# TOÁN HỌC VÀ CHẤT LÃNG MẠN

N.I. KOVANTXOV


NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

N. I. KOVANTXOV

# TOÁN HỌC VÀ CHẤT LÃNG MẠN

*Người dịch*: NGUYỄN KHẮC ĐĂNG



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
Hà Nội — 1986

Н. И. КОВАНЦОВ

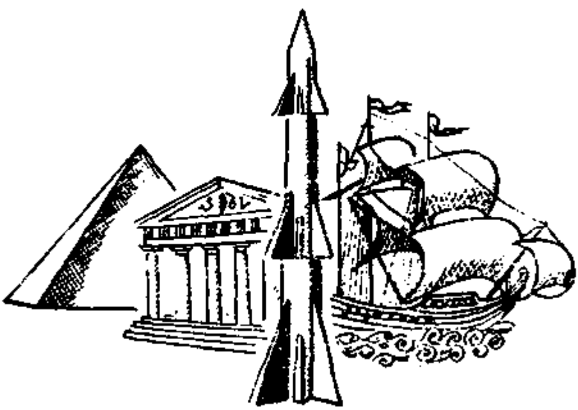
# МАТЕМАТИКА И РОМАНТИКА

Издательское объединение «Вища школа»
Головное издательство
Киев — 1976

# LỜI NÓI ĐẦU

Các bạn thân mến!

Mỗi chúng ta đều học toán từ thời còn thơ ấu. Có bạn học một cách tự giác say mê, có bạn học một cách hững hờ chiếu lệ. Thật ra, nếu các bạn không chỉ học toán trong trường phổ thông, mà cả trong trường chuyên ngành toán lý, thì chắc chắn bạn học toán không phải vì bắt buộc, mà do một sự say mê nội tâm. Nhưng cả với các bạn chỉ học toán trong trường phổ thông, cả với các bạn sau này còn tiếp tục học toán trong các trường chuyên ngành, có phải lúc nào các bạn cũng nhận thức được rõ ràng: cụ thể vì lẽ gì, toán học đã hấp dẫn bạn, hoặc ngược lại, vì lẽ gì, toán học làm bạn phải ngại ngần?



Có thể yêu thích một ngành khoa học vì khả năng kết hợp chặt chẽ với chân lý, vì sức mạnh và vì tính toàn diện của nó. Ngược lại, cũng có thể nuôi dưỡng một sự ác cảm đối với một ngành khoa học do tính khô khan, do sự phức tạp bên ngoài không cần thiết, và do đặc tính thiếu tự nhiên đến vô nguyên có trong cách cấu trúc của nó, ... Nhưng tình yêu hay mối ác cảm này sẽ không có gì khác hơn là sự hời hợt bề ngoài và không bền vững, có một cái gì đó ngẫu nhiên và vô trách nhiệm. nếu có một cái gì đó — có thể gọi là linh hồn của khoa học, khối óc và trí tuệ, vẻ đẹp tâm hồn và sự tinh tế hài hòa của ngành khoa học đó — đã lọt qua mắt bạn. Chúng tôi đã chủ định sử dụng những thuật ngữ tiêu biểu trong khi đánh giá cá tính con người, bởi vì chính khoa học phải thể hiện trước mắt các bạn những phẩm chất toàn vẹn và đầy hấp dẫn như vậy, để các bạn có thể thực sự cảm thấy là ngành khoa học ấy thật đáng yêu.

Quyển sách mỏng giờ đây các bạn đang cầm trên tay cố gắng thể hiện toán học dưới dạng tươi vui, lãng mạn đặc biệt của nó, thể hiện bản chất đặc sắc của toán học hòa hợp với những hình ảnh lo âu, hồi hộp của những người đã từng sáng tạo và đã từng sống vì toán học. Nếu có ai đó trong số các bạn, trước đây đã từng mê say toán học và giờ đây lại thêm yêu toán học thêm, thì điều đó có nghĩa là mục tiêu cuốn sách của chúng tôi đã đạt được. Nếu có những ai đó đã từng không ưa thích toán học, và giờ đây cảm giác bực dọc và hờ hững đối với ngành toán vẫn còn, thì đó cũng chẳng phải là một điều đáng buồn — Toán học hoàn toàn không phải là một đối tượng duy nhất để mọi suy tư của các bạn có thể tập trung vào. Chỉ mong sao các bạn ấy hiểu được điều đó.

## VIỆN SĨ A. Đ. ALECXANĐRÔP VÀ CÁC SINH VIÊN

Mấy năm trước, một cuộc tranh luận thú vị đã xảy ra trên báo « Sự thật Comxômôn ». Nguyên do là thế này. Các sinh viên trường cao đẳng kỹ thuật Maxcova mang tên Baumon, thông qua tờ báo « Sự thật comxômôn », đã gửi tới các sinh viên trường đại học tổng hợp Maxcova lời đề nghị tiến hành cuộc trao đổi xem mỗi người hiện đang nghiên cứu vấn đề gì. « Hãy đến thăm chúng tôi và hãy kể cho chúng tôi biết : các bạn đang suy nghĩ về vấn đề gì — các nhà kỹ thuật tương lai nói như vậy. Còn chúng tôi cũng sẽ đến thăm các bạn, sẽ kể cho các bạn biết : chúng tôi đang quan tâm đến vấn đề gì. Điều này cả chúng tôi, cả các bạn đều sẽ có lợi ».

Các sinh viên trường đại học tổng hợp — các nhà bác học tương lai — đã trả lời lời đề nghị một cách sâu sắc, nghiêm túc : « Chúng tôi, tất nhiên có thể đến, có thể kể và có thể lắng nghe, nhưng vấn đề chính lại là : các bạn hoặc chúng tôi lại cần làm việc này để làm gì ? Chúng ta sẽ có lợi gì trong cuộc trao đổi này ? ».

A. Đ. Alecxanđrôp, một người có học vị cao, tế nhị và có duyên, đã tham gia cuộc thảo luận. « Các bạn thử xem, các nhà thông thái mới thông thái làm sao — ông phát biểu, nhận trả lời các nhà bác học tương lai — Họ luôn muốn tiên đoán, dự tính từ trước. Nếu không có lợi ích vật chất thiết thực trong các cuộc tranh luận, thì chẳng cần tiến hành tranh luận làm gì. Nhưng những trụ cột của chủ nghĩa thực dụng (1) và lợi ích toàn cầu vẫn đứng thẳng». (Có thể là viện sĩ không nói đúng từng từ như vậy, nhưng ý nghĩa của những câu ông nói thì đúng như thế). «Còn tôi, — viện sĩ tiếp tục — tôi không tự hành hạ đầu óc mình bởi câu giải thích: tôi cần sự hiểu biết này khác để làm gì».

*Tôi muốn hiểu biết* — và thế là đủ. Thật đơn giản! Vì rằng đó là nhu cầu sống của tôi, vì rằng nếu không thế, đối với tôi, cuộc sống không là cuộc sống nữa. Tôi muốn hiểu biết, vì rằng tôi không thể không muốn thế».

Thế đấy, dường như đã có thể nhìn ra vấn đề. Hiểu biết, hiểu biết... Biết càng nhiều càng tốt, biết càng sâu càng tốt. Sống sẽ càng thú vị hơn, nếu mỗi ngày lại biết thêm một điều gì mới. Người ta còn nói hoàng đế La Mã Tit cho rằng đã mất một ngày vô ích, nếu ngày hôm đó ông ta không làm được một việc gì tốt lành. Không biết ông ta có thực sự thành một con người tốt đến mức ông ta mong muốn hay không, nhưng đối với chúng ta, một chân lý hoàn toàn tuyệt đối là: đối với con người mới, một ngày bị bỏ phí nếu anh ta không nhận thức được một điều gì mới.

Người ta còn truyền tụng câu nói của Valêri Briuxov là: nếu ông ta may mắn được sống lâu, gấp sáu lần, thì vẫn chưa đủ thỏa đáng hết khát vọng hiểu biết vô bờ mà ông từng ấp ủ. Còn Ottô Iulêvich Smit cũng tự đặt cho mình một chương trình hành động, mà muốn thực hiện đầy đủ, cũng cần đến vài trăm năm. Bệnh tật đã buộc nhà bác học phải loại bỏ nhiều phần trong chương trình học tập, giảm bớt đến mức tối thiểu trong nhiều phần còn lại, tiết kiệm cả thời gian ngủ, nghỉ... Nhưng chẳng lẽ chỉ có một mình Smit như vậy?

---

(1) Một lãnh vực của triết học tư sản, chỉ thừa nhận chân lý là những gì có lợi ích thực tế (phụ lục của tác giả — N.D.)

Vì sao cần phải học tập, cần phải vắt óc suy nghĩ, cần phải tiêu phí bao nhiêu sức lực, khi không cần học, hay học tập ít hơn nhiều, vẫn có thể nhận được đồng lương như vậy, thậm chí còn lớn hơn nữa? Rõ ràng, cuộc sống của những người chỉ biết so sánh bằng đồng tiền, với những người chỉ đánh giá cuộc sống bằng sự hiểu biết toàn vẹn, thật sự khác nhau.

Trong một bài trường ca bất tử của mình, nhà thơ Đăngtơ[1] vĩ đại đã viết:

Ngay từ chính những thời hoang dã,
Khi Trái Đất còn đầy vẻ điêu tàn,
Hãy chỉ rõ ra những cái gì mới mẻ, tân quang,
Để Mặt Trời ngày ngày soi rực sáng.
Hãy suy xét kỹ về cội nguồn con người — cuộc sống.
Con người sinh ra đâu phải giống muôn loài,
Con người sinh ra do lòng dũng cảm tuyệt vời,
Và do những ước mơ ham hiểu biết.

Chẳng cần phải suy nghĩ thêm, lời kêu gọi hoàn toàn hào hiệp, và khả năng tiếp nhận vô tư trong mấy câu thơ này bao hàm những gì. Không, không, tuyệt đối không. Giờ đây, hơn bao giờ hết, khoa học chính là một lực lượng vật chất của xã hội. Việc cân nhắc, đánh giá hiệu quả của những thành tựu khoa học bằng tiền không những không có gì đáng xấu hổ mà còn là cần thiết nữa. Chính ở đây đồng tiền cần thiết để làm cho cuộc sống có thể đầy đủ hơn và đáng yêu hơn. Và những yêu cầu này có thể được thỏa mãn không chỉ thông qua, mà phải trực tiếp, bằng đồng tiền. Chính điều đó đáng quan tâm hơn nhiều. Khi đó, ngành khoa học sẽ trở nên lãng mạn, thi vị và

(1) Còn gọi là Đantê

vĩ đại, như những nóc nhọn của những nhà thờ lớn kiểu gôtich thời trung thế kỷ, đẹp một cách thần thoại, hùng vĩ vươn cao. « Khi từ ngoài xa nhìn vào những nhà thờ lớn kiểu gôtich này — nhà thơ G. Hainơ đã viết trong « Trường học lãng mạn » của mình — những công trình đồ sộ vút cao như thế, nhẹ nhõm như thế, kiều diễm và bền vững, dường như được cắt bằng giấy, dường như có những đường diềm đá hoa, khi đó bạn sẽ cảm thấy một cách mạnh mẽ hơn toàn bộ sức mạnh của thời đại này, thời đại nhuần nhuyễn nghệ thuật sử dụng đá, đến mức mà đối với chúng ta, đá cũng gần như một sức hấp dẫn huyền ảo ».

## NGỤC THẤT NGOÀI BIỂN KHƠI

Anaexagor bị giam vào nhà ngục đúng vào mùa hè... trong năm có cuộc thi đấu Ôlimpic lần thứ nhất. Nhà triết học đã bị lôi cuốn vào cuộc đấu tranh chính trị đê tiện và ngoài ý muốn của mình. Nguyên cớ thật lố bịch: nhà bác học khẳng định rằng Mặt Trời — thiên thể chiếu sáng bàng ngày — không phải là thần Hêliôxơ (1), mà là một quả cầu nóng đỏ to cỡ như bán đảo Pêlôpônnex. Thực ra, nguyên nhân sâu xa lại hoàn toàn khác hẳn. Anacxegor (2) là người bạn và người thầy của Periclơ, nhà chiến lược và vị thủ lĩnh của dân tộc Hy Lạp cổ đại, người có uy quyền vô hạn trong một thời, nhưng đã bắt đầu mất dần quyền lực của mình. Để lật đổ kẻ thù chính trị, người ta không từ bỏ một phương sách gì. Nhà triết học có những biểu lộ thiếu thận trọng ư? Phải đưa ra tòa, phải nhốt vào nhà tù, phải chứng tỏ

---

(1) Xem phần phụ lục (N.D.)

(2) Anaxagoras, nhà triết học Hy Lạp cổ đại, sống khoảng năm 500 đến năm 428 trước công nguyên (N.D.)

rằng tội của ông ta thật đáng treo cổ! Periclơ không thể bàng quan với số phận của người bạn mình. Trong những cạm bẫy đầy lắt léo của những mưu toan chính trị, làm sao tránh khỏi sai lầm, và cuối cùng quyền lực của Periclơ đã bị sụp đổ.

Nhưng trên trái đất, phải chăng có những sức mạnh có thể đàn áp được tinh thần của những người yêu thích tự do? Có thể buộc những nhà tư tưởng phải ngừng suy nghĩ? Sự tư duy luôn tự do, ngay cả giữa quảng trường của thành thị Hy Lạp cổ đại, hay sau những then sắt thô dày của những nhà tù...

Anaxagor đứng bên cửa sổ có chấn song sắt thô dày của phòng giam, nhưng trước mắt ông, những hình ảnh của cả những thời xa xưa, lẫn của những năm tháng rất gần gũi, cứ lần lượt hiện ra, nối tiếp nhau. Chuỗi thời gian vô tận, lạnh lùng, trước đây đã kéo dài như vậy, và giờ đây vẫn tiếp tục trôi qua. Ngày tiếp ngày, năm tiếp năm, thế kỷ này tiếp sau thế kỷ khác... Những tảng đá khô hanh, nứt nẻ, hàng ngàn năm như vẫn rên rỉ dưới ánh mặt trời hung ác, tàn bạo. Và biển cả... Biển rộng vô bờ. Dường như một tấm gương khổng lồ buổi sáng sớm và ngàn vạn tấm gương lấp lánh giữa trưa, những tấm gương ngời sáng và chói lóa với những thảm sáng phản chiếu đặc biệt, mềm mại, lung linh. Những làn sóng xanh, lúc thì thầm tràn lên những lớp cuội sỏi ven bờ, lúc ồn ã đập vỗ và tung bọt trắng xóa trên các tảng đá ngầm đen sẫm... Hôm nay và ngày mai... Và muôn đời sau vẫn thế.

Nhà triết học rời khỏi ô cửa sổ, bước mấy bước trong phòng giam và dừng lại trước một mảnh đá hoa đã được đẽo gọt một cách thô sơ, dùng làm bàn viết tạm. Trên mặt đá hoa cương, bằng những sự phối hợp khác nhau đến kỳ lạ, đã tạo nên những đường tròn với những đa giác nội tiếp, những hình vuông, đoạn thẳng, lưỡi liềm... Anacxagor đăm mắt vào *tập hợp* những hình hình học này đến vài phút, sau đó cầm lấy một mẩu than, lặng lẽ thêm vào đó một vài đường nét...

## NHỮNG BÀI TOÁN LỚN

Người ta kể lại rằng, ngay khi còn nằm trong nhà tù, nhà triết học đã hạn chế tình trạng ngồi không đến khó chịu của mình bằng cách suy nghĩ về bài toán cầu phương hình tròn và những vấn đề liên quan.

Đây là một trong số những bài toán, mà những thế hệ sau này gọi đó là *những bài toán lớn*. Bài toán này, và những bài toán lớn khác, có gì đáng hấp dẫn?

Đã có hàng trăm công trình viết về các bài toán này. Trong phần danh mục tài liệu tham khảo mục đặt ở cuối sách có chỉ ra một vài tác phẩm như thế và chúng tôi xin giới thiệu với các bạn đọc. Giờ đây chúng tôi chỉ xin hạn chế bằng một vài lời chung nhất và trước hết phát biểu các bài toán đó.

*1. Bài toán cầu phương hình tròn*: Hãy xây dựng cạnh một hình vuông có diện tích bằng diện tích của hình tròn đã cho.

*2. Bài toán gấp đôi một khối lập phương*: Hãy dựng cạnh của một khối lập phương có thể tích gấp đôi thể tích của một khối lập phương đã cho.

*3. Bài toán chia ba một góc*: Hãy chia một góc tùy ý cho trước, thành ba phần bằng nhau.

Nhưng cần nói thêm rằng: nếu những bài toán được phát biểu đúng như dưới dạng chúng ta đã nêu ở đây, thì chúng đã không phải là những bài toán lớn — Chúng có thể giải được bằng rất nhiều phương pháp, và nhiều phương pháp như vậy, thậm chí chính người Hy Lạp cổ đại cũng đã biết. Cần phải giải các bài toán nói trên, không phải một cách thuần túy, đơn giản, không có điều kiện gì, mà là khi giải không được sử dụng một dụng cụ nào khác, ngoài compa và thước kẻ.

Vì sao người Hy Lạp cổ đại thích dùng compa và thước kẻ hơn các dụng cụ khác? Chúng ta không thể trả lời câu hỏi này một cách duy nhất và chắc chắn trong một mức độ cần thiết. Có phải compa và thước kẻ là những công cụ đơn giản nhất chăng? Có thể như vậy lắm. Nhưng cũng có thể chỉ ra một số đông các dụng cụ khác cũng đơn giản như compa và thước kẻ, hay cũng gần đơn giản như vậy. Nhờ một số dụng cụ trong tập hợp các dụng cụ này, người ta cũng có thể giải được những bài toán đã nêu.

Chúng ta hãy tạm không trả lời câu hỏi này. Trong các tài liệu tương ứng, có thể tìm thấy những ý đồ giải thích mối thiện cảm khác thường của người Hy Lạp cổ đại đối với compa và thước kẻ. Còn hiện giờ, chúng ta không cần băn khoăn về câu hỏi này. Compa và thước kẻ ư? Ừ thì hãy *giải bằng compa và thước kẻ! Giờ đây,* chúng ta sẽ quan tâm đến những kết quả cuối cùng của sự thiên vị khác thường đến hai dụng cụ đã nêu này, và vì vậy, đến hai đường cong do chúng tạo nên — đường tròn và đường thẳng.

Nếu nói về ý nghĩa của việc giải các bài toán lớn đối với thực tế, thì cần khẳng định rằng: nó chẳng có ý nghĩa gì. Thật vậy, việc giải những bài toán này cụ thể bằng compa và thước kẻ chẳng lẽ có tầm quan trọng đến thế ư? Giải quyết vấn đề này bằng các dụng cụ khác chẳng đơn giản hơn sao? Nhưng dường như chính từ vô vàn những ý đồ giải các bài toán bằng compa và thước kẻ, người ta đã nhận được những kết luận quan trọng đối với toán học — những kết luận quan trọng, có ý nghĩa thực tế trực tiếp đến mức: tầm quan trọng thực tế của chính các bài toán (nếu cố gắng xem xét) thật không đáng kể so với chúng.

Toán học có nét đặc trưng kỳ diệu, khác hẳn các khoa học khác: nếu lấy ra một mắt xích nào trong nó, thì có thể kéo theo toàn bộ dây xích những sự kiện liên quan đến mắt xích đó, kể cả những phần đứng trước, lẫn những phần đứng sau. Điều đó xảy ra là vì toán học phát triển theo những quy luật bên trong của mình, và chính những quy luật này, với mức độ cần thiết cứng nhắc, buộc chúng ta phải nói «B» mỗi lần nhắc đến «A». Và những bài toán lớn đã đóng một vai trò của một mắt xích như vậy trong sự phát triển của toán học. Sau khi nắm được mắt xích này, có thể nhận thấy mối liên hệ dây truyền giữa các bài toán và rất nhiều lãnh vực của cả toán học cũ và mới.

Chúng ta hãy tạm để cho Anacxagor trầm tư suy nghĩ về bài toán cầu phương hình tròn bên tảng đá hoa cương được đục đẽo một cách thô thiển phía sau chấn song sắt thô dày của phòng giam. Theo ý kiến chung, trong số ba bài toán đã kể trên, bài toán này là một trong những bài toán cổ nhất. Những nguyên nhân nào có thể làm nảy sinh bài toán này? Chúng ta không thể trả lời câu hỏi này một cách chắc chắn. Chỉ có thể nêu ra một vài điều dự đoán, có thể xem là hợp lý đến mức độ nào đó.

Trước hết, theo quan điểm lôgic sơ cấp nhất của tư duy toán học, thì bài toán này được đưa ra là hoàn toàn tự nhiên. Thật vậy, một mặt người ta có hình tròn, xem như một hình đầu tiên phải tiếp xúc với khi có chiếc compa trong tay. Mặt khác, còn có một hình hoàn toàn tự nhiên khác — đó là hình vuông. Mỗi hình này đều có diện tích hoàn toàn xác định. Nhưng rõ ràng khi đó không một nhà toán học nào buộc phải khẳng định là giữa hai hình có diện tích như nhau lại hoàn toàn tự nhiên có thể đặt một chiếc cầu nối — biến đổi từ hình này sang hình kia. Vì chỉ có thể thực hiện phép biến đổi bằng compa và thước kẻ, nên lẽ tự nhiên đã nảy sinh ra bài toán : dựng cạnh một hình vuông có diện tích bằng diện tích của hình tròn đã cho, bằng compa và thước kẻ.

Mà cũng có thể hơi khác đi — người ta có thể không trực tiếp suy nghĩ về việc cầu phương hình tròn, mà lại qua nhiều khâu trung gian. Chẳng hạn, từ lâu người ta đã biết đến một điều khẳng định, mà truyền thống lịch sử đã gắn liền với tên tuổi của Pitago : tổng bình phương các cạnh của một tam giác vuông bằng bình phương cạnh huyền của nó. Chân lý này, trước Pitago, từ lâu người Babilon đã từng biết và sử dụng nó trong các tính toán thực tế của mình.

Dễ hiểu rằng định lý Pitago không những chỉ đúng đối với những hình vuông xây dựng trên các cạnh tam giác vuông và cạnh huyền, mà còn đúng cho cả các hình tương tự và tùy ý, được xây dựng trên các đoạn thẳng này. Thật vậy, nếu a, b, c — tương ứng là độ dài của hai cạnh tam giác vuông và cạnh huyền, còn A, B, C là diện tích của các hình tương tự được xây dựng trên các đoạn thẳng đó, thì như đã biết :

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2} = \lambda$$

($\lambda$ biểu thị độ lớn của tỷ số chung).

Từ đó :

$$A + B = \lambda(a^2 + b^2) = \lambda c^2 = C$$

và điều khẳng định được chứng minh.

Đặc biệt, tổng diện tích của hai nửa hình tròn dựng trên hai cạnh góc vuông, bằng diện tích nửa hình tròn xây dựng trên cạnh huyền (các cạnh góc vuông và cạnh huyền là đường kính của các nửa hình tròn tương ứng). Nhưng trong trường hợp này, như đã rõ ràng từ hình 1, tổng diện tích của hai hình lưỡi liềm đã kẻ gạch chéo bằng diện tích của tam giác vuông cũng đã kẻ gạch. Hình 1, đã được dựng nhờ compa và thước kẻ, minh họa các nửa đường tròn được xây dựng trên các cạnh góc vuông và cạnh huyền. Mỗi hình lưỡi liềm là một hình được biết trong toán học dưới tên gọi là hình mặt trăng Hippôcrat. Tên gọi đó có liên quan đến tên tuổi nhà toán học HyLạp cổ đại Hippôcrat vùng Kiôxơ (1), sống ở thế kỷ thứ V trước công nguyên, người đã đặc biệt nghiên cứu tìm tòi diện tích của các hình mặt trăng như vậy.

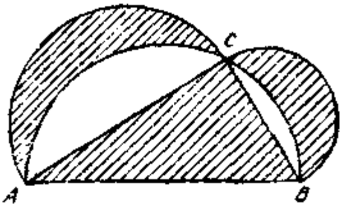
Như thế, nhờ compa và thước kẻ, có thể biến đổi một hình gồm hai hình mặt trăng Hippôcrat, thành một tam giác vuông tương đương với chúng. Sau đó, cũng nhờ compa và thước kẻ, có thể dễ dàng biến đổi thành một hình vuông tương đương với tam giác vuông. Phép dựng tìm cạnh hình vuông có diện tích của tam giác vuông được trình bày trên hình 2. Trên hình này minh họa tam giác ABC có các cạnh góc vuông $BC = a$, $AC = b$. Chúng ta sẽ dựng đoạn $AD = b + \frac{a}{2}$ và xem nó như đường kính, sẽ xây dựng nửa đường tròn. Giả sử nửa đường tròn này cắt cạnh BC hay phần kéo dài của nó ở điểm K. Khi đó — CK là cạnh của hình vuông phải tìm, vì :

$$CK^2 = AC \, . \, CD = b \, . \, \frac{a}{2}$$

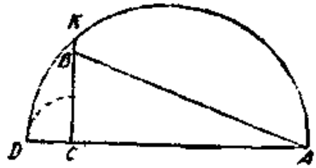
---

(1) Hippokratês, nhà hình học HyLạp cổ đại

Bây giờ, chúng ta sẽ chú ý đến hình 3, trên đó minh họa tam giác vuông ABC, chiều cao CK, và các hình chiếu




Hình 1




Hình 2

AK, KB của các cạnh tam giác vuông trên cạnh huyền. Trên các hình chiếu này và trên cạnh huyền, chúng ta sẽ vẽ *các nửa đường tròn*. Hình có gạch chéo được tạo nên bởi các nửa đường tròn như thế gọi lại mũi giày acbêlon thời HyLạp cổ đại, vì vậy, bài toán tìm diện tích của hình như vậy có tên gọi là *bài toán về acbêlon*. Chúng ta lưu ý rằng acbêlon được tạo bởi các cung của ba đường tròn, vì vậy, theo ý nghĩa đã biết, chúng ta có thể xem như một hình mặt trăng Hippôcrat suy rộng nào đó. Hình 3 cũng có thể thực hiện nhờ compa và thước kẻ. Trên hình vẽ này còn trình bày đường tròn đường kính CK. Giả sử k là diện tích của hình tròn đó, còn a là diện tích của acbêlon. Dễ dàng nhận thấy tính đúng đắn của các đẳng thức sau :

$$k = \pi\left(\frac{CK}{2}\right)^2$$

$$a = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AK + KB}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AK}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{KB}{2}\right)^2$$

$$= \pi\,\frac{AK \,.\, KB}{4}$$

Nhưng: $CK^2 = AK \,.\, KB$

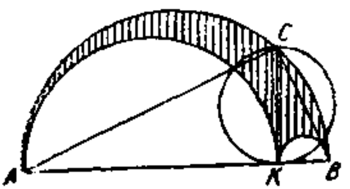
Vì vậy, $a = k$.

Như thế, nhờ compa và thước kẻ, có thể biến đổi một vài hình mặt trăng Hippôcrat suy rộng (achêlon) thành hình tròn tương đương.

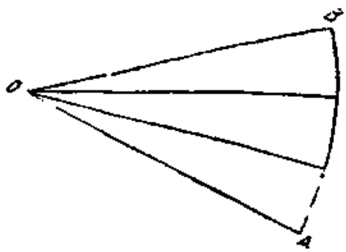
Từ đó, hoàn toàn tự nhiên có thể phát sinh ra ý nghĩ : chẳng lẽ không thể biến đổi hình tròn thành hình vuông tương đương với nó, thông qua các hình mặt trăng Hippôcrat trung gian hay sao? Việc đó đã thực sự xảy ra như thế hay không hoàn toàn đúng như thế, chúng ta không thể nói chắc, nhưng không thể phủ định được là : từ quan điểm lôgic của phép tư duy toán học, xác suất của dãy lập luận tương tự khá lớn.

Vì sao đã nảy sinh ra bài toán chia một góc làm ba phần đều nhau?

Chắc có thể vì đã xuất hiện bài toán chia một đoạn thẳng tùy ý thành một số phần như vậy. Phép chia này được thực hiện khá đơn giản, đến mức người ta có thể dễ dàng thực hiện phép chia không chỉ làm ba, mà thành một số phần tùy ý. Lại bằng con đường rất tự nhiên, những tư duy toán học lại dẫn đến ý nghĩ : có khả năng chuyển phép chia từ đoạn thẳng sang các hình mẫu hình học khác. Trong trường hợp này, khi xem góc như phần tử trung tâm, chúng ta có thể hình dung bài toán chia một góc làm ba phần bằng nhau như bài toán chia một cung tròn, ứng với góc này (hình 4), thành những phần như vậy.



Hình 3



Hình 4

Như thế, chẳng lẽ không thể chia một cung tròn thành ba phần bằng nhau nhờ compa và thước kẻ hay sao?

Bài toán gấp đôi một hình lập phương còn có tên gọi là bài toán Đêlôxơ. Người ta thường liên hệ sự xuất hiện bài toán này với truyền thuyết về bệnh dịch tràn lan trên đảo Đêlôxơ và về điều kiện mà nhà tiên tri trong nhà thờ Apôlôn đã đặt ra cho những người dân trên đảo Đêlôxơ (1) đang cầu nguyện thần linh để họ thoát khỏi tai họa hiểm nghèo.

## HÌNH HỌC VÀ APÔLÔN

... Thần linh thường rất nhân từ, nhưng họ cũng thường hay giận dữ. Cơn giận dữ của họ thường không có giới hạn. Bao nhiêu người bị trừng trị chỉ vì tội lỗi của một người. Mà thường có khi cũng chẳng do có lỗi lầm gì. Lỗi lầm thì không, nhưng sự trừng phạt thì có ...

Ngày lại ngày, những người dân trên đảo Đêlôxơ đang chết dần. Bệnh dịch hạch, như một vị khách không mời mà đến, độc ác rẽ vào từng nhà in dấu bàn tay xương xẩu của mình cho mỗi gia đình.

Biển gầm thét hoài trong những ngày ấy. Bầy chim bay trốn xa. Cả đến những thú dữ cũng trốn sâu trong núi. Những ngọn sóng khổng lồ tung bọt trắng xóa đập vào những núi đá ven bờ, mang theo mùi vị xú uế, mùi vị chết chóc...

Một tai họa — tai họa khủng khiếp đã trùm lên đảo Đêlôxơ. Vì cớ gì mà các thần linh giận dữ? Họ đòi phải trừng phạt nạn nhân nào?

