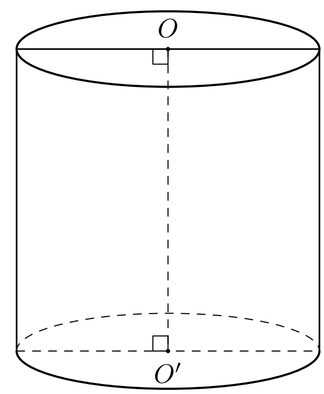
Lời giải.

Thiết diện qua trục là hình vuông nên $h = 2R$.

Gọi x là cạnh đáy của khối lăng trụ tứ giác đều.

Vì đáy của khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp đường tròn có bán kính R nên $x\sqrt{2} = 2R \Rightarrow x = R\sqrt{2}$.

Thể tích khối lăng trụ là $V = S \cdot h = x^2 \cdot h = 2R^2 \cdot 2R = 4R^3$.



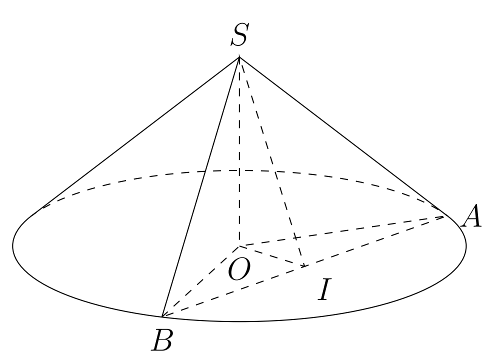
Chọn phương án C

Câu 28. Cho khối nón (N) đỉnh S, có chiều cao là $a\sqrt{3}$ và độ dài đường sinh là $3a$. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh S, cắt và tạo với mặt đáy của khối nón một góc 60°. Tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) và khối nón (N).

A) $2a^2\sqrt{5}$. B) $2a^2\sqrt{3}$. C) $a^2\sqrt{3}$. D) $a^2\sqrt{5}$.

Lời giải.

Khối nón $(\mathscr{N})$ có tâm đáy là O, chiều cao $SO = a\sqrt{3}$ và độ dài đường sinh là $\ell = 3a$.



Giả sử mặt phẳng (P) cắt $(\mathscr{N})$ theo thiết diện là tam giác SAB, suy ra $SA = SB = \ell = 3a$. Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow SI \perp AB$, do đó góc giữa (P) và đáy là $\widehat{SIO} = 60^\circ$.

Xét tam giác vuông SOI có

$SI = \dfrac{SO}{\sin \widehat{SIO}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2a$,

suy ra $IA = \sqrt{SA^2 - SI^2} = \sqrt{9a^2 - 4a^2} = a\sqrt{5}$

$\Rightarrow AB = 2a\sqrt{5}$.

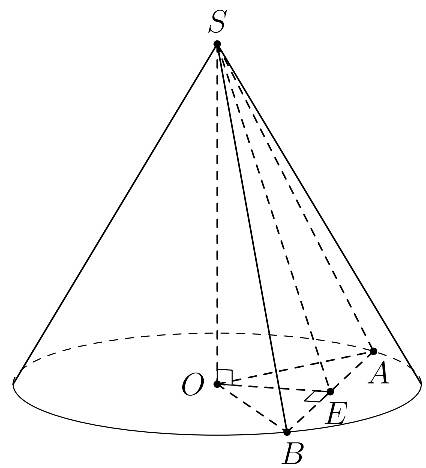
Vậy diện tích thiết diện là $S = \dfrac{1}{2} \cdot SI \cdot AB = \dfrac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a\sqrt{5} = 2a^2\sqrt{5}$.

Chọn phương án (A)

Câu 29. Cho hình nón tròn xoay có chiều cao bằng 4 và bán kính đáy bằng 3. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác cân có độ dài cạnh đáy bằng 2. Diện tích của thiết diện bằng

(A) $2\sqrt{3}$. (B) $\sqrt{6}$. (C) $\sqrt{19}$. (D) $2\sqrt{6}$.

Lời giải.



Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh S của hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là tam giác cân SAB như hình vẽ.

Ta có $OA = OB = 3$; $SO = 4$ và $AB = 2$.

Gọi E là trung điểm của AB. Suy ra $OE \perp AB$.

Ta có

$$OE = \sqrt{OB^2 - EB^2} = 2\sqrt{2}.$$

$\triangle SOE$ vuông tại O nên suy ra

$$SE = \sqrt{SO^2 + OE^2} = 2\sqrt{6}.$$

Vậy diện tích thiết diện là

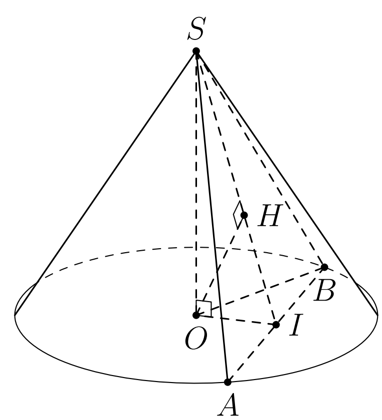
$$S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2}AB \cdot SI = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{6} = 2\sqrt{6}.$$

Chọn phương án (D)

Câu 30. Cho khối nón (N) có chiều cao $h = 20$ cm, bán kính đáy $r = 25$ cm. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua đỉnh của (N) và cách tâm của mặt đáy 12 cm. Khi đó, (α) cắt (N) theo một thiết diện có diện tích bằng

(A) 300 cm^2. (B) 500 cm^2. (C) 406 cm^2. (D) 400 cm^2.

Lời giải.



Giả sử thiết diện là tam giác SAB. Gọi I là trung điểm của AB và H là hình chiếu vuông góc của O trên SI.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp OI \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow AB \perp IH$.

Vậy $OH \perp (SAB)$.

Suy ra $\mathrm{d}(O,(SAB)) = OH = 12$.

Xét tam giác SOI, ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OI^2} + \dfrac{1}{SO^2} \Rightarrow \dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{OH^2} - \dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{1}{225} \Rightarrow OI = 15$. Xét tam giác SOI, ta có $SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = 25$.

Xét tam giác BOI, ta có $BI = \sqrt{OB^2 - OI^2} = 20 \Rightarrow AB = 2BI = 40$.

Vậy $S_{SAB} = \dfrac{1}{2}AB \cdot SI = \dfrac{1}{2} \cdot 40 \cdot 25 = 500\text{ cm}^2$.

Chọn phương án (B)

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. D	3. A	4. B	5. B	6. C	7. A	8. C	9. D	10. C
11. C	12. A	13. A	14. A	15. A	16. A	17. B	18. B	19. B	20. D
21. A	22. D	23. C	24. B	25. C	26. C	27. C	28. A	29. D	30. B

DẠNG 45. TÍCH PHẦN HÀM ẨN

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$ và Khi đó $\int\limits_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $\dfrac{1042}{225}$. Ⓑ $\dfrac{208}{225}$. . Ⓒ $\dfrac{242}{225}$. Ⓓ $\dfrac{149}{225}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\displaystyle\int f'(x)\mathrm{d}x=\int \cos x\cos^2 2x\mathrm{d}x=\int \cos x\left(1-\sin x\right)^2\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sin x \Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow f(x)=\displaystyle\int (1-2t^2)^2\mathrm{d}t=\int\left(1-4t^2+4t^4\right)\mathrm{d}t=t-\frac{4}{3}t^3+\frac{4}{5}t^5+C=\sin x-\frac{4}{3}\sin^3 x+\frac{4}{5}\sin^5 x+C$.

Mà $f(0)=0\Rightarrow C=0$.

Do đó $f(x)=\sin x-\dfrac{4}{3}\sin^3 x+\dfrac{4}{5}\sin^5 x=\sin x\left(1-\dfrac{4}{3}\sin^2 x+\dfrac{4}{5}\sin^4 x\right)=$

$=\sin x\left[1-\dfrac{4}{3}\left(1-\cos^2 x\right)+\dfrac{4}{5}\left(1-\cos^2 x\right)^2\right]$.

Ta có $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\pi}\sin x\left[1-\frac{4}{3}\left(1-\cos^2 x\right)+\frac{4}{5}\left(1-\cos^2 x\right)^2\right]\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1; x=\pi\Rightarrow t=-1$

Khi đó $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{7}{15}-\frac{4}{15}t^2+\frac{4}{5}t^4\right)\mathrm{d}t=\left.\left(\frac{7}{15}t-\frac{4}{45}t^3+\frac{4}{5}t^5\right)\right|_{-1}^{1}=\frac{242}{225}$.

Chọn phương án Ⓒ

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$ và với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có $f'(x)\cdot f(x)-\sin 2x=f'(x)\cdot\cos x-f(x).\sin x$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ $I=1$. Ⓑ $I=\sqrt{2}-1$. Ⓒ $I=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1$. Ⓓ $I=2$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)\cdot f(x)-\sin 2x=f'(x)\cdot\cos x-f(x)\cdot\sin x\Leftrightarrow f'(x)\cdot f(x)-\sin 2x=\left[f(x)\cdot\cos x\right]'$.

Lấy nguyên hàm hai vế: $\int\left[f'(x)\cdot f(x)-\sin 2x\right]\mathrm{d}x=\int\left[f(x)\cdot\cos x\right]'\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \dfrac{f^2(x)}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x=\cos x\cdot f(x)+C$.

Vì $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1\Rightarrow C=0\Rightarrow f^2(x)+\cos 2x=2\cos x\cdot f(x)\Leftrightarrow f^2(x)-2\cos x\cdot f(x)+\cos^2 x=\sin^2 x$.

$\Leftrightarrow\left(f(x)-\cos x\right)^2=\sin^2 x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)-\cos x=\sin x\\ f(x)-\cos x=-\sin x\end{array}\right.$.

Vì $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$ nên nhận $f(x)=\cos x-\sin x$.

Vậy $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x = (\cos x - \sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1.$

Chọn phương án B

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: $f(0) = 2\sqrt{2}, f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(x).f'(x) = (2x+1)\sqrt{1+f^2(x)}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Khi đó giá trị $f(1)$ bằng

A $\sqrt{15}$. **B** $\sqrt{23}$. **C** $\sqrt{24}$. **D** $\sqrt{26}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $2x+1 = \dfrac{f(x)\cdot f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} \Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{f(x)\cdot f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}\,\mathrm{d}x = \int (2x+1)\,\mathrm{d}x.$

Bây giờ ta tính $I = \displaystyle\int \dfrac{f(x)\cdot f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\sqrt{1+f^2(x)} = t \Rightarrow 1 + f^2(x) = t^2 \Rightarrow 2f(x)f'(x)\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t \Rightarrow f(x)f'(x)\mathrm{d}x = t\mathrm{d}t.$

Do đó $I = \displaystyle\int \dfrac{t}{t}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}t = t + C = \sqrt{1+f^2(x)} + C.$

Ta nhận được $\sqrt{1+f^2(x)} + C = x^2 + x$. $f(0) = 2\sqrt{2} \Rightarrow C = -3.$

Từ đó $\sqrt{1+f^2(x)} - 3 = x^2 + x$. Khi $x = 1$ ta có

$\sqrt{1+f^2(1)} - 3 = 1 + 1 \Rightarrow 1 + f^2(1) = 25 \Rightarrow f(1) = \sqrt{24}.$

Chọn phương án C

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(x) = x.\ln\left(\dfrac{x^3}{x.f'(x) - f(x)}\right)$ và $f(1) = 0$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x.$

A $12\ln 13 - 13$. **B** $13\ln 13 - 12$. **C** $12\ln 13 + 13$. **D** $13\ln 13 + 12$.

Lời giải.

Từ giả thiết và

$$f(x) = x.\ln\left(\frac{x^3}{x.f'(x) - f(x)}\right) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \ln\frac{x^3}{x.f'(x) - f(x)}.$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{f(x)}{x}} = \frac{x^3}{x.f'(x) - f(x)} \Leftrightarrow \frac{x.f'(x) - f(x)}{x^2}.\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{x}} = x.$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{x}\right]'.\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{x}} = x. \qquad (1)$$

Lấy nguyên hàm hai vế của (1) suy ra $\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{x}} = \dfrac{x^2}{2} + C.$

Do $f(1) = 0 \Rightarrow C = \dfrac{1}{2}$, nên $\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{x}} = \dfrac{x^2+1}{2} \Rightarrow f(x) = x\ln\dfrac{x^2+1}{2}$ với $x \in (0;+\infty)$.

$I = \displaystyle\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^5 x.\ln\dfrac{x^2+1}{2}\,\mathrm{d}x \qquad (2).$

Đặt $u = \ln\dfrac{x^2+1}{2} \Rightarrow du = \dfrac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$; $dv = x\,\mathrm{d}x$, chọn $v = \dfrac{x^2+1}{2}$.

Theo công thức tích phân từng phần, ta được:

$$I=\left(\frac{x^2+1}{2}.\ln\frac{x^2+1}{2}\right)\Bigg|_1^5-\int\limits_1^5 x\,\mathrm{d}x=13\ln 13-\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^5=13\ln 13-12.$$

Chọn phương án B

Câu 4. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Kết quả $I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(x)}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $I=8$. (B) $I=4$. (C) $I=2$. (D) $I=\frac{1}{4}$.

Lời giải.

Đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=1\Rightarrow t=-1$; $x=-1\Rightarrow t=1$, ta có

$$I=e\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x=-\int\limits_{1}^{-1}\frac{f(-t)}{1+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(-x)}{1+\frac{1}{\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^x f(-x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x.$$

Do $f(x)$ là hàm số chẵn nên $f(x)=f(-x),\forall x\in[-1;1]\Rightarrow I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^x f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

Từ đó suy ra

$$I+I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^x f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\frac{(\mathrm{e}^x+1)f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=4.$$

Vậy $I=2$.

Chọn phương án C

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp một, đạo hàm cấp hai liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f''(x)\,\mathrm{d}x\neq 0$. Giá trị của biểu thức $\frac{\mathrm{e}f'(1)-f'(0)}{\mathrm{e}f(1)-f(0)}$ bằng

(A) -1. (B) 1. (C) 2. (D) 2.

Lời giải.

Đặt $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f''(x)\,\mathrm{d}x=k$.

50 DẠNG TOÁN PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA LẦN 2

— $k = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f''(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}f'(x) = \mathrm{e}^x f'(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x f'(x)\Big|_0^1 - k.$

Suy ra $2k = \mathrm{e}^x f'(x)\Big|_0^1$.

— $k = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}f(x) = \mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1 - k.$

Suy ra $2k = \mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1$.

Vậy $\dfrac{\mathrm{e}f'(1) - f'(0)}{\mathrm{e}f(1) - f(0)} = \dfrac{\mathrm{e}^x f'(x)\Big|_0^1}{\mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1} = 1.$

Chọn phương án B

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $f(0) = 2018$, $f(2) = 2019$. Tính $S = f(3) - f(-1)$.

A $S = \ln 4035$. **B** $S = 4$. **C** $S = \ln 2$. **D** $S = 1$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int \dfrac{1}{x-1}\mathrm{d}x = \ln|x-1| + C$

Khi đó $f(-1) = \ln 2 + C_1$; $f(0) = C_2 = 2018$; $f(2) = C_3 = 2019$; $f(3) = \ln 2 + C_4$

- $\int_2^3 f'(x)dx = \int_2^3 \dfrac{1}{x-1}dx \Leftrightarrow f(3) - f(2) = \ln 2 \Leftrightarrow \ln 2 + C_4 - C_3 = \ln 2 \Rightarrow C_3 = C_4$
- $\int_{-1}^0 f'(x)dx = \int_{-1}^0 \dfrac{1}{x-1}dx \Leftrightarrow f(0) - f(-1) = -\ln 2 \Leftrightarrow C_2 - C_1 - \ln 2 = -\ln 2 \Rightarrow C_1 = C_2$

Vậy $S = f(3) - f(-1) = C_4 - C_1 = 2019 - 2018 = 1$.

Chọn phương án D

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\mathbb{R}$, nhận giá trị dương trên khoảng $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1, f'(x) = f(x) \cdot (3x^2 + 2mx + m)$ với m là tham số. Giá trị của tham số m để $f(3) = e^{-4}$ là

A $m = -2$. **B** $m = \sqrt{3}$. **C** $m = -3$. **D** $m = 4$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 3x^2 + 2mx + m \Rightarrow \int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int (3x^2 + 2mx + m)\,\mathrm{d}x$.

Nên $\ln[f(x)] = x^3 + mx^2 + mx + C \Rightarrow f(x) = e^{x^3 + mx^2 + mx + C}$.

Do $f(1) = 1 \Rightarrow e^{1+2m+C} = 1 \Rightarrow C = -2m - 1$.

Vậy $f(x) = e^{x^3 + mx^2 + mx - 2m - 1} \Rightarrow f(3) = e^{-4} \Leftrightarrow e^{26+10m} = e^{-4} \Leftrightarrow m = -3$.

Chọn phương án C

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$ thỏa mãn $f(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 - x$. Giá trị tích phân $I = \int\limits_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{f(x)}{x^2 + x}\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\frac{8}{9}$. **B** $\frac{16}{9}$. **C** $\frac{2}{3}$. **D** $\frac{3}{4}$.

Lời giải.

Theo giả thiết $f(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 - x$.

Đặt $x = \frac{1}{t} \Rightarrow \mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t; x = 3 \Rightarrow t = \frac{1}{3}; x = \frac{1}{3} \Rightarrow t = 3$.

Suy ra $I = \int\limits_{3}^{\frac{1}{3}} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \frac{1}{t}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{tf\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2 + t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{xf\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2 + x}\,\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow 2I = \int\limits_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{f(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2 + x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{x^3 - x}{x^2 + x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{3}}^{3} (x - 1)\,\mathrm{d}x = \frac{16}{9}$.

$\Rightarrow I = \frac{8}{9}$.

Chọn phương án A

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \tan x f(\cos^2 x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{8} \frac{f\left(\sqrt[3]{x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x = 6$. Tính tích phân $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{f\left(x^2\right)}{x}\,\mathrm{d}x$.

A 4. **B** 6. **C** 7. **D** 10.

Lời giải.

— Xét tích phân $I_1 = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \tan x f(\cos^2 x)\,\mathrm{d}x = 6$.

Đặt $t = \cos^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t = -2\sin x \cos x\,\mathrm{d}x$.

Khi $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{4}$. Ta có

$$I_1 = -\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{-2\sin x \cos x}{2\cos^2 x} f(\cos^2 x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{f(t)}{2t}\,\mathrm{d}t = 6 \Rightarrow \int\limits_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(x)}{2x}\,\mathrm{d}x = 6.$$

— Xét tích phân $I_2 = \int\limits_{1}^{8} \frac{f\left(\sqrt[3]{x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x = t^3 \Rightarrow \mathrm{d}x = 3t^2\,\mathrm{d}t$.
Khi $x = 1 \Rightarrow t = 1$, $x = 8 \Rightarrow t = 2$. Ta có

$$I_2 = \int\limits_1^2 \frac{3t^2 f(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t = 6 \Rightarrow \int\limits_1^2 \frac{f(x)}{2x}\,\mathrm{d}x = 1.$$

— Xét tích phân $I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{f\left(x^2\right)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$. Khi $x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$, khi $x = \sqrt{2} \Rightarrow t = 2$. Ta có

$$I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{2xf(x^2)}{2x^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(t)}{2t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(x)}{2x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{f(x)}{2x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} \frac{f(x)}{2x}\,\mathrm{d}x = 6 + 1 = 7.$$

Chọn phương án C

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(x) + 2f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\frac{3}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}^2}$.
B $\frac{3}{4} - \frac{1}{4\mathrm{e}^2}$.
C $\frac{1}{4} - \frac{1}{4\mathrm{e}^2}$.
D $-\frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}^2}$.

Lời giải.

Phương pháp: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

Cách giải: Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) + 2f(x) = 1 &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} f'(x) + \mathrm{e}^{2x} \cdot 2f(x) = \mathrm{e}^{2x} \\ &\Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{2x} \cdot f(x)\right)' = \mathrm{e}^{2x} \\ &\Rightarrow \mathrm{e}^{2x} \cdot f(x) = \int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} \cdot f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C. \end{aligned}$$

Mà

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ \Rightarrow 1 &= \frac{1}{2} + C \\ \Rightarrow C &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \mathrm{e}^{2x} \cdot f(x) &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow f(x) &= \frac{\mathrm{e}^{2x} + 1}{2\mathrm{e}^{2x}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{2\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x\\ &= \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right)\mathrm{d}x\\ &= \left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}\right)\Bigg|_0^1\\ &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4\mathrm{e}^2}\right)-\left(-\frac{1}{4}\right)\\ &= \frac{3}{4}-\frac{1}{4\mathrm{e}^2}.\end{aligned}$$

Chọn phương án B

Câu 11. Giả sử hàm f có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(1)=1$ và $f(1-x)+x^2f''(x)=2x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int\limits_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. B. 2. C. 0. D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Từ giả thiết $f(1-x)+x^2f''(x)=2x \Rightarrow f(1)=0$.

Suy ra $\int\limits_0^1 x^2f''(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 2x\,\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 f(1-x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x^2\\ \mathrm{d}v=f''(x)\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x\\ v=f'(x).\end{cases}$

Khi đó $\int\limits_0^1 x^2f''(x)\,\mathrm{d}x=x^2f'(x)\Big|_0^1-2\int\limits_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x=1-2I$.

Mà $\int\limits_0^1 2x\,\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 f(1-x)\,\mathrm{d}x=x^2\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1-\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1-xf(x)\Big|_0^1+\int\limits_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x=1+I$.

Suy ra $1-2I=1+I\Rightarrow I=0$.

Chọn phương án C

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và $f(3)=21$, $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=9$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 x\cdot f'(3x)\mathrm{d}x$.

A. $I=6$. B. $I=12$. C. $I=9$. D. $I=15$.

Lời giải.

Đặt $3x=t\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{3}$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=1\Rightarrow t=3.\end{cases}$

$I = \int\limits_0^3 \frac{t}{3} f'(t) \frac{\mathrm{d}t}{3} = \frac{1}{9} \int\limits_0^3 x f'(x) \mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$

Suy ra $I = \frac{1}{9}\left(xf(x)\Big|_0^3 - \int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x \right) = 6.$

Chọn phương án (A)

Câu 13. Cho $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Tính $\int\limits_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = 1$. (B) $I = 2$. (C) $I = 4$. (D) $I = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Khi $x = 1 \Rightarrow t = 1$; khi $x = 4 \Rightarrow t = 2$.

Do đó $I = \int\limits_1^2 f(t) \cdot 2\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$

Chọn phương án (C)

Câu 14. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $\int\limits_{-1}^1 f(x)dx = 2$. Tính $I = \int\limits_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = 1$. (B) $I = 3$. (C) $I = 2$. (D) $I = 4$.

Lời giải.

$I = \int\limits_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^0 \frac{f(x)}{1+e^x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \frac{f(x)}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2$

Xét $I_1 = \int\limits_{-1}^0 \frac{f(x)}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$. Đặt $x = -t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$, đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = -1 \Rightarrow t = 1$

$I_1 = \int\limits_1^0 \frac{f(-t)}{1+e^{-t}}(-\mathrm{d}t) = \int\limits_0^1 \frac{e^t.f(t)}{1+e^t}\,\mathrm{d}t.$

Ta có: $\int\limits_0^1 \frac{e^t \cdot f(t)}{1+e^t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \frac{e^x \cdot f(x)}{1+e^x}\,\mathrm{d}x.$

Suy ra: $I = \int\limits_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{e^t \cdot f(t)}{1+e^t}\,\mathrm{d}t + \int\limits_0^1 \frac{f(t)}{1+e^t}\,\mathrm{d}t$

$$\Rightarrow I = \int\limits_0^1 \frac{\left(1+e^t\right)\cdot f(t)}{1+e^t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

Chọn phương án A

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trong đoạn $[1;e]$, biết $\int\limits_1^e \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = 1, f(e) = 1$.

Tính $I = \int\limits_1^e f'(x).\ln x\,\mathrm{d}x$.

A $I = 4$. **B** $I = 3$. **C** $I = 1$. **D** $I = 0$.

Lời giải.

Xét $\int\limits_1^e f'(x)\cdot\ln x\,\mathrm{d}x$, đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$

Khi đó $\int\limits_1^e f'(x)\cdot\ln x\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = 1 - 1 = 0$

Chọn phương án D

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0;2]$ và $f(2) = 3$, $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $\int\limits_0^2 x.f'(x)\,\mathrm{d}x$.

A 0. **B** -3. **C** 3. **D** 6.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}$ Ta được $\begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \text{chọn } v = f(x). \end{cases}$

Khi đó $I = \int\limits_0^2 x\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = x\cdot f(x)\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\cdot 3 - 3 = 3$.

Chọn phương án C

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$. Tính tích phân $I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

A $I = \frac{1}{2}$. **B** $I = \frac{5}{2}$. **C** $I = \frac{3}{2}$. **D** $I = \frac{7}{2}$.

Lời giải.

Cách 1: Ta có $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$ (1) và $f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = 3\cdot\frac{1}{x}$ (2).

Giải hệ $(1),(2)$ suy ra $f(x)=\dfrac{2}{x}-x$. Do đó $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{2}{x^2}-1\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$.

Cách 2: Đặt $t=\dfrac{1}{x}\Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Đổi cận $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow t=2\\ x=2\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_{2}^{\frac{1}{2}}t\cdot f\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}f\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}f\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

$$\text{Suy ra } 3I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x+2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}f\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x}\left[f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)\right]\mathrm{d}x$$
$$=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}3\,\mathrm{d}x=3x\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{9}{2}.$$

Vậy $I=\dfrac{3}{2}$.

Chọn phương án C

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ sao cho $f(1)=-\dfrac{1}{2}$; $f(x)\neq 0$ và $f'(x)=(2x+1)\cdot f^2(x)$ với mọi $x>0$. Biết rằng $f(1)+f(2)+\cdots+f(2017)=\dfrac{a}{b}$ với $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{N}$ và $\dfrac{a}{b}$ tối giản, khẳng định nào sau đây đúng?

A $\dfrac{a}{b}<-1$. **B** $a\in(-2017;2017)$. **C** $b-a=4035$. **D** $a+b=-1$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int(2x+1)\mathrm{d}x\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x(x+1)}+C$, theo giả thiết $f(1)=-\dfrac{1}{2}$ suy ra $C=0$, cho nên $f(x)=-\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}$.

$f(1)+f(2)+\cdots+f(2017)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2018}-\dfrac{1}{2017}=-\dfrac{2017}{2018}\Rightarrow a=-2017, b=2018$.

Chọn phương án C

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số lẻ và $\displaystyle\int\limits_{-2018}^{0}f(x)\,\mathrm{d}x=12$. Giá trị của tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{2018}f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

A $I=2018$. **B** $I=-12$. **C** $I=0$. **D** $I=-2018$.

Lời giải.

Đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$, với $x=0\Rightarrow t=0$, $x=2018\Rightarrow t=-2018$.

$I = \int\limits_{0}^{-2018} -f(-t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-2018}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t.$

Do $y = f(x)$ là hàm số lẻ nên $f(-t) = -f(t)$, $\forall t$ thuộc tập xác định.

nên $I = \int\limits_{-2018}^{0} -f(t)\,\mathrm{d}t = -\int\limits_{-2018}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int\limits_{-2018}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -12.$

Chọn phương án B

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $2017f(-x) + 2018f(x) = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

A $I = \dfrac{1}{2018}$. **B** $I = \dfrac{1}{1009}$. **C** $I = \dfrac{2}{2017}$. **D** $I = \dfrac{2}{4035}$.

Lời giải.

Đặt $t = -x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$, với $x = -\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = -\dfrac{\pi}{2}$

$I = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(-t)(-\mathrm{d}t) = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)\,\mathrm{d}x.$

$2017f(-x) + 2018f(x) = \cos x \Rightarrow 2017 \cdot \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)\,\mathrm{d}x + 2018 \cdot \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow 2017I + 2018I = \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow 4035I = 1 - (-1) \Leftrightarrow I = \dfrac{2}{4035}.$

Chọn phương án D

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2) = -2$; $\int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Tính tích phân $I = \int\limits_{0}^{4} f'\left(\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x$.

A $I = -10$. **B** $I = -5$. **C** $I = 0$. **D** $I = -18$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 4 \Rightarrow t = 2$.

Suy ra $I = 2\int\limits_{0}^{2} tf'(t)\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_{0}^{2} xf'(x)\,\mathrm{d}x = 2\left(xf(x)\Big|_{0}^{2} - \int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x\right) = 2.(-4-1) = -10.$

Chọn phương án A

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0) = 1$ và

50 DẠNG TOÁN PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA LẦN 2

$5\int\limits_0^1 \left[f'(x)[f(x)]^2+\dfrac{1}{25}\right]\,\mathrm{d}x \leqslant 2\int\limits_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)\,\mathrm{d}x$. Tích phân $\int\limits_0^1 [f(x)]^3\,\mathrm{d}x$.

A $\dfrac{25}{33}$. **B** $\dfrac{5}{4}$. **C** $\dfrac{1}{2}$. **D** $\dfrac{53}{50}$.

Lời giải.

$$5\int\limits_0^1 \left[f'(x)[f(x)]^2+\dfrac{1}{25}\right]\,\mathrm{d}x \leqslant 2\int\limits_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow 5\int\limits_0^1 f'(x)[f(x)]^2\,\mathrm{d}x+\dfrac{1}{5}\leqslant 2\int\limits_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)\,\mathrm{d}x$$

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz:

$$\Rightarrow \left(\int\limits_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int\limits_0^1 \mathrm{d}x.\int\limits_0^1 f'(x)[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow 5\left(\int\limits_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)dx\right)^2+\dfrac{1}{5}\leqslant 2\int\limits_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)dx$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\int\limits_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)dx-\dfrac{1}{5}\right)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)dx=\dfrac{1}{5}.$$

Dấu "=" xảy ra khi chỉ khi

$$\begin{cases}\int\limits_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)dx=\dfrac{1}{5}\\ \sqrt{f'(x)}f(x)=k\end{cases} \Rightarrow k=\dfrac{1}{5}.$$

$$\Rightarrow \int f'(x)f^2(x)dx=\int \dfrac{1}{25}dx=\dfrac{1}{25}x+C$$

$$\Rightarrow \dfrac{[f(x)]^3}{3}=\dfrac{1}{25}x+C \Leftrightarrow f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{3}{25}x+3C}$$

$$f(0)=1\Rightarrow 3C=1\Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{3}{25}x+1}\Rightarrow \int\limits_0^1 [f(x)]^3dx=\int\limits_0^1\left(\dfrac{3}{25}x+1\right)dx=\dfrac{53}{50}.$$

Chọn phương án D

Câu 23. Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $f(x)=f'(x)\cdot\sqrt{3x+1}$ với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $3<f(5)<4$. **B** $1<f(5)<2$. **C** $4<f(5)<5$. **D** $2<f(5)<3$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}, \forall x>0$.

Suy ra $\int\limits_1^5 \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^5 \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \ln(f(5))-\ln(f(1))=\dfrac{4}{3}$.

$\Rightarrow f(5) = \mathrm{e}^{\frac{4}{3}}$.

Chọn phương án (A)

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;4]$, đồng biến trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn đẳng thức $x + 2x \cdot f(x) = [f'(x)]^2$, $\forall x \in [1;4]$. Biết rằng $f(1) = \dfrac{3}{2}$, tính $I = \displaystyle\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = \dfrac{1186}{45}$. (B) $I = \dfrac{1174}{45}$. (C) $I = \dfrac{1222}{45}$. (D) $I = \dfrac{1201}{45}$.

Lời giải.

Ta có $x + 2x \cdot f(x) = [f'(x)]^2 \Rightarrow \sqrt{x}.\sqrt{1+2f(x)} = f'(x) \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}} = \sqrt{x}$, $\forall x \in [1;4]$.

Suy ra $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + C \Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}\left(f(x)\right)}{\sqrt{1+2f(x)}} = \int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + C$

$\Rightarrow \sqrt{1+2f(x)} = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$. Mà $f(1) = \dfrac{3}{2} \Rightarrow C = \dfrac{4}{3}$. Vậy $f(x) = \dfrac{\left(\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \dfrac{4}{3}\right)^2 - 1}{2}$.

Vậy $I = \displaystyle\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1186}{45}$.

Chọn phương án (A)

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(5) = 10$, $\displaystyle\int\limits_0^5 xf'(x)\,\mathrm{d}x = 30$. Tính giá trị của tích phân $I = \displaystyle\int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = -20$. (B) $I = 70$. (C) $I = 20$. (D) $I = -30$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x & \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x & \Rightarrow v = f(x) \end{cases}$.

$$\int\limits_0^5 xf'(x)\,\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_0^5 - \int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow 30 = 5f(5) - \int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow 30 = 50 - \int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 20.$$

Chọn phương án (C)

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thoả mãn $f(x) = 6x^2 f(x^3) - \dfrac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Tính $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) 2. (B) 4. (C) -1. (D) 6.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 6x^2 f(x^3)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 \frac{6}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x$.

Mà $\int\limits_0^1 6x^2 f(x^3)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 2f(x^3)\,\mathrm{d}x^3 = 2\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Từ đó suy ra $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 \frac{6}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{6}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x = 4$.

Chọn phương án B

Câu 27. Cho $G(x) = \int\limits_1^x \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Khi đó $G'(x)$ bằng

A $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. **B** $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. **C** $(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$. **D** $\sqrt{1+x^2}$.

Lời giải.

Đặt $\int \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = F(t) + C$.

Khi đó $G(x) = \int\limits_1^x \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int\limits_1^x \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = F(x)\big|_1^x = F(x) - F(1)$.

Suy ra $G'(x) = F'(x) = \sqrt{1+x^2}$.

Chọn phương án D

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x) + 2018f(x) = x\sin x$. Tính $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$?

A $\frac{1}{1009}$. **B** $\frac{2}{2019}$. **C** $\frac{1}{2019}$. **D** $\frac{1}{2018}$.

Lời giải.

Ta có

$2018I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2018f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [x\sin x - f(-x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $2018I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x - I$.

Do đó

$$2019I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow I = \frac{2}{2019}.$$

Chọn phương án B

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ thỏa mãn $3f(x) + f'(x) = \sqrt{1 + \mathrm{e}^{-2x}}$. Khi đó:

(A) $\mathrm{e}^3 f(1) - f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^2+1}} - \dfrac{1}{2}$.
(B) $\mathrm{e}^3 f(1) - f(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}^2+1}} - \dfrac{1}{4}$.
(C) $\mathrm{e}^3 f(1) - f(0) = \dfrac{\left(\mathrm{e}^2+1\right)\sqrt{\mathrm{e}^2+1} - \sqrt{8}}{3}$.
(D) $\mathrm{e}^3 f(1) - f(0) = \left(\mathrm{e}^2+1\right)\sqrt{\mathrm{e}^2+1} - \sqrt{8}$.

Lời giải.

Ta có $3f(x) + f'(x) = \sqrt{1 + \mathrm{e}^{-2x}}$
$\Leftrightarrow 3 \cdot \mathrm{e}^{3x} \cdot f(x) + \mathrm{e}^{3x} \cdot f'(x) = \mathrm{e}^{2x} \cdot \sqrt{1 + e^{2x}}$
$\Leftrightarrow \left[\mathrm{e}^{3x} \cdot f(x)\right]' = \mathrm{e}^{2x} \cdot \sqrt{1 + \mathrm{e}^{2x}}$.
Lấy tích phân từ 0 đến 1, ta được

$$\int\limits_0^1 \left[\mathrm{e}^{3x} \cdot f(x)\right]' \,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{2x} \cdot \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathrm{e}^3 f(1) - f(0) = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{2x} \cdot \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = I$$

Đặt $t = \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}$. Suy ra $t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.
Với $x = 1$ thì $t = \sqrt{2}$.
Với $x = 1$ thì $t = \sqrt{1+\mathrm{e}^2}$.
Khi đó

$$I = \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+\mathrm{e}^2}} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{\left(\mathrm{e}^2+1\right)\sqrt{\mathrm{e}^2+1} - \sqrt{8}}{3}.$$

Suy ra, $\mathrm{e}^3 f(1) - f(0) = \dfrac{\left(\mathrm{e}^2+1\right)\sqrt{\mathrm{e}^2+1} - \sqrt{8}}{3}$.
Chọn phương án C

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = 80$, $\int\limits_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x = -2$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) -5.
(B) $\dfrac{5}{2}$.
(C) $-\dfrac{5}{2}$.
(D) 5.

Lời giải.

Xét tích phân $I = \int\limits_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$.

Khi đó $I = \dfrac{x^2}{2} f(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \dfrac{x^2}{2} f'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_0^1 x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = 4 \Rightarrow \int\limits_0^1 40x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = 160$.

Ta có: $\int\limits_0^1 400x^4\,\mathrm{d}x = 80$, $\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x = 80 \Rightarrow \int\limits_0^1 \left[f'(x) - 20x^2\right]^2\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f'(x) = 20x^2$.

Nên $f(x) = \dfrac{20x^3}{3} + C$ và $f(1) = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{20x^3}{3} - \dfrac{20}{3}$.

Do đó: $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\dfrac{5}{3}x^4 - \dfrac{20}{3}x\right)\Bigg|_0^1 = -5$.

Chọn phương án (A)

Câu 31. Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(x) = f'(x)\cdot\sqrt{3x+1}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $2 < f(5) < 3$. (B) $1 < f(5) < 2$. (C) $4 < f(5) < 5$. (D) $3 < f(5) < 4$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = f'(x)\cdot\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}$.

Khi đó $\int\limits_1^5 \dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}\,x = \int\limits_1^5 \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}\,x = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \ln\left[f(5)\right] = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow f(5) = e^{\frac{4}{3}} \approx 3{,}79$.

Chọn phương án (D)

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ dương có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\sqrt{3}\right]$, biết rằng $f'(x) - \sqrt{x^2+1}\cdot f(x) = 0$ và $f\left(\sqrt{3}\right) = \mathrm{e}^3$. Tính $I = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \ln\left[f(x)\right]\,\mathrm{d}x$.

(A) $2\sqrt{3}$. (B) $3\sqrt{3} - \dfrac{7}{3}$. (C) $3\sqrt{3} + \dfrac{7}{3}$. (D) $3\sqrt{3} - 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
f'(x) - \sqrt{x^2+1}\cdot f(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \sqrt{x^2+1}\\
&\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x\\
&\Rightarrow \ln f(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C.
\end{aligned}$$

Ta có $f\left(\sqrt{3}\right) = \mathrm{e}^3 \Rightarrow C = 3 - \sqrt{3} - \dfrac{1}{2}\ln\left(\sqrt{3}+2\right)$.

Do đó

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{\sqrt{3}} \ln f(x)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^{\sqrt{3}} \left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + \left(3 - \sqrt{3} - \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{3}+2\right)\right)\right]\,\mathrm{d}x\\
&= 3\sqrt{3} - \frac{7}{3}.
\end{aligned}$$

Chọn phương án (B)

Nhóm: PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA

Câu 33. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $[-1;1]$ và $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 6$. Kết quả của $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{f(x)}{1+2018^x}\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ 5.

Lời giải.

— **Cách tự luận**

Ta có $B = \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{f(x)}{1+2018^x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} \dfrac{f(x)}{1+2018^x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} \dfrac{f(x)}{1+2018^x}\,\mathrm{d}x.(1)$

Đặt $x=-t$ thì

$$I = \int\limits_{-1}^{0} \frac{f(x)}{1+2018^x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} \frac{2018^t f(-t)}{1+2018^t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{1} \frac{2018^x f(-x)}{1+2018^x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} \frac{2018^x f(x)}{1+2018^x}\,\mathrm{d}x \ (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $B = \int\limits_{0}^{1} \dfrac{2018^x f(x)}{1+2018^x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} \dfrac{f(x)}{1+2018^x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 3.$

— **Cách trắc nghiệm**

Trước tiên tìm hàm $f(x)$, ta có $\int\limits_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \left.\dfrac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \dfrac{2}{3}.$

Suy ra $\int\limits_{-1}^{1} 9x^2\,\mathrm{d}x = 6.$

Do đó $f(x) = 9x^2$.

Khi đó $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{f(x)}{1+2018^x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{9x^2}{1+2018^x}\,\mathrm{d}x = 3.$

Chọn phương án B

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=3$, $\int\limits_{0}^{1} \left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{4}{11}$ và $\int\limits_{0}^{1} x^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{7}{11}$. Giá trị của $\int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ là

Ⓐ $\dfrac{35}{11}$. Ⓑ $\dfrac{65}{21}$. Ⓒ $\dfrac{23}{7}$. Ⓓ $\dfrac{9}{4}$.

Lời giải.

— Xét $\int\limits_{0}^{1} x^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{7}{11}$. Đặt $\begin{cases} u = x^4 f(x) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \left[4x^3 f(x) + x^4 f'(x)\right]\mathrm{d}x \\ v = x \end{cases}.$

Suy ra
$$\int\limits_0^1 x^4 f(x)\,\mathrm{d}x = x^5 f(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 4x^4 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 x^5 f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\int\limits_0^1 x^5 f'(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{2}{11}$.

— Khi đó $\int\limits_0^1 [f'(x)+2x^5]^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x + 4\int\limits_0^1 x^5 f'(x)\,\mathrm{d}x + 4\int\limits_0^1 x^{10}\,\mathrm{d}x = 0.$

Suy ra $f'(x) = -2x^5 \Rightarrow f(x) = -\dfrac{x^6}{3} + C$. Mà $f(1) = 3$ nên $C = \dfrac{10}{3}$.

— Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(-\dfrac{x^6}{3} + \dfrac{10}{3}\right)\,\mathrm{d}x = \dfrac{23}{7}$.

Chọn phương án C

Câu 35. Cho f, g là hai hàm số liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn
$$\int\limits_1^3 (f(x)+3g(x))\,\mathrm{d}x = 10 \text{ và } \int\limits_1^3 (2f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x = 6.$$

Tính $I = \int\limits_1^3 (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x$.

A $I = 6$. **B** $I = 8$. **C** $I = 7$. **D** $I = 9$.

Lời giải.

Ta có

— $\int\limits_1^3 (f(x)+3g(x))\,\mathrm{d}x = 10 \Leftrightarrow \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 10.$ (1)

— $\int\limits_1^3 (2f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x = 6 \Leftrightarrow 2\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 6.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ và $\int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 2$.

Vậy $I = \int\limits_1^3 (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = 4+2 = 6$.

Chọn phương án A

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$, $f(-x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(-x)=\dfrac{1}{4+x^2}$. Tính $\displaystyle\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ $I=-\dfrac{\pi}{10}$. Ⓑ $I=-\dfrac{\pi}{20}$. Ⓒ $I=\dfrac{\pi}{10}$. Ⓓ $I=\dfrac{\pi}{20}$.

Lời giải.

Vì $2f(x)+3f(-x)=\dfrac{1}{4+x^2}$ nên

$$\int\limits_{-2}^{2}\left(2f(x)+3f(-x)\right)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{2}\frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow\ 2\int\limits_{-2}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x+3\int\limits_{-2}^{2}f(-x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{2}\frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x.\qquad(1)$$

Đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận

- $x=2\Rightarrow t=-2$;
- $x=-2\Rightarrow t=2$.

Ta có

$$\int\limits_{-2}^{2}f(-x)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_{2}^{-2}f(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-2}^{2}f(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-2}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x.\qquad(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\int\limits_{-2}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int\limits_{-2}^{2}\frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{2}=\frac{\pi}{20}.$$

Chọn phương án Ⓓ

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\displaystyle\int\limits_{0}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x=8$. Tính $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{1}x\cdot f'(2x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ 6. Ⓑ 4. Ⓒ 12. Ⓓ 7.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=f'(2x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\,\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{1}{2}f(2x)\end{cases}$.

Khi đó $I=\dfrac{1}{2}x\cdot f(2x)\Big|_0^1-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}f(2)-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x=8-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x.$

Tính $I_1 = \int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x$. Khi đó $I_1 = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 4$. Do đó $I = 8 - 2 = 6$.

Chọn phương án A

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ dương và liên tục trên đoạn $[1;3]$ thỏa mãn $\max\limits_{[1;3]} f(x) = 2$, $\min\limits_{[1;3]} f(x) = \dfrac{1}{2}$ và biểu thức $S = \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_1^3 \dfrac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ đạt giá trị lớn nhất, khi đó hãy tính $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $\dfrac{7}{2}$. **B** $\dfrac{5}{2}$. **C** $\dfrac{7}{5}$. **D** $\dfrac{3}{5}$.

Lời giải.

Do $\dfrac{1}{2} \le f(x) \le 2 \Rightarrow f(x) + \dfrac{1}{f(x)} \le \dfrac{5}{2} \Rightarrow \int\limits_1^3 \left[f(x) + \dfrac{1}{f(x)}\right]\,\mathrm{d}x \le 5$.

$\Rightarrow \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^3 \dfrac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \le 5 \Rightarrow \int\limits_1^3 \dfrac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \le 5 - \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow S = \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_1^3 \dfrac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \le 5\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \left[\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \le \dfrac{25}{4} - \left[\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \dfrac{5}{2}\right]^2 \le \dfrac{25}{4}$.

Dấu " $=$" xảy ra $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{5}{2}$.

Chọn phương án B

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 16$, $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \int\limits_0^4 xf'\left(\dfrac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x$.

A $I = 12$. **B** $I = 112$. **C** $I = 28$. **D** $I = 144$.

Lời giải.

Đặt $t = \dfrac{x}{2} \Rightarrow 2\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 4 \Rightarrow t = 2$. Khi đó ta có $I = 4\int\limits_0^2 tf'(t)\,\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases} u = t \\ \mathrm{d}v = f'(t)\,\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = dt \\ v = f(t) \end{cases}$, ta được

$\dfrac{I}{4} = tf(t)\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 2 \cdot 16 - \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 32 - 4 = 28 \Rightarrow I = 112$.

Chọn phương án B

Câu 40. Cho hàm $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_1^2 f(x-1)\,\mathrm{d}x=3$ và $f(1)=4$. Khi đó $\int\limits_0^1 x^3 f'(x^2)\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\frac{1}{2}$. **B** 1. **C** -1. **D** $-\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Đặt $t=x-1 \Rightarrow 3=\int\limits_1^2 f(x-1)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Xét $\int\limits_0^1 x^3 f'(x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^2 f'(x^2)\,\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 tf'(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[tf(t)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{2}(4-3)=\frac{1}{2}$.

Chọn phương án A

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. B	4. C	5. B	6. D	7. C	8. A	9. C	10. B
11. C	12. A	13. C	14. A	15. D	16. C	17. C	18. C	19. B	20. D
21. A	22. D	23. A	24. A	25. C	26. B	27. D	28. B	29. C	30. A
31. D	32. B	33. B	34. C	35. A	36. D	37. A	38. B	39. B	40. A

DẠNG 46. TÌM SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH HÀM HỢP KHI BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN HOẶC ĐỒ THỊ

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \dfrac{5\pi}{2}\right]$ của phương trinh $f(\sin x) = 1$ là

A 7. **B** 4. **C** 5. **D** 6.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x$, $x \in \left[0; \dfrac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1; 1]$.

Khi đó phương trình $f(\sin x) = 1$ trở thành $f(t) = 1, \forall t \in [-1; 1]$.

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của hàm số $y = f(t)$ và đường thẳng $y = 1$.

Dựa vào bảng biến, ta có $f(t) = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = a \in (-1; 0) \\ t = b \in (0; 1) \end{array}\right.$

Trường hợp 1 $t = a \in (-1; 0)$

Ứng với mỗi giá trị $t \in (-1; 0)$ thì phương trình $\sin x = t$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\pi < x_1 < x_2 < 2\pi$.

Trường hợp 2 $t = b \in (0; 1)$

Ứng với mỗi giá trị $t \in (0; 1)$ thì phương trình $\sin x = t$ có 3 nghiệm x_3, x_4, x_5 thỏa mãn $0 < x_3 < x_4 < \pi$; $2\pi < x_5 < \dfrac{5\pi}{2}$.

Hiển nhiên cả 5 nghiệm trong 2 trường hợp trên đều khác nhau.

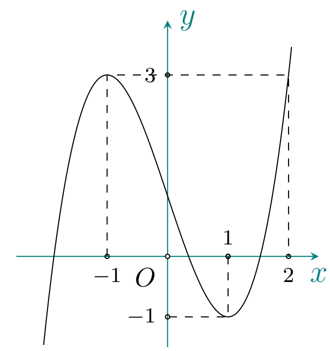
Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Chọn phương án C

Câu 1.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sin x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ là

Ⓐ $[-1; 3)$. Ⓑ $(-1; 1)$. Ⓒ $(-1; 3)$. Ⓓ $[-1; 1)$.



Lời giải.

Đặt $t = \sin x$, với $x \in (0; \pi)$ thì $t \in (0; 1]$.

Do đó phương trình $f(\sin x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $(0; 1]$.

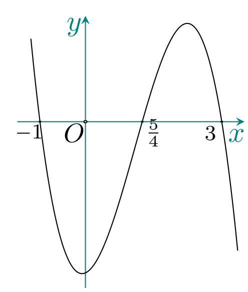
Quan sát đồ thị ta suy ra điều kiện của tham số m là $m \in [-1; 1)$.

Chọn phương án D

Câu 2.

Cho hàm số $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$, $(m, n, p, q, r \in \mathbb{R})$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tập nghiệm của phương trình $f(x) = r$ có số phần tử là

Ⓐ 4. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 2.



Lời giải.

Ta có $f'(x) = 4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q$ (1).

Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$ ta thấy phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm đơn là -1, $\dfrac{5}{4}$, 3.

Do đó $f'(x) = m(x+1)(4x-5)(x-3)$ và $m \neq 0$. Hay $f'(x) = 4mx^3 - 13mx^2 - 2mx + 15m$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $n = -\dfrac{13}{3}m$, $p = -m$ và $q = 15m$.

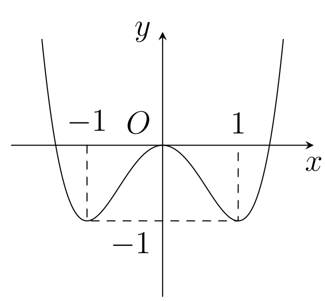
Khi đó phương trình $f(x) = r \Leftrightarrow mx^4 + nx^3 + px^2 + qx = 0 \Leftrightarrow m\left(x^4 - \dfrac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x\right) = 0$

$\Leftrightarrow 3x^4 - 13x^3 - 3x^2 + 45x = 0 \Leftrightarrow x(3x+5)(x-3)^2 = 0$

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x) = r$ là $S = \left\{-\dfrac{5}{3}; 0; 3\right\}$.

Chọn phương án B

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm của phương trình $2019f(x) + 1 = 0$ là

(A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $2019f(x)+1=0 \Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{1}{2019}$.

Số nghiệm phương trình $2019f(x)+1=0$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $d\colon y=-\dfrac{1}{2019}$ (cùng phương với trục Ox).

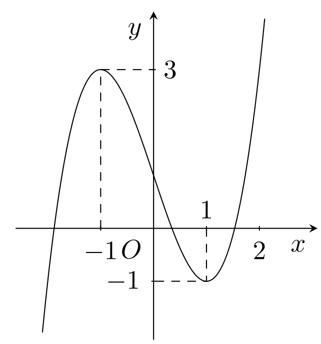
Dựa vào đồ thị như hình vẽ ta có d cắt đồ thị tại 4 điểm phân biệt.

Vậy phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn phương án (D)

Câu 4.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\pi^x\right)-\dfrac{m^2-1}{8}=0$ có hai nghiệm phân biệt là



(A) 7. (B) 6. (C) 5. (D) 4.

Lời giải.

Đặt $t=\pi^x,(t>0)$, khi đó: $f\left(\pi^x\right)-\dfrac{m^2-1}{8}=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow f(t)=\dfrac{m^2-1}{8}$ có hai nghiệm dương phân biệt.

$\Leftrightarrow -1<\dfrac{m^2-1}{8}<1 \Leftrightarrow -3<m<3$.

Vì m là số nguyên nên $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$.

Chọn phương án (C)

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$\sqrt[3]{\frac{m}{2}+\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}m+\frac{4}{3}\sin(x^2+2019)}}=\sin(x^2+2019)$$

có nghiệm thực?

(A) 3. (B) 2. (C) 7. (D) 6.

Lời giải.

Đặt $\sin\left(x^2+2019\right)=a,(a\in[-1;1]) \Rightarrow \sqrt[3]{\dfrac{m}{2}+\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}m+\dfrac{4}{3}a}}=a$.

Đặt $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}m+\dfrac{4}{3}a} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt[3]{\dfrac{m}{2}+\dfrac{4}{3}t}=a\\ \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}m+\dfrac{4}{3}a}=t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{m}{2}+\dfrac{4}{3}t=a^3\\ \dfrac{m}{2}+\dfrac{4}{3}a=t^3\end{cases} \Rightarrow a^3+\dfrac{4}{3}a=t^3+\dfrac{4}{3}t. \quad (*)$

Xét hàm $f(x)=x^3+\dfrac{4}{3}x$ với $x\in\mathbb{R}$. Ta có $f'(x)=3x^2+\dfrac{4}{3}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ $(*)$ suy ra $f(a)=f(t)\Leftrightarrow a=t$.

Do đó $\sqrt[3]{\frac{1}{2}m+\frac{4}{3}a}=a \Leftrightarrow m=2a^3-\frac{8}{3}a=f(a)$ với $a\in[-1;1]$.

Ta có $f'(a)=6a^2-\frac{8}{3}=0 \Leftrightarrow a=\pm\frac{2}{3}\in[-1;1]$.

Khi đó $f(-1)=\frac{2}{3}$; $f\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{32}{27}$; $f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{32}{27}$; $f(1)=-\frac{2}{3}$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \min\limits_{[-1;1]} f(a)\le m\le \max\limits_{[-1;1]} f(a) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{32}{27}\le m\le\frac{32}{27} \\ m\in\mathbb{Z}\end{cases} \Rightarrow m\in\{-1;0;1\}$.

Chọn phương án A

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x-m-\sqrt{9-x^2}=0$ có đúng 1 nghiệm dương?

A $m\in(-3;3]$.
B $m\in(-3;3]\cup\{-3\sqrt{2}\}$.
C $m\in[0;3]$.
D $m=\pm3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Điều kiện: $-3\le x\le 3$.

Phương trình tương đương với $x-\sqrt{9-x^2}=m$.

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x-\sqrt{9-x^2}$ và đường thẳng $y=m$.

Xét hàm số $y=x-\sqrt{9-x^2}$ với $-3\le x\le 3$

$y'=1+\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\sqrt{9-x^2}=-x\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\ 9-x^2=x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{-3\sqrt{2}}{2}\in[-3;3]$.

BBT:

x	-3		$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$		0		3
y'	‖	$-$	0	$+$	⋮	$+$	‖
y	-3 ↘		$-3\sqrt{2}$	↗	-3	↗	3

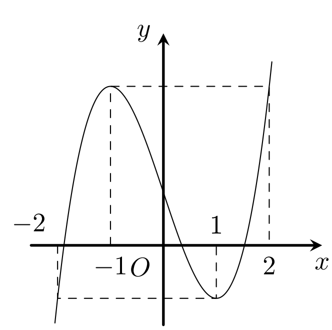
Dựa vào bảng biến thiên suy ra $-3<m\le 3$.

Chọn phương án A

Câu 7.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $3f(x+2)-4=0$ trên đoạn $[-2;2]$ là?

A 4.
B 2.
C 3.
D 1.



Lời giải.

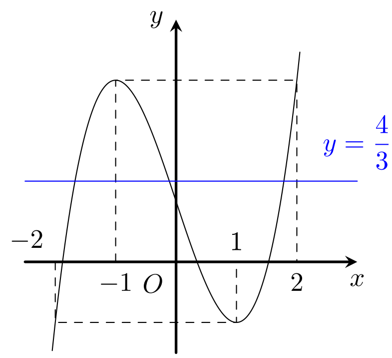
Xét phương trình $3f(x+2)-4=0 \Leftrightarrow f(x+2)=\dfrac{4}{3}$. (1)

Đặt $X=x+2$, do $-2 \le x \le 2 \Leftrightarrow 0 \le x+2 \le 4 \Leftrightarrow 0 \le X \le 4$.

Khi đó ta có (1) $\Leftrightarrow f(X)=\dfrac{4}{3}$. (*)

Vậy phương trình (1) có nghiệm trên đoạn $[-2,2]$ khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm trên đoạn $[0;4]$.

Dựa vào hình vẽ ta nhận thấy trên đoạn $[0;4]$ thì đường thẳng $y=\dfrac{4}{3}$ cắt đồ thị hàm số đã cho đúng tại một điểm. Do đó phương trình (*) có đúng 1 nghiệm hay phương trình (1) có đúng một nghiệm.

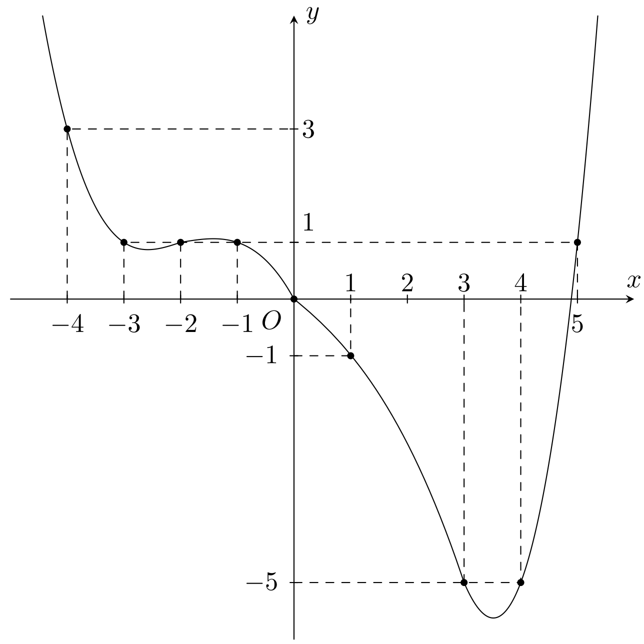


Chọn phương án (B)

Câu 8.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)=m-3$ có nghiệm.

(A) 13. (B) 12. (C) 8. (D) 10.



Lời giải.

Điều kiện $x \in \left[0;\dfrac{2}{3}\right]$.

Đặt $t=3-4\sqrt{6x-9x^2}=3-4\sqrt{1-(3x-1)^2}$.

Ta có $x \in \left[0;\dfrac{2}{3}\right] \Leftrightarrow 3x-1 \in [-1;1] \Leftrightarrow (3x-1)^2 \in [0;1] \Leftrightarrow 1-(3x-1)^2 \in [0;1] \Leftrightarrow t \in [-1;3]$.

Yêu cầu bài toán tương đương với tìm m để phương trình $f(t)=\dfrac{m-3}{2}$ có nghiệm trên $[-1;3]$.

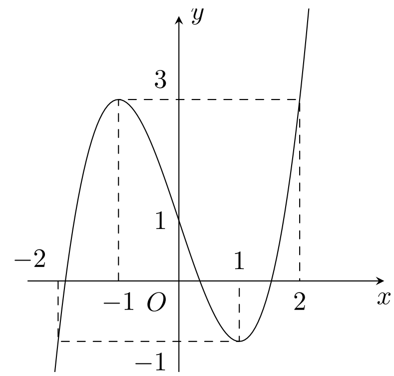
Từ đồ thị đã cho, điều này tương đương với $-5 \le \dfrac{m-3}{2} \le 1 \Leftrightarrow -7 \le m \le 5$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-7;-6;-5;\ldots;3;4;5\}$. Vậy có 13 giá trị nguyên của tham số m.

Chọn phương án (A)

Câu 9.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) + m - 2018 = 0$ có duy nhất một nghiệm.

A $m \leq 2015, m \geq 2019$. **B** $2015 < m < 2019$.
C $m = 2015, m = 2019$. **D** $m < 2015, m > 2019$.



Lời giải.

Phương trình $f(x) + m - 2018 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2018 - m$

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 2018 - m$ (có phương trình song song hoặc trùng với trục hoành)

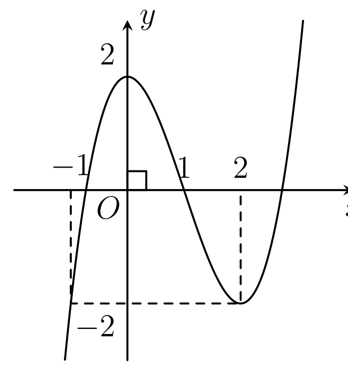
Dựa vào đồ thị, ta thấy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2018 - m > 3 \\ 2018 - m < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 2015 \\ m > 2019. \end{array}\right.$

Chọn phương án D

Câu 10.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\cos x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $\left(0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ là

A $[-2; 2]$. **B** $(0; 2)$. **C** $(-2; 2)$. **D** $[0; 2)$.



Lời giải.

Đặt $t = \cos x$, phương trình trở thành $f(t) = m$. (1)

Với $x \in \left(0; \dfrac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1; 1)$.

Nếu $t = -1$ hoặc $t \in (0; 1)$ thì ứng với một giá trị của x; nếu $t \in (-1; 0]$ thì ứng với 2 giá trị của x.

Xét đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên $[-1; 1)$, ta thấy:

+) $m = -2$ thì (1) có 1 nghiệm $t = -1$ nên phương trình đã cho có 1 nghiệm;

+) $-2 < m \leq 0$ thì (1) có 1 nghiệm $t \in (-1; 0)$ nên phương trình đã cho có 2 nghiệm;

+) $0 < m < 2$ thì (1) có 1 nghiệm $t \in (-1; 0)$ và 1 nghiệm $t \in (0; 1)$ nên phương trình đã cho có 3 nghiệm;

+) $m = 2$ thì (1) có 1 nghiệm $t = 0$ nên phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \in (0; 2)$.

Chọn phương án B

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\dfrac{1}{2}f(x) - m = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	$+\infty$

A $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m < -\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$ **B** $m < -3$. **C** $m < -\dfrac{3}{2}$. **D** $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m < -3. \end{array}\right.$

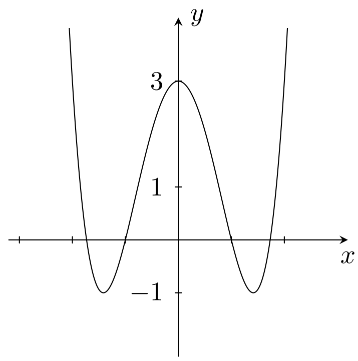
Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{2}f(x) - m = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2m$. (*)

Quan sát bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, ta thấy, để phương trình $(*)$ có đúng hai nghiệm phân biệt thì $\left[\begin{array}{l} 2m = 0 \\ 2m < -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m < -\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$

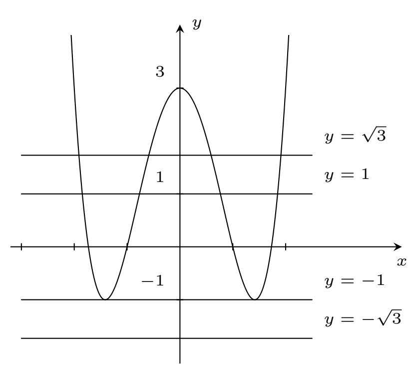
Chọn phương án D

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hỏi phương trình $\left(x^4 - 4x^2 + 3\right)^4 - 4\left(x^4 - 4x^2 + 3\right)^2 + 3 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt ?



A 9. **B** 10. **C** 8. **D** 4.

Lời giải.



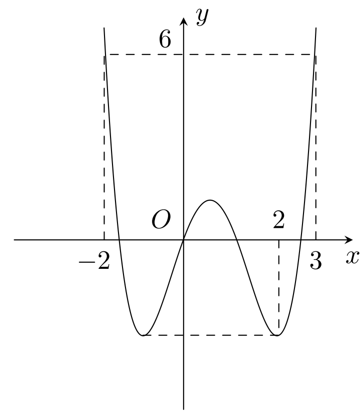
Quan sát đồ thị hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$, ta thấy

$$\left(x^4 - 4x^2 + 3\right)^4 - 4\left(x^4 - 4x^2 + 3\right)^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^4 - 4x^2 + 3 = 1 & (1) \\ x^4 - 4x^2 + 3 = \sqrt{3} & (2) \\ x^4 - 4x^2 + 3 = -1 & (3) \\ x^4 - 4x^2 + 3 = -\sqrt{3}. & (4) \end{array}\right.$$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.
Phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt.
Phương trình (3) có 2 nghiệm phân biệt.
Phương trình (4) vô nghiệm.
Dễ dàng chỉ ra rằng 10 nghiệm của cả 4 phương trình trên là phân biệt.
Vậy phương trình đã cho có 10 nghiệm thực phân biệt.
Chọn phương án B

Câu 13.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(x^3 - 3x\right) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?

A 3. **B** 2. **C** 6. **D** 7.



Lời giải.
Đặt $t = g(x) = x^3 - 3x, x \in [-1; 2]$.

$g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $[-1; 2]$.

x	-1		1		2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

Suy ra với $t = -2$, có 1 giá trị của x thuộc đoạn $[-1; 2]$.
$t \in (-2; 2]$, có 2 giá trị của x thuộc đoạn $[-1; 2]$.
Phương trình $f\left(x^3 - 3x\right) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $(-2; 2]$. (1)
Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ và m nguyên ta có hai giá trị của m thỏa mãn điều kiện (1) là: $m = 0, m = -1$.
Chọn phương án B

Câu 14. Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Khi đó số nghiệm của phương trình $2|f(x-3)| - 5 = 0$ là

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	1	↗	2	↘	$-\infty$

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 1.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = 2f(x-3)$ là

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	2	↗	4	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = 2f(x-3)$ ta có đồ thị hàm số $y = 2f(x-3)$ cắt trục Ox tại điểm duy nhất có hoành độ là x_0 $(x_0 > 4)$.

Suy ra có bảng biến thiên của hàm số $y = 2|f(x-3)|$ là

x	$-\infty$		3		4		x_0		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	2	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = 2|f(x-3)|$ ta có

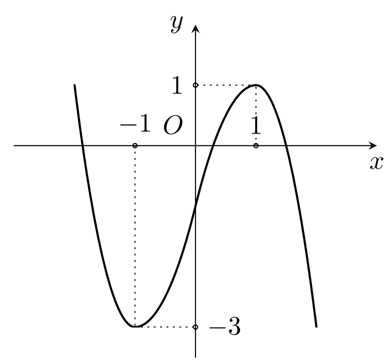
Phương trình $2|f(x-3)| - 5 = 0 \Leftrightarrow 2|f(x-3)| = 5$ có hai nghiệm phân biệt.

Chọn phương án B

Câu 15.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $2|f(x)| - 5 = 0$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 5 . Ⓒ 4. Ⓓ 6.



Lời giải.

$$2|f(x)| - 5 = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x) = \dfrac{5}{2} & (1) \\ f(x) = -\dfrac{5}{2} & (2) \end{array}\right..$$

Số nghiệm của phương trình đã cho là tổng số nghiệm của phương trình (1) và phương trình (2).

Số nghiệm của phương trình đã cho là số giao điểm của đường thẳng $y = \dfrac{5}{2}$ và đường thẳng $y = -\dfrac{5}{2}$

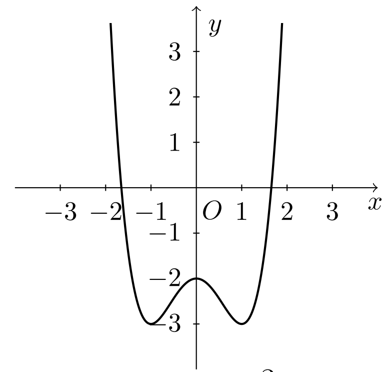
với đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Như vậy, dựa vào đồ thị hàm số ta thấy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Chọn phương án C

Câu 16.

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Tìm m để phương trình $|f(x)| - 2m = 0$ có số nghiệm nhiều nhất.

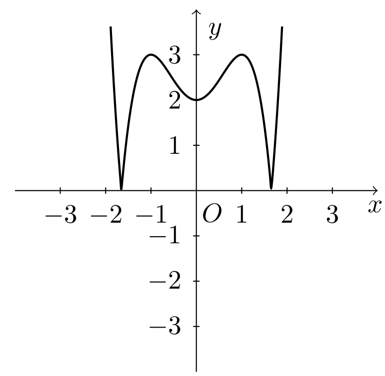


A) $3 < m < 4$. B) $3 \leq m \leq 4$. C) $1 < m < \dfrac{3}{2}$. D) $1 \leq m \leq \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có được bằng cách giữ lại phần đồ thị phía trên Ox và lấy đối xứng phần đồ thị phía dưới Ox qua Ox.

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $|f(x)| - 2m = 0$ có số nghiệm nhiều nhất khi $2 < 2m < 3$ hay $1 < m < \dfrac{3}{2}$.

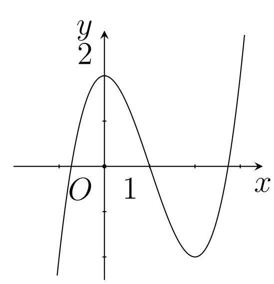


Chọn phương án C

Câu 17.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm của phương trình $f(x) = -x + 2$.

A) 2. B) 4. C) 1. D) 3.

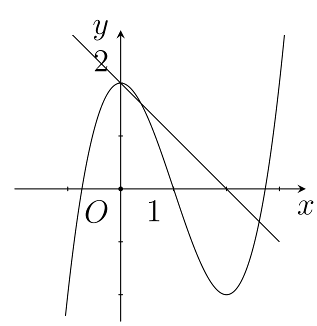


Lời giải.

Nhận thấy số nghiệm của phương trình $f(x) = -x + 2$ chính là số giao điểm giữa hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = -x + 2$.

Qua hình vẽ ta thấy, hai đồ thị hàm số giao nhau tại 3 điểm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.



Chọn phương án D

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm phương trình $f(x+5) - 4 = 0$ là

A 2. **B** 0. **C** 3. **D** 1.

Lời giải.

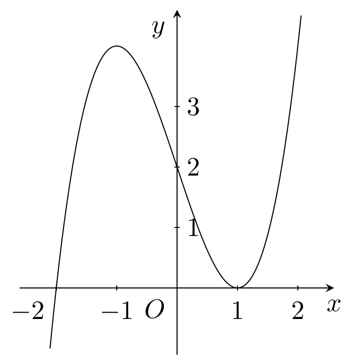
Số nghiệm của phương trình $f(x+5) - 4 = 0$ là số giao điểm của đường thẳng $d\colon y = 4$ với đồ thị hàm số $y = f(x)$. Từ bảng biến thiên, ta có phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Chọn phương án A

Câu 19.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây. Đặt $g(x) = f(f(x))$. Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là

A 6. **B** 5. **C** 8. **D** 7.



Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'[f(x)] \cdot f'(x)$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'[f(x)] = 0 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = \pm 1 \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$

Xét phương trình $\left[\begin{array}{l} f(x) = 1 \\ f(x) = -1 \end{array}\right.$, căn cứ vào đồ thị ta có phương trình $f(x) = 1$ có 3 nghiệm khác ± 1 và phương trình $f(x) = -1$ có đúng 1 nghiệm khác ± 1.

Suy ra phương trình $g'(x) = 0$ có 6 nghiệm.

Chọn phương án A

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình dưới

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi phương trình $3|f(x)| - 10 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A 2 nghiệm. **B** 4 nghiệm. **C** 3 nghiệm. **D** 1 nghiệm.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên đề bài, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$ như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$\|f(x)\|$	2	$\searrow\ 0\ \nearrow$	$+\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $3|f(x)| - 10 = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = \dfrac{10}{3}$. $\quad$ (1)

Số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = 3$.

Dựa vào bảng biến thiên trên, suy ra phương trình (1) có 3 nghiệm.

Chọn phương án C

BẢNG ĐÁP ÁN

1. D	2. B	3. D	4. C	5. A	6. A	7. B	8. A	9. D	10. B
11. D	12. B	13. B	14. B	15. C	16. C	17. D	18. A	19. A	20. C

DẠNG 47. GTNN-GTLN BIỂU THỨC MŨ-LOGARIT

Ví dụ 1. Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1,\ b > 1$ và $a^x = b^y = \sqrt{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A $(1; 2)$. **B** $\left[2; \frac{5}{2}\right)$. **C** $[3; 4)$. **D** $\left[\frac{5}{2}; 3\right)$.

Lời giải.

Đặt $t = \log_a b$. Vì $a, b > 1$ nên $t > 0$.

Ta có $a^x = \sqrt{ab} \Rightarrow x = \log_a \sqrt{ab} = \frac{1}{2}\left(1 + \log_a b\right) = \frac{1}{2}(1 + t)$.

$b^y = \sqrt{ab} \Rightarrow y = \log_b \sqrt{ab} = \frac{1}{2}\left(1 + \log_b a\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t}\right)$.

Vậy $P = x + 2y + \frac{1}{2}(1 + t) + 1 + \frac{1}{t} = \frac{3}{2} + \frac{t}{2} + \frac{1}{t} \geq \frac{3}{2} + \sqrt{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{t}{2} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow b = a^{\sqrt{2}}$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$ bằng $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$ thuộc nửa khoảng $\left[\frac{5}{2}; 3\right)$.

Chọn phương án D

Câu 1. Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 sao cho $y^x\left(e^x\right)^{e^y} = x^y\left(e^y\right)^{e^x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = -x^2 + 4y$.

A 0. **B** 2. **C** 4. **D** 3.

Lời giải.

Ta có: $y^x\left(e^x\right)^{e^y} = x^y\left(e^y\right)^{e^x} \Leftrightarrow \ln\left(y^x\left(e^x\right)^{e^y}\right) = \ln\left(x^y\left(e^y\right)^{e^x}\right) \Leftrightarrow x\ln y + xe^y = y\ln x + ye^x \Leftrightarrow \frac{x}{\ln x + e^x} = \frac{y}{\ln y + e^y}$ (*) (vì $y = e^x + \ln x$ có $y' = e^x + \frac{1}{x} > 0; \forall x > 1$ nên $y \geq y(1) = e > 0$)

Xét hàm số: $f(t) = \frac{t}{\ln t + e^t}$ trên $(1; +\infty)$ ta có $f'(t) = \frac{\ln t + e^t - 1 - te^t}{\left(\ln t + e^t\right)^2}$. Với hàm số $g(t) = \ln t + e^t - 1 - te^t$ có $g'(t) = \left(\ln t + e^t - 1 - te^t\right)' = \frac{1}{t} - te^t < 0, \forall t > 1$

Nên $g(t) < g(1) = -1 \Rightarrow f'(t) < 0; \forall t > 1$

$\Rightarrow y = f(t)$ là hàm nghịch biến trên $(1; +\infty)$ nên với (*) $f(x) = f(y) \Rightarrow y = x > 1$

Khi đó $P = -x^2 + 4y = -x^2 + 4x \leq 4, \forall x > 1$

Dấu "=" xảy ra khi: $x = 2$.

Vậy: $P_{\min} = 4$ khi: $x = y = 2$.

Chọn phương án C

Câu 2. Cho$x$, y là hai số thực dương thỏa mãn $\log x + \log 20y \geq 1 + \log\left(x + 16y^3\right)$. Giá trị nhỏ nhất của $P = \log_2 x - \log_2 2y$ là

A 1. **B** 2. **C** 3. **D** 4.

Lời giải.

Theo bài ra ta có $\log x + \log 20y \geq 1 + \log\left(x + 16y^3\right)$

$\Leftrightarrow \log x + 1 + \log 2y \geq 1 + \log\left(x + 16y^3\right)$
$\Leftrightarrow \log 2xy \geq \log\left(x + 16y^3\right)$
$\Leftrightarrow 2xy \geq x + 16y^3$
$\Leftrightarrow x(2y-1) \geq 16y^3 \geq 0 \Rightarrow 2y - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \dfrac{16y^3}{2y-1}$
$\Rightarrow \dfrac{x}{2y} \geq \dfrac{8y^2}{2y-1} = 4y + 2 + \dfrac{2}{2y-1} = 4y - 2 + \dfrac{2}{2y-1} + 4 \overset{cauchy}{\geq} 2\sqrt{(4y-2)\dfrac{2}{2y-1}} + 4 = 8 \Rightarrow P = \log_2 x - \log_2 2y = \log_2 \dfrac{x}{2y} \geq \log_2 8 = 3$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $2y - 1 = 1 \Leftrightarrow y = 1,\ x = 16$.

Chọn phương án C

Câu 3. Cho x, $y$là hai số dương thỏa mãn $\ln(x+1) + \ln y \geq \ln\left(x^2 + 2x + y + 1\right)$. Giá trị nhỏ nhất của $x + y$ là:

(A) $2 + \sqrt{2}$. (B) $2\sqrt{2}$. (C) $\sqrt{2}$. (D) $3 + \sqrt{2}$.

Lời giải.

Theo bài ra ta có $\ln(x+1)y \geq \ln\left[(x+1)^2 + y\right]$.

$\ln(x+1)y \geq \ln\left[(x+1)^2 + y\right]$.
$\Leftrightarrow (x+1)y \geq (x+1)^2 + y$
$\Leftrightarrow xy \geq (x+1)^2$
$\Leftrightarrow y \geq \dfrac{(x+1)^2}{x}$

Do đó $x + y = x + \dfrac{(x+1)^2}{x} = 2x + \dfrac{1}{x} + 2 \overset{cauchy}{\geq} \sqrt{2x.\dfrac{1}{x}} + 2 = 2 + \sqrt{2}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} 2x = \dfrac{1}{x} \\ x > 0 \\ y = \dfrac{(x+1)^2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}};\ y = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Chọn phương án A

Câu 4. Cho hai số thực dương$a; b$ thỏa mãn $a^2 + b^2 > 2$ và $\log_{a^2+b^2}(2a + 4b) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a + b - 3$ là

(A) $\sqrt{10}$. (B) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$. (C) $2\sqrt{10}$. (D) $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Lời giải.

Do $a^2 + b^2 > 2$ nên từ .$\log_{a^2+b^2}(2a + 4b) \geq 1 \Rightarrow 2a + 4b \geq a^2 + b^2 > 2$

Suy ra: $\begin{cases} a^2 + b^2 > 2 \\ (a-1)^2 + (b-2)^2 \leq 5 \end{cases}$

Khi đó

$P = a + b - 3 = 1(a-1) + 1(b-2) \leq \sqrt{(1^2 + 1^2)\left[(a-1)^2 + (b-2)^2\right]} \leq \sqrt{2.5} = \sqrt{10}$

(Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-Cốp-xki)

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} \dfrac{a-1}{1}=\dfrac{b-2}{1} \\ (a-1)^2+(b-2)^2=5 \\ a^2+b^2>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1+\dfrac{\sqrt{10}}{2} \\ b=2+\dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$

Vậy $P_{\max}=\sqrt{10}$ khi $\begin{cases} a=1+\dfrac{\sqrt{10}}{2} \\ b=2+\dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$.

Chọn phương án A

Câu 5. Cho $m=\log_a \sqrt[3]{ab}$ với $a>1,\ b>1$ và $P=\log_a b+16\log_b a$. Tính giá trị nhỏ nhất của P.

A 1. B 2. C 4. D 3.

Lời giải.

Ta có $m=\log_a \sqrt{ab}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\log_a b \Rightarrow \log_a b=3m-1$

Lại có $P=\log_a b+16\log_b a=(3m-1)^2+16.\dfrac{1}{3m-1}$

Đặt $t=3m-1\,(t\neq 0)$ khảo sát hàm $P=t^2+\dfrac{16}{t}$ thấy $\min P=12$.

Dấu bằng xảy ra khi $t=2\Rightarrow m=1$.

Chọn phương án A

Câu 6. Cho các số thực $a,\ b>1$và các số dương $x,\ y$ thay đổi thỏa mãn $a^x=b^y=ab$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{16}{x}-y^2$ bằng

A 40. B 16. C 4. D 0.

Lời giải.

Đặt $a^x=b^y=ab=t \Leftrightarrow \begin{cases} x=\log_a t \\ y=\log_b t \\ ab=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_t a=\dfrac{1}{x} \\ \log_t b=\dfrac{1}{y} \\ \log_t ab=1 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1.$.

Khi đó ta có $P=\dfrac{16}{x}-y^2=16\left(1-\dfrac{1}{y}\right)-y^2=16-\dfrac{16}{y}-y^2$.

Có:$16-\dfrac{16}{y}-y^2=16-\left(\dfrac{8}{y}+\dfrac{8}{y}+y^2\right)\overset{cauchy}{\leq}16-3.\sqrt[3]{\dfrac{8}{y}.\dfrac{8}{y}.y^2}=16-3.4=4$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $y=2,\ x=2$. Vậy $P_{\max}=4$ đạt được khi $x=2,\ y=2$.

Chọn phương án C

Câu 7. Cho $x,\ y$ là các số thực dương, thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}} x+\log_{\frac{1}{2}} y\leq\log_{\frac{1}{2}}\left(3x+y^2\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=4x+y$.

A $P_{\min}=27+12\sqrt{5}$. B $P_{\min}=27+6\sqrt{5}$. C $P_{\min}=12\sqrt{5}$. D $P_{\min}=12+6\sqrt{5}$.

Lời giải.

$\log_{\frac{1}{2}} x+\log_{\frac{1}{2}} y\leq\log_{\frac{1}{2}}\left(3x+y^2\right)\Leftrightarrow xy\geq 3x+y^2\Leftrightarrow x(y-3)\geq y^2$.Từ đây, $x,\ y$ là các số thực dương nên ta suy ra $y > 3$ và $x \geq \dfrac{y^2}{y-3} = y + 3 + \dfrac{9}{y-3}$

Do đó, $P \geq 4\left(y + 3 + \dfrac{9}{y-3}\right) + y = 5(y-3) + \dfrac{36}{y-3} + 27 \geq 12\sqrt{5} + 27$.

Dấu bằng xảy ra khi$y = 3 + \dfrac{6\sqrt{5}}{5}, x = 6 + \dfrac{27\sqrt{5}}{10}$.

Chọn phương án (A)

Câu 8. Xét các số thực dương a , b , x , y thỏa mãn $a > 1$, $b > 1$ và $a^{2x} = b^y = a^4b^4$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = xy + 3x + 2y$ có dạng $m + n\sqrt{14}$ (với m, n là các số tự nhiên), tính $S = m + n$.

(A) 48. (B) 34. (C) 30. (D) 38.

Lời giải.

Theo bài ra ta có: $a^{2x} = b^y = a^4b^4 \Leftrightarrow \begin{cases} a^{2x} = a^4b^4 \\ b^y = a^4b^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \log_a\left(a^4b^4\right) \\ y = \log_b\left(a^4b^4\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 4 + 4\log_a b \\ y = 4 + 4\log_b a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\left(1 + \log_a b\right) \\ y = 4\left(1 + \log_b a\right) \end{cases}$

Do đó: $P = xy + 3x + 2y = 8\left(1 + \log_a b\right)\left(1 + \log_b a\right) + 6\left(1 + \log_a b\right) + 8\left(1 + \log_b a\right)$

$= 16 + 8\log_b a + 8\log_a b + 6 + 6\log_a b + 8 + 8\log_b a$

$= 30 + 14\log_a b + 16\log_b a$

Đặt $t = \log_a b$. Vì a , $b > 1$ nên $\log_a b > \log_a 1 = 0$.

Khi đó $P = 30 + 14t + \dfrac{16}{t} \geq 30 + 2\sqrt{14t.\dfrac{16}{t}} = 30 + 8\sqrt{14}$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là $30 + 8\sqrt{14}$ khi $14t = \dfrac{16}{t} \Rightarrow t = \dfrac{2\sqrt{14}}{7}$ hay $b = a^{\frac{2\sqrt{14}}{7}}$.

Ta có: $\begin{cases} m = 30 \\ n = 8 \end{cases} \Rightarrow S = m + n = 38$.

Chọn phương án (D)

Câu 9. Cho hai số thực dương $x,\ y$ thỏa mãn $6.3^y + y + 1 = 3x + \log_3\left(x + 3^y\right)$ .Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x}{2y}$ bằng

(A) $\dfrac{\ln 3}{e}$. (B) $\dfrac{e - \ln 3}{2}$. (C) $\dfrac{e.\ln 3}{2}$. (D) $e\ln 3$.

Lời giải.

Đặt $t = \log_3\left(x + 3^y\right) \Leftrightarrow 3^t = x + 3^y \Leftrightarrow 3x = 3^{t+1} - 3^{y+1}$

Khi đó phương trình $6.3^y + y + 1 = 3x + \log_3\left(x + 3^y\right)$ trở thành:

$2.3^{y+1} + y + 1 = 3^{t+1} - 3^{y+1} + t$

$\Leftrightarrow 3.3^{y+1} + y + 1 = 3^{t+1} + t$

$\Leftrightarrow 3^{y+2} + y + 1 = 3^{t+1} + t \quad (1)$

Xét hàm số: $f\left(x\right) = 3^{x+1} + x$ trên khoảng $(0; +\infty)$

Ta có: $f'\left(x\right) = 3^{x+1}.\ln 3 + 1 > 0,\ \forall x \in (0; +\infty)$ suy ra hàm số luôn đồng biến

Do (1) suy ra$f\left(y+1\right) = f\left(t\right) \Leftrightarrow y + 1 = t \Leftrightarrow y + 1 = \log_3\left(x + 3^y\right) \Leftrightarrow 3^{y+1} - 3^y = x \Leftrightarrow x = 2.3^y$

Khi đó $P = \dfrac{x}{2y} = \dfrac{3^y}{y} = g\left(y\right)$có $\Rightarrow g'\left(y\right) = \dfrac{3^y.y\ln 3 - 3^y}{y^2} = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{\ln 3}$.

Lập bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $(0;+\infty)$ suy ra $\min\limits_{(0;+\infty)} P = g\left(\dfrac{1}{\ln 3}\right) = e\ln 3$.

Chọn phương án D

Câu 10. Cho các số thực $x\,;y$ thỏa mãn $x^2+4xy+12y^2=4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức$P=\log_2(x-2y)^2$ là

(A) $\max P = 3\log_2 2$. (B) $\max P = \log_2 12$. (C) $\max P = 12$. (D) $\max P = 16$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 2y$. Từ $x^2+4xy+12y^2=4$suy ra:

Nếu $y=0$ thì $x^2=4 \Rightarrow P=2$

Nếu $y \neq 0$ta có:$P=\log_2(x-2y)^2 \Leftrightarrow 4(x-2y)^2 = 4.2^P$

$$\Rightarrow \frac{4.2^P}{4} = \frac{4.(x-2y)^2}{x^2+4xy+12y^2} = \frac{4\left(\dfrac{x}{2y}-1\right)^2}{\left(\dfrac{x}{2y}\right)^2+2\dfrac{x}{2y}+3}$$

Đặt , $2^P = \dfrac{4t^2-8t+4}{t^2+2t+3} \Leftrightarrow 2^P\left(t^2+2t+3\right) = 4t^2-8t+4$

$\Leftrightarrow \left(2^P-4\right)t^2+2\left(2^P+4\right)t+3.2^P-4=0$ Xét với $(P \neq 2)$

Để phương trình có nghiệm: $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow \left(2^P+4\right)^2-\left(2^P-4\right)\left(3.2^P-4\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow -2\left(2^P\right)^2+24.2^P \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 2^P \leq 12 \Rightarrow P \leq \log_2 12$

Vậy $\max P = \log_2 12$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} t=-2 \\ t=\dfrac{x}{2y} \\ x^2+4xy+12y^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4y \\ y^2=\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

Chọn phương án B

Câu 11. Cho các số thực x,y,z thỏa mãn $\log_{16}\left(\dfrac{x+y+z}{2x^2+2y^2+2z^2+1}\right) = x(x-2)+y(y-2)+z(z-2)$. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $F=\dfrac{x+y-z}{x+y+z}$ bằng?

(A) $-\dfrac{1}{3}$. (B) $\dfrac{2}{3}$. (C) $-\dfrac{2}{3}$. (D) $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có:

$\log_{16}\left(\dfrac{x+y+z}{2x^2+2y^2+2z^2+1}\right) = x(x-2)+y(y-2)+z(z-2)$

$\Leftrightarrow \log_{16}(x+y+z)+2(x+y+z) = \log_{16}\left(2x^2+2y^2+2z^2+1\right)+\left(x^2+y^2+z^2\right)$

$\Leftrightarrow 2\log_{16}(x+y+z)+4(x+y+z) = 2\log_{16}\left(2x^2+2y^2+2z^2+1\right)+2\left(x^2+y^2+z^2\right)$

$\Leftrightarrow \log_4(x+y+z)+4(x+y+z)+1 = \log_4\left(2x^2+2y^2+2z^2+1\right)+\left(x^2+y^2+z^2\right)+1$

$\Leftrightarrow \log_4 4(x+y+z)+4(x+y+z) = \log_4\left(2x^2+2y^2+2z^2+1\right)+\left(2x^2+2y^2+2z^2+1\right)$

Xét hàm số: $f(t)=\log_4 t+t\,(t>0)$.

Hàm số luôn đồng biến trên tập xác định.

Suy ra: $f(4(x+y+z)) = f\left(2x^2+2y^2+2z^2+1\right)$

$\Rightarrow 4(x+y+z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 1$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + \dfrac{1}{2} = 0 \;\; (S)$

Ta có mặt cầu: $(S): \begin{cases} I(1;1;1) \\ R = \dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$

Ta có: $F = \dfrac{x+y-z}{x+y+z} \Leftrightarrow (F-1)x + (F-1)y + (F+1)z = 0 \;\; (P)$

Để mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có điểm chung:

$d[I;(P)] \leq R \Leftrightarrow \dfrac{|F-1+F-1+F+1|}{\sqrt{2(F-1)^2 + (F+1)}} \leq \dfrac{\sqrt{10}}{2}.$

$\Leftrightarrow 3F^2 - 2F - 13 \leq 0.$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-2\sqrt{10}}{3} \leq F \leq \dfrac{1+2\sqrt{10}}{3}.$

Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $F = \dfrac{x+y-z}{x+y+z}$bằng $\dfrac{2}{3}$.

Chọn phương án B

Câu 12. Cho $P = 9\log_{\frac{1}{3}}^3 \sqrt[3]{a} + \log_{\frac{1}{3}}^2 a - \log_{\frac{1}{3}} a^3 + 1$ với $a \in \left[\dfrac{1}{27}; 3\right]$ và M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P. Tính $S = 4M - 3m$.

(A) 42. (B) 38. (C) $\dfrac{109}{9}$. (D) $\dfrac{83}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $P = -\dfrac{1}{3}\log_3^3 a + \log_3^2 a + 3\log_3 a + 1.$

Đặt $\log_3 a = t \Rightarrow P = -\dfrac{1}{3}t^3 + t^2 + 3t + 1.$

Với $a \in \left[\dfrac{1}{27}; 3\right] \Rightarrow t \in [-3; 1].$

Xét hàm số $f(t) = -\dfrac{1}{3}t^3 + t^2 + 3t + 1$ liên tục trên $[-3; 1]$.

Ta có: $f'(t) = -t^2 + 2t + 3.$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = 3 \text{ (loại)} \end{array}\right.$.

Ta có: $f(-3) = 10; f(1) = \dfrac{14}{3}; f(-1) = -\dfrac{2}{3} \Rightarrow m = -\dfrac{2}{3}; M = 10.$

$\Rightarrow 4M - 3m = 42.$

Chọn phương án A

Câu 13. Cho hai số thực a, b thay đổi lớn hơn 1 thỏa mãn $a + b = 30$. Gọi m, n là hai nghiệm của phương trình $(\log_a x)^2 - (1 + 2\log_a b)\log_a x - 1 = 0$. Tính $S = a + 2b + 20$ khi tích mn đạt giá trị lớn nhất.

(A) $S = 70$. (B) $S = 65$. (C) $S = 60$. (D) $S = 50$.

Lời giải.

Theo định lí Vi-ét ta có : $\log_a m + \log_a n = 1 + 2\log_a b = \log_a(ab^2) \Leftrightarrow mn = ab^2$.

Theo bất đẳng thức $AM - GM$(bất đẳng thức Cosi) ta có

$$mn = ab^2 = 4(a \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2}) \leq 4\left(\frac{a + \frac{b}{2} + \frac{b}{2}}{3}\right)^3 = 4000.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = \dfrac{b}{2} \\ a + b = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 20 \end{cases} \Rightarrow S = 70.$

Chọn phương án A

Câu 14. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $2^y + y = 2x + \log_2(x + 2^{y-1})$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x}{y}$ bằng

A $\dfrac{\mathrm{e} + \ln 2}{2}$. **B** $\dfrac{\mathrm{e} - \ln 2}{2}$. **C** $\dfrac{\mathrm{e} \ln 2}{2}$. **D** $\dfrac{\mathrm{e}}{2 \ln 2}$.

Lời giải.

Đặt $z = \log_2(x + 2^{y-1})$. Khi đó $2^z = x + 2^{y-1}$ hay $x = 2^z - 2^{y-1}$. Thay vào $2^y + y = 2x + z$, ta được

$$\begin{aligned} & 2^y + y = 2(2^z - 2^{y-1}) + z \Leftrightarrow 2^y + y = 2^{z+1} - 2^y + z \\ \Leftrightarrow \quad & 2^y + y + 2^y = 2^{z+1} + z \Leftrightarrow 2^{y+1} + y = 2^{z+1} + z. \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 2^{t+1} + t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có

$$f'(t) = 2^{t+1} \ln 2 + 1 > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó

$$2^{y+1} + y = 2^{z+1} + z \Leftrightarrow f(y) = f(z) \Leftrightarrow y = z.$$

Suy ra

$$x = 2^z - 2^{y-1} = 2^y - 2^{y-1} = 2^{y-1}.$$

Vậy

$$P = \frac{x}{y} = \frac{2^{y-1}}{y}.$$

Xét hàm số $g(y) = \dfrac{2^{y-1}}{y}$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có

$$g'(y) = \frac{2^{y-1} y \ln 2 - 2^{y-1}}{y^2} = \frac{2^{y-1}(y \ln 2 - 1)}{y^2}.$$

Bảng biến thiên

y	0		$\frac{1}{\ln 2}$		$+\infty$
$g'(y)$		$-$	0	$+$	
$g(y)$	$+\infty$	$\searrow$	$g\left(\frac{1}{\ln 2}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $P_{\min} = g\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right) = \dfrac{\mathrm{e}\ln 2}{2}$.

Chọn phương án C

Câu 15. Cho hai số thực a, b thỏa mãn $\dfrac{1}{3} < b < a < 1$ và biểu thức $P = \log_a\left(\dfrac{3b-1}{4a^3}\right) + 12\log^2_{\frac{b}{a}} a$ có giá trị nhỏ nhất, khi đó a^3b^2 gần với giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

A $\dfrac{1}{3}$. **B** $\dfrac{1}{5}$. **C** $\dfrac{1}{7}$. **D** $\dfrac{1}{9}$.

Lời giải.

Với mọi số thực dương x ta luôn có $(x+1)(2x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 3x - 1 \leq 4x^3$. Kết hợp điều kiện $\dfrac{1}{3} < b < a < 1$ nên $\log_a\left(\dfrac{3b-1}{4a^3}\right) \geq \log_a\left(\dfrac{4b^3}{4a^3}\right) = 3\log_a\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

Suy ra

$$P \geq 3\log_a\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{12}{\log^2_a\left(\frac{b}{a}\right)}.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cô-si ta có

$$3t + \frac{12}{t^2} = \frac{3t}{2} + \frac{3t}{2} + \frac{12}{t^2} \geq 9,\ \forall t > 0.$$

Từ đó suy ra $\min P = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{1}{2} \\ \log_a\left(\dfrac{b}{a}\right) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}} \\ b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Vậy $a^3b^2 = \dfrac{1}{8}$ gần giá trị $\dfrac{1}{7}$ nhất so với 3 giá trị còn lại.

Chọn phương án C

Câu 16. Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $3^{x^2+y^2-2} \cdot \log_2(x-y) = \dfrac{1}{2}\left[1 + \log_2(1-xy)\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = 2(x^3+y^3) - 3xy$.

A 7. **B** $\dfrac{13}{2}$. **C** 3. **D** $\dfrac{17}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > y$ và $xy < 1$ $(*)$. Từ điều kiện của bài toán, ta có

$$3^{x^2+y^2-2} \cdot \log_2(x-y) = \frac{1}{2}\left[1 + \log_2(1-xy)\right]$$

$$\Leftrightarrow\ 3^{(x-y)^2}\log_2(x-y) = 3^{2-2xy}\log_2\sqrt{2-2xy} \qquad (1)$$

Xét hàm $f(t) = 3^{t^2} \cdot \log_2 t$ trên $(0; +\infty)$. Ta có

$$f'(t) = 2t \cdot 3^{t^2} \ln 3 \cdot \log_2 t + 3^{t^2} \frac{1}{t \ln 2} > 0, \forall t > 0$$

$\Rightarrow$ f là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$.
Do đó, từ (1) suy ra

$$f(x - y) = f(\sqrt{2 - 2xy}) \Leftrightarrow x - y = \sqrt{2 - 2xy} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2. \quad (2)$$

Từ (2), suy ra $xy = \dfrac{(x+y)^2}{2} - 1$. Thay vào biểu thức của M, ta được

$$\begin{aligned} M &= 2(x+y)(x^2 + y^2 - xy) - 3xy = 2(x+y)\left(3 - \frac{(x+y)^2}{2}\right) - \frac{3}{2}(x+y)^2 + 3 \\ &= -(x+y)^3 - \frac{3}{2}(x+y)^2 + 6(x+y) + 3. \end{aligned}$$

Đặt $t = x + y$, $t > 0$. Xét hàm $f(t) = -t^3 - \dfrac{3}{2}t^2 + 6t + 3$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = -3t^2 - 3t + 6$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &t = 1 \\ &t = -2 \text{ (loại)}. \end{aligned}\right.$

Bảng biến thiên của hàm $f(t)$

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{13}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

Suy ra, $\max\limits_{(0;+\infty)} f(t) = f(1) = \dfrac{13}{2}$. Khi đó, $x + y = 1 \Rightarrow xy = -\dfrac{1}{2}$.

Kết hợp điều kiện $(*)$, ta được giá trị lớn nhất của M bằng $\dfrac{13}{2}$ khi $x = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, y = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$.

Chọn phương án B

Câu 17. Với hai số thực a, b bất kỳ, ta kí hiệu $f_{(a,b)}(x) = |x-a| + |x-b| + |x-2| + |x-3|$. Biết rằng luôn tồn tại duy nhất số thực x_0 để $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f_{(a,b)}(x) = f_{(a,b)}(x_0)$ với mọi số thực a, b thỏa mãn $a^b = b^a$ và $0 < a < b$. Số x_0 bằng

A $2\mathrm{e} - 1$. **B** 2,5. **C** e. **D** $2\mathrm{e}$.

Lời giải.

Trước tiên ta xét a, b thỏa mãn $a^b = b^a$ và $0 < a < b$.

Ta có $a^b = b^a \Leftrightarrow b \ln a = a \ln b \Leftrightarrow \dfrac{\ln a}{a} = \dfrac{\ln b}{b}$.

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có $g'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}$.

Bảng biến thiên

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

Do $0 < a < b$ và $g(a) = g(b)$ nên ta có $0 < a < \mathrm{e} < b$.

Khi đó $f_{(a,b)}(x) = |x-a| + |x-b| + |x-2| + |x-3|$
$$\begin{aligned} &= (|x-a| + |b-x|) + (|x-2| + |3-x|) \\ &\geq |x-a+b-x| + |x-2+3-x| = b-a+1. \end{aligned}$$
Mặt khác do $a < \mathrm{e} < b$ và $2 < \mathrm{e} < 3$ nên ta có

$$f_{(a,b)}(\mathrm{e}) = |\mathrm{e}-a| + |\mathrm{e}-b| + |\mathrm{e}-2| + |\mathrm{e}-3| = \mathrm{e}-a+b-\mathrm{e}+\mathrm{e}-2+3-\mathrm{e} = b-a+1.$$

Vậy $x_0 = \mathrm{e}$.

Chọn phương án C

Câu 18. Cho hai số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn đẳng thức $(xy-1)\cdot 2^{2xy-1} = (x^2+y)\cdot 2^{x^2+y}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $y_{\min}$ của y.

A $y_{\min} = 3$. **B** $y_{\min} = \sqrt{3}$. **C** $y_{\min} = 1$. **D** $y_{\min} = 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & (xy-1)\cdot 2^{2xy-1} = (x^2+y)\cdot 2^{x^2+y} \\ \Leftrightarrow\ & 2(xy-1)\cdot 2^{2xy-1} = 2(x^2+y)\cdot 2^{x^2+y} \\ \Leftrightarrow\ & (2xy-1-1)\cdot 2^{2xy-1} = (x^2+y+1-1)\cdot 2^{x^2+y+1} \quad (1). \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = (t-1)\cdot 2^t, t > 0$.

Ta có $f'(t) = 2^2 + (t-1)\cdot 2^t \cdot \ln 2 = 2^t \cdot (1 + t\ln 2 - \ln 2) > 0, \forall t > 0$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Khi đó từ (1) suy ra

$$\begin{aligned} & f(2xy-1) = f(x^2+y^2+1) \\ \Rightarrow\ & 2xy-1 = x^2+y^2+1 \\ \Leftrightarrow\ & 2xy - y = x^2+2 \\ \Leftrightarrow\ & y = \frac{x^2+2}{2x-1}, x \neq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vì $y > 0$ nên $x > \dfrac{1}{2}$. Ta có $y' = \dfrac{2x^2-2x-4}{(2x-1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array}\right.$. Ta có bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
y'	|	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	-2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra, trên khoảng $(0;+\infty)$ thì $y_{\min}=2$.
Chọn phương án D

Câu 19. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}} x+\log_{\frac{1}{2}} y \le \log_{\frac{1}{2}}\left(x+y^2\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=x+3y$.

A $P_{\min}=\dfrac{17}{2}$. **B** $P_{\min}=9$. **C** $P_{\min}=\dfrac{25\sqrt{2}}{4}$. **D** $P_{\min}=8$.

Lời giải.

Với $x,y>0$, ta có

$$\begin{aligned}
&\log_{\frac{1}{2}} x+\log_{\frac{1}{2}} y \le \log_{\frac{1}{2}}\left(x+y^2\right)\\
\Leftrightarrow\ &\log_{\frac{1}{2}}(xy) \le \log_{\frac{1}{2}}\left(x+y^2\right)\\
\Leftrightarrow\ &xy \ge x+y^2\\
\Leftrightarrow\ &y^2 \le xy-x\\
\Leftrightarrow\ &y^2 \le x(y-1) \quad (*).
\end{aligned}$$

Vì $x>0$ nên từ $(*)$ suy ra $y-1>0$.

Khi đó, từ $y^2\le x(y-1)$ suy ra $x\ge \dfrac{y^2}{y-1}$, với $y>1$.

Như thế, $P=x+3y\ge \dfrac{y^2}{y-1}+3y=4y+1+\dfrac{1}{y-1}$, với $y>1$.

Xét hàm số $f(y)=4y+1+\dfrac{1}{y-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$.

Ta có $f'(y)=4-\dfrac{1}{(y-1)^2}=\dfrac{4y^2-8y+3}{(y-1)^2}$ và

$$f'(y)=0\Leftrightarrow 4y^2-8y+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{3}{2}\in(1;+\infty)\\ y=\dfrac{1}{2}\notin(1;+\infty).\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(y)$ như sau

y	1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(y)$	||	$-$	0	$+$	
$f(y)$	|| $+\infty$	$\searrow$	9	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{y\in(1;+\infty)} h(y) = 9$ khi $y = \dfrac{3}{2}$.

Suy ra $P \geq 9$. Đẳng thức xảy ra khi $y = \dfrac{3}{2}$ và $x = \dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}{\dfrac{3}{2} - 1} = \dfrac{9}{2}$.

Vậy $P_{\min} = 9$.

Chọn phương án B

Câu 20. Cho các số x, y thỏa mãn $9x^2 - 4y^2 = 5$ và $\log_m(3x + 2y) - \log_3(3x - 2y) = 1$. Giá trị lớn nhất của m sao cho tồn tại cặp $(x; y)$ thỏa mãn $3x + 2y \leq 5$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A $(6; 8)$. **B** $(4; 6)$. **C** $(0; 2)$. **D** $(2; 4)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $3x + 2y > 0$; $3x - 2y > 0$.

Ta có $9x^2 - 4y^2 = 5 \Leftrightarrow (3x + 2y)(3x - 2y) = 5$, mà $0 < 3x + 2y \leq 5$, suy ra $3x - 2y \geq 1$.

Khi đó $\log_m(3x + 2y) - \log_3(3x - 2y) = 1 \Leftrightarrow \log_m(3x + 2y) = 1 + \log_3(3x - 2y)$.

Vì $3x - 2y \geq 1$ nên $\log_3(3x - 2y) \geq 0 \Rightarrow 1 + \log_3(3x - 2y) \geq 1$.

Hay $\log_m(3x + 2y) \geq 1$, suy ra $m \leq 3x + 2y \leq 5$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $3x + 2y = 5 \Rightarrow 3x - 2y = 1 \Rightarrow x = y = 1$.

Vậy m đạt giá trị lớn nhất bằng 5 khi $x = y = 1$.

Chọn phương án B

Câu 21. Cho các số thực a, b thỏa mãn điều kiện $0 < b < a < 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a \dfrac{4(3b-1)}{9} + 8\log^2_{\frac{b}{a}} a - 1$ là

A 6. **B** 8. **C** $3\sqrt[3]{2}$. **D** 7.

Lời giải.

Ta có $\left(\dfrac{3b}{2} - 1\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{9b^2}{4} - 3b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 3b - 1 \leq \dfrac{9b^2}{4} \Leftrightarrow \dfrac{4(3b-1)}{9} \leq b^2$.

Lại có $0 < b < a < 1$ nên $P \geq \log_a b^2 + \dfrac{8}{\left(\log_a \dfrac{a}{b}\right)^2} - 1 = 2\log_a b + \dfrac{8}{(1 - \log_a b)^2} - 1$.

Đặt $\log_a b = t > 1$, ta có $P = 2t + \dfrac{8}{(t-1)^2} - 1$; $P' = 2 - \dfrac{16}{(t-1)^3}$; $P' = 0 \Leftrightarrow (t-1)^3 = 8 \Leftrightarrow t = 3$. Bảng biến thiên

t	1		3		$+\infty$
P'		$-$	0	$+$	
P	$+\infty$	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\min P = 7$.

Chọn phương án D

Câu 22. Cho $a > 0$, $b > 0$ thỏa mãn $\log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) + \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng

(A) 6. (B) 9. (C) $\frac{7}{2}$. (D) $\frac{5}{2}$.

Lời giải.

Do $a > 0, b > 0$ nên ta có $\begin{cases}(9a^2 + b^2) + 1 \geqslant 6ab + 1 \text{ (bất đẳng thức AM-GM)}\\ 3a + 2b + 1 > 1.\end{cases}$

$$\Rightarrow \log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) \geqslant \log_{3a+2b+1}(6ab + 1)$$

Từ đó $\log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) + \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) \geqslant \log_{3a+2b+1}(6ab + 1) + \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1)$
$\geqslant 2$ (bất đẳng thức AM-GM).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}3a = b > 0\\ 3a + 2b + 1 = 6ab + 1\end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ và $b = \frac{3}{2}$.

Vậy $a + 2b = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$.

Chọn phương án (C)

Câu 23. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $xy \leqslant 4y - 1$. Giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{6(2x + y)}{x} + \ln\frac{x + 2y}{y}$ là $a + \ln b$. Giá trị của tích ab là

(A) 45. (B) 81. (C) 108. (D) 115.

Lời giải.

Ta có:

$$xy \leqslant 4y - 1 \Leftrightarrow \frac{x}{y} \leqslant \frac{4}{y} - \frac{1}{y^2} = -\left(\frac{1}{y} - 2\right)^2 + 4 \leqslant 4 \Rightarrow 0 < \frac{x}{y} \leqslant 4.$$

Khi đó $P = 12 + \frac{6y}{x} + \ln\left(\frac{x}{y} + 2\right)$. Đặt $t = \frac{x}{y}$, suy ra $P = 12 + \frac{6}{t} + \ln(t + 2)$ và $0 < t \leqslant 4$.

$$P'(t) = -\frac{6}{t^2} + \frac{1}{t + 2} = \frac{t^2 - 6t - 12}{t^2(t + 2)} < 0, \forall t \in (0; 4].$$

Suy ra

$$\mathrm{P}_{\min} = P(4) = 12 + \frac{3}{2} + \ln 6 = \frac{27}{2} + \ln 6.$$

Vậy $a = \frac{27}{2}, b = 6 \Rightarrow ab = 81$.

Chọn phương án (B)

Câu 24. Cho $m = \log_a(\sqrt[3]{ab})$ với $a > 1$, $b > 1$ và $P = \log_a^2 b + 16\log_b a$. Tìm m sao cho P đạt giá trị nhỏ nhất.

(A) $m = \frac{1}{2}$. (B) $m = 2$. (C) $m = 4$. (D) $m = 1$.

Lời giải.

Ta có $m = \log_a(\sqrt[3]{ab}) = \frac{1}{3}(1 + \log_a b) \Rightarrow 3m - 1 = \log_a b$.

Từ đó $P = (3m - 1)^2 + \frac{16}{3m - 1}$.

Ta có $P'(m) = 6(3m-1) - \dfrac{48}{(3m-1)^2} \Rightarrow P'(m) = 0 \Leftrightarrow 3m - 1 = 2 \Leftrightarrow m = 1$.
Bảng biến thiên hàm số $P(m)$:

m	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$P'(m)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$P(m)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	12	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $P_{MIN} = 12$ khi $m = 1$.
Chọn phương án C

Câu 25. Xét hàm số $f(t) = \dfrac{9^t}{9^t + m^2}$ (với m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $f(x) + f(y) = 1$, với mọi số thực x, y thỏa mãn $\mathrm{e}^{x+y} \leq \mathrm{e}(x+y)$. Tìm số phần tử của S.

A. 0. B. 1. C. Vô số. D. 2.

Lời giải.
Theo giả thiết ta có $\mathrm{e}^{x+y} \leq \mathrm{e}(x+y) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}(x+y) \leq 0$. (1)

Đặt $u = x + y$, khi đó ta có $\mathrm{e}^u - \mathrm{e}u \leq 0$. Xét hàm $g(u) = \mathrm{e}^u - \mathrm{e}u$ trên $\mathbb{R}$.
Ta có $g'(u) = \mathrm{e}^u - \mathrm{e} = 0 \Rightarrow u = 1$. Bảng biến thiên của $g(u)$

u	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(u)$		$-$	0	$+$	
$g(u)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra $g(u) \geq g(0), \forall u \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}(x+y) \geq 0, \forall u$. (2)
Từ (1) và (2) ta suy ra $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}(x+y) \Leftrightarrow x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x$.
Vì $f(x) + f(y) = 1$ nên $f(x) + f(1-x) = 1$. Do vậy

$$\frac{9^x}{9^x + m^2} + \frac{9^{1-x}}{9^{1-x} + m^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{9^x}{9^x + m^2} + \frac{9}{9 + 9^x \cdot m^2} = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad 9^x \cdot m^4 = 9^x \cdot 9 \Leftrightarrow m^4 = 9 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{3}.$$

Vậy $S = \{\pm\sqrt{3}\}$.
Chọn phương án D

Câu 26. Xét các số dương a, b, c thỏa mãn $16\log^4 a + 4\log^4 b + 2\log^2 c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của a.

A. $10^{\sqrt{2}}$. B. 10^{-1}. C. 1. D. $10^{\frac{1}{2}}$.

Lời giải.

Ta có $16\log^4 a + 4\log^4 b + 2\log^2 c = 1 \Leftrightarrow (2\log a)^4 = 1 - \left(4\log^4 b + 2\log^2 c\right)$
$\Leftrightarrow \log a = \pm\dfrac{\sqrt[4]{1-\left(4\log^4 b + 2\log^2 c\right)}}{2}$
a lớn nhất khi và chỉ khi $\log a$ lớn nhất khi và chỉ khi $1 - \left(4\log^4 b + 2\log^2 c\right) = 1$.
Suy ra $\log a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a = 10^{\frac{1}{2}}$.
Chọn phương án D

Câu 27. Cho $m = \log_x \sqrt{x^3 y}$ với $x > 1$, $y > 1$. Đặt $T = 6\log_x y + 24\log_y x$. Khi đó, giá trị của m để T đạt giá trị nhỏ nhất là

A $m = \dfrac{1}{2}$. **B** $m = 2$. **C** $m = \dfrac{5}{2}$. **D** $m = \dfrac{1}{2}$ hay $m = \dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có $m = \log_x \sqrt{x^3 y} = \dfrac{1}{2}\left(\log_x x^3 + \log_x y\right) = \dfrac{1}{2}(3 + \log_x y) \Leftrightarrow \log_x y = 2m - 3$.
Vậy $T = 6\log_x y + \dfrac{24}{\log_x y} = 6(2m-3) + \dfrac{24}{2m-3} = f(m)$.

Có $f'(m) = 12 - \dfrac{48}{(2m-3)^2}$,
$f'(m) = 0 \Leftrightarrow (2m-3)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{5}{2} \\ m = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$
Do $x > 1$ và $y > 1$ nên $\log_x y > 0 \Rightarrow m > \dfrac{3}{2}$.

m	$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(m)$		$-$	0	$+$	
$f(m)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta suy ra T đạt giá trị nhỏ nhất khi $m = \dfrac{5}{2}$.
Chọn phương án C

Câu 28. Cho $m = \log_a \sqrt[3]{ab}$ với $a > 1$, $b > 1$ và $P = \log_a^2 b + 16\log_b a$. Tìm m sao cho P đạt giá trị nhỏ nhất.

A $m = 2$. **B** $m = 1$. **C** $m = \dfrac{1}{2}$. **D** $m = 4$.

Lời giải.

Ta có $m = \log_a \sqrt[3]{ab} \Leftrightarrow \log_a b = 3m - 1$.
Vì $a > 1$, $b > 1$ nên $\log_a b = 3m - 1 > 0$. Do đó
$P = \log_a^2 b + 16\log_b a = (3m-1)^2 + \dfrac{16}{3m-1} = (3m-1)^2 + \dfrac{8}{3m-1} + \dfrac{8}{3m-1} \geq 12$.
Suy ra giá trị nhỏ nhất của P bằng 12 khi $(3m-1)^2 = \dfrac{8}{3m-1} \Leftrightarrow (3m-1)^3 = 8 \Leftrightarrow m = 1$.
Chọn phương án B

Câu 29. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{x+2y+3}{x+y+6}$.

A $\dfrac{43+3\sqrt{249}}{94}$. **B** $\dfrac{37-\sqrt{249}}{94}$. **C** $\dfrac{69-\sqrt{249}}{94}$. **D** $\dfrac{69+\sqrt{249}}{94}$.

Lời giải.

Điều kiện $\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} > 0 \Leftrightarrow x+y>0$.

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3)+y(y-3)+xy \\ \Leftrightarrow\ & 2\log_3(x+y) - 2\log_3(x^2+y^2+xy+2) = x^2+y^2+xy-3x-3y \\ \Leftrightarrow\ & 2\log_3(x+y) + 2 - 2\log_3(x^2+y^2+xy+2) = x^2+y^2+xy+2-3x-3y \\ \Leftrightarrow\ & 2\log_3(3x+3y) + (3x+3y) = 2\log_3(x^2+y^2+xy+2) + x^2+y^2+xy+2 \quad (*). \end{aligned}$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = 2\log_3 t + t$, $t \in (0;+\infty)$, ta có $f'(t) = \dfrac{2}{t\cdot \ln 3} + 1 > 0$, $\forall t \in (0;+\infty)$.
Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.
Phương trình (*) $\Leftrightarrow f(3x+3y) = f(x^2+y^2+xy+2) \Leftrightarrow x^2+y^2+xy+2 = 3x+3y$

Đặt $\begin{cases} x = a+b \\ y = a-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{x+y}{2} \\ b = \dfrac{x-y}{2} \end{cases}$. Khi đó $P = \dfrac{3a-b+3}{2a+6}$ và $3(a-1)^2+b^2 = 1$.

Đặt $\begin{cases} \sqrt{3}\,(a-1) = \cos t \\ b = \sin t \end{cases}$ $(t \in [0;2\pi])$, khi đó

$$P = \frac{3\cos t - \sqrt{3}\sin t + 6\sqrt{3}}{2\cos t + 8\sqrt{3}} \Leftrightarrow (2P-3)\cdot\cos t + \sqrt{3}\sin t = 6\sqrt{3} - 8\sqrt{3}P.$$

Do phương trình luôn có nghiệm t nên ta có

$$\begin{aligned} & (2P-3)^2 + 3 \ge (6\sqrt{3} - 8\sqrt{3}P)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 47P^2 - 69P + 24 \le 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{69-\sqrt{249}}{94} \le P \le \frac{69+\sqrt{249}}{94}. \end{aligned}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{69+\sqrt{249}}{94}$.

Chọn phương án D

Câu 30. Cho các số thực $x,\ y,\ z$ thỏa mãn $\sqrt{\log_2 \dfrac{x}{4}} + \sqrt{\log_3 \dfrac{y}{9}} + \sqrt{\log_5 \dfrac{z}{25}} = 3$ Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = \log_{2001} x \cdot \log_{2018} y \cdot \log_{2019} z$.

A. $\min S = 27 \cdot \log_{2001} 2 \cdot \log_{2018} 3 \cdot \log_{2019} 5$.

B. $\min S = 44 \cdot \log_{2001} 2 \cdot \log_{2018} 3 \cdot \log_{2019} 5$.

C. $\min S = 8 \cdot \log_{2001} 2 \cdot \log_{2018} 3 \cdot \log_{2019} 5$.

D. $\min S = \dfrac{289}{8} \cdot \log_{2001} 2 \cdot \log_{2018} 3 \cdot \log_{2019} 5$.

Lời giải.

Đặt $a = \sqrt{\log_2 \dfrac{x}{4}}$, $b = \sqrt{\log_3 \dfrac{y}{9}}$, $c = \sqrt{\log_5 \dfrac{z}{25}}$.

Khi đó $a+b+c = 3$, $\log_2 x = a^2+2$, $\log_3 y = b^2+2$, $\log_5 z = c^2+2$, $S = F\cdot \log_{2001} 2 \cdot \log_{2018} 3 \cdot \log_{2019} 5$ với $F = \log_2 x \cdot \log_3 y \cdot \log_5 z = (a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)$.

Ta cần giá trị nhỏ nhất của $F = (a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)$ trong đó $a,\ b,\ c$ là các số không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Ba số $a^2-1,\ b^2-1,\ c^2-1$ luôn có ít nhất hai số có tích không âm. Giả sử $(a^2-1)(b^2-1) \ge 0$, suy ra

$$c^2(a^2-1)(b^2-1) \ge 0 \Leftrightarrow a^2b^2c^2 + c^2 \ge c^2b^2 + c^2a^2. \qquad (1)$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{cases}(a-b)^2+(bc-1)^2+(ca-1)^2\geq 0\\(ab-1)^2+(bc-1)^2+(ca-1)^2\geq 0\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2+8+2a^2b^2+3b^2c^2+3c^2a^2\geq 6(ab+bc+ca). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được

$$\begin{aligned}&a^2b^2c^2+a^2+b^2+c^2+8+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\geq 6(ab+bc+ca)\\ \Leftrightarrow\ &a^2b^2c^2+4(a^2+b^2+c^2)+8+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\geq 3(a+b+c)^2\\ \Leftrightarrow\ &(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 3(a+b+c)^2.\end{aligned}$$

Mà $a+b+c=3$ nên ta thu được $F=(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 27$, đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.
Do đó $S\geq 27\cdot\log_{2001}2\cdot\log_{2018}3\cdot\log_{2019}5$.
Đẳng thức xảy ra khi $x=8$, $y=27$, $z=125$.
Vậy $\min S=27\cdot\log_{2001}2\cdot\log_{2018}3\cdot\log_{2019}5$.
Chọn phương án A

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. A	4. A	5. A	6. C	7. A	8. D	9. D	10. B
11. B	12. A	13. A	14. C	15. C	16. B	17. C	18. D	19. B	20. B
21. D	22. C	23. B	24. C	25. D	26. D	27. C	28. B	29. D	30. A

DẠNG 48. GTNN – GTNN (TÌM GTLN – GTNN CỦA HÀM PHỤ THUỘC THAM SỐ TRÊN ĐOẠN

Câu 1. Cho hàm số $y=x^2-6x+m$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[0;4]} y-2\max\limits_{[0;4]} y=-18$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $m<-10$. (B) $-10<m\le -7$. (C) $-7<m<0$. (D) $0<m<10$.

Lời giải.

Ta có $y'=2x-4=0\Leftrightarrow x=3$.

Suy ra

+) $\min\limits_{[0;4]} y=\min\{y(0);y(3);y(4)\}=\min\{m;\,m-9;\,m-8\}=m-9$

+) $\max\limits_{[0;4]} y=\max\{y(0);y(3);y(4)\}=\max\{m;\,m-9;\,m-8\}=m$.

Theo giả thiết ta có $\min\limits_{[0;4]} y-2\max\limits_{[0;4]} y=-23\Rightarrow m-9-2m=-18\Leftrightarrow m=9$.

Vậy $0<m<10$.

Chọn phương án (D)

Câu 2. Cho hàm số $y=x^2-6x+m$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\max\limits_{[0;4]} y=3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $m<-10$. (B) $-10<m\le -7$. (C) $-7<m<0$. (D) $0<m<10$.

Lời giải.

Ta có $y'=2x-4=0\Leftrightarrow x=3$.

Suy ra $\max\limits_{[0;4]} y=\max\{y(0);y(3);y(4)\}=\max\{m;\,m-9;\,m-8\}=m$.

Theo giả thiết ta có $\max\limits_{[0;4]} y=3\Rightarrow m=3$.

Vậy $0<m<10$.

Chọn phương án (D)

Câu 3. Cho hàm số $y=x^2-6x+m$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[0;4]} y+\max\limits_{[0;4]} y=-23$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $m<-10$. (B) $-10<m\le -7$. (C) $-7<m<0$. (D) $0<m<10$.

Lời giải.

Ta có $y'=2x-4=0\Leftrightarrow x=3$.

Suy ra

+) $\min\limits_{[0;4]} y=\min\{y(0);y(3);y(4)\}=\min\{m;\,m-9;\,m-8\}=m-9$

+) $\max\limits_{[0;4]} y=\max\{y(0);y(3);y(4)\}=\max\{m;\,m-9;\,m-8\}=m$.

Theo giả thiết ta có $\min\limits_{[0;4]} y+\max\limits_{[0;4]} y=7\Rightarrow m-9+m=-23\Leftrightarrow m=-7$.

Vậy $-10<m\le -7$.

Chọn phương án (B)

Câu 4. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+m$ (với m là tham số thực) có $\min\limits_{[0;3]} y=-1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $-2<\mathrm{m}<0$. (B) $0<\mathrm{m}<1$. (C) $1<m<2$. (D) $2<\mathrm{m}<4$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-6x$.

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Ta có $y(0)=m, y(2)=m-4, y(3)=m$.

Suy ra $\min\limits_{[0;3]} y=m-4$

Do đó $\min\limits_{[0;3]} y=-1 \Rightarrow m-4=-1 \Leftrightarrow m=3$.

Vậy $2<\mathrm{m}<4$.

Chọn phương án (D)

Câu 5. Cho hàm số $y=x^3+2\left(m^2+1\right)x+3+m$ (với m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có $\max\limits_{[0;1]} y-3\min\limits_{[0;1]} y=9$. Tổng các phần tử của S là.

(A) 2. (B) -3. (C) 1 . (D) -1.

Lời giải.

Ta có .

Do đó $\min\limits_{[0;1]} y=y(0)=3+m$, $\max\limits_{[0;1]} y=y(1)=2m^2-m+6$.

Suy ra $\max\limits_{[0;1]} y-3\min\limits_{[0;1]} y=9 \Rightarrow m+3-3\left(2m^2-m+6\right)=9$.

$\Leftrightarrow 2m^2+2m-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-3 \end{array}\right.$.

Vậy tổng các phần tử của S là -1 .

Chọn phương án (D)

Câu 6. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+m$ (với m là tham số thực) có $\min\limits_{[0;3]} y=5$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $-2<\mathrm{m}<0$. (B) $0<\mathrm{m}<1$. (C) $1<m<2$. (D) $0<\mathrm{m}<2$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-6x$.

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Ta có $y(0)=m, y(2)=m-4, y(3)=m$.

Suy ra $\min\limits_{[0;3]} y=m$

Do đó $\min\limits_{[0;3]} y=-1 \Rightarrow m=-1$.

Vậy $-2<\mathrm{m}<0$.

Chọn phương án (A)

Câu 7. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ (với m là tham số thực) có $\min\limits_{[0;3]} y = -5$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $-2 < \mathrm{m} < 0$. **B** $0 < \mathrm{m} < 1$. **C** $1 < m < 2$. **D** $0 < \mathrm{m} < 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Ta có $y(0) = m, y(2) = m - 4, y(3) = m$.

Suy ra $\min\limits_{[0;3]} y = m - 4$

Do đó $\min\limits_{[0;3]} y = -5 \Rightarrow m - 4 = -5 \Leftrightarrow m = -1$.

Vậy $-2 < \mathrm{m} < 0$.

Chọn phương án A

Câu 8. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 6$ (với m là tham số thực) có $\min\limits_{[0;4]} y = 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $-2 < \mathrm{m} < 0$. **B** $0 < \mathrm{m} < 1$. **C** $1 < m < 2$. **D** $0 < \mathrm{m} < 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$.

Ta có $y(0) = 6, y(4) = 70 - 48m, y(2m) = 6 - 4m^3$.

Nếu $y(4) = 2 \Leftrightarrow m = \dfrac{17}{12} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y(2m) = -\dfrac{2321}{432} \\ x = 2m = \dfrac{17}{6} \in [0;4] \end{array}\right. \Rightarrow \min\limits_{[0;4]} y \neq 2$.

Nếu $y(2m) = 2 \Leftrightarrow m = 1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y(4) = 22 \\ x = 2m = 2 \in [0;4] \end{array}\right. \Rightarrow \min\limits_{[0;4]} y = 2$.

Vậy $\mathrm{m} = 1$.

Chọn phương án D

Câu 9. Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ (với m là tham số thực) có $\min\limits_{[-1;1]} y = 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $\mathrm{m} = 2$. **B** $\mathrm{m} = 4$. **C** $m = 0$. **D** $\mathrm{m} = 6$.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 - 6x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in (-1;1) \\ x = -2 \notin (-1;1) \end{array}\right.$.

Ta có $\left\{\begin{array}{l} y(0) = m \\ y(1) = m - 4 \\ y(-1) = m - 2 \end{array}\right. \Rightarrow \min\limits_{[-1\,;\,1]} y = m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

Chọn phương án B

Câu 10. Cho hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ (với m là tham số thực) có $\max\limits_{[-1;1]} y=6$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) m = 2. (B) m = 4. (C) $m=0$. (D) m = 6.

Lời giải.

Ta có $y'=-3x^2-6x$.

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in(-1;1) \\ x=-2\notin(-1;1) \end{array}\right.$.

Ta có $\begin{cases} y(0)=m \\ y(1)=m-4 \\ y(-1)=m-2 \end{cases} \Rightarrow \max\limits_{[-1\,;\,1]} y=m=6 \Leftrightarrow m=6$.

Chọn phương án (D)

Câu 11. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y=x+\sqrt{4-x^2}+m$ là $3\sqrt{2}$. Giá trị của m là

(A) $m=\sqrt{2}$. (B) $m=2\sqrt{2}$. (C) $m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (D) $m=-\sqrt{2}$.

Lời giải.

Tập xác định $D=[-2\,;\,2]$.

$y'=1-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}=0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}-x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ 4-x^2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$.

$f(2)=2+m$, $f(-2)=-2+m$, $f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}+m$.

Nên giá trị lớn nhất là: $2\sqrt{2}+m=3\sqrt{2}\Leftrightarrow m=\sqrt{2}$.

Chọn phương án (A)

Câu 12. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\sqrt{4-x^2}+m$ là 3 . Giá trị của m là

(A) $m=5$. (B) $m=3$. (C) $m=1$. (D) $m=0$.

Lời giải.

Tập xác định $D=[-2\,;\,2]$.

$y'=1-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}=0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}-x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ 4-x^2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$.

$f(2)=2+m$, $f(-2)=-2+m$, $f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}+m$.

Nên giá trị nhỏ nhất là: $-2+m=3\Leftrightarrow m=5$.

Chọn phương án (A)

Câu 13. Biết rằng tổng giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y=x+\sqrt{4-x^2}+m$ là 3. Giá trị của m là

(A) $m=5$. (B) $m=3$. (C) $m=1$. (D) $m=0$.

Lời giải.

Tập xác định $D=[-2\,;\,2]$.

$y'=1-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}=0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}-x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ 4-x^2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$.

$f(2)=2+m$, $f(-2)=-2+m$, $f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}+m$.

Nên tổng giá trị nhỏ nhất và lớn nhất là: $-2+m+2\sqrt{2}+m=2\sqrt{2}\Leftrightarrow m=1$.

Chọn phương án C

Câu 14. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{2x + m^2 + m - 1}{x - 1}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[2; 4]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A 1. **B** 3 . **C** 2. **D** 0.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{-m^2 - m - 1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$.

Do đó hàm số luôn nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$

Suy ra $\max\limits_{[2;4]} y = y(2) = m^2 + m + 3$

Do đó $\max\limits_{[2;4]} y = 3 \Leftrightarrow m^2 + m + 3 = 3 \Leftrightarrow m^2 + m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -1 \end{array}\right.$.

Chọn phương án C

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{2x + m^2 + m - 1}{x - 1}$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2; 4]$ bằng 3.

A $m = 1$; $m = -2$. **B** $m = -2$. **C** $m = -1$; $m = 0$. **D** $m = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{-m^2 - m - 1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$.

Do đó hàm số luôn nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$

Suy ra $\min\limits_{[2;4]} y = y(4) = \dfrac{m^2 + m + 7}{3}$

Do đó $\min\limits_{[2;4]} y = 3 \Leftrightarrow \dfrac{m^2 + m + 7}{3} = 3 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -2 \end{array}\right.$.

Chọn phương án A

Câu 16. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{2x + m^2 + m - 1}{x - 1}$ có $\min\limits_{[2;4]} y + \max\limits_{[2;4]} y = 8$. Tích các phần tử của S là.

A -2. **B** -1. **C** 2. **D** 1.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{-m^2 - m - 2}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$.

Do đó hàm số luôn nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Suy ra

$\min\limits_{[2;4]} y = y(4) = \dfrac{m^2 + m + 7}{3}$, $\max\limits_{[2;4]} y = y(2) = m^2 + m + 3$.

Do đó $\min\limits_{[2;4]} y + \max\limits_{[2;4]} y = 8 \Rightarrow \dfrac{m^2 + m + 7}{3} + m^2 + m + 3 = 8$.

$\Leftrightarrow 4m^2 + 4m - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -2 \end{array}\right.$.

Vậy tích các phần tử của S là -2 .

Chọn phương án A

Câu 17. Tìm tất cả các số nguyên âm của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{2x - m^2 - m}{x+1}$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;1]$ bằng -6

A $m = -3$. **B** $m = -2$; $m = 3$. **C** $m = \dfrac{-1 \pm \sqrt{57}}{2}$. **D** $m = 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{m^2 + m + 2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [0;1]$

Do đó hàm số luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty\,;\,-1)$ và $(-1\,;\,+\infty)$

Suy ra $\min\limits_{[0;1]} y = y(0) = -m^2 - m = -6 \Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = 2 \end{array}\right.$.

Do m là số nguyên âm nên $m = -3$

Chọn phương án A

Câu 18. Tìm tất cả các số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{2x - m^2 - m}{x+1}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;1]$ bằng 1 .

A $m = -1; m = 0$. **B** $m = -2$; $m = 3$. **C** $m = \dfrac{-1 \pm \sqrt{57}}{2}$. **D** $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{57}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{m^2 + m + 2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [0;1]$

Do đó hàm số luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty\,;\,-1)$ và $(-1\,;\,+\infty)$

Suy ra $\max\limits_{[0;1]} y = y(1) = \dfrac{2 - m^2 - m}{2} = 1 \Leftrightarrow -m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 0 \end{array}\right.$.

Chọn phương án A

Câu 19. Tìm tất cả các số thực m để hàm số $y = \dfrac{2x - m^2 - m}{x+1}$ có $\min\limits_{[0;1]} y + \max\limits_{[0;1]} y = 1$.

A $m = -1$; $m = 0$. **B** $m = -2$; $m = 3$. **C** $m = \dfrac{-1 \pm \sqrt{57}}{2}$. **D** $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{57}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{m^2 + m + 2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [0;1]$

Do đó hàm số luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty\,;\,-1)$ và $(-1\,;\,+\infty)$.

$\min\limits_{[0;1]} y = y(0) = -m^2 - m$, $\max\limits_{[0;1]} y = y(1) = \dfrac{2 - m^2 - m}{2}$.

Suy ra $\min\limits_{[0;1]} y + \max\limits_{[0;1]} y = 1 \Rightarrow -m^2 - m + \dfrac{2 - m^2 - m}{2} = 1$.

$\Leftrightarrow -3m^2 - 3m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -1 \end{array}\right.$.

Chọn phương án A

Câu 20. Cho hàm số $y = \dfrac{x+m}{x-1}$ (với m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

(A) $3 < m \leq 4$. (B) $1 \leq m < 3$. (C) $m > 4$. (D) $m < -1$.

Lời giải.

Ta có $y' = -\dfrac{m+1}{(x-1)^2}$.

TH1. Với $m > -1$ suy ra $f'(x) = -\dfrac{m+1}{(x-1)^2} < 0;\ \forall x \neq 1$ nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

Khi đó $\min\limits_{[2;4]} y = f(4) = \dfrac{m+4}{3} = 3 \Leftrightarrow m = 5$ (chọn).

TH2. Với $m < -1$ suy ra $f'(x) = -\dfrac{m+1}{(x-1)^2} > 0;\ \forall x \neq 1$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

Khi đó $\min\limits_{[2;4]} y = f(2) = m + 2 = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (loại).

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm và thỏa mãn điều kiện $m > 4$.

Chọn phương án C

Câu 21. Cho hàm số $y = \dfrac{x+m}{x-1}$ (với m là tham số thực) thỏa mãn $\max\limits_{[2;4]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

(A) $3 < m \leq 4$. (B) $1 \leq m < 3$. (C) $m > 4$. (D) $m < -1$.

Lời giải.

Ta có $y' = -\dfrac{m+1}{(x-1)^2}$.

TH1. Với $m > -1$ suy ra $f'(x) = -\dfrac{m+1}{(x-1)^2} < 0;\ \forall x \neq 1$ nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

Khi đó $\max\limits_{[2;4]} y = y(2) = m + 2 = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (chọn).

TH2. Với $m < -1$ suy ra $f'(x) = -\dfrac{m+1}{(x-1)^2} > 0;\ \forall x \neq 1$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

Khi đó $\max\limits_{[2;4]} y = y(4) = \dfrac{m+4}{3} = 3 \Leftrightarrow m = 5$ (loại).

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm và thỏa mãn điều kiện $1 \leq m < 3$. .

Chọn phương án B

Câu 22. Cho hàm số $y = \dfrac{x+m}{x+1}$ (với m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[1;2]} y + \max\limits_{[1;2]} y = \dfrac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

(A) $0 < m \leq 2$. (B) $2 < m \leq 4$. (C) $m \leq 0$. (D) $m > 4$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ là hàm số đơn điệu trên đoạn $[1;2]$ với mọi $m \neq 1$.

Khi đó $\min\limits_{[1;2]} y + \max\limits_{[1;2]} y = f(1) + f(2) = \dfrac{m+1}{2} + \dfrac{m+2}{3} = \dfrac{16}{3} \Leftrightarrow \dfrac{5m}{6} = \dfrac{25}{6} \Leftrightarrow m = 5$.

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm và thỏa mãn điều kiện $m > 4$.

Chọn phương án D

Câu 23. Cho hàm số $y = \dfrac{x - m^2 + m}{x+1}$. Tìm m để $2\max\limits_{[0;1]} y + 3\min\limits_{[0;1]} y = 1$

A $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right.$. **B** $m = 0$. **C** $m = 1$. **D** $m = -1$.

Lời giải.

Tập xác định $D = R \setminus \{-1\}$

$y' = \dfrac{m^2 - m + 1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \max\limits_{[0;1]} y = y(1) = \dfrac{-m^2 + m + 1}{2} \\ \min\limits_{[0;1]} y = y(0) = -m^2 + m \end{array}\right.$

Theo đề ta có: $2\max\limits_{[0;1]} y + 3\min\limits_{[0;1]} y = 1$.

$\Rightarrow 2\left(\dfrac{-m^2 + m + 1}{2}\right) + 3\left(-m^2 + m\right) = 1$.

$\Leftrightarrow -4m^2 + 4m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right.$.

Chọn phương án A

Câu 24. Cho hàm số $y = \dfrac{x+m}{x-1}$. Tìm m để $\max\limits_{[2;4]} y + 3\min\limits_{[2;4]} y = 8$

A $m = 1 \ \vee \ m = \dfrac{1}{5}$. **B** $m = 1$. **C** $m = \dfrac{1}{5}$. **D** $m = -1$.

Lời giải.

Tập xác định $D = R \setminus \{1\}$, $y' = \dfrac{-m-1}{(x-1)^2}$

TH1: $-m - 1 > 0 \Leftrightarrow m < -1 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \max\limits_{[2;4]} y = y(4) = \dfrac{4+m}{3} \\ \min\limits_{[2;4]} y = y(2) = 2 + m \end{array}\right.$

$\max\limits_{[2;4]} y + 3\min\limits_{[2;4]} y = 8 \Leftrightarrow \dfrac{4+m}{3} + 3(2+m) = 8 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{5}$ (l)

TH2: $-m - 1 < 0 \Leftrightarrow m > -1 \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \min\limits_{[2;4]} y = y(4) = \dfrac{4+m}{3} \\ \max\limits_{[2;4]} y = y(2) = 2 + m \end{array}\right.$

$\max\limits_{[2;4]} y + 3\min\limits_{[2;4]} y = 8 \Leftrightarrow 3\left(\dfrac{4+m}{3}\right) + 2 + m = 8 \Leftrightarrow m = 1\,(n)$

Vậy $m = 1$.

Chọn phương án B

Câu 25. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - m^2 x - 1}{x-1}$ (với m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để $\max\limits_{[2;4]} y = \dfrac{14}{3}$. Hỏi số phần tử của S là

(A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 4 .

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2x + m^2 + 1}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-1)^2 + m^2}{(x-1)^2} > 0$, $\forall x \in [2;4]$

Do đó $a = \max\limits_{[2;4]} y = y(4) = \dfrac{15 - 4m^2}{3}$.

Theo giả thiết, ta có $\dfrac{15 - 4m^2}{3} = \dfrac{14}{3} \Rightarrow m = \pm\dfrac{1}{2}$

Chọn phương án (A)

Câu 26. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - m^2x - 1}{x - 1}$ (với m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để $\min\limits_{[2;4]} y = 3$. Hỏi số phần tử của S là

(A) 2 . (B) 1. (C) 3. (D) 4 .

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2x + m^2 + 1}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-1)^2 + m^2}{(x-1)^2} > 0$, $\forall x \in [2;4]$.

Do đó $\min\limits_{[2;4]} y = y(2) = -2m^2 + 3$.

Theo giả thiết, ta có $-2m^2 + 3 = 3 \Leftrightarrow m = 0$.

Chọn phương án (B)

Câu 27. Cho hàm số $y = \dfrac{-x^2 - mx + 1}{x + m}$ (với m là tham số thực âm). Biết $\min\limits_{[2;4]} y = 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $0 < m \leq 1$. (B) $1 < m \leq 2$. (C) $2 < m < 3$. (D) $m \leq -3$.

Lời giải.

Với $m > 0$, ta có $y' = \dfrac{-x^2 - 2mx - m^2 - 1}{(x+m)^2} = \dfrac{-\left[(x+m)^2 + 1\right]}{(x+m)^2} < 0, \forall x \in [2;4]$.

Do đó $\min\limits_{[2;4]} y = y(4) = \dfrac{-4m - 15}{m + 4} = 1 \Leftrightarrow m = -\dfrac{19}{5}$.

Chọn phương án (D)

Câu 28. Cho hàm số $y = \dfrac{-x^2 - mx + 1}{x + m}$ (với m là tham số). Biết $\max\limits_{[2;4]} y = -3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $0 < m \leq 1$. (B) $1 < m \leq 2$. (C) $2 < m < 3$. (D) $m \leq -3$.

Lời giải.

Với $m > 0$, ta có $y' = \dfrac{-x^2 - 2mx - m^2 - 1}{(x+m)^2} = \dfrac{-\left[(x+m)^2 + 1\right]}{(x+m)^2} < 0, \forall x \in [2;4]$.

Do đó $\max\limits_{[2;4]} y = y(2) = \dfrac{-3 - 2m}{2 + m} = -3 \Leftrightarrow m = -3$.

Chọn phương án (D)

Câu 29. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{-x^2-mx+1}{x+m}$ (với m là tham số) có $\min\limits_{[2;4]} y+\max\limits_{[2;4]} y=-1$. Tổng các phần tử của S là.

(A) $\dfrac{8}{25}$. (B) $\dfrac{-8}{25}$. (C) $\dfrac{25}{8}$. (D) $-\dfrac{28}{5}$.

Lời giải.

Với $m>0$, ta có $y'=\dfrac{-x^2-2mx-m^2-1}{(x+m)^2}=\dfrac{-\left[(x+m)^2+1\right]}{(x+m)^2}<0, \forall x\in[2;4]$.

Do đó $\min\limits_{[2;4]} y=y(4)=\dfrac{-4m-15}{m+4}$, $\max\limits_{[2;4]} y=y(2)=\dfrac{-3-2m}{2+m}$.

Suy ra $\min\limits_{[2;4]} y+\max\limits_{[2;4]} y=-1 \Rightarrow \dfrac{-4m-15}{m+4}+\dfrac{-3-2m}{2+m}=-1$.

$\Leftrightarrow 5m^2+28m+34=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{-14\pm\sqrt{26}}{5}$.

Vậy tổng các phần tử của S là $-\dfrac{28}{5}$.

Chọn phương án (D)

Câu 30. Tập hợp nào dưới đây chứa tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 5 .

(A) $(-5;-2)\cup(0;3)$. (B) $(0;+\infty)$. (C) $(-6;-3)\cup(0;1)$. (D) $(-4;3)$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=x^2-2x+m$ trên đoạn $[-1;2]$.

Có $f'(x)=2x-2$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Ta có $f(-1)=m+3$, $f(1)=m-1$, $f(2)=m$.

Khi đó $\max\limits_{[-1;2]} y=m+3$ hoặc $\max\limits_{[-1;2]} y=1-m$.

Ta xét các Trường hợp sau:

TH1: $\max\limits_{[-1;2]} y=m+3=5\Rightarrow m=2$.

Thử lại với $m=2$.

Khi đó $y=\left|x^2-2x+2\right|=x^2-2x+2, \forall x\in[-1;2]$ nên $\max\limits_{[-1;2]} y=5$.

Do đó $m=2$ (thỏa mãn).

TH2: $\max\limits_{[-1;2]} y=1-m=5\Rightarrow m=-4$.

Thử lại với $m=-4$.

Khi đó $y=\left|x^2-2x-4\right|$ nên $\max\limits_{[-1;2]} y=5$.

Do đó $m=-4$ (thỏa mãn).

Vậy có hai giá trị thỏa mãn là $m=1; m=-4$.

Chọn phương án (A)

Câu 31. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-21;21]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)=x^6+(m-2)x^5+\left(m^2-11\right)x^4+2021$ đạt tại $x=0$. Số phần tử của tập S là

(A) 34. (B) 42 . (C) 35. (D) 37.

Lời giải.

Ta có $f\left(x\right)=x^6+\left(m-2\right)x^5+\left(m^2-11\right)x^4+2021\geq f\left(0\right)=2021$,

$\Leftrightarrow x^4\left[x^2+\left(m-2\right)x+m^2-11\right]\geq 0$, $\Leftrightarrow x^2+\left(m-2\right)x+m^2-11\geq 0$,

$$\Leftrightarrow \Delta=\left(m-2\right)^2-4\left(m^2-11\right)\leq 0\Leftrightarrow -3m^2-4m+48\leq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\leq \dfrac{-2-2\sqrt{37}}{3} \\ m\geq \dfrac{-2+2\sqrt{37}}{3} \end{array}\right. .$$

Với $\Rightarrow m\in\{-21;...;-5;4;...;21\}\Rightarrow S=\{-21;...;-5;4;...;21\}$.

Vậy tập S có tất cả 35 phần tử.

Chọn phương án C

Câu 32. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-21;21]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-2mx^3+4mx^2-(2m+2)x-2021$ đạt tại $x_0=2$. Số phần tử của tập S là:

A. 1. B. 0. C. 2. D. 12.

Lời giải.

+Một hàm đa thức muốn đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x=x_0$ thì hệ số của lũy thừa cao nhất phải dương và đạo hàm phái triệt tiêu tại $x=x_0$. Suy ra: $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ a_n>0 \end{cases}$

+Đạo hàm: $f'(x)=4x^3-6mx^2+8mx-(2m+2)$.

+Suy ra: $f'(2)=4.2^3-6m2^2+8m.2-(2m+2)=0\Leftrightarrow m=3$.

+Thử lại: Với $m=3\rightarrow f(x)=x^4-6x^3+12x^2-8x-2021=(x-2)^2(x^2-2x)-2021$.

+Không thỏa mãn điều kiện: $f(x)=(x-2)^2(x^2-2x)-2021>f(2)=-2021$ với .

+Suy ra không có giá trị nào của tham số m thỏa mãn.

Chọn phương án B

Câu 33. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x)=-x^4-2mx^3+3mx^2-2mx-2021$ đạt giá trị lớn nhất tại $x_0=1$. Số phần tử của tập S là:

A. 3. B. 2 . C. 1. D. 20.

Lời giải.

+Một hàm đa thức muốn đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x=x_0$ thì hệ số của lũy thừa cao nhất phải âm và đạo hàm phái triệt tiêu tại $x=x_0$. Suy ra: $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ a_n<0 \end{cases}$.

+Đạo hàm: $f'(x)=-4x^3-6mx^2+6mx-2m$.

+Suy ra: $f'(1)=-4.1^3-6m1^2+6m.1-2m=0\Leftrightarrow m=-2$.

+Thử lại: Với $m=-2\rightarrow f(x)=-x^4+4x^3-6x^2+4x-2021=-(x-1)^4-2020$.

+Thỏa mãn điều kiện: $f(x)=-(x-1)^4-2020\leq f(1)=-2020$ với .

+Suy ra giá trị của tham số $m=-2$ thỏa mãn.

Chọn phương án C

BẢNG ĐÁP ÁN

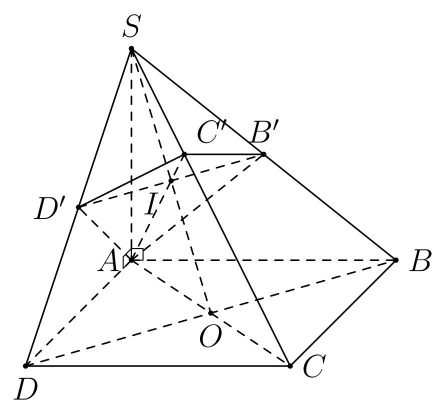
1. D	2. D	3. B	4. D	5. D	6. A	7. A	8. D	9. B	10. D
11. A	12. A	13. C	14. C	15. A	16. A	17. A	18. A	19. A	20. C
21. B	22. D	23. A	24. B	25. A	26. B	27. D	28. D	29. D	30. A
31. C	32. B	33. C							

DẠNG 49. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN (CẮT BỞI MẶT PHẲNG)

Câu 1. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, $SA = 2a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với $(ABCD)$. Một mặt phẳng (P) qua A và vuông góc SC,cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Gọi V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của khối chóp $S.AB'C'D'$ và khối đa diện $ABCD.D'C'B'$. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{8}{15}$. Ⓑ $\dfrac{8}{7}$. Ⓒ $\dfrac{32}{13}$. Ⓓ $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.



Vì hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với $(ABCD)$ nên $SA \perp (ABCD)$.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot a^2 \cdot 2a = \dfrac{2a^3}{3}$.

Do đó $V_{S.ACB} = V_{S.ACD} = \dfrac{1}{2} \cdot V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3}{3}$.

Chứng minh được $AB' \perp SB, AD' \perp SD$ và $B'D' \parallel BD$.

Ta có $SD = SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{5}$.

$SC^2 = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{6}$.

Trong tam giác vuông SAB có $\dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{SA^2}{SB^2} = \dfrac{4}{5}$.

Do $B'D' \parallel BD$ nên $\dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{4}{5}$.

Trong tam giác vuông SAC có $\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{SA^2}{SC^2} = \dfrac{2}{3}$ nên $\dfrac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}} = \dfrac{SC'}{SC} \cdot \dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{8}{15}$

và $\dfrac{V_{S.AC'B'}}{V_{S.ACB}} = \dfrac{SC'}{SC} \cdot \dfrac{BD'}{SB} = \dfrac{8}{15}$.

$\Rightarrow \dfrac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}} + \dfrac{V_{S.AC'B'}}{V_{S.ACB}} = \dfrac{V_{S \cdot A.B'C'D'}}{V_{S.ACD}} = \dfrac{16}{15} \Rightarrow \dfrac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{8}{15} \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{8}{7}$.

Cách khác Áp dụng công thức tỉ số thể tích khối chóp tứ giác có đáy là hình bình hành

$$V_{SAB'C'D'} = \frac{xyzt}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) V_{SABCD}.$$

Với $x = \dfrac{SA}{SA} = 1; y = \dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{4}{5}; z = \dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{2}{3}; t = \dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{4}{5}$. Ta được $V_{SAB'C'D'} = \dfrac{8}{15} \cdot V_{SABCD}$.

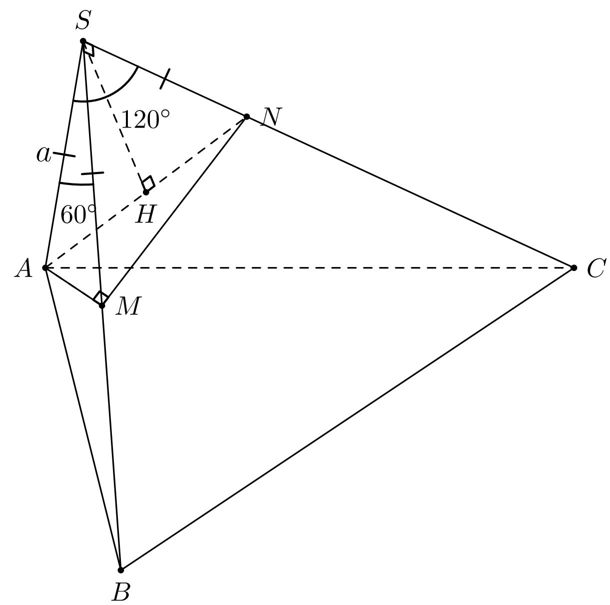
Chọn phương án Ⓑ

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SB = 2a$, $SC = 3a$ và $\widehat{ASB} = 60^\circ$, $\widehat{BSC} = 90^\circ$, $\widehat{CSA} = 120^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Ⓐ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. Ⓑ $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. Ⓒ $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. Ⓓ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gọi $M \in SB$, $N \in SC$ sao cho $SM = SN = a$.
Công thức tỉ số thể tích
$\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SB} \cdot \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$
$\Rightarrow V_{S.ABC} = 6V_{S.AMN}$.
Vì tam giác SAM đều nên $AM = a$.
Tam giác SMN vuông tại S nên $MN = a\sqrt{2}$.
Xét tam giác SAN
$\Rightarrow AN^2 = SA^2 + SN^2 - 2 \cdot SA \cdot SN \cdot \cos 60^\circ = 3a^2$.
Xét tam giác AMN có
$AM^2 + MN^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2 = AN^2$
$\Rightarrow \triangle AMN$ vuông tại M.



Gọi H là trung điểm của $AN \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp AMN.
Vì hình chóp $S.AMN$ có $SA = SM = SN = a$ nên $SH \perp (AMN)$.
Ta có $S_{\triangle AMN} = \dfrac{1}{2} \cdot AM \cdot MN = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.
Tam giác SHN vuông tại $H \Rightarrow SH = \sqrt{SN^2 - HN^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a}{2}$.
Thể tích $V_{S.AMN} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle AMN} \cdot SH = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.
Thể tích $V_{S.ABC} = 6 \cdot \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.
Chọn phương án C

Câu 3. Cho tứ diện đều $ABCD$ có các cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và E là điểm đối xứng với B qua D. Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V. Tính V.

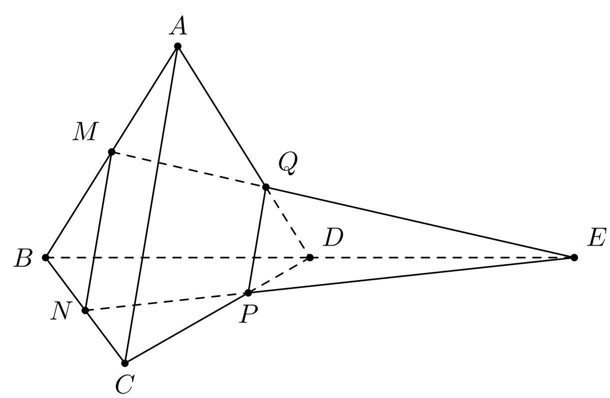
A $V = \dfrac{11\sqrt{2}a^3}{216}$. **B** $V = \dfrac{7\sqrt{2}a^3}{216}$. **C** $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{18}$. **D** $V = \dfrac{13\sqrt{2}a^3}{216}$.

Lời giải.

Ta có thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} = X$.
Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của NE với CD và ME với AD. Sử dụng định lý Menelaus với tam giác ABD ta có

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{EB}{ED} \cdot \frac{QD}{QA} = 1 \Rightarrow \frac{AQ}{AD} = \frac{2}{3}.$$

Tương tự cũng có $\dfrac{CP}{CD} = \dfrac{2}{3}$.



Áp dụng công thức tỷ số thể tích ta có

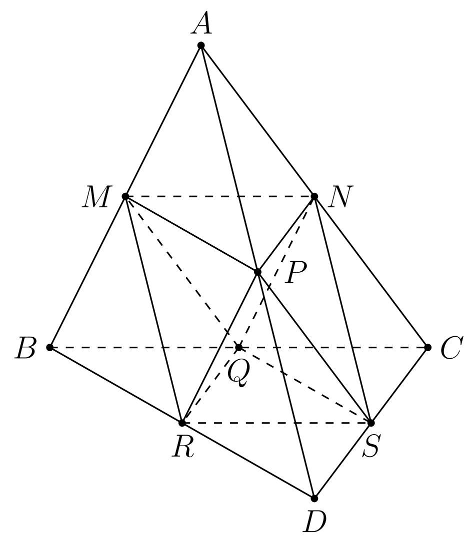
$$\frac{V_{B.MNE}}{V_{B.ACD}} = \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BN}{BC} \cdot \frac{BE}{BD} = \frac{1}{2}.$$

Từ đó có $V_{E.BMN} = \frac{1}{2}X$. Áp dụng tỉ số thể tích ta có $\frac{V_{E.PQD}}{V_{E.BMN}} = \frac{2}{9}$.
Suy ra $V_{E.PQD} = \frac{2}{9} \cdot V_{E.BMN} \Rightarrow V_{BMNQPD} = \frac{7}{9} \cdot V_{E.BMN} = \frac{7}{18}X$.
Tức là phần khối đa diện không chứa điểm A có thể tích bằng $\frac{7}{18}X$, nên phần chứa điểm A có thể tích là $\frac{11}{18}X = \frac{11\sqrt{2}a^3}{216}$.
Chọn phương án A

Câu 4. Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng V. Gọi V' là thể tích khối đa diện có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của khối tứ diện $ABCD$, tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

A $\frac{V'}{V} = \frac{1}{4}$. **B** $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$. **C** $\frac{V'}{V} = \frac{2}{3}$. **D** $\frac{V'}{V} = \frac{5}{8}$.

Lời giải.



Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, AC, AD, BC, BD, CD.
V' là thể tích của khối đa diện $PMNSRQ$. Kí hiệu V_1, V_2, V_3, V_4 lần lượt là thể tích của các khối $AMNP$, $BMQR$, $CNQS$, $DPRS$.
Ta có

$$\begin{aligned} V' &= V - (V_1 + V_2 + V_3 + V_4) \\ &= V - \left(\frac{1}{8}V + \frac{1}{8}V + \frac{1}{8}V + \frac{1}{8}V\right) = \frac{V}{2}. \end{aligned}$$

Hay $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$.

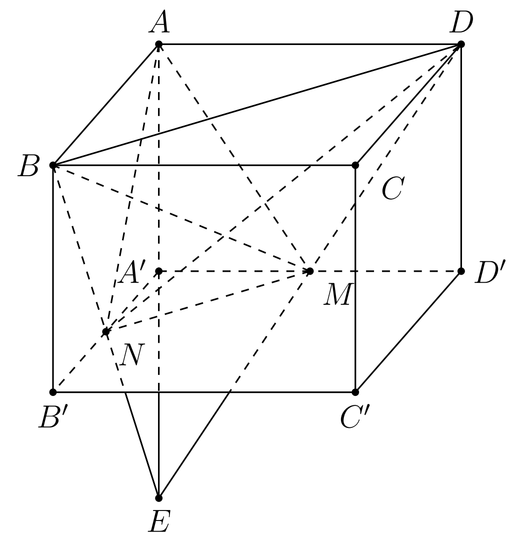
Chọn phương án B

Câu 5. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB = AD = a$, $AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $\widehat{BAD} = 60°$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh $A'D'$ và $A'B'$. Tính thể tích khối chóp $A.BDMN$.

A $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$. **B** $V = \frac{3a^3}{16}$. **C** $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{16}$. **D** $V = \frac{a^3}{16}$.

Lời giải.

Gọi E là giao điểm của BN và DM.
Ta có $MN \parallel B'D'$, $B'D' \parallel BD$ nên $MN \parallel BD$.
Lại có $MN = \frac{1}{2}B'D' = \frac{1}{2}BD$.
Vậy M, N lần lượt là trung điểm của DE, BE suy ra $EM = MD = MA$.
Xét hai tam giác vuông $A'AM$ và $A'EM$ có $A'M$ chung và $AM = EM$ nên chúng bằng nhau, suy ra $A'A = A'E$.
Mặt khác $AE \perp (A'B'C'D')$ nên E chính là điểm đối xứng với A qua $(A'B'C'D')$.
Suy ra $V_{A.A'MN} = V_{E.A'MN}$.



Xét tam giác ABD có $AB = AD = a$ và $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên nó là tam giác đều cạnh a. Diện tích của nó bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
Ta có $\frac{V_{E.A'MN}}{V_{E.ADB}} = \frac{EA'}{EA} \cdot \frac{EM}{ED} \cdot \frac{EN}{EB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ hay $V_{E.A'MN} = V_{A.A'MN} = \frac{1}{8}V_{E.ADB}$.
Do đó thể tích của khối đa diện $A.BDMN$ là

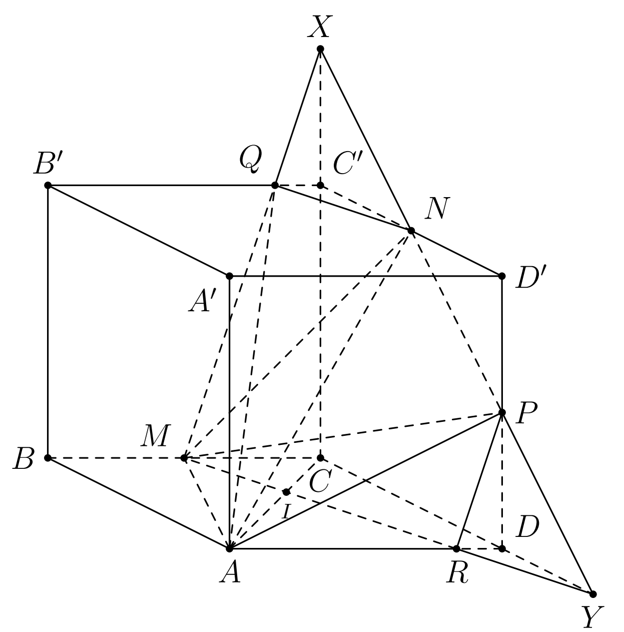
$$V_{A.BDMN} = V_{E.ADB} - 2V_{E.A'MN} = \frac{3}{4}V_{E.ADB} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3} = \frac{3a^2}{16}.$$

Chọn phương án B

Câu 6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N, P lần lượt là trung điểm của $BC, C'D', DD'$. Biết thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng V. Tính thể tích khối tứ diện $AMNP$.

(A) $\frac{5V}{16}$. (B) $\frac{5V}{48}$. (C) $\frac{V}{16}$. (D) $\frac{V}{48}$.

Lời giải.



Gọi X, Y lần lượt là giao điểm của NP với CC', CD; Q, R lần lượt là giao điểm của MX với $B'C'$, MY với AD; I là giao điểm của AC với MY. Dễ thấy $XC' = \frac{DD'}{2}$ nên $QC' = \frac{1}{3}MC = \frac{1}{6}BC$. Tương tự $DR = \frac{1}{6}AD$. Suy ra

$$\frac{CI}{AI} = \frac{CM}{AR} = \frac{BC}{2} : \frac{5AD}{6} = \frac{3}{5} \Rightarrow d(A,(MNP)) = \frac{5}{3}d(C,(MNP)).$$

Do đó $V_{A.MNP} = \frac{5}{3}V_{C.MNP}$. Lại có $XN = BP = PY$ nên $S_{MNP} = \frac{1}{3}S_{MXY}$ nên $V_{C.MNP} = \frac{1}{3}V_{C.MXY}$.
Ta có

$$V_{C.MXY} = \frac{1}{6}\cdot CX\cdot CY\cdot CM = \frac{1}{6}\cdot\frac{3CC'}{2}\cdot\frac{3CD}{2}\cdot\frac{CB}{2} = \frac{3}{16}V.$$

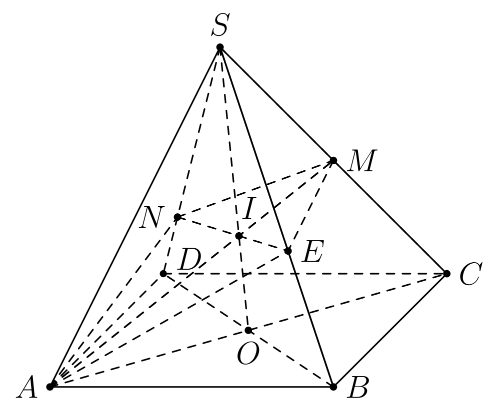
Vậy $V_{A.MNP} = \frac{5}{3}V_{C.MNP} = \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{3}V_{C.MXY} = \frac{5}{9}\cdot\frac{3V}{16} = \frac{5}{48}V$.
Chọn phương án B

Câu 7. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SC, N thuộc cạnh SD sao cho $SN = 3ND$. Mặt phẳng (AMN) cắt khối chóp thành hai phần, gọi thể tích phần chứa đỉnh S là V_1, thể tích khối chóp $S.ABCD$ là V_2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A $\frac{V_1}{V_2} = \frac{27}{80}$. **B** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$. **C** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{27}{53}$. **D** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{29}{80}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm là hình bình hành $ABCD$.
Trong mặt phẳng (SAC) gọi I là giao điểm của SO và AM.
Trong mặt phẳng (SBD) gọi E là giao điểm của NI và SB.
Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (AMN) là tứ giác $ANME$.



Cách 1. Dùng tỉ số thể tích

Ta có

$$\frac{V_{SANE}}{V_{SADB}} = \frac{SN}{SD}\cdot\frac{SE}{SB} = \frac{3}{4}\cdot\frac{SE}{SB}. \qquad (1)$$

$$\frac{V_{SMNE}}{V_{SCDB}} = \frac{SM}{SC}\cdot\frac{SN}{SD}\cdot\frac{SE}{SB} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{SE}{SB} = \frac{3}{8}\cdot\frac{SE}{SB}. \qquad (2)$$

Lấy (1) cộng (2) ta được

$$\frac{V_1}{\frac{1}{2}V_2} = \frac{9}{8}\cdot\frac{SE}{SB} \Leftrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{9}{16}\cdot\frac{SE}{SB}. \qquad (3)$$

Ta có

$$\frac{V_{SNAM}}{V_{SDAC}} = \frac{SN}{SD}\cdot\frac{SM}{SC} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8}. \qquad (4)$$

$$\frac{V_{SEAM}}{V_{SBAC}} = \frac{SE}{SB}\cdot\frac{SM}{SC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{SE}{SB}. \qquad (5)$$

Lấy (4) cộng (5) ta được

$$\frac{V_1}{\frac{1}{2}V_2} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{SE}{SB} \Leftrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{16} + \frac{1}{4}\cdot\frac{SE}{SB}. \qquad (6)$$

Từ (3) và (6) ta có phương trình

$$\frac{9}{16}\cdot\frac{SE}{SB}=\frac{3}{16}+\frac{1}{4}\cdot\frac{SE}{SB}\Leftrightarrow\frac{SE}{SB}=\frac{3}{5}. \tag{7}$$

Thế (7) vào (3) ta được

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{9}{16}\cdot\frac{SE}{SB}=\frac{9}{16}\cdot\frac{3}{5}=\frac{27}{80}.$$

Cách 2. Dùng tính chất thiết diện

Tính chất. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (P) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D' thì ta có đẳng thức

$$\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{SD}{SN}+\frac{SB}{SE}&=\frac{SC}{SM}+\frac{SA}{SA}\\ \Leftrightarrow\frac{SB}{SE}&=1+2-\frac{4}{3}=\frac{5}{3}\\ \Leftrightarrow\frac{SE}{SB}&=\frac{3}{5}.\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}&\frac{V_{SAMN}}{V_{SACD}}=\frac{SN}{SD}\cdot\frac{SM}{SC}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}\Rightarrow V_{SAMN}=\frac{3}{16}V_2.\\ &\frac{V_{SAME}}{V_{SACB}}=\frac{SM}{SC}\cdot\frac{SE}{SB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10}\Rightarrow V_{SAME}=\frac{3}{20}V_2.\end{aligned}$$

Suy ra

$$V_1=V_{SAMN}+V_{SAME}=\frac{3}{16}V_2+\frac{3}{20}V_2=\frac{27}{80}V_2.$$

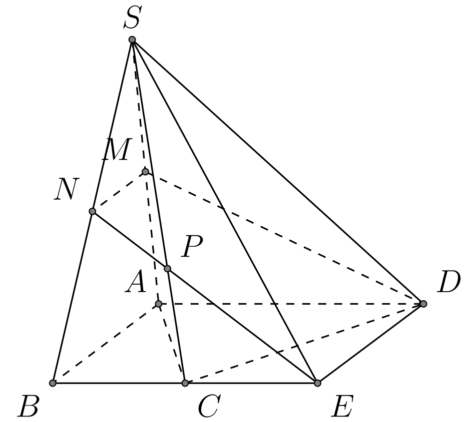
Vậy $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{27}{80}$.

Chọn phương án A

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, cạnh đáy $AD=2BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB. Mặt phẳng (DMN) cắt SC tại P. Tính $m=\dfrac{V_{S.MNPD}}{V_{S.ABCD}}$.

A $m=\dfrac{2}{9}$. **B** $m=\dfrac{5}{18}$. **C** $m=\dfrac{1}{18}$. **D** $m=\dfrac{7}{18}$.

Lời giải.



Do $MN \parallel (ABCD)$ nên $(DMN) \cap (ABCD) = DE$ với $ABED$ là hình bình hành.

$\Rightarrow SC \cap EN = P$ và P là trọng tâm tam giác SBE.

— $\dfrac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SA} \cdot \dfrac{SN}{SB} \cdot \dfrac{SP}{SC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{6}$

hay $V_{S.MNP} = \dfrac{1}{6} V_{S.ABC} = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{3} V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{18} V_{S.ABCD}$.

— $\dfrac{V_{S.MPD}}{V_{S.ACD}} = \dfrac{SM}{SA} \cdot \dfrac{SP}{SC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$

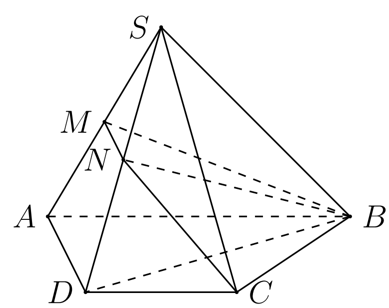
hay $V_{S.MPD} = \dfrac{1}{3} V_{S.ACD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} V_{S.ABCD}$.

$V_{S.MNPD} = V_{S.MNP} + V_{S.MPN} = \dfrac{1}{18} V_{S.ABCD} + \dfrac{2}{9} V_{S.ABCD} = \dfrac{5}{18} V_{S.ABCD}$.

Vậy ta suy ra $m = \dfrac{V_{S.MNPD}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{5}{18}$.

Chọn phương án B

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $AB \parallel CD$, $AB = 2CD$. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của SA và SD. Tính tỉ số $\dfrac{V_{S.BCNM}}{V_{S.BCDA}}$.



(A) $\dfrac{1}{4}$. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) $\dfrac{3}{8}$. (D) $\dfrac{5}{12}$.

Lời giải.

Ta có: $S_{BCD} = \dfrac{1}{2} DB.DC.\sin \widehat{CDB} = \dfrac{1}{2} DB.\dfrac{1}{2} BA.\sin \widehat{BDA} = \dfrac{1}{2} S_{ABD}$.

Do đó, $S_{BCD} = \dfrac{1}{3} S_{ABCD}$ và $S_{ABD} = \dfrac{2}{3} S_{ABCD}$.

Vì vậy, $V_{S.ABD} = \dfrac{2}{3} V_{S.ABCD}$ và $V_{S.BCD} = \dfrac{1}{3} V_{S.ABCD}$.

Ta có $\dfrac{V_{S.BMN}}{V_{S.BAD}} = \dfrac{SM}{SA} . \dfrac{SN}{SD} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow V_{S.BMN} = \dfrac{1}{4} V_{S.BAD} = \dfrac{1}{6} V_{S.ABCD}$.

Ta có $\dfrac{V_{S.BMC}}{V_{S.BAD}} = \dfrac{SN}{SD} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow V_{S.BMC} = \dfrac{1}{2} V_{S.BCD} = \dfrac{1}{6} V_{S.ABCD}$.

Vậy $V_{S.BMNC} = \dfrac{1}{3} V_{S.ABCD}$.

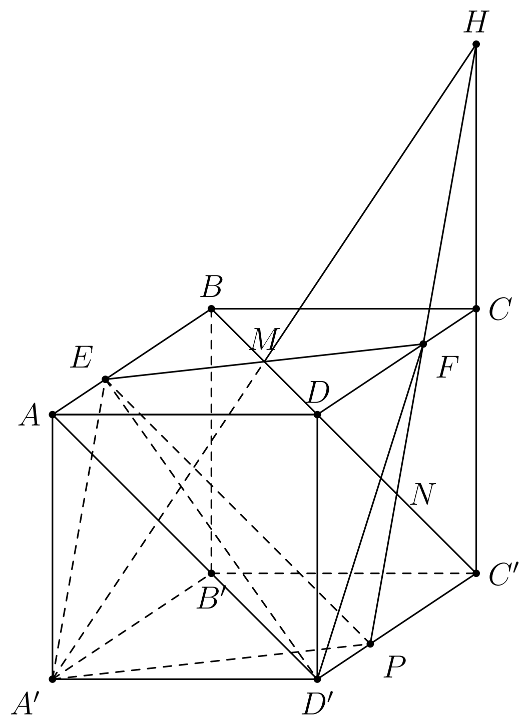
Chọn phương án B

Câu 10. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, gọi M và N lần lượt là tâm của các hình vuông $ABCD$ và $DCC'D'$. Mặt phẳng $(A'MN)$ chia khối lập phương thành hai phần có thể tích là V_1 và $V_2 (V_1 < V_2)$. Tính tỷ số $\dfrac{V_2}{V_1}$.

(A) $\dfrac{5}{3}$. (B) $\dfrac{5}{2}$. (C) $\dfrac{3}{2}$. (D) 2.

Lời giải.

Mở rộng mặt phẳng $(A'MN)$ như hình vẽ ta thấy khối lập phương bị chia thành hai phần.
Do $V_1 < V_2$ nên phần có thể tích V_1 là khối $AEFD.A'PD'$.
Chia khối này thành 3 hình chóp: $A'.AD'PE$, $D'.ADFE$, $E.D'PF$.
Gọi cạnh hình lập phương là a.
Khi đó $AE = D'P = \frac{a}{3}$, $DF = \frac{2a}{3}$, $AD = a\sqrt{2}$;
$\mathrm{d}(\mathrm{A}', (\mathrm{AD'PE})) = \frac{\mathrm{A'D}}{2} = \frac{\mathrm{a}\sqrt{2}}{2}$;
$\mathrm{S_{AD'PE}} = \mathrm{AE} \cdot \mathrm{AD'} = \frac{\mathrm{a}}{3} \cdot \mathrm{a}\sqrt{2} = \frac{\mathrm{a}^2\sqrt{2}}{3}$;
$\mathrm{S_{AEFD}} = \frac{\mathrm{S_{ABCD}}}{2} = \frac{\mathrm{a}^2}{2}$;
$\mathrm{S_{D'PF}} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{d}(\mathrm{F}, \mathrm{D'P}) \cdot \mathrm{D'P} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{a} \cdot \frac{\mathrm{a}}{3} = \frac{\mathrm{a}^2}{6}$.

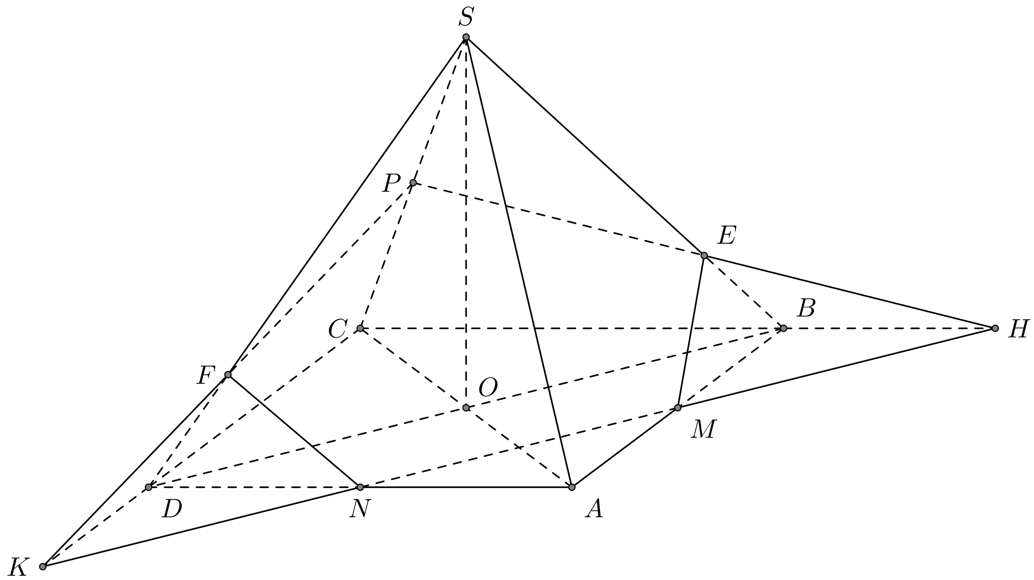


Do đó:
$V_{A'.AD'PE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{3} = \frac{a^3}{9}$. ;$V_{D'.ADFE} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{6}$. ;$V_{E.D'PF} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a^2}{6} = \frac{a^3}{18}$.
Suy ra $V_1 = \frac{a^3}{9} + \frac{a^3}{6} + \frac{a^3}{18} = \frac{a^3}{3}$.
$\Rightarrow V_2 = a^3 - V_1 = \frac{2a^3}{3}$.
Vậy $\frac{V_2}{V_1} = 2$.
Chọn phương án D

Câu 11. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD, SC. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) và hình chóp $S.ABCD$ chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Gọi k $(k \leqslant 1)$ là tỷ số thể tích giữa hai khối đa diện đó. Tính k.

A $k = \frac{1}{3}$. **B** $k = 1$. **C** $k = \frac{1}{4}$. **D** $k = \frac{1}{2}$.

Lời giải.



Trong $(ABCD)$, gọi $K = MN \cap CD$, $H = MN \cap BC$.

Gọi $E = SB \cap PH \Rightarrow \begin{cases} (MNP) \cap (SBC) = PE \\ (MNP) \cap (SAB) = ME \end{cases}$.

Gọi $F = SC \cap PK \Rightarrow \begin{cases} (MNP) \cap (SDC) = PF \\ (MNP) \cap (SAD) = NF \end{cases}$.

Do đó, thiết diện của hình chóp tạo bởi mặt phẳng (MNP) là ngũ giác $PFNME$.

Gọi V_1, V_2 là thể tích 2 khối đa diện mà mặt phẳng (MNP) chia khối chóp, trong đó V_1 là khối đa diện có chứa đỉnh C. Ta có

$$V_1 = V_{P.CKH} - V_{F.KND} - V_{E.BMH}$$

Dễ thấy $S_{\triangle KND} = S_{\triangle BMH} = S_{\triangle AMN} = \dfrac{1}{8}S_{ABCD}$. Suy ra

$$S_{\triangle CKH} = S_{ABCD} - S_{\triangle AMN} + S_{\triangle BMH} + S_{\triangle KND} = \frac{9}{8}S_{ABCD}.$$

Mặt khác, $\mathrm{d}_{(P,(ABCD))} = \dfrac{1}{2}SO$; $\mathrm{d}_{(E,(ABCD))} = \mathrm{d}_{(F,(ABCD))} = \dfrac{1}{4}SO$. Nên

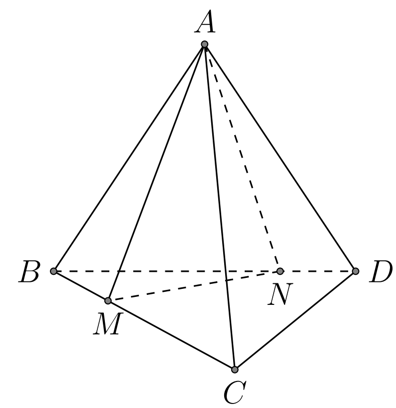
$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3}\cdot \mathrm{d}_{(P,(ABCD))}\cdot S_{\triangle CKH} - \frac{1}{3}\cdot \mathrm{d}_{(E,(ABCD))}\cdot S_{\triangle BMH} - \frac{1}{3}\cdot \mathrm{d}_{(F,(ABCD))}\cdot S_{\triangle KND} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot SO\cdot \frac{9}{8}\cdot S_{ABCD} - \frac{1}{4}\cdot SO\cdot \frac{1}{8}\cdot S_{ABCD} - \frac{1}{4}\cdot SO\cdot \frac{1}{8}\cdot S_{ABCD}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\cdot SO\cdot S_{ABCD}\right) = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{2}V_{S.ABCD}. \end{aligned}$$

Do đó, $k = \dfrac{V_1}{V_2} = 1$.

Chọn phương án B

Câu 12.

Cho tứ diện $ABCD$. Hai điểm M, N lần lượt di động trên hai đoạn thẳng BC và BD sao cho $2\dfrac{BC}{BM}+3\dfrac{BD}{BN}=10$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của các khối tứ diện $ABMN$ và $ABCD$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{V_1}{V_2}$.



A $\dfrac{3}{8}$. **B** $\dfrac{5}{8}$. **C** $\dfrac{2}{7}$. **D** $\dfrac{6}{25}$.

Lời giải.

Đặt $a=\dfrac{BC}{BM}$, $b=\dfrac{BD}{BN}$. Từ giả thiết ta có a, b là hai số thực dương và thoả mãn $2a+3b=10$.

Ta có $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{BA\cdot BM\cdot BN}{BA\cdot BC\cdot BD}=\dfrac{1}{ab}$.

Từ đó ta thấy $\dfrac{V_1}{V_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi ab đạt giá trị lớn nhất với $2a+3b=10$.

Theo bất đẳng thức Côsi ta có $10=2a+3b\geq 2\sqrt{6ab}\Rightarrow \dfrac{25}{6}\geq ab$ nên ab đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{25}{6}$ khi $a=\dfrac{5}{2}$ và $b=\dfrac{5}{3}$.

Khi đó $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{6}{25}$.

Chọn phương án D

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có $AD=4$, $AB=4\sqrt{3}$ và $\widehat{ABC}=60^\circ$. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABCD) bằng hai lần khoảng cách từ A đến CD. Gọi M, N, P lần lượt thuộc đoạn SA, SB, SC sao cho $SA=2SM$, $SN=2NB$, $SP=3NC$. Tính thể tích khối đa diện $SMNPD$.

A $\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$. **B** $8\sqrt{3}$. **C** $10\sqrt{3}$. **D** $\dfrac{40\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABC}=S_{ACD}=\dfrac{1}{2}BA\cdot BC\cdot\sin\widehat{ABC}=12$.

$\Rightarrow S_{ABCD}=24$.

Ta có $\mathrm{d}(S,(ABCD))=2\mathrm{d}(A,CD)=2\cdot\dfrac{2S_{ACD}}{CD}=4\sqrt{3}$.

$V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}\cdot\mathrm{d}(S,(ABCD))=32\sqrt{3}$.

$\dfrac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SM}{SA}\cdot\dfrac{SN}{SB}\cdot\dfrac{SP}{SC}=\dfrac{1}{4}$.

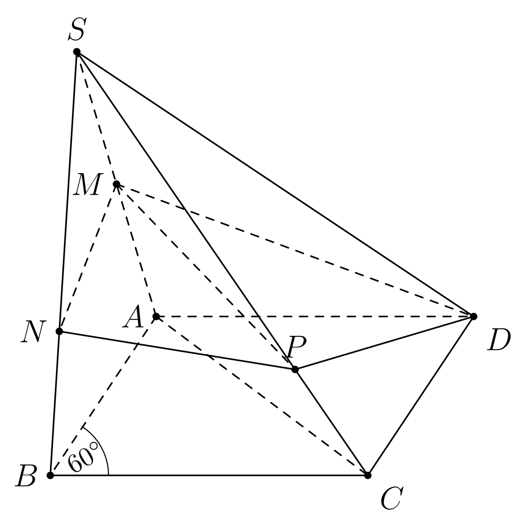
$\Rightarrow V_{S.MNP}=\dfrac{1}{4}V_{S.ABC}=\dfrac{1}{8}V_{S.ABCD}=4\sqrt{3}$.

$\dfrac{V_{S.MPD}}{V_{S.ACD}}=\dfrac{SM}{SA}\cdot\dfrac{SP}{SC}=\dfrac{3}{8}$.

$\Rightarrow V_{S.MPD}=\dfrac{3}{8}V_{S.ABC}=\dfrac{3}{16}V_{S.ABCD}=6\sqrt{3}$.

Suy ra $V_{S.MNPD}=V_{S.MNP}+V_{S.MPD}=10\sqrt{3}$.

Chọn phương án C



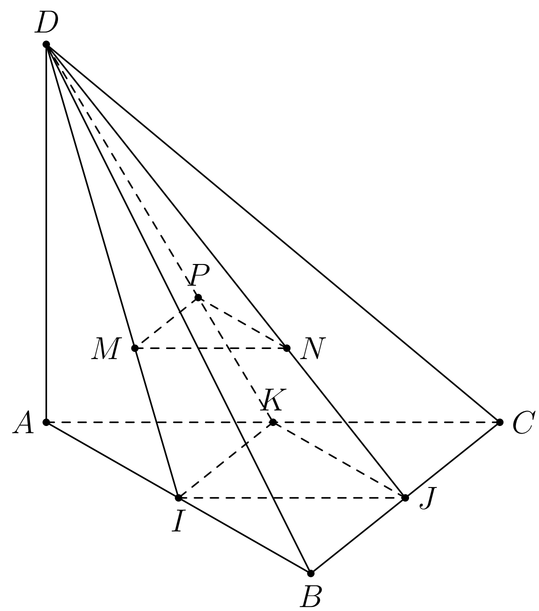
Câu 14. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 3a$, $AC = 4a$, $AD = 5a$. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm các tam giác DAB, DBC, DCA. Tính thể tích V của tứ diện $DMNP$ khi thể tích tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

Ⓐ $V = \dfrac{10a^3}{4}$. Ⓑ $V = \dfrac{80a^3}{27}$. Ⓒ $V = \dfrac{20a^3}{27}$. Ⓓ $V = \dfrac{120a^3}{27}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \mathrm{d}(D, (ABC)) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot AD \\ &\leq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} \cdot AD = 10a^3. \end{aligned}$$



Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA.

$\dfrac{V_{DMNP}}{V_{DIJK}} = \dfrac{DM}{DI} \cdot \dfrac{DN}{DJ} \cdot \dfrac{DP}{DK} = \dfrac{8}{27}$ và $\dfrac{V_{DIJK}}{V_{DABC}} = \dfrac{1}{4}$.

$\Rightarrow \dfrac{V_{DMNP}}{V_{DABC}} = \dfrac{2}{27} \Rightarrow V_{DMNP} = \dfrac{2}{27} \cdot 10a^3 = \dfrac{20a^3}{27}$.

Chọn phương án Ⓒ

Câu 15. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\dfrac{AM}{AA'} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{BN}{BB'} = \dfrac{2}{3}$ và mặt phẳng (MNP) chia lăng trụ thành hai phần có thể tích bằng nhau. Khi đó tỉ số $\dfrac{CP}{CC'}$ là

Ⓐ $\dfrac{1}{4}$. Ⓑ $\dfrac{5}{12}$. Ⓒ $\dfrac{1}{3}$. Ⓓ $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Đặt $\dfrac{CP}{CC'} = x$, chiều cao lăng trụ là h, diện tích đáy là S, thể tích là V.

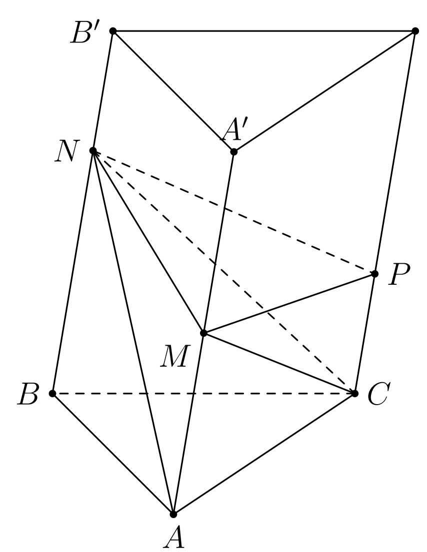
Ta có $V_1 = V_{NBAC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} h \cdot S = \dfrac{2}{9} V$.

$V_2 = V_{NMAC} = V_{BMAC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} h \cdot S = \dfrac{1}{6} V$.

$V_3 = V_{NMPC} = V_{BMPC} = V_{BAPC} = \dfrac{1}{3} \cdot xh \cdot S = \dfrac{x}{3} V$.

Mà (MNP) chia lăng trụ thành hai phần có thể tích bằng nhau nên

$$\frac{V_1 + V_2 + V_3}{V} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{9} + \frac{1}{6} + \frac{x}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

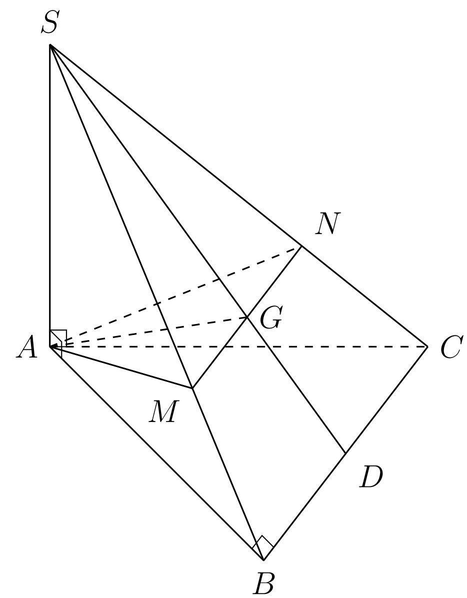


Chọn phương án Ⓒ

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân ở B, $AC = a\sqrt{2}$; $SA = a$ và $SA \perp (ABC)$. Gọi G là trọng tâm của $\triangle SBC$, mặt phẳng (α) đi qua AG và song song với BC cắt SC, SB lần lượt tại M, N. Tính thể tích V của khối chóp $S.AMN$.

A $V = \dfrac{4a^3}{27}$. **B** $V = \dfrac{2a^3}{9}$. **C** $V = \dfrac{4a^3}{9}$. **D** $V = \dfrac{2a^3}{27}$.

Lời giải.



Tam giác ABC vuông cân ở B nên

$$AB^2 + BC^2 = 2AB^2 = AC^2 \Rightarrow AB = BC = a.$$

Suy ra thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{6}.$$

Theo bài ra ta có $(\alpha) \cap (SBC) \equiv MN$, kết hợp với $(\alpha) \parallel BC$ suy ra $MN \parallel BC$ suy ra $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SG}{SD} = \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{2}{3}$.

Từ đó suy ra

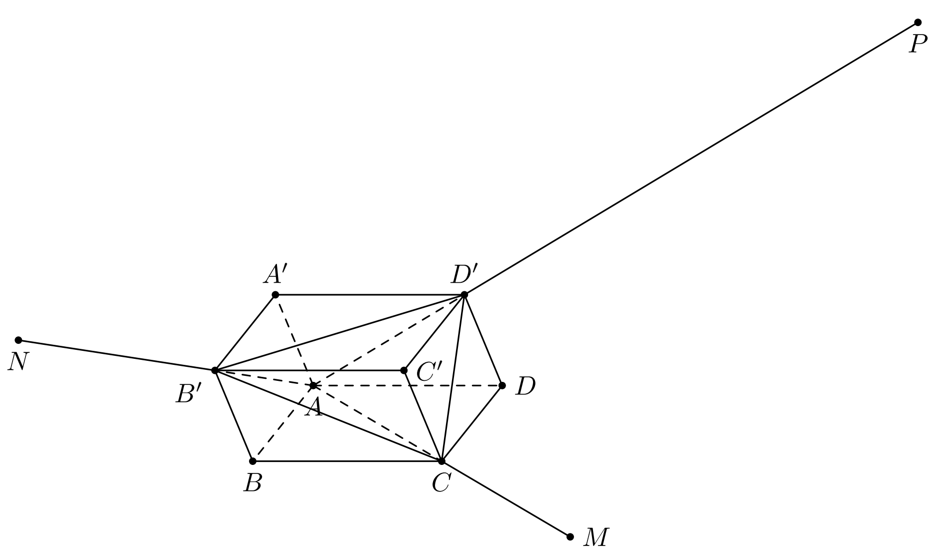
$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA \cdot SM \cdot SN}{SA \cdot SB \cdot SC} = \frac{4}{9} \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{4}{9} \cdot \frac{a^3}{6} = \frac{2a^3}{27}.$$

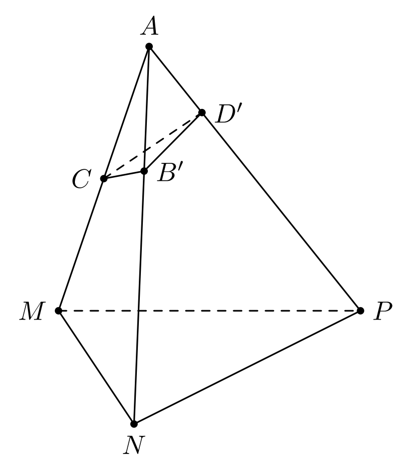
Chọn phương án D

Câu 17. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V. Các điểm M, N, P thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AB'}$ và $\overrightarrow{AP} = 4\overrightarrow{AD'}$. Tính thể tích khối chóp $AMNP$ theo V.

A $6V$. **B** $8V$. **C** $12V$. **D** $4V$.

Lời giải.





Ta có $V_{A.CB'D'} = V_{\text{hộp}} - V_{A.A'B'D'} - V_{D'.ACD} - V_{B'.ABC} - V_{C.C'B'D'} = \dfrac{V}{3}$.

Mặt khác, tỉ số thể tích: $\dfrac{V_{A.CB'D'}}{V_{A.MNP}} = \dfrac{AC}{AM} \cdot \dfrac{AB'}{AN} \cdot \dfrac{AD'}{AP} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{24}$.

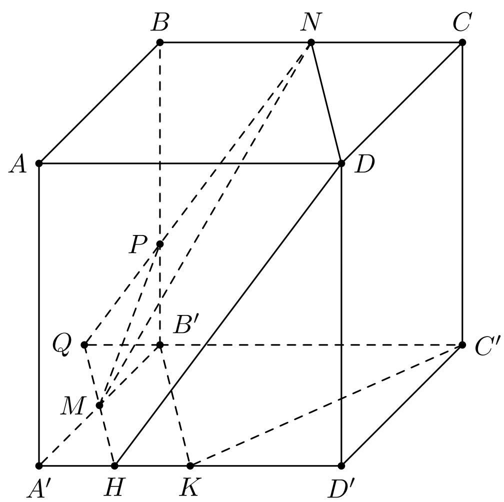
Do đó $V_{AMNP} = 24V_{ACB'D'} = 24 \cdot \dfrac{V}{3} = 8V$.

Chọn phương án B

Câu 18. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và BC. Mặt phẳng (DMN) chia hình lập phương thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của phần chưa đỉnh A và V_2 là thể tích của phần còn lại. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) $\dfrac{55}{89}$. (C) $\dfrac{2}{3}$. (D) $\dfrac{37}{48}$.

Lời giải.



Chọn K là trung điểm của $A'D'$. Khi đó $B'K||DN$. Từ M dựng MH sao cho $MH||B'K$. Kéo dài MH cắt $B'C'$ tại Q. Nối QN cắt BB' tại P. Như vậy thiết diện tạo bởi mặt phẳng (DMN) và hình chóp là $PMHDN$.

Từ hình vẽ ta chia thể tích V_2 thành các phần nhỏ như sau

$V_2 = V_{P.B'MHK} + V_{P.B'KD'C'} + V_{P.D'C'D} + V_{D.PNCC'} + V_{P.HDD'}$.

Ta có : $V_{P.B'MHK} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3}a \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{4}a^2 = \dfrac{a^3}{48}$; $V_{P.B'KD'C'} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot a \cdot \dfrac{3}{4} \cdot a^2 = \dfrac{a^3}{12}$; $V_{P.D'C'D} = \dfrac{1}{3} \cdot a \cdot \dfrac{1}{2}a^2 = \dfrac{a^3}{6}$.

$V_{D.PNCC'} = \dfrac{1}{3} \cdot a \cdot a \cdot \dfrac{2a}{3} = \dfrac{2a^3}{9}$; $V_{P.HDD'} = \dfrac{1}{3} \cdot a \cdot \dfrac{3}{8}a^2 = \dfrac{1}{8}a^3$. Suy ra $V_2 = \dfrac{89}{144}a^3$. Suy ra $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{55}{89}$.

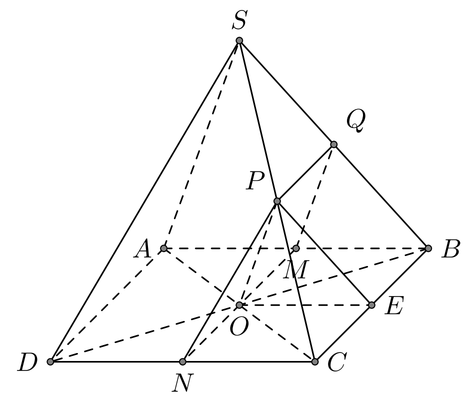
Chọn phương án B

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Hai cạch AC, BD cắt nhau tại O. Mặt phẳng (P) đi qua điểm O và song song với mặt phẳng (SAD) cắt khối chóp $S.ABCD$ tạo thành hai khối có thể tích lần lượt là V_1; $V_2\,(V_1 < V_2)$. Giá trị của biểu thức $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

(A) $\dfrac{7}{13}$. (B) $\dfrac{3}{5}$. (C) $\dfrac{5}{11}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Qua O vẽ đường thẳng song song AD cắt AB, CD tại M, N (M, N là trung điểm AB,CD).
Qua M vẽ $MQ \parallel SA\,(Q \in SB) \Rightarrow Q$ là trung điểm SB.
Qua N vì $NP \parallel SC(PC) \Rightarrow P$ là trung điểm SC.
Khi đó $S.ABCD$ chia làm 2 khối: $MBQPNC$ có thể tích V_1 và phần còn còn lại có thể tích V_2 với $V_1 < V_2$.
Gọi E là trung điểm BC.
Có $MBQPNC$ gồm 2 khối nhỏ là $BQMEOP$ và $P.EONC$.
Xét $BQMEOP$, có thể tích bằng $\frac{1}{2}$ thể tích của hình hộp xiên.



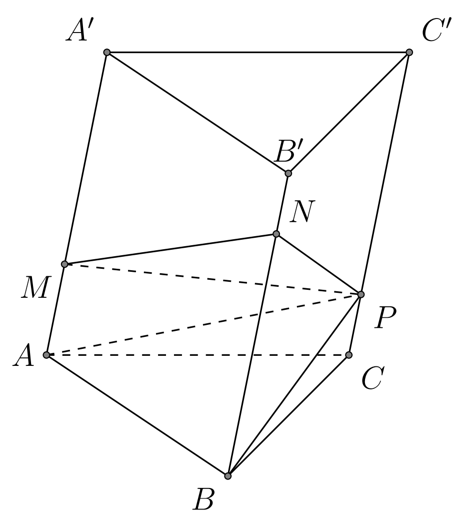
$$V_3 = \frac{1}{2}\mathrm{d}[Q,(MBEO)] \cdot S_{BMOE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\mathrm{d}[S,(ABCD)] \cdot \frac{1}{4}S_{ABCD} = \frac{3}{16}V_{S.ABCD}.$$

Xét $P.ECNC$ có thể tích
$V_4 = \frac{1}{3}\mathrm{d}[P,(EONC)] \cdot S_{EONC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\mathrm{d}[S,(ABCD)] \cdot \frac{1}{4}S_{ABCD} = \frac{1}{8}V_{S.ABCD}$
$\Rightarrow V_1 = V_3 + V_4 = \frac{5}{16}V_{S.ABCD} \Rightarrow V_2 = \frac{11}{16}V_{S.ABCD} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{11}$.
Chọn phương án C

Câu 20. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V, trên các cạnh AA', BB', CC' lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $AM = \frac{1}{3}AA', BN = \frac{2}{3}BB', CP = \frac{1}{6}CC'$. Thể tích khối đa diện $ABCMNP$ bằng

(A) $\frac{V}{3}$. (B) $\frac{7V}{18}$. (C) $\frac{4V}{9}$. (D) $\frac{V}{2}$.

Lời giải.



Ta có $V_{C.ABB'A'} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3}V$ và $V_{C'.ABC} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3}V$.
Ta cũng có $V_{ABCMNP} = V_{P.ABNM} + V_{P.ABC}$ mà $V_{C.ABB'A'} = V_{P.ABB'A'} = \frac{2}{3}V$ (do PC // $(ABB'A')$)
Mặt khác $AM = \frac{1}{3}AA', BN = \frac{2}{3}BB'$ suy ra $S_{ABNM} = \frac{1}{2}S_{ABB'A'}$. Vì thế $V_{P.ABNM} = \frac{1}{2}V_{P.ABB'A'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}V = \frac{1}{3}V$. (1)
Ta có $\frac{V_{C.ABP}}{V_{C.ABC'}} = \frac{CP}{CC'} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{C.ABP} = \frac{1}{6}V_{C.ABC'} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}V = \frac{1}{18}V$. (2)

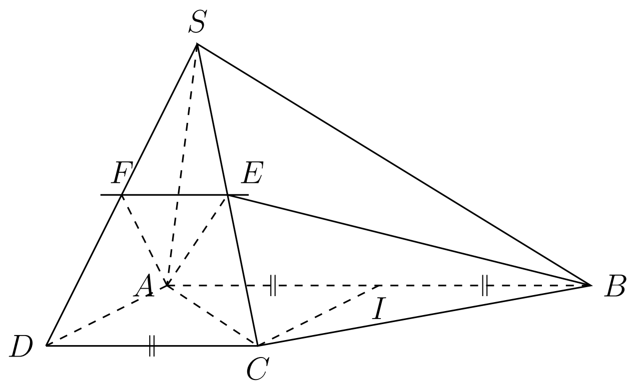
Từ (1) và (2) suy ra $V_{ABCMNP} = \frac{1}{3}V + \frac{1}{18}V = \frac{7}{18}V$.

Chọn phương án B

Câu 21. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với hai đáy là AB và CD, $AB = 2CD$. Gọi E là một điểm trên cạnh SC. Mặt phẳng (ABE) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau. Tính tỉ số $\frac{SE}{SC}$.

A $\frac{\sqrt{10}-2}{2}$. **B** $\sqrt{6}-2$. **C** $\sqrt{2}-1$. **D** $\frac{\sqrt{26}-4}{2}$.

Lời giải.



Từ E dựng đường thẳng d song song với DC, $d \cap SD = \{F\}$.

Mặt phẳng (ABE) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện là $S.ABEF$ và $ABCDEF$.

Gọi V_1, V_2, V_3, V_4 lần lượt là thể tích các khối chóp $S.AEF, S.AEB, S.ADC, S.ACB$.

Đặt $a = \frac{SE}{SC}, a > 0$.

Ta có: $\frac{V_1}{V_3} = \frac{SF}{SD} \cdot \frac{SE}{SC} = a^2 \Rightarrow V_1 = a^2 \cdot V_3$.

$\frac{V_2}{V_4} = \frac{SE}{SC} = a \Rightarrow V_2 = a \cdot V_4$

$V_{S.ABEF} = V_1 + V_2 = a^2 \cdot V_3 + a \cdot V_4$, $V_{ABCDEF} = V_{S.ABCD} - (V_1 + V_2) = V_3 + V_4 - (a^2 \cdot V_3 + a \cdot V_4)$.

Theo giả thiết $V_{S.ABEF} = V_{ABCDEF} \Leftrightarrow a^2 \cdot V_3 + a \cdot V_4 = V_3 + V_4 - (a^2 \cdot V_3 + a \cdot V_4)$

$\Leftrightarrow (2a^2 - 1) \cdot V_3 + (2a - 1) \cdot V_4 = 0$ (với $V_4 = 2V_3$)

$\Leftrightarrow (2a^2 - 1) + 2(2a - 1) = 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 4a - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \frac{-2-\sqrt{10}}{2} (l) \\ a = \frac{-2+\sqrt{10}}{2}. \end{array}\right.$$

Vậy $\frac{SE}{SC} = \frac{\sqrt{10}-2}{2}$.

Chọn phương án A

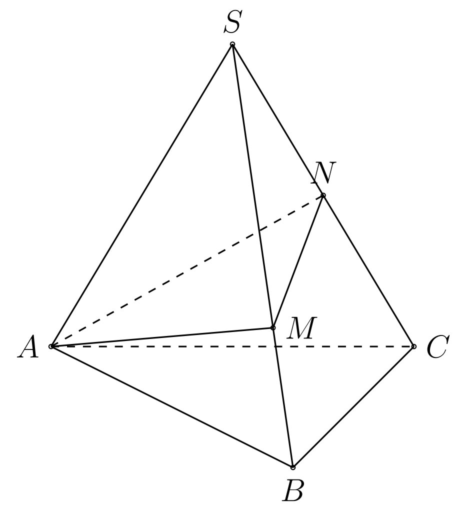
Câu 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng $3a^3$. Điểm M thuộc cạnh SB sao cho $3SM = 2SB$ và điểm N thuộc cạnh SC sao cho $2SN = SC$. Thể tích hình chóp $S.AMN$ bằng

A $2a^3$. **B** a^3. **C** $4a^3$. **D** $3a^3$.

Lời giải.

Nhóm: PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA

Theo công thức về tỉ lệ thể tích ta có $V_{S.AMN} = \dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC}.V_{S.ABC} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2}3a^3 = a^3$.



Chọn phương án B

Câu 23. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là hình bình hành có diện tích bằng $2a^2$, chiều cao bằng $4a$. Gọi M là điểm thuộc cạnh $A'B'$ sao cho $A'M = xA'B'$ $(0 < x < 1)$. Mặt phẳng (MBD) chia lăng trụ thành hai phần thể tích. Gọi V là phần thể tích chứa điểm A. Tìm x để $V = \dfrac{4(\sqrt{3}+1)a^3}{3}$.

A $x = \dfrac{\sqrt{1+4\sqrt{3}}-1}{2}$.

B $x = \dfrac{\sqrt{1+\sqrt{3}}-1}{2}$.

C $x = \dfrac{\sqrt{1+2\sqrt{3}}-1}{2}$.

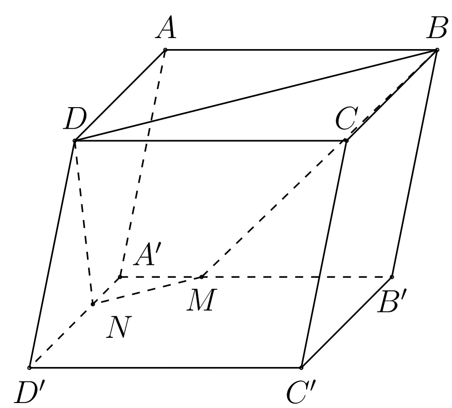
D $x = \dfrac{\sqrt{1+3\sqrt{3}}-1}{2}$.

Lời giải.

Gọi N là giao điểm của (MBD) và $A'D'$. Khi đó, $ABD.A'MN$ là chóp cụt. Ta có

$$V = V_{ABD.A'MN} = \frac{4a}{3}.(S_{ABD} + S_{A'MN} + \sqrt{S_{ABD}.S_{A'MN}}) = \frac{4a^3}{3}.[x^2+x+1].$$

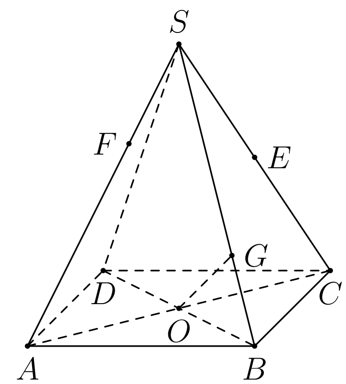
Suy ra, $x^2 + x - \sqrt{3} = 0$. Vậy $x = \dfrac{\sqrt{1+4\sqrt{3}}-1}{2}$.



Chọn phương án A

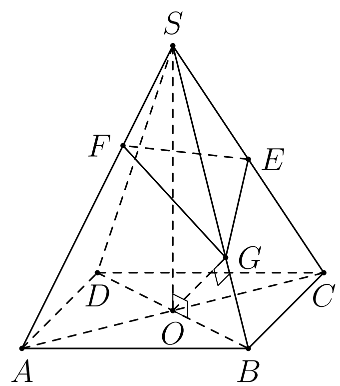
Câu 24.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh bằng a, góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Biết SO vuông góc với đáy và $SO = a\sqrt{3}$. Gọi E là trung điểm của cạnh SC, điểm F trên cạnh SA sao cho $FA = 2SF$ và G là hình chiếu vuông góc của O lên SB. Thể tích khối chóp $S.EFG$ bằng



Ⓐ $\dfrac{a^3}{39}$. Ⓑ $\dfrac{a^3}{26}$. Ⓒ $\dfrac{2a^3}{13}$. Ⓓ $\dfrac{a^3}{13}$.

Lời giải.



Góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$ suy ra $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Dễ thấy tam giác ABD đều cạnh a, suy ra $BO = \dfrac{a}{2}$.

Xét tam giác SOB vuông tại O và $OG \perp SB$, ta có

$$SO^2 = SG \cdot SB \Rightarrow \frac{SG}{SB} = \frac{SO^2}{SB^2} = \frac{SO^2}{SO^2 + OB^2} = \frac{(a\sqrt{3})^2}{(a\sqrt{3})^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{12}{13}.$$

Ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \cdot \sin \widehat{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 120^\circ = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3}{4}.$$

Ta có

$$\frac{V_{S.EFG}}{V_{S.ABC}} = \frac{SF}{SA} \cdot \frac{SG}{SB} \cdot \frac{SE}{SC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{13}.$$

Do đó $V_{S.EFG} = \dfrac{2}{13} \cdot V_{S.ABC} = \dfrac{2}{13} \cdot \dfrac{a^3}{4} = \dfrac{a^3}{26}$.

Chọn phương án B

Câu 25. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V. M là điểm bất kì trên cạnh AA'. Tính thể tích khối chóp $M.BCC'B'$.

Ⓐ $\dfrac{V}{3}$. Ⓑ $\dfrac{V}{2}$. Ⓒ $\dfrac{2V}{3}$. Ⓓ $\dfrac{3V}{4}$.

Lời giải.

Gọi S và h lần lượt là diện tích đáy và chiều cao của lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Ta có $V_{A'.ABC} = V_{A.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}S \cdot h = \dfrac{V}{3}$.

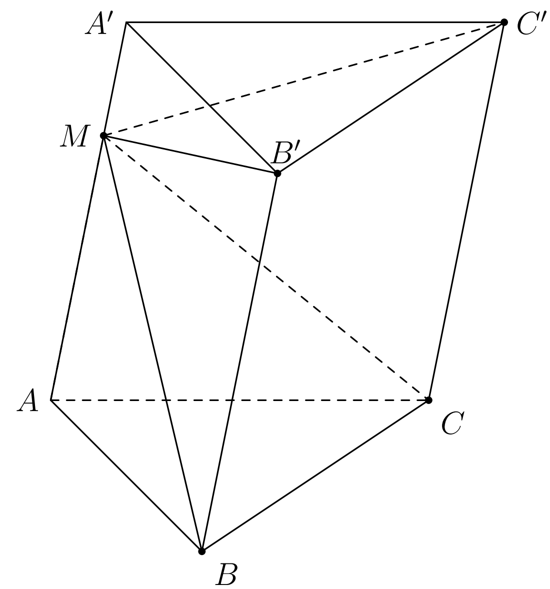
$$\dfrac{V_{M.A'B'C'}}{V_{A.A'B'C'}} = \dfrac{MA'}{AA'} \Rightarrow V_{M.A'B'C'} = \dfrac{MA'}{AA'} \cdot \dfrac{V}{3}$$

$$\dfrac{V_{M.ABC}}{V_{A'ABC}} = \dfrac{MA}{AA'} \Rightarrow V_{M.ABC} = \dfrac{MA}{AA'} \cdot \dfrac{V}{3}$$

$$\Rightarrow V_{M.A'B'C'} + V_{M.ABC} = \dfrac{MA' + MA}{AA'} \cdot \dfrac{V}{3} = \dfrac{V}{3}$$

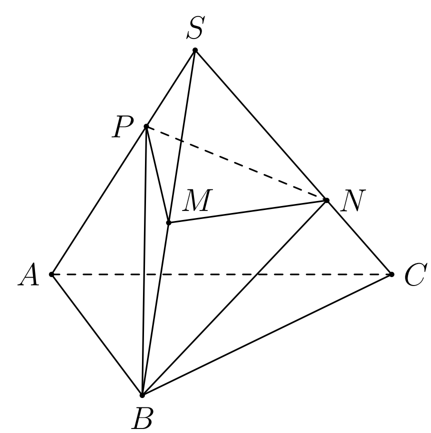
$$\Rightarrow V_{M.BCC'B'} = V_{ABC.A'B'C'} - (V_{M.A'B'C'} + V_{M.ABC})$$

$$= V - \dfrac{V}{3} = \dfrac{2V}{3}.$$



Chọn phương án (B)

Câu 26.
Cho hình chóp $S.ABC$, gọi M là trung điểm của SB, N là điểm nằm trên cạnh SC sao cho $SN = 2NC$; P là điểm trên cạnh SA sao cho $PA = 2PS$. Tính tỉ số $\dfrac{V_{BMNP}}{V_{SABC}}$.



(A) $\dfrac{1}{9}$. **(B)** $\dfrac{1}{3}$. **(C)** $\dfrac{1}{12}$. **(D)** $\dfrac{1}{27}$.

Lời giải.

— Vì M là trung điểm SB nên $V_{B.MNP} = V_{S.MNP}$.

— $\dfrac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SP}{SA} \cdot \dfrac{SM}{SB} \cdot \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{9}$.

— Vậy $\dfrac{V_{BMNP}}{V_{SABC}} = \dfrac{1}{9}$.

Chọn phương án (A)

Câu 27. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, góc giữa mặt bên và mặt đáy là α thỏa mãn $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$. Mặt phẳng (P) qua AC và vuông góc với mặt phẳng (SAD) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Tỉ số thể tích của hai khối đa diện (khối bé chia khối lớn) bằng

(A) $\dfrac{1}{9}$. **(B)** $\dfrac{1}{10}$. **(C)** $\dfrac{7}{9}$. **(D)** $\dfrac{9}{10}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, M là trung điểm của AD.

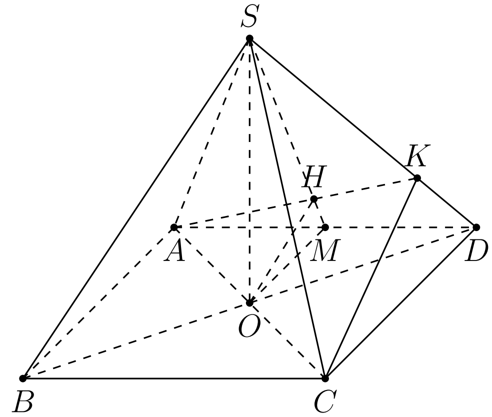
Có $\begin{cases} SO \perp AD \\ OM \perp AD \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SOM)$

$\Rightarrow ((SAD),(ABCD)) = (SM,OM) = \widehat{SMO}$

$\Rightarrow \cos\widehat{SMO} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{OM}{SM} = \dfrac{1}{3}$.

Kẻ $OH \perp SM \Rightarrow OH \perp (SAD) \Rightarrow (P) \equiv (AHC)$.

Gọi $K = AH \cap SD \Rightarrow$ Thiết diện là tam giác AKC, chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần.



Ta có $\dfrac{MH}{SM} = \dfrac{OM^2}{SM^2} = \dfrac{1}{9}$.

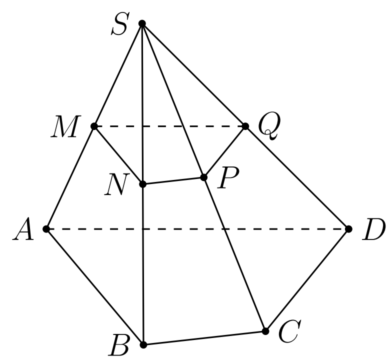
Ba điểm K, H, A thẳng hàng nên $\dfrac{KD}{KS} \cdot \dfrac{HS}{HM} \cdot \dfrac{AM}{AD} = 1 \Rightarrow \dfrac{KD}{KS} \cdot 8 \cdot \dfrac{1}{2} = 1 \Rightarrow \dfrac{KD}{KS} = \dfrac{1}{4}$

Suy ra $\dfrac{V_{DACK}}{V_{DACS}} = \dfrac{DK}{DS} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow \dfrac{V_{DACK}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{1}{10} \Rightarrow \dfrac{V_{DACK}}{V_{S.ABCK}} = \dfrac{1}{9}$.

Chọn phương án A

Câu 28.

Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.MNPQ$ và $S.ABCD$ bằng



A $\dfrac{1}{8}$. **B** $\dfrac{1}{2}$. **C** $\dfrac{1}{4}$. **D** $\dfrac{1}{16}$.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} = \frac{1}{8};\text{ và } \frac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SP}{SC} \cdot \frac{SQ}{SD} = \frac{1}{8}.$$

Suy ra,

$$\frac{1}{8} = \frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACD}} = \frac{V_{S.MNP} + V_{S.MPQ}}{V_{S.ABC} + V_{S.ACD}} = \frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}.$$

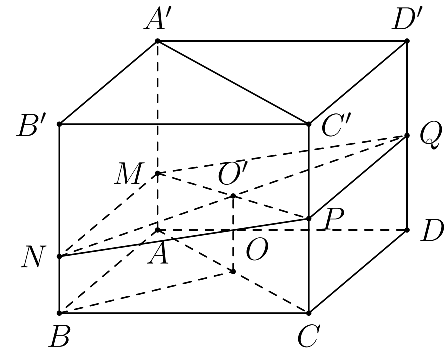
Chọn phương án A

Câu 29. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Mặt phẳng (α) cắt các cạnh AA', BB', CC' và DD' lần lượt tại M, N, P, Q. Biết $AM = \dfrac{1}{3}a$, $CP = \dfrac{2}{5}a$. Thể tích của khối đa diện $ABCD.MNPQ$ bằng

A $\dfrac{11}{30}a^3$. **B** $\dfrac{11}{15}a^3$. **C** $\dfrac{a^3}{3}$. **D** $\dfrac{2}{3}a^3$.

Lời giải.

Ta có $V_{ABCD.MNPQ} = V_{NMP.BAC} + V_{QMP.DAC}$.
Đặt $BN = x, QD = y$. Gọi O, O' lần lượt là trung điểm AC, MP.
Khi đó $x + y = MA + PC = 2OO' = \dfrac{11}{15}a$.
Ta có



$$\begin{aligned} V_{NMP.BAC} &= V_{N.ABC} + V_{N.AMPC} \\ &= \frac{1}{3}BN \cdot S_{ABC} + \frac{1}{3}BO \cdot S_{AMPC} \\ &= \frac{1}{3}x \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{11\sqrt{2}a^2}{30} \\ &= \frac{xa^2}{6} + \frac{11a^3}{90}. \end{aligned}$$

Tương tự ta tính được $V_{QMP.DAC} = \dfrac{ya^2}{6} + \dfrac{11a^3}{90}$.

Vậy $V_{ABCD.MNPQ} = (x+y)\dfrac{a^2}{6} + \dfrac{11a^3}{45} = \dfrac{11a}{15} \cdot \dfrac{a^2}{6} + \dfrac{11a^3}{45} = \dfrac{11}{30}a^3$.

Chọn phương án A

Câu 30. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm đối xứng của C qua D, N là trung điểm của SC. Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần. Tỉ số thể tích giữa hai phần (phần lớn trên phần bé) bằng

A $\dfrac{1}{7}$. **B** $\dfrac{7}{5}$. **C** $\dfrac{7}{3}$. **D** $\dfrac{6}{5}$.

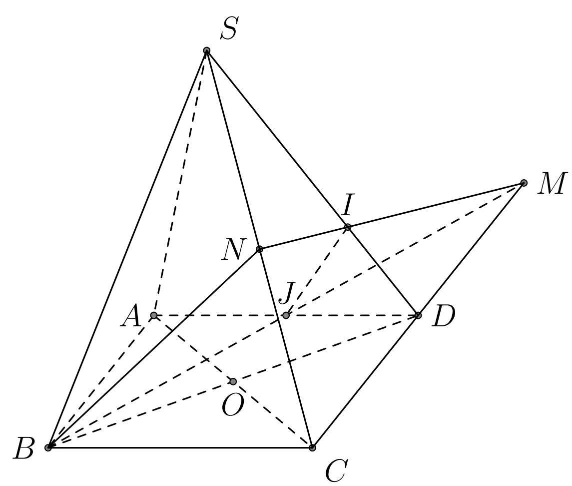
Lời giải.

Đặt $I = MN \cap SD$, $J = mb \cap AD$. Mặt phẳng (BMN) chia hình chóp đã cho thành hai khối đa diện $SABCNIJ$ và $BCDJIN$.

Ta có $S_{MJD} = S_{ABJ}$ nên

$S_{BCM} = S_{BCDJ} + S_{MJD} = S_{BCDJ} + S_{ABJ} = S_{ABCD}$;

$$\begin{aligned} V_{N.BCM} &= \frac{1}{3}d(N;(BCM)) \cdot S_{BCM} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{d(S;(ABCD))}{2} \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD}. \end{aligned}$$



Ta thấy I là trọng tâm của tam giác SCM nên $\dfrac{MI}{MN} = \dfrac{2}{3}$.

Ta có $\dfrac{V_{M.JDI}}{V_{M.BCN}} = \dfrac{MJ}{MB} \cdot \dfrac{MD}{MC} = \dfrac{MI}{MN} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{6}$

$\Rightarrow V_{BCDJIN} = \dfrac{5}{6}V_{M.BCN} = \dfrac{5}{12}V_{S.ABCD} \Rightarrow \dfrac{V_{SABCNIJ}}{V_{BCDJIN}} = \dfrac{7}{5}$.

Chọn phương án B

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. A	4. B	5. B	6. B	7. A	8. B	9. B	10. D
11. B	12. D	13. C	14. C	15. C	16. D	17. B	18. B	19. C	20. B
21. A	22. B	23. A	24. B	25. B	26. A	27. A	28. A	29. A	30. B

DẠNG 50. PHƯƠNG TRÌNH MŨ-LOGARIT

Câu 1. Cho a ,b là hai số thực dương thỏa mãn $\log_5\left(\frac{4a+2b+5}{a+b}\right)=a+3b-4$ .Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a^2+b^2$.

Ⓐ $\frac{1}{2}$. Ⓑ 1. Ⓒ $\frac{3}{2}$. Ⓓ $\frac{5}{2}$.

Lời giải.

$\log_5\left(\frac{4a+2b+5}{a+b}\right)=a+3b-4\Leftrightarrow\log_5(4a+2b+5)=\log_5(a+b)+a+3b-4$

$\Leftrightarrow\log_5(4a+2b+5)+(4a+2b+5)=\log_5[5(a+b)]+5(a+b)$ (*).

Xét hàm $f(x)=\log_5 x+x, x>0$.

Đạo hàm $f'(x)=\frac{1}{x.\ln 5}+1>0,\forall x>0$ .Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Phương trình (*)viết lại:

$f(4a+2b+5)=f(5(a+b))\Leftrightarrow 4a+2b+5=5(a+b)\Leftrightarrow a+3b=5$.

Mặt khác:$5^2=(a+3b)^2\leq\left(1^2+3^2\right).\left(a^2+b^2\right)\Rightarrow T=a^2+b^2\geq\frac{5}{2}$.

Dấu xảy ra $\Leftrightarrow\frac{a}{1}=\frac{b}{3}\Rightarrow a=\frac{1}{2};b=\frac{3}{2}$.

Chọn phương án D

Câu 2. Cho x; y là các số thực dương thỏa mãn $\log_3\frac{2x+y+1}{x+y}=x+2y$ .Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{y}}$

Ⓐ $3+\sqrt{3}$. Ⓑ 4. Ⓒ $3+2\sqrt{3}$. Ⓓ 6.

Lời giải.

Ta có $\log_3\frac{2x+y+1}{x+y}=x+2y\Leftrightarrow\log_3(2x+y+1)-\log_3(x+y)=x+2y$

$\Leftrightarrow\log_3(2x+y+1)=\log_3(3x+3y)+x+2y-1$

$\Leftrightarrow\log_3(2x+y+1)+2x+y+1=\log_3(3x+3y)+3x+3y$ (*)

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ với $t>0$.

Khi đó $f'(t)=\frac{1}{t\ln 3}+1>0,\forall t>0$,suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow 2x+y+1=3x+3y\Leftrightarrow x+2y=1\Leftrightarrow x=1-2y$.

Vì $x,y>0\Rightarrow 0<y<\frac{1}{2}$.

Xét $T=\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{y}}=\frac{1}{1-2y}+\frac{2}{\sqrt{y}}=\frac{1}{1-2y}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{y}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có $T\geq 3.\sqrt[3]{\frac{1}{y(1-2y)}}=3.\sqrt[3]{\frac{2}{2y(1-2y)}}\geq 3.\sqrt[3]{8}=6$.

Dấu xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-2y\\1-2y=\sqrt{y}\\2y=1-2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\y=\frac{1}{4}\end{cases}$.

Chọn phương án B

Câu 3. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\log_{16}\left(\dfrac{x+y+z}{2x^2+2y^2+2z^2+1}\right) = x(x-2)+y(y-2)+z(z-2)$. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $F = \dfrac{x+y-z}{x+y+z}$ bằng

A $-\dfrac{2}{3}$. **B** $\dfrac{1}{3}$. **C** $\dfrac{2}{3}$. **D** $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Điều kiện:$x+y+x>0$.

Ta có: $\log_{16}\left(\dfrac{x+y+z}{2x^2+2y^2+2z^2+1}\right) = x(x-2)+y(y-2)+z(z-2)$.

$\Leftrightarrow 2\log_{16}[4(x+y+z)] + [4(x+y+z)] = 2\log_{16}\left[2x^2+2y^2+2z^2+1\right] + \left[2x^2+2y^2+2z^2+1\right]$ (1) .

Xét hàm số $f(t) = 2\log_{16} t + t$ trên $(0\,;+\infty)$ .Có:$f'(t) = \dfrac{2}{t\cdot\ln 16} + 1 > 0\,;\forall t \in (0;+\infty)$.

Vậy hàm số $f(t) = 2\log_{16} t + t$ đồng biến trên $(0\,;+\infty)$.

Từ đó suy ra:$2x^2+2y^2+2z^2+1 = 4(x+y+z) \Leftrightarrow (S): x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+\dfrac{1}{2} = 0$.

$F = \dfrac{x-y-z}{x+y+z} \Leftrightarrow F(x+y+z) = x-y-z \Leftrightarrow (P): (F-1)x + (F+1)y + (F+1)z = 0$.

Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có điểm chung nên:

$d(I;(P)) \le R \Leftrightarrow \dfrac{|3F+1|}{\sqrt{(F-1)^2+(F+1)^2+(F+1)^2}} \le \sqrt{\dfrac{5}{2}} \Leftrightarrow 3F^2+2F-13 \le 0$.

$\Leftrightarrow \dfrac{-1-2\sqrt{10}}{3} \le F \le \dfrac{-1+2\sqrt{10}}{3} \Rightarrow \min F + \max F = -\dfrac{2}{3}$.

Chọn phương án A

Câu 4. Có tất cả bao giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(1999;\,2050)$ để $\left(2^a+\dfrac{1}{2^a}\right)^{2017} \le \left(2^{2017}+\dfrac{1}{2^{2017}}\right)^a$.

A 29 . **B** 33. **C** 34. **D** 32.

Lời giải.

Ta có:$\left(2^a+\dfrac{1}{2^a}\right)^{2017} \le \left(2^{2017}+\dfrac{1}{2^{2017}}\right)^a$

$\Leftrightarrow 2017\ln\left(2^a+2^{-a}\right) \le a\ln\left(2^{2017}+2^{-2017}\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{\ln\left(2^a+2^{-a}\right)}{a} \le \dfrac{\ln\left(2^{2017}+2^{-2017}\right)}{2017}$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{\ln\left(2^x+2^{-x}\right)}{x}$ .Tập xác định .

$f'(x) = \dfrac{\left(2^x-2^{-x}\right)\ln 2 - \left(2^x+2^{-x}\right)\ln\left(2^x+2^{-x}\right)}{x^2\left(2^x+2^{-x}\right)}$.

Vì :$\ln 2 < \ln\left(2^x+2^{-x}\right)$ và $0 < 2^x-2^{-x} < 2^x+2^{-x}$ (Do $x \in (1999;\,2050)$)

Suy ra $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ nghịch biến.

Do đó:$\dfrac{\ln\left(2^a+2^{-a}\right)}{a} \le \dfrac{\ln\left(2^{2017}+2^{-2017}\right)}{2017}$.

$\Leftrightarrow a \ge 2017$.

Vậy có:33 giá trị của a.

Chọn phương án B

Câu 5. Có bao nhiêu cặp số nguyên x; y thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_4(512x + 768) + 2x - 1 = 2y + 16^y$?

Ⓐ 2019 . Ⓑ 0. Ⓒ 2020. Ⓓ 1.

Lời giải.

Ta có:

$\log_4(512x + 768) + 2x - 1 = 2y + 16^y$

$\Leftrightarrow \log_4 256(2x + 3) + 2x - 1 = 2y + 4^{2y}$

$\Leftrightarrow \log_4(2x + 3) + (2x + 3) = 2y + 4^{2y}$.

Xét hàm số $f(t) = t + 4^t$ trên .

.Suy ra hàm số đồng biến trên .

Khi đó: $\log_4(2x + 3) = 2y \Leftrightarrow 2x + 3 = 16^y \Leftrightarrow x = \dfrac{16^y - 3}{2}$.

Vì: $0 \leq x \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq \dfrac{16^y - 3}{2} \leq 2020 \Leftrightarrow 3 \leq 16^y \leq 4043 \Leftrightarrow \log_{16}3 \leq y \leq \log_{16}4043$.

Mà .

Với $y = 1 \Rightarrow x = \dfrac{13}{2}(l)$.

Với $y = 2 \Rightarrow x = \dfrac{253}{2}(l)$.

Vậy không có cặp số $(x;\, y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án B

Câu 6. Cho $\log_8|x| + \log_4 y^2 = 5$ và $\log_8|y| + \log_4 x^2 = 7$ .Tìm giá trị của biểu thức $P = |x| - |y|$.

Ⓐ $P = 56$. Ⓑ $P = 16$. Ⓒ $P = 8$. Ⓓ $P = 64$.

Lời giải.

Ta có:

$\log_8|x| + \log_4 y^2 = 5 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\log_2|x| + \dfrac{1}{2}\log_2 y^2 = 5$.

$\Leftrightarrow \log_2\sqrt[3]{|x|} + \log_2|y| = 5 \Leftrightarrow \sqrt[3]{|x|}.\,|y| = 2^5 \Leftrightarrow |x|\,.\,|y|^3 = \left(2^5\right)^3 = 2^{15}\ (1)$.

Tương tự:$\log_8|y| + \log_4 x^2 = 7 \Leftrightarrow |y|\,.\,|x|^3 = 2^{21}\ (2)$.

Lấy (1) nhân (2) được $x^4.y^4 = 2^{36} \Leftrightarrow x^2.y^2 = 2^{18}\ (3)$.

Lấy (1) chia (2) được $\dfrac{y^2}{x^2} = \dfrac{1}{2^6} \Leftrightarrow x^2 = 2^6.y^2\ (4)$.

Thay (4) vào (3) được $2^6.y^4 = 2^{18} \Leftrightarrow y^4 = 2^{12} = \left(2^3\right)^4 \Leftrightarrow |y| = 2^3 = 8$.

Thay $|y| = 8$ vào (4) được $x^2 = 2^6.64 = \left(2^6\right)^2 \Leftrightarrow |x| = 2^6 = 64$ .Do đó $P = |x| - |y| = 56$.

Chọn phương án A

Câu 7. Cho $\log_8|x| + \log_4 y^2 = 5$ và $\log_8|y| + \log_4 x^2 = 7$ .Tìm giá trị của biểu thức $P = |x| - |y|$.

Ⓐ $P = 56$. Ⓑ $P = 16$. Ⓒ $P = 8$. Ⓓ $P = 64$.

Lời giải.

Ta có:

$\log_8|x| + \log_4 y^2 = 5 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\log_2|x| + \dfrac{1}{2}\log_2 y^2 = 5$.

$\Leftrightarrow \log_2\sqrt[3]{|x|} + \log_2|y| = 5 \Leftrightarrow \sqrt[3]{|x|}.\,|y| = 2^5 \Leftrightarrow |x|\,.\,|y|^3 = \left(2^5\right)^3 = 2^{15}\ (1)$.

Tương tự:$\log_8|y| + \log_4 x^2 = 7 \Leftrightarrow |y|.|x|^3 = 2^{21}$ (2) .
Lấy (1) nhân (2) được $x^4.y^4 = 2^{36} \Leftrightarrow x^2.y^2 = 2^{18}$ (3) .
Lấy (1) chia (2) được $\frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{2^6} \Leftrightarrow x^2 = 2^6.y^2$ (4) .
Thay (4) vào (3) được $2^6.y^4 = 2^{18} \Leftrightarrow y^4 = 2^{12} = \left(2^3\right)^4 \Leftrightarrow |y| = 2^3 = 8$.
Thay $|y| = 8$ vào (4) được $x^2 = 2^6.64 = \left(2^6\right)^2 \Leftrightarrow |x| = 2^6 = 64$ .Do đó $P = |x| - |y| = 56$.
Chọn phương án A

Câu 8. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2^{x-y} - 2^y + x = 2y \\ 2^x + 1 = \left(m^2+2\right)2^y.\sqrt{1-y^2} \end{cases}$ (1) ,m là tham số.Gọi S là tập các giá trị m nguyên để hệ (1) có một nghiệm duy nhất. Tập S có bao nhiêu phần tử?

(A) 0 . (B) 1. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Điều kiện $|y| \le 1 \Leftrightarrow y \in [-1;1]$.
Từ phương trình thứ nhất của hệ (1) ta có $2^{x-y} + (x-y) = 2^y + y$ (2) .
Xét hàm số $y = f(t) = 2^t + t$ với .
Dễ thấy $y' = 2^t.\ln 2 + 1 > 0$ với mọi nên hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên .
Do đó phương trình (2) tương đương với $x - y = y \Leftrightarrow x = 2y$.
Thay $x = 2y$ vào phương trình thứ hai của hệ (1) ta được $4^y + 1 = \left(m^2+2\right)2^y.\sqrt{1-y^2}$ (3) .
Để hệ đã cho có nghiệm duy nhất thì phương trình (3) phải có nghiệm duy nhất $y \in [-1;1]$.
Giả sử $y_0 \in [-1;1]$ là một nghiệm của (3) thì $4^{y_0} + 1 = \left(m^2+2\right)2^{y_0}.\sqrt{1-y_0^2}$.
Khi đó $4^{-y_0} + 1 = \left(m^2+2\right)2^{-y_0}.\sqrt{1-(-y_0)^2} \Leftrightarrow 4^{y_0} + 1 = \left(m^2+2\right)2^{y_0}.\sqrt{1-y_0^2}$ nên $-y_0$ cũng là nghiệm của (3) .Suy ra $y_0 = -y_0 \Leftrightarrow y_0 = 0$ .Thay $y = 0$ vào (3) ta được $m = 0$.
Thử lại:với $m = 0$ thì (3) viết thành $4^y + 1 = 2.2^y.\sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow 2^y + \frac{1}{2^y} = 2\sqrt{1-y^2}$ (4) .
Ta có $VT(4) \ge 2$,dấu bằng khi $2^y = \frac{1}{2^y} \Leftrightarrow y = 0$; $VP(4) \le 2$,dấu bằng khi $y = 0$.
Suy ra phương trình (4) có nghiệm duy nhất là $y = 0$ .Vậy $m = 0$ thỏa mãn.
Chọn phương án B

Câu 9. Trong các nghiệm $(x;\, y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \ge 1$ .Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 2x + y$ bằng:

(A) $\frac{9}{4}$. (B) $\frac{9}{2}$. (C) $\frac{9}{8}$. (D) 9.

Lời giải.

Bất PT $\Leftrightarrow \log_{x^2+2y^2}(2x+y) \ge 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2y^2 > 1 \\ 2x+y \ge x^2+2y^2 \end{cases} (I), \quad \begin{cases} 0 < x^2+2y^2 < 1 \\ 0 < 2x+y \le x^2+2y^2 \end{cases} (II)$.
Xét T=$2x + y$
TH1:(x; y)thỏa mãn (II)khi đó $0 < T = 2x + y \le x^2 + 2y^2 < 1$
TH2:(x; y)thỏa mãn (I) $x^2 + 2y^2 \le 2x + y \Leftrightarrow (x-1)^2 + (\sqrt{2}y - \frac{1}{2\sqrt{2}})^2 \le \frac{9}{8}$ .Khi đó

$$2x+y = 2(x-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}y - \frac{1}{2\sqrt{2}}) + \frac{9}{4} \le \sqrt{(2^2+\frac{1}{2})\left[(x-1)^2 + (\sqrt{2}y - \frac{1}{2\sqrt{2}})^2\right]} + \frac{9}{4} \le \sqrt{\frac{9}{2}.\frac{9}{8}} + \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$$

Suy ra :$\max T = \frac{9}{2} \Leftrightarrow (x;\, y) = (2;\, \frac{1}{2})$.

Chọn phương án B

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tồn tại cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $\mathrm{e}^{3x+5y} - \mathrm{e}^{x+3y+1} = 1 - 2x - 2y$,đồng thời thỏa mãn $\log_3^2(3x+2y-1) - (m+6)\log_3 x + m^2 + 9 = 0$

A 6 . B 5. C 8. D 7.

Lời giải.

Ta có:$\mathrm{e}^{3x+5y} - \mathrm{e}^{x+3y+1} = 1 - 2x - 2y \Leftrightarrow \mathrm{e}^{3x+5y} + (3x+5y) = \mathrm{e}^{x+3y+1} + (x+3y+1)$.

Xét hàm số $f(t) = \mathrm{e}^t + t$ trên .Ta có $f'(t) = \mathrm{e}^t + 1 > 0$ nên hàm số đồng biến trên .

Do đó phương trình có dạng:$f(3x+5y) = f(x+3y+1) \Leftrightarrow 3x+5y = x+3y+1 \Leftrightarrow 2y = 1-2x$.

Thế vào phương trình còn lại ta được:$\log_3^2 x - (m+6)\log_3 x + m^2 + 9 = 0$.

Đặt $t = \log_3 x$,phương trình có dạng:$t^2 - (m+6)t + m^2 + 9 = 0$.

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 12m \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4$.

Do đó có 5 số nguyên m thỏa mãn.

Chọn phương án B

Câu 11. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;\, y)$ thỏa mãn: $2016^{y^2-x^2} = \dfrac{x^2+2017}{y^2+2017}$; $3\log_3(x+2y+6) = 2\log_2(x+y+2)+1$

A 2. B 1. C 3. D 0.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} 2016^{y^2-x^2} = \dfrac{x^2+2017}{y^2+2017} & (1) \\ 3\log_3(x+2y+6) = 2\log_2(x+y+2)+1 & (2) \end{cases}$.

Điều kiện $\begin{cases} x+2y+6 > 0 \\ x+y+2 > 0 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \log_{2016} 2016^{y^2-x^2} = \log_{2016}\frac{x^2+2017}{y^2+2017} \\ &\Leftrightarrow y^2 - x^2 = \log_{2016}\left(x^2+2017\right) - \log_{2016}\left(y^2+2017\right) \\ &\Leftrightarrow y^2 + \log_{2016}\left(y^2+2017\right) = x^2 + \log_{2016}\left(x^2+2017\right) \quad (3) \end{aligned}$$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 + \log_{2016}\left(t^2+2017\right)$ trên $[0,+\infty)$ .Ta có.

$f'(t) = 2t + \dfrac{2t}{(t^2+2017)\ln 2016} \geq 0, \forall t \in [0,+\infty)$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0,+\infty)$.

Do đó $(3) \Leftrightarrow y^2 = x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = -x \end{array}\right.$.

Với $y = x$ thay vào phương trình (2) ta được.

$3\log_3(3x+6) = 2\log_2(2x+2)+1$.

$\Leftrightarrow 3\left[1+\log_3(x+2)\right] = 2\left[1+\log_2(x+1)\right]+1 \Leftrightarrow 3\log_3(x+2) = 2\log_2(x+1)$.

Đặt $\begin{cases} t = 3\log_3(x+2) \\ t = 2\log_2(x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2 = 3^{\frac{t}{3}} \\ x+1 = 2^{\frac{t}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = \left(\sqrt[3]{3}\right)^t & (4) \\ x+1 = \left(\sqrt{2}\right)^t & (5) \end{cases}$.

Lấy (5) thay vào (4) ,ta được $\left(\sqrt{2}\right)^t + 1 = \left(\sqrt[3]{3}\right)^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}\right)^t + \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^t = 1 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm duy nhất $t = 6$ .Suy ra phương trình có nghiệm $x = 7$ .Suy ra nghiệm của hệ phương trình là $(7; 7)$.

Với $y = -x$ thay vào phương trình (2) ta được.

$3\log_3(y+6) = 3 \Leftrightarrow \log_3(y+6) = 1 \Rightarrow y = -3, x = 3$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $(3; -3)$, $(7; 7)$.

Chọn phương án A

Câu 12. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $2^x + 2^y = 4$ .Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P = (2x^2+y)(2y^2+x) + 9xy$

A $P_{\max} = \dfrac{27}{2}$. **B** $P_{\max} = 18$. **C** $P_{\max} = 27$. **D** $P_{\max} = 12$.

Lời giải.

Ta có $4 = 2^x + 2^y \geq 2\sqrt{2^{x+y}} \Leftrightarrow 4 \geq 2^{x+y} \Leftrightarrow x + y \leq 2$.

Suy ra $xy \leq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \leq 1$.

Khi đó $P = (2x^2+y)(2y^2+x) + 9xy = 2(x^3+y^3) + 4x^2y^2 + 10xy$.

$P = 2(x+y)\left[(x+y)^2 - 3xy\right] + (2xy)^2 + 10xy \leq 4(4-3xy) + 4x^2y^2 + 10xy = 16 + 2x^2y^2 + 2xy(xy-1) \leq 18$

Vậy$P_{\max} = 18$ khi $x = y = 1$.

Chọn phương án B

Câu 13. Xét các số thực x , y $(x \geq 0)$ thỏa mãn

$2018^{x+3y} + 2018^{xy+1} + x + 1 = 2018^{-xy-1} + \dfrac{1}{2018^{x+3y}} - y(x+3)$.

Gọi m là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x + 2y$ .Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A $m \in (0; 1)$. **B** $m \in (1; 2)$. **C** $m \in (2; 3)$. **D** $m \in (-1; 0)$.

Lời giải.

Ta có $2018^{x+3y} + 2018^{xy+1} + x + 1 = 2018^{-xy-1} + \dfrac{1}{2018^{x+3y}} - y(x+3)$

$\Leftrightarrow 2018^{x+3y} - 2018^{-x-3y} + x + 3y = 2018^{-xy-1} - 2018^{xy+1} - xy - 1$

$\Leftrightarrow f(x+3y) = f(-xy-1)$ (1)

Xét hàm số $f(t) = 2018^t - 2018^{-t} + t$,với ta có

$f'(t) = 2018^t \ln 2018 + 2018^{-t}\ln 2018 + 1 > 0$,.

Do đó $f(t)$ đồng biến trên nên (1) $\Leftrightarrow x + 3y = -xy - 1$

$\Leftrightarrow y(x+3) = -x - 1 \Rightarrow y = -\dfrac{x+1}{x+3} \Rightarrow T = x - \dfrac{2(x+1)}{x+3}$.

Xét hàm số $f(x) = x - \dfrac{2(x+1)}{x+3}$,với $x \in [0; +\infty)$ có

$f'(x) = 1 - \dfrac{4}{(x+3)^2} = \dfrac{x^2+6x+5}{(x+3)^2} > 0$, $\forall x \in (0; +\infty)$.

Do đó $f(x)$ đồng biến trên $[0; +\infty) \Rightarrow f(x) \geq f(0) = -\dfrac{2}{3}$.

Dấu “ = ” xảy ra $\Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow m = -\dfrac{2}{3}$.

Chọn phương án D

Câu 14. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $2^{2x^2+y^2} = 3^{x+y}$?

A 1 . **B** 2. **C** 0. **D** Vô số.

Lời giải.

Đặt$2^{2x^2+y^2} = 3^{x+y} = t$,suy ra $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = \log_2 t \\ x + y = \log_3 t \end{cases}$.

Ta có $(x+y)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}x + 1.y\right)^2 \le \left(\frac{1}{2}+1\right)\left(2x^2+y^2\right)$ nên suy ra:

$\log_3^2 t \le \frac{3}{2}\log_2 t = \frac{3}{2}\log_2 3.\log_3 t \Rightarrow \log_3 t \le \frac{3}{2}\log_2 3 \approx 2,74$.

Do đó $2x^2 + y^2 = \log_2 t = \log_2 3.\log_3 t \le 3,7$.

Mà nên $x \in \{-1;0;1\}$.

+Với $x = 0$,ta có $\begin{cases} y^2 = \log_2 t = \log_2 3.\log_3 t \\ y = \log_3 t \end{cases}$,suy ra $y^2 = y.\log_2 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \log_2 3 \end{array}\right.$.

+với $x = 1$,ta có $\begin{cases} 2 + y^2 = \log_2 t = \log_2 3.\log_3 t \\ 1 + y = \log_3 t \end{cases}$,suy ra

$2 + y^2 = \log_2 3.(1+y) \Leftrightarrow y^2 - \log_2 3.y + 2 - \log_2 3 = 0$ phương trình có nghiệm.

+Với $x = -1$,ta có $\begin{cases} 2 + y^2 = \log_2 t = \log_2 3.\log_3 t \\ -1 + y = \log_3 t \end{cases}$,suy ra

$2 + y^2 = \log_2 3.(-1+y) \Leftrightarrow y^2 - \log_2 3.y + 2 + \log_2 3 = 0$ phương trình vô nghiệm.

Chọn phương án B

Câu 15. Có bao nhiêu số nguyên y để tồn tại số thực x thỏa mãn $\log_3(x+2y) = \log_2\left(x^2+y^2\right)$?

A 3 . B 2. C 1. D vô số.

Lời giải.

Đặt $\log_3(x+2y) = \log_2\left(x^2+y^2\right) = t \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3^t \\ x^2 + y^2 = 2^t \end{cases}$ (*)

Ta có $(x+2y)^2 \le (1+4)\left(x^2+y^2\right) = 5\left(x^2+y^2\right)$ nên:$9^t \le 5.2^t \Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^t \le 5 \Leftrightarrow t \le \log_{\frac{9}{2}} 5$.

Suy ra $x^2 + y^2 = 2^t \le 2^{\log_{\frac{9}{2}} 5} \approx 2.1$.

Vì nên $y \in \{-1;0;1\}$.

+Với $y = -1$,hệ (*)trở thành $\begin{cases} x - 1 = 3^t \\ x^2 + 1 = 2^t \end{cases} \Rightarrow \left(3^t+1\right)^2 + 1 = 2^t \Leftrightarrow 9^t + 2.3^t - 2^t + 2 = 0$ (**)

Nếu $t < 0$ thì $2 - 2^t > 0 \Rightarrow 9^t + 2.3^t - 2^t + 2 > 0$.

Nếu $t \ge 0 \Rightarrow 9^t - 2^t \ge 0 \Rightarrow 9^t + 2.3^t - 2^t + 2 > 0$.

Vậy (**)vô nghiệm.

-Với $y = 0$ thì hệ (*)trở thành $\begin{cases} x = 3^t \\ x^2 = 2^t \end{cases} \Rightarrow 9^t = 2^t \Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^t = 1 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow x = 1$.

-Với $y = 1$ thì hệ (*)trở thành $\begin{cases} x + 1 = 3^t \\ x^2 + 1 = 2^t \end{cases} \Rightarrow \left(3^t-1\right)^2 = 2^t - 1$ $(***)$.

Dễ thấy (***)luôn có ít nhất một nghiệm $t = 0 \Rightarrow x = 0$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của y thỏa mãn là $y = 0,\ y = 1$.

Chọn phương án B

Câu 16. Có bao nhiêu cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3)+y(y-3)+xy$.

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 6.

Lời giải.

Điều kiện $\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} > 0 \Leftrightarrow x+y > 0$.

$\log_{\sqrt{3}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3)+y(y-3)+xy$

$\Leftrightarrow 2\log_3(x+y) - 2\log_3\left(x^2+y^2+xy+2\right) = x^2+y^2+xy-3x-3y$

$\Leftrightarrow 2\log_3(x+y) + 2 - 2\log_3\left(x^2+y^2+xy+2\right) = x^2+y^2+xy+2-3x-3y$

$\Leftrightarrow 2\log_3(3x+3y) + (3x+3y) = 2\log_3\left(x^2+y^2+xy+2\right) + x^2+y^2+xy+2$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = 2\log_3 t + t,\ t \in (0; +\infty)$, ta có $f'(t) = \dfrac{2}{t.\ln 3} + 1 > 0,\ \forall t \in (0; +\infty)$.

Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Phương trình $\Leftrightarrow f(3x+3y) = f\left(x^2+y^2+xy+2\right) \Leftrightarrow x^2+y^2+xy+2 = 3x+3y$

$\Leftrightarrow x^2 + (3-y)x + y^2 - 3y + 2 = 0$.

Điều kiện của y để phương trình có nghiệm là $(3-y)^2 - 4\left(y^2-3y+2\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow -3y^2 + 6y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{3-2\sqrt{2}}{3} \leq y \leq \dfrac{3+2\sqrt{2}}{3}$.

Do nên $y \in \{0; 1; 2\}$.

+Với $y = 0$,ta được $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

+Với $y = 1$,ta được $x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

+Với $y = 2$,ta được $x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Vậy có 6 cặp số thỏa mãn đề bài.

Chọn phương án D

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tồn tại các số thực x, y thỏa mãn đồng thời $e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = 1 - 2x - 2y$ và $\log_5^2(3x+2y+4) - (m+6)\log_5(x+5) + m^2 + 9 = 0$.

Ⓐ 3. Ⓑ 5 . Ⓒ 4. Ⓓ 6.

Lời giải.

Ta có

$e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = 1 - 2x - 2y \Leftrightarrow e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = (x+3y-9) - (3x+5y-10)$

$\Leftrightarrow e^{3x+5y-10} + (3x+5y-10) = e^{x+3y-9} + (x+3y-9)$ (1) .

Xét hàm số $f(t) = e^t + t$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có $f'(t) = e^t + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t) = e^t + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

(1) $\Leftrightarrow 3x + 5y - 10 = x + 3y - 9 \Leftrightarrow 2x + 2y = 1$

Khi đó phương trình

$\log_5^2(3x+2y+4) - (m+6)\log_5(x+5) + m^2 + 9 = 0$

$\Leftrightarrow \log_5^2(x+5) - (m+6)\log_5(x+5) + m^2 + 9 = 0$.

Đặt ,ta được
$t^2-(m+6)\,t+m^2+9=0$ (2) .
(2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta=(m+6)^2-4\left(m^2+9\right)=-3m^2+12m\geq 0 \Leftrightarrow 0\leq m\leq 4$.
Vậy số giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn là 4 giá trị.
Chọn phương án C

Câu 18. Cho $0\leq x\leq 2020$ và $\log_2(2x+2)+x-3y=8^y$. Có bao nhiêu cặp số $(x\,;y)$ nguyên thỏa mãn các điều kiện trên?

A 2019. **B** 2018. **C** 1. **D** 4.

Lời giải.
Do $0\leq x\leq 2020$ nên $\log_2(2x+2)$ luôn có nghĩa.
Ta có $\log_2(2x+2)+x-3y=8^y$
$\Leftrightarrow \log_2(x+1)+x+1=3y-2^{3y}$
$\Leftrightarrow \log_2(x+1)+2^{\log_2(x+1)}=3y+2^{3y}$ (1)
Xét hàm số $f(t)=t+2^t$.
Tập xác định và $f'(t)=1+2^t\ln 2\Rightarrow f'(t)>0$.
Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên .Do đó (1) $\Leftrightarrow \log_2(x+1)=3y\Leftrightarrow x+1=2^{3y}$
$\Leftrightarrow y=\log_8(x+1)$.
Ta có $0\leq x\leq 2020$ nên $1\leq x+1\leq 2021$ suy ra $0\leq \log_8(x+1)\leq \log_8 2021$.
Lại có $\log_8 2021\approx 3,66$ nên nếu thì $y\in\{0\,;1\,;2\,;3\}$.
Vậy có 4 cặp số $(x\,;y)$ nguyên thỏa yêu cầu bài toán là các cặp $(0\,;0)$,$(7\,;1)$,$(63\,;2)$,$(511\,;3)$.
Chọn phương án D

BẢNG ĐÁP ÁN

1. D	2. B	3. A	4. B	5. B	6. A	7. A	8. B	9. B	10. B
11. A	12. B	13. D	14. B	15. B	16. D	17. C	18. D		