TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

9 2012
Số 423

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 49
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

Đón chào năm học mới 2012-2013

TRƯỜNG THPT NGUYỄN BỈNH KHIÊM

20 NĂM XÂY DỰNG VÀ PHÁT TRIỂN (1992-2012)

Hiệu trưởng
NGUYỄN THỊ ĐÔNG

Trường THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm nằm trên địa bàn phường Quang Trung, TP Hải Dương là mô hình trường ngoài công lập đầu tiên của tỉnh Hải Dương, được thành lập theo Quyết định số 752 QĐ/UB ngày 28/9/1992 của UBND tỉnh nhằm đáp ứng nhu cầu học tập của nhân dân trên địa bàn tỉnh Hải Dương. Năm học đầu tiên, trường có 16 cán bộ, giáo viên và 4 lớp 10 với 162 học sinh. Đến nay nhà trường đã có quy mô đào tạo 24 lớp với 1067 học sinh, gần 90 cán bộ, giáo viên (trong đó đội ngũ giáo viên cơ hữu với gần 40 thầy cô).

Được sự quan tâm của UBND tỉnh và các nguồn hỗ trợ khác, nhà trường đã xây dựng được khuôn viên sạch, đẹp với 15 phòng học, 5 phòng làm việc, 2 phòng Tin học, 3 phòng học bộ môn, 1 phòng truyền thống và thư viện đạt chuẩn để đảm bảo cho học sinh có điều kiện học tập tốt theo yêu cầu đổi mới giáo dục.

Với sự chỉ đạo sát sao của Sở GD-ĐT Hải Dương, sự nỗ lực cố gắng phấn đấu vươn lên không ngừng của các thế hệ giáo viên và học sinh nhà trường, sự động viên và ủng hộ của các tổ chức xã hội trong tỉnh, trong 20 năm qua (1992 – 2012) nhà trường đã giành được những thành tích rất đáng phấn khởi và tự hào.

HỌC SINH : Có 246 học sinh đoạt giải các môn học trong kì thi học sinh giỏi cấp tỉnh. Nhiều năm liên tục nhà trường đoạt giải Nhất toàn đoàn khối THPT về Hội khỏe Phù Đổng tỉnh Hải Dương. Tỉ lệ tốt nghiệp THPT hàng năm luôn đạt trên 90%, tỉ lệ trúng tuyển vào các trường Đại học, Cao đẳng ngày một tăng. Một số em đạt điểm cao như: *Trần Mạnh Lực, Vũ Anh Tuấn, Nguyễn Danh Tuyến, Phạm Thái Dương, Vũ Thị Thủy Tiên.* Đội tuyển Hành trình tri thức của Trường lọt vào vòng 2 của Tỉnh.

GIÁO VIÊN: Đội ngũ giáo viên thỉnh giảng có nhiều kinh nghiệm và uy tín; đội ngũ giáo viên cơ hữu rất trẻ, nhiệt tình với mọi hoạt động, chịu khó học tập nâng cao trình độ và đáp ứng nhu cầu của học sinh. Nhà trường có 02 (lượt) Chiến sĩ thi đua cấp tỉnh, 30 (lượt) Chiến sĩ thi đua cấp cơ sở, nhiều thầy cô giáo có sáng kiến kinh nghiệm được Sở GD-ĐT đánh giá cao.

NHÀ TRƯỜNG: được Sở GD-ĐT công nhận Trường Tiên tiến nhiều năm; được Bộ Giáo dục và Đào tạo tặng Bằng khen năm học 2006 – 2007 và năm học 2011 – 2012. Chi bộ được Thành ủy công nhận Chi bộ trong sạch vững mạnh. Công đoàn được Công đoàn ngành công nhận là Công đoàn vững mạnh. Đoàn TNCS Hồ Chí Minh Nhà trường được Thành Đoàn, Tỉnh Đoàn, Trung ương Đoàn tặng Bằng khen và Cờ thi đua xuất sắc.

Trên đà phát triển sự nghiệp trồng người, Trường THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm đã và đang thực hiện các giải pháp sau:

* Quán triệt đầy đủ và sâu sắc các chỉ thị của cấp trên vào hoàn cảnh cụ thể của nhà trường. Phát huy các tiềm năng, lợi thế của đơn vị nhằm đưa nhà trường vào thế ổn định và phát triển.

* Tăng cường công tác giáo dục, tư tưởng đạo đức, lối sống lành mạnh trong cán bộ giáo viên, nhân viên, học sinh. Chú trọng giáo dục, kĩ năng sống cho học sinh bằng cách phối hợp với một số đơn vị ngoài và thành lập Ban kĩ năng sống để soạn và dạy cho học sinh về các kĩ năng: giao tiếp, ứng xử, thuyết trình, làm việc nhóm,...

* Tăng cường củng cố kỉ cương, nền nếp trường học, đảm bảo việc đánh giá kết quả dạy và học phản ánh đúng chất lượng. Tiếp tục thực hiện cuộc vận động "Hai không" của ngành và phong trào thi đua " Xây dựng trường học thân thiện, học sinh tích cực". Thực hiện quy chế dân chủ trong Nhà trường và xây dựng tập thể Nhà trường đoàn kết nhất trí, tạo điều kiện để mọi người phát huy năng lực, sở trường của mình.

* Thực hiện công tác xã hội hóa giáo dục, phối kết hợp giữa Nhà trường - Gia đình - Xã hội trong việc xây dựng cơ sở vật chất để nhà trường ngày một khang trang, xanh - sạch - đẹp.

Qua 20 năm xây dựng và phát triển, Trường THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm ngày càng khẳng định vị thế của mình trong ngành giáo dục tỉnh Hải Dương.

Hội đồng giáo dục nhà trường

THƯ CỦA CHỦ TỊCH NƯỚC TRƯƠNG TẤN SANG

Gửi ngành Giáo dục

NHÂN DỊP KHAI GIẢNG NĂM HỌC MỚI 2012-2013

Hà Nội ngày 31 tháng 8 năm 2012

Các thầy giáo, cô giáo, cán bộ, công chức, viên chức ngành Giáo dục, các bậc phụ huynh và các em học sinh, sinh viên thân mến!

Nhân dịp khai giảng năm học mới 2012-2013 và Ngày Toàn dân đưa trẻ đến trường, tôi thân ái gửi tới các thế hệ nhà giáo, cán bộ, công chức, viên chức ngành Giáo dục, các bậc phụ huynh và các em học sinh, sinh viên trong cả nước lời chúc mừng tốt đẹp nhất.

Năm học 2011-2012 vừa qua, ngành Giáo dục đã nỗ lực phấn đấu đạt được nhiều kết quả quan trọng. Công tác quản lý giáo dục có những đổi mới theo hướng tăng cường phân công, phân cấp, tăng quyền tự chủ gắn với nâng cao trách nhiệm và kiểm tra, giám sát trong quản lý giáo dục các cấp. Chất lượng giáo dục toàn diện và giáo dục vùng khó khăn có mặt được nâng lên. Công tác xã hội hóa giáo dục, huy động các nguồn lực đầu tư cho giáo dục thu được kết quả tích cực. Nhiều học sinh, sinh viên đạt giải cao trong các kỳ thi quốc tế.

Tôi nhiệt liệt biểu dương sự nỗ lực cố gắng và những kết quả của ngành Giáo dục, nhất là của đội ngũ các thầy giáo, cô giáo tâm huyết, có nhiều đóng góp cho sự nghiệp "trồng người", các em học sinh, sinh viên có hoàn cảnh khó khăn đã vượt khó vươn lên trong học tập.

Năm học 2012-2013 có ý nghĩa quan trọng, là năm học đầu tiên triển khai thực hiện Chiến lược phát triển giáo dục 2011-2020. Ngành Giáo dục cần tiếp tục đổi mới cơ chế quản lý giáo dục; phát triển và nâng cao chất lượng đội ngũ giáo viên và cán bộ quản lý giáo dục; nâng cao chất lượng giáo dục toàn diện; xây dựng môi trường giáo dục lành mạnh; kết hợp chặt chẽ giữa nhà trường với gia đình và xã hội; đẩy mạnh xã hội hóa, huy động sự tham gia của toàn xã hội chăm lo phát triển giáo dục, nhất là giáo dục ở vùng khó khăn, vùng đồng bào dân tộc thiểu số; thực hiện bình đẳng về cơ hội học tập và các chính sách xã hội trong giáo dục; tập trung giải quyết một số vấn đề bức xúc như: dạy thêm học thêm không đúng quy định, hiện tượng lạm thu, thiếu trung thực trong thi cử, bạo lực học đường, vi phạm đạo đức nhà giáo,...

Tôi mong và tin tưởng rằng, các em học sinh, sinh viên phát huy truyền thống hiếu học của dân tộc ta, noi theo các tấm gương học giỏi, rèn luyện tốt, vươn lên chiếm lĩnh những đỉnh cao của khoa học, góp phần phụng sự đất nước và làm rạng danh dân tộc Việt Nam.

Tôi đề nghị các cấp ủy Đảng, chính quyền, các tổ chức, đoàn thể và toàn xã hội tiếp tục quan tâm, phối hợp với ngành Giáo dục thực hiện tốt chủ trương "phát triển giáo dục và đào tạo là quốc sách hàng đầu", góp phần tích cực vào sự nghiệp xây dựng và bảo vệ Tổ quốc Việt Nam xã hội chủ nghĩa.

Chúc các thầy giáo, cô giáo, cán bộ, công chức, viên chức ngành Giáo dục và các em học sinh, sinh viên đạt được nhiều thành tích xuất sắc trong năm học mới.

Thân ái,

Trương Tấn Sang

ĐIỀU THÚ VỊ TỪ TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ BẬC NHẤT

HOÀNG SỸ LUYỆN
(HV Cao học Toán K19, ĐH Vinh, Nghệ An)

Hai tính chất (TC) của hàm số bậc nhất sau hầu như ít được quan tâm trong việc giải toán. Chúng ta thử tìm tòi, sáng tạo để vận dụng chúng vào giải một số bài toán.

1. TÍNH CHẤT. *Cho hàm số bậc nhất*

$$f(x) = ax + b\,(a \neq 0)$$

***TC1.** *Khi $a > 0$ hàm số luôn đồng biến; Khi $a < 0$ hàm số luôn nghịch biến.*

***TC2.** *Đồ thị của hàm số là một đường thẳng cắt trục Ox tại điểm $\left(-\frac{b}{a};0\right)$ và cắt trục Oy tại điểm $(0;b)$.*

Do đó nếu xét trên đoạn $[\alpha;\beta]$ thì đồ thị của nó là một đoạn thẳng có hai đầu mút là $(\alpha; f(\alpha))$ và $(\beta; f(\beta))$.

Từ đó suy ra với mọi $x \in [\alpha;\beta]$ thì

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) \geq 0 \\ f(\beta) \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) \leq 0 \\ f(\beta) \leq 0. \end{cases}$$

2. VẬN DỤNG GIẢI TOÁN

★Thí dụ 1. *Chứng minh rằng với mọi $m \leq -2$ thì $x^2 - (2m+1)x + 3m + 2 \leq 0$ với mọi $x \in [-4;1]$.*

Lời giải. Ta có $x^2 - (2m+1)x + 3m + 2 \leq 0$

$\Leftrightarrow f(m) = (-2x+3)m + x^2 - x + 2 \leq 0.$

Ta thấy $f(m)$ là hàm số bậc nhất có hệ số của m là $-2x+3 > 0$ (do $x \in [-4;1]$). Theo TC1 thì $f(m)$ là hàm đồng biến nên $f(m) \leq f(-2)$ với mọi $m \leq -2$. Tức là

$x^2 - (2m+1)x + 3m + 2 \leq (-2x+3).(-2) + x^2 - x + 2$

$= x^2 + 3x - 4 = (x+1)(x-4) \leq 0$ (do $-4 \leq x \leq 1$). ❐

★Thí dụ 2. *Chứng minh rằng với mọi $m \leq 1$ thì $x^2 - 2(3m-1)x + m + 3 \geq 0$ với mọi $x \geq 1$.*

Lời giải. Ta có $x^2 - 2(3m-1)x + m + 3 \geq 0$

$\Leftrightarrow f(m) = (-6x+1)m + x^2 + 2x + 3 \geq 0.$

Ta thấy $f(m)$ là hàm số bậc nhất có hệ số của m là $-6x+1 < 0$ (do $x \geq 1$).

Theo TC1 thì $f(m)$ là hàm nghịch biến $\Rightarrow f(m) \geq f(1)$ với mọi $m \leq 1$. Tức là

$$x^2 - 2(3m-1)x + m + 3 \geq (x-2)^2 \geq 0$$

(đúng với mọi $x \geq 1$). Vậy là ta giải quyết xong bài toán. ❐

★Thí dụ 3. *Cho $x, y, z \in [0;2]$. Chứng minh rằng $2(x+y+z) - (xy+yz+zx) \leq 4$.*

Lời giải. Ta có $2(x+y+z) - (xy+yz+zx) \leq 4$

$\Leftrightarrow f(x) = (2-y-z)x + 2(y+z) - yz - 4 \leq 0.$

• Nếu $y+z=2$ thì BĐT cần chứng minh trở thành $-yz \leq 0$ (đúng vì $y \geq 0, z \geq 0$).

• Nếu $y+z \neq 2$ thì $f(x)$ là hàm số bậc nhất. Theo TC2 thì để chứng minh $f(x) \leq 0$ với mọi $x \in [0;2]$ ta chỉ cần chứng minh $f(0) \leq 0$ và $f(2) \leq 0$.

Dễ thấy $f(0) = -(2-y)(2-z) \leq 0$ (vì $y \leq 2$, $z \leq 2$) và $f(2) = -yz \leq 0$ (vì $y \geq 0, z \geq 0$). ❐

★Thí dụ 4. *Cho $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \\ x+y+z=1. \end{cases}$*

Chứng minh rằng $0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$.

(IMO 1984)

Lời giải. Từ giả thiết có $x, y, z \in [0;1]$, suy ra $xy + yz + zx - 2xyz = xy + yz(1-x) + zx(1-y) \geq 0$.

Cũng từ giả thiết và BĐT Cauchy ta suy ra

$$yz \leq \frac{(y+z)^2}{4} = \frac{(1-x)^2}{4}.$$

Ta cần chứng minh $xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$

$\Leftrightarrow f(yz) = (1-2x)yz + x(1-x) - \frac{7}{27} \leq 0$.

• Nếu $x = \frac{1}{2}$ thì $f(yz) = -\frac{1}{108} \leq 0$ (hiển nhiên đúng).

• Nếu $x \neq \frac{1}{2}$ thì $f(yz)$ là hàm số bậc nhất. Theo TC2, để chứng minh $f(yz) \leq 0$ ta chỉ cần chứng minh $f(0) \leq 0$ và $f\left(\frac{(1-x)^2}{4}\right) \leq 0$. Thật vậy

$$f(0) = x(1-x) - \frac{7}{27} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{108} < 0$$

và $f\left(\frac{(1-x)^2}{4}\right) = (1-2x).\frac{(1-x)^2}{4} + x(1-x) - \frac{7}{27}$

$= -\frac{1}{108}(6x+1)(3x-1)^2 \leq 0$ (do $0 \leq x \leq 1$).

Vậy trong hai trường hợp ta đều có $f(yz) \leq 0$ (đpcm). ❐

★ Thí dụ 5. *Cho* $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \\ x + y + z = 3. \end{cases}$

Chứng minh $x^2 + y^2 + z^2 + xyz \geq 4$.

Lời giải. Từ giả thiết có $x, y, z \in [0;3]$ và $yz \leq \frac{(y+z)^2}{4} = \frac{(3-x)^2}{4}$. Ta cần chứng minh

$x^2 + y^2 + z^2 + xyz \geq 4$

$\Leftrightarrow x^2 + (y+z)^2 - 2yz + xyz - 4 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 + (3-x)^2 - 2yz + xyz - 4 \geq 0$

$\Leftrightarrow f(yz) = (x-2)yz + 2x^2 - 6x + 5 \geq 0$.

• Nếu $x = 2$ thì $f(yz) = 1 \geq 0$ (hiển nhiên đúng).

• Nếu $x \neq 2$ thì $f(yz)$ là hàm số bậc nhất. Theo TC2, để chứng minh $f(yz) \geq 0$ ta chỉ cần chứng minh $f(0) \geq 0$ và $f\left(\frac{(3-x)^2}{4}\right) \geq 0$.

Dễ thấy $f(0) = 2x^2 - 6x + 5 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$

và $f\left(\frac{(3-x)^2}{4}\right) = (x-2).\frac{(3-x)^2}{4} + 2x^2 - 6x + 5$

$= \frac{1}{4}(x+2)(x-1)^2 \geq 0$, với $x \in [0\,;3]$. Vậy trong hai trường hợp ta kết luận $f(yz) \geq 0$ (đpcm) ❐

★ Thí dụ 6. Cho $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$

Chứng minh rằng $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \geq \frac{1}{4}$.

(USA MO 1979)

Lời giải. Từ giả thiết có $x, y, z \in [0;1]$ và $yz \leq \frac{(y+z)^2}{4} = \frac{(1-x)^2}{4}$. Ta cần chứng minh

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \geq \frac{1}{4}$$

$\Leftrightarrow x^3 + (y+z)^3 - 3yz(y+z) + 6xyz - \frac{1}{4} \geq 0$

$\Leftrightarrow x^3 + (1-x)^3 - 3yz(1-x) + 6xyz - \frac{1}{4} \geq 0$

$\Leftrightarrow f(yz) = (3x-1)yz + x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0$.

• Nếu $x = \frac{1}{3}$ thì $f(yz) = \frac{1}{36} \geq 0$ (hiển nhiên đúng).

• Nếu $x \neq \frac{1}{3}$ thì $f(yz)$ là hàm số bậc nhất. Theo TC2, để chứng minh $f(yz) \geq 0$ ta chỉ cần chứng minh $f(0) \geq 0$ và $f\left(\frac{(1-x)^2}{4}\right) \geq 0$. Thật vậy, dễ thấy $f(0) = x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ và

$f\left(\frac{(1-x)^2}{4}\right) = (3x-1).\frac{(1-x)^2}{4} + x^2 - x + \frac{1}{4}$

$= \frac{3}{4}x\left(x^2 - x + \frac{1}{3}\right) \geq 0$ (đúng, vì $0 \leq x \leq 1$ và $x^2 - x + \frac{1}{3} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} > 0$).

Vậy trong hai trường hợp ta đều có $f(yz)\ge 0$ (đpcm). ❐

★Thí dụ 7. *Cho $a,b,c\in[0;1]$. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2\le a^2b+b^2c+c^2a+1$.*

(Italia MO 1993)

Lời giải. Ta có $a^2+b^2+c^2\le a^2b+b^2c+c^2a+1$
$\Leftrightarrow (b-1)a^2+b^2c+c^2a+1-b^2-c^2\ge 0$.

Vì $0\le a\le 1$ nên $a\ge a^2$. Suy ra

$$(b-1)a^2+b^2c+c^2a+1-b^2-c^2$$
$$\ge (b-1)a^2+b^2c+c^2a^2+1-b^2-c^2$$
$$=\left(c^2+b-1\right)a^2+b^2c+1-b^2-c^2=f\left(a^2\right).$$

Ta chỉ cần chứng minh $f\left(a^2\right)\ge 0$ là được.

- Nếu $c^2+b-1=0\Rightarrow c^2=1-b$ khi đó BĐT cần chứng minh sẽ trở thành $b^2c+(b-b^2)\ge 0$ (đúng vì $0\le b,c\le 1$).

- Nếu $c^2+b-1\ne 0$ thì $f\left(a^2\right)$ là hàm số bậc nhất. Theo TC2, để chứng minh $f\left(a^2\right)\ge 0$ ta chỉ cần chứng minh $f(0)\ge 0$ và $f(1)\ge 0$. Thật vậy,

$$f(0)=b^2c+1-b^2-c^2$$
$$=(1-c)(1+c-b^2)=(1-c)\left(c+\left(1-b^2\right)\right)\ge 0.$$

(đúng, vì $0\le b,c\le 1$) và $f(1)=b^2c+\left(b-b^2\right)\ge 0$ (đúng, vì $0\le b,c\le 1$). Vậy trong hai trường hợp ta đều có $f\left(a^2\right)\ge 0$ (đpcm). ❐

★Thí dụ 8. *Cho $\begin{cases}x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\\ x+y+z=1.\end{cases}$*

Chứng minh rằng $x^2y+y^2z+z^2x\le\dfrac{4}{27}$.

(Canada MO 1999)

Lời giải. Giả sử $x=\min\{x,y,z\}$, từ giả thiết suy ra $0\le x\le\dfrac{1}{3}$. Mặt khác ta lại có

$$x^2y+y^2z+z^2x\le\frac{4}{27}\Leftrightarrow yx^2+y^2z+z^2x-\frac{4}{27}\le 0.$$

Vì $0\le x\le\dfrac{1}{3}\Rightarrow x^2\le\dfrac{1}{3}x\Rightarrow yx^2+y^2z+z^2x-\dfrac{4}{27}$

$$\le\frac{1}{3}yx+y^2z+z^2x-\frac{4}{27}=\left(\frac{1}{3}y+z^2\right)x+y^2z-\frac{4}{27}$$

$=f(x)$. Ta sẽ chứng minh $f(x)\le 0$.

- Nếu $\dfrac{1}{3}y+z^2=0$ thì $y=z=0$ thì BĐT cần chứng minh thành $-\dfrac{4}{27}\le 0$ (hiển nhiên đúng).

- Nếu $\dfrac{1}{3}y+z^2\ne 0$ thì $f(x)$ là hàm số bậc nhất. Theo TC2 thì để chứng minh $f(x)\le 0$ ta chỉ cần chứng minh $f(0)\le 0$ và $f\left(\dfrac{1}{3}\right)\le 0$.

Thật vậy $f(0)=y^2z-\dfrac{4}{27}$; vì $x\ge 0$, nên từ giả thiết có $y+z=1$. Theo BĐT Cauchy

$$y^2z=\frac{1}{2}.y.y.(2z)\le\frac{1}{2}.\left(\frac{2(y+z)}{3}\right)^3=\frac{4}{27}$$

$\Rightarrow y^2z-\dfrac{4}{27}\le 0\Rightarrow f(0)\le 0$ và

$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=y^2z+\dfrac{1}{9}y+\dfrac{1}{3}z^2-\dfrac{4}{27}$; vì $x=\dfrac{1}{3}$

$y+z=\dfrac{2}{3}\Rightarrow z=\dfrac{2}{3}-y$. Suy ra

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=y^2\left(\frac{2}{3}-y\right)+\frac{1}{9}y+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}-y\right)^2-\frac{4}{27}$$
$$=-y^3+y^2-\frac{1}{3}y=$$
$$=-y\left(y^2-y+\frac{1}{3}\right)=-y\left(\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}\right)\le 0$$

(đúng vì $y\ge 0$). Vậy trong hai trường hợp ta kết luận $f(x)\le 0$. ❐

BÀI TẬP

Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 1. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2+2abc<2$.

1. Cho $a,b,c,d\in[0;1]$. Chứng minh rằng $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)+a+b+c+d\ge 1$.

2. Cho $\begin{cases}x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\\ x+y+z=1.\end{cases}$

Chứng minh rằng $7(ab+bc+ca)\le 2+9abc$.

3. Cho $\begin{cases}x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\\ x+y+z=1.\end{cases}$

Chứng minh $5\left(x^2+y^2+z^2\right)\le 6\left(x^3+y^3+z^3\right)+1$.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9
TỈNH THỪA THIÊN - HUẾ

NĂM HỌC 2011 - 2012

(Đề thi đã đăng trênTHTT số 422, tháng 8 năm 2012)

Bài 1. 1) ĐK : $1 < x \neq 2$.

$$Q = \frac{\left|\sqrt{x-1}-1\right| + \left|\sqrt{x-1}+1\right|}{|x-2|}.\left(\frac{x-2}{x-1}\right).$$

Khi $1 < x < 2$ thì $Q = \dfrac{2}{1-x}$.

Khi $x > 2$ thì $Q = \dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$.

2) Do $x = 2013 > 2$ nên $Q = \dfrac{2}{\sqrt{2013-1}} = \dfrac{\sqrt{503}}{503}$.

Bài 2. 1) Ta có $\Delta' = (m-2)^2 + 2 > 0\ \forall m$ nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ $(x_1 < x_2)$ với mọi m.

Để phương trình có nghiệm dương thì $x_1 \leq 0 < x_2$ hoặc $0 < x_1 < x_2$.

$\Leftrightarrow m \leq \dfrac{5}{2}$ hoặc $m > \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}$.

2) $$A = \frac{x_1^4 + x_2^4}{(x_1x_2)^2} = \frac{\left((x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2\right)^2 - 2(x_1x_2)^2}{(x_1x_2)^2}$$

$$= \frac{(4m^2 - 12m + 14)^2}{(2m-5)^2} - 2 = \left(2m - 1 + \frac{9}{2m-5}\right)^2 - 2.$$

Để A nguyên thì $9 \vdots (2m-5) \Leftrightarrow 2m-5 \in \{\pm1, \pm3, \pm9\}$. Vậy $m \in \{1; 2; 3; 4; 7\}$.

Bài 3. ĐK $x \neq 0, x \neq 1$ và $x \geq -\dfrac{1}{3}$ (*)

Biến đổi PT thành

$$\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2} = \sqrt{x+2} - \sqrt{3x+1}$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)\left(\frac{1}{(x-1)^2x^2} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x+1}}\right) = 0$$

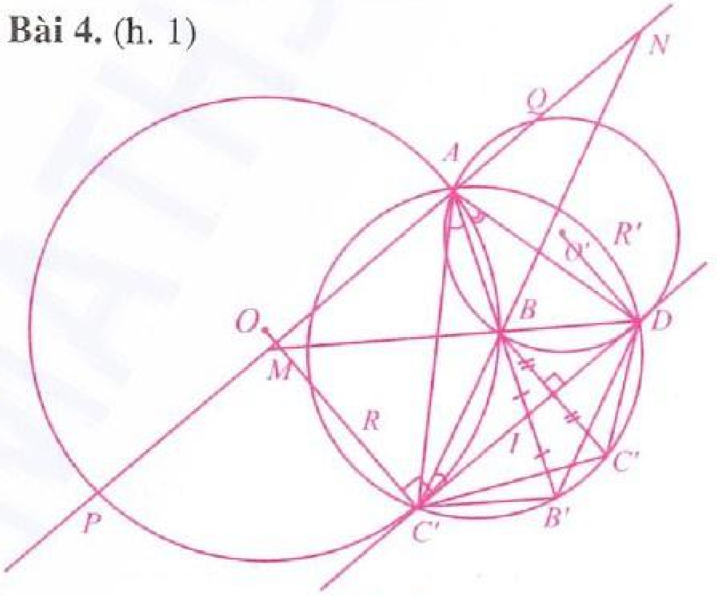
$\Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ (thỏa mãn (*)).

2) ĐK: $0 \leq x < y$ và $x, y \in \mathbb{N}$.

Ta có $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2\sqrt{503}$ do đó $\sqrt{x} = a\sqrt{503}$, $y = b\sqrt{503}$ với $a, b \in \mathbb{N}$, $a + b = 2$, $a < b$.

Do đó $a = 0$; $b = 2$. Vậy $(x ; y) = (0 ; 2012)$.

Bài 4. (h. 1)



Hình 1

1) Vì $PQ//CD$, theo Hệ quả của định lí Thales ta có $\dfrac{CI}{AN} = \dfrac{BI}{BA}; \dfrac{DI}{AM} = \dfrac{BI}{BA} \Rightarrow \dfrac{CI}{AN} = \dfrac{DI}{AM}$ (1)

Ta có $\Delta ACI \backsim \Delta CBI (g,g) \Rightarrow CI^2 = AI \cdot BI$ (2)

Tương tự $DI^2 = AI.BI$. (3)

Từ (2) và (3) ta có $CI = DI$.

Từ (1) ta có $AM = AN$ (đpcm).

2) Từ Câu 1 thì tứ giác $BCB'D$ là hình bình hành. Do đó $\widehat{CBD} = \widehat{CB'D}$ (4)

Mặt khác

$\widehat{CAD} = \widehat{CAI} + \widehat{DAI} = \widehat{BCI} + \widehat{BDI} = \widehat{BCD} + \widehat{CDB}$

$\Rightarrow \widehat{CAD} + \widehat{CB'D} = \widehat{BCD} + \widehat{CDB} + \widehat{CBD} = 180^o$ (5)

nên tứ giác $ACB'D$ nội tiếp (6)

Mặt khác C' là điểm đối xứng của B qua CD, suy ra $\widehat{CBD} = \widehat{CC'D}$ (7)

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU, NGHỆ AN
NĂM HỌC 2012 - 2013

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1 (3,5 *điểm*).

a) Giải phương trình $(\sqrt{x+1}+1)(5-x)=2x$.

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2-2xy+x-2y+3=0 \\ y^2-x^2+2xy+2x-2=0. \end{cases}$$

Câu 2 (1,5 *điểm*).

Tìm các số tự nhiên x và y thoả mãn $2^x+1=y^2$.

Câu 3 (1 *điểm*).

Cho ba số dương x,y,z thoả mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$.

Chứng minh rằng

$$\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+zx}+\sqrt{z+xy}\geq\sqrt{xyz}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$$

Câu 4 (3 *điểm*).

Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Trên đường tròn lấy điểm D khác A và $\widehat{DAB}>60^\circ$. Trên đường kính AB lấy điểm C (C khác A, B) và kẻ CH vuông góc với AD tại H. Phân giác trong của góc DAB cắt đường tròn tại E và cắt CH tại F. Đường thẳng DF cắt đường tròn tại điểm thứ hai N.

a) Chứng minh rằng tứ giác $AFCN$ nội tiếp đường tròn và ba điểm N, C, E thẳng hàng.

b) Cho $AD=BC$, chứng minh rằng DN đi qua trung điểm của AC.

Câu 5 (1 điểm).

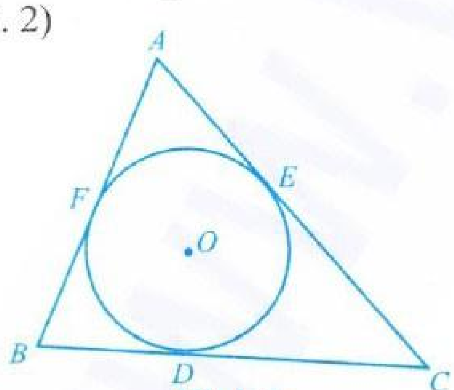
Một tứ giác lồi có độ dài bốn cạnh đều là số tự nhiên sao cho tổng ba số bất kì trong chúng chia hết cho số còn lại. Chứng minh rằng tứ giác đó có ít nhất hai cạnh bằng nhau.

THÁI VIẾT THẢO
(Sở giáo GD&ĐT Nghệ An)
Sưu tầm và giới thiệu

Từ (4) (5) và (7) ta có $\widehat{CAD}+\widehat{CC'D}=180^\circ$, nên tứ giác $ACC'D$ nội tiếp (8)

Từ (6) và (8) ta có 5 điểm A, C, B', C, D cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 5. (h. 2)



Hình 2

Đặt $AB=c$; $AC=b$; $BC=a$.

Đường tròn (O) tiếp xúc AC, AB thứ tự tại E, F.

$$\begin{aligned} 2BD &= BD+BF=(BC-DC)+(AB-AF) \\ &=(BC+AB)-(DC+AF) \\ &=(BC+AB)-(CE+AE) \\ &=BC+AB-CA=a+c-b \end{aligned}$$

$\Rightarrow 2DB=a-(b-c)$.

Tương tự $2DC=a+(b-c)$.

Suy ra $4DB.DC=a^2-(b^2+c^2)+2bc$ (1)

Nếu tam giác ABC vuông tại A thì $a^2=b^2+c^2$

và $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}b.c$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DB.DC=\frac{bc}{2}$. (đpcm).

Bài 6. Giả sử $2012+n^2=m^2$ $(m,n\in\mathbb{N}\,;m>n)$.

Suy ra $(m+n)(m-n)=2012$.

Nhận thấy $m+n+m-n=2m$ nên hai số $m+n$ và $m-n$ cùng tính chẵn lẻ.

Suy ra $m+n$ và $m-n$ đều chẵn, $m+n>m-n$.

Do đó $\begin{cases} m+n=1006 \\ m-n=2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=504 \\ n=502. \end{cases}$

Vậy số cần tìm $n=502$.

NGUYỄN TẤN TƯỜNG
(Sở GD&ĐT Thừa Thiên - Huế)
sưu tầm và giới thiệu

Hướng dẫn giải Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN, ĐHQG HÀ NỘI

NĂM HỌC 2012 - 2013

(Đề thi đã đăng trên TH&TT số 422, tháng 8 năm 2012)

VÒNG 1

Câu I. 1) Điều kiện $x \ge -6$,
PT đã cho tương đương với
$(\sqrt{x+9}-2012)(\sqrt{x+6}-1)=0.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+9}-2012=0\\ \sqrt{x+6}-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4048135\\ x=-5.\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của PT là $\{-5\ ;\ 4048135\}$.

2) HPT đã cho tương đương với

$$\begin{cases}x^2+(y+1)^2=5\\ x(y+1)+x+(y+1)=5.\end{cases}$$

Đặt $u=x+(y+1), v=x(y+1)$ thu được

$$\begin{cases}u^2-2v=5\\ u+v=5\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=3, v=2\\ u=-5, v=10.\end{array}\right.$$

a) $\begin{cases}x+(y+1)=3\\ x(y+1)=2\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y=1\\ x=2, y=0.\end{array}\right.$

b) $\begin{cases}x+(y+1)=-5\\ x(y+1)=10\end{cases}$ hệ này vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x\ ;\ y)$ là $(1;1)$ và $(2;0)$.

Câu II. Phương trình tương đương với

$$(x+y+1)(xy+x+y-2)=3.$$

Do x, y nguyên nên $x+y+1 \in \{\pm1, \pm3\}$. Xảy ra 4 khả năng. Tìm được hai cặp số nguyên $(x\ ;\ y)$ là $(1\ ;\ 1)$, $(-1\ ;\ -1)$.

2) Ta có

$$(\sqrt{x}+1)(\sqrt{y}+1) \ge 4 \Leftrightarrow \sqrt{xy}+\sqrt{x}+\sqrt{y} \ge 3.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy cho hai số thực dương, ta có

$$3 \le \sqrt{xy}+\sqrt{x}+\sqrt{y} \le \frac{x+y}{2}+\frac{x+1}{2}+\frac{y+1}{2}$$

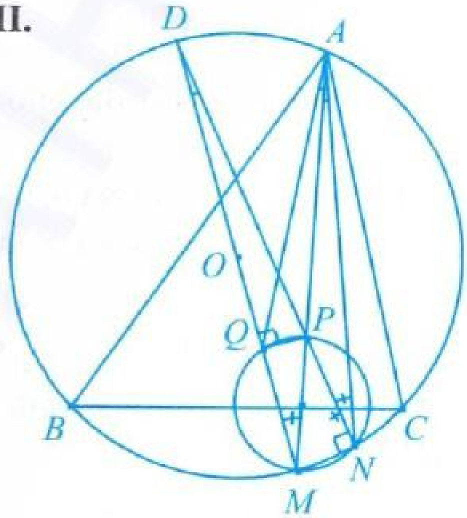
$\Rightarrow x+y \ge 2.$ (1)

$$\frac{x^2}{y}+y \ge 2x;\ \frac{y^2}{x}+x \ge 2y.$$

Suy ra $P \ge x+y \ge 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2 khi $x=y=1$.

Câu III.



1) Ta có $PN \perp MN$, và $DN \perp MN$ suy ra N, P, D thẳng hàng.

2) Tứ giác $APQD$ nội tiếp (do $\widehat{PQD}=\widehat{MAD}=90^\circ$),

suy ra $\widehat{PAQ}=\widehat{PDQ}=\widehat{NDM}$ (1)

Lại có $\widehat{NDM}=\widehat{NAM}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{PAQ}=\widehat{NAP}$, hay AP là phân giác của $\widehat{NAQ}$.

Ta có $\widehat{AND}=\widehat{AMD}$ (góc nội tiếp chắn $\overparen{AD}$) (3)

$\widehat{QMP}=\widehat{QNP}$ (góc nội tiếp chắn $\overparen{PQ}$) (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{ANP}=\widehat{QNP}$, hay NP là phân giác của $\widehat{ANQ}$.

Do đó P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ANQ.

Câu IV. Biến đổi Q thành

$$Q=\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}-\frac{c}{c+1}.$$

Ta chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}-\frac{c}{1+c}\geq\frac{1}{1+1}+\frac{2}{1+2}-\frac{3}{1+3}=\frac{5}{12}.\quad (*)$$

Thật vậy, BĐT (*)

$$\Leftrightarrow\left(\frac{3}{1+3}-\frac{c}{1+c}\right)+\left(\frac{b}{1+b}-\frac{2}{1+2}\right)+\left(\frac{a}{1+a}-\frac{1}{1+1}\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{3-c}{4(1+c)}+\frac{b-2}{3(b+1)}+\frac{a-1}{2(1+a)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow(3-c)\left(\frac{1}{4(c+1)}-\frac{1}{3(b+1)}\right)+$$

$$+\left((3-c)+(b-2)\right)\left(\frac{1}{3(b+1)}-\frac{1}{2(1+a)}\right)$$

$$+\left((3-c)+(b-2)+(a-1)\right)\frac{1}{2(1+a)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(3-c)(3b-4c-1)}{12(b+1)(c+1)}+\frac{(b+1-c)(2a-3b-1)}{6(b+1)(a+1)}$$

$$+\frac{(a+b-c)}{2(a+1)}\geq 0.\quad (2)$$

Từ ĐK $a\leq b\leq 3\leq c$, $c\geq b+1$, $a+b\geq c$ suy ra mỗi phân thức ở vế trái của BĐT (2) luôn không âm. Vì vậy BĐT (2) luôn đúng, suy ra đpcm.

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $\frac{5}{12}$ khi $a=1$, $b=2$, $c=3$.

VÒNG 2

Câu I. 1) Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}xy(x+y)=2\\(x+y)^3=(3x-y)^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy(x+y)=2\\x+y=3x-y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\xy(x+y)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1.\end{cases}$$

2) Điều kiện $-4\leq x\leq 4$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x}{\sqrt{x+4}+2}(\sqrt{4-x}+2)=2x.\quad (1)$$

- $x=0$ là nghiệm.
- Xét $x\neq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow\sqrt{4-x}+2=2(\sqrt{x+4}+2)$.

Đặt $u=\sqrt{x+4}, v=\sqrt{4-x}$ $(u\geq 0,\ v\geq 0)$ ta thu được $\begin{cases}v=2u+2\\u^2+v^2=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\frac{2}{5}\\v=\frac{14}{5}.\end{cases}$

Từ đó tìm được $x=-\frac{96}{25}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=0$ và $x=-\frac{96}{25}$.

Câu II. 1) Ta có

$41^2=(40+1)^2=40^2+80+1\equiv 81(\text{mod}100)$.

$41^4\equiv 81^2(\text{mod}100)\equiv 61(\text{mod}100)$

nên $41^5\equiv 61.41\ (\text{mod}\ 100)\ \equiv 1\ (\text{mod}100)$.

Suy ra $41^{106}=41.(41^5)^{21}\equiv 41(\text{mod}100)$.

- $57^4\equiv 1(\text{mod}100)\Rightarrow 57^{2012}=(57^4)^{503}\equiv 1(\text{mod}100)$.

Suy ra $A\equiv 41+1\ (\text{mod}100)$.

Vậy hai chữ số cuối cùng của A là 42.

2) Điều kiện xác định $\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{\sqrt{5}}{2}$. Áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$x\sqrt{5-4x^2}\leq\frac{x^2+5-4x^2}{2}=\frac{5-3x^2}{2};$$

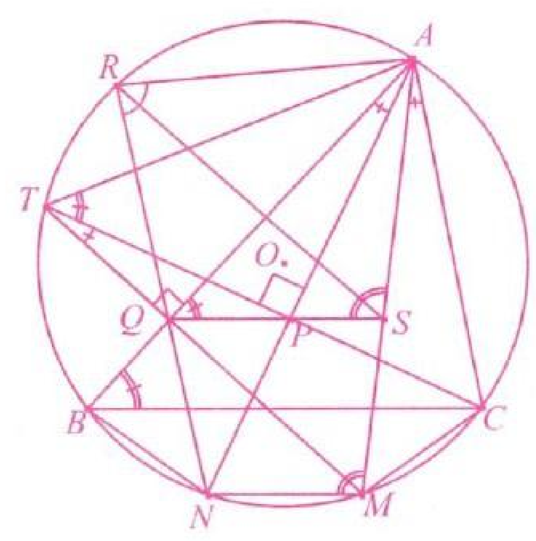
$$3\sqrt{2x-1}\leq 3\left(\frac{2x-1+1}{2}\right)=3x\leq\frac{3(x^2+1)}{2}.$$

Do đó

$$y=3\sqrt{2x-1}+x\sqrt{5-4x^2}\leq\frac{5-3x^2}{2}+\frac{3(x^2+1)}{2}=4.$$

Vậy giá trị lớn nhất của y là 4 khi $x=1$.

Câu III



(Xem tiếp trang 29)

TIN TỨC HỘI NGHỊ TOÁN HỌC PHỐI HỢP VIỆT – PHÁP TẠI THÀNH PHỐ HUẾ

Từ ngày 20 đến 24.8. 2012 tại Trường ĐHSP Huế (Thừa Thiên - Huế) đã diễn ra Hội nghị Toán học phối hợp Việt - Pháp do Hội Toán học Việt Nam, Hội Toán học Pháp, Đại học Huế và Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán phối hợp tổ chức. Đây là Hội nghị Toán học quy mô Quốc tế lớn nhất từ trước đến nay và lần đầu tiên được tổ chức tại Việt Nam.

Thứ trưởng Bộ GD&ĐT, PGS. TS *Trần Quang Quý*; Tổng Thư kí Hội đồng chức danh giáo sư Nhà nước, GS. TSKH. *Trần Văn Nhung*, Giám đốc Khoa học Viện nghiên cứu cao cấp về Toán Việt Nam, GS. TSKH *Ngô Bảo Châu*, đại diện lãnh đạo Hội Toán học Việt Nam, Hội Toán học Pháp, ĐH Huế và cùng trên 500 giáo sư, nhà toán học Việt Nam, Pháp và các nước trên thế giới tham dự Hội nghị. Hội nghị Toán học phối hợp Việt - Pháp dành phiên họp chung nghe báo cáo toàn thể của các Giáo sư: *Ngô Bảo Châu* (Viện nghiên cứu cao cấp về Toán Việt Nam); *Đinh Tiến Cường*, (ĐH Paris, Pháp), *Benedict Gross* (ĐH Harvard, Hoa Kỳ).... Đây là cơ hội tốt để các nhà toán học, các nhà khoa học hai nước Việt - Pháp và các Quốc gia khác chia sẻ kinh nghiệm, trao đổi thông tin về những kết quả nghiên cứu trong các lĩnh vực toán học.

Nhân dịp này, Hội Toán học Việt Nam và Hội Toán học Pháp cũng thảo luận về hợp tác giữa hai nước. Trong đó khẳng định mối quan hệ hợp tác về Toán học giữa hai nước đã đạt được nhiều thành tựu. Việt Nam luôn đề cao Toán học và sự đóng góp của Toán học trong xã hộ nói chung và mối quan hệ giữa Toán và các ngành công nghiệp, cũng như mong muốn hợp tác, nghiên cứu Toán học với Pháp và các nước trên thế giới để chia sẻ kinh nghiệm.

NGUYỄN PHÚC

(Nguồn: *Báo Nhân Dân điện tử*)

HƯỚNG DẪN GIẢI... *(Tiếp trang 7)*

1) Do $\widehat{TPA}=\widehat{TQA}=90^\circ$ nên tứ giác $TAPQ$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{MTC}=\widehat{QTP}=\widehat{QAP}=\widehat{BAN}$ $=\widehat{MAC}$ (do $MN\,//\,BC$). Vậy tứ giác $MTAC$ nội tiếp suy ra $T\in(O)$.

2) Từ tứ giác $TAPQ$ nội tiếp ta có $\widehat{PQA}=\widehat{PTA}=\widehat{CTA}=\widehat{ABC}\Rightarrow PQ\,//\,BC\,//\,MN$.

Từ đó $\widehat{QSA}=\widehat{NMA}$. (1)

Do tứ giác $AMNR$ nội tiếp nên

$$\widehat{ARN}+\widehat{AMN}=180^\circ. \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) suy ra $\widehat{QRA}+\widehat{QSA}=180^\circ$. Vậy tứ giác $ARQS$ nội tiếp.

Câu IV. • Giả sử các số của tập hợp X được sắp theo thứ tự $x_1<x_2<\cdots<x_n$.

Ta có $x_1+x_2<x_1+x_3<\cdots<x_1+x_n<x_2+x_n$ $<x_3+x_n<\cdots<x_{n-1}+x_n$.

Đối với một tập n số thực phân biệt bất kì ta luôn có ít nhất $(n-1)+(n-2)=2n-3$ giá trị phân biệt của các tổng x_i+x_j. Vậy $C(X)\ge 2n-3$.

Xét tập $X_1=\{1,2,\ldots,n\}$, khi đó với mọi $1\le i<j\le n$ thì

$x_i+x_j=i+j\in\{3,4,\ldots,2n-1\}\Rightarrow C(X_1)=2n-3$.

Vậy $\min C(X)=2n-3$.

• Số các tổng $x_i+x_j (1\le i<j\le n)$ bằng $\dfrac{n(n-1)}{2}$, suy ra $C(X)\le\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Xét tập $X_2=\{2,2^2,\ldots,2^n\}$, thì với mọi $1\le i<j\le n$

$$x_i+x_j=2^i+2^j.$$

Giả sử tồn tại $1\le r<s\le n$ sao cho $x_r+x_s=x_i+x_j\Leftrightarrow 2^r+2^s=2^i+2^j$

$$\Leftrightarrow 2^r(1+2^{s-r})=2^i(1+2^{j-i})\Rightarrow\begin{cases}2^r\,\vdots\,2^i\\ 2^i\,\vdots\,2^r\end{cases}$$

$$\Rightarrow r=i\Rightarrow s=j\Rightarrow C(X_2)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Vậy $\max C(X)=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

PHẠM VĂN HÙNG

(GV Trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Sưu tầm và giới thiệu

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

SỬ DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI MỘT SỐ LOẠI TOÁN

LÊ HỒ QUÝ
(GV THPT Duy Tân, Kon Tum)

Khi giải các bài toán xét sự tồn tại nghiệm của phương trình (PT), bất phương trình (BPT), hệ phương trình (HPT); tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số; tìm giới hạn của hàm số; chứng minh, bất đẳng thức..., chúng ta có thể áp dụng phép tính đạo hàm như là một công cụ hữu hiệu.

1. Giải và biện luận phương trình, bất phương trình, hệ phương trình

Đối với các bài toán về nghiệm của PT, BPT mà tham số độc lập với ẩn hoặc biến đổi PT, BPT, đặt ẩn phụ để được điều đó thì ta có thể sử dụng phương pháp đạo hàm để giải. Lược đồ chung của phương pháp này như sau:

• Biến đổi PT (BPT) về dạng $f(x)=g(m)$ (hoặc $f(x)\ge g(m)$; hoặc $f(x)\le g(m)$).

• Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y=f(x)$ trên tập xác định D của nó.

• Xác định $\max\limits_{x\in D} f(x)$; $\min\limits_{x\in D} f(x)$.

• Từ bảng biến thiên, ta suy ra các giá trị của m cần tìm.

★Thí dụ 1 (Khối A-2008). *Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có đúng hai nghiệm thực phân biệt*:

$$\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}=m\ (m\in\mathbb{R}).$$

Lời giải. Điều kiện $0\le x\le 6$.

Gọi vế trái của PT là $f(x)$, $x\in[0;6]$. Ta có

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}}-\frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}-\frac{1}{\sqrt{6-x}}\right),$$

$x\in(0;6)$.

Đặt $u(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}}$, $v(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x}}-\dfrac{1}{\sqrt{6-x}}$, ta thấy $u(2)=v(2)=0$ nên $f'(2)=0$.

Mặt khác $u(x),v(x)$ cùng dương trên khoảng $(0;2)$ và cùng âm trên khoảng $(2;6)$. Ta có

x	0		2		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}$	$\nearrow$	$3\sqrt{2}+6$	$\searrow$	$\sqrt[4]{12}+2\sqrt{3}$

Do đó PT có đúng hai nghiệm khi và chỉ khi $2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}\le m<3\sqrt{2}+6$. ❒

Lưu ý. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên tập I.

• PT $f(x)=m$ có nghiệm $x\in I$ $\Leftrightarrow \min\limits_{x\in I} f(x)\le m\ \le \max\limits_{x\in I} f(x)$.

• BPT $f(x)\le m$ có nghiệm $x\in I$ $\Leftrightarrow \min\limits_{x\in I} f(x)\le m$.

• BPT $f(x)\ge m$ có nghiệm $x\in I$ $\Leftrightarrow \max\limits_{x\in I} f(x)\ge m$.

★Thí dụ 2. *Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình sau có nghiệm*

$$x^3+3x^2-1\le m\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)^3.$$

Lời giải. Điều kiện $x\ge 1$. BPT đã cho tương đương với

$$\frac{x^3+3x^2-1}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)^3}\le m \Leftrightarrow \left(x^3+3x^2-1\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)^3\le m.$$

Xét hàm số $f(x)=\left(x^3+3x^2-1\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)^3$ có $f'(x)>0$ với mọi $x\ge 1$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$. Từ đó BPT $f(x)\le m$ có nghiệm $\Leftrightarrow m\ge \min\limits_{x\in[1;+\infty)} f(x)=f(1)=3$.

Lưu ý. Khi gặp hệ PT dạng

$$\begin{cases} f(x)=f(y) & (1) \\ g(x,y)=0 & (2) \end{cases}$$

Ta có thể tìm lời giải theo hai hướng sau:

Hướng 1. Biến đổi (1) về dạng $f(x)-f(y)=0$, sau đó tìm cách đưa về PT tích.

Hướng 2. Xét hàm số $y=f(t)$ (thường là hàm số liên tục trên tập xác định của nó).

Nếu hàm số $y=f(t)$ đơn điệu thì từ (1), ta suy ra $x=y$. Lúc đó, bài toán quy về giải hoặc biện luận PT (2) theo ẩn x.

Nếu hàm số $y=f(t)$ có một cực trị tại $t=t_0$ thì nó thay đổi chiều biến thiên một lần khi qua t_0. Từ (1) suy ra $x=y$ hoặc x, y nằm về hai phía của t_0.

★Thí dụ 3 (Khối A - 2012). *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^3-3x^2-9x+22=y^3+3y^2-9y \\ x^2+y^2-x+y=\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải. Hệ đã cho được viết lại dưới dạng

$$\begin{cases} (x-1)^3-12(x-1)=(y+1)^3-12(y+1) & (1) \\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=1 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) suy ra $\left|x-\dfrac{1}{2}\right|\le 1;\ \left|y+\dfrac{1}{2}\right|\le 1$

$\Leftrightarrow -\dfrac{3}{2}\le x-1\le\dfrac{1}{2};\ -\dfrac{1}{2}\le y+1\le\dfrac{3}{2}.$

Xét hàm số $f(t)=t^3-12t$ trên $\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]$. Ta có $f'(t)=3(t^2-4)<0, \forall t\in(-2;2)$. Suy ra $f(t)$ là hàm nghịch biến trên $\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow x-1=y+1\Leftrightarrow y=x-2$ (3)

Thay (3) vào (2) và thu gọn, ta được $4x^2-8x+3=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ hoặc $x=\dfrac{3}{2}$.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $(x;y)$ là $\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$ hoặc $\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$. ❑

2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

Để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một hàm số xét trên miền D bằng phương pháp đạo hàm, ta tiến hành như sau

• Sử dụng định lí về dấu tam thức bậc hai và dấu của nhị thức bậc nhất lập bảng biến thiên của hàm số trên miền D đã cho.

• Dựa vào bảng biến thiên và so sánh các giá trị đặc biệt để suy ra đáp số của bài toán.

★Thí dụ 4. *Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số* $y=\sqrt{2-x}+\sqrt{x+1}-\sqrt{2+x-x^2}$.

Lời giải. Tập xác định $D=[-1;2]$.

Đặt $t=\sqrt{2-x}+\sqrt{x+1}\ \left(\sqrt{3}\le t\le\sqrt{6}\right)$, ta có

$t^2=3+2\sqrt{(2-x)(x+1)}\Rightarrow\sqrt{2+x-x^2}=\dfrac{t^2-3}{2}.$

Khi đó

$y=g(t)=t-\dfrac{t^2-3}{2}=-\dfrac{1}{2}t^2+t+\dfrac{3}{2}, \forall t\in\left[\sqrt{3};\sqrt{6}\right].$

Bài toán quy về tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=g(t)=-\dfrac{1}{2}t^2+t+\dfrac{3}{2}$ trên đoạn $\left[\sqrt{3};\sqrt{6}\right]$.

Ta có $g'(t)=1-t<0, \forall t\in\left[\sqrt{3};\sqrt{6}\right]$, suy ra hàm số $g(t)$ luôn nghịch biến trên đoạn $\left[\sqrt{3};\sqrt{6}\right]$.

Do đó $\max\limits_{t\in\left[\sqrt{3};\sqrt{6}\right]} g(t)=g\left(\sqrt{3}\right)=\sqrt{3};$

$\min\limits_{t\in\left[\sqrt{3};\sqrt{6}\right]} g(t)=g\left(\sqrt{6}\right)=\sqrt{6}-\dfrac{3}{2}.$

Vậy $\max\limits_{x\in[-1;2]} y=\sqrt{3};\quad \min\limits_{x\in[-1;2]} y=\sqrt{6}-\dfrac{3}{2}.$ ❑

Lưu ý. Trong bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$, khi đặt ẩn phụ $t=g(x)$, ta phải tìm điều kiện của ẩn phụ đó bằng cách tìm tập giá trị của hàm số $g(x)$.

3. Tìm giới hạn của hàm số

Để tìm $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ nhờ định nghĩa đạo hàm, ta có thể tiến hành các bước sau:

- Chọn hàm số $g(x)$ thích hợp và khảo sát tính có đạo hàm của nó.
- Biểu diễn hàm $f(x)$ dưới dạng tỉ số giữa số gia của hàm số $g(x)$ và số gia của đối số tại điểm $x=x_0$. Khi đó $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=g'(x_0)$.
- Tính $g'(x_0)$ và đó chính là giới hạn cần tìm.

★Thí dụ 5. *Tính giới hạn*

$$I=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}.$$

Lời giải. Đặt $g(x)=\sqrt{5-x}-\sqrt[3]{x^2+7}\Rightarrow g(1)=0.$

Ta có $g'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{5-x}}-\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+7)^2}}\Rightarrow g'(1)=-\dfrac{5}{12}.$

Do đó $I=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x-1}}{x+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}}{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}$

$$=\frac{g'(1)}{2}=-\frac{5}{24}.\ \square$$

4. Chứng minh bất đẳng thức

Phương pháp sử dụng đạo hàm để chứng minh bất đẳng thức dựa trên mối liên hệ giữa tính đơn điệu của hàm số với đạo hàm của nó. Để sử dụng phương pháp này, điều quan trọng là tương ứng với mỗi bất đẳng thức cần chứng minh, ta cần xây dựng một hàm số, rồi nghiên cứu tính đơn điệu của nó trên các đoạn thích hợp.

★Thí dụ 6 (Khối A - 2003). *Cho x, y, z là ba số dương và $x+y+z\le 1$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\ge\sqrt{82}.$$

Lời giải. Gọi P là vế trái của bất đẳng thức.

Đặt $\vec{u}=\left(x;\dfrac{1}{x}\right)$, $\vec{v}=\left(y;\dfrac{1}{y}\right)$, $\vec{w}=\left(z;\dfrac{1}{z}\right)$ thì

$P=|\vec{u}|+|\vec{v}|+|\vec{w}|\ge|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|$

hay $P=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\dfrac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\dfrac{1}{z^2}}$

$\ge\sqrt{(x+y+z)^2+\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)^2}$. Mặt khác

$$x+y+z\ge\sqrt[3]{xyz};\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}.$$

Do đó $P\ge\sqrt{9t+\dfrac{9}{t}}$, với $t=\left(\sqrt[3]{xyz}\right)^2$, trong đó $0<t\le\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^2\le\dfrac{1}{9}.$

Xét hàm số $g(t)=9t+\dfrac{9}{t}$ trên $\left(0;\dfrac{1}{9}\right]$, ta có $g'(t)=9-\dfrac{9}{t^2}<0,\ \forall t\in\left(0;\dfrac{1}{9}\right]$, nên hàm số $g(t)$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{1}{9}\right]$. Vậy, với $t\in\left(0;\dfrac{1}{9}\right]$ ta có $g(t)\ge g\left(\dfrac{1}{9}\right)=82$ hay $P\ge\sqrt{g(t)}\ge\sqrt{82}.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{1}{3}.\ \square$

BÀI TẬP

1. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm:

$$x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}=m\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}\right).$$

2. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x\in[-3;6]$

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{6-x}-m^2+m-1\le\sqrt{18+3x-x^2}.$$

3. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3y-y^4=28\\ x^2y+2xy^2+y^3=18\sqrt{2}.\end{cases}$

4. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số

a) $y=\sqrt{2x+1}+\sqrt{1-2x}+2\sqrt{1-4x^2}$;

b) $y=\sin x+\cos x-\sin 2x-2.$

5. Tìm các giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x^2}-\sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x)}$.

6. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn các điều kiện $x+y+z=4$ và $xyz=3$. Chứng minh rằng $183-165\sqrt{5}\le x^4+y^4+z^4\le 18.$

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

VỀ MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC TRONG KÌ THI IMO 2012

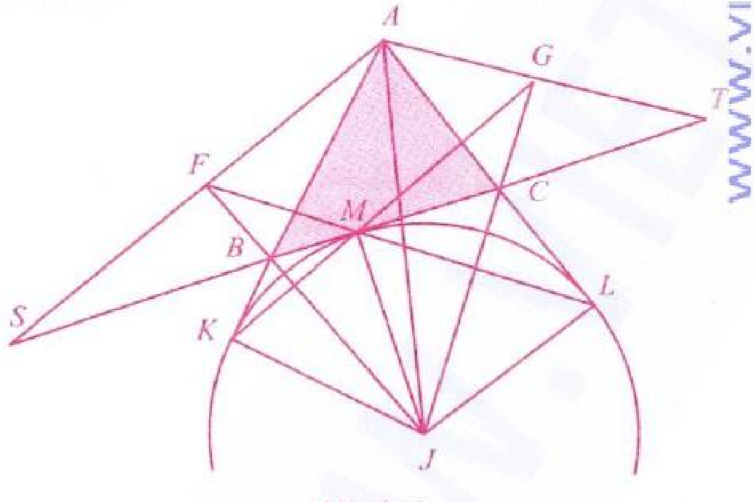
HOÀNG MINH QUÂN
(GV THPT Ngọc Tảo, Hà Nội)

Trong Kì thi IMO lần thứ 53 vừa diễn ra tháng 7/2012 ở Argentina có một bài toán hình học ở ngày thi thứ nhất với nội dung như sau.

BÀI TOÁN (IMO 2012) *Cho tam giác ABC và điểm J là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A của tam giác. Đường tròn này tiếp xúc với AB, AC, BC tại K, L, M theo thứ tự. LM cắt BJ tại F, KM cắt CJ tại G. Gọi S, T lần lượt là giao điểm của AF, AG với BC. Chứng minh rằng M là trung điểm của đoạn ST.*

Để giải bài toán này, chúng ta có nhiều ý tưởng tiếp cận khác nhau. Mỗi ý tưởng cho chúng ta một lời giải riêng. Sau đây chúng tôi xin trình bày một số lời giải cho bài toán này.

LỜI GIẢI 1 (*Chứng minh trực tiếp*) (h. 1).



Hình 1

Ta có $CJ \perp ML$ nên $\widehat{JFL} = 90^o - \widehat{BJC}$

$= 90^o - \left(90^o - \dfrac{\widehat{BAC}}{2}\right) = \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$, suy ra $\widehat{JFL} = \widehat{JAL}$.

Từ đó $AFJL$ là tứ giác nội tiếp, mà $JL \perp AL$ nên $JF \perp AF$.

Tam giác SBA có BF là đường phân giác đồng thời là đường cao (vì $JF \perp AF$) nên tam giác SBA cân tại đỉnh B. Suy ra $BA = BS$.

Tương tự, tam giác ATC cân tại đỉnh C. Suy ra $CA = CS$.

Mặt khác, ta có $AK = KL, BK = BM, CL = CM$ (tính chất tiếp tuyến) nên $AB + BK = AC + CL$, suy ra $AB + BM = AC + CM$.

Do đó $SM = SB + BM = AB + BM = AC + CM$ $= CT + CM = MT$.

Tức là M là trung điểm của đoạn ST. □

LỜI GIẢI 2

Ý tưởng. *Do $JM \perp ST$ nên để chứng minh M là trung điểm ST ta cần chứng minh tam giác JST cân ở J* (h. 1).

Chứng minh tứ giác $AFJL$ nội tiếp như lời giải 1, mà $JL \perp AL$ nên $JF \perp AF$.

Từ đó $\widehat{SFJ} = \widehat{SMJ} = 90^o$, nên tứ giác $SFMJ$ nội tiếp, suy ra $\widehat{MSJ} = \widehat{JFM} = \widehat{JAL} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$.

Tương tự ta có $\widehat{MTJ} = \widehat{JAK} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$.

Vậy $\widehat{MSJ} = \widehat{MTJ}$, mà $JM \perp ST$ nên tam giác JST cân tại S. Suy ra M là trung điểm của đoạn ST.

LỜI GIẢI 3.

Ý tưởng. *Để chứng minh M là trung điểm ST ta chứng minh MG là đường trung bình của tam giác TAS* (h. 1).

Ta vẫn có $\widehat{JGK} = \widehat{JAK} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$, nên tứ giác $AKJG$ nội tiếp mà $JK \perp AK \Rightarrow JG \perp AG$.

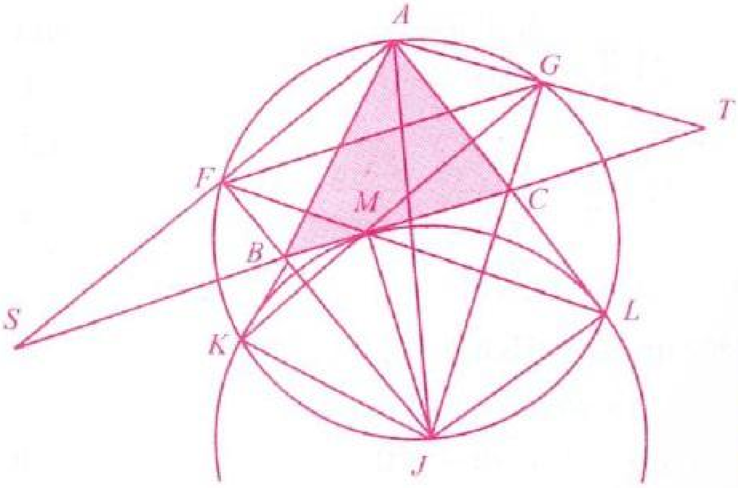
Xét tam giác TCA có CG là đường phân giác đồng thời là đường cao nên tam giác TCA cân tại đỉnh C. Từ đó ta có $GA = GT$.

Tương tự ta có tứ giác $AFJL$ nội tiếp, mà $JL \perp AL \Rightarrow JF \perp AF$. Mặt khác, dễ thấy $JF \perp GM$ nên $AF // GM$.

Xét tam giác AST có $GA = GT$, $AF // GM$. Suy ra $MS = MT$ (đpcm).

LỜI GIẢI 4

Ý tưởng. *Dựa vào tính chất tiếp tuyến của đường tròn và định lí Menelaus* (h. 2).



Hình 2

Ta có $JF \perp GM$ và $JG \perp FL$, suy ra tam giác JFG nhận M là trực tâm nên $JM \perp FG$.

Mặt khác, đường tròn tâm J tiếp xúc với cạnh BC tại M nên $JM \perp BC$, do đó $FG // BC$.

Theo định lí Thales ta có $\dfrac{AG}{GT} = \dfrac{AF}{FS}$ (1)

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ABT với cát tuyến GMK và tam giác ASC với cát tuyến FML ta có

$$\frac{AG}{GT}.\frac{TM}{BM}.\frac{BK}{AK} = 1; \quad \frac{AF}{FS}.\frac{SM}{CM}.\frac{CL}{AL} = 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) và $BM = BK$, $CM = CL$, $AK = AL$ ta suy ra $\dfrac{TM}{AK} = \dfrac{SM}{AL}$. Mà $AK = AL$ nên $TM = SM$. Vậy M là trung điểm của đoạn ST. ❐

LỜI GIẢI 5

Vẫn là dựa vào ý tưởng chứng minh MG là đường trung bình tam giác TAS nhưng cách tiếp cận ban đầu dựa vào định lí đảo Pascal (h . 2).

Do AJ là đường phân giác trong góc $\widehat{BAC}$ nên $\widehat{JGK} = \widehat{JAK} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$. Suy ra tứ giác $AKJG$ nội tiếp được một đường tròn .

Xét lục giác $AFKJLG$ có $AK \cap FJ = B$, $FL \cap KG = M, AL \cap JG = C$, mà B, M, C thẳng hàng, nên theo định lí Pascal đảo thì lục giác $AFKJLG$ nội tiếp trong một đường tròn.

Từ đó $\widehat{KAF} = \widehat{KGF} = \widehat{KJB} = \widehat{AKM}$

$\Rightarrow MG // AF$ (1)

Tam giác TCA có CG là đường phân giác đồng thời là đường cao (vì $JG \perp AG$) nên tam giác TCA cân tại đỉnh C. Vậy G là trung điểm của TA (2)

Từ (1) và (2) ta thấy MG là đường trung bình tam giác TAS, do đó M là trung điểm của đoạn ST. ❐

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

ỨNG DỤNG CỦA PHÉP QUAY VECTƠ

HÀ VĂN THẮNG
(GV THPT Ngô Sỹ Liên, Bắc Giang)

I – LÍ THUYẾT

• **Định nghĩa.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy định hướng, cho vectơ $\overrightarrow{AB}(x;y)$ khác vectơ $\vec{0}$ và góc lượng giác α. Ta nói vectơ $\overrightarrow{AB}$ quay quanh điểm đầu A một góc α tạo thành vectơ $\overrightarrow{AB'}(x';y')$ nếu $AB = AB'$ và góc lượng giác $(AB, AB') = \alpha$.

• **Tính chất** $\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$

Chứng minh. Đặt $\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}(x;y) \\ \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{AB'}(x';y') \end{cases}$ thì $OM = OM' = r (r > 0)$, góc $(OM, OM') = \alpha$ và đặt góc $(Ox; OM) = \varphi$, $\overrightarrow{OM}(x;y)$ suy ra $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$

Theo hệ thức Charles, ta có
$(Ox;OM') = (Ox;OM) + (OM;OM') = \varphi + \alpha$.

Từ đó suy ra $\begin{cases} x' = r\cos(\varphi+\alpha) \\ y' = r\sin(\varphi+\alpha) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = r\cos\varphi\cos\alpha - r\sin\varphi\sin\alpha \\ y' = r\sin\varphi\cos\alpha + r\cos\varphi\sin\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases} \square$$

• **Hệ quả.** Cho tam giác ABC với $\overrightarrow{AB}(x_0;y_0) \neq \vec{0}$.

a) Điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông cân tại A là $\overrightarrow{AC}(y_0;-x_0)$ hoặc $\overrightarrow{AC}(-y_0;x_0)$.

b) Điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là

$$\overrightarrow{AC}\left(\frac{x_0}{2} - \frac{\sqrt{3}y_0}{2}; \frac{\sqrt{3}x_0}{2} + \frac{y_0}{2}\right) \text{ hoặc}$$

$$\overrightarrow{AC}\left(\frac{x_0}{2} + \frac{\sqrt{3}y_0}{2}; -\frac{\sqrt{3}x_0}{2} + \frac{y_0}{2}\right).$$

II – VẬN DỤNG

★**Thí dụ 1. [Khối D-2011].** *Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(1;0)$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt (C) tại hai điểm M, N sao cho tam giác AMN vuông cân tại A.*

Lời giải. Do vai trò của M, N như nhau nên ta có thể giả sử góc lượng giác $(AM, AN) = 90^o$.

Gọi $M(x_0;y_0) \in (C) \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 - 2x + 4y - 5 = 0 (1)$.

Theo Tính chất ta có $\overrightarrow{AM}(x_0 - 1; y_0)$
$\Rightarrow \overrightarrow{AN}(-y_0; x_0 - 1) \Rightarrow N(1 - y_0; x_0 - 1)$.

Mà $N \in (C)$ nên

$$(1-y_0)^2 + (x_0-1)^2 - 2(1-y_0) + 4(x_0-1) - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - 9 = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 + 4y_0 - 5 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - y_0 - 1 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x_0 = 2; y_0 = 1 \\ &x_0 = -2; y_0 = -3. \end{aligned}\right.$$

• Nếu $x_0 = 2, y_0 = 1$ thì $M(2; 1)$, $N(0; 1)$. Từ đó phương trình $\Delta: y = 1$.

• Nếu $x_0 = -2, y_0 = -3$ thì $M(-2; -3)$, $N(4; -3)$. Từ đó phương trình $\Delta: y = -3$.

Vậy Δ có phương trình $y = 1$ hoặc $y = -3$. $\square$

★Thí dụ 2. [Khối B-2007] *Trong mặt phẳng Oxy, cho A (2;2) và hai đường thẳng*

$\Delta_1: x+y-2=0;\quad \Delta_2: x+y-8=0.$

Tìm toạ độ của hai điểm B, C lần lượt thuộc Δ_1, Δ_2 sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Lời giải. Giả sử $B(x_0;y_0)$. Do $B\in\Delta_1$ nên

$$x_0+y_0-2=0 \quad (1)$$

Ta có $\overrightarrow{AB}(x_0-2;y_0-2)$. Theo hệ quả, điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông cân tại A là $\overrightarrow{AC}(y_0-2;2-x_0)$ hoặc $\overrightarrow{AC}(2-y_0;x_0-2)$. Tức là $C(y_0;4-x_0)$ hoặc $C(4-y_0;x_0)$.

• Nếu $C(y_0;4-x_0)$, mà $C\in\Delta_2$ thì

$$y_0+4-x_0-8=0 \Leftrightarrow -x_0+y_0-4=0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $x_0=1;\ y_0=3$. Do đó $B(-1;3), C(3;5)$.

• Nếu $C(4-y_0;x_0)$, mà $C\in\Delta_2$ thì $4-y_0+x_0-8=0$

$$\Leftrightarrow x_0-y_0-4=0 \quad (3)$$

Từ (1) và (3) suy ra $x_0=13; y_0=-1$. Do đó $B(3;-1), C(5;3)$.

Vậy $B(-1;\ 3)$ và $C(3;\ 5)$ hoặc B(3; −1) và C(5; 3). ❐

★Thí dụ 3. [Khối D-2009] *Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C): $(x-1)^2+y^2=1$. Gọi I là tâm của đường tròn (C). Xác định tọa độ của điểm M thuộc (C) sao cho $\widehat{IMO}=30^o$.*

Lời giải. Đường tròn (C) có tâm I (1; 0), bán kính bằng 1. Dễ thấy điểm O thuộc đường tròn (C). Tam giác OIM cân tại I nên $\widehat{IMO}=30^o \Leftrightarrow \widehat{MIO}=120^o$. Do $\overrightarrow{IO}(-1;0)$ nên

$$\overrightarrow{IM}\left(-\cos120^o;-\sin120^o\right)=\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt3}{2}\right) \text{ hoặc}$$

$$\overrightarrow{IM}\left(-\cos(-120^o);-\sin(-120^o)\right)=\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt3}{2}\right).$$

Suy ra $M\left(\frac{3}{2};-\frac{\sqrt3}{2}\right)$ hoặc $M\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt3}{2}\right)$. ❐

★Thí dụ 4. *Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2-6x-2y+6=0$ và đường thẳng d: $x-y=0$. Tìm toạ độ của hai điểm A, B thuộc d và hai điểm E, D thuộc (C) sao cho tứ giác ABED là hình vuông.*

Lời giải. Ta có $(C):(x-3)^2+(y-1)^2=4$.

Do A, B thuộc d nên $A(a;\ a)$, $B(b;$ b) $(a\neq b)$ suy ra $\overrightarrow{AB}(b-a;b-a)$.

Do vai trò của A, B như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $\overrightarrow{AB}$ quay 90^o trở thành $\overrightarrow{AD}$.

Từ đó suy ra $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AD}(a-b;b-a)$. Do đó $D(2a-b;b);E(a;2b-a)$.

Mà D, E thuộc đường tròn (C) nên ta có

$$\begin{cases}(2a-b-2)^2+(b-1)^2=4\\(a-3)^2+(2b-a-1)^2=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=4\\(a-3)^2+(2b-a-1)^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=3;b=1\\a=\frac{9}{5};b=\frac{11}{5}.\end{array}\right.$$

Vậy $A(3;3),B(1;1),E(3;-1),D(7;1)$ hoặc

$$A\left(\frac{9}{5};\frac{9}{5}\right),B\left(\frac{11}{5},\frac{11}{5}\right);E\left(\frac{9}{5};\frac{13}{5}\right),D\left(\frac{7}{5};\frac{11}{5}\right). ❐$$

★Thí dụ 5. *Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm A(1; 1). Tìm điểm B thuộc đường thẳng d : y = 3 và điểm C thuộc trục hoành sao cho tam giác ABC đều.*

Lời giải. Do điểm B thuộc đường thẳng (d) nên ta giả sử $B(x_0;3)\Rightarrow\overrightarrow{AB}(x_0-1;2)$.

Mặt khác, theo hệ quả điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là

$$\overrightarrow{AC}\left(\frac{x_0-1}{2}-\sqrt3;\frac{\sqrt3(x_0-1)}{2}+1\right) \text{ hoặc}$$

$$\overrightarrow{AC}\left(\frac{x_0-1}{2}+\sqrt3;-\frac{\sqrt3(x_0-1)}{2}+1\right).$$

Suy ra $C\left(\frac{x_0+1}{2}-\sqrt3;\frac{\sqrt3(x_0-1)}{2}+2\right)$ hoặc

(Xem tiếp trang 30)

ỨNG DỤNG... (tiếp trang 15)

$C\left(\dfrac{x_0+1}{2}+\sqrt{3};-\dfrac{\sqrt{3}(x_0-1)}{2}+2\right)$.

• Với $C\left(\dfrac{x_0+1}{2}-\sqrt{3};\dfrac{\sqrt{3}(x_0-1)}{2}+2\right)$ thì do $C\in Ox$ nên $\dfrac{\sqrt{3}(x_0-1)}{2}+2=0 \Leftrightarrow x_0=\dfrac{-4}{\sqrt{3}}+1$.

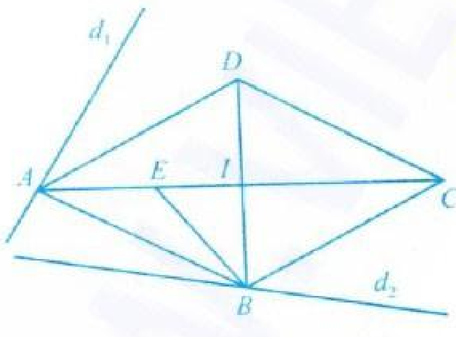
Từ đó $B\left(\dfrac{-4}{\sqrt{3}}+1;3\right), C\left(1-\dfrac{5}{\sqrt{3}};0\right)$.

• Với $C\left(\dfrac{x_0+1}{2}+\sqrt{3};-\dfrac{\sqrt{3}(x_0-1)}{2}+2\right)$ thì do $C\in Ox$ nên $\dfrac{\sqrt{3}(x_0-1)}{2}+2=0 \Leftrightarrow x_0=\dfrac{4}{\sqrt{3}}+1$.

Từ đó $B\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}}+1;3\right), C\left(1+\dfrac{5}{\sqrt{3}};0\right)$. ❐

★Thí dụ 6. *Trong hệ trục toạ độ Oxy, cho hình thoi ABCD có tâm I (1; 0) và AC = 2BD. Hai điểm A, B lần lượt thuộc hai đường thẳng $d_1: x-2y-3=0$; và $d_2: x+y+3=0$. Tìm toạ độ các điểm A, B, C, D.*

Lời giải. Gọi E là trung điểm của AI. Khi đó ta có tam giác BEI vuông cân tại I. Giả sử $B(x_0;y_0)$. Do B thuộc d_2 nên $x_0+y_0+3=0$ (1)



Ta có $\overrightarrow{IB}(x_0-1;y_0)$. Theo hệ quả, điều kiện cần và đủ để tam giác BEI vuông cân tại I là $\overrightarrow{IE}(-y_0;x_0-1)$ hoặc $\overrightarrow{IE}(y_0;1-x_0)$.

• Với $\overrightarrow{IE}(-y_0;x_0-1)$ thì $\overrightarrow{IA}(-2y_0;2x_0-2)$, suy ra $A(1-2y_0;2x_0-2)$. Do A thuộc (d_1) nên

$1-2y_0-2(2x_0-2)-3=0 \Leftrightarrow -2x_0-y_0+1=0$ (2)

Từ (1) và (2) tìm được $x_0=4; y_0=-7$. Do đó $A(15; 6); B(4; -7); C(-13; -6); D(-2; 7)$.

• Với $\overrightarrow{IE}(y_0;1-x_0)$ thì $\overrightarrow{IA}(2y_0;2-2x_0)$, suy ra $A(1+2y_0;2-2x_0)$. Do $A\in d_1$ nên

$1+2y_0-2(2-2x_0)-3=0 \Leftrightarrow 2x_0+y_0-3=0$ (3)

Từ (1) và (3) tìm được $x_0=6$, $y_0=-9$. Do đó $A(-17;-10), B(6;-9), C(19;10), D(-4;9)$. ❐

BÀI TẬP

Bài 1. [Khối A-2005] Cho hai đường thẳng $d_1: x-y=0$ và $d_2: 2x+y-1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$, biết rằng A, C lần lượt thuộc d_1, d_2 và B, D thuộc trục hoành.

Bài 2. Cho điểm $A(1; 2)$, $H(4; -1)$ là chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC. Tìm toạ độ của hai đỉnh B, C, biết rằng $\tan B=2$; và góc $\widehat{BAC}=45^o$.

Bài 3. Cho đường thẳng $d: x-y=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2+4x+2y-4=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$, biết rằng A, C thuộc trục tung và hai điểm B, D lần lượt thuộc d và (C).

Bài 4. Cho hai đường thẳng $d_1: x-y-1=0$; $d_2: x-y-5=0$ và điểm $A(2;0)$. Tìm toạ độ của hai điểm B, C lần lượt thuộc hai đường thẳng d_1, d_2 sao cho tam giác ABC vuông tại A và góc $\widehat{ABC}=30^o$.

Bài 5. Cho hai đường thẳng $d_1: x+y-2=0$; $d_2: 2x-y-3=0$ và điểm $A(1; -2)$. Tìm toạ độ của hai điểm B, C lần lượt thuộc hai đường thẳng d_1, d_2 trong các trường hợp sau:

a) Tam giác ABC vuông cân tại A;

b) Tam giác ABC vuông cân tại B;

c) Tam giác ABC có $\widehat{BAC}=45^o$ và $AB=2AC$.

Bài 6 [Khối B-2002]. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I\left(\dfrac{1}{2};0\right)$, phương trình $(AB): x-2y+2=0$ và $AB=2AD$. Tìm toạ độ các đỉnh A, B, C, D; biết rằng A có hoành độ âm.

Bài 7 [Khối B-2003]. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, $M(1; -1)$ là trung điểm của BC. Điểm $G\left(\dfrac{2}{3};0\right)$ là trọng tâm của tam giác ABC. Tìm toạ độ của các điểm A, B, C.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/423. (Lớp 6).
Tìm số có năm chữ số khác nhau $\overline{abcde}$, biết rằng $\overline{abcd} = (5e+1)^2$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T2/423. (Lớp 7). Tìm tất cả các số nguyên dương *x, y, z* thỏa mãn $x+3=2^y$ và $3x+1=4^z$.

TẠ VĂN ĐỨC
(GV THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc)

Bài T3/423. Tìm chữ số tận cùng của
$$S = 1^2 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^n + \ldots + 2012^{2012}.$$

LƯU VĂN NGÂN
(GV THPT chuyên Bắc Ninh)

Bài T4/423. Cho hàm số *f* thỏa mãn
$$f\left(1+\frac{\sqrt{2}}{x}\right) = \frac{(1+2011)x^2 + 2\sqrt{2}.x + 2}{x^2},$$
xác định với mọi *x* khác 0.

Tính $f\left(\sqrt{2012-\sqrt{2011}}\right)$.

VŨ DUY ĐĨNH
(GV THCS Phú Thái, Kim Thành, Hải Dương)

Bài T5/423. Cho tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn (*O*). Tiếp tuyến với đường tròn (*O*) tại *B* và *C* cắt nhau tại *T*. Đường thẳng qua *T* và song song với *BC* cắt *AB* và *AC* tương ứng tại B_1 và C_1. Chứng minh rằng $\widehat{B_1OC_1}$ là góc nhọn.

LÊ VIẾT ÂN
(SV lớp Toán 2B, ĐHSP Huế)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/423. Dựng ra phía ngoài tam giác *ABC* các tam giác đều ABC_1, BCA_1, CAB_1 và dựng vào phía trong tam giác *ABC* các tam giác đều ABC_2, BCA_2, CAB_2. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC_1, BCA_1, CAB_1 và gọi G_4, G_5, G_6 lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC_2, BCA_2 và CAB_2. Chứng minh rằng trọng tâm tam giác $G_1G_2G_3$ trùng với trọng tâm tam giác $G_4G_5G_6$.

PHẠM XUÂN THI
(GV khoa Cơ bản, Trường Sỹ quan Lục quân 2, Đồng Nai)

Bài T7/423. Giải phương trình
$$3^{3^x} + 3^x = \log_3(2^x + x) + 2^x + 3^{2^x+x}.$$

TRIỆU VĂN HƯNG
(GV THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, Hưng Yên)

Bài T8/423. Giả sử *A, B, C* là ba góc của một tam giác nhọn. Chứng minh rằng
$$\sqrt{\frac{\cos A\cos B}{\cos C}} + \sqrt{\frac{\cos B\cos C}{\cos A}} + \sqrt{\frac{\cos C\cos A}{\cos B}} > 2.$$

TRẦN TUẤN ANH
(TP. Hồ Chí Minh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/423. Tìm số nguyên dương *n* lớn nhất ($n \geq 3$) sao cho tồn tại một dãy các số nguyên dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thỏa mãn điều kiện
$$a_{k+1} + 1 = \frac{a_k^2 + 1}{a_{k-1} + 1},\ k \in \{2, 3, \ldots, n-1\}.$$

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T10/423. Cho *p* là số nguyên tố lẻ, *n* là số nguyên dương sao cho các số $p-1$, p, n, $n+1$ từng đôi một nguyên tố cùng nhau. Tìm các số nguyên dương *x, y* thỏa mãn
$$x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 2 = y^{n+1}.$$

HỒ SỸ HÙNG
(GV THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, Nghệ An)

Bài T11/423. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases}\sqrt{5x^2+2xy+2y^2} + \sqrt{2x^2+2xy+5y^2} = 3(x+y)\\ \sqrt{2x+y+1} + 2\sqrt[3]{7x+12y+8} = 2xy+y+5.\end{cases}$$

NGUYỄN TIẾN TIẾN
(GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình)

Bài T12/423. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), I là tâm đường tròn nội tiếp. AI, BI, CI theo thứ tự cắt lại đường tròn (O) tại A', B', C'; $A'C'$, $A'B'$ theo thứ tự cắt BC tại M, N; $B'A'$, $B'C'$ theo thứ tự cắt CA tại P, Q; $C'B'$, $C'A$ theo thứ tự cắt AB tại R, S. Chứng minh rằng $\frac{2}{3}S_{ABC} \le S_{MNPQRS} \le \frac{2}{3}S_{A'B'C'}$.

NGUYỄN MINH HÀ
(*GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội*)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/423. Điện năng từ một trạm phát điện được đưa đến một khu tái định cư bằng đường dây truyền tải một pha. Cho biết nếu điện áp tại đầu truyền đi tăng từ U lên $2U$ thì số hộ dân được trạm cung cấp đủ điện năng từ 120 lên 144. Cho rằng chỉ tính đến hao phí trên đường dây, công suất tiêu thụ điện của các hộ dân đều như nhau, công suất của trạm phát không đổi và hệ số công suất trong các trường hợp đều bằng nhau. Nếu điện áp truyền đi là $4U$ thì trạm phát này cung cấp đủ điện năng cho bao nhiêu hộ dân?

NGUYỄN QUANG HẬU
(*Hà Nội*)

Bài L2/423. Ba ngôi sao giống nhau, có cùng khối lượng M đặt ở ba đỉnh của một tam giác đều, cạnh d. Hỏi chúng phải chuyển động với tốc độ bằng bao nhiêu để cả ba cùng quay do tác dụng của các lực hấp dẫn lẫn nhau, trên một quỹ đạo tròn ngoại tiếp với tam giác mà vẫn giữ cho tam giác được đều?

NGUYỄN VĂN THUẬN
(*GV ĐHSP Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

T1/423. (For 6th grade). Find all numbers $\overline{abcde}$, where all five digits are distinct and $\overline{abcd} = (5e+1)^2$.

T2/423. (For 7th grade). Find all positive integers x, y, z such that $x+3=2^y$ và $3x+1=4^z$.

T3/423. Find the last digit of the sum

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^n + \ldots + 2012^{2012}.$$

T4/423. Given a function f such that

$$f\left(1+\frac{\sqrt{2}}{x}\right) = \frac{(1+2011)x^2+2\sqrt{2x}+2}{x^2},$$

for all nonzero x. Determine $f\left(\sqrt{2012-\sqrt{2011}}\right)$.

T5/423. Let ABC be a triangle inscribed in the circle (O). The tangents of (O) at B and C meet at T. The line passing through T and parallel to BC cuts AB and AC respectively at B_1 and C_1. Prove that $\widehat{B_1OC_1}$ is an acute angle.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/423. On the outside of triangle ABC, construct equilateral triangles ABC_1, BCA_1, CAB_1; and inside of ABC, construct equilateral triangles ABC_2, BCA_2, CAB_2. Let G_1, G_2, G_3 be respectively the centroids of triangles ABC_1, BCA_1, CAB_1; and let G_4, G_5, G_6 be respectively the centroids of triangles ABC_2, BCA_2 and CAB_2. Prove that the centroids of triangle $G_1G_2G_3$ and of triangle $G_4G_5G_6$ coincide.

T7/423. Solve the equation

$$3^{3^x} + 3^x = \log_3(2^x + x) + 2^x + 3^{2^x+x}.$$

T8/423. Let A, B, C be the three angles of an acute triangle. Prove the inequality

$$\sqrt{\frac{\cos A\cos B}{\cos C}} + \sqrt{\frac{\cos B\cos C}{\cos A}} + \sqrt{\frac{\cos C\cos A}{\cos B}} > 2.$$

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/423. Find the largest positive integer n ($n \ge 3$) such that there exists a sequence of positive integers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ satisfying the condition $a_{k+1}+1 = \frac{a_k^2+1}{a_{k-1}+1}$, $k \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$.

(*Xem tiếp trang 27*)

★Bài T1/419. *Cho* $A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{50^2}$ *(gồm 50 số hạng) và* $B = \frac{165}{101}$.

So sánh A và B.

Lời giải. Với mỗi số nguyên dương n, ta có

$\frac{1}{n^2} = \frac{4}{4n^2} < \frac{4}{4n^2-1}$ và

$$\frac{4}{4n^2-1} = \frac{4}{(2n-1)(2n+1)} = 2\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Từ đó $\frac{1}{n^2} < 2\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$.

Cho n bằng 3, 4, ..., 50 ta được

$$C = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{49^2} + \frac{1}{50^2}$$

$$< 2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{97} - \frac{1}{99} + \frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right)$$

suy ra $C < 2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{101}\right)$.

Từ đó $A - 1 = \frac{1}{4} + C < \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{2}{101}$

hay $A - 1 < \frac{1273}{2020}$ (1)

Ta thấy $B - 1 = \frac{64}{101} = \frac{1280}{2020}$ (2)

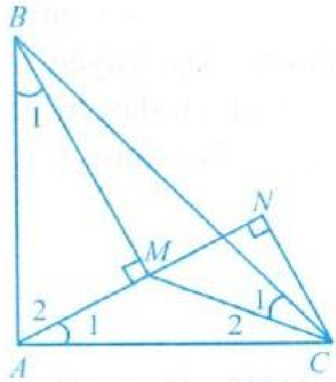
Từ (1) và (2) suy ra $A < B$. ❐

➤**Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Thị Duyên, Nguyễn Thị Mỹ Duyên B, Lê Thị Thùy Linh, Phùng Thảo Ly, Nguyễn Thị Thúy Hòa, Phạm Thị Thúy Nga, Phạm Thị Minh Châu,* 6A1, *Đỗ Thị Thu Phương, Đoàn Tuấn Minh, Lê Thu Trang, Nguyễn Tuấn Anh, Phạm Thị Thu Hà, Nguyễn Thị Thanh, Nguyễn Hương Quỳnh,* 6A3, *Phan Thị Nguyệt,* 6A5, THCS Yên Lạc; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Tấn Phúc, Võ Quang Phú Thời,* 6A, THCS Hành Phước, *Nguyễn Tấn Trung,* 6H, THCS Huỳnh Thúc Kháng, Nghĩa Hành.

VIỆT HẢI

★Bài T2/419. *Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Giả sử trong tam giác có điểm M thỏa mãn điều kiện* $\widehat{MBA} = \widehat{MAC} = \widehat{MCB}$. *Tính* $MA : MB : MC$.



Lời giải. Hạ $CN \perp AM$ (N thuộc tia AM). Ta có $\widehat{NMC} = \widehat{A_1} + \widehat{C_2}$ $= \widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 45^\circ$ suy ra tam giác MNC vuông cân tại N, do đó $MN = CN$.

Mặt khác
$\widehat{B_1} + \widehat{A_2} = \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BMA} = 90^\circ$.

Xét hai tam giác vuông ABM và CAN có $AB = AC$, $\widehat{B_1} = \widehat{A_1}$, do đó $\Delta ABM = \Delta CAN$ (cạnh huyền - góc nhọn), suy ra $MB = AN$, $MA = CN$. Vậy

$MA = MN = \frac{1}{2}AN \Rightarrow MA = \frac{1}{2}MB$ (1)

Áp dụng định lí Pythagore trong tam giác vuông cân MNC ta có $MC^2 = 2MN^2 \Rightarrow$ $MC = MN\sqrt{2}$ hay $MC = MA\sqrt{2}$.

Từ (1) và (2) suy ra $MA : MB = 1 : 2$, $MA : MC = 1 : \sqrt{2}$. Vậy $MA : MB : MC = 1 : 2 : \sqrt{2}$. ❐

➤**Nhận xét.** Tất cả các bạn tham gia giải đều cho kết quả đúng. Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn, hình vẽ chính xác:

Phú Thọ: *Tạ Phương Mai, Lê Thị Minh Châu, Nguyễn Đức Thuận, Nguyễn Phương Linh A*, 7A3, THCS Lâm Thao, *Kiều Thế Hưng*, 7C, THCS TTr. Sông Thao, Cẩm Khê; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Thúy Hòa*, 6A1, *Nguyễn Thị Thêm, Hoàng Thị Minh Anh*, 7A1, THCS Yên Lạc; **Nam Định:** *Phạm Quang Huy*, 7A4, THCS Trần Đăng Ninh, TP.Nam Định; **Hải Phòng:** *Đồng Phương Linh*, 7A1, THCS Hồng Bàng; **Thanh Hóa:** *Lê Văn Duẩn, Lê Quang Dũng, Hoàng Bảo Long*, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, *Phạm Tuấn Linh*, 7B, THCS Chu Văn An, Nga Sơn; **Hà Tĩnh:** *Đặng Trần Đức Anh*, 7C, THCS Liên Hương, Vũ Quang, *Lê Thị Phương Tâm, Trần Thị Hiền, Mai Thị Hải Anh, Ngô Việt Hoàng*, 7B, *Nguyễn Thị Vân Anh, Phan Thị Mỹ Thành*, 7C, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thị Mỹ Hạnh, Đặng Lưu Việt Quý, Cao Thị Thúy Điểm, Nguyễn Thị Hạ Vy, Nguyễn Thúy Phượng*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, *Trần Thị Mỹ Ninh*,7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài T3/419. *Tìm giá trị nhỏ nhất của các số tự nhiên a, b, c thỏa mãn*

$$a+(a+1)+(a+2)+...+(a+6)$$
$$=b+(b+1)+(b+2)+...+(b+8)$$
$$=c+(c+1)+(c+2)+...+(c+10).$$

Lời giải. Ta có

$$a+(a+1)+(a+2)+...+(a+6)=7a+21.$$
$$b+(b+1)+(b+2)+...+(b+8)=9b+36$$
$$c+(c+1)+(c+2)+...+(c+10)=11b+55.$$

Do đó $7a+21=9b+36=11b+55=k$ ($k\in\mathbb{N}$, $k>55$). Suy ra $a=\frac{k}{7}-3; b=\frac{k}{9}-4; c=\frac{k}{11}-5.$

Để $a, b, c\in\mathbb{N}$ và a, b, c có giá trị nhỏ nhất thì $k=$ BCNN $(7;9;11)=693$.

Vậy $a=96$, $b=73$, $c=58$. ❐

➤**Nhận xét.** Bài toán không khó nhưng hay, sử dụng tính chất chia hết. Tất cả các bạn tham gia giải đều giải đúng bài này. Các bạn có lời giải ngắn gọn là:

Phú Thọ: *Nguyễn Đức Mậu, Phạm Ngọc Hải*, 8A3, THCS Lâm Thao, *Phan Đức Nhật Minh*, 8C, THCS Sông Thao, Cẩm Khê; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Việt Học*, 9A, THCS HànThuyên, Lương Tài; **Nam Định:** *Phạm Quang Huy*, 7A4, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định; **Hà Tĩnh:** *Trần Đức Mạnh*, 9B, THCS Trung Đồng, Can Lộc; **Quảng Ngãi:** *Võ Quang Phú Thời*, 6A, *Nguyễn Thị Hạ Vy, Vũ Thị Thi*, 7A, *Đặng Lưu Việt Quý, Nguyễn Thị Hạnh, Phạm Thị Mỹ Hằng, Phạm Thiên Trang, Nguyễn Thúy Phượng*, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, *Trần Thị Mỹ Ninh*, 8A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T4/419. *Giải phương trình*

$$6(x-1)\sqrt{x+1}+(x^2+2)\left(\sqrt{x-1}-3\right)=x(x^2+2) \quad (1)$$

Lời giải. Điều kiện xác định $x\geq 1$. Khi $x=1$ thì vế trái của (1) bằng 0, vế phải của (1) bằng 3. Vậy $x=1$ không là nghiệm của PT (1). Xét $x>1$ thì

PT (1) $\Leftrightarrow 6(x-1)\sqrt{x+1}=(x^2+2)(x-\sqrt{x-1}+3)$ (2)

Nhận thấy $x+3-4\sqrt{x-1}=(x-1)+4-2\sqrt{4(x-1)}$

$=\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2\geq 0$, suy ra

$$x-\sqrt{x-1}+3\geq 3\sqrt{x-1} \quad (3)$$

$$x^2+2-2\sqrt{x^2-1}=(x^2-1)-2\sqrt{x^2-1}+1+2$$
$$=\left(\sqrt{x^2-1}-1\right)^2+2>0.$$

Suy ra $x^2+2>2\sqrt{x^2-1}$ (4)

Nhân theo vế của (3) và (4) ta có

$$(x^2+2)(x-\sqrt{x-1}+3)>6\sqrt{(x^2-1)}\sqrt{x-1}$$

hay $(x^2+2)(x-\sqrt{x-1}+3)>6(x-1)\sqrt{x+1}$ (3)

Ta thấy (3) mâu thẫn với (2).

Vậy phương trình (1) vô nghiệm. ❐

➤**Nhận xét.** Ngoài cách giải trên có thể sử dụng BĐT Cauchy để đánh giá từng vế cũng cho kết quả như trên. Bài này rất nhiều bạn tham gia giải và đều cho kết quả đúng. Tuyên dương các bạn sau có lời giải gọn, chặt chẽ: **Vĩnh Phúc:** *Chu Mai Anh*, 7A1, *Nguyễn Thị Nga*, 8A, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ:** *Nguyễn Đình Mậu*, 8A3, *Nguyễn Hồng Quân*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Thanh Hóa:** *Lê Quang Dũng*, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thị Trà*, 8D, THCS Liên Hương, Vũ Quang, *Nguyễn Mai Lê*, 9B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Hoàng Linh*, 9A6, THCS chuyên Trần Đại Nghĩa.

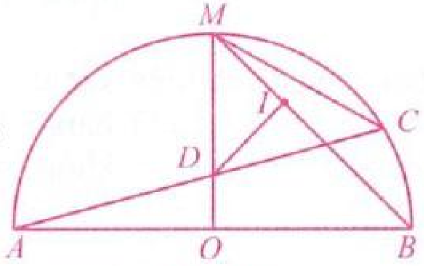
PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★Bài T5/419. *Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. M là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{AB}$, C là một điểm trên nửa đường tròn, AC cắt MO tại D. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MDC luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi C di động trên nửa đường tròn.*

Lời giải. (Theo bạn *Chu Văn Trang*, lớp 9A, THCS Yên Phong, **Bắc Ninh**)

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MDC, xảy ra hai khả năng

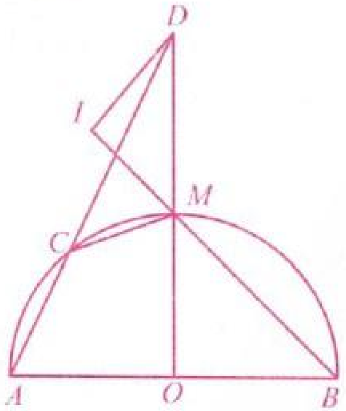
• Điểm $C \in \overset{\frown}{MB}$ (h.1). Khi đó $\widehat{MID} = 2.\widehat{MCD} = 90^o$. Lại có $IM = ID$ nên tam giác MID vuông cân tại I, do đó



Hình 1

$\widehat{DMI} = 45^o$, hay $\widehat{OMI} = 45^o = \widehat{OMB}$. Suy ra M, I, B thẳng hàng nên $I \in BM$ cố định.

• Điểm $C \in \overset{\frown}{MA}$ (h.2). Tương tự, ta có $\widehat{MID} = 2.\widehat{MCD} = 90^o$. Mà $IM = ID$ nên tam giác MID vuông cân tại I, do đó $\widehat{DMI} = 45^o \Rightarrow \widehat{IMO} = 135^o$. Mặt khác, có $\widehat{OMB} = 45^o$ nên



Hình 2

$\widehat{IMB} = \widehat{IMO} + \widehat{OMB} = 180^o$. Suy ra ba điểm I, M, B thẳng hàng, hay $I \in BM$ cố định.

Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MDC luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi C di động trên nửa đường tròn. ❒

➢**Nhận xét.** Ngoài cách sử dụng tính chất góc ở tâm, các bạn có thể chứng minh dựa vào các tứ giác nội tiếp nhưng hơi dài. Một số bạn còn thiếu trường hợp điểm $C \in \overset{\frown}{MA}$. Ngoài bạn *Trang*, xin nêu tên các bạn có lời giải gọn và chặt chẽ hơn cả:

Phú Thọ: *Nguyễn Hồng Quân*, 9A3, THCS Lâm Thao; *Bùi Tuấn Nam*, 9A, THCS Lương Lỗ, Thanh Ba; **Vĩnh Phúc:** *Trương Thị Hoài Thu*, 8A, THCS Yên Lạc; **Hà Nội:** *Vũ Hoàng Minh*, 9A10, THCS Giảng Võ; **Hà Nam:** *Nguyễn Hồng Quân*, 9A2, THCS Trần Phú, TP. Phủ Lý; **Hà Tĩnh:** *Đặng Trần Đức Anh*, 7C, THCS Liên Hương, Vũ Quang; **TP. Hồ Chí Minh:** *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 8A3, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Bình Định:** *Võ Thế Duy*, 9A1, THCS T.Tr Phú Mỹ.

NGUYỄN THỊ THANH

★Bài T6/419. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$6(a^3+b^3+c^3) \geq 18abc + \left(\sqrt[3]{a(b-c)^2} + \sqrt[3]{b(c-a)^2} + \sqrt[3]{c(a-b)^2}\right)^3.$$

Lời giải. Ta có đẳng thức quen thuộc

$$a^3+b^3+c^3-3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right) \quad (1)$$

Trường hợp 1. Nếu $a = b = c$ thì BĐT cần chứng minh trở thành đẳng thức.

Trường hợp 2. Nếu a, b, c không đồng thời bằng nhau, áp dụng BĐT Cauchy cho ba số dương và sử dụng (1), ta có

$$\frac{1}{3} + \frac{a}{a+b+c} + \frac{(b-c)^2}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a(b-c)^2}{6(a^3+b^3+c^3-3abc)}};$$

$$\frac{1}{3} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{(c-a)^2}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b(c-a)^2}{6(a^3+b^3+c^3-3abc)}};$$

$$\frac{1}{3} + \frac{c}{a+b+c} + \frac{(a-b)^2}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{c(a-b)^2}{6(a^3+b^3+c^3-3abc)}}.$$

Cộng theo vế ba BĐT trên ta được

$$3 \geq 3\frac{\sqrt[3]{a(b-c)^2} + \sqrt[3]{b(c-a)^2} + \sqrt[3]{c(a-b)^2}}{\sqrt[3]{6(a^3+b^3+c^3-3abc)}}.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ (trái giả sử). Vậy trong trường hợp này đẳng thức không xảy ra. ❒

➢**Nhận xét.** 1) Có khá đông các bạn tham gia giải bài toán này và đa số đều cho lời giải đúng. Nhiều bạn khi xét hai trường hợp như trên không chỉ rõ trong trường hợp 2 đẳng thức không xảy ra.

2) Một số bạn nhận ra BĐT cần chứng minh là hệ quả trực tiếp của BĐT Holder cho ba bộ ba số không âm:

$$\prod_{k=1}^{3}\left(a_k^3+b_k^3+c_k^3\right) \geq \left(a_1a_2a_3+b_1b_2b_3+c_1c_2c_3\right)^3.$$

Đẳng thức xảy ra khi các bộ số (a_k ; b_k ; c_k) tương ứng tỉ lệ.

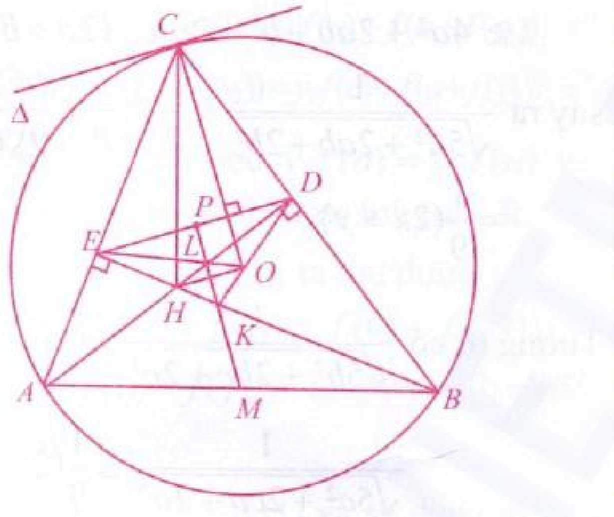
3) Do BĐT Holder trên có nhiều cách tổng quát, vì vậy bài toán trên cũng có thể tổng quát bằng nhiều cách khác nhau, xin dành cho bạn đọc. Các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Vũ Thị Quỳnh Anh*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** *Nguyễn Trung Hiếu*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; *Nguyễn Xuân Tùng*, 10A1, THPT Dương Quảng Hàm; **Thái Bình:** *Nguyễn Hải Linh Chi*, 10 Toán 1, THPT chuyên Thái Bình; **Hà Nội:** *Nguyễn Duy Khánh*, 11A1, THPT Ba Vì; **Nghệ An:** *Nguyễn Anh Tuấn*, 11A1, THPT Nguyễn Xuân Ôn, Diễn Châu; *Hồ Thị Thuý Nga*, 10A1, *Trần Trung Hiếu*, 11A1, THPT Thái Hoà; **Đồng Nai:** *Phạm Văn Minh*, 11Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hoà.

NGUYỄN THANH HỒNG

★Bài T7/419. *Cho tam giác nhọn ABC không cân. Gọi H, O lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; D, E lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh A, B của tam giác ABC. Các đường thẳng OD và BE cắt nhau tại K, các đường thẳng OE và AD cắt nhau tại L. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Chứng minh rằng ba điểm K, L, M thẳng hàng khi và chỉ khi bốn điểm C, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.*

Lời giải.



Sử dụng định lí Menelaus cho tam giác HAB và ba điểm K, L, M, ta thấy K, L, M thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\frac{\overline{KB}}{\overline{KH}}.\frac{\overline{LH}}{\overline{LA}}.\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=1 \Leftrightarrow \frac{\overline{KB}}{\overline{KH}}=-\frac{\overline{LA}}{\overline{LH}} \quad (1)$$

Mặc khác, dễ thấy

$$\frac{KB}{KH}=\frac{S_{BOD}}{S_{HOD}} \quad (2) \qquad \frac{LA}{LH}=\frac{S_{AOE}}{S_{HOE}} \quad (3)$$

Gọi R là bán kính đường tròn (O), ta có

$$S_{AOE}=\frac{1}{2}AE.d(O;AE)=\frac{1}{2}AB.\cos A.R.\cos B$$
$$=\frac{1}{2}R.AB.\cos A.\cos B.$$

Tương tự có $S_{BOD}=\dfrac{1}{2}R.AB.\cos A.\cos B.$

Suy ra $S_{AOE}=S_{BOD}$. Từ (2) và (3) ta thấy hệ thức (1) xảy ra khi và chỉ khi $S_{HOD}=S_{HOE}$, khi và chỉ khi $OH//DE$ hoặc OH đi qua trung điểm của DE. Qua C kẻ tiếp tuyến Δ với đường tròn (O) thì dễ thấy rằng $\Delta//DE$. Mà $CO\perp\Delta$ nên $CO\perp DE$. Gọi P là trung điểm của DE.

Nếu OH đi qua trung điểm của DE thì lúc này P là trung điểm của đoạn thẳng HO, do đó tứ giác $EHDO$ là hình bình hành. Suy ra $OD//EH$ và $EO//HD$. Điều này trái với giả thiết OD cắt BE và OE cắt AD.

Vậy ba điểm K, L, M thẳng hàng khi và chỉ khi $OH//DE \Leftrightarrow CO\perp OH$, nghĩa là khi và chỉ khi bốn điểm C, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn (đường kính CH) (đpcm). ❐

➤**Nhận xét.** 1) Bài **T7/419** là một phát biểu khác của Bài 3 trong Kì thi Olympic Quốc gia Serbia năm 2011. Ngoài cách giải trên, một số bạn sử dụng khái niệm *đường thẳng Gauss* cho *tứ giác toàn phần* (hình gồm tứ giác $HLOK$ có $HL\cap OK=D$ và $OL\cap HK=E$) kết hợp với tính chất của *hàng điểm điều hòa, chùm điều hòa* cũng đi đến kết quả của đề bài.

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Hoàng Đỗ Kiên*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, *Dương Mạnh Cường*, 12T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hòa Bình:** *Đặng Hữu Hiếu*, 11 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Thái Bình:** *Nguyễn Hải Linh Chi, Trần Hồng Quân*, 10 Toán 1, *Trần Trung Hiếu*, 11 Toán 2, THPT chuyên Thái Bình; **Thừa Thiên - Huế:** *Nguyễn Quốc Hùng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Quảng Nam:** *Trần Thị Phương Thảo*, 10A6, THPT Quế Sơn; **Lâm Đồng:** *Nguyễn Vũ Trung Quân*, 11 Toán 1, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Hữu Nhân, Nguyễn Thành Thi*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP.Cao Lãnh; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Phạm Quốc Đạt*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Long An:** *Nguyễn Hữu Minh Nguyệt*, 10T, THPT chuyên Long An; **Bến Tre:** *Lê Thị Minh Thảo*,11Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Đồng Nai:** *Phạm Văn Minh*, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh.

HỒ QUANG VINH

★Bài T8/419. *Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (n, k) thỏa mãn điều kiện* $C_{3n}^{n}=3^n.n^k$

(với $C_p^m=\dfrac{p!}{m!(p-m)!}$; $0\le m\le p, p\ne 0, m, p\in\mathbb{N}$*).*

Lời giải. Ta có điều kiện

$$C_{3n}^{n}=3^n.n^k \Leftrightarrow \frac{(3n)!}{n!(2n)!}=3^n.n^k$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3n-2)!(3n-1).3n}{2n^2.(n-1)!(2n-1)!} = 3^n.n^k$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3n-2)!}{(n-1)!(2n-1)!} = \frac{2.3^{n-1}.n^{k+1}}{3n-1}.$$

Vì $\frac{(3n-2)!}{(n-1)!(2n-1)!} = C_{3n-2}^{n-1} \in \mathbb{Z}$ nên

$$2.3^{n-1}.n^{k+1} \vdots (3n-1) \quad (1)$$

Lại có $(3, 3n-1) = 1$ và $(n, 3n-1) = 1$ nên từ (1) suy ra $2 \vdots (3n-1) \Rightarrow 3n-1 \le 2 \Rightarrow n \le 1$. Do đó $n = 1$. Ta được $C_{3n}^n = 3^n.n^k \Leftrightarrow C_3^1 = 3.1^k$.

Đẳng thức này thỏa mãn với mọi số k nguyên dương. Vậy tất cả các cặp số (n, k) phải tìm là $(1, k)$ với k là số nguyên dương bất kì. ❒

➤**Nhận xét.** Có thể giải bài toán bằng cách khác như sau : Với $n = 1$, ta có kết quả như trên ; với $n \ge 2$, bằng phương pháp quy nạp, chứng minh rằng C_{3n}^n không chia hết cho 3^n ; bài toán không thỏa mãn.

Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Thái Bình: *Trần Hồng Quân*, 10 Toán 1, THPT chuyên Thái Bình; **Nghệ An**: *Trương Tuấn Anh*, 12A12, THPT Diễn Châu II; *Trần Trung Hiếu*, 11A1, THPT Thái Hòa, TX. Thái Hòa; **Vĩnh Phúc**: *Hoàng Đỗ Kiên, Trần Đình Hùng*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên**: *Nguyễn Thị Việt Hà*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa**: *Trịnh Hà Hằng*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn.

NGUYỄN ANH DŨNG

★**Bài T9/419.** *Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện*

$$15\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) = 10\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right) + 2012.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}} + \frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}} + \frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}.$$

Lời giải. Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{y}, z = \frac{1}{c}$.

Tất cả các bất đẳng thức được sử dụng trong lời giải đều là BĐT Cauchy. Từ giả thiết ta có

$$15(x^2+y^2+z^2) = 5(2xy+2yz+2zx) + 2012$$
$$\le 5(x^2+y^2+y^2+z^2+z^2+x^2) + 2012$$
$$\Rightarrow 5(x^2+y^2+z^2) \le 2012.$$

Do đó $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$
$$\le x^2+y^2+z^2+x^2+y^2+y^2+z^2+z^2+x^2$$
$$= 3(x^2+y^2+z^2) \le 3.\frac{2012}{5}.$$

Với các số thực dương p, q, r bất kì, ta có

$$(p+q+r)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)$$
$$= 3 + \left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right) + \left(\frac{q}{r}+\frac{r}{q}\right) + \left(\frac{r}{p}+\frac{p}{r}\right) \ge 3 + 3.2 = 9$$

suy ra $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} \ge \frac{9}{p+q+r}$.

Ta có $5a^2+2ab+2b^2 = 4a^2+2ab+b^2+(a^2+b^2)$
$$\ge 4a^2+2ab+b^2+2ab = (2a+b)^2,$$

suy ra $\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}} \le \frac{1}{2a+b} \le \frac{1}{9}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$
$$= \frac{1}{9}(2x+y).$$

Tương tự có $\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}} \le \frac{1}{9}(2y+z)$,

$$\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}} \le \frac{1}{9}(2z+x).$$

Kết hợp với (1) ta được

$$P \le \frac{1}{9}(2x+y+2y+z+2z+x) = \frac{x+y+z}{3}$$
$$\le \frac{1}{3}\sqrt{3.\frac{2012}{5}} = \sqrt{\frac{2012}{15}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \sqrt{\frac{15}{2012}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\sqrt{\frac{2012}{15}}$. ❒

➤**Nhận xét.** Bài toán bất đẳng thức trên thuộc dạng cơ bản, nhưng không quá khó. Các bạn học sinh THCS sau có lời giải đúng:

Phú Thọ: *Nguyễn Tiến Dũng, Phạm Ngọc Hải, Nguyễn Huy Tuyển*, 8A3, THCS Lâm Thao; *Nguyễn Nhật*

Phương, 9B, THCS Phong Châu; **Bắc Ninh**: *Chu Văn Trang*, 9A, THCS Yên Phong; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Bảo Trâm*, 8E, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Hà Nam:** *Đặng Quang Huy*, 9A, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; **Hà Tĩnh:** *Phạm Trung Dũng*, 9E, THCS Bắc Hồng Lĩnh; **Bình Định:** *Võ Thế Duy*, 9A1, THCS TTr. Phù Mỹ.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★Bài T10/419. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho với mọi $x,y\in\mathbb{R}$ ta có*

$$f(xf(y))+f(f(x)+f(y))=yf(x)+f(x+f(y))\quad(1)$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Nhận xét rằng $f(x)\equiv 0$ thỏa mãn bài toán.

Xét trường hợp $f\not\equiv 0$. Khi đó tồn tại $a\in\mathbb{R}$ để $f(a)\neq 0$. Giả sử với $y_1,y_2\in\mathbb{R}$, ta có $f(y_1)=f(y_2)$. Từ (1) cho $x=a$ và y lần lượt bởi y_1 và y_2 ta được

$$f(af(y_1))+f(f(a)+f(y_1))=y_1f(a)+f(a+f(y_1))\quad(2)$$

và $f(af(y_2))+f(f(a)+f(y_2))=y_2f(a)+f(a+f(y_2))\quad(3)$

Từ (2) và (3), ta được $y_1f(a)=y_2f(a)$ nên $y_1=y_2$. Vậy hàm số f là đơn ánh trên $\mathbb{R}$.

Thay $x=1,y=0$ vào (1), ta thu được

$$f(0)+f(f(0)+f(1))=f(0)+f(f(1))$$

$$\Leftrightarrow f(f(0)+f(1))=f(f(1))\Leftrightarrow f(0)+f(1)=f(1)$$

$$\Leftrightarrow f(0)=0.$$

Tiếp tục thay $y=0$ vào (1) và sử dụng $f(0)=0$, ta thu được

$$f(xf(0))+f(f(x)+f(0))=0.f(x)+f(x+f(0))$$

$$\Leftrightarrow f(f(x))=f(x)\Leftrightarrow f(x)=x.$$

Thử lại, ta thấy hàm số $f(x)=x$ thỏa mãn điều kiện bài ra.

Kết luận. Vậy các hàm số cần tìm là $f(x)\equiv 0$ và $f(x)=x$. ☐

➢**Nhận xét.** Đây là dạng toán quen thuộc về phương trình hàm nên có nhiều lời giải gửi đến Tòa soạn, các lời giải đều theo cách đã trình bày ở trên.

Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Văn Cao*, 10A1, THPT Sáng Sơn, *Hoàng Đỗ Kiên, Vũ Thị Quỳnh Anh, Phạm Lan Hương*, 11A1, *Dương Phước Thị*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Văn Công*, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hà Nội:** *Hà Dương Giang*, 10A2, THPT chuyên KHTN Hà Nội, *Phạm Ngọc Lâm*, 11A1, THPT Liên Hà, Đông Anh; **Hòa Bình:** *Đặng Hữu Hiếu*, 11T, THPT Hoàng Văn Thụ; **Hưng Yên:** *Đào Việt Anh*, 11T, *Nguyễn Thị Việt Hà*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình:** *Bùi Đình Hiếu*, 11A1, THPT Quỳnh Côi, *Nguyễn Hải Linh Chi*, 10T1, THPT chuyên Thái Bình; **Hải Phòng:** *Vũ Đức Anh*, 11T, THPT chuyên Trần Phú; **Nghệ An:** *Trương Tuấn Anh, Hồ Bá Đức, Chu Tự Tài*, 11A12, THPT Diễn Châu II, *Nguyễn Võ Linh*, 10A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Hà Tĩnh:** *Võ Tá Hoàng*, 11B1, THPT Nghèn, Can Lộc, *Nguyễn Mậu Thành*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Phùng Thanh Dũng, Nguyễn Hồng Minh*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bến Tre:** *Lê Thị Minh Phúc*, 11T, THPT chuyên Bến Tre; **Đồng Nai:** *Phạm Văn Minh*, 11T, THPT chuyên Lương Thế Vinh, TP. Biên Hòa; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Hữu Nhân*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Lâm Đồng:** *Nguyễn Vũ Trung Quân*, 11T1, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Phú Yên:** *Lê Nhật Thăng*, 11T, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Quảng Bình:** *Trần Quang Toản*, 11T, THPT chuyên Quảng Bình.

NGUYỄN VĂN MẬU

★Bài T11/419. *Trên đoạn $[a\ ;\ b]$, ta lấy k điểm phân biệt $x_1, x_2, ..., x_k$. Gọi d_n là tích các khoảng cách từ điểm x_n tới $k-1$ điểm còn lại; $n=1,2,3...,k$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{d_n}$.*

Lời giải. (Theo bạn *Hoàng Đỗ Kiên*, 11A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**).

Xét dãy đa thức Chebyshev $\{T_m(x)\}$ xác định theo công thức truy hồi sau

$$T_0(x)=1, T_1(x)=x, T_{m+2}(x)=2xT_{m+1}(x)-T_m(x).$$

Từ đó dễ thấy $T_m(x)$ có bậc m và $T_m(\cos\varphi)=\cos m\varphi$.

Vậy nếu $x\in[-1;\ 1]$ thì

$$|T_m(x)|=|T_m(\cos\varphi)|=|\cos m\varphi|\le 1\quad(1)$$

và hệ số cao nhất của $T_m(x)$ là 2^{m-1} $(m\ge 1)$.

Đặt $t_n=\dfrac{2x_n-b-a}{b-a}\Leftrightarrow x_n=\dfrac{b-a}{2}(t_n+1)$

$$\Rightarrow |x_n-x_i|=\frac{b-a}{2}|t_n-t_i|\ (i=1,2,...,k)\quad(2)$$

Do $x_n\in[a;b]$ nên $t_i\in[-1;1]$.

Áp dụng công thức khai triển Lagrange cho đa thức $T_{k-1}(x)$ tại k điểm $t_1, t_2, ..., t_k$ ta có

$$T_{k-1}(t)=\sum_{n=1}^{k}T_{k-1}(t_n)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq n}}^{k}\left(\frac{t-t_i}{t_n-t_i}\right).$$

Đồng nhất hệ số của số hạng cao nhất t^{k-1} ta được

$$2^{k-2}=\sum_{n=1}^{k}T_{k-1}(t_n)\frac{1}{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq n}}^{k}(t_n-t_i)}\le\sum_{n=1}^{k}\frac{|T_{k-1}(t_n)|}{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq n}}^{k}|t_n-t_i|}$$

$$\le\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq n}}^{k}|t_n-t_i|}\ \text{(do (1))}\qquad(3)$$

Mặt khác

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{d_n}=\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq n}}^{k}|x_n-x_i|}=\left(\frac{2}{b-a}\right)^{k-1}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq n}}^{n}|t_n-t_i|}\qquad(4)$$

(do (2))

Vậy từ (3) và (4) ta suy ra

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{d_n}\ge\left(\frac{2}{b-a}\right)^{k-1}.2^{k-2}=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{b-a}\right)^{k-1}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $t_n=\cos\frac{n\pi}{k-1}$ với mọi $n=1,...,k-1$, tức là khi $x_n=\frac{b-a}{2}\left(\cos\frac{n\pi}{k-1}+1\right)$. □

➤**Nhận xét.** Bài toán này có ít bạn tham gia giải. Chỉ duy nhất bạn *Kiên* có đáp số đúng. Các bạn còn lại đều đi theo đúng hướng (sử dụng đa thức Chebyshev và công thức nội suy Lagrange) nhưng do không cẩn thận trong tính toán nên dẫn đến đáp số sai.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★**Bài T12/419.** *Cho tam giác ABC và điểm M bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng*

$$\frac{MA}{BC}+\frac{MB}{CA}+\frac{MC}{AB}\ge\frac{BC+CA+AB}{MA+MB+MC}.$$

Lời giải. Để cho đơn giản, nếu không có gì nhầm lẫn, ta dùng các dấu $\sum$, $\prod$ để kí hiệu các tổng và các tích.

Kí hiệu A, B, C là số đo của các góc $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$ và a, b, c là độ dài của các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC.

Bổ đề 1. Cho tam giác ABC và điểm M.

1) Nếu $\max\{A;B;C\}<120^\circ$ thì tồn tại điểm T nằm trong tam giác sao cho $\widehat{BTC}=\widehat{CTA}=\widehat{ATB}=120^\circ$ và $MA+MB+MC$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $M\equiv T$.

2) Nếu $\max\{A;B;C\}\ge120^\circ$ thì

a) Khi $A\ge120^\circ$, $MA+MB+MC$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $M\equiv A$.

b) Khi $B\ge120^\circ$, $MA+MB+MC$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $M\equiv B$.

c) Khi $C\ge120^\circ$, $MA+MB+MC$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $M\equiv C$.

Điểm T nói trong Bổ đề 1 được gọi là *điểm Fermat* của tam giác ABC.

Bổ đề 1 khá quen thuộc, không trình bày phép chứng minh ở đây.

Bổ đề 2. Cho tam giác ABC và điểm M, ta có

$$\left(\sum\frac{MA}{a}\right)^2\ge\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum b^2c^2}.$$

Chứng minh. Với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$ ta có

$$\left(\sum x\overrightarrow{MA}\right)^2=\sum x^2MA^2+2\sum yz\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$$

$$=\sum x^2MA^2+\sum yz\left(MB^2+MC^2-a^2\right)$$

$$=\left(\sum x\right)\left(\sum xMA^2\right)-\sum yza^2.$$

Suy ra $\left(\sum x\right)\left(\sum xMA^2\right)\ge\left(\sum yza^2\right)$.

Từ đó cho $x=\frac{a}{MA};y=\frac{b}{MB};z=\frac{c}{MC}$, suy ra

$$\sum\left(\frac{MB.MC}{bc}\right)\ge1.$$

Tương tự cho $x=\frac{1}{a^2};y=\frac{1}{b^2};z=\frac{1}{c^2}$, ta có

$$\sum\frac{MA^2}{a^2}\ge\frac{\sum a^4}{\sum b^2c^2}.$$

Vậy $\left(\sum\frac{MA}{a}\right)^2=\sum\frac{MA^2}{a^2}+2\sum\frac{MB}{b}.\frac{MC}{c}$

$$\geq \frac{\sum a^4}{\sum b^2c^2}+2=\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum b^2c^2}.$$

Bổ đề 3. Cho tam giác ABC và điểm M, ta có

$$\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum b^2c^2}\geq\frac{\left(\sum a\right)^2}{\left(\sum MA\right)^2}.$$

Chứng minh. Trường hợp 1. $\max\{A;B;C\}<120^\circ$.

Gọi T là *điểm Fermat* của tam giác ABC.

Theo bổ đề 1 ta có $\sum MA\geq\sum TA$ (1)

Đặt $x=TA;y=TB;z=TC$.

Không mất tính tổng quát giả sử $\sum x=1$ (2)

Đặt $\sum yz=m,\prod x=n$. Vì $\widehat{BTC}=\widehat{CTA}=\widehat{ATB}=120^\circ$ nên theo định lí côsin vào tam giác BTC ta có

$a^2=y^2+yz+z^2=\left(\sum x\right)^2-\sum yz-x\sum x=1-m-x.$

Tương tự $b^2=1-m-y;c^2=1-m-z$. Do đó

- $\sum a^2=2-3m.$
- $\sum b^2c^2=\sum(1-m-y)(1-m-z)$

$=3(1-m)^2-2\left(\sum x\right)(1-m)+\sum yz$

$=3(1-m)^2-2(1-m)+m=1-3m+3m^2.$

- $\prod a^2=\prod(1-m-x)$

$=(1-m)^3-\left(\sum x\right)(1-m)^2+\left(\sum yz\right)(1-m)-\prod x$

$=(1-m)^3-(1-m)^2+m(1-m)-n=m^2-m^3-n$

$<m^2-m^3$. Vì $m=\sum yz\leq\frac{1}{3}\left(\sum x\right)^2=\frac{1}{3}$ nên xảy ra

Khả năng 1. $\frac{1}{4}\leq m\leq\frac{1}{3}$. Ta có

$\left(\sum a\right)^2=\sum a^2+2\sum bc\leq 2-3m+2\sqrt{3\sum b^2c^2}$

$=2-3m+2\sqrt{3(1-3m+3m^2)}$

$=2-3m+3.2\sqrt{\frac{1}{3}(1-3m+3m^2)}$

$\leq 2-3m+3\left(\frac{1}{3}+1-3m+3m^2\right)=6-12m+9m^2.$

Vậy $\left(\sum a^2\right)^2-\left(\sum b^2c^2\right)\left(\sum a\right)^2$

$\geq(2-3m)^2-(1-3m+3m^2)(6-12m+9m^2)$

$=-2+18m-54m^2+63m^3-27m^4$

$=(1-3m)(9m^3-18m^2+12m-2)$

$=(1-3m)\left(m^3+2(4m-1)(m-1)^2\right)\geq 0.$

(vì $\frac{1}{4}\leq m\leq\frac{1}{3}$).

Khả năng 2. $0<m<\frac{1}{4}$. Ta có

$\sum bc\leq\sqrt{\sum b^2c^2+2\left(\prod a\right)\left(\sum a\right)}$

$\leq\sqrt{\sum b^2c^2+2\sqrt{\left(\prod a^2\right).3\left(\sum a^2\right)}}$

$<\sqrt{1-3m+3m^2+2\sqrt{(m^2-m^3).3(2-3m)}}$

$=\sqrt{1-3m+3m^2+m.2\sqrt{(3-3m)(2-3m)}}$

$\leq\sqrt{1-3m+3m^2+m(5-6m)}$

$=\sqrt{1(1+2m-3m^2)}\leq\frac{2+2m-3m^2}{2}.$

Do đó $\left(\sum a\right)^2=\sum a^2+2\sum bc$

$<2-3m+2+2m-3m^2=4-m-3m^2.$

Vậy $\left(\sum a^2\right)^2-\left(\sum b^2c^2\right)\left(\sum a\right)^2$

$\geq(2-3m)^2-(1-3m+3m^2)(4-m-3m^2)$

$=m-3m^2-6m^3+9m^4$

$=m(1-3m-6m^2+9m^3)$

$=m(1-4m)\left((1+m-2m^2)+m^3\right)>0$

(vì $0<m<\frac{1}{4}$).

Tóm lại, trong cả hai khả năng, ta đều có $\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum b^2c^2}\geq\left(\sum a\right)^2$. Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum b^2c^2}\geq\frac{\left(\sum a\right)^2}{\left(\sum MA\right)^2}.$$

Trường hợp 2. $\max\{A;B;C\}\geq 120^\circ$.

Không mất tính tổng quát giả sử $A\geq 120^\circ$.

Theo bổ đề 1 ta có $\sum MA\geq b+c$ (3)

Mặt khác, ta có

$$\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}-\frac{\left(a+b+c\right)^2}{\left(b+c\right)^2}$$

$$=\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}-4-\frac{\left(a+b+c\right)^2}{\left(b+c\right)^2}+4$$

$$=\frac{-\left(a^2-(b-c)^2\right)\left((b+c)^2-a^2\right)}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}-\frac{(a-b-c)\left(a+3(b+c)\right)}{(b+c)^2}$$

$$=(b+c-a)\left(\frac{a+3(b+c)}{(b+c)^2}-\frac{\left(a^2-(b-c)^2\right)(a+b+c)}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}\right)$$

$$>(b+c-a)\left(\frac{a+3(b+c)}{(b+c)^2}-\frac{a^2(a+b+c)}{a^2(b^2+c^2)}\right)$$

$$\geq(b+c-a)\left(\frac{a+3(b+c)}{(b+c)^2}-\frac{2(a+b+c)}{(b+c)^2}\right)$$

$$=\left(\frac{b+c-a}{b+c}\right)^2\geq 0.\text{ Vậy }\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum b^2c^2}\geq\frac{\left(\sum a\right)^2}{(b+c)^2}.$$

Kết hợp với (3), suy ra $\dfrac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum b^2c^2}\geq\dfrac{\left(\sum a\right)^2}{\left(\sum MA\right)^2}$.

Tóm lại, trong cả hai khả năng ta đều có $\dfrac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum b^2c^2}\geq\dfrac{\left(\sum a\right)^2}{\left(\sum MA\right)^2}$. Trở lại bài **T12/419**

Từ các bổ đề 2, 3 suy ra $\sum\dfrac{MA}{BC}\geq\dfrac{\sum BC}{\sum MA}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều và M là tâm của nó. ❒

➤**Nhận xét.** Bài toán này khó ít bạn tham gia giải và không bạn nào giải đúng.

NGUYỄN MINH HÀ

★**Bài L1/419.** *Một người bơi thẳng từ điểm A ở cạnh bờ sông đến điểm đối diện B ở bờ bên kia với vận tốc ban đầu v_0 = 2m/s, A cách B một khoảng L = 100 m. Coi dòng nước chảy đều trên mặt sông với vận tốc v_n = 1 m/s. Hỏi người đó bơi qua sông mất bao lâu? Biết rằng vận tốc bơi giảm đều theo khoảng cách và khi đến B thì chỉ còn 1m/s.*

Lời giải. Gọi v_b là vận tốc của người bơi so với dòng nước. Vận tốc so với bờ hướng từ A đến B và có độ lớn $v=\sqrt{v_b^2-v_n^2}=\sqrt{v_b^2-1}$.

Do vận tốc bơi giảm đều theo khoảng cách x nên $v_b=v_0-kx$.

Tại A, khi $x=0$ thì $v_0=2\text{m/s}$.

Tại B, khi x = 100m thì $v_b=0$ nên $k=\dfrac{1}{100}$, do đó $v_b=2-\dfrac{1}{100}x$.

Mặt khác $v=\dfrac{dx}{dt}\Rightarrow dt=\dfrac{dx}{v}$.

Thời gian sang sông $t=\int_0^t dt=\int_0^{100}\dfrac{dx}{\sqrt{\left(2-\frac{x}{100}\right)^2-1}}$.

Áp dụng công thức tính tích phân

$$\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{x^2-m^2}}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-m^2}}{x-\sqrt{x^2-m^2}}\right|\Bigg|_a^b$$

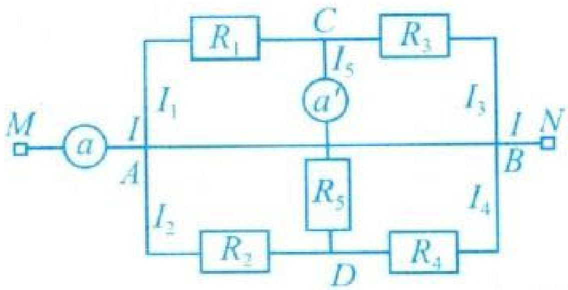
ta sẽ tính được $t=50\ln\left(7+4\sqrt{3}\right)\approx 131,7(\text{s})$. ❒

➤**Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng:

TP Hồ Chí Minh: *Phạm Đức Huy,* 12A7, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Đồng Tháp:** *Huỳnh Thanh Dư,* 11L THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★**Bài L2/419.** *Cho một mạch cầu như hình vẽ.*



Cho biết $R_1=2\Omega$, $R_2=3\Omega$, $R_3=13\Omega$, $R_4=4\Omega$, $R_5=6\Omega$, điện trở của các ampe kế a và a' nhỏ không đáng kể; ampe kế a chỉ I = 0,7A.

1) Hãy xác định các cường độ dòng điện qua các điện trở R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 (R_5 gọi là điện trở cầu) và điện áp U_{AB};

2) Giữ nguyên U_{AB} như câu 1, thay điện trở R_4 bằng điện trở R thì thấy ampe kế a' chỉ số 0 (cầu cân bằng). Hãy xác định R và số chỉ của ampe kế a.

3) Cầu có còn cân bằng không khi thay đổi giá trị của U_{AB} hoặc của I ?

Lời giải. Tại nút A, ta có $I = I_1 + I_2$ (1)

Với vòng kín $ACDA$ thì $U_{AC} + U_{CD} + U_{DA} = 0$

Suy ra $R_1I_1 + R_5I_5 - R_2I_2 = 0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $I_1 = \dfrac{R_2I - R_5I_5}{R_1 + R_2}$ (3)

Tính tương tự với nút B, ta có

$$I_3 = \frac{R_4I + R_5I_5}{R_3 + R_4} \quad (4)$$

Giả sử I_5 đi từ C tới D, tại nút C ta có

$$I_1 - I_3 = I_5 \quad (5)$$

Từ (3), (4) và (5) ta thu được

$$I_5 = \frac{(R_2R_3 - R_1R_4)I}{(R_1+R_2)(R_3+R_4) + R_5(R_1+R_2+R_3+R_4)} \quad (6)$$

Thay giá trị số vào (6) ta được

$$I_5 = \frac{(3.13 - 2.4)0,7}{(2+3)(13+4)+6(2+3+13+4)} = 0,1(\text{A}).$$

Từ (3) ta có $I_1 = \dfrac{3.0,7 - 6.0,1}{2+3} = 0,3(\text{A})$;

$I_2 = I - I_1 = 0,7 - 0,3 = 0,4(\text{A})$;

$I_3 = I_1 - I_5 = 0,3 - 0,1 = 0,2(\text{A})$;

$I_4 = I_2 + I_5 = 0,4 + 0,1 = 0,5(\text{A})$.

Điện áp giữa hai đầu AB bằng

$$U_{AB} = U_{AC} + U_{CB} = R_1I_1 + R_3I_3.$$

Thay giá trị số được $U_{AB} = 2.0,3 + 13.0,2 = 3,2(\text{V})$.

b) Thay điện trở R_4 bằng điện trở R để cầu cân bằng, khi đó mạch trở thành (R_1 nt R_3) // (R_2 nt R). Điều kiện cầu cân bằng:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R} \Rightarrow R = \frac{R_2R_3}{R_1} = \frac{3.13}{2} = 19,5(\Omega) \quad (7)$$

Dễ dàng tính được $R_{AB} = 9(\Omega)$. Số chỉ của ampe kế a là $I = \dfrac{U_{AB}}{R_{AB}} = \dfrac{3,2}{9}(\text{A})$.

c) Trong (7) không có mặt của U_{AB} và của I nên khi thay đổi U_{AB} hoặc I thì I_5 vẫn bằng 0, nghĩa là cầu vẫn cân bằng. ❐

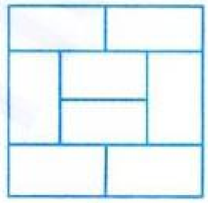
➢**Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Nam Định: *Đặng Phúc Cường*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Đồng Tháp:** *Huỳnh Thanh Dư*, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hưng Yên:** *Nguyễn Hoài Nam*, 10A1, THPT Dương Quảng Hàm; **Nghệ An:** *Trần Trung Hiếu*, 11 A1, THPT Thái Hòa, *Nguyễn Hải Hậu*, 10A1, THPT Nguyễn Xuân Ôn, *Chu Tự Tài*, 11A12, THPT Diễn Châu II, *Nguyễn Văn Thực*, 10A6, *Nguyễn Viết Tuấn*, 10 A5, THPT chuyên Đại học Vinh.

NGUYỄN VĂN THUẬN

SỬA LẠI CHO ĐÚNG

Trên tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 422, tháng 8 năm 2012, xin được chỉnh lại hình vẽ trong bài Xây Kim tự tháp (trang 13) theo hình đúng dưới đây.



Tầng 3

Thành thật xin lỗi bạn đọc.

THTT

PROBLEMS... *(Tiếp trang 17)*

T10/423. Let p be an odd prime number, n is a positive integer so that $p-1, p, n$ and $n+1$ are pairwise coprime. Find all positive integers x, y satisfying

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 2 = y^{n+1}.$$

T11/423. Solve the system of equations

$$\begin{cases} \sqrt{5x^2+2xy+2y^2} + \sqrt{2x^2+2xy+5y^2} = 3(x+y) \\ \sqrt{2x+y+1} + 2\sqrt[3]{7x+12y+8} = 2xy+y+5. \end{cases}$$

T12/423. Let ABC be a triangle inscribed in the circle (O), and let I be its incenter. AI, BI, CI cut the circle (O) at A', B', and C' respectively; $A'C'$, $A'B'$ cut BC at M, N; $B'A'$, $B'C'$ cut CA at P, Q; $C'B'$, $C'A$ cut AB at R, S.

Prove that $\dfrac{2}{3}S_{ABC} \le S_{MNPQRS} \le \dfrac{2}{3}S_{A'B'C'}$.

Translated by LEMINH HA

ĐÁP ÁN CUỘC THI ĐỐ VUI NGÀY HÈ 2012 Đợt 1

LTS. Cuộc thi Đố vui Ngày hè 2012 có sáu bài toán đố vui được đăng trên Tạp chí TH&TT số 419 (5.2012) và số 420 (6.2012). Tòa soạn đã nhận lời giải ba bài đợt thứ nhất của nhiều bạn trên khắp cả nước. Mong các bạn tiếp tục gửi lời giải cho ba bài đợt thứ hai. Hãy chờ đọc đáp án của ba bài đợt thứ hai và danh sách các bạn đoạt giải Cuộc thi Đố vui Ngày hè trên Tạp chí TH&TT số 424 (10.2012). Chúc các bạn may mắn. Dưới đây là đáp án ba bài của đợt thứ nhất.

Bài 1. BÔNG HOA ĐIỂM 10

Câu trả lời. Tìm được.

Gọi số bông hoa điểm 10 của năm bạn lần lượt là a, b, c, d, e với $a > b > c > d > e$ $(a,b,c,d,e \in \mathbb{N}^*)$.

Ta có $a + b + c + d + e = 27$.

Nếu $c \geq 6$ thì $b \geq 7$, $a \geq 8$. Do đó $a + b + c \geq 21$.

Nếu $c \leq 5$ thì $d \leq 4$, $e \leq 3$. Do đó $d + e \leq 7$, mà $a + b + c + d + e = 27$. Suy ra $a + b + c \geq 20$.

Vậy luôn chọn được 3 bạn trong 5 bạn này có tổng số bông hoa điểm 10 không ít hơn 20.

THANH LOAN

Bài 2. TUỔI CỦA CON TRAI NGƯỜI BẠN

Ba số tuổi có tích là 36 và tổng là 13 thì xảy ra hai khả năng sau

(i) 2, 2, 9; (ii) 6, 6, 1.

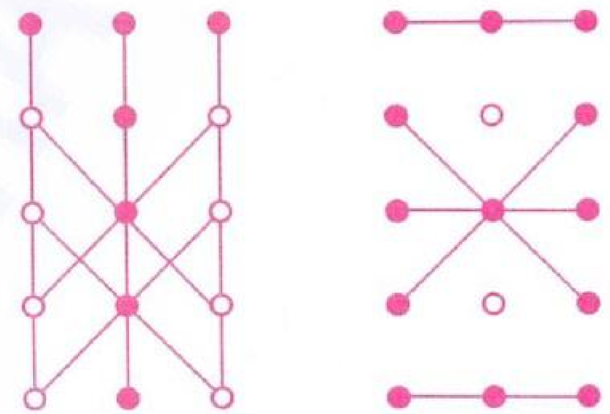
Người khách suy luận ra trong ba đứa con của chủ nhà có hai đứa con sinh đôi.

Khi chủ nhà cho biết thông tin về người con lớn nhất, người đó biết ngay đứa con lớn nhất của chủ nhà là 9 tuổi, hai đứa con sau sinh đôi, đều cùng 2 tuổi.

TUẤN MINH

Bài 3. THÁNG TÁM

Mỗi lần bấm công tắc tương đương với việc kẻ một đường thẳng theo một hàng, hoặc một cột, hoặc một đường thẳng chứa đường chéo của ô vuông nào đó.



Đèn sáng (hoặc tắt) sau khi bấm công tắc một số lẻ (hoặc một số chẵn) lần.

Có nhiều cách giải. Một cách chọn bấm công tắc được chỉ ra trên hình, trong đó mỗi đèn xếp trong hình **T8** ứng với giao của một số lẻ đường thẳng, mỗi đèn còn lại ứng với giao của một số chẵn đường thẳng.

HOÀNG NGUYỄN

Nhận xét. Các bạn sau đây giải đủ cả ba bài và có lời giải gọn, lập luận chặt chẽ.

1. *Vương Quốc Nghĩa*, 10T, THPT chuyên **Bạc Liêu;**
2. *Phan Bá Đạt*, 11/1, THPT Dương Quang Đông, **Trà Vinh**
3. *Phùng Mạnh Hùng*, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**
4. *Vũ Thị Thanh Hân*, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**
5. *Đặng Hữu Hiếu*, 11T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**
6. *Nguyễn Tiến Hoàng Sơn*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bà Rịa - Vũng Tàu.**

THTT

LỜI GIẢI MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Trong giờ bài tập toán, thầy giáo giao cho cả lớp làm một bài tập hình học:

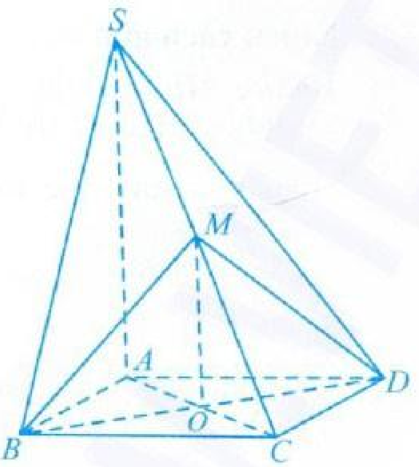
Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là một điểm chuyển động trên đoạn thẳng SC. Xác định vị trí M để diện tích tam giác MBD là nhỏ nhất.

Sau 15 phút, bạn *Nam* đã lên bảng trình bày lời giải bài toán đó như sau:

Lời giải. Gọi $O = AC \cap BD$

Ta có $BD \perp AC$ và $SA \perp BD$ nên $BD \perp (SAC)$.

Mà $MO \in (SAC)$ nên $BD \perp MO$ tại O. Suy ra MO là đường cao của tam giác MBD.



Do $S_{MBD} = \frac{1}{2}BD.MO$ nên S_{MBD} nhỏ nhất khi và chỉ khi MO nhỏ nhất $\Leftrightarrow MO \perp (ABCD) \Leftrightarrow MO // SA$.

Xét tam giác SAC có O là trung điểm của AC, $MO//SA$, suy ra M là trung điểm của đoạn SC.

Vậy diện tích tam giác MBD là nhỏ nhất khi M là trung điểm của SC.

Theo bạn lời giải của bạn *Nam* đã chính xác chưa? Và lời giải của bạn như thế nào?

THÂN VĂN DỰ

(GV THPT Lạng Giang Số 1, Bắc Giang)

Giải đáp bài:

TÌNH HUỐNG VÀ XỬ LÍ

(Đề đăng trên THTT số 420, tháng 6 năm 2012)

Nhận xét rằng, lời giải của ba trong bốn nhóm học sinh đã đề xuất xét thiếu trường hợp. Rõ ràng nếu hàm số đã cho có cực đại, cực tiểu đồng thời $y_{CĐ}.y_{CT} > 0$ thì đồ thị của hàm số cũng chỉ cắt trục hoành tại một điểm. Ta có thể giải lại bài toán này như sau:

Đồ thị hàm số $y = x^3 + mx + 2$ cắt trục hoành tại một điểm trong các trường hợp:

Trường hợp 1. PT $y' = 3x^2 + m = 0$ (*) có một nghiệm kép, hoặc vô nghiệm. Điều này tương đương với $-\frac{m}{3} \le 0 \Leftrightarrow m \ge 0$ (1)

Trường hợp 2. Hàm số $y = x^3 + mx + 2$ có cực đại, cực tiểu và $y_{CĐ}.y_{CT} > 0$. Hàm số trên có cực đại, cực tiểu khi PT (*) có hai nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi $m < 0$ (2)

Lúc này PT (*) có hai nghiệm $x_1 = \sqrt{-\frac{m}{3}}$; $x_2 = -\sqrt{-\frac{m}{3}}$. Ta có

$$y_{CĐ}.y_{CT} = \left(2 + \frac{2m}{3}\sqrt{-\frac{m}{3}}\right)\left(2 - \frac{2m}{3}\sqrt{-\frac{m}{3}}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow 4 + \frac{4m^3}{27} > 0 \Leftrightarrow m > -3 \quad (3)$$

Từ (2) và (3) dẫn đến $-3 < m < 0$.

Kết luận: Với $m > -3$ thì đồ thị hàm số đã cho chỉ cắt trục hoành tại một điểm.

Nhận xét. Các bạn sau có lời bình tốt, gửi bài sớm về Tòa soạn: *Đinh Vân Anh* 12A1, THPT Hồ Xuân Hương, Q. Thanh Xuân, **Hà Nội** ; *Nguyễn Văn Cao*, 10A1, THPT Sáng Sơn, Sông Lô, **Vĩnh Phúc**; *Trần Xuân Thái, 11A2,* THPT A Duy Tiên, **Hà Nam**; *Trần Văn Thắng*, 12A5, THPT Nông Cống 2, **Thanh Hóa**; *Trần Trí Dũng*, 12A1, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy, **Thái Bình**.

HỒNG QUANG

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 423 (9.2012)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

TRONG SỐ NÀY

1 Thư của Chủ tịch nước Trương Tấn Sang gửi ngành Giáo dục nhân dịp khai giảng năm học mới 2012-2013.

2 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary School**
Hoàng Sỹ Luyện - Điều thú vị từ tính chất của hàm số bậc nhất

5 Hướng dẫn giải Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Thừa Thiên - Huế, năm học 2011 – 2012.

6 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An năm học 2012 – 2013.

7 Hướng dẫn giải Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, năm học 2012 – 2013.

9 **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation**
Lê Hồ Quý – Sử dụng đạo hàm để giải một số loại toán.

12 **Nhiều cách giải cho một bài toán**
Hoàng Minh Quân – Về một bài toán hình học trong kì thi IMO 2012.

14 **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**
Hà Văn Thắng – Ứng dụng của phép quay vectơ.

16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/423,.., T12/423, L1/423, L2/423.

18 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 419.

28 Đáp án Cuộc thi Đố vui ngày hè 2012 - Đợt 1.

29 **Tin tức - The News**

31 **Sai lầm ở đâu? Where's Mistake?**

Ảnh Bìa 1: Buổi lễ Khai giảng năm học mới của trường THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Hải Dương.

Biên tập : NGUYỄN PHÚC
Trị sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THƯ
Mĩ thuật : QUỐC HIỆP, THANH LONG
Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH

CÁC ĐƠN VỊ THÀNH VIÊN NXBGD VIỆT NAM
KHU VỰC PHÍA BẮC
TẶNG SÁCH GIÁO KHOA NĂM HỌC 2012-2013

NGƯT *Ngô Trần Ái*, Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam trao tặng Sách giáo khoa mới cho học sinh là con thương binh, liệt sĩ của 28 tỉnh, thành phố khu vực phía Bắc với tổng số trên 30 000 bộ sách, trị giá trên 3 tỉ đồng tại Trung tâm Triển lãm VHNT Việt Nam, Hoa Lư, Hà Nội, vào ngày 28/5/2012,

NGƯT *Ngô Trần Ái*, Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam trao tặng 4 tủ sách cho thư viện trường học của 4 trường ở Nghệ An, Bắc Kạn, Tuyên Quang, Hà Nội trị giá 140 triệu đồng tại Trung tâm Triển lãm VHNT Việt Nam, Hoa Lư, Hà Nội, vào ngày 28/5/2012.

NGƯT *Ngô Trần Ái*, Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam trao tặng 200 bộ quần áo đồng phục cho các em học sinh 4 tỉnh trị giá 40 triệu đồng tại Trung tâm Triển lãm VHNT Việt Nam, Hoa Lư, Hà Nội, vào ngày 28/5/2012.

Ông *Lê Trí Tú*, Chánh Văn phòng NXBGD Việt Nam trao tặng sách cho Làng trẻ em Birla (gồm các em mồ côi cha mẹ và có hoàn cảnh đặc biệt khó khăn thuộc Thủ đô Hà Nội) 88 bộ sách giáo khoa, trị giá khoảng 19 triệu đồng nhân dịp Lễ tổng kết năm học 2011-2012 ngày 29/5/2012.

Thực hiện đạo lí "Uống nước nhớ nguồn", "Đền ơn, đáp nghĩa", "Lá lành đùm lá rách" trong những năm qua Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam triển khai nhiều chương trình đền ơn đáp nghĩa như: Phụng dưỡng mẹ Việt Nam Anh hùng, Xây nhà tình nghĩa; Tặng Sách giáo khoa mới cho học sinh là con Thương binh Liệt sĩ và cho học sinh có hoàn cảnh khó khăn vươn lên trong học tập. Nhân Kỉ niệm 65 năm Ngày Thương binh, Liệt sĩ 27/7/2012 và chuẩn bị cho năm học mới 2012-2013 nhiều đơn vị thành viên NXBGD Việt Nam khu vực phía Bắc đã trao tặng sách giáo khoa cho học sinh là con thương binh, liệt sĩ, học sinh có hoàn cảnh đặc biệt; trao tặng tủ sách tham khảo cho các thư viện trường học với tổng trị giá hơn 5,5 tỉ đồng.

TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG HOÀNG DIỆU

ĐIỂM SÁNG TRONG LÒNG NGƯỜI SÓC TRĂNG

Giám đốc Sở GD- ĐT Sóc Trăng (bên phải) trao Bằng công nhận trường đạt Chuẩn Quốc gia cho Hiệu trưởng nhà trường.

Một buổi đến trường của học sinh Trường THPT Hoàng Diệu.

Trong nhiều năm qua trường THPT Hoàng Diệu, Sóc Trăng đã có sự vươn mình khởi sắc từng ngày của ngôi trường đã có bề dày lịch sử trên 55 năm. Dưới mái trường Hoàng Diệu là sự tiếp nối truyền thống dạy tốt, học tốt của các thế hệ thầy trò nhà trường. Cán bộ quản lí nhà trường là những nhà giáo có tâm, có tài. Đội ngũ giáo viên của nhà trường là một tập thể sư phạm có trình độ đúng chuẩn quy định, đoàn kết, có tinh thần trách nhiệm và giàu lòng yêu thương học sinh, thật sự là tấm gương cho học sinh noi theo. Học sinh của trường chăm ngoan hiếu học. Kết quả giáo dục tỉ lệ học sinh được lên lớp, học sinh khá giỏi, học sinh đỗ tốt nghiệp, học sinh thi đỗ vào Đại học cao đẳng năm sau cao hơn năm trước. Hằng năm nhà trường đều có học sinh đạt giải học sinh giỏi cấp Tỉnh và học sinh giỏi Quốc gia. Biết bao thế hệ học sinh của Trường đã thành đạt, đóng góp sức mình để xây dựng quê hương, đất nước.

Với những thành tích đạt được, nhà trường đã được tặng nhiều Bằng khen của UBND Tỉnh, Bằng khen của Bộ Giáo dục và Đào tạo, Bằng khen của Thủ tướng Chính phủ và Huân chương Lao động hạng Ba của Chủ tịch Nước.

Được sự quan tâm của lãnh đạo các cấp, sự đóng góp về sức lực, trí tuệ của đội ngũ cán bộ giáo viên, công nhân viên, học sinh, sự chăm lo tận tụy của phụ huynh học sinh... Đến nay nhà trường đã được công nhận là Trường chuẩn Quốc gia. Thầy và trò trường Hoàng Diệu hôm nay tiếp nối truyền thống của nhà trường tạo được niềm tin của xã hội, trở thành ngôi trường đẹp nhất trong kí ức, trong tương lai, trong tình cảm của học sinh và phụ huynh Sóc Trăng.

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT09M2

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2012

Giá: 8000 đồng
Tám nghìn đồng