---

(1) Xem phần phụ lục (N.D.)

Vì sao nhà tiên tri vẫn im lặng? Vì sao Piphia (1) vẫn yên ngủ? Ngày nối đêm, hết đêm lại những ngày nặng nề hơn, còn đấng cứu tinh thì vẫn bặt tăm.

Cuối cùng, sau những ngày dài ngủ mãi, nhà tiên tri đã thức tỉnh. Người ngồi ngay ở lối vào cửa động. Từ lòng sâu đáy hang bốc lên mùi ác khí dày đặc, nặng nề. Những sợi tóc dài, bù xù đã lâu không chải của nhà tiên tri phất phơ trước gió, giống như vô vàn con rắn trên đầu Mêđuza Corgôno (2). Do tác động của hơi độc, Piphia rơi vào trạng thái xuất thần và bắt đầu kêu thét lên, ý nghĩa của từng lời cũng chẳng rõ ràng. Chỉ những vị tư tế mới có thể đoán hiểu được ý nghĩa, sau khi đã dò soát lại kỹ càng những cuốn sách cổ.

Lần này, ý nghĩa của những lời nói lắp bắp, không được liên kết chặt chẽ với nhau của Piphia được giải thích như sau: Apôlôn, vị bảo trợ thần thánh của đảo đòi bàn thờ trong thánh đường của mình lên gấp đôi. Trên bàn thờ này, vào những dịp lễ đặc biệt long trọng, vị tư tế cao cấp của nhà thờ sẽ đặt những lễ vật sống.

Mới thoạt nhìn, yêu cầu dường như rất đơn giản. Những người dân Đêlôxo đã kiệt lực vì tai họa nặng nề, lao đến mỏ đá và sau nhiều ngày lao động căng thẳng, từ khối đá granit khổng lồ họ đã đục đẽo thành khối lập phương, to đúng bằng chiếc bàn thờ trong thánh đường.

Sau khi đã quấn dây thừng quanh khối đá, những người dân đã gần kiệt lực làm đai khiêng và khiêng về

(1) Vị tư tế – tiên tri trong đền thờ Apôlôn, thời HyLạp cổ đại.

(2) Một trong ba quái vật cổ cánh trong thần thoại HyLạp cổ đại, khi nhìn vào người hay vật, sẽ biến người hay vật đó thành đá (N.D).

nhà thờ. Với sự nỗ lực phi thường, họ đã nâng khối đá lên bệ thờ cũ và khớp chặt lại. Ước muốn của vị thần đã được thực hiện — thể tích bàn thờ mới lớn đúng gấp đôi thể tích bàn thờ cũ. Những người dân đầy vẻ hân hoan...

Nhưng niềm vui dường như quá sớm. Vị khách nhẫn tâm không mời mà đến, vẫn như trước, lần lượt rẽ vào hết nhà nọ đến nhà kia, và không trung, vẫn như trước, vang lên những tiếng kêu gào, thảm thiết. Sao thế, hỡi vị thần linh? Người còn muốn gì nữa? Người ta chẳng đã làm đúng những gì Người đòi hỏi sao?

Nhà tiên tri già nua lại một lần nữa lê đôi chân khô gầy đến ngồi bên lối vào cửa động thần thánh. Và vẫn như trước, những sợi tóc không chải lại phất phơ trước gió, giống như vô vàn những con rắn của Gorgônơ, và rồi những uế khí lại bốc lên, bao phủ, làm vị tiên tri bị choáng váng. Lại những tiếng kêu thét, những câu lắp bắp, không mạch lạc. Các vị tư tế lại mở những cuốn sách thần cổ của mình và tìm tòi ý nghĩa những lời mà Piphia đã truyền cho vị tiên tri trong cơn mê sảng. Lần này, ý nghĩa của lời tiên tri là thế này: làm bệ thờ, lớn gấp đôi, nhưng không thay đổi hình dạng.

Cũng như lần trước, không chút phân vân, do dự, những người dân Đêlôxơ như vừa thức tỉnh, lại lao vào mỏ đá.

Nhưng lần này, công việc khó khăn hơn lần trước rất nhiều. Một ai đó đề nghị hãy đục một khối lập phương có cạnh lớn đúng gấp hai lần cạnh của bàn thờ trong thánh đường. Nhưng ngay lập tức đề nghị này đã bị chế giễu — thể tích của khối đó sẽ không lớn gấp đôi, mà gấp tám lần khối lập phương đặt trong nhà thờ. Một số thợ đá đề nghị cho đục một khối lập phương có thể tích lớn gần gấp đôi thể tích khối đá mà họ đã đục đẽo xong trong mấy ngày trước. Nhưng đề nghị này cũng bị bác bỏ — thần linh đòi hỏi lớn đúng gấp đôi!

Sau bao nhiêu ý đồ giải bài toán mà không có kết quả, một số người tự nguyện đến Aphinơ để xin ý kiến của các nhà toán học vùng này.

Vài ngày sau, các sứ giả trở về.

Một ngài Hippôcrat nào đó từ đảo Kiôx, lúc đó đang ở Aphinơ, đã đề nghị xác định cạnh của khối lập phương phải tìm như trung bình nhân giữa hai đại lượng — một là cạnh của khối lập phương đang đặt trong đền thờ Apôlôn, còn đại lượng kia — lớn gấp đôi.

Một lần nữa, tiếng búa lại vang lên. Vài ngày sau, một bệ thờ mới đã làm xong. Phải một số người, đông hơn lần trước rất nhiều, mới có thể kéo khối đá mới này đến nhà thờ. Người ta bỏ hai khối đá cũ và dựng khối đá mới lên vị trí cũ.

... Nhưng ngay cả lần này, vị thần nghiệt ngã kia vẫn phụ niềm hy vọng của những người dân Đêlôxơ xấu số. Cái chết từ bàn tay tàn nhẫn kia vẫn tiếp tục giáng xuống những người dân vô tội. Thần Apôlôn có trái tim nghiệt ngã còn cần gì hơn nữa? Chẳng lẽ vật đưa đến còn ít hay sao? Chẳng lẽ họ chưa cố gắng hết sức làm theo những đòi hỏi của Người hay sao?

Lần thứ ba, Piphia gầy héo như cành ôliu hết nhựa sống lại trèo lên và ngồi vào chỗ ở cửa động. Lần thứ ba, những người dân đã kiệt lực của đảo lại đau khổ và hy vọng lắng nghe từng hơi thở của vị tiên tri.

Mệnh lệnh lần này Apôlôn truyền cho, là như sau: khối lập phương đã được dựng lên, nhưng đã dùng những công cụ không được phép. Cần làm khối này, nhưng không được nhờ đến một công cụ nào khác, ngoài compa và thước kẻ. Chỉ có những dụng cụ này mới thật thần linh, tuyệt diệu. Các dụng cụ khác không được phép sử dụng để thực hiện ý muốn của thần linh.

Bóng đêm đen ngòm lại phủ xuống Đêlôxơ...

Dù nỗ lực đến mấy, cả ba bài toán nói trên vẫn chưa giải được. Vì sao vậy? Có phải là chỉ những người bất tài, kém cỏi, mới lao vào những bài toán ấy? Không đúng, thậm chí nhiều nhà toán học lỗi lạc cũng đã từng có ý đồ giải chúng. Nếu vậy, có thể là những bài toán này thuần túy không có lời giải chăng?

Sau này, chúng ta sẽ thấy thực sự là như vậy. Nhưng trong thời cổ đại, người ta mới chỉ có thể dự đoán điều đó, mà người ta chưa biết cách trả lời câu hỏi này: có đúng thế không? Toán học vẫn còn chưa đạt mức một ngành khoa học đủ phát triển để trả lời những vấn đề tương tự.

Những bài toán không thể giải bằng compa và thước kẻ. Nhưng nếu không chỉ giới hạn bởi những dụng cụ đã nêu, thì cũng có thể giải chúng, tức là có thể dựng cạnh hình vuông tương đương với hình tròn, chia một góc tùy ý làm ba phần bằng nhau, xây dựng cạnh của một khối lập phương có thể tích lớn gấp đôi thể tích của khối lập phương cho trước. Lẽ tất nhiên, đó không phải là những lời giải thỏa đáng các yêu cầu đã đặt ra, nhưng rõ ràng đó cũng là một thành quả nhất định trong toán học. Đặc biệt, trong quá trình tìm tòi những lời giải như thế đã phát hiện ra nhiều đường cong đáng chú ý và có một tầm quan trọng đáng kể. Những đường cong này cần hợp nhất với đoạn thẳng và đường tròn, để tìm ra lời giải của các bài toán đã đặt ra trong phần giao tương hỗ của chúng. Dưới đây là một số đường cong như vậy.

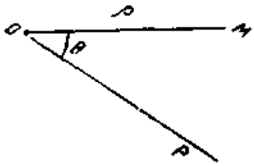
## NHỮNG ĐƯỜNG CONG

Chúng ta hãy tưởng tượng một đĩa hát quay tròn, với tốc độ đều, và dọc theo bán kính của đĩa, một con ruồi cũng đang bò với một tốc độ đều. Thêm nữa, con ruồi bắt đầu bò từ điểm tâm của đĩa. Con ruồi sẽ vẽ nên một đường cong như thế nào? Chúng ta sẽ đặt tên gọi cho đường cong như vậy — *đường xoắn ốc Acsimét*. Với những ai đã làm quen với phương pháp tọa độ, có thể dễ dàng viết ngay phương trình của đường xoắn ốc. Với mục đích này, chúng ta sẽ sử dụng hệ tọa độ cực được xây dựng như sau. Trên mặt phẳng, chọn một nửa đường thẳng định hướng tùy ý p (trục cực). Khi đó, nếu M — là một điểm tùy ý của mặt phẳng, thì chúng ta sẽ đặt tương ứng với nó hai con số — đoạn $OM = \rho \geqslant 0$, được gọi là vectơ bán kính cực, và góc $\theta$, được gọi là góc cực và được quy chiếu ngược chiều kim đồng hồ, từ trục cực đến vectơ bán kính cực. Bộ số $(\rho, \theta)$ được gọi là các tọa độ cực của điểm M, còn sự tương ứng giữa các điểm của mặt phẳng và các tọa độ cực của chúng -- được gọi là hệ tọa độ cực (hình 5). Điểm O gọi là gốc cực của hệ tọa độ.

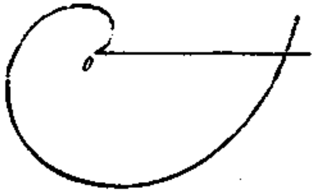
Chúng ta nhận vị trí của bán kính quay tròn, tương ứng với chỗ đứng của con ruồi ở tâm đĩa, làm trục cực. Khi đó, tâm đĩa trùng với gốc cực, còn khoảng cách mà con ruồi bò được dọc theo bán kính (vectơ bán kính cực), sẽ tỉ lệ với góc mà bán kính này quay được (góc cực $\theta$). Vì vậy :

$$\rho = a\theta \qquad (1)$$

trong đó a — là nhân thức tỉ lệ. Đường xoắn ốc có dạng minh họa trên hình 6.



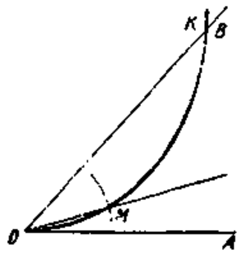

Hình 5




Hình 6

Có thể chỉ ra tập hợp các công cụ vẽ nên đường xoắn ốc. Xin để bạn đọc thử làm một vài công cụ trong số đó.

Nhờ đường xoắn ốc Acsimét, có thể dễ dàng giải bài toán chia ba một góc. Thật vậy, như phương trình (1) đã chỉ rõ, bài toán chia một góc làm ba phần bằng nhau cũng có nghĩa là chia vectơ bán kính cực, tương ứng với góc này làm đúng ngần ấy phần đều nhau. Lời giải được minh họa trên hình 7, trong đó góc cần chia làm các phần đều nhau ký hiệu AOB. Thừa nhận đỉnh

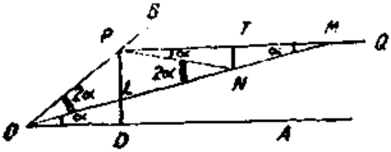



Hình 7

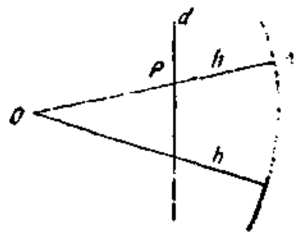
góc O làm gốc cực, cạnh OA làm trục cực của hệ tọa độ cực. Chúng ta vẽ đường xoắn ốc Acsimét được mô tả bằng phương trình (1), với nhân thức tỉ lệ a tùy ý. Giả sử đường xoắn ốc cắt cạnh OB ở điểm K. Nhờ compa và thước kẻ, chúng ta chia đoạn OK làm ba phần đều nhau (bạn đọc cần biết phép chia này được thực hiện như thế nào). Với một phần ba của đoạn đã chỉ ra, chúng ta vẽ một cung tròn có tâm O và tìm giao điểm với đường xoắn ốc (điểm M). Vẽ đường thẳng OM. Góc AOM bằng một phần ba của góc AOB.

Rõ ràng đường xoắn ốc, Acsimét cho phép chia một góc tùy ý cho trước thành không những làm ba phần, mà là một số phần tùy ý, bằng nhau. Lẽ tất nhiên khi đó ngoài compa và thước kẻ, cần phải kể đến cả dụng cụ để vẽ đường xoắn ốc.

Không biết có đúng là trong khi tìm tòi lời giải bài toán chia ba một góc, người ta đã phát hiện ra đường xoắn ốc Acsimét hay không? Nhưng khi kể đến mối




Hình 8




Hình 9

liên hệ của nó với bài toán — mối liên hệ dựa trên cơ sở sự phụ thuộc tỉ lệ thuận giữa các đại lượng độ dài (tuyến tính) và góc — có thể nói hầu như chắc chắn rằng: chính do bài toán chia ba một góc, ý nghĩ về đường xoắn ốc đã nảy sinh.

Bài toán chia ba một góc cũng còn có thể giải được như sau. Giả sử AOB là một góc tùy ý. Trên cạnh OB của nó, lấy một điểm P tùy ý, qua đó vẽ đường thẳng PQ song song với cạnh thứ hai OA của góc, và vẽ đường thẳng PD vuông góc với cạnh này. Qua đỉnh O vẽ một đường thẳng sao cho đoạn LM (L — là giao điểm của đường thẳng này với PD, M — là giao điểm với PQ) bằng 2OP. Góc AOM bằng một phần ba góc AOB (hình 8). Thật vậy, giả sử N là trung điểm của đoạn LM, NT vuông góc với PQ. Khi đó, từ hình 8, dễ hiểu rằng $OP = PN = NM$. Nếu ký hiệu góc AOM qua $\alpha$, thì

<PMO = <MPN = α. Góc ONP của tam giác cân OPN là góc ngoài của tam giác PNM, vì vậy bằng 2α. Điều khẳng định đã được chứng minh.

Bằng compa và thước kẻ, qua điểm O không thể vẽ một đường thẳng sao cho đoạn LM bằng hai lần đoạn OP. Điều này chỉ có thể làm được do một đề nghị bổ sung của Acsimet. Cụ thể trên vạch kẻ của tờ giấy (vào thời Acsimet, đó có thể là vạch kẻ của giấy pecgamin), sẽ đưa các điểm L, M, sao cho đoạn LM bằng hai lần đoạn OP. Sau đó, dịch chuyển vạch kẻ này sao cho nó luôn đi qua điểm O (đỉnh góc), còn điểm L dịch chuyển dọc theo đường thẳng DP. Khi đó, đúng vào thời điểm, khi điểm M nằm trên đường thẳng PQ, vạch kẻ sẽ tách được một phần ba của góc từ góc đã cho.

Thay cho vạch kẻ có 2 điểm đã đánh dấu trên đó, có thể sử dụng đường cong mang tên đường cong Nicômet, tên của nhà toán học Hy Lạp, sống vào thế kỷ thứ II trước công nguyên. Đó là *conxôit Nicômet*. Đường cong này được xây dựng như sau. Chọn một điểm O tùy ý — đó là gốc của conxôit, một đường thẳng d không đi qua gốc đó là nền của cônxôit, và một đoạn dài h — đó là khoảng cách của conxôit. Qua điểm O vẽ những đường thẳng có thể được và từ giao điểm của chúng với nền d, đặt đoạn PM đúng bằng khoảng cách h. Tập hợp các điểm M chính là conxôit (hình 9).

Chúng ta lại quay lại hình 8. Nếu chọn conxôit có cực O, nền PD và khoảng cách gấp đôi đoạn OP, thì conxôit cắt PQ ở điểm M. Đường thẳng OM sẽ tách được một phần ba của góc ACB.

## NHỮNG GIÂY PHÚT CUỐI CÙNG

... Những hình vẽ, hình vẽ, lại những hình vẽ. Hình vẽ ở khắp mọi nơi những nét vẽ nguệch ngoạc bằng bút nhọn trên bàn đá hoa cương bụi bặm, những nét vẽ bằng than trên tường, những hình vẽ bằng phấn trên nền nhà. Trong chiếc áo khitôn trắng đã sờn rách, Acsimét ngồi xuống cạnh bàn và suy nghĩ. Những ngón tay thoáng run rẩy, như trong cơn sốt. Từng giọt mồ hôi hòa lẫn bụi cát, từ bộ mặt mệt nhọc như sắp chết, nhỏ xuống tay, xuống áo, lên những trang giấy pecgamin vứt lung tung trên bàn.

Không, ông không chạy trốn như một kẻ hèn nhát cuối cùng chạy khỏi chiến trường. Tất cả những gì ông có được, từ sức lực, trí thông minh và sự hiểu biết của mình ; ông đều đã cống hiến cho thành phố. Trong những đêm mất ngủ kéo dài, những ngày căng thẳng đến kiệt lực, ông thực sự đã là khối óc và trái tim của toàn khối phòng thủ Xiracudơ. Mỗi lần nhắc đến tên ông, quân La Mã lại kinh hoàng chạy xa khỏi chân tường thành, khiếp sợ loại vũ khí phóng đá đầy chết chóc, hệ thống lật nhào điều khiển bằng dây chuyền tẩm nhựa, hay trận phóng lao và tên như mưa. Chẳng phải là chính ông, không rời khỏi chỗ ngồi, nhưng vẫn đốt cháy hạm thuyền La Mã khi hạm thuyền tiến gần đến tuyến công sự bố phòng mặt biển của thành phố hay sao? Chẳng phải là chính ông, một mình, với hệ thống máy móc do mình sáng chế ra, đã nhấc bổng cả chiến thuyền La Mã lên cao, rồi ném chúng xuống đáy biển sâu đó sao? Nhưng cả thiên tài lẫn sức lực của con người đều có giới hạn. Ông cũng vẫn là một ông lão già nua, không thể trực tiếp cầm gươm chiến đấu. Ông đã đứng vững, kiên trì chiến đấu, chừng nào quân thù còn bao vây ngoài bức tường thành. Nhưng rồi bọn lính đã mau được trang bị mũ trụ có chỏm đã thấp thoáng xuất hiện trên mặt đường cuội sỏi đã nhẵn bóng theo năm tháng. Những người Hy Lạp chiến đấu đến hơi thở cuối cùng. Trong trận quyết chiến giáp lá cà này, Acsimét không tìm được chỗ đứng...

Một làn hơi mát nhẹ nhàng vờn quanh tấm thân nóng nhễ nhại bởi cái oi bức giữa trưa. Những âm thanh đến nhức óc của trận đánh vẫn vang vọng đến, xuyên qua cả tấm màn cửa thô dày che kín lối vào. Những tấm mành kết bằng rơm treo trên hai cửa sổ, tạo nên cảnh tranh tối tranh sáng, nhưng vẫn cho phép nhìn rõ các vật dụng quen thuộc với mắt ông.

Cuộc sống đã tiến dần đến giờ chót — một cuộc sống dài dặc, nặng nề. Suốt 75 năm số mệnh do mình định đoạt, trong những tìm tòi vô hạn, trong sự lao động căng thẳng thường xuyên, trong những chuyến chu du, trong những buổi tranh luận không ngừng ở xưởng thợ, xưởng đóng tàu hay ở công trường khai thác đá, chưa lần nào ông có dịp nhìn nhận lại cuộc sống của chính mình, chưa có dịp để suy nghĩ xem mình đã sống đúng chưa, chưa biết mình có được hưởng chăng dù chỉ một phần khoái lạc của cuộc đời, như cha bề trên Epicurơ đã quên mình và nói về sự hy sinh phải cao cả như vậy.

Ông như một thanh niên mười bảy tuổi đứng trước linh cữu của một nhà tư tưởng vĩ đại, lặng suy nghĩ, hiến dâng cả cuộc sống cho ngành khoa học đáng yêu của mình.

Ngay từ những năm trẻ tuổi, ông đã bước vào cuộc sống chông gai, khúc khuỷu, đầy những thăng trầm của nhà bác học. Cuộc sống của nhà bác học — đó không phải là chiếc cốc pha lê ngời ánh hổ phách và tràn đầy rượu vang đang sủi bọt, cũng không phải là những cuộc dạo chơi vui vẻ hàng ngày của vùng ngoại ô. Thực sự, ông đã chịu đựng đến mức cả cuộc sống của ông — chính là một sự phục vụ vô thời hạn, liên tục, không ngày, không đêm cho một vị thần linh duy nhất, một thần tượng duy nhất, một lãnh chúa duy nhất của mọi ý đồ và mong ước. Khoa học — đó là một nhà thôi miên — dù chỉ một lần, chịu sức quyến rũ thần thánh bởi sự đúng đắn của nó, cũng không bao giờ quên phải vì nó, cho đến hơi thở cuối cùng, cho đến lúc vĩnh viễn nằm vào lòng đất.

Cuộc sống riêng của ông đã thế, còn cuộc sống của chính cha ông cũng như vậy. Cha ông là Phiđi. Trong óc ông còn ghi lại hình ảnh thời thơ ấu xa xưa, khi cậu bé Acsimét trẻ tuổi còn cố thuyết phục hầu như với mỗi người mới quen, rằng cha ông chỉ là người cùng họ với vị sáng tạo nổi tiếng Zơt trên Olempie và cô gái Aphinơ, rằng nhà điêu khắc Phiđi đã sống trên một trăm tuổi, trước Phiđi — cha ông, một nhà thiên văn. Người ta ngạc nhiên vì các ông Phiđi không phải là những người thân thuộc, mà là ngược lại, và điều hoàn toàn bất ngờ nữa là Acsimét lại có họ với hoàng đế Hirông, và vì vậy, có quan hệ họ hàng với Hêlông, con của Hoàng đế...

Và đây là Alecxanđri tráng lệ. Acsimét dạo chơi hàng giờ dọc theo những phiến đá lát ngoài đường phố, trèo lên ngọn hải đăng Pharôxơ, rồi từ đó ngắm nhìn hải cảng tràn ngập những tàu thuyền Hy Lạp, La Mã, Phinic, Ba Tư và nhiều nước khác, dường như khắp Oicumena (1) đều cập bến ở đây. Nhưng phần lớn thời gian, ông ngồi trong thư viện — thư viện Alecxandri nổi tiếng mà bộ sưu tập các bản viết tay của nó, mọi kho chứa sách trên thế giới đều chỉ dám mơ ước. Tất cả thế hệ trẻ « vàng ngọc » của thành phố Alecxandri vĩ đại đều tụ tập trong thư viện này. Trong những cuộc tranh luận say sưa với các bạn trẻ, mà hầu hết là những người sùng bái ở Ơclit — người đồng hương vĩ đại của mình, dần dần sự hiểu biết của Acsimét về vị trí của mình trong khoa học, những gì làm ông gần gũi với những người bạn trẻ ở Alecxandri, và những gì làm ông khác biệt hẳn với họ, đã chín muồi. Mặc dù có những sự khác biệt về quan điểm, nhưng chính Acsimét vẫn hết sức tôn sùng bộ óc thiên tài của Ơclit vĩ đại, đến mức ông vội làm quen ngay với các công trình của nhà bác học. Bộ sách « Mở đầu » của Ơclit khi đó đã trở thành cuốn sách gối đầu giường trong suốt đời ông...

Âm vang của cuộc chiến đấu ngày một tăng. Tấm đệm của thô dày không thể ngăn được những tiếng hò reo hân hoan của những người La tinh chiến thắng, những tiếng va chạm của gươm, giáo chạm vào mộc đỡ của những người cuối cùng bảo vệ Xiracudơ, không thể thờ ơ trước những cơ thể đã kiệt lực và đau khổ vì cuộc phòng ngự kéo dài. Kẻ thù đắc thắng đã giành được thành phố đau thương và đang đắm mình trong cuộc cướp bóc đê tiện ghê tởm, không thương tiếc ngay cả trẻ em, phụ nữ và người già.

Tất cả những cái đó — từ tiếng gươm giáo chạm nhau, tiếng kêu rên của những người sắp chết, tiếng hò reo

(1) Xem phần phụ lục (N.D)

chiến thắng của người La Mã mới đáng sợ làm sao, dường như quá xa lạ so với những gì đã có từ lâu từ hơn nửa thế kỷ trước. Bỗng nhiên, Acsimét nhớ một cách rành mạch đến đáng sợ chuyến vượt biển lâu dài và rất nguy hiểm của mình, từ Alecxandri đến Xiracudơ trên chiếc thuyền con. Biển nổi sóng với mối đe dọa khủng khiếp, không ngừng tung những đợt sóng xanh rờn viền quanh bằng những dải bọt sục sôi, trắng xóa như đá hoa, vào chiếc thuyền con, mỏng manh, không có gì bảo vệ. Và những con người bất hạnh đã cảm thấy rằng không một sức mạnh của con người hay một đấng siêu tự nhiên nào có thể kéo họ thoát khỏi vòng tay chết chóc của thần Poxêiđôn. Nhưng rồi người cầm lái đã dồn toàn bộ sức nặng của bản thân mình lên mái chèo nặng chĩu, cuối cùng đã nhấc bổng được nó lên, và vượt qua được nỗi bất hạnh, rủi ro. Rung mạnh như một con ngựa đã thắng cương, con thuyền dừng lại trong khoảnh khắc trên đỉnh sóng cao, sau đó lại từ từ lao vào vực sâu không đáy tiếp sau...

Con thuyền, lúc rời khỏi Alecxandri, như một cô gái kiều diễm, được trang hoàng những cánh buồm đầy màu sắc; khi cập bến Xiracudơ đã gần như bị nát bỏng, đỏ thủng, mất cả cột buồm, cờ hiệu, giống như một mụ hành khất rách mướp...

Bộ mặt hung ác của tên lính La mã bỗng xuất hiện giữa đám đông người Xiracudơ quần áo màu sắc sặc sỡ ra chào đón con tàu bất hạnh với những người vượt biển nửa sống, nửa chết. Các vị khách kỳ quặc, không mời mà đến này, hắn từ đâu đến và xuất hiện như thế nào? Hắn — trong cơn hoang tưởng của một sự tưởng tượng bệnh tật hay một cơn ác mộng được biểu hiện bằng xương thịt hẳn hoi. Hắn há cái miệng, những mạch máu trên cổ hắn phập phồng. Hắn kêu to một câu gì đó, nhưng Acsimét không nghe rõ lời hắn nói. Quá khứ vẫn hách dịch lưu giữ hình ảnh tên lính, ma thuật quên lãng vẫn chưa kịp tan...

Bóng ma chưa biến mất. Nó ngày càng to dần trước cặp mắt mờ đục của nhà toán học, và cuối cùng, nó lớn bằng cả căn phòng, thay thế hoàn toàn cảng Xiracudơ cổ kính ngập ánh mặt trời. Tên lính La mã hung ác — thần chết mà trước đây, nhà bác học hầu như không nghĩ đến, đã xuất hiện trước mắt ông dưới dạng như vậy.

— Không được động đến những hình vẽ của ta!

Ông già nói nhỏ, nhưng cương quyết, như ra lệnh. Đó cũng là những lời nói cuối cùng của ông. Lưỡi giáo rộng bản và sắc cả hai cạnh đã lao hết sức vào mái đầu bạc đã suy yếu, nhưng đầy kiêu hãnh và nhiệt tình của một công dân vĩ đại trên Vũ trụ này.

Người ta kể rằng Acsimét đã chết như vậy trong ngôi nhà mình ở, trên một đường phố của Xiracudơ bị quân La Mã chiếm giữ và cướp bóc trong một trận chiến đấu. Macxen, vị tướng lĩnh La Mã, người từ lâu, đã có ý đồ xâm chiếm thành phố nhưng không đạt kết quả, đã cực kỳ buồn phiền khi biết tin về cái chết của một trong những nhà bác học vĩ đại nhất và là một trong những người yêu nước nồng nàn và dũng cảm nhất.

### ĐÔ BA (TƠRIAT)

Hippôcrat vùng Hiôxơ, người mà chúng ta đã có dịp làm quen trong các trang trên, không chỉ nghiên cứu các hình mặt trăng tạo bởi các cung vòng tròn, mà tên tuổi của ông còn gắn bó với một trong những ý đồ giải bài toán gấp đôi một khối lập phương nữa. Như đã biết, bài toán này đòi hỏi bằng compa và thước kẻ, hãy xây dựng cạnh của một khối lập phương có thể tích gấp đôi thể tích của một khối lập phương cho trước. Nếu a — là cạnh của khối lập phương đã cho, x — là cạnh của khối lập phương phải tìm, thì tương ứng theo bài toán, chúng ta phải có:

$$x^3 = 2a^3 \qquad (2)$$

Hippôcrat không trực tiếp giải bài toán. Chẳng nhờ compa và thước kẻ, cũng chẳng nhờ các dụng cụ khác, nhưng đã chỉ ra rằng bài toán này có thể dẫn đến bài toán tìm hai trung bình nhân giữa hai đại lượng đã cho, trong đó đại lượng thứ nhất bằng cạnh của khối lập phương đã cho, còn đại lượng kia thì lớn gấp đôi. Khi đó, cạnh của khối lập phương phải tìm sẽ là trung bình nhân thứ nhất. Thật vậy, nếu sử dụng những ký hiệu hiện nay, thì chúng ta sẽ có:

$$a : x = x : y = y : 2a$$

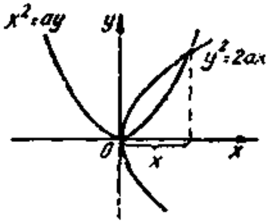
Từ hai tỉ lệ thức này, chúng ta nhận được

$$x^2 = ay, \; y^2 = 2ax \qquad (3)$$

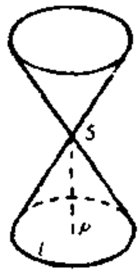
Sau khi khử y khỏi đẳng thức cuối và ước lược hệ thức nhận được cho x, ta sẽ đi tới đẳng thức (2).

Sau này chúng ta sẽ dành một phần đáng kể nói về Rơnê Đêcác, người sáng lập ra môn hình học giải tích. Chúng ta sẽ nói về phương pháp tọa độ và các phương trình đường cong trong các hệ tọa độ khác nhau, như chúng ta đã nói về phương trình đường xoắn ốc Acsimét trong hệ tọa độ cực. Giờ đây chúng ta chỉ nói rằng mỗi một trong hai phương trình (3) chính là phương trình của một parabôn trong hệ tọa độ Đêcác, một parabôn có trục trùng với trục tung, còn parabôn kia có trục trùng với trục hoành (hình 10). Cạnh của khối lập phương phải tìm chính là hoành độ của điểm giao giữa hai parabôn này. Như thế, bài toán gấp đôi một khối lập phương có thể giải được nhờ compa, thước kẻ và dụng cụ vẽ nên parabôn.

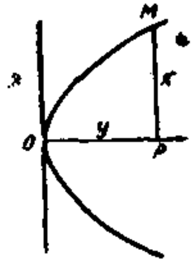
Chắc có lẽ chính Hippócrat cũng chưa có khái niệm về parabôn. Lẽ tất nhiên, ông cũng chưa có một khái niệm gì về phương trình của đường cong, vì người HyLạp cổ




Hình 10




Hình 11




Hình 12

đại vẫn chưa biết đến phương pháp tọa độ. Lần đầu tiên, nhà toán học Hy Lạp Mênekhơmơ, sống vào thế kỷ thứ IV trước công nguyên, đã chú ý đến các tính chất hình học của các đường cong được mô tả bởi các phương trình (3). Ông là học trò của một trong những nhà bác học xuất sắc nhất thời bấy giờ, là Ơđôcxơ vùng Cơnit. Nhà bác học này, người ta không thể gọi là gì khác hơn ngang — đức-chúa-trời. Còn chính Mênekhơmơ, người ta cũng không thể gọi là gì khác hơn nữa — ông là học trò của Ơđôcxơ ngang — đức-chúa-trời.

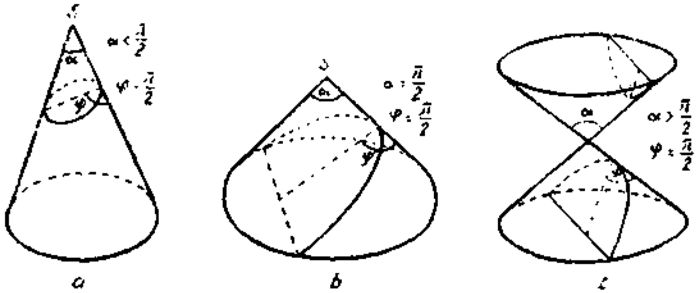
Mênekhơmơ không chỉ phát hiện ra các parabôn, tức là những đường cong mà giờ đây chúng ta có thể cho nhờ các phương trình (3). Chính ông cũng đồng thời phát hiện ra êlip và hipecbôn, những đường cong này — êlip, hipecbôn, parabôn — kể từ thời đó luôn luôn xuất hiện cùng nhau và nhờ đó, tên gọi *bộ ba* hay *toriat Mênekhơmơ*, đã được củng cố một cách chắc chắn.

Người ta cho rằng Mênekhơmơ đã phát hiện ra toriat trong khi khảo sát các thiết diện của mặt nón tròn xoay (nón thẳng) với các mặt phẳng. Khi đó, mặt nón nên xem như bao gồm từ hai phần hay hai hốc (hình 11). Mặt nón như thế có thể nhận được như sau. Giả sử 1 — là đường tròn với tâm P, nằm trên mặt phẳng $\pi$ nào đó. Qua điểm P chúng ta vẽ một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $\pi$ và chọn một điểm S nào đó trên đó. Qua S chúng ta vẽ những đường thẳng có thể được và cắt đường tròn 1. Mặt do chúng tạo nên chính là mặt nón thẳng. Những phần của mặt nón nằm về các phía khác nhau của điểm S (đỉnh của mặt nón), hay đúng hơn là nằm về các phía khác nhau của một mặt phẳng bất kỳ đi qua đỉnh và không chứa những đường thẳng tạo nên mặt nón, chính là các phần hay các hốc của mặt nón.

Cũng không loại trừ khả năng là Mênekhomơ đã tìm thấy các thiết diện nón thông qua chính bài toán gấp đôi một khối lập phương. Điều này cũng có thể xảy ra với xác xuất khá cao. Trong thời cổ đại rất nhiều người nghiên cứu các bài toán lớn. Những bài toán này thường dẫn đến những bài toán khác mà việc giải chúng, người ta hy vọng sẽ đơn giản hơn. Bài toán gấp đôi một khối lập phương và tìm hai trung bình nhân của Hippôcrat mà chúng ta xem xét bây giờ đã xảy ra như vậy.

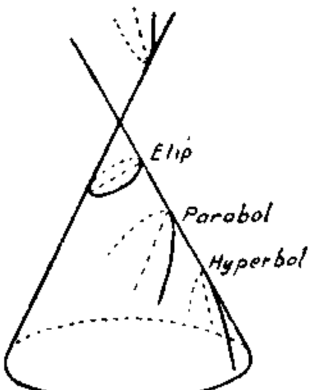
Lẽ tất nhiên những người Hy Lạp cổ đại chưa có khái niệm về các phương trình đường cong. Nhưng những tính chất của các đường cong mà chúng ta mô tả được nhờ các phương trình, thì những người Hy Lạp cổ đại cũng đã biết cách biểu hiện. Điều đó thực hiện được qua đại số tu từ.

Chẳng hạn, đường cong được xác định bởi phương trình thứ nhất trong công thức (3) được xác định đặc trưng bằng một tính chất mà người Hy Lạp cổ đại phát biểu như sau: nếu từ một điểm tùy ý trên đường cong, hạ một đường vuông góc xuống trục của đường cong đó, thì diện tích của hình vuông xây dựng trên đoạn thẳng vuông góc này sẽ bằng diện tích hình chữ nhật có một cạnh bằng a không đổi, còn cạnh kia là đoạn thẳng kẻ từ đỉnh của đường cong đến đáy của đường vuông góc đã nêu (hình 12). Chính có thể Mênekhmơ đã phát hiện ra tính chất này ở một trong ba loại đường cong do ông phát hiện ra.




Hình 13

Những công trình nghiên cứu của Mênekhmơ không còn lưu lại được đến ngày nay. Những gì mà chúng ta biết được về các phát minh của ông, là do chúng ta đã tìm thấy trong các công trình nghiên cứu của các nhà toán học khác có trích dẫn các kết quả của ông. Nhưng các phần trích dẫn này cũng rất khác nhau. Một vài tác giả cho rằng nhà toán học Hy Lạp cổ đại phát minh ra tiết diện nón chỉ khảo sát các mặt phẳng vuông góc với một trong những đường sinh của nón. Khi góc trục của nón nhỏ hơn góc vuông, ở thiết diện sẽ nhận được một êlip (hình 13a). Khi góc trục bằng đúng góc vuông, thiết diện sẽ là một parabôn (hình 13b). Khi góc trục là một góc tù — sẽ có một hipecbôn (hình 13c). Một số nhà toán học khác cho rằng chính Mênekhơmơ đã biết là cả ba loại đường cong đều nhận được khi cắt cùng một mặt nón bằng các mặt phẳng khác nhau. Khi đó, nếu mặt phẳng cắt không song song với một đường sinh nào, thì trong thiết diện sẽ nhận được một elip. Nếu mặt phẳng cắt song song với một đường sinh — thì trong thiết diện sẽ có một parabôn. Cuối cùng, nếu mặt phẳng cắt song song với hai đường sinh, thì đường cong nhận được sẽ là hipecbôn (hình 14). Một số nhà toán học khác nữa lại cho rằng việc khảo sát đồng thời cả ba loại đường cong, trên cùng một mặt nón là kết quả nghiên cứu trong thời gian sau này và có liên quan đến tên tuổi của nhà toán học Hy Lạp lỗi lạc là Apôlôniut vùng Pecxich (sống vào thế kỷ thứ II trước công nguyên).



Hình 14

## NHỮNG THIẾT DIỆN NÓN (1) QUANH TA

Các thiết diện nón đã được phát minh. Đây thực sự là một phát minh vĩ đại. Trong hệ tọa độ Đècac vuông góc, các phương trình mô tả các đường cong này là những phương trình bậc 2, vì vậy các thiết diện nón còn được gọi là các đường cong bậc 2. Ý nghĩa của các đường cong bậc 2 chắc không ai có thể đánh giá hết. Ý nghĩa của chúng được thể hiện trong từng giai đoạn trong

(1) Hay cônic (N. D).

cuộc sống của chúng ta. Thí dụ ư? Đây là những thí dụ. Trái Đất của chúng ta chẳng hạn, khi chuyển động quanh Mặt Trời sẽ vẽ nên một êlip. Điều này cũng xảy ra với mọi hành tinh khác của hệ thống Mặt Trời. Sự kiện này được xác định bằng định luật Kêple thứ nhất. (Lẽ tất nhiên, chuyển động của các hành tinh xảy ra theo các đường cong phức tạp hơn, vì ngoài chuyển động quay tròn xung quanh Mặt Trời, mọi hành tinh còn tham gia vào chuyển động tịnh tiến của toàn hệ Mặt Trời. Nhưng khi bỏ qua loại chuyển động này, có thể nói về chuyển động của các hành tinh theo những hình êlip).

Chuyển động theo hình êlip đã xảy ra bởi vì tại mỗi thời điểm, mỗi hành tinh có tốc độ không vượt qua một đại lượng nào đó. Dường như nếu tốc độ này đủ lớn thì chuyển động đã xảy ra theo hình parabôn hay hypecbôn. Những thiên thể chuyển động đối với một vật thể đứng yên khác và bị vật thể này hút theo định luật vạn vật hấp dẫn, thì không thể không có quỹ đạo nào khác.

Thế là về bản chất, những đường cong bậc hai nằm trên cơ sở thế giới quan của chúng ta. Và điều này có ý nghĩa không phải là nhỏ.

Hơn nữa, nếu quay parabôn quanh trục của nó chẳng hạn, sẽ nhận được một mặt, gọi là parabôlôit tròn xoay. Trên trục của parabôlôit này có một điểm — gọi là tiêu điểm — có tính chất rất đặc sắc: mọi đường thẳng đi qua điểm này, khi được phản xạ bởi mặt trong của parabôlôit, sẽ đi theo hướng song song với trục của parabôlôit. Điều này có nghĩa là nếu làm một ngọn đèn chiếu dưới dạng một parabôlôit tròn xoay và đặt một ngọn đèn điện vào đúng tiêu điểm, thì mọi tia sáng, sau khi được parabôlôit phản chiếu, sẽ tạo nên một chùm sáng song song. Rõ ràng điều này có một ưu việt đáng kể, vì mọi chùm tia sáng như vậy ít bị tán xạ trong không gian, thậm chí ở cả những khoảng cách cách khá xa nguồn sáng. Lẽ tất nhiên, thật ra chúng ta không nhận được một chùm các tia sáng song song lý tưởng, vì ngọn đèn không phải là một điểm phát sáng, nhưng chùm sáng gần như lý tưởng mà chúng ta có được, cũng đủ đáp ứng các mục đích thực tế.

Những gương phản xạ của kính thiên văn cũng được sản xuất dưới dạng gương parabôn. Công dụng của các gương phản xạ này trong ý nghĩa đã biết, đối lập hẳn với công dụng của gương phản xạ trong đèn chiếu. Trong khi ở đèn chiếu, gương phản xạ tỏa vào không gian các tia sáng, thì ở kính thiên văn, gương phản xạ lại tập hợp các tia sáng đi từ vũ trụ vào tiêu điểm của đèn.

Bây giờ chỉ cần đặt một hệ thống kính khuếch đại vào tiêu điểm này, chúng ta sẽ nhận được một thông tin lớn hơn nhiều so với thông tin có thể nhận được bằng mắt thường về thiên thể mà các tia sáng của nó, chúng ta đã tập trung được.

Trục đối xứng mà hipecbôn không cắt qua, được gọi là trục ảo. Nếu quay hipecbôn xung quanh trục ảo này, thì mặt được tạo thành khi đó (được gọi tên là mặt hipecbôlôit tròn xoay một tầng), cũng có nhiều áp dụng thực tế. Hipecbôlôit là một mặt kẻ.

Trên mặt này có hai họ đường sinh vuông góc. Những đường sinh của cùng một họ thì không cắt nhau, nhưng những đường sinh của các họ khác nhau thì luôn luôn giao nhau. Chính tính chất này đã được áp dụng trong kỹ thuật. Chẳng hạn, nếu làm một cái tháp từ những thanh thẳng, đặt thẳng đứng, thì sẽ nhận được một công trình rất kém bền vững. Nó bị uốn cong khi chịu một tải trọng không lớn lắm. Nếu các thanh được sắp xếp sao cho chúng tạo thành một hipecbôlôit một tầng, (chúng chính là hai họ của hipecbôlôit) và kết nối các điểm giao của chúng, thì sẽ nhận được một kết cấu rất nhẹ và rất bền. Những tháp được làm dưới dạng những hipecbôlôit đặt chồng lên nhau như thế, có tên gọi là hệ thống tháp của kỹ sư Sukhốp (theo tên gọi của viện sĩ — kĩ sư lỗi lạc người Nga V. G. Sukhốp).

*Đường* xoắn ốc, conxôit và những thiết diện nón chỉ là một phần không đáng kể trong số những đường cong đặc sắc đã được phát hiện với ý đồ giải các bài toán nổi tiếng thời cổ đại. Nhưng dù số những đường cong đặc sắc đã tìm được bằng cách nào, các nhà toán học thời cổ vẫn không giải được các bài toán lớn thời cổ đại. Chính như chúng ta đã lưu ý, cần giải chúng không phải một cách thuần túy đơn giản, mà là khi giải không được sử dụng đến các đường khác, ngoài đường thẳng và đường tròn. Trả lời vấn đề này như thế nào, có hay không thể giải được các bài toán này chỉ nhờ các đường thẳng và đường tròn?

Về câu hỏi này, đưa ra câu trả lời có, nếu bài toán có thể giải được, về nguyên tắc đơn giản hơn nhiều nếu đưa ra câu trả lời không, bởi vì khi đó chỉ cần cố gắng tìm tòi cách giải, và sau những nỗ lực tìm kiếm lâu dài chắc có thể sẽ tìm được lời giải thích hợp.

Tình hình sẽ xấu đi rất nhiều trong trường hợp bài toán không giải được, tức là lời giải của bài toán không tồn tại. Ở đây khi chỉ còn đối mặt với trực giác hình học thông thường, chưa chắc đã có thể hy vọng nhận được câu trả lời cần thiết. Trong trường hợp này cần tiến hành phân tích đại số hết sức tỉ mỉ bài toán đặt ra, để đưa đặc tính không có khả năng giải được bài toán về đặc tính không có khả năng thực hiện các đẳng thức đại số nào đó.

Thế là cần đến sự trợ lực của ngành đại số!

Ý đồ bắt đại số phải phục vụ cho hình học đã được chuẩn bị trong nhiều thế kỷ. Thoạt đầu, ý tưởng này đã được người Hy Lạp cổ đại thể hiện một cách dè dặt dưới dạng đại số tu từ như thường gọi. Chưa có những ký hiệu đại số, trừ những ký hiệu đơn giản nhất, và vì vậy chúng ta thấy hoàn toàn dễ hiểu là khi thực hiện các phép tính đại số đã biết, trên các phương trình mô tả các đường cong hình học, các nhà toán học Hy Lạp cổ đại buộc phải dùng những cách biểu thị bằng lời văn, quá cồng kềnh, không thuận lợi và mất hết cả đặc tính rõ ràng. Với một ngành đại số như thế, không thể tiến xa hơn nữa.

*Chỉ mãi đến thế kỷ XVI, nhà toán học Pháp lỗi lạc* Phơrăngxoa Viet mới đưa thế hệ ký hiệu vào. Nhưng theo những tiêu chuẩn hiện nay của chúng ta, thì hệ ký hiệu này, trong một mức độ đáng kể, vẫn còn quá thô sơ và thiếu gọn gàng. Hệ ký hiệu như vậy mới có lợi được chút ít. Nhưng chính nhờ có nó mà Piephecma, một đồng bào của Viet, đã có ý đồ hợp nhất đại số với hình học thành một *thể thống nhất*, mà *giờ đây chúng ta* gọi là hình học giải tích. Phecma được xem là một trong những người sáng tạo ra bộ môn khoa học này. Nhưng hệ ký hiệu Viet thiếu đẹp đẽ, không thuận tiện và kém khả năng thích ứng đối với cả nhu cầu của đại số, lẫn của hình học, đã làm các nhà toán học và môn hình học giải tích của Phecma phải thất vọng. Phecma là người sáng tạo ra môn hình học này, nhưng về mặt này người ta chỉ nói về ông trong các tác phẩm toán học — lịch sử, còn người sáng tạo thực sự của bộ môn khoa học này, người sáng tạo độc đáo và thành đạt, người ta đều nhất trí kể tên Rơnê Đècác, một người đồng thời và đồng bào của Viet. Đêcác đã cải biến hệ ký hiệu của Viet. Trong hệ ký hiệu của Viet có những tiếng La tinh nặng nề, còn trong hệ của Đècác — là ngôn ngữ Pháp hội thoại nhẹ nhàng. Trong hệ ký hiệu của Viet có những điều kiện và mức độ phức tạp không cần thiết, và Đècác đã vứt bỏ tất cả chúng, để đi thẳng đến mục tiêu một cách đơn giản và trực tiếp.

Đècác, con người mà những thế hệ đầy triển vọng sau này đã giành cho ông một trong những vị trí danh dự nhất ở Păngtêông (1), là ai vậy?

## SỐ PHẬN MAY MẮN CỦA MỘT NGƯỜI LÍNH

... Năm 1918. Ngọn gió lành tháng Mười một đã quét sạch bóng các đường phố nhỏ của thành phố Bơret trên đất nước Hà Lan bé nhỏ. Người qua lại rất ít. Một người lính trẻ trong bộ quân phục thuộc biên chế của sơtalganto (2) Môrixơ vùng Ôran, vẻ mặt đượm buồn, lang thang dạo bước dọc theo các phiến đá lát đường. Con mắt của người từng trải có thể nhận ngay được rằng mục đích duy nhất của người lính là đi tìm một thú tiêu khiển nào đó.

Giờ đây anh ta đã chú ý thấy ở một cột gỗ có dán đầy những tờ quảng cáo, một đám đông người tụ tập, đang hoa chân múa tay một cách sôi nổi. Người lính lắng nghe những câu chuyện, trên mặt lộ vẻ bực bội. Người ta định nói chuyện bằng tiếng Hà Lan, mà rõ ràng là anh ta không hiểu nổi. Nhưng rõ ràng anh ta cảm thấy rằng đối tượng của mọi câu chuyện trao đổi chính là một tờ giấy rộng dán không được chặt vào chiếc cột gỗ và đang kêu loạt xoạt bởi từng đợt gió mùa thu.

---

(1) Nơi cất giữ hài cốt của những vĩ nhân hoặc người có công lớn, được thiết lập năm 1791, ở Pari, nước Pháp (N. D)
(2) Xem phần phụ lục.

«Trên tờ áp phích này viết gì thế?». Anh hỏi một trong những người có mặt ở đây bằng tiếng Pháp.

Mọi người không hiểu anh nói gì sao? Không phải thế. Một trong đám đông người được hỏi nhìn vào người Pháp với một vẻ hiếu kỳ. Mơsiơ (1) lính cần dịch nguyên bản tờ quảng cáo chăng? Ông ta hỏi người ngoại quốc đang có vẻ tò mò. Ông ta sẽ dịch, nhưng với điều kiện là người lính phải đưa cho ông ta lời giải của mọi bài toán đã được viết tên tờ áp phích này.

Người Hà Lan tốt bụng đó chính là một giảng viên dạy vật lý, y học, toán học tên là Becman, còn trên tờ áp phích quảng cáo là lời tuyên bố mở cuộc thi giải các bài toán. Sự thật giải thưởng đặt ra có ý nghĩa tượng trưng hơn là thực tế. Nhưng điều có ý nghĩa lớn hơn cả giải thưởng là người nhận giải sẽ được nhận luôn cả danh hiệu nhà toán học giỏi nhất của thành phố.

Buổi sáng hôm sau, người Pháp trẻ tuổi rụt rè đến gõ cửa nhà Becman. Tất cả các bài toán đã được giải xong tất cả từng bài một. Sự ngạc nhiên của vị giáo sư thật không kể xiết. Cánh cửa rộng mở, nồng nhiệt đón khách, vị khách nước ngoài — người khách chờ mong của ngôi nhà. Cả gia đình thận trọng liếc nhìn vị khách lạ lùng này.

Không thể xảy ra câu chuyện là lạ bỗng có một người ngồi giải một mạch các bài toán một cách nhanh chóng mà ngay cả nhiều người có uy tín thực sự cũng phải nát óc suy nghĩ hàng tháng trời. Chỉ nghĩ riêng về điều đó, ngay từ đầu, Beoman đã nhận ra vị khách xiết bao kỳ lạ.

Chỉ một thời gian ngắn, người ta được biết rằng người Pháp trẻ tuổi đó tên là Đêcác, sinh trưởng ở Turăng,

---

(1) Ngài, tiếng Pháp (N. D).

đã từng học trong trường trung học La Phơlesơ. Chính tại đây, anh đã nghiên cứu toán học.

Chuỗi ngày buồn chán của cuộc sống đồn trú đã bị xáo trộn. Đêcác trở thành vị khách thường xuyên trong căn nhà Beeman. Những giờ phút kéo dài trong những buổi đàm luận về toán học trong khi giải những bài toán hợp « mốt » thời bấy giờ, trong những buổi trao dồi về bản chất và công dụng của toán học.

Ngay từ thời còn trong trường trung học, khi còn là một người trẻ tuổi đi tìm chân lý, sự thiếu tương ứng cực kỳ giữa đặc tính chặt chẽ của phần cơ sở, mà lâu đài toán học được xây trên đó, với tính què quặt của chính tòa lâu dài đó, đã làm cho Đêcác sửng sốt. Cần phải co một cấu trúc nào đó, chặt chẽ hơn cho phép củng cố phần cơ sở của nó.

« Từ thuở nhỏ — Sau này Đêcác viết — tôi đã được nuôi dưỡng cho khoa học. Và vì mọi người làm cho tôi tin rằng: khoa học sẽ cho sự hiểu biết rõ ràng và tin cậy hơn tất cả những gì có trong cuộc sống tuyệt đẹp, nên tôi đã có một sự nỗ lực khác thường để nghiên cứu nó. Nhưng khi tôi đã kết thúc hết khóa học mà người ta thường cho mục tiêu của nó là dạy toán cho các nhà khoa học tương lai, thì quan điểm của tôi đã hoàn toàn thay đổi. Trong trạng thái đầy rẫy những nghi ngờ và sai sót, tôi cảm thấy từ khát vọng ham hiểu biết của mình, mình phải phục tùng một lợi ích — phải khám phá sâu sắc hơn phần còn dốt nát của mình. Hơn nữa, tôi còn là một học trò của trường phái Châu Âu lỗi lạc và tôi cho rằng, nếu ở đâu đó trên Trái Đất này có những nhà thông thái, thì chính những nhà thông thái ấy phải nằm trong trường phái Châu Âu.

Tôi học tất cả những gì mà người ta dạy cho, nhưng tôi vẫn chưa thỏa mãn với điều đó. Tôi đọc hết mọi cuốn sách mà có thể may mắn rơi vào tay tôi, những cuốn sách được cho là hấp dẫn nhất và khoa học nhất ».

Không thỏa mãn với thần học và triết học, Đềcác quay sang toán học và buồn rầu khẳng định rằng: trên cơ sở sáng tạo chặt chẽ này, người ta chưa xây dựng được gì hơn là ứng dụng toán học vào cơ học thực hành.

Nhưng nhiều ý tưởng kiên trì đang mang lại những thành quả tốt đẹp, và cuối cùng, người ta bắt đầu phác thảo được những ranh giới của tòa kiến trúc, dù còn quá xa với mức hoàn thiện đáng mong đợi, nhưng dù sao cũng đã ít nhiều tương xứng với những ý đồ thiết kế. Theo lời nhà bác học, sau này sau những sự kiện đã mô tả ở trên, khi ông đang ở thành phố Ulma, ông đã trải qua ba giấc mơ khác thường, để thể hiện ra một khoa học mới «kỳ lạ» đối với ông.

Có thể nhật xét là đã có một sự khuếch đại nào đó trong sự thừa nhận này, nhưng hoàn toàn rõ ràng là thời kỳ tập trung sáng tạo cao nhất, thời kỳ hào hứng gần tới sự phấn chấn cao độ nhất — đấy chính là thời kỳ có sự xóa nhòa ranh giới giữa ước mơ và hiện thực, khi cuộc sống trở thành ước mơ, và ước mơ trở thành cuộc sống

Phát minh của Đềcác gồm những gì?

## CÔNG TRÌNH SÁNG TẠO VĨ ĐẠI

Chúng ta gọi đó là hình học giải tích. Như mọi kết quả sáng tạo thiên tài khác, công trình sáng tạo này đơn giản một cách thiên tài. Ăngghen đã gọi phát minh ra hình học giải tích (của đại lượng biến thiên Đềcác) là một bước ngoặt trong toán học. Ông viết rằng chính nhờ phát minh này mà phép biện chứng và chuyển động đã được đưa vào trong toán học, và điều đó, ngay lập tức dẫn đến sự phát triển của các đại lượng vô cùng bé

Người ta thường cho rằng nhà bác học Anh vĩ đại Niutơn và nhà triết học Đức vĩ đại Leibnit là những người sáng tạo ra phép tính các vô cùng bé (phép tính vi phân và tích phân). Ăngghen nhấn mạnh rằng, khởi đầu cần kể đến phát minh của Đècác, còn Niutơn và Leibnit chỉ hoàn thiện một cách trọn vẹn, chứ không phát minh ra phép tính này.

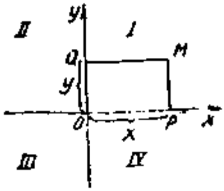
Ý tưởng cơ bản của Đècác, như chúng ta đã nói, là buộc đại số phải «làm việc» trong hình học. Đại số làm việc với số phương trình, còn hình học làm việc với điểm, đường, và mặt. Liên hệ hai ngành với nhau — điều đó có nghĩa là tìm ra một phương pháp so sánh các hình mẫu đại số với các hình mẫu hình học, và sau đó khi thực hiện các phép tính hình thức nào đó theo các quy luật nhất định trên các hình mẫu này, các kết quả của các phép tính này sẽ được giải thích về mặt hình học.

Thật khó kể về bản chất của hình học giải tích bởi những thuật ngữ đã được tiếp nhận trong thời Đècác. Những ký hiệu toán học của thế kỷ thứ 17 cũng khó sử dụng như vậy. Như chúng ta đã nói, chính Đècác, trong một mức độ đáng kể, cũng đã hoàn thiện thêm hệ thống ký hiệu. Nhiều ký hiệu mà giờ đây chúng ta hiện dùng đã được thực hiện từ thời Đècác, nhưng cũng còn nhiều ký hiệu khác biệt với những ký hiệu hiện nay của chúng ta. Chúng ta sẽ nói về thực chất phát minh của Đècác bằng ngôn ngữ hiện đại.

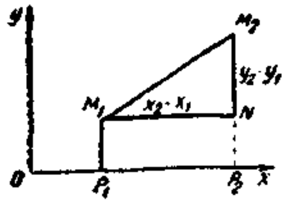
Đối với những ai đã từng làm quen với phương pháp tọa độ, những sự kiện mà chúng tôi sẽ không báo, sẽ không có gì mới mẻ. Nhưng chúng tôi cũng khẩn khoản khuyên họ đọc thêm một lần nữa về phần này, để có được một bức tranh đầy đủ hơn. Đây là một mong muốn khẩn thiết. Ở trên chúng ta cũng đã nói về một vài sự kiện như vậy, nhưng không đi vào chi tiết — Chúng ta đã nhắc về phương trình parabôn trong hệ tọa độ Đècác vuông góc, phương trình đường xoắn ốc Acsimét trong hệ tọa độ cực.

Khái niệm số và hình là những khái niệm cơ bản trong toán học. Mỗi hình có thể đặc trưng bằng những tham số xác định — độ dài, diện tích, thể tích. Nhưng các tham số này không cho khả năng phân biệt hình này với hình khác, nếu các tham số của chúng là như nhau. Cũng cần biết cách xác định vị trí của hình trong không gian bằng các số. Điều này được làm trong phương pháp tọa độ (hay trong hình học giải tích. Đối với chúng ta, giờ đây hai thuật ngữ này là đồng nhất). Phương pháp tọa độ sẽ thống nhất công cụ hình thức phát triển cao của đại số với trực quan hình học. Nắm được phương pháp tọa độ, điều đó có nghĩa là đã biết cách hợp nhất hai chất liệu này thành một thể toàn vẹn trong cách hình dung của mình. Khả năng nắm vững như vậy sẽ đạt được do kết quả tập luyện lâu dài và cố định hướng chặt chẽ.

Mỗi hình hình học là một tập hợp của các điểm. Để xác định vị trí của hình trong không gian nhờ các số, cần biết cách xác định vị trí của các điểm trong không gian nhờ các số. Tùy thuộc vào chỗ điểm nằm ở đâu — trên đường, trên mặt, hay trong không gian ba chiều, cần lấy một số lượng tương xứng của các số: một số — đối với điểm nằm trên đường, hai số — đối với điểm nằm trên mặt, ba số — đối với điểm nằm trong không gian. (Chi tiết hơn về các điều này, sẽ nói ở phần sau). Khi đó, một mặt giữa các điểm, và một mặt khác giữa tập hợp các số sẽ thiết lập nên một sự tương ứng đơn trị tương hỗ nào đó. Sự tương ứng này — là cơ sở trong phương pháp tọa độ. Nó được gọi là hệ thống tọa độ. Tùy thuộc vào chỗ chúng ta chọn điểm ở đâu và thiết lập mối tương ứng cụ thể như thế nào, chúng ta sẽ có một hệ tọa độ cụ thể nào đó. Chúng ta sẽ bắt đầu từ một hệ tọa độ đơn giản nhất — hệ tọa độ Đềcác vuông góc trên mặt phẳng.




Hình 15




Hình 16

Chúng ta lấy hai đường thẳng Ox và Oy (hình 15) vuông góc với nhau, và gọi là các trục tọa độ, tương ứng là trục hoành và trục tung. Giao điểm O của chúng sẽ gọi là gốc tọa độ. Nếu M — là một điểm tùy ý trong mặt phẳng, thì chúng ta sẽ gọi các khoảng cách tương ứng đến các trục tọa độ là các tọa độ x, y của điểm đó. Tọa độ x được gọi là *hoành độ*, tọa độ y được gọi là *tung độ* của điểm M. Chúng ta sẽ ghi nhận điều đó như sau: M(x, y). Nếu có nhiều điểm, chúng ta sẽ ghi các chỉ số ở các tọa độ:

$M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$,... Tùy thuộc vào chỗ điểm nằm ở đâu, mà các tọa độ của nó sẽ có các dấu khác nhau. Chẳng hạn, trên hình 15, cả hai tọa độ đều dương. Đây là trường hợp điểm nằm trong phần tư thứ nhất của mặt phẳng. Người ta gọi mỗi phần của mặt phẳng, nhận được khi chia mặt phẳng bởi các trục tọa độ, là một phần tư của mặt phẳng. Nếu điểm nằm ở góc phần tư thứ hai thì hoành độ của điểm sẽ âm, còn tung độ của nó sẽ dương...

Đối với các điểm nằm trên trục hoành, tung độ sẽ bằng không, còn đối với các điểm của trục tung, hoành độ sẽ bằng không. Cả hai tọa độ của góc tọa độ đều bằng không.

Mỗi đường trên mặt phẳng là một tập hợp (quỹ tích) của các điểm. Cũng như mỗi điểm, mỗi đường tùy ý cũng có thể xác định nhờ một tập hợp số nào đó — tức là những tọa của nó. Nhưng khi thừa nhận điểm như hình mẫu hình học cơ bản, và xem đường như một tập hợp của các điểm, chúng ta sẽ làm hơi khác đi — đặt tương ứng với mỗi đường một phương trình nào đó (phương trình của đường này). Nếu điểm nào đó thuộc vào đường, thì các tọa độ của điểm phải thỏa mãn phương trình của đường đó. Như thế phương trình của đường — đó là điều kiện mà các tọa độ của điểm tùy ý thuộc đường phải thỏa mãn, và các tọa độ của điểm không thuộc đường, sẽ không thỏa mãn.

Bây giờ, chúng ta sẽ giải một vài bài toán cơ bản. Cần lưu ý rằng chúng ta sẽ giải một bài toán ứng với mỗi sự sắp xếp của các điểm đối với các trục tọa độ. Nhưng chúng ta phải luôn chú ý rằng những biểu thức giải tích mà chúng ta sử dụng, sẽ không phụ thuộc vào sự sắp xếp như vậy. Và như thế, các công thức cuối cùng, các phương trình cũng sẽ đúng với mọi sự sắp xếp tùy ý của các điểm.

*1. Khoảng cách giữa hai điểm.*

Giả sử chúng ta có hai điểm $M_1(x_1, y_1)$ và $M_2(x_2, y_2)$ nào đó (hình 16). Từ hình vẽ, dễ thấy rằng $M_1N = x_2 - x_1$, $NM_2 = y_2 - y_1$. Khi đó, theo định lý Pitago, chúng ta sẽ nhận được công thức phải tìm

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (4)$$

Công thức này đúng với mọi sự phân bố tùy ý của các điểm, không chỉ riêng đối với trường hợp được minh họa trên hình vẽ.

*2. Phương trình của đường tròn*

Giả sử r — là bán kính của đường tròn, C(a, b) — là tâm của đường tròn, điểm M(x, y) — là một điểm tùy ý trên đường tròn. Khi đó, theo công thức (4) xác định khoảng cách giữa hai điểm, chúng ta nhận được (sau khi đã bình phương hai vế):

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \tag{5}$$

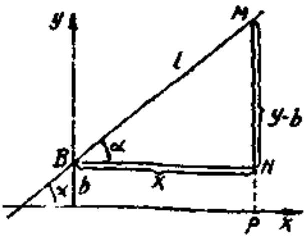
Phương trình này có thể viết dưới dạng:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \tag{6}$$

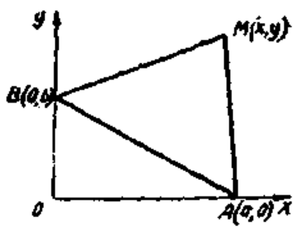
Trong đó: $A = -2a$; $B = -2b$; $C = a^2 + b^2 - r^2$

*3. Phương trình đường thẳng:*

Giả sử l là một đường thẳng tùy ý, tạo với trục hoành một góc và cắt trục tung một đoạn dài b; M(x, y) là một điểm tùy ý của đường thẳng (hình 17).




Hình 17




Hình 18

Trong trường hợp này, như đã rõ ràng từ hình vẽ NM = y − b, BN = x, vì vậy:

$$y = kx + b \tag{7}$$

Trong đó $k = tg\alpha$. Phương trình này có thể viết lại như sau:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (8)$$

Phương trình (8) có thể dẫn về dạng (7) nếu đặt:

$$k = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}$$

**Mọi phương trình dạng (8) là phương trình của đường thẳng, và mọi phương trình dạng (6) là phương trình của đường tròn.**

Bây giờ chúng ta sẽ giải bài toán sau đây: tìm quỹ tích (tập hợp) các điểm mà tỉ số khoảng cách đến 2 điểm đã cho là một đại lượng không đổi.

Khi chúng ta nói «tìm» thì điều này có nghĩa là: trước hết, chúng ta phải làm sáng tỏ, xem có chăng một tập hợp các điểm đã nói trong số các đường cong mà chúng ta đã biết. Khi sử dụng phương pháp tọa độ, chúng ta phải tìm được phương trình của tập hợp phải tìm và làm sáng tỏ: phương trình vừa tìm được có trùng với một trong các dạng phương trình chúng ta đã biết hay không. Nếu trùng — thì bài toán đã được giải. Nhưng nếu không trùng, thì điều này vẫn chưa có nghĩa là không có đường cong cần tìm, trong số các đường cong đã biết. Cần phải kiểm tra thêm xem có thể đưa phương trình vừa tìm được về dạng một trong số những phương trình đã biết bằng phép biến đổi hệ tọa độ cho thích hợp hay không? Nếu không thể đưa về được, thì chúng ta đi tới một quỹ tích mới của các điểm.

Như thế, chúng ta sẽ chọn trên mặt phẳng một hệ tọa độ Đêcác vuông góc nào đó. Không làm giảm tính tổng quát, giả sử rằng các điểm đã cho nằm trên các trục tọa độ. Khi đó, tọa độ của chúng sẽ như sau: A (a, 0), B(0,b) hình 18. Giả sử M (x, y) là một điểm tùy ý thuộc quỹ tích các điểm phải tìm. Khi đó, tương ứng với bài toán, thì:

$$\frac{AM}{BM} = \lambda \tag{9}$$

Trong đó λ — là tọa độ lớn của tỉ số đã cho. Theo công thức (4), chúng ta có:

$$AM = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}$$

$$BM = \sqrt{x^2 + (y - b)^2}$$

Nếu thay các biểu thức này vào đẳng thức (9), sau đó bình phương cả 2 vế và chuyển mọi số hạng sang vế trái, thì chúng ta sẽ nhận được:

$$(1 - \lambda^2)(x^2 + y^2) - 2ax + 2\lambda^2 by + a^2 - \lambda^2 b^2 = 0 \tag{10}$$

Có thể có 2 trường hợp xảy ra:

1) $\lambda = 1$. Khi đó, phương trình (10) sẽ có dạng:

$$Ax + By + C = 0$$

trong đó $A = -2a$, $B = 2b$, $C = a^2 - b^2$.

Nhưng đây là phương trình (8), tức là phương trình của đường thẳng. Đấy chính là một kết quả mong đợi, vì với $\lambda = 1$, quỹ tích của các điểm phải tìm chính là tập hợp các điểm cách đều điểm A và điểm B, và như đã biết, đó chính là đường thẳng vuông góc với đoạn AB và đi qua điểm giữa của đoạn đó. Như thế giờ đây khi sử dụng phương pháp tọa độ, chúng ta đã khẳng định được sự kiện: tập hợp các điểm cách đều hai đầu mút của một đoạn thẳng, chính là một đường thẳng. Lẽ tất nhiên, sự kiện đơn giản này dễ dàng xác định được mà không cần đến phương pháp tọa độ. Nhưng còn có nhiều sự kiện khác nữa mà ở đó, vai trò của phương pháp tọa độ là ở chỗ không thể có phương pháp nào khác thay thế được.

2. $\lambda \neq 1$. Trong trường hợp này, phương trình (10) có thể đưa về dạng:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Trong đó:

$$A = -\frac{2a}{1-\lambda^2}, \quad B = \frac{2\lambda^2 b}{1-\lambda^2}, \quad C = \frac{a^2 - \lambda^2 b^2}{1-\lambda^2}$$

Nhưng đây lại là phương trình (6), tức là phương trình của đường tròn. Như thế, quỹ tích cần tìm chính là một đường tròn.

Đường tròn có nhiều định nghĩa. Đường tròn được định nghĩa hay được xác định theo cách vừa làm ở trên, có tên gọi là *đường tròn Apôlôniut* (đặt theo tên gọi của nhà hình học vĩ đại nhất của Hy Lạp cổ đại, Apôlôniut thành Pêcgơ).

Nhiều bài toán khác cũng được giải bằng cách tương tự. Nhưng công dụng của hình học giải tích không chỉ hạn chế trong phạm vi « nhận biết » dạng đường cong dựa theo phương trình của nó, tức là so sánh mỗi phương trình mới nhận được với các phương trình đã nhận được từ trước. Khi có một phương trình, nếu phương pháp của chúng ta cho phép, chúng ta có thể tìm thấy mọi tính chất hình học khách quan cơ bản của đường cong. Khi biết được các tính chất này, với cơ sở cần thiết, chúng ta có thể tìm được bản chất vật lý của các tính chất đó.

## THẾ GIỚI TRONG CÁC TỌA ĐỘ

Sau khi đã bắt buộc đại số phải làm việc trong lĩnh vực hình học (và không chỉ trong hình học, mà cả trong vật lý, hóa học, sinh học, địa lý ...), về thực chất, Đêcác đã thấy trước được nhiều quan điểm mà chúng ta cho là thành tựu của những thời kỳ sau này. Chẳng hạn, khi nghiên cứu những quy luật tư duy của con người, đặc biệt những quy luật thực hiện các phép tính số học, chúng ta đã đi tới những mô hình xác định của các phép tính và tìm thấy khả năng bắt máy phải thực hiện các phép tính này. Đối với máy tính, loại thông tin nào được đưa vào máy, điều đó không quan trọng chỉ cần thông tin này có những thuộc tính lôgic — hình thức thuộc phạm vi xử lý của máy. Máy «xử lý» lại mọi thông tin theo các quy luật người ta đã « dạy » cho và đưa ra kết quả đã tính được, còn cách giải thích kết quả này như thế nào tùy thuộc vào người đã cung cấp thông tin cho máy.

Trong trường hợp chúng ta đang xem xét, đại số học đang đóng vai trò của cái máy toán học như vậy. Đối với nó, những đối tượng khác nhau — hình học, vật lý hay một đối tượng nào khác – có ý nghĩa cụ thể như thế nào, điều đó không quan trọng. Mỗi lần những đối tượng đó có những thuộc tính đã cho và đưa vào phạm vi xử lý của đại số, chúng sẽ được «chiếc máy» đại số xử lý, giống như mọi đối tượng khác có cùng những thuộc tính như vậy.

Toán học, nhìn toàn bộ — cũng là một dạng nhận thức thực tế. Đặc điểm đặc trưng của toán học là đặc trưng trừu tượng của chân lý toán học (ngoài ra, đặc tính trừu tượng này vượt xa hẳn những gì được thấy trong các ngành khoa học khác), cũng như quan điểm định lượng — không gian đặc sắc với mọi hiện tượng của thế giới bên ngoài.

Đại số — đó là một lĩnh vực toán học, trong đó những đặc điểm của toán học được thể hiện một cách rõ ràng nhất. Nó đạt đến một mức độ trừu tượng mà hình học chưa đạt đến được. Những đối tượng của hình học dù sao vẫn còn khá cụ thể — đó là những hình dạng không gian của thế giới hiện thực. Tư duy trên những loại hình như thế — đó là một thuộc tính không tách rời được trong tư duy con người, vì thế, về nguyên tắc, không thể có toán học nếu không có hình học. Nhưng khi chỉ còn là một lĩnh vực của toán học với những đối tượng nghiên cứu cụ thể, hình học phải chịu ảnh hưởng của một lĩnh vực hoàn toàn thoát khỏi đặc tính cụ thể như thế. Đó là điều không thể tránh khỏi. Lĩnh vực toán học như vậy, trong trường hợp cụ thể này, chính là đại số.

Không nên nghĩ rằng do kết quả phát minh của Đêcác, đại số học đã bắt hình học phải phụ thuộc mình. Không có sự khống chế và bắt phục tùng như vậy. Chỉ có sự hợp nhất của hai lĩnh vực thành một thể toàn vẹn dưới dạng bộ môn hình học giải tích — một sự hợp nhất có lợi như nhau, cả cho đại số lẫn cho hình học. Khi chuyển từ hình học sang đại số, qua công cụ là phương pháp tọa độ, thoạt đầu dường như chúng ta hoàn toàn quên mất rằng chúng ta đang tiếp xúc với hình học. Nhưng sau đó, khi đại số học đã đến giúp đỡ chúng ta tìm ra một vài kết quả nào đó, nhất thiết phải quay trở lại hình học, để nhận thức xem kết quả nhận được có ý nghĩa gì trong ngôn ngữ của hình học. Nếu không có sự quay trở lại ấy, nếu thiếu sự cần thiết của sự quay trở lại như vậy, thì rõ ràng là hình học giải tích thật chẳng cần thiết.

Giờ đây thật khó tưởng tượng lại có một lĩnh vực tri thức nào lại không có một dạng nào đó của hình học giải tích.

Khi chúng ta nhìn vào đường cong nhiệt độ theo dõi một bệnh nhân nào đó, thì đó chính là hình học giải tích. Ở đây, trên trục hoành là yếu tố thời gian, trên trục tung — là nhiệt độ. Sau khi liếc nhìn đường cong nhiệt độ này, ngay lập tức mỗi bác sĩ sẽ hình dung rõ ràng về sự tiến triển của bệnh tật, ít nhất theo một cách thức thể hiện của bệnh đó.

Khi người hoa tiêu vạch trên bản đồ tuyến hành trình của con tàu — thì đó cũng là hình học giải tích. Bề mặt quả đất được minh họa một cách sơ bộ trên mặt phẳng, kết quả là ta nhận được tấm bản đồ địa lý. Các tọa độ của mỗi điểm trên tấm bản đồ này là những hàm nào đó của các tọa độ địa lý (vĩ độ và kinh độ) của điểm tương ứng trên mặt đất, và khi mong muốn, có thể xem như chúng bằng chính các tọa độ này. Mỗi tuyến hành trình — đó là một đường cong nào đó. Đường cong, trong mức độ nào đó, sẽ phụ thuộc vào mục đích đặt ra cho người hoa tiêu. Nếu mục đích này là hướng con tàu đi theo một đường đi ngắn nhất trên mặt đất, thì sẽ nhận được một đường cong. Nếu đòi hỏi con tàu cắt mọi kinh tuyến với cùng một góc độ, (điều này làm đơn giản hóa nhiệm vụ của người cầm lái — chỉ cần giữ vững bánh lái suốt thời gian trên một rumbơ (1) thì sẽ nhận được một đường cong có tên gọi là đường tà hành (lôcxôđrôma). Trên những đường cong khác nhau, đường tà hành như thế được thể hiện theo nhiều vẻ khác nhau. Người hoa tiêu cần biết cách nhìn nhận phương trình của đường trong hệ tọa độ đã đưa trên tấm bản đồ như thế nào. Khi biết phương trình, anh ta sẽ tính được tọa độ các điểm mà đường cong đi qua, và vì vậy, anh ta sẽ đánh dấu được những địa điểm mà con tàu sẽ đi qua. Khi biết phương trình, anh ta có thể tính được (một cách chính xác hay gần đúng) độ dài cung đường cong, và vì vậy sẽ biết được thời gian mà con tàu, khi đi theo quỹ đạo đã định, sẽ đến một địa điểm nhất định trên mặt đất ...

(1) Xem phần phụ lục (N. D)

Còn những con tàu vũ trụ bay như thế nào, theo những quỹ đạo nào và tính toán những quỹ đạo này ra sao?

Những con tàu vũ trụ bay theo các quỹ đạo xác định theo quy luật vạn vật hấp dẫn. Nếu nói về một con tàu riêng biệt và một hành tinh độc lập mà con tàu bay ngay gần nó, thì quỹ đạo là một trong những đường cong bậc 2. Quỹ đạo như vậy sẽ có phương trình xác định trong một hệ tọa độ nào đó liên quan đến Trái đất, Mặt Trời hoặc với những vì sao «bất động» khác. Hình học giải tích cho khả năng tìm được phương trình này, và hơn nữa còn chỉ rõ vị trí của con tàu tại mọi thời điểm bất kỳ.

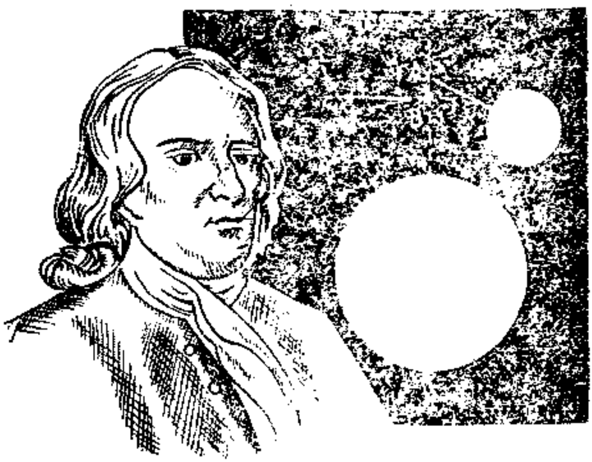
Nhưng cần phải nói rằng, mỗi hành tinh, mỗi con tàu vũ trụ — đó không phải là những điểm, và vì vậy đường đi của con tàu — đó không phải là những đường cong bậc 2 lý tưởng, nhận được tương ứng với định luật vạn vật hấp dẫn. Cũng như vậy, con tàu vũ trụ chuyển động không phải trong trường của một hành tinh, mà của nhiều hành tinh. Quỹ đạo chuyển động của nó phức tạp hơn nhiều so với đường cong bậc 2 sơ cấp. Vì vậy không thể tính toán quỹ đạo như vậy nhờ dựa vào hình học giải tích mà chúng ta đã làm quen ở trên. Còn nhiều phương pháp nghiên cứu toán học hiện đại, mạnh hơn nhiều, đến giúp sức, nhưng cơ sở của nhiều phương pháp mới ấy vẫn là phương pháp tọa độ đã nêu.

## TRÁI ĐẤT TRÊN ĐẦU NGÒI BÚT

Phương pháp tọa độ đã cho phép nhà thiên văn Pháp Loverie[1] đưa ra giả thuyết về ảnh hưởng của một hành

(1) Leverrier (1811 – 1877), thành viên Viện HLKH Pari (1848) (N.D.)

tinh chưa biết đến quỹ đạo chuyển động của hành tinh Uran trong khi ông nghiên cứu đặc tính không chính quy trong chuyển động của hành tinh này (tức là độ lệch của quỹ đạo chuyển động của hành tinh so với quỹ đạo dự tính mà nó phải có, dựa theo định luật vạn vật hấp dẫn). Chẳng bao lâu, hành tinh mới ấy đã được phát hiện. Đó là hành tinh Neptun (Hải vương tinh), như mọi người đều biết. Thật tuyệt vời! Niềm vui của những nhà khoa học thật là vô hạn. Loverie đã phát hiện ra một hành tinh mới ngay «trên đầu ngòi bút»!



Thế là thế nào? Một phát hiện khoa học bình thường ư? Hay cũng có thể đó là một sự lãng mạn của một chiến công khoa học? Vậy thì sự lãng mạn là gì và những gì lại không phải là sự lãng mạn?

***

... Những gợn sóng trắng trên đỉnh những làn sóng nhẹ lấp lánh dưới những tia mặt trời chói chang, tưởng như không gì chịu dựng nổi, và ba chiếc thuyền buồm nhỏ nhắn, kiêu diễm, với những cánh buồm no gió, đầy tự hào, đang lặng lẽ lướt trên bề mặt vô hạn của đại dương kỳ diệu. Gió dịu dàng nhưng sôi nổi ca bài ca vô tận của mình giữa những cánh buồm kéo căng, và anh thủy thủ cháy nắng, để râu, ngồi trên chiếc thuyền tròn trong khoang dưới chân cột cờ, đang cõng mắt nhìn khoảng không xa xăm đang bị che khuất bởi màu khói xanh lơ, với niềm hy vọng tha thiết là cuối cùng, sẽ nhìn thấy mảnh đất này, cho dù đó là mảnh đất hoang dại và lạnh lùng, nhưng vẫn là mảnh đất chờ mong và hy vọng từ lâu...

Hoặc như trong tiểu thuyết «người anh hùng thời đại» của Lecmontốp:

«... Và giờ đây, ở chính nơi đây, trong bức thành buồn tẻ này, lướt nhanh qua những chuyện đã xảy ra, tôi thường tự hỏi: Vì sao tôi lại không muốn bước vào con đường rộng mở cho tôi, nơi những niềm vui thầm lặng và tâm hồn thanh thản đang đợi chờ tôi... Không! tôi không thể sống với số phận này. Tôi giống như một thủy thủ, sinh ra và lớn lên trên boong tàu cướp, tâm hồn đầy những giông bão và những trận chiến đấu. Bị ném lên bờ, anh ta buồn chán và khổ sở, dường như trên đời chẳng có một rừng cây râm mát, một mặt trời thanh bình chiếu sáng cho anh ta. Suốt ngày, anh ta đi dọc theo bờ cát ven biển, lắng nghe tiếng rì rào đơn điệu của những làn sóng biển và lặng nhìn vào khoảng xa mù sương, chờ đợi, liệu giữa đường phân cách giữa khoảng màu xanh da trời với vùng màu xanh xám kia có thoáng hiện chăng một cánh buồm mong đợi, thoạt đầu nó giống như một cánh hải âu, nhưng ít nhiều cũng đã tách biệt với làn bọt sóng, và thoáng chốc đã lướt tới những bến bờ xa vắng...»

Ai dám nói rằng: đây không phải là lãng mạn? Điều này đã, đang và sẽ thật lãng mạn, như tầm cao mà tiến bộ khoa học kỹ thuật có thể đạt được. Đó là tính lãng mạn của biển cả, tính lãng mạn của những cuộc du lịch và những phát hiện địa lý. Đó là Giuyn Vecnơ và Main Ridơ. Đó là Cuc và Lapêrudơ. Đó là những hòn đảo phủ đầy những rừng cây kỳ lạ và những đảo băng xanh, cao...

Nhưng, còn nếu như thế này:

... Dưới chao đèn trắng, ngọn đèn tỏa ánh sáng yếu ớt trong căn phòng nhỏ chất đầy những giá sách và tủ sách. Mặt bàn để lung tung những tờ giấy viết, trên đó chẳng có gì khác ngoài những công thức và những dòng giải thích ngắn gọn. Ngồi bên bàn là một người trẻ tuổi (hay đó là một người đã có tuổi, hoặc đầu tóc rối bù, hoặc đầu tóc chải chuốt bình thường như mọi người khác). Ông ta lúc thì lúi húi viết trên những trang giấy, lúc lại ném những tờ giấy đã viết dở vào giỏ đựng rác đặt dưới gầm bàn, lúc đứng dậy, đi quanh phòng, và lúc lại nằm xuống chiếc đi văng...

Hình ảnh Lơverie trên một trăm năm trước là như vậy. Tên tuổi của nhà nghiên cứu, tên tuổi của nhà du lịch đã được bao quanh bởi vầng hào quang thơ mộng — lãng mạn, nếu ông ta, sau những cuộc viễn du lâu dài, đầy những phiêu lưu và mạo hiểm, đã phát hiện ra một quần đảo mới, một lục địa mới, một dãy núi mới. Phát hiện của Lơverie, rõ ràng chúng ta không xếp vào lớp những phát hiện đầy tính lãng mạn, ít nhất ngay từ khi mới nhìn thoáng qua. Thế thì vì sao? Chẳng lẽ đó không phải là một chiến công? Chẳng lẽ đó không phải là một thắng lợi của trí tuệ và lòng kiên trì? Chẳng lẽ, nhà bác học, khi lướt ngòi bút trên mặt giấy, trong lòng lại kém hồi hộp hơn người thủy thủ ngồi trên chiếc thùng trong khoang dưới chân cột cờ của chiếc thuyền buồm nhỏ nhẹ? Con người đã tặng cho nhân loại cả một hành tinh! Chúng ta không có quyền tước đi vầng hào quang thơ mộng — lãng mạn của con người ấy. Đó cũng là Lapêrudơ, cũng là Cúc.

Nhưng khi hân hoan với phát hiện của Lơverie, vì sao chúng ta lại lãng quên rằng phát hiện này hoàn toàn không phải là phát hiện duy nhất cùng loại. Từ thế kỷ 17, dựa vào lý thuyết hấp dẫn của mình, I. Niutơn đã đưa ra giả thuyết rằng Trái Đất không phải là hình cầu. Thực thế, vì phần xích đạo của quả đất chịu những lực ly tâm lớn đối kháng với các lực hút về phía tâm, so với các phần gần cực, thì rõ ràng là chúng cũng sẽ cách xa tâm hơn. Khi biết tốc độ quay của Trái Đất và các kích thước của nó, sẽ có thể tính gần đúng đại lượng co nén này.

Viện hàn lâm khoa học Pari đã tổ chức nhiều đoàn nghiên cứu chuyên đề với mục đích phát hiện đặc trưng cong của kinh tuyến bằng cách quan trắc trực tiếp trên bề mặt quả đất. Các đoàn nghiên cứu chuyên đề đã tiến hành quan trắc ở các vĩ độ khác nhau và đã xác nhận giả thuyết Niutơn là đúng.

Đặc biệt, ngay cả viện sĩ trẻ tuổi Môpectuy cũng là một thành viên của một đoàn nghiên cứu chuyên đề ở vĩ độ cao. (Ông đứng đầu đoàn nghiên cứu chuyên đề). Báo cáo của Môpectuy trên phiên họp của Viện hàn lâm đã gây một chấn động lớn. Nguyên là trước đó không lâu, một đoàn nghiên cứu chuyên đề do Caxini đứng đầu đã tiến hành những đo đạc độ cung của vĩ tuyến trên lãnh thổ nước Pháp. Đoàn đã nhận được những kết quả có liên quan đến độ cong của kinh tuyến trên lãnh thổ này.

Sau khi ngoại suy những kết quả nhận được ra toàn kinh tuyến, Caxini đi đến kết luận là *Trái Đất không bị nén dẹt mà ngược lại, lại bị kéo dài dọc theo trục quay của mình.*

Phát hiện của Môpectuy đã bác bỏ kết luận thật đáng tức cười này một cách rực rỡ. Vônte, người bạn thân của Môpectuy, đã chúc mừng ông nhân thành tựu khoa học xuất sắc này và nhân dịp ông ta đã « nén dẹt được quả đất, mà không nhất trí với bá tước Caxini ». Nhưng vài năm sau, Vônte đã cắt đứt quan hệ bạn bè với nhà bác học. Và như thường tình, trong trường hợp này, những lời tán tụng cũng dần lui bước, nhường chỗ cho những lời công kích. Môpectuy là ai? Ông ta là người thế nào? Và ông ta đã làm gì? Kết quả đã xuất hiện những câu thơ sau đây, đầy tính châm biếm chua cay, rất đặc trưng của Vônte :

*Vị sứ giả của vật lý, nhà vượt biển dũng cảm,*

*Sau khi đã từng chinh phục được cả núi non và biển cả,*

*Và kéo lê chiếc máy đo góc giữa tuyết trắng và đầm lầy*

*Chút nữa trở thành người Lôparơ* (1),

*Sau bao thất bại đã thừa nhận rằng :*

*Niutơn chẳng biết gì vì chẳng bao giờ bước ra khỏi cửa.*

Chúng ta cũng chẳng can thiệp vào cuộc tranh cãi của hai con người lỗi lạc này. Đó chỉ là những việc làm riêng tư của cá nhân họ. Nhưng điều đáng quan tâm lại là : những lời châm biếm ý nhị ấy đã lưu ý đến một

---

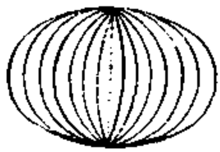
(1) Xem phần phụ lục. Chú ý rằng đoàn nghiên cứu chuyên đề hoạt động ở vùng Laplandi.

điểm đặc trưng nhất trong một sự thật là : Niutơn không bước ra khỏi cửa, nhưng đã thực sự xác định được tính dẹt của Trái Đất. Chỉ xác định ngay trên đầu ngòi bút! Giống như Lơveriê đã làm sau này! Nhưng có điều kỳ lạ là : về Lơveriê, người ta nói cụ thể trong văn bản, trong đó người ta muốn nhấn mạnh khả năng to lớn của toán học. Còn về Niutơn, người ta nói khá nhiều, và thậm chí — cũng là tất nhiên thôi — còn nhiều hơn cả so với Lơveriê, nhưng không rõ tại sao, người ta lại không lưu ý thấy chính phát hiện của Niutơn cũng chỉ cùng loại với phát hiện của Lơveriê, và ông đã phát hiện trước Lơveriê đến hàng mấy chục năm. Mà những thí dụ tương tự có khá nhiều.

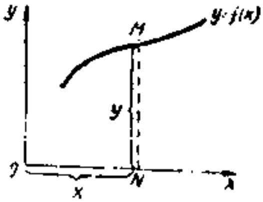
Nhân đây cũng cần nói thêm một điều. Tương ứng theo Niutơn, khi bị nén dẹt dọc theo trục, Trái đất có dạng êlipxôit tròn xoay, tức là mặt được tạo thành do xoay êlip xung quanh trục nhỏ của nó (hình 19). Trên những tấm bản đồ chính xác hơn so với những bản đồ trong đó Trái Đất được xem như có dạng hình cầu, hành tinh của chúng ta được thừa nhận là có dạng êlipxôit như vậy. Đó là *êlipxôit chuyên ngành*.

Nhưng nếu đòi hỏi một mức độ chính xác cao hơn, thì Trái Đất cũng không phải là có hình êlipxôit tròn xoay. Nó chỉ gợi lại hình êlipxôit một cách gần đúng. Dạng thực đúng của Trái Đất — đó là một dạng riêng của quả đất, và do nguyên nhân đó mà có tên gọi là dạng *ghêôit*. từ « ghêôit », khi dịch, có nghĩa là bề mặt giống như Trái Đất. Đây không phải là bề mặt được tạo nên bởi những lũng sâu và các vùng nhô cao của trái đất. Chúng ta sẽ nhận được ghêôit nếu chúng ta cắt toàn bộ Trái Đất bằng một mạng lưới những kênh rạch nhỏ và dẫn đầy nước vào đó. Bây giờ, sau khi bỏ đi những gì cao hơn mặt nước, chúng ta sẽ có một ghêôit.

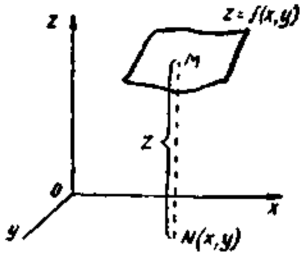
Ý tưởng Trái Đất có dạng không chính quy đã được nhà toán học và cơ học Pháp Laplaxơ tiên đoán từ lâu. Chính ông đã đề nghị gọi tên dạng như thế là ghêôit.



Hình 19




Hình 20




Hình 21

Nhân tiện cũng cần nói rằng: điều ước đoán là chúng ta có quan hệ đến vật thể không chính quy cũng có phần quan trọng không kém gì việc phát hiện ra Hải vương tinh. Phát hiện này cũng dựa hoàn thành ngay trên đầu ngòi bút nhờ công cụ toán học hiện đại thời Laplaxơ. Không thể tưởng được có ngành toán học này nếu không có phương pháp tọa độ và một hệ quả tự nhiên của nó — phép tính vi phân và tích phân.

Việc sử dụng phương pháp tọa độ không chỉ góp phần tự động hóa, đơn giản hóa cách giải bài toán hình học, mà trong một mức độ đáng kể, nó còn giúp cho chính sự trực quan hình học. Nếu chúng ta chưa quen hình dung mỗi hàm một biến dưới dạng một đường cong phẳng nào đó (hình 20), và mỗi hàm hai biến dưới dạng một mặt nào đó (hình 21), (ở đây cũng sử dụng đến phương pháp tọa độ trong không gian), thì thật đáng nghi ngờ là liệu chúng ta có biết cách phát hiện thấy những tính chất đơn giản nhất của các hàm đó không? Mỗi lần nảy sinh ra câu hỏi: cách hình dung nào đó cho ta khả năng ước đoán được các tính chất nào đó của hàm số, thì chắc là ý nghĩ không cần có sự hình dung tương ứng, sẽ không còn trong đầu óc chúng ta. Sau này, khi quay trở lại các bài toán lớn thời cổ đại và những hệ quả do các nhà toán học kiên trì không muốn từ bỏ cách tìm kiếm lời giải các bài toán này, chúng ta sẽ thấy rõ phương pháp tọa độ hoạt động ở đó ra sao. Bây giờ, chúng ta sẽ quay trở lại với nhân vật chính của chúng ta, mà khá lâu chúng đã bị biệt tăm.

## NHÀ BÁC HỌC ĐACTANHAN

Có chuyện gì đã xảy ra đối với người đã sáng tạo ra ngành hình học giải tích kể từ khi chúng ta tạm để ông yên nghỉ vào cuối năm 1918 trong một thành phố Hà Lan, với người thầy và người bạn Becman của mình?

Những ý tưởng về ngành toán học mới vẫn chưa đạt đến tình trạng để có thể mô tả chúng dưới dạng những lập luận toán học hay triết học. Điều đó mãi đến năm 1637 mới xảy ra, khi viết tác phẩm cơ bản «những thử nghiệm» của mình, Đêcác đưa vào một chương nhỏ với tên gọi là «hình học», Nhưng những quan điểm cơ bản chứa đựng trong chương «hình học» này thực ra đã được lưu ý từ khi người lính tình nguyện còn ở *Bređơ*

Trung đoàn Đêcác phục vụ lúc đó không hoạt động gì. Xứ Hà lan quê kệch thời đó cũng đã được ông tìm hiểu khá đầy đủ. Đặc biệt, Đêcác bắt đầu hiểu ngôn ngữ Hà Lan một cách tàm tạm và bắt đầu nói được bằng ngôn ngữ này. Nhưng từ chân trời xa, những nước châu Âu hiện rõ dần, nước này lại hấp dẫn hơn nước khác. Người lính trẻ liền quyết định đi sang Đức với lý do là sẽ phục vụ trong đội quân Nhà Thờ. Vào thời đó, cuộc chiến tranh Ba Mươi Năm (1) đã xảy ra. Để tránh những vùng chiến sự, cần phải đi theo con đường vòng — qua Côpenhaghen, Đanxich, Ba Lan, Hunggari. Sau khi đã đến nước Đức, Đêcác đăng ký vào đội quân của công tước Macximiliam Bavaexki. Nhưng ý đồ bảo vệ quyền lợi của hoàng đế Đức Pheccđinăng, mà nói riêng, quân đội được tập hợp lại là để phục vụ ông ta, thật ít hấp dẫn Đêcác. Mục đích của Đêcác hoàn toàn khác — ông muốn mở rộng sự quen biết của mình với giới khoa học, và điều này tốt nhất là tiến hành ngay trong triều đình của hoàng đế.

Như chúng ta đã nhận xét ở trên, Đêcác đã đến thăm Unma, và đúng tại đây ông đã mộng thấy ba giấc mộng «tiên tri» nổi tiếng của ông.

Giờ đây người ta lưu giữ được rất ít những nguồn tin đáng tin cậy về việc Đêcác tham gia vào các hoạt động quân sự. Có thể là ông đã tham gia vào một trong những trận đánh chủ yếu của cuộc chiến tranh Ba Mươi Năm — trận đánh ở Núi Trắng, ngoại ô Praha. Chúng ta chỉ biết những gì đã xảy ra sau trận đánh này.

Rời bỏ đội quân mà ông đã chán ngấy, những diễn biến quân sự (đối với ông) cũng đã lùi xa, và cũng có thể là sau khi từ biệt nước Đức, ông đã trở về nhà.

Sau khi đã vượt qua biết bao nhiêu trở ngại do chiến tranh gây ra, cùng với người hầu của mình, người lính — nhà bác học trẻ tuổi cuối cùng đã đến được Phơrixlanđia(2) và thỏa thuận với thuyền trưởng của một chiếc tàu nhỏ một khoản tiền vừa phải để làm một chuyến ngang qua nước Pháp.

(1) Xem phần phụ lục (N.D)

Con tàu nhỏ bé chỉ có khả năng chạy dọc theo ven biển. Ngoài thuyền trưởng và một người phó của ông, đội thủy thủ chỉ còn vài thủy thủ với nhiệm vụ là trông coi các cánh buồm trên hai cột cờ không cao lắm và làm vệ sinh mặt boong tàu đã nứt nẻ. Người ta dẫn hành khách vào một khoang nhỏ ở đuôi tàu. Đêm sau, sau cơn mệt mỏi, trằn trọc trên chiếc giường gỗ trong khoang tàu chật hẹp nhưng thoáng mát. Đêcác bước lên boong tàu. Tựa khuỷu tay vào chiếc dây thừng làm lan can bao quanh boong, Đêcác say mê lặng ngắm biển Bắc trong cảnh đêm khuya. Ánh trăng rực chiếu vạch trên mặt nước đen sẫm một vạch sáng lóa, lấp lánh thành nhịp đều đặn theo những con sóng rung rinh, như vẫy gọi một cái gì đó chưa từng biết, bí ẩn, vĩnh hằng. Đôi khi một làn sóng tới, ồn ào vỗ vào mạn tàu, tung ra muôn vàn giọt nước lấp lánh, cho người mơ ước vượt biển biết cái hương vị mát và mặn từ vùng đáy sâu bí ẩn của biển. Đôi khi từ trong sự huyền ảo của ánh trăng kỳ diệu, mặt biển đột nhiên bị chia cắt bởi cái vây sắc nhọn và kiên định của một cư dân bí ẩn nào đó trong biển cả, và rồi đó, mặt biển lại chết lặng trong cảnh bất động — lung linh của mình. Xa xa, đến tận cuối chân trời, những điểm sáng lấp lánh. Có thể, đó là những ánh lửa trên boong của những con tàu lớn đang vượt biển. Cũng có thể đó là những chớp sét của một cơn dông xa xăm và không nghe rõ tiếng.

Đứng khuất trong bóng của một cánh buồm lớn nghiêng nghiêng trên boong tàu, Đêcác chậm chạp điểm lại trong trí nhớ những sự kiện vừa thoáng qua trong cuộc đời người lính; những hình ảnh của thời thơ ấu xa xưa trôi trôi qua trên mảnh đất Lavê bé nhỏ, bên bờ một dòng suối tuyệt đẹp: những năm tháng theo học những vị tu sĩ dòng Tên mà trong triết học của mình, họ không nâng cao thêm những quan niệm đã được thừa nhận chung về ý nghĩa và nội dung của các khoa học đã được giảng dạy, nhưng lại hiểu rất rõ những mục tiêu mà họ phải dẫn dắt học trò mình đến, và nắm vững những phương tiện nhờ đó có thể đạt được những mục tiêu này...

Cần phải có một sự nỗ lực tự giác như thế nào đó để thoát khỏi cảnh mê muội và lắng nghe thấy những lời nói từ buồng lái vọng lại. Đềcác đã nhận ra giọng nói của thuyền phó và người thủy thủ râu đen, vai rộng đã từng làm anh ngạc nhiên bởi nét mặt đặc biệt của anh ta, ngay từ lúc họ đang chất hàng lên tàu. Với vẻ hững hờ, vô tư, nhưng ngay lúc đó Đềcác cũng đã nhận ra vẻ chăm chú khác thường thật khó dấu kín của anh ta, mặc dù anh chú ý nhiều hơn đến chiếc rương to nặng mà người hầu của anh đang thận trọng từng bước trên chiếc cầu tàu, để mang lên tàu.

Hai người nói chuyện bằng tiếng Hà Lan.

— Anh tin là [người Pháp không hiểu tiếng Hà Lan hay sao?

— Người thuyền phó hỏi.

— Đúng thế đấy, đúng như bây giờ đang là đêm tối vậy — Người thủy thủ trả lời — Ngay từ khi ở trên cảng, tôi đã cố ý nói to thêm cho tên Guden cao ngỏng đang đứng cạnh anh lính để hắn thận trọng vì cái mũi nhọn của anh lính còn dài hơn cả thanh kiếm dài của hắn ta, nhưng cả anh lính lẫn người hầu anh ta chẳng tỏ ra là hiểu gì cả. Còn nếu những lời nói ấy là nhằm chỉ vào chúng ta, chắc chắn thì dù là chàng trai nào, cũng đã lao vào trận đánh lộn rồi. — Nhưng điều đó cũng chưa nói được gì cả, — Thuyền phó phản đối. Nhưng, — thuyền phó nói thêm sau một phút lặng im, — Cũng có thể là anh nói đúng. Dù sao đối với chúng ta cũng tốt hơn.

Những tiếng nói chuyện im bặt. Vài phút sau, thuyền phó lại bắt đầu.

— Khi nào anh muốn thanh toán bọn hắn? Thuyền phó hỏi.

— Ngày mai, lúc chập tối — Người có râu đen trả lời. Cần sao cho bọn chúng chưa kịp trốn vào trong chiếc hòm của mình. Tôi đã báo cho Guđen. Chúng tôi đã sẵn sàng.

— Thuyền trưởng có biết không?

— Guđen đã nói cho ông ta. Chỉ có việc im đi. Chiếc rương sẽ thuộc về tôi. Những thứ còn lại, những người khác có thể chia nhau.

Lại im lặng, rồi thuyền phó lại phá vỡ cảnh im lặng·

— Hãy làm đúng như thuyền trưởng đã nói. Đừng quá đáng, Quỉ Đen ạ! Người ta đã có lần sắp xếp cái án tử hình Vácphôlômêi thần thánh cho anh, trong khi anh còn hòng lẩn tránh nhiều bản án khác. Hãy thử xem. sau lần thứ hai, anh lại đang chờ đợi cái án lần thứ ba đấy. Anh sẽ tự đưa mình vào địa ngục thôi!

Đêcác nghe thấy rõ người có râu đen thở dài qua lỗ mũi và tiếp đó thở phì phì về bực bội. Không nên lãng phí thời gian. Thận trọng lần theo từng khoảng sẫm tối đen tối nhất bên boong, Đêcác về đến cửa khoang phòng, nhanh nhẹn đóng cửa cài chặt then, và cố không gây ra một tiếng động thừa, anh đánh thức người hầu dậy. Vốn hiểu biết tiếng Hà Lan mà anh đã nhanh chóng đạt được nhờ sự giúp đỡ to lớn và chí tình của Becman, đã có lợi cho anh xiết bao. Ngôi sao hộ mệnh đã may mắn thúc đẩy anh lên boong tàu, đúng vào lúc những tên cướp thiếu thận trọng đang chính xác thêm kế hoạch hành động độc ác và tàn bạo của mình, mới kỳ diệu làm sao! Một kế hoạch đối phó đã được nhanh chóng tạo ra để chống lại kế hoạch của bọn cướp này. Chỉ có tính thần tốc và sự kiên quyết mới có thể đảm bảo cho kế hoạch này thành công.

Rạng đông, những đường bờ biển khúc khuỷu hiện rõ bên phía trái boong tàu. Gió đã đổi hướng và toàn đội thủy thủ đã được gọi lên trên boong, về phía cánh buồm.

Khi thuyền trưởng xuất hiện trên boong, con tàu đã lướt đều đều xa bờ, tránh xa đụn cát đã nổi cao trên mặt biển.

Bỗng nhiên, những cánh cửa ra vào của khoang hành khách bật mở và cả hai người Pháp lao nhanh từ trong khoang ra. Bằng một đòn khéo léo, Đêcác đã quật ngã thuyền trưởng, đồng thời họng súng trong tay người hầu đã chĩa thẳng vào thái dương người bị ngã. Một tay súng, một tay kiếm, nhanh như chớp, Đêcác đã quay ngoắt lại bọn còn lại và quát to bằng tiếng Hà Lan : « Đứng im, lũ vô lại ! Hơi nhúc nhích là chúng ta sẽ bắn vỡ đầu thuyền trưởng của lũ bay ».

Những tên cướp hoàn toàn bất ngờ, đứng im như chết. Sau khi bước lên chỗ thuyền trưởng đứng, Đêcác hạ lệnh đổi hướng buồm, vòng ngoặt về phía trái, và chẳng mấy chốc, con tàu đã nhẹ nhàng xô vào dải cát ven bờ. Chĩa nòng súng musơket (1) vào tên thuyền trưởng, Đêcác hạ lệnh cho người hầu của mình ném mọi hành lý lên bờ, rời khỏi tàu, nhảy lên bờ và hướng họng súng vào tên thuyền phó. Sau đó, đến lượt anh nhảy lên bờ. Sau khi vứt bỏ thanh kiếm, tay trái anh lấy ra một khẩu súng thứ hai.

Dưới sự điều khiển của ba tay súng, những tên cướp lại kéo buồm, rời xa bờ và một lúc sau đã đi xa dần.

Những con người dũng cảm đã được tự do. Mối đe dọa bởi những tên cướp vung nắm đấm dọa dẫm và phun ra những lời chửi rủa, căn cứ theo hành động sau đó của chúng, cũng không còn làm họ lo lắng nữa. Trước mắt

(1) Xem phần phụ lục

họ là nước Pháp. Chỉ một vài ngày đường và rồi mảnh đất Turăng thân thuộc lại dang tay đón đứa con hiếu động của mình cùng người hầu chung thủy của anh.

Chắc có lẽ chẳng có một quy luật chặt chẽ nào giữa tính táo bạo của những tư duy khoa học với tính dũng cảm cá nhân của nhà bác học. Nhưng trong phần lớn các trường hợp mà chúng ta đã biết, cả hai đặc tính có mối liên hệ trực tiếp với nhau. Đêcác, nhà bác học dũng cảm và một con người không hề biết sợ — là như vậy. Chính ông đã kể lại trong các hồi ký của mình về cuộc tiếp xúc với những tên cướp trong chuyến du lịch đường biển. Nhờ thanh kiếm mà có lẽ ông nắm được kỹ thuật sử dụng đến trình độ của Đactanhan, ông đã buộc những tên cướp phải cập bến, tạo điều kiện cho ông và người hầu lên bờ. Cũng có thể ông đã lắng nghe được câu chuyện giữa những tên cướp không phải trong bóng đêm tối đen, cũng có thể ông đã buộc được tên thuyền trưởng phải phục tùng mệnh lệnh của mình không phải bằng cách hăm dọa hắn, như chúng ta đã vừa kể trên đây, nhưng câu chuyện sau đây lại có thể xảy ra.

Sau nhiều năm sống ở Pháp, Đêcác đã đi du lịch ở Italia. Ông đã đến thăm Rôma, Vơnidơ, Pholorenxia, Lôrectô (Lôrectô được xem như đã thực hiện lời nguyện của mẫu thần Lôrectô từ khi trong những giấc mơ tiên tri đã hé mở cho ông thấy thực chất của ngành khoa học mới, vạn năng, theo như lời ông nói). Cuộc sống ở Pari đầy những thú tiêu khiển thanh nhã, những cuộc tranh luận khoa học và nghệ thuật. Đêcác ngày càng thiên về ý nghĩ phải trình bày những quan điểm của mình trên giấy. Nhiều bạn bè của ông cũng khuyên ông như vậy. Nhưng nước Pháp với đặc tính không thể dung thứ về mặt tôn giáo và chủ nghĩa tuyệt đối phi tôn giáo thật ít thuận lợi đối với mục tiêu này. Đêcác lại nghĩ về đất nước Hà Lan đáng yêu và mến khách mà ngay cả cuộc tiếp xúc với những tên cướp không thể xóa nhòa những ý nghĩ tốt lành về đất nước này trong ông. Đây là một đất nước có một không hai, « có thể tận hưởng sự tự do đầy đủ, ở đây có thể hoàn toàn yên tâm mà ngủ » — Ông đã viết như vậy.

Đêcác, một con người vĩ đại, không quen ngồi yên một chỗ, thoạt đầu chuyển đến Đorơtơrekhơ, đến Becmen, người bạn cũ của mình (theo mức độ thời gian của tình bạn, chứ không phải theo tuổi tác). Một thời gian sau đó, ông lại chuyển từ Đorơtơrekhơ đến Phơranêke, tiếp đó lần lượt ông đến sống ở Amxtecđam, Lâyđen, Đeventơrơ, Utơrekhơ, Gaclevicơ,...

Ở đây, trên đất nước Hà Lan, Đêcác đã viết tác phẩm « Hình học » của mình, một tác phẩm hoàn toàn không lớn lắm, nhưng có quyền được coi là hạt ngọc trai của các tác phẩm hình học.

Đêcác, theo chính lời ông kể, chính là một kẻ thù của nhưng cuốn sách dày. Ông nói rằng những thế hệ sau này sẽ cám ơn ông không những vì những gì ông đã viết, mà vì cả những gì ông đã không viết ra, vì chính bằng cách đó ông đã tạo cho họ khả năng và sự thỏa đáng để tiếp tục suy nghĩ một cách độc lập, lẽ tất nhiên là bằng những quan điểm mà ông đã đặt nền tảng cho họ.

## MUỐN TRỞ THÀNH NHÀ TOÁN HỌC GIỎI

Nhà bác học chỉ đến nước Pháp một vài lần và trong từng khoảng thời gian ngắn. Nhưng các bản luận văn của ông được giới khoa học ở các nước châu Âu say sưa đọc, tên tuổi của ông được nổi tiếng khắp thế giới. Nữ hoàng Thụy Điển Crixtina mời ông sang ở Xtốckhôn. Trong số những công việc khác mà Đêcác đã nghiên cứu ở Xtốckhôn, có cả công trình về dự án điều lệ của Viện hàn lâm khoa học Thụy Điển. Nhưng việc nghiên cứu chính của ông, theo ước vọng của Nữ hoàng, là thường xuyên cùng bà nghiên cứu triết học. Đêcác buộc phải từ bỏ những thói quen của mình. Ngay từ nhỏ, ông đã có thói quen sáng sáng nằm nán lại trên giường để suy nghĩ về các vấn đề toán học, vật lý, triết học. Những giờ phút sáng sớm này là thời gian làm việc có hiệu quả nhất. Những ý tưởng được hình thành vào những giờ phút này, sau đó chỉ cần sắp xếp cho có trình tự và ghi chép lại.

Thói quen này, Đêcác buộc phải chấm dứt. Cần phải theo gương vị Nữ hoàng hiếu động, dậy từ sáng sớm và 5 giờ đã phải bắt đầu học tập nghiên cứu cùng bà. Khi đó với vẻ trào phúng chua chát, Đêcác đã nói rằng: Nếu muốn trở thành một nhà toán học giỏi và giữ gìn được sức khỏe lâu dài, thì chỉ nên rời bỏ chiếc giường khi cảm thấy đã đến lúc cần phải làm như vậy.

Bị cảm lạnh trong một chuyến đi dài ngày viếng thăm cung điện trên một chiếc xe ngựa lạnh lẽo, nhà bác học chuyển sang chứng bị sưng phổi và chín ngày sau khi thụ bệnh, ông đã qua đời. Đó là ngày 11 tháng hai năm 1650. Còn thiếu 3 tuần nữa ông mới tròn 54 tuổi.

Sau đó 16 năm, năm 1666, di hài của ông mới được chuyển về Pari. Đầu tiên, quan tài của ông được đặt trong nhà thờ Paven, sau đó, vào năm 1667, lại được rời về nghĩa địa của những danh nhân vĩ đại của nước Pháp — nhà thờ Giơnevơ thần thánh, vị bảo trợ của Pari, điện Păngtêông nổi tiếng, nơi hài cốt của nhiều bộ óc lỗi lạc của nước Pháp đã tìm thấy chỗ yên nghỉ cuối cùng của mình.

## THỜI GIAN CẦN CHO NHỮNG BẬC VĨ NHÂN

Chúng ta sẽ không viết về lịch sử toán học. Nhiệm vụ của chúng ta là tìm trong lịch sử phát triển lâu dài của toán học những tình tiết, những trích đoạn, có thể xem là tiêu biểu, dưới dạng hấp dẫn nhất — hấp dẫn và lý thú không chỉ chính đối với các nhà toán học, mà ngay cả với những người dù chỉ có quan hệ xa xôi với toán. Cho dù chúng lướt khá nhanh về một trong những phát minh vĩ đại nhất trong lịch sử toán học, nhưng vẫn hoàn toàn rõ ràng là chúng ta không thể tránh không nói đến hoàn cảnh làm xuất hiện nguyên nhân của phát minh này. Có phải phát minh đó đã có do có một nhà bác học lỗi lạc như Đêcác chăng? Thế nếu như không có Đêcác? Và nếu như Đêcác lại ra đời muộn hơn độ vài thế kỷ?

Chắc có lẽ cũng sẽ có một vài sự thay đổi nào đó. Cũng có thể một vài kết quả nào đó nhận được dưới dạng khác đi. Nhưng về bản chất, mọi kết quả vẫn không thay đổi. Nếu không có Đêcác thì đã có một nhà bác học khác, hay nhiều nhà bác học khác, biết cách biểu hiện những yêu cầu cấp thiết nhất trong thời đại của mình. Phát minh của Đêcác hoàn toàn không *phải chỉ là hệ quả của* chính phẩm chất cá nhân Đêcác. Nó đã được chuẩn bị sẵn sàng bởi cả một quá trình phát triển lịch sử của xã hội loài người. Khi cho phép mình được phép lập luận chặt chẽ như vậy, chúng ta có thể nói, nếu không có Ơclit thì cũng không có Đêcác. Hay nếu như có Đêcác mà không có những yêu cầu phải có phát minh của ông, thì đó cũng không phải là chính Đêcác đã từng có trong lịch sử phát triển của toán học.

Thế kỷ 17, mà một đại diện điển hình là Đêcác, chính là một bước ngoặt không chỉ trong toán học, mà cả trong khoa học tự nhiên nói chung. Nguyên nhân của sự phát triển vũ bão trong khoa học tự nhiên vào thế kỷ thứ mười bảy chính là nguồn dự trữ kinh tế phát triển khác thường của các quốc gia châu Âu, trong đó có một giai cấp mới đã bước vào vũ đài hoạt động chính trị — giai cấp tư sản. Trong khi tìm kiếm những con đường mới để phát triển, giai cấp này đã phá vỡ hàng rào trở ngại mà tầng lớp quí tộc trung thế kỷ đã đặt trên đường đi của mình. Là một bộ phận tiến bộ nhất thời đó, giai cấp tư sản đã dũng cảm phá vỡ mọi giáo điều của nhà thờ Cơ đốc giáo, người phục vụ trung thành của chế độ chuyên chế quí tộc, nhưng không còn thích hợp với những yêu cầu đòi hỏi của một giai cấp mới. Thế giới quan khoa học, mặc sự nguyền rủa của nhà thờ tôn giáo, được giai cấp tư sản khẳng định là một trong những phương tiện thống trị cơ bản của mình. Ở nhiều nước, những liên hợp khoa học, những viện hàn lâm với sự ủng hộ và trợ giúp hào hiệp của các trùm tư bản tài chính, đã được thành lập; nhiều tạp chí khoa học bắt đầu được xuất bản; sự trao đổi ý kiến giữa các nhà bác học trở nên sinh động, thư từ trao đổi nhộn nhịp. Cơ học đặc biệt phát triển. Những luận điểm của nó có ảnh hưởng mở rộng đến mọi hiện tượng của cuộc sống, cho dù khác xa với bản chất của cơ học. Đối với thời bấy giờ, đó là một hiện tượng tiến bộ, và chỉ mãi sau này, cách giải thích thế giới một cách máy móc — cơ học mới kìm hãm sự phát triển thế giới quan khoa học.

Những bài toán mới đặt ra trước mắt các nhà nghiên cứu, đã đòi hỏi phải có những phương pháp nghiên cứu mới. Những phương pháp của người Hy Lạp cổ đại và của những nhà bác học trung thế kỷ không thể đáp ứng thỏa đáng những yêu cầu mới đã nảy sinh. Những phương pháp nghiên cứu cũ mang đặc trưng quá chật hẹp, chỉ thuận tiện cho việc giải những bài toán hạn chế hoặc dẫn đến việc dựng hình quá mệt mỏi cồng kềnh.

Một yêu cầu tạo ra những phương pháp nghiên cứu mới, có khả năng ứng dụng rộng rãi nhất, lại đủ đơn giản và gọn gàng, chặt chẽ, đã được đặt ra cho nền khoa học mới. Thế kỷ mười bảy đã được đánh dấu bằng sự ra đời bởi ba sáng tạo tuyệt vời của trí tuệ con người, cả về mặt sức mạnh và giá trị, là phép lôgarit, hình học giải tích, và phép tính các vô cùng bé (phép tính vi phân và tích phân). Ba phát minh này có thể xác định một cách ngắn gọn như sau: phương pháp tiến hành tính toán hiệu quả và kinh tế nhất, phương pháp đưa những tiến bộ đa dạng của thực tế cuộc sống về những quy luật chung của đại số học, và cuối cùng là phương pháp giới hạn, phản ánh chính xác nhất đặc tính liên tục của các quá trình cơ học.

Việc phát minh những phương pháp nghiên cứu mới, chứng tỏ thời kỳ hưng thịnh của toán học, và dẫn đến một sự phát triển vũ bão hơn nữa – chỉ trong vòng vài chục năm, những phương pháp nghiên cứu mới đã cho phép nhận được một số lượng lớn những kết quả mà bao thế kỷ trước, những phương pháp nghiên cứu cũ không thể đạt tới được.

## PHƯƠNG TRÌNH

Bây giờ, chúng ta trở lại với những bài toán lớn của chúng ta và đặt lại câu hỏi: có thể hay không có thể giải chúng bằng compa và thước kẻ? Giờ đây, khi đã làm quen với phương pháp tọa độ, chúng ta có thể hy vọng tìm thấy câu trả lời cho câu hỏi này nhờ đại số học.

Nói riêng, chúng ta phải làm gì khi giải một bài toán nhờ compa và thước kẻ? Chúng ta vẽ những đường thẳng, đường tròn, tìm những điểm giao của chúng. Qua những điểm vừa tìm được chúng ta lại vẽ những đường thẳng mới, đường tròn mới. Chúng ta lấy những điểm này làm tâm những đường tròn mới, chúng ta chọn những điểm tùy ý nào đó trên mặt phẳng, trên đường thẳng, đường tròn đã cho, ... Chúng ta sẽ chọn trên mặt phẳng một hệ tọa độ Đềcác vuông góc nào đó. Khi đó, mỗi điểm trên mặt phẳng này sẽ được xác định bởi một cặp tọa độ (a, b), mỗi đường thẳng — sẽ có một phương trình :

$$Ax + By + C = 0$$

Mỗi đường tròn có một phương trình :

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Những hệ số của những phương trình này là những số xác định.

Giả sử bây giờ chúng ta có một cặp đường thẳng nào đó do chúng ta cho hay vẽ nên :

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{aligned} \qquad (11)$$

Tìm giao điểm của chúng — điều đó có nghĩa là tìm nghiệm của cặp phương trình tuyến tính đã viết. Khi khử y từ (11) chúng ta đi tới đẳng thức :

$$(A_1B_2 - A_2B_1)x + (C_1B_2 - C_2B_1)y = 0 \qquad (12)$$

Sau khi giải phương trình (12), chúng ta sẽ tìm được y từ một phương trình tùy ý của (11).

Như thế, việc tìm giao điểm của hai đường thẳng nào đó dẫn đến việc giải một phương trình tuyến tính (12) mà các hệ số của chúng là những hàm hữu tỉ nguyên nào đó của các hệ số của cặp phương trình (11), (tức là các hàm số nhận được từ các hệ số đã cho nhờ các phép tính cộng, trừ và nhân).

Giả sử bây giờ chúng ta cho hay vẽ một đường thẳng và một đường tròn. Phương trình của chúng ta là :

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C = 0 \\ x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{aligned} \qquad (13)$$

Để tìm các giao điểm của chúng, cần giải hệ phương trình này. Nhằm mục đích này, chúng ta tìm y phương trình thứ nhất và thế vào phương trình thứ hai:

$$y = -\frac{A_1x + C_1}{B_1}$$

$$x^2 + \left(\frac{A_1x + C_1}{B_1}\right)^2 + A_2x - B_2\frac{A_1x + C_1}{B_1} + C_2 = 0$$

Chúng ta viết lại phương trình cuối này dưới dạng:

$$(A_1^2 + B_1^2)\,x^2 + (2A_1C_1 + A_2B_1^2 - A_1B_1B_2)x + C_1^2 -$$
$$- C_1B_1B_2 + C_2B_1^2 = 0 \qquad (14)$$

Chúng ta đã đi đến phương trình bậc hai. Các hệ số của phương trình này là các hàm hữu tỉ — nguyên của các hệ số trong các phương trình (13). Sự thật, so với phương trình (12), các hàm hữu tỉ này chứa cả phép tính nâng lên lũy thừa (ở đây là lũy thừa hai) của các hệ số trong các phương trình (13). Nhưng có thể xem phép tính này như phép nhân lặp, vì vậy định nghĩa đã cho trước đây về hàm hữu tỉ — nguyên vẫn đúng.

Chúng ta viết lại phương trình (14) dưới dạng:

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \qquad (15)$$

Những nghiệm phương trình này là:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \qquad (16)$$

Chúng ta nhớ rằng các hệ số a, b, c là những hàm hữu tỉ nguyên của các hệ số trong phương trình (13).

Giả sử bây giờ cho hai đường tròn:

$$x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0 \qquad (17)$$

Để tìm các giao điểm của chúng, cần giải các phương trình đối với x và y. Dường như là chúng ta có hai phương trình bậc hai, vì vậy, có thể, việc giải sẽ dẫn đến một phương trình có bậc không thấp hơn bốn. Nhưng điều đó không hẳn như thế. Thật vậy, chúng ta trừ phương trình thứ nhất cho phương trình thứ hai và chúng ta viết thêm vào kết quả với một trong hai phương trình (17), chẳng hạn với phương trình thứ nhất:

$$x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + C_1 - C_2 = 0 \qquad (18)$$

Các hệ số của phương trình thứ hai là các hàm hữu tỉ — nguyên của các hệ số trong các hệ phương trình (17). Dễ thấy rằng hệ phương trình (18) tương ứng với hệ phương trình (17) (nếu hạn chế trong những nghiệm hữu hạn của các phương trình). Nhưng hệ (18) là hệ phương trình dạng (13), mà chúng ta đã làm quen. Vì vậy, việc giải hệ này, và do đó cũng là việc giải hệ (17), sẽ dẫn đến việc giải hệ (13) với các hệ số là các hàm hữu tỉ — nguyên của các hệ số trong các phương trình (17).

Chẳng hạn, nếu chúng ta cần vẽ một đường thẳng đi qua hai điểm đã cho (các tọa độ của chúng đã biết), hay một đường tròn có bán kính đã cho với tâm ở trên một điểm đã biết (các tọa độ của tâm và bán kính cho trước) thì chúng ta sẽ đi tới các phương trình đường thẳng và đường tròn có các hệ số cũng là các hàm hữu tỉ — nguyên của các tọa độ và bán kính đã nói.

Như thế, trong bước đầu, việc giải bài toán bằng compa và thước kẻ sẽ dẫn tới hoặc là việc giải phương trình (12) (tuyến tính), hoặc là việc giải phương trình (15) (bậc hai).

Điều gì sẽ xảy ra ở các bước sau? Có thể xảy ra là qua các điểm vừa tìm được, chúng ta vẽ các đường thẳng hay các đường tròn. Chúng ta đi tới các phương trình dạng (12) hay (15), nhưng bây giờ các hệ số của các phương trình này sẽ là các hàm hữu tỉ — nguyên của các hệ số trước đây, của các hệ số mới nào đó mà chúng ta gặp phải trong khi giải bài toán, và của các số dạng (16). Chẳng hạn, giả sử chúng ta nhận được phương trình dạng sau:

$$\frac{-b_1+\sqrt{b_1^2-a_1c_1}}{a_1}x^2+\frac{-b_2+\sqrt{b_2^2-a_2c_2}}{a_2}\times$$
$$\times x+1=0 \qquad (19)$$

Chúng ta viết lại phương trình này như sau:

$$-\frac{b_1}{a_1}x^2-\frac{b_2}{a_2}x+1=-\frac{\sqrt{b_1^2-a_1c_1}}{a_1}x^2-$$
$$-\frac{\sqrt{b_2^2-a_2c_2}}{a_2}x$$

Bình phương cả hai vế lên:

$$\left(-\frac{b_1}{a_1}x^2-\frac{b_2}{a_2}x+1\right)^2=\frac{b_1^2-a_1c_1}{a_1^2}x^4+$$
$$+\frac{b_2^2-a_2c_2}{a_2^2}x^2+2\frac{\sqrt{b_1^2-a_1c_1}\sqrt{b_2^2-a_2c_2}}{a_1a_2}x^3 \qquad (20)$$

Chúng ta sẽ đưa các số hạng không chứa căn bậc hai sang vế trái, và một lần nữa chúng ta lại bình phương cả hai vế. Chúng ta sẽ đi tới phương trình bậc 8:

$$p_0x^8+p_1x^7+\ldots+p_7x+p_8=0 \qquad (21)$$

Có thể cho rằng phương trình cuối cùng được dẫn tới dạng có mẫu số chung và mẫu số này được bỏ qua. Khi đó, rõ ràng tất cả các hệ số sẽ là các hàm hữu tỉ — nguyên của $a_1$, $b_1$, $c_1$, $a_2$, $b_2$, $c_2$. Phương trình này, khi đi ngược lại chúng ta có thể đi tới dãy các phương trình bậc hai (20), (19).

Chúng ta lưu ý rằng bậc của phương trình (21) bằng 8 tức là $2^3$. Điều này tương ứng với chỗ là phương trình bậc hai (19) đã được bình phương đến hai lần. Và như sẽ thường thấy, bài toán được giải bằng compa và thước kẻ sẽ dẫn tới việc giải phương trình đại số (tức là phương trình có vế trái là một đa thức) bậc $2^n$. Các hệ số của các phương trình này là các hàm số hữu tỉ — nguyên của các tham số được xác định bởi các điểm, các đường thẳng, đường tròn, ... tùy ý đã chọn không chỉ trong bước đầu tiên, mà cả ở các bước tiếp sau. Vì các tham số này là tùy ý nên chẳng có khó khăn gì đặc biệt, nếu cho chúng là các số nguyên. Nếu bài toán được giải bằng compa và thước kẻ với bộ các tham số tùy ý, thì lẽ tất nhiên nó cũng sẽ giải được khi các tham số này là những số nguyên.

Như thế, bài toán chỉ giải được bằng compa và thước kẻ khi phương trình đại số:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0) \qquad (22)$$

với các hệ số nguyên, có bậc dạng $n = 2^k$ và qui được về dãy các phương trình bậc 2. Điều kiện đã nêu cũng sẽ là điều kiện đủ về tính giải được của bài toán bằng compa và thước kẻ.

Cần chú ý rằng chúng ta có các tham số mà hàm của chúng là các hệ số của phương trình (22) là các số nguyên tùy ý. Có thể xảy ra trường hợp là trong khi lựa chọn tùy tiện các tham số như vậy, các hệ số của phương trình không thể nhận được các giá trị tùy ý, độc lập với nhau.

Lại thêm một điều chú ý nữa. Có thể xảy ra trường hợp là bậc phương trình mà việc giải bài toán sẽ được dẫn đến, lại không bằng $2^k$ (1). Nhưng điều này không có nghĩa là bài toán không được giải bằng compa và thước kẻ. Nếu như trong khi lựa chọn tùy ý các tham số nguyên, phương trình (22) *có nghiệm hữu tỉ*, thì bài toán đương nhiên giải được bằng compa và thước kẻ. Trong *trường hợp này*, người ta nói rằng phương trình được qui về trường các số hữu tỉ.

Như thế một điều kiện đủ để phương trình (22) với bậc không là lũy thừa của hai, là không thể giải được nhờ compa và thước kẻ, là không thể quy được về trường số hữu tỉ.

Chúng ta quay trở lại ba bài toán lớn.

*1. Bài toán gấp đôi một hình lập phương*

Nếu chúng biểu thị cạnh của hình lập phương đã cho là a, cạnh của hình lập phương phải tìm là x, thì tương ứng với điều kiện của bài toán,

$$x^3 - 2a^3 = 0$$

Đây là phương trình dạng (22).

*Bậc* của phương trình không phải là lũy thừa của hai. Đồng thời phương trình không có nghiệm hữu tỉ với số nguyên a nào. Vì vậy, bài toán gấp đôi một hình lập phương bằng compa và thước kẻ là không giải được.

*2. Bài toán chia ba một góc*

Giả sử $3\alpha$ — là độ lớn của góc cần phải chia làm ba phần bằng nhau. (Chúng ta biểu thị độ lớn này qua $3\alpha$ từ trước để sau này không phải viết số 3 ở mẫu số). Giả sử

$$\cos 3\alpha = p$$

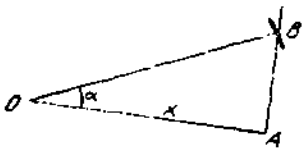
---

(1) Nguyên bản là $2^n$. ở đây sửa lại cho nhất quán trong cách trình bày của tác giả (N. D.)

Chúng ta đưa thêm ký hiệu:

$$\cos\alpha = x$$

Nếu chúng ta biết cách dựng x, thì chúng ta cũng biết cách dựng góc $\alpha$, tức là một phần ba của góc đã cho. Thật vậy, chúng ta đặt một đoạn dài x (đoạn OA). Ở điểm A chúng ta dựng một đường vuông góc và với độ mở (1) của compa bằng đơn vị đo, chúng ta sẽ tìm giao điểm trên đường này (điểm B). Góc AOB bằng $\alpha$ (hình 22).




Hình 22

Mặt khác,

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos2\alpha \,.\, \cos\alpha - \sin2\alpha \,.\, \sin\alpha = \\ &= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha \\ &= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2(1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha \\ &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = 4x^3 - 3x\end{aligned}$$

Như thế:

$$4x^3 - 3x - p = 0$$

Đây là phương trình mà việc giải bài toán chia ba một góc đã quy tới. Bậc của phương trình không phải là lũy thừa của hai. Cùng với điều đó, với mọi cách lựa chọn tùy ý của tham số p, phương trình không qui được về trường các số hữu tỉ. Điều đó chứng tỏ rằng bài toán chia ba một góc bằng compa và thước kẻ là không giải được.

(1) Khẩu độ (N. D.)

*3. Bài toán cầu phương hình tròn.*

Giả sử r — là bán kính của hình tròn đã cho, x — là cạnh của hình vuông phải tìm. Khi cân bằng diện tích của chúng, chúng ta sẽ có :

$$x^2 - \pi r^2 = 0 \qquad (23)$$

Việc giải bài toán được qui về phương trình như thế. Như đã làm trước đây, chúng ta sẽ đặt bán kính r bằng một số nguyên tùy ý. Chúng ta sẽ không nhận được phương trình (22), vì trong phương trình này, các hệ số là những số nguyên, còn trong phương trình (23) thì không thế. Nhưng liệu có thể bằng cách nâng lên lũy thừa nhiều lần, có thể quy nó về như dạng (22), tức là về dạng phương trình có các hệ số nguyên không? Nếu điều này có thể làm được, thì khi đó trước hết chúng ta cần làm sáng tỏ : bậc của phương trình nhận được có phải là lũy thừa của 2 hay không? Nếu không, thì liệu có thể quy nó về trường số các hữu tỉ hay không? Nhưng vấn đề liệu có thể quy phương trình (23) (với r nguyên), về dạng phương trình đại số với các hệ số nguyên hay không, nhưng dễ dàng hình dung, sẽ dẫn đến vấn đề là liệu số $\pi$ có đúng là nghiệm của phương trình dạng đó hay không? Số là nghiệm của phương trình đại số với các hệ số nguyên, được gọi là *số đại số*, còn các số không phải là nghiệm như thế, được gọi là *số siêu việt*.

Như thế, khả năng giải được hay không có khả năng giải được bài toán cầu phương trình tròn bằng compa và thước kẻ sẽ dẫn đến vấn đề bản chất của số $\pi$ — đó là số đại số hay số siêu việt? Nếu như đó là số đại số, thì vấn đề giải bài toán bằng compa và thước kẻ đòi hỏi có sự nghiên cứu tiếp tục. Nếu như số $\pi$ là số siêu việt, thì vấn đề sẽ có câu trả lời phủ định — bài toán cầu phương trình hình tròn bằng compa và thước kẻ là không giải được.

Chỉ mãi đến năm 1882, nhà toán học Đức Lindoman mới chứng minh được tính siêu việt của số $\pi$. Bài toán cầu phương hình tròn không giải được.

Như chúng ta đã thấy, qua phương pháp tọa độ, các bài toán lớn thời cổ đại đã dẫn chúng ta đến việc khảo sát các phương trình đại số. Đặc biệt, nếu các hệ số của phương trình như vậy là các số nguyên, thì vấn đề đầu tiên nảy sinh khi đó sẽ là : những số nào có thể là nghiệm của phương trình này? Chúng ta đã gọi các số đó là những số đại số. Các số còn lại là những số siêu việt. Một trong những số siêu việt là số $\pi$. Trong giáo trình toán học cao cấp, người ta chứng minh rằng số có thể biểu diễn như giới hạn.

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$$

cũng là số siêu việt. Còn những số siêu việt khác không? Có, ngoài ra chúng còn nhiều hơn nhiều so với các số đại số. Nếu lấy hú họa, một điểm trên trục số thực thì xác suất để số tương ứng với điểm này là số đại số sẽ bằng không, còn xác suất để số này là siêu việt, sẽ bằng đơn vị, tức là hầu hết các số thực đều là các số siêu việt Các số đại số có thể đếm được, tức là có thể đặt mối tương ứng đơn trị với các số tự nhiên. Còn các số siêu việt không thể đếm được như vậy. Người ta nói tập hợp các số đại số là *đếm được*, còn tập hợp các số siêu việt là *không đếm được*.

### GALOA

Phương trình đại số với các hệ số nguyên – đó không phải là kết quả cuối cùng, cần thiết, mà việc nghiên cứu vấn đề khả năng giải được (hay tính khả quyết) bằng compa và thước kẻ của các bài toán lớn thời cổ đại phải quy về. Trong trường hợp tổng quát, khi (trong quá trình xây dựng) các điểm, các đường thẳng, đường tròn

được chọn một cách tùy ý, hay đúng hơn, có thể không nhất thiết là các số nguyên. Phương trình như thế đã nhận được từ một phương trình bậc hai nào đó bằng cách bình phương lên nhiều lần. Ngược lại, có một phương trình đại số, nếu chúng ta liên tiếp lấy căn bậc hai, thì cuối cùng sẽ dẫn tới một phương trình bậc hai có nghiệm, được biểu diễn qua các hệ số của phương trình đại số ban đầu với dãy các dấu căn thức bậc hai. Trong trường hợp này người ta nói rằng phương trình đại số giải được dưới dạng những căn thức bậc hai. Như thế, vấn đề bài toán giải được hay không giải được bằng compa và thước kẻ sẽ dẫn đến vấn đề: phương trình đại số tương ứng với các bài toán này, có thể giải được hay không giải được dưới dạng căn thức bậc hai.

Thế thì những tiêu chuẩn để phương trình đại số đã cho giải được hay không giải được dưới dạng những căn thức bậc hai là như thế nào ? Câu trả lời cho vấn đề này mà xem như một vấn đề phụ, chứ không phải là vấn đề chính, đã được giải đáp trong lý thuyết Galoa.

Galoa là ai ? Chắc có lẽ thật khó tìm thấy một học sinh trung học lại chưa từng nghe thấy về lý thuyết Galoa, hoặc chưa từng biết đến tên tuổi Galoa. Hàng chục cuốn sách cực hay đã viết về ông. Có thể xem một trong những cuốn sách hay nhất là cuốn sách của nhà vật lý Ba Lan lỗi lạc Lêôpôn Inphenđơ : « Evarit Galoa, người đắc cử của các thần linh ». Thật khó nói về Galoa hay hơn ngòi bút của Inphenđơ đã miêu tả.

Galoa đã bị tử thương trong trận đấu súng tay đôi khi ông vừa bước qua tuổi hai mươi. Lúc còn sống, Galoa được gọi là một người cộng hòa cuồng tín. Sự say mê và niềm tin đã cho ông sức mạnh, còn thái độ không dung hòa với chế độ phản động của ông quả thật không có giới hạn. Có nhiều cơ sở để giả định rằng : Cuộc đấu súng tay đôi xảy ra là do sự khiêu khích của những kẻ thù chính trị của Galoa, những kẻ cố tìm mọi cách để Galoa phải bước chệch khỏi đường đi của mình.

Một vài giờ trước khi tử thần đến đón đi, trong một bức thư gửi cho một người bạn, chỉ trong vài trang giấy nhỏ, Galoa đã trình bày tất cả những gì mà sau này gọi là lý thuyết Galoa. Lý thuyết này đã được các nhà toán học quan tâm chú ý suốt hơn một trăm năm gần đây. Tiết kiệm từng giây phút còn lại của cuộc đời sắp chấm dứt, vội vã, nhiều điều không nói hết được, với hy vọng dần dần mọi người sẽ hiểu rõ mình, Galoa tập trung toàn bộ năng lực thiên tài, viết nên một trước tác cuối cùng biểu hiện đầy đủ tài năng của mình.

Giờ đây không còn ai nghi ngờ gì nữa, Galoa thực sự là một nhà toán học thiên tài. Nhưng đã có một thời, những kẻ thù của Galoa hòng xóa toẹt tên tuổi ông, xóa sạch sự nghiệp mà ông đã dũng cảm đấu tranh vì nó, cũng như giờ đây nhiều người chưa có ý thức đầy đủ, lại cố tình tâng bốc công lao của nhà toán học đến tận mây xanh, gán cho ông những phẩm chất tốt đẹp mà ông không hề có, làm như ông là một thiên thần bằng xương bằng thịt vậy.

Người ta được biết là Galoa hai lần bị hỏng trong *đợt thi tuyển vào trường bách khoa*. Ai cũng biết: kỳ thi — đó là đợt báo cáo về những tri thức của mình trong những lãnh vực toán học mà chương trình thi đòi hỏi. Đây là một đợt phúc trình xem anh đã biết tư duy một cách đúng đắn, có trình tự và logic như thế nào, anh đã biết cách vận dụng tri thức của mình vào việc giải các bài toán ra sao? Trong mỗi kỳ thi, người ta có thể nhận thấy trong một lĩnh vực nào đó, anh đã vượt hẳn các bạn cùng tuổi, hay thậm chí cả chính những người hỏi thi đến một vài mức, nhưng điều này không có nghĩa gì nếu anh lại là người kém cỏi trong các lĩnh vực còn lại.

Vì sao Galoa bị hỏng kỳ thi? Trước hết hẳn có thể vì am hiểu — rất am hiểu là đằng khác — trong các lý thuyết giải các phương trình đại số, nhưng ông lại hình dung không thật chắc chắn về các lĩnh vực toán khác chăng. Nhưng không đúng như vậy. Một sự thật chắc chắn là không thể nói Galoa không am hiểu đầy đủ, và đối với ông, toán học chỉ là một cuốn sách mở và dù không đọc hết, ông vẫn nhớ thuộc lòng. Ông thi hỏng ư? Điều đó có nghĩa là những người chấm thi có lỗi, những người mà thói xấu lâu ngày làm họ đần độn, cứng nhắc đến mức tối đa. Có một lần, một người hỏi thi đã hỏi nhà toán học thiên tài những câu hỏi quá ư là sơ cấp, đến mức Galoa cho rằng trả lời những câu hỏi ấy chỉ làm hạ thấp phẩm chất của mình. Một lần khác — người hỏi thi còn dốt nát hơn nữa. Ông ta không thể hiểu nổi cả những vấn đề rất tầm thường mà thí sinh cố gắng giải thích cho ông ta. Galoa còn biết làm gì nữa? Chẳng còn gì khác hơn là vung tay lên và ném thẳng chiếc khăn lau bảng vừa dùng vào mặt vị giám khảo ngu xuẩn nọ. Thật tuyệt vời! Hoan hô ông Galoa! Đối với họ — những kẻ tầm thường và hủ lậu trong khoa học — cần phải làm như vậy! Galoa còn quá trẻ. Mà dường như tuổi trẻ lại thường có khả năng tạo ra những tác phẩm thiên tài một cách cực kỳ đơn giản như vậy, không chút khó khăn, không cần chuẩn bị từ trước.

Các nhà viết tiểu sử Galoa thường thích kể một tình tiết dường như đã xảy ra vào thời kỳ ông ở Trường Bách khoa (1). Lơrua, giảng viên của trường, khi bước vào lớp, đã tuyên bố với các học sinh là ông đã biết một kết quả rất hay về lý thuyết các phương trình đại số mà Stuốcmơ đã thu được, nhưng ông ta không thể thông báo cách chứng minh, vì bài báo vẫn chưa được in ra. Cả lớp chăm chú lắng nghe, chỉ riêng trên khuôn mặt Galoa, một nụ cười giễu cợt thoáng qua.

— Mơsiơ (2) Galoa, — Thầy giáo quay lại hỏi — Anh cảm thấy kết quả này là sơ giản ư? Có thể là anh cũng biết cách chứng minh nó chăng?

Không nói một lời, Galoa đứng dậy, bước gần đến bảng và cầm lấy phấn. Một phút suy nghĩ, và rồi dưới bàn tay anh, những công thức bắt đầu xuất hiện trên bảng đen với một tốc độ chớp nhoáng. Một, hai, rồi công thức thứ ba... Galoa vẫn viết không ngừng. Bảng đã viết đầy. Bỏ viên phấn xuống, bằng một điệu bộ phong nhã, nhà toán học phủi sạch bụi phấn khỏi các ngón tay. Định lý đã được chứng minh xong.

---

(1) Xem phần phụ lục.

(2) Ngài, tiếng Pháp (N.D).

Lúc đó, *Galoa mới* 18 tuổi. Chúng ta cũng đã nói rằng vào thời điểm này, Galoa biết khá nhiều về cách giải các phương trình đại số. Có thể là ông suy nghĩ cả những vấn đề được phát biểu trong định lý Stuốcmơ (về số nghiệm phương trình nằm trong khoảng đã cho). Nhưng thật khó tin là người thanh niên trẻ, chưa được chuẩn bị cơ sở toán học đầy đủ, lại có thể vạch ra đường lối chứng minh một định lý mà các nhà toán học cho là rất quan trọng này. Đưa ra những phỏng đoán nói riêng, thậm chí là xác đáng và khá tinh vi, giải thích ý nghĩ của mình bằng thí dụ — điều đó có thể hiểu được, nhưng chứng minh những định lý ngay trên bảng đen, và ngay lập tức, một cách thật rõ ràng — điều này có lẽ cũng hơi thái quá.

Chúng ta thường trộn lẫn một cách không suy nghĩ cuộc sống thơ mộng — lãng mạn của Galoa với sự nghiệp sáng tạo khoa học của ông, và vô tình, lại thường cố gắng trình bày cho các bạn đọc trẻ tuổi một Galoa không phải là Galoa chân thực, mà là một Galoa nào đó được tô vẽ trong trí tưởng tượng của mình. Lãng mạn thì lãng mạn, nhưng không nên quên rằng sáng tạo khoa học — đó là một loại lao động, mà không quá khuếch đại, có thể nói là loại lao động khổ sai, vất vả. Thiên tài — trước hết là sự cần cù. Buypphông, một trong những người sáng tạo ra bách khoa toàn thư, đã nói như vậy. Còn nhà sáng chế vĩ đại Tômát Edixơn không ngừng nhắc đi nhắc lại rằng trong mỗi sáng chế — phát minh, chỉ có một phần trăm là cảm hứng, còn chín mươi chín phần trăm là mồ hôi và nước mắt. Và đó là với điều kiện đã có sẵn một yếu tố chính nhất — khả năng và trí hướng về toán học. Trong toán học cũng như trong mọi ngành khoa học khác, có nhiều chất thơ mộng — lãng mạn, nhưng không bao giờ được phép quên rằng: nghiên cứu toán học — đó không phải chỉ toàn là những ngày hội. Trái lại, đó thường là những ngày dài kém thơ mộng và buồn tẻ nhất. Khi đó cần thức khuya, dậy sớm, đọc nhiều và phải thường xuyên suy nghĩ, suy nghĩ và suy nghĩ. Không phải ai cũng đều ưa thích cách sống này và không phải ai cũng đều thích hợp với cách làm việc như thế. Trong cảnh tiện nghi đầy đủ của một ngôi nhà trong thành phố ngồi xem qua tivi cảnh lãng mạn của những chuyến đi nghiên cứu trong rừng Taiga, đó là một chuyện. Còn chính mình lê bước trong cánh rừng Taiga, với chiếc ba lô nặng trĩu trên vai và từng đoàn muỗi đói bao quanh trên đầu, đó lại là một chuyện hoàn toàn khác.

Chất lãng mạn — thật tuyệt đẹp. Nó lôi cuốn toàn thế giới. Nó giúp con người thoát khỏi những suy tư về cuộc sống vất vả, nhọc nhằn. Nó nâng cao thêm tầm cao, nó làm tăng phẩm giá của thế giới vật chất quanh ta. Nhưng cùng với năm tháng, nó cũng không cản trở ta thay đổi cách đánh giá và lối nhìn nhận tỉnh táo, phân biệt lúa mỳ với cỏ dại...

* * *

Lý thuyết Galoa, như chúng ta đã lưu ý ở trên, không đặt mục tiêu duy nhất của mình là thiết lập những điều kiện đồng thời là cần và đủ để một phương trình đại số là giải được dưới dạng các căn thức bậc hai. Đây chỉ là — nếu có thể diễn đạt như vậy — một trong những vấn đề tiện thể được giải quyết trong lý thuyết này. Vấn đề chính của nó lại là : những điều kiện giải được của một phương trình đại số dưới dạng những dấu căn thức nói chung là như thế nào?

Đối với những ai chưa từng làm quen với đối tượng nghiên cứu, vấn đề này như có vẻ lạ lùng. Thế hóa ra không phải mọi phương trình đại số đều giải được dưới dạng căn thức hay sao? Chính phương trình bậc hai (15) giải được dưới dạng căn thức, các nghiệm của nó tìm được theo công thức (16). Chẳng lẽ không tìm được các công thức tương đương cho các công trình (22) tùy ý hay sao?

Hóa ra lại đúng là không thể. Các nghiệm của phương trình tồn tại, chúng là những hàm xác định của các hệ số, nhưng không phải đối với mọi phương trình đều có thể biểu thị các hàm này qua các căn thức, giống như đã làm đối với phương trình bậc hai. Những biểu thức tương tự có thể tìm được đối với phương trình bậc hai, bậc ba và bậc bốn. Còn đối với phương trình bậc 5 và các bậc cao hơn, trong trường hợp chung, không thể tìm được. Nhưng cho đến khi nhận thức và chứng minh được điều này, đã bao năm tháng qua đi và trong suốt thời gian đó, bao người đã loay hoay tìm cách giải một phương trình tùy ý, cải tiến hệ thống ký hiệu đại số đưa thêm những khái niệm toán học mới. Lịch sử phát triển những ý đồ này đáng chú ý và có tính chất giáo huấn không kém gì những ý đồ tìm kiếm lời giải các bài toán nổi tiếng thời cổ đại. Những trang hấp dẫn nhất trong cuốn lịch sử phát triển này ở gần thế kỷ 16. Chúng ta sẽ thử hé mở chúng.

## THỜI KỲ SÔI ĐỘNG

... Italia! Thời đại phục hưng! Thời kỳ mà theo lời nói của Ăngghen, là rất cần thiết cho những vĩ nhân và đã sinh ra những vĩ nhân khoa học, thần linh và diễn binh.

Người ta chỉ tách riêng vài trục năm trong trang sách đã mở, từ năm 1492, khi con người đầy cảm hứng (1) với khát vọng hiểu biết đặt chân lên boong của một trong ba chiếc thuyền buồm mà chúng ta đọc trong những trang sách trước, trên mặt Đại Tây Dương rộng mênh mông, và sau nhiều tháng vượt biển đầy khó khăn, đã đến được bờ biển châu Mỹ. Còn ít thời gian hơn nữa nếu kể từ chuyến vượt biển vòng quanh thế giới của Magienlăng. Con tàu duy nhất còn lại trong số năm con tàu xuất phát, sau khi đã vượt qua hàng nghìn trở ngại nặng nề, lại đã cập bến Tây-Ban-Nha, nơi ba năm trước đây nó đã ra đi. Con tàu — hay đúng hơn là những mảnh vỡ thảm hại của một hạm tàu đã từng rạng rỡ một thời — cập bến nhưng trên vị trí chỉ huy, vị đô đốc chưa hề biết sợ (2) đã không còn nữa. Đô đốc đã hy sinh trên những hòn đảo cho đến khi đó vẫn chưa từng biết đến. Sau này, những đảo đó được gọi tên theo tên gọi của vương quốc TâyBanNha : Philip II.

Thiên anh hùng ca chói lòa trong lịch sử nghệ thuật Italia, gắn liền với tên tuổi của Raphaen và Lêônađơ Vanhxi, cũng vừa kết thúc, nhưng Mikenlănggiolô và Tixiêng vẫn đang tiếp tục sáng tạo những công trình sáng tác bất tử của mình. Người ta đào thấy những bức tượng cổ, khắc họa con người với tất cả những đường nét lộng lẫy không thể lặp lại, với vẻ đẹp thể xác và tâm hồn hài hòa. Những bản luận văn triết học và những tác phẩm văn học nghệ thuật được tạo ra, trong đó chủ nghĩa triết học kinh viện, được nhà thờ xem như tiêu chuẩn số một và trong suốt mấy trăm năm được xem như chiếc nôi của mọi tư tưởng tự

---

(1) Côlômbô (Tác giả)

(2) Magienlăng (Tác giả)

do, đã bị chế giễu một cách cay độc. Cái mới hầu như bao trùm lên khắp mọi tầng lớp dân gian. Cái mới được xem như một dấu hiệu đảm bảo giải phóng khỏi ách áp bức đè nặng từ trong bóng đêm sâu thẳm thời Trung thế kỷ. Cái mới, dưới quan điểm lãng mạn và hạnh phúc, được cảm xúc như một ngày hội thực sự. Sự phục hưng của các khoa học, mà một ngành trong đó là toán học, được bắt đầu. Những suy diễn toán học là bắt buộc cho tất cả. Toán học, đó là chúa tể, đó là người lập pháp hợp pháp. Nhưng toán học không rút ra các kết luận của mình theo quy luật biểu hiện của riêng mình, mà là dưới ảnh hưởng của các nhu cầu sống, dưới ảnh hưởng của thực tế. Nữ hoàng, đồng thời cũng là một người phục vụ.

Những tình tiết liên quan đến việc phát minh ra phương pháp tổng quát giải phương trình bậc ba và bậc bốn là đầy chất lãng mạn không tả xiết.

Những người Ai Cập từ thời cổ đại đã có thể giải các phương trình bậc một, tức là các phương trình dưới dạng :

$$ax + b = 0 \qquad (24)$$

trong đó a, b, c — là những hệ số nào đó, còn x — là ẩn số, chưa biết. Lẽ tất nhiên thời đó chưa thể nói về hệ thống ký hiệu, cho phép viết phương trình bậc một dưới dạng (24). Người Ai Cập đã phát biểu các quy tắc bằng lời, theo đó có thể tìm ra được số nghiệm của phương trình (24), như trong ngôn ngữ hiện nay của chúng ta.

Những người cổ đại cũng đã có thể giải cả những phương trình bậc hai :

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (25)$$

và một số phương trình bậc ba dạng đặc biệt (Người Babilon cũng biết cách giải các phương trình bậc ba này). Nhưng mọi ý đồ giải phương trình bậc ba tổng quát dưới dạng :

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0 \qquad (26)$$

đều không đạt kết quả. Đặc biệt, nguyên nhân có thể là do mãi đến cuối thế kỷ 16 — đầu thế kỷ 17 còn chưa có ngành đại số kí hiệu, cho phép biểu diễn một cách tiết kiệm những tư duy toán học như đã làm trong các phương trình (24), (25), (26). Hệ thống ký hiệu bằng chữ, như chúng ta đã lưu ý ở trên, mãi đến cuối thế kỷ 16 mới xuất hiện. Trước đó, những phương trình được hình thành dưới dạng giải thích bằng lời văn, không dễ dàng tiếp nhận, đã không gợi ý gì về phương pháp giải chúng. Cần phải là người thông thạo cách tư duy toán học, biết cách ghi nhớ tập hợp nhiều dữ liệu khác nhau, để có thể đưa chúng về hệ thống phương trình sau đó tự đặt cho mình nhiệm vụ tìm kiếm cách giải phương trình.

Các nhà toán học Italia trong nửa đầu và giữa thế kỷ 16, mà câu chuyện kể của chúng ta sẽ nói về họ, cũng không dùng đến hệ thống kí hiệu đại số. Vì vậy, cần phải khâm phục một sự thật là họ đã tìm ra được cách giải các phương trình tổng quát, đầu tiên là phương trình bậc ba, sau đó là phương trình bậc bốn. Các phương trình có bậc cao hơn bốn, như sau này người ta đã làm sáng tỏ, là không thể giải được dưới dạng tổng quát nhờ các căn thức.

## NGƯỜI NÓI LẮP VÀ MỘT THẦY THUỐC

Chuyện xảy ra ở Brêsi vào đầu thế kỷ 16, khi có cuộc xâm lược của người Pháp vào đất Italia. Người ta đã tìm thấy Nicôlô Táctalia bên cạnh người cha đã bị giết chết. Thanh giáo rộng bản của người lính Pháp đã đâm trúng người cha và chạm vào khuôn mặt bé nhỏ. Cậu bé bị chấn thương và chết khiếp giữa vụ thảm sát và cướp bóc chưa từng thấy, đã bị choáng ngất đi, và kết quả đã để lại dấu ấn nặng cho cậu. Cậu bé bắt đầu bị nói lắp và khuyết tật sau này đã gây cho cậu biết bao phiền muộn, đã gắn bó với cậu suốt đời.

Táctalia, theo tiếng Italia, có nghĩa là *người nói lắp*. Cậu bé mồ côi được gán biệt danh này, và cái tên đó gắn liền với cậu suốt đời, như chính tên riêng của cậu. Ít người còn nhớ đến tên thật Phôntana của cậu.

Thật khó đoán nổi hoàn cảnh nào đã kích thích niềm say mê toán học ở một cậu bé không được giáo dục đầy đủ và không được học hành một cách chính quy, hệ thống. Phải chăng đó là đặc tính bẩm sinh? Cậu bé ngày càng mê say với học tập mà dường như chẳng thích hợp với hoàn cảnh của cậu. Cũng chẳng liên quan đến công việc mà cậu phải làm. Cam chịu ngồi yên đâu đó tận cuối nghĩa trang đã bỏ hoang, trên một tấm bia đầy bụi đất, cậu có thể đăm chiêu suy nghĩ hàng giờ và nắn nót ghi chép những dấu hiệu và những chữ số khó hiểu với mọi người xung quanh. Sự im lặng ảm đạm, những bụi cây trắc bách diệp và những cây bách rậm rạp với loại cây tơ hồng có hương vị thơm thơm quấn quanh, hòa tiếng kêu rin rít đều đều của những con chim đơn độc — tất cả chỉ gợi cảnh bình lặng và buồn nản cho trái tim đau khổ của người thiếu niên đang lớn. Những tiếng ồn ào, đa tạp ngoài chợ, tiếng roi vụt của những người dắt la, tiếng chửi nhau giữa những người hàng xóm đang cãi lộn trong các đường phố hẹp và vòng vèo, đều không vẳng tới đây. Chính cuộc sống đã chăm chút để tạo cho cậu bé mồ côi khả năng tập trung cao độ, mà là điều kiện tiên quyết cho mọi công việc lao động trí óc nghiêm túc.

Chẳng bao lâu, mối hoài nghi do tính mê say kỳ quặc của người thanh niên nói lắp gây ra cho những con người tầm thường đã phải lùi chỗ cho sự ngạc nhiên, rồi đến thời kỳ khâm phục thực sự — Tactalia thường là người chiến thắng trong các vòng thi toán cả với những người cùng tuổi, lẫn với những người lớn tuổi hơn nhiều. Chỉ trong một thời gian, với anh, niềm vinh quang của nhà toán học độc nhất vô nhị đã được khẳng định một cách chắc chắn. Chỉ còn chưa có dịp, chưa có lý do để cả nước nhắc đến tên tuổi nhà toán học trẻ. Nhưng chẳng mấy chốc, cái dịp ấy — cái lý do ấy đã xuất hiện.

Một người dân Bôlônhơ, tên là Phiôri nào đó, chưa nổi tiếng trong bất kỳ một lĩnh vực hoạt động nào, bỗng phát hiện thấy mình có thiên tài lỗi lạc, và năm 1535 đã tuyên bố thách thức thi đấu với bất kỳ ai dám chống đối lại danh hiệu thiên tài của mình. Thực chất của cuộc thách thức là gì? Do đâu mà một con người cho đến lúc đó vẫn hoàn toàn chưa ai biết tới, bỗng lại quá tự tin đến như vậy?

Tactalia tự đặt những câu hỏi như thế, khi anh biết được những lời thách đấu. Vài ngày suy nghĩ, so sánh các sự kiện, yếu tố và rồi một bức tranh ít nhiều đúng sự thật, giải thích sự dũng cảm của một tên dốt nát đã được phác họa. Một thời gian trước, giáo sư nổi tiếng của trường đại học tổng hợp Bôlônhơ Xoxipion del Pherô đã qua đời. Ngoài ra, người ta còn kể lại rằng vị giáo sư quá cố đã nắm được bí mật của cách giải phương trình tổng quát bậc ba. Vào thời Trung thế kỷ, nhà bác học không vội vã chia sẻ những bí mật mà mình nắm được với những người xung quanh. Việc nắm biết điều bí mật này tạo cho ông những điều kiện thuận lợi so với nhiều người khác. Chẳng hạn, ông có thể thách thức những người ham thích vào các vòng thi toán (nếu điều bí mật có liên quan đến toán học), và khi đã là người chiến thắng, ông có thể giành được vinh quang của nhà toán học vô địch, ngoài ra còn nhận được những giải thưởng nhằm trao cho người thắng cuộc.

Bài toán tìm cách giải phương trình bậc ba tổng quát khi đó chiếm vị trí trung tâm của các vấn đề toán học, và nếu một ai đó vững vàng tuyên bố ở một cuộc tranh luận — quyết đấu, thì không nghi ngờ gì nữa, chính người tuyên bố mở cuộc thi đấu này, hoặc là đã hoàn toàn giải được bài toán, hoặc là đã đạt được một vài bước liền bản chất trên bước đường giải bài toán này.

Sau khi được biết Phiôri rất gần gũi với vị giáo sư đã quá cố, Tacialia hoàn toàn sáng suốt và sáng suốt một cách khác thường, đã kết luận là trước khi chết Xoxipion del Pherô đã thông báo cho người quen thân của mình về phương pháp giải phương trình bậc ba.

Nhà toán học trẻ đã nỗ lực hết sức mình để khám phá bí mật lời giải của phương trình bậc ba và vài ngày trước cuộc thi đấu, anh đã tìm thấy điều bí mật này. Tacialia chỉ cần hai giờ để giải cả 30 bài toán mà đối thủ đề ra cho mình, trong khi đó đối thủ không giải được một bài toán nào của Tactalia. Phương pháp do

Tactalia tìm ra tốt hơn nhiều so với phương pháp mà Phiriô nắm được và cho phép anh giải được cả những bài toán mà nhà toán học kém cỏi kia đã bất lực. Lẽ tất nhiên, đó không phải là phương pháp tổng quát nhất, bao gồm tất cả các trường hợp riêng, có thể, bằng một công thức duy nhất. Đối với Tactalia, mỗi trường hợp đều có những khó khăn đặc biệt và ông phải cố gắng khắc phục nhờ một số phương thức đặc biệt. Nhưng chúng ta cũng chẳng đòi hỏi phải có những nỗ lực lớn để chuyển những kết quả nhận được ra ngôn ngữ đại số hiện đại của chúng ta và xem xét mức tổng quát cần thiết trong các suy diễn toán học.

Lời giải tổng quát của phương trình bậc ba đã tìm ra. Niềm vinh quang của Tactalia — nhà toán học có một không hai — đã lan khắp Italia và đặc biệt đã vọng đến tai một thầy thuốc và nhà chiêm tinh nổi tiếng khắp thế giới là Giêrônimô Cacđanô.

Đây thực sự là một con người khác thường và duy nhất, đứa con đẻ trong thời đại của mình. Chúng ta biết ông như một nhà toán học, tác giả của cuốn sách nổi tiếng «*Ars magna*» («Nghệ thuật vĩ đại»), trong đó có chứa cả phương pháp giải phương trình bậc ba do ông viết thêm. Còn chính ông, nếu dựa theo một cuốn sách khác của ông, cuốn «Về cuộc sống của tôi», thì ông không coi mình là một nhà toán học, mà danh hiệu chân chính của mình, ông nhìn thấy trong ngành y. Ông đã chữa khỏi bệnh cho một số vị tai mắt có chức vụ cao, trong đó có cả những vị đại diện cao cấp trong nhiều quốc gia châu Âu, do đó, ông trở thành một trong những vị khách mong muốn nhất trong các cung điện của các nhân vật quyền quý.

Vì y học trong thời Trung thế kỷ hầu như đặt mọi cơ sở nền tảng của mình trên các «sự thật» chiêm tinh và thần bí, nên chiêm tinh học không còn xa lạ đối với Giêrônimô Cacđanô. Nhiều huyền thoại về ông, như một nhà chiêm tinh lỗi lạc, đã được hình thành, trong đó đặc biệt có một huyền thoại nói rằng chính ông đã lập nên biểu tử vi Cơđốc. Điều đó được xem như một tội bất kính và người phạm tội bị đe dọa phải chịu hình phạt nặng nề của nhà thờ (vào thời đó, với những tội lỗi tương tự có thể bị thiêu dưới dàn lửa). Chắc rằng, chỉ có sự bênh vực của những chiếc ô cao, đã từng chịu ơn chữa chạy của vị thầy thuốc và pháp sư nổi tiếng, mới cứu ông thoát khỏi dàn lửa.

Theo một huyền thoại khác, Cacđanô đã lập nên một biểu tử vi riêng của mình, trên cơ sở đó, ông đã tiên đoán ngày và giờ chết của mình. Người ta kể lại là vào đúng ngày giờ đó, để không hạ thấp thanh danh nhà tiên tri vĩ đại của mình, Cacđanô đã tự sát. Chắc có lẽ đây cũng là một chuyện hư cấu, kết quả quá mức tưởng tượng có thể có của một nhà viết biên niên sử phi tôn giáo đó.

Sau khi biết về chiến thắng của Tactalia, Cacđanô bằng mọi cách, cố gắng tìm hiểu mọi bí mật của Tactalia. Nhưng một thời gian dài, ông vẫn không đạt được. Tactalia không để lộ phát minh có lợi cho mình. Nhưng cuối cùng ông không thể chống đối mãi lại mọi sự lung lạc của một cuộc tấn công có kế hoạch và được tổ chức tốt. Dần dần, lúc nửa kín nửa hở, lúc mập mờ hoàn toàn, Tactalia đã lộ cho Cacđanô biết điều bí mật của mình.

Sự công phẫn của Tactalia — người nói lắp — đến mức nào, khi sau đó một thời gian, ông được đọc trong cuốn sách «*Ars magna*» vừa xuất bản (năm 1545) chính phương pháp do ông tìm ra, nhưng với dòng ghi chú là phương pháp này tác giả cũng đã được người bạn có uy tín lớn là Nicôlô Tactalia ở Brêsi thông báo cho.

Tương ứng với quan điểm của những người sống trong thời Trung thế kỷ, điều này cũng tương đương với một sự phản bội, còn đoạn ghi thêm, liên quan đến uy tín, được xem như là một lời nhạo báng công khai. Ngay tức khắc sẽ có một cuộc tranh luận, ngay tức khắc sẽ có một cuộc quyết đấu toán học, trong đó Tactalia sẽ dạy cho tên vô liêm sỉ và tráo trợn quá đáng này một bài học !

## CUỘC TRANH LUẬN - QUYẾT ĐẤU

Quảng trường trước mặt nhà thờ Maria thần thánh đang sôi động, giống như một tổ kiến đang lúc nhộn nhạo.

Những người dân thành thị ăn mặc đẹp đẽ, phô trương sự giàu có, những người nghèo ăn mặc rách rưới, những người lính trong bộ quân phục — tất cả đám đông người màu sắc sặc sỡ, đa dạng, la hét ồn ào này đang sôi động bởi cùng một cảm giác chung. Ánh mắt của phần lớn đám đông người như bị hút về phía cổng chính vẫn chưa hé mở. Trên một chiếc bảng gỗ cao dựa vào một trong hai cột đèn lớn đứng ngay trước lối ra vào, trên góc có ghi một thông báo là đúng 5 giờ, trong nhà thờ Đức Mẹ Gia tô sẽ bắt đầu cuộc tranh luận giữa ngài Tactalia nổi tiếng với vị thầy thuốc lừng danh Cacđanô.

Những cuộc tranh luận trong thời kỳ Trung thế kỷ luôn là những buổi thi tài.

— Biểu diễn đầy hấp dẫn. Đề tài tranh luận mang nét đặc trưng rất đa dạng, nhưng nhất thiết phải có tính khoa học. Thời đó, người ta hiểu khoa học là những gì nằm trong danh mục của bảy nghệ thuật tự do. Một bộ phận tất yếu của gia đình nghệ thuật này, lẽ tất nhiên, là thần học. Những cuộc tranh luận về thần học rất thường xuyên. Người ta tranh luận về mọi vấn đề. Chẳng hạn, loài chuột có thể giao tiếp với các vị thánh được không, nếu nó chịu lễ rước thánh thể; người thường dân Cumxcơ có thể tiên đoán ngày ra đời của Iixuxơ Cơrit được không; vì sao các anh, chị của Đấng cứu thế không được liệt vào các vị thánh...

Về cuộc tham luận đó diễn ra giữa nhà toán học nổi tiếng và vị thầy thuốc lừng danh không kém kia, người ta chỉ phát biểu những dự đoán chung nhất, vì chẳng ai hiểu gì về ý nghĩa của cuộc tranh luận. Người ta nói rằng một trong hai người đã lừa dối người kia (nhưng cụ thể ai lừa và ai bị lừa, thì họ không rõ). Hầu như tất cả mọi người tụ tập trên quảng trường đều hiểu biết rất mơ hồ về toán học, nhưng mọi người đều sốt ruột chờ đợi cuộc tranh luận bắt đầu. Cuộc tranh luận bao giờ cũng luôn luôn vui vẻ, luôn có nguyên cớ để cười nhạo kẻ không may, cho dù người đó đúng hay sai.

Khi đồng hồ trên tòa thị chính điểm năm tiếng, cửa ra vào rộng mở, và đám đông lao vào phía trong đại giáo đường. Dọc theo hai phía của đường trục nối liền lối vào bàn thờ, ngay cạnh hai cột bên, người ta đã dựng hai bục cao, dùng cho những người tranh luận. Những người có mặt cười nói ồn ào, không chú ý những gì được bày đặt trong nhà thờ.

Cuối cùng, phía trước tấm lưới sắt dùng để phân cách gian bày tượng thánh với phần còn lại của giáo đường, đã xuất hiện người mõ rao của thành phố trong chiếc áo khoác màu tím thẫm và với giọng oang oang tuyên bố:

« Thưa các nhà cầm đồ khả ái, thưa các công dân của thành phố Milan được thần linh bảo trợ ! Bây giờ trước mặt các vị, nhà toán học nổi tiếng Nicôlô Tactalia thành Brêsi sẽ phát biểu. Đối thủ của ông trong cuộc tranh luận cũng là nhà toán học và vị thầy thuốc Giêrônimô Cacđanô. Nicôlô Tactalia buộc tội Cacđanô là trong cuốn sach « Ars magna » của mình, ngài Cacđanô đã công bố phương pháp giải phương trình bậc ba của ông ta, ông Tactalia. Nhưng chính ngài Cacđanô không thể đến tranh luận ngày hôm nay và đã cử học trò là ngài Luigio Pherari thay mặt cho mình. Và như thế cuộc tranh luận được tuyên bố bắt đầu, các thành viên của cuộc tranh luận được mời lên diễn đàn ».

Một người vụng về, mũi quặp, râu xoăn, mái tóc lúc đó đã điểm hoa râm bước lên bục diễn giả ở bên trái lối vào. Má trái ông ta có một vết sẹo dài, kéo đến tận dưới cằm. Phía chân bục còn có người bạn đường, rất giống ông ta, nhưng hơi trẻ hơn và dáng điệu có vẻ điềm đạm hơn.

Phía trên bục đối diện, một người trẻ tuổi, khoảng ngoài hai mươi, vẻ mặt tự tin, cặp mắt nhìn có vẻ lừ đừ, đang chậm chạp bước lên diễn đàn. Mỗi cử chỉ của anh ta đều toát lên vẻ tự tin chắc chắn là từng hành động, từng lời nói của mình sẽ được đón tiếp một cách trân trọng. Niềm tin này càng được củng cố vì bục diễn đàn của anh được bao quanh bởi một vòng dày đặc những bạn bè và người thân, sẵn sàng ủng hộ mọi bằng chứng của anh bằng những hành động mạnh mẽ hơn cả mọi những quỷ kế, lời bàn, trong trường hợp cần thiết. Liếc mắt thoáng qua họ, rồi Pherari hướng mắt nhìn vào phía đối thủ có râu, nhưng chẳng có gì đáng hấp dẫn của mình.

Tactalia bắt đầu.

— Thưa các ngài, các thị dân của thành phố Milan, — giọng nói của ông khàn khàn và không to lắm. Ông cố gắng khắc phục tật nói lắp một cách khó khăn — Các công dân của thành phố Milan kính mến, chắc các ngài đã biết rằng 13 năm trước đây, tôi đã từng tìm ra phương pháp giải phương trình bậc ba và sử dụng phương pháp này, khi đó tôi đã giành được thắng lợi trong cuộc tranh luận với Phiôri. Phương pháp của tôi lôi cuốn sự chú ý của *người đồng hương* Cacđanô của các ngài, và ông ta, Cacđanô, đã dùng mọi nghệ thuật quỷ quyệt của mình để tìm biết bí mật của tôi. Ông ta không từ bỏ một sự lừa bịp nào, một sự gian trá nào. Các ngài cũng đã biết, ba năm trước đây, tại Niurơbec, cuốn sách về các qui tắc đại số của Cacđanô đã ra đời, trong đó phương pháp của tôi, bị đánh cắp một cách trắng trợn, biến thành vật *sở hữu* của họ.

Tactalia ngừng lại, để lấy hơi. Qua nét mặt của những người có mặt, ông nhận rõ nếu không *lộ vẻ không tin*, thì còn là một dấu hiệu gì đó tệ hại hơn, một sự thông cảm pha chút diễu cợt. Điều đó càng làm ông lúng túng hơn và ông ta bắt đầu nói lắp một cách thảm hại hơn nhiều so với phần đầu bài phát biểu của ông.

— Tôi đã thách Cacđanô và người học trò của ông ta, mà giờ đây đang đứng trước mặt các ngài, một cuộc thi đấu. Tôi đề nghị họ *giải* 31 bài toán, các đối thủ của tôi cũng đề ra cho tôi ngần ấy bài. Thời hạn để giải các bài toán đã được quyết định là 15 ngày. Chỉ trong 7 ngày, tôi đã giải được phần lớn các bài toán mà Cacđanô và Pherari đã đặt ra. Tôi đã in *lời giải* và *nhờ người* chạy giấy chuyển đến Milan. Nhưng tôi phải chờ đúng 5 tháng mới nhận được lời giải các bài toán của mình. Tự điều này đã vi phạm điều kiện thi đấu, nhưng chiếu cố đến mức độ chưa hoàn thiện về các tri thức toán học của các đối thủ của tôi, tôi sẵn sàng bỏ qua điều kiện này, cho dù vì thế tôi có thể bị thua trong cuộc thi đấu. Nhưng những bài toán do tôi đề ra lại không được giải đúng. Điều đó cho tôi cơ sở để thách thức cả hai người đến tranh luận — quyết đấu công khai, mà trong cuộc tranh luận này, các ngài, các công dân kính mến của thành phố Milan có vinh dự được tham dự.

Tactalia im lặng và với bàn tay run run, ông rút chiếc khăn màu từ trong cổ tay áo rộng, lau khô vầng trán đẫm mồ hôi.

Người trẻ tuổi, bằng tay phải, làm một cử chỉ rất điệu bộ, không tự nhiên và với vẻ kiêu căng trịch thượng, sau khi liếc nhìn ngài Tactalia bất hạnh, khẽ hất cái đầu đang ngửng cao một cách tự hào về phía sau, và nói bằng một giọng nam trung với âm « r » cố uốn.

— Thưa các ngài vô cùng kính mến! Ngay những câu nói đầu tiên trong bài phát biểu của mình, đối thủ có nhiều uy tín của tôi đã tự cho phép mình phát biểu bao nhiêu điều vu khống cho tôi và cho người thầy của tôi, nhưng những lý lẽ của ông ta lại quá vô căn cứ và không nhất quán, làm tôi chẳng khó khăn gì bác bỏ ngay điều buộc tội đầu tiên, và dễ dàng chỉ cho các ngài thấy rõ sự thiếu xác đáng của điều buộc tội thứ hai.

— Trước hết có thể nói về sự lừa gạt nào, nếu Nicôlô Tactalia hoàn toàn tự nguyện trao đổi phương pháp của mình với cả hai thầy trò tôi? Bên cạnh đó, trong trường hợp khi phía ông ta không có sự chân thành hoàn toàn và khi ông ta muốn lừa gạt chúng tôi, thì sau khi viết công thức toán học dưới dạng mật mã trong những vần thơ bí hiểm và tối nghĩa, liệu ai có thể phủ định được rằng, con người đã nhìn rõ sự thật sau những câu thơ bí hiểm và rối rắm này, sẽ chính là tác giả của phát minh, trong mức độ tương đương với người đã đi đến phát minh này, mà không cần đến những vần thơ, nhưng điều ám chỉ bóng gió nào?

— Đối thủ của tôi thể hiện khá nhiều tính không cao thượng, khi nhìn chúng tôi chỉ như những tên ăn cắp vô liêm sỉ, nhưng trong cuốn sách «Nghệ thuật vĩ đại», người thầy của tôi, hoàn toàn không nghĩ gì về quyền lợi cá nhân mình, đã hoàn toàn gắn cho Tactalia niềm vinh dự phát minh mà chính người thầy của tôi cũng có quyền được hưởng một phần không kém.

Pherari, sau khi thọc tay vào túi ngực, rút ra một cuốn sách nhỏ, mở ra và bắt đầu nói :

— Đây, Gierônimô Cacđanô đã biết về vai trò của vị đối thủ của chúng tôi trong việc phát minh ra quy tắc đại số như thế nào. Người nói, không phải cho người, cho Cacđanô, — Pherari cao giọng cho mọi người hiểu là những lời dưới đây được trích dẫn từ trong cuốn sách, — « Vinh dự phát minh một kết quả tuyệt đẹp và đáng ngạc nhiên, vượt quá sự sắc sảo của con người và mọi tài năng có thể có của mỗi người, đó là thuộc về Tactalia, người bạn tôi. Phát minh này thật sự là một món quà tặng của Đức Chúa Trời. Cách chứng minh tuyệt đẹp mà ông đã đạt được như vậy đủ nói rằng, đối với ông không có gì là không đạt được ».

Cũng bằng một điệu bộ không tự nhiên, Pherari hất những sợi tóc xoăn tuyệt đẹp từ trán lên và tiếp tục. — Đối thủ của tôi, như tất cả các ngài đã nghe rõ, đã buộc tội tôi và người thầy của tôi là dường như chúng tôi đã đưa ra lời giải không đúng các bài toán của ông ta. Tôi muốn Xinho(1) Tactalia giải thích: thế nào là lời giải không đúng? Nghiệm của một phương trình có phải là không đúng chăng, khi thế nó vào phương trình và thực hiện mọi phép tính đã viết trong phương trình này, chúng ta đi đến một đồng nhất thức? Và nếu Xinho Tactalia muốn hoàn toàn nhất quán, thì ông ta phải giải đáp điều chú ý là vì sao, chúng tôi, những người ăn cắp,

(1) Ngài, tiếng Italia (N. D)

theo lời nói của ông ta, lấy cắp phát minh của ông ta và sử dụng những phát minh này để giải những bài toán do chính ông ta đề ra, lại nhận được kết quả không tin cậy.

Và thế thì chỉ có một trong hai kết luận — hoặc là những kết quả thực sự không đúng, và khi đó, những phát minh của Xinho Tactalia hoàn toàn không còn là một phát minh nữa, hoặc là những kết quả này là đúng.

Tiếng ồn ào lan khắp đám đông người đang có mặt. Những người nghe bắt đầu trao đổi một cách sinh động và hướng ánh mắt nhìn sảng khoái về phía con người trẻ tuổi và với vẻ giễu cợt, nhạo báng, về phía đối thủ kém phần đường bệ kia.

— Nhưng chúng tôi, — Pherari tiếp tục : tức là người thầy của tôi và tôi, không cho rằng phát minh của xinho Tactalia là kém phần quan trọng. Phát minh này thật là đặc sắc. Hơn nữa, trong một mức độ đáng kể, dựa trên nó, tôi đã tìm ra phương pháp giải phương trình bậc bốn, và trong cuốn « Ars magna » thầy tôi có nói đến điều này.

Bằng một cử chỉ đầy diễn cảm, Pherari chỉ vào cuốn sách đang mở rộng :

— Thế thì Xinho Tactalia muốn gì ở chúng tôi nữa ? Qua cuộc tranh luận này, ông ta muốn đạt được cái gì ?

Tiếng ồn ào trong đại giáo đường càng tăng thêm. Cất cao giọng nói oang oang của mình, khó khăn lắm người mõ rao mới có thể làm những tiếng ồn ào lắng dịu một chút.

— Thưa các ngài, thưa các ngài, — Tactalia không thể tìm được những lời thích hợp, — Tôi xin các ngài hãy lắng nghe tôi nói. Tôi không phủ định rằng đối thủ trẻ tuổi của tôi về mặt suy diễn lôgic và tài hùng biện, rất vững vàng. Nhưng không nên thay thế bằng chứng toán học chân thực bởi cách suy diễn lôgic và tài hùng biện, ảnh hưởng nhiều đến cảm tính hơn là sự suy xét. Những bài toán tôi ra cho Cacđanô và Pherari đã được giải không đúng, và tôi sẽ chỉ rõ điều này cho các ngài rõ. Thực vậy, thí dụ, chẳng hạn, chúng ta lấy một phương trình trong số các phương trình đã được giải. Như đã biết, nó ...

Tiếng ồn ào không thể tưởng tượng nổi vang lên khắp đại giáo đường, hoàn toàn nuốt chửng phần cuối câu nói của nhà toán học bất hạnh này. Những người bạn của Pherari gây cảnh ồn ào nhiều nhất. Trong mớ hỗn loạn những lời nói vẳng đến tai Tactalia, ông hiểu rằng những người có mặt đòi bầu ra những pháp quan, có am hiểu về toán học, để có thể nói xem trong những ý kiến chống đối của mình, Tactalia đúng đến mức nào.

— Thưa các ngài, — cố dồn hết sức lực của mình, Tactalia thét to lên, — Tôi không đồng ý với bất kỳ sự lựa chọn các pháp quan như thế nào ở nơi đây, ở thành phố Milan này. Ở đây, tôi không biết một ai và tôi có thể khẳng định trước rằng mọi sự xét xử ở đây đều sẽ được ước định sẵn và không khách quan.

Người ta không để ông nói tiếp. Đám đông người với khát vọng ngày càng tăng, đòi Tactalia phải im tiếng, để đến lượt Pherari được trình bày.

Tactalia buộc lòng phải nhượng bộ.

Được tiếp lời, Pherari nói thoải mái, dường như không phải trong cuộc tranh luận mà trong giảng đường của trường đại học. Anh bắt đầu từ những điều sơ đẳng trong cơ học và toán học, phân tích một cách say sưa những công trình của Acsimét và Avisenna (1). Anh

(1) Tên La-tinh hóa của nhà triết học và bác học Trung Á thế kỷ 11 Abu Ali Ibônơ Xinu (N. D).

liên hệ những chân lý toán học với những chân lý thần thánh, thiêng liêng. Say sưa lôi cuốn mọi người khác và lôi cuốn cả mình, anh xa dần khỏi chủ đề của cuộc tranh luận đến mức, chỉ trừ Tactalia, không còn ai trong số những người có mặt hiểu được ý nghĩa của cuộc tranh luận, và thực sự, tranh luận về vấn đề gì.

Đám đông say sưa hò reo sôi động cuối mỗi phần nói trong bài phát biểu của diễn giả được ưa chuộng. Còn về phía Tactalia, chỉ vọng đến những lời đe dọa, và có thể phỏng đoán được rằng, chính vẻ tôn nghiêm của đại giáo đường đã kìm hãm những kẻ ủng hộ Pherari nhiệt thành nhất khỏi cuồng vọng trừng phạt ngay lập tức người nói lắp, kẻ đã dám nghi ngờ sự thông thái của hai công dân đáng kính trọng nhất ở Milan.

Sau khi liếc nhìn người anh đang đứng ở chân bục diễn đàn và đang làm hiệu cho ông biết đã hết hy vọng, và nhận thấy có tiếp tục tranh luận thêm cũng hoàn toàn vô ích, Tactalia vội vã rút khỏi bục diễn đàn. Cả hai nhanh chóng xuyên qua đám đông người đang miễn cưỡng nhường lối cho họ, và xuyên qua tiền sảnh phía bắc, để ra quảng trường. Sau lưng họ đám người chào mừng «Người chiến thắng» cuộc tranh luận Luigiơ Pherari, «Chàng thanh niên tươi thắm với giọng nói dịu dàng, và khuôn mặt tươi trẻ, với những khả năng rộng mở và ý chí của một con quỷ» bằng những tiếng hò reo và những tràng vỗ tay sôi động, như những người cùng thời với Pherari đã viết về anh ta như vậy.

Cuộc tranh luận mà giờ đây, sau hơn 400 năm trôi qua vẫn đang tiếp tục gây thêm những cuộc tranh luận mới nữa, khi đó đã kết thúc như vậy. Trong cuộc tranh luận đầu tiên vào năm 1548, ai đúng? Phát minh ra phương pháp giải phương trình bậc ba thực sự thuộc về ai? Giờ đây, chúng ta nói chắc chắn — Nicôlô Tactalia. Chính ông ta đã phát minh ra, còn Cacđanô đã lừa đoạt phát minh này của Tactalia. Và nếu giờ đây, chúng ta gọi công thức biểu diễn nghiệm của phương trình bậc ba qua các hệ số của nó là công thức Cacđanô, thì đây là do sự bất công mang tính chất lịch sử.

Nhưng có đúng đây là một sự bất công chăng? Tính toán mức độ đóng góp trong phát minh này của từng nhà toán học như thế nào?

Cũng có thể, cùng với thời gian, chúng ta sẽ có thể trả lời câu hỏi này một cách hoàn toàn chính xác. Mà cũng có thể với muôn đời sau, đây vẫn còn là một điều bí mật ...

## CÔNG THỨC CACĐANÔ

Nếu sử dụng ngôn ngữ toán học hiện đại và hệ thống ký hiệu hiện nay, thì việc rút ra công thức Cacđanô có thể tìm được nhờ những lập luận sau đây, trong một mức độ nào đó khá là sơ cấp.

Giả sử chúng ta có phương trình bậc ba tổng quát:

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0 \qquad (27)$$

Nếu chúng ta đặt:

$$x = y - \frac{b}{a}$$

thì chúng ta sẽ dẫn phương trình (27) về dạng:

$$y^3 + 3py + q = 0 \qquad (28)$$

trong đó:

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2}$$

$$2q = 2\frac{b^3}{a^3} - 3\frac{bc}{a^2} + \frac{d}{a}$$

Chúng ta đưa thêm ẩn mới u nhờ đẳng thức :

$$y = u - \frac{p}{u}$$

Khi đưa biểu thức này vào phương trình (28) chúng ta sẽ nhận được :

$$(u^3)^2 + 2qu^3 - p^3 = 0 \qquad (29)$$

Từ đó :

$$u^3 = -q \pm \sqrt{q^2 + p^3}$$

Vì vậy :

$$y = \sqrt[3]{-p \pm \sqrt{q^2 + p^3}} - \frac{p}{\sqrt[3]{-q \pm \sqrt{q^2 + p^3}}}$$

Nếu nhân cả tử số và mẫu số của số hạng thứ hai với biểu thức

$$\sqrt{-q \mp \sqrt{q^2 + p^3}}$$

và chú ý thêm rằng biểu thức nhận được trong kết quả đối với u là đối xứng đối với các dấu « + » và « − », thì cuối cùng chúng ta sẽ nhận được.

$$y = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}$$

Đây chính là công thức Cacđanô nổi tiếng. Nếu lại chuyển từ y về x, thì chúng ta sẽ nhận được công thức xác định nghiệm của phương trình bậc ba tổng quát.

Người thanh niên trẻ tuổi đã đối xử một cách nhẫn tâm với Tactalia, rõ ràng không phải chỉ có khả năng nói dài và nhập nhờ. Trong toán học lúc đó, anh cũng dễ dàng tìm hiểu như anh đã dễ dàng nắm bắt trúng thị hiếu của đám bình dân. Một thời gian ngắn kể từ khi Pherari được biết về phương pháp tổng quát giải phương trình bậc ba, anh đã tìm ra ngay phương pháp giải phương trình bậc bốn. Cacđanô đã đưa phương pháp này vào sách của mình, như Pherari đã tuyên bố trong buổi tranh luận với Tactalia.

Phương pháp này là gì?

Ở trên chúng ta đã thấy, nhờ một phép thế hoàn toàn không phức tạp lắm, phương trình bậc ba (28) có thể đưa về phương trình bậc hai (29) đối với ẩn số $u^3$.

Bây giờ hoàn toàn tự nhiên, Pherari sẽ tìm khả năng đưa phương trình bậc bốn tổng quát về một phương trình bậc ba nào đó.

Giả sử :

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0 \qquad (30)$$

— là một phương trình tổng quát. Nếu đặt :

$$x = y - \frac{b}{a}$$

Thì phương trình (30) có thể đưa về dạng :

$$y^4 + 2py^2 + 2qy + r = 0 \qquad (31)$$

trong đó p, q, r — là những hệ số phụ thuộc vào a, b, c, d, e. Dễ thấy rằng phương trình này có thể viết ở dạng

$$(y^2 + p + t)^2 = 2ty^2 - 2qy + t^2 + 2pt + p^2 - r \qquad (32)$$

Thật vậy, chỉ cần thực nghiệm phép tính bình phương để mở dấu ngoặc ở phía trái. Khi đó tất cả các số hạng chứa t sẽ tương hỗ triệt tiêu nhau, và chúng ta sẽ quay trở lại phương trình (31).

Chúng ta chọn tham số t sao cho vế phải của phương trình (32) là một bình phương đầy đủ đối với y. Như đã biết, điều kiện cần và đủ để thực hiện yêu cầu này là biệt thức của các hệ số của tam thức bậc hai (đối với y) ở vế phải, phải bằng không :

$$q^2 - 2t(t^2 + 2t + p^2 - r) = 0 \qquad (33)$$

Đây là một phương trình bậc ba đầy đủ mà chúng ta có thể giải được. Chúng ta sẽ tìm một nghiệm của phương trình này và thay vào phương trình (32), mà giờ đây sẽ nhận dạng :

$$(y^2 + p + t)^2 = 2t\left(y - \frac{q}{2t}\right)^2$$

Từ đó :

$$y^2 \mp \sqrt{2t}\, y + p + t \pm \frac{q}{\sqrt{2t}} = 0$$

Đây là một phương trình bậc hai. Sau khi giải phương trình này, chúng ta sẽ tìm được nghiệm của phương trình (31), và vì vậy, sẽ tìm được nghiệm của phương trình (30).

Toàn bộ cách giải thật rất đơn giản, nhưng biết bao nhiêu sự kiện bi thảm, và đôi khi hài hước nữa, đã đi kèm theo phát minh này. Nhưng cho dù những sự kiện này như thế nào, chúng vẫn đời đời được chúng ta ghi nhớ, như những sự kiện được điểm tô bằng một vầng hào quang có chất lãng mạn cao. Đó là chất lãng mạn của sự tìm tòi, chất lãng mạn của mỗi chiến công khoa học, chất lãng mạn của vẻ đẹp và tính hấp dẫn, giống như chất lãng mạn của những chuyến du lịch vòng quanh thế *giới với những* phát kiến địa lý.

Những phương trình bậc ba và bậc bốn đã giải được. Nghiệm của các phương trình này, cũng như những nghiệm của phương trình bậc một và bậc hai, có thể biểu thị qua các hệ số của các phương trình này bằng một số hữu hạn các phép tính cộng, trừ, nhân chia, nâng lên lũy thừa và lấy căn theo bậc tương ứng. Nhưng chắc mỗi người đều cảm thấy kỳ quặc đến mức không thể *tưởng tượng* được, nếu có ai đó quả quyết rằng sau đó, chẳng cần làm gì nữa, chẳng phải tìm tòi gì thêm nữa, và các phương trình bậc cao hơn bốn chẳng đáng chú ý nữa. Nhà toán học chẳng còn là nhà toán học, nếu cuối cùng sau khi đã giải quyết được vấn đề tìm nghiệm của các phương trình bậc ba và bốn, lại không muốn biết đến phương trình bậc năm, bậc sáu và các bậc cao hơn nữa sẽ được giải như thế nào ?

Quá trình sáng tạo trong toán học cũng giống như mọi quá trình sáng tạo khác. Khi nhà văn bắt đầu suy nghĩ về sáng tác một tác phẩm nghệ thuật, ông ta thường mới chỉ hình dung một cách lờ mờ về số phận những nhân vật của mình. Nhưng khi các nhân vật được hình thành đã sống một cuộc sống của mình, thì nhà văn, dù mong muốn thế nào, vẫn không thể dùng ngòi bút của mình để cản trở, vẫn không có quyền thay đổi cuộc sống riêng của các nhân vật khác đó.

Trong toán học cũng vậy, những ai không biết tập trung sức lực của mình để làm gì, thì rõ ràng, đó không phải là một nhà toán học, hay nếu là một nhà toán học thì đó là nhà toán học thủ cựu, không sáng tạo. Lao vào giải quyết một bài toán nào đó, trong một ý nghĩa đã biết, nhà toán học — sáng tạo không còn quyền hạn đối với chính mình. Khoa học toán học dẫn dắt anh ta đi theo mình. Toán học sẽ tự nó đặt ra cho nhà toán học hàng nghìn vấn đề gắn bó với nhau một cách chặt chẽ, và số lượng những vấn đề được đặt ra sẽ tăng nhanh với tốc độ tăng số lượng những tảng tuyết lăn từ đỉnh núi xuống. Không nên nghĩ rằng khoa học toán học như vậy tách rời với cuộc sống thực tế. Chính toán học được nảy sinh từ cuộc sống thực tế này, và nếu toán học dẫn dắt nhà nghiên cứu đi theo mình, thì điều đó có nghĩa là chính cuộc sống thực tế đang dẫn dắt nhà nghiên cứu đi theo nó.

## TƯỢNG ĐÀI TRONG CÔNG VIÊN VUA CHÚA

Một tượng kỷ niệm được dựng trong công viên vua chúa ở Ôxlô. Trên bệ đài — một khối hình bình hành được đẽo gọt một cách thô kệch — là một bức tượng của con người trẻ tuổi, để trần có dáng điền kinh, hai chân đạp lên hai hình quân bài bị lật ngửa. Đó là Aben. Những con bài lật ngửa biểu thị ý nghĩa gì, rõ ràng, chỉ có nhà tạc tượng, người đã tạo nên nó, mới hiểu được. Còn những người đã ngắm nhìn bức tượng, rõ ràng lại giải thích ý nghĩa và giá trị của những hình quân bài bị lật theo cách suy nghĩ của riêng mình. Có thể chăng đó là hai vấn đề quan trọng nhất mà Aben đã giải được. Lý thuyết các hàm số êliptic và vấn đề giải các phương trình đại số dưới dạng những căn thức? Hay có thể chăng đó là hai kẻ thù quỷ quyệt nhất của con người, đã từng chiến thắng cả thiên tài trẻ tuổi: cái chết và sự lãng quên? Aben đã chiến thắng cả kẻ thù thứ nhất và thứ hai, giành lấy sự bất tử trong trí nhớ của những thế hệ đời sau nhờ những phát minh lỗi lạc của mình.

Tuy nhiên, trí tưởng tượng phong phú của tác giả tượng đài vẫn có thể dồn hai hình quân bài bị lật ngửa vào thế bí, không chỉ vì ý nghĩa mập mờ. Nhà thể thao đang trang trọng ngồi trên bục tượng đài kia, chỉ với trí tưởng tượng rất sinh động, mới có thể thấy có những đường nét giống với Aben. Không, Aben không phải là một nhà thể thao. Và ngay vẻ ngoài của anh cũng không toát ra vẻ quả quyết — kiên định, giúp anh khả năng vượt qua mọi trở ngại gặp phải. Trên bức chân dung duy nhất còn lại đến ngày nay của nhà toán học, được tạo nên trong thời gian anh đến Pari, chúng ta thấy đó là một thanh niên nhút nhát, rất đáng yêu, có nụ cười dễ gây thiện cảm và một mái tóc dày mềm mại, màu tro. Bệnh tật hiểm nghèo (chứng viêm phổi và một dạng lao tiềm tàng) đã làm hao mòn sức lực vốn đã không vững vàng của nhà toán học. Aben mất vào tuổi 26, ngày 6 tháng tư năm 18-9.

## TRƯỜNG, NHÓM, VÀ SỰ MỞ RỘNG

Về những phát minh của Aben, chẳng hạn, về những gì có liên quan đến các hàm êliptic và tích phân êliptic thật khó nói. Cần phải đưa rất nhiều những định nghĩa và giải thích mới có thể trình bày thực chất cơ sở những kết quả của ông một cách xác đáng. Về những phát minh khác, có liên quan đến việc chứng minh đặc tính không có khả năng giải các phương trình tổng quát bậc cao hơn bốn dưới dạng căn thức, chúng ta sẽ cố gắng kể ở đây, nhưng chỉ giới hạn trong những nét chung nhất.

Giả sử chúng ta có một phương trình đại số tổng quát nhất đối với bậc cao hơn bốn :

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0;\ n \geqslant 5 \qquad (34)$$

Như K. F. Gauxơ, nhà toán học lỗi lạc người Đức trong thế kỷ 18 – 19, đã chỉ ra, phương trình này có n nghiệm. Các nghiệm này có thể là thực, ảo, trùng nhau hay khác nhau.

Khi giả thiết rằng các nghiệm của phương trình (34) là khác nhau, chúng ta phải cho rằng các hệ số của phương trình này là hoàn toàn tùy ý.

Chúng ta sẽ gọi tập hợp P nào đó các số, có những tính chất sau đây, là một *trường*:

1. Nếu a thuộc P và b thuộc P thì a + b thuộc P và ab thuộc P ;

2. Nếu a thuộc P thì – a cũng thuộc P, và $a^{-1}$ cũng thuộc P (với $a \neq 0$).

Giả sử P là một trường nào đó. Chúng ta lấy căn bậc hai tất cả các phần tử của trường này, và thêm vào trường đó tất cả các căn bậc hai nhận được, cùng tất cả những số nhận được là từ tập hợp đã mở rộng như thế bằng cách thực hiện nhiều lần các phép tính cộng, trừ, nhân, chia (trừ phép chia cho số 0). Chúng ta sẽ nhận được một trường mới, được gọi là *trường hay sự mở rộng radican* của trường P. Một cách tương tự, có thể nhận được trường mở rộng radican khi lấy căn bậc 3, căn bậc 4, ...

Giả sử bây giờ chúng ta có phương trình (34) nào đó, với các hệ số thuộc trường P. Giả sử phương trình này có nghiệm biểu diễn được dưới dạng những căn thức. Điều đó có nghĩa là nghiệm như thế thuộc trường nhận được từ trường P do kết quả liên tiếp mở rộng radican ngoài ra mỗi sự mở rộng tiếp sau nhận được từ trường do kết quả của sự mở rộng ở lần trước dẫn tới. Khi xem xét những trường này, chúng ta sẽ phát hiện thấy mối liên hệ của chúng với các khái niệm rất quan trọng của đại số hiện đại, như khái niệm nhóm, ước chuẩn tắc và nhóm — thương.

Giả sử chúng ta có tập hợp Ω các phần tử có bản chất tùy ý a, b, c, ... Giả sử mỗi cặp phần tử a, b của tập hợp này lấy theo một thứ tự xác định, được liên hệ với một phần tử nào đó, mà chúng ta gọi là *tích* của các phần tử a, b, và ký hiệu là ab. Trong trường hợp tổng quát thì $ab \neq ba$.

Tập hợp Ω được gọi là một *nhóm* khi và chỉ khi bốn điều kiện sau đây (các tiên đề nhóm) được thực hiện:

1. Tích của hai phần tử của tập hợp P lại thuộc vào chính tập hợp này: $ab = c$.

2. Định luật kết hợp được nghiệm đúng:

$$(ab)c = a(bc)$$

3. Đơn vị của nhóm, tức là phần tử e có tính chất là đối với mỗi phần tử a của tập hợp, đều nghiệm đúng đẳng thức:

$$ae = a$$

4. Đối với mỗi phần tử a thuộc tập hợp Ω đều có tồn tại phần tử $a^{-1}$ thuộc tập hợp này (phần tử nghịch đảo), sao cho

$$aa^{-1} = e$$

Nếu đối với mỗi cặp phần tử a, b của nhóm, đẳng thức $ab = ba$ đều được thực hiện, thì nhóm được gọi là *nhóm giao hoán* hay *nhóm Aben*.

Nếu một bộ phận của nhóm, đến lượt mình, lại là một nhóm với phép nhân như thế, thì bộ phận này được gọi là *nhóm con* của nhóm đã cho.

Nhóm được gọi là *nhóm chu trình* nếu mỗi phần tử của nhóm là một lũy thừa liên tiếp, tức là tích của chính nó với nó lại tương ứng số lần của một phần tử nào đó của nó (phần tử sinh).

Giả sử G — là một nhóm, và H — là một nhóm con nào đó của nó. Giả sử g thuộc G — là một phần tử cố định nào đó và h thuộc H — là một phần tử tùy ý của nhóm con. Tập hợp tất cả các phần tử có dạng gh, trong đó g cố định, còn h thay đổi trong nhóm con, được gọi là *lớp kề cận trái* theo nhóm con H. Chúng ta ký hiệu lớp này là gH. Một cách tương tự, chúng ta có thể nhận được lớp kề cận phải Hg, như tập hợp các phần tử có dạng hg. Trong trường hợp tổng quát các lớp trái và phải không trùng nhau: gH $\neq$ Hg. Nếu đối với một phần tử g nào đó, đẳng thức gH = Hg là đúng (cho dù nói chung gh $\neq$ hg), thì nhóm con H được gọi là *ước chuẩn tắc* của nhóm G.

Nếu lại nhân hai lớp kề cận (tức là nhân tất cả các phần tử của chúng), thì lại nhận được lớp kề cận. Khi đó, mọi tiên đề nhóm đều được thực hiện, trong đó vai trò đơn vị của nhóm chính là ước chuẩn tắc. Chúng ta nhận được nhóm mới, mà các phần tử của nhóm là những lớp kề cận. Nhóm này được gọi là *nhóm thương* của nhóm G theo ước chuẩn tắc H, và được biểu diễn bằng ký hiệu G/H.

Dễ hiểu rằng mỗi trường là một nhóm, trong đó phép nhân là phép nhân các số thông thường của trường. Trường mở rộng radican của trường cũng là một nhóm. Bản thân trường cũng là một ước chuẩn tắc của trường mở rộng radican của mình, còn nhóm thương theo ước này — là nhóm Aben và chu trình.

Nếu phương trình đại số được giải dưới dạng những căn thức, thì có tồn tại một dãy những mở rộng radican và vì vậy tồn tại một dãy những nhóm con, bắt đầu từ nhóm G tức là sự mở rộng radican tận cùng và kết thúc bằng đơn vị của nhóm, tức là trường P trong trường hợp đã cho:

$$G, H_1, H_2, \ldots, e$$

Bây giờ chúng ta đưa thêm một khái niệm quan trọng về nhóm Galoa. Giả sử có một sự mở rộng radican K nào đó của trường P. Chúng ta sẽ xem xét những *phép tự đẳng cấu* có thể có của trường K, tức là những phép ánh xạ các phần tử của trường vào các phần tử của chính nó, sao cho khi đó tổng của hai phần tử chuyển thành phần tử tổng, còn tích của hai phần tử — thành phần tử tích. Nếu khi đó các phần tử của trường P lại chuyển thành chính mình, thì các phép tự đẳng cấu được gọi là *các phép tự đẳng cấu trên trường P*. Tập hợp tất cả các phép tự đẳng cấu là một nhóm, và được gọi là *Galoa của trường K trên trường P*. Nó được biểu thị bằng ký hiệu G(K, P).

Nhóm Galoa chuyển mỗi nghiệm của phương trình có thể giải được dưới dạng những căn thức, thành nghiệm của chính phương trình này. Nếu các nghiệm của phương trình là khác nhau (vì vậy, các hệ số của phương trình (34) là tùy ý), thì phép biến đổi chuyển tập hợp gồm n nghiệm thành chính tập hợp này, được gọi là một *phép thế*. Khi cho rằng các nghiệm đã được đánh số thứ tự, có thể biểu thị phép thế như vậy bằng ký hiệu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

trong đó $i_1, i_2, \ldots, i_n$ — chính là các số tự nhiên 1, 2, ... n, nhưng nói chung lấy theo một thứ tự nào đó. Tập hợp tất cả các phép thế gồm n phần tử là một nhóm, được gọi là *nhóm đối xứng*. Số các phần tử trong nhóm này bằng n!

Giả sử chúng ta có dãy những mở rộng radican của trường P :

$$P = L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_{i-1} \subset L_i \subset \ldots \subset L_S = K \quad (35)$$

ở đây ký hiệu $\subset$ biểu thị sự bao hàm (dấu bao hàm hay dấu chứa — N. D), tức là trong trường hợp này, mỗi trường là một trường con của trường tiếp sau. Mỗi trường là sự mở rộng của trường đứng trước.

Chúng ta liên hệ mỗi trường con với một nhóm Galoa:

$$H_i = G(K, L_i)$$

Trong trường hợp như vậy, dãy các trường con (35) sẽ tương ứng với dãy các nhóm con:

$$G(K, P) = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_{i-1} \supset H_i \supset \ldots \supset H_S = e \quad (36)$$

Ký hiệu $\supset$ biểu thị mỗi nhóm là một nhóm con của nhóm đứng trước. Hơn nữa, trong trường hợp đã cho, nhóm con này là một ước chuẩn tắc của nhóm đi trước, còn mỗi nhóm thương $H_{i-1}/H_i$ là một nhóm Aben và chu trình.

Khi có dãy (36), người ta nói nhóm G (K,P) là *giải được*. Nếu dãy (36) chỉ có thể xảy ra với $S = 1$, thì nhóm được gọi là *nhóm đơn*, hay *nhóm không giải được*.

Như thế, nếu phương trình đại số giải được dưới dạng căn thức, thì nhóm Galoa tương ứng với nó cũng giải được. Điều ngược lại cũng đúng: nếu nhóm Galoa không giải được thì phương trình đại số tương ứng nhóm này cũng không giải được dưới dạng căn thức.

Để chứng minh tính chất không thể giải được của phương trình đại số tổng quát dưới dạng những căn thức, chỉ cần khẳng định rằng nhóm Galoa tương ứng với phương trình này là không giải được.

Khi đó, vì là phương trình tổng quát, tức là các hệ số là tùy ý, thì thay cho nhóm Galoa, có thể chọn một nhóm tương ứng của các phép thế gồm n phần tử, trong đó, n — là bậc của phương trình.

Với $n \leqslant 4$, mỗi nhóm các phép thế là giải được, và điều đó có nghĩa là phương trình đại số bậc không vượt quá 4 có thể giải được dưới dạng những căn thức. Nghiệm của các phương trình này, như chúng ta đã biết, đã tìm được do kết quả của những cố gắng tìm tòi lâu dài. Cũng còn có những phương pháp khác nữa tìm ra các nghiệm này — nhờ xây dựng giải thức Lagrănggiơ, như thường gọi — nhưng ở đây, chúng ta sẽ không mô tả phương pháp này.

Với $n \geqslant 5$, các nhóm các phép thế không giải được, và điều này có nghĩa là các phương trình đại số tổng quát bậc cao hơn 4 không giải được dưới dạng những căn thức.

Định lý này đã được Aben chứng minh khi ông mới gần tới tuổi 22. Nhưng sơ đồ lập luận của ông có khác với sơ đồ lập luận mà chúng ta vừa trình bày lại. Sơ đồ chúng ta vừa trình bày này được hòa hợp chọn vẹn trong lý thuyết Galoa, đã được tạo ra sau đó một thời gian. Quan điểm của Aben là chứng minh tính không thể biến thành đồng nhất thức của phương trình có bậc cao hơn 4, nếu thay ẩn chưa biết trong phương trình bằng biểu thức được tạo thành từ các hệ số của phương trình bởi các phép tính cộng, trừ, nhân, chia và lấy căn.

Lập luận của Aben không mang tính chất tổng quát như trong lý thuyết Galoa. Dựa trên đặc tính tổng quát này, Galoa không những đã lặp lại được những kết quả của Aben, mà còn tiến xa hơn nhiều so với Aben. Trong một ý nghĩa đã biết, lý thuyết Aben chỉ là một kết quả phụ trong những kết quả nghiên cứu của Galoa. Lý thuyết GaLoa không những cho phép chứng minh tính không giải được dưới dạng những căn thức của phương trình tổng quát bậc cao hơn 4, mà còn chỉ ra những điều kiện giải được cho những phương trình không phải dưới dạng tổng quát.

Liệu có cần nói thêm rằng việc tạo ra lý thuyết Galoa — không phải là văn bản quyết định cuối cùng trong toán học, hay không? Chính lý thuyết này đã làm nảy sinh ra một tập hợp các bài toán khác, mà cho đến nay, các nhà toán học vẫn đang miệt mài tìm cách giải chúng. Về ý nghĩa của những công trình nghiên cứu mới này, có thể đánh giá qua sự kiện: một số công trình nghiên cứu đã được trao tặng những giải thưởng cao nhất trên đất nước Xô-viết.

## NHỮNG SỨC MẠNH TIỀM TÀNG

Cho dù toán học đã bước xa đến mức nào, đời đời loài người vẫn còn tưởng nhớ đến hai người thanh niên tuyệt vời — Aben và Galoa, mà số phận bi thảm của họ sẽ làm thức tỉnh sự thông cảm chân thành và sâu sắc nhất trong mỗi chúng ta, còn trí tuệ minh mẫn và đầy tài năng của họ — buộc chúng ta phải khâm phục một cách sâu sắc nhất.

Những sức mạnh vĩ đại nằm ngay trong trí tuệ con người. Chính sức mạnh to lớn đã tạo khả năng hình dung thế giới dưới dạng một hệ thống có tổ chức về mặt toán học, thật là vĩ đại. Mọi người đều có khả năng tư duy toán học, nhưng có người — khả năng này lớn, và có người — khả năng này ít hơn. Khả năng này thường là một sức mạnh tiềm tàng, cần biết cách thức tỉnh. Và khi đã được thức tỉnh nó sẽ sáng tạo nên những tác phẩm tuyệt diệu.

Người ta kể lại rằng, có một lần, người Xpactơ bị kẻ thù đánh lui, đã kiệt lực trong một trận chiến đấu khốc liệt và không cân sức. Sức lực đang tan rã, sức chống đỡ yếu dần, dường như chẳng còn bao lâu nữa, mọi chuyện sẽ kết thúc : kẻ thù hân hoan với chiến thắng sẽ lao vào trong đồn lũy, và những người lính bảo vệ cuối cùng sẽ ngã xuống mảnh đất thiêng liêng thấm đầy máu tươi của cha ông họ.

Khi không còn chút hy vọng cứu vãn nào, những người bị vây hãm bỗng nhớ đến những người anh em theo dòng máu Aphinơ (1) của mình. Hai thành phố Aphinơ và Lakêđêmôn (2) thường tranh cãi nhau, thường bất hòa. Nhưng trước quân thù nguy hiểm và quỷ quyệt, chẳng lẽ không thể tạm quên mối hiềm khích anh em hay sao ? Lakêđêmôn sụp đổ, thì Aphinơ cũng sẽ sụp đổ, và Elađa quang vinh sẽ vĩnh viễn đi vào những truyền thuyết dĩ vãng.

Ban đêm, một người lính dũng cảm, luồn lách như một con rắn nước, bò qua hàng rào vây hãm của kẻ thù, lặng lẽ như một con rơi, vượt qua những vực sâu, như một cá thần (3), vượt qua những dòng suối chảy xiết, và đến sáng đã đến gặp những người dân thành Aphinơ.

Trái tim những người Xpactơ mới tràn ngập một nỗi cay đắng làm sao, khi thay cho một đội ngũ những người lính cường tráng hùng mạnh, họ chỉ thấy một ông già thọt chân, ốm yếu. Thoạt đầu, người ta cho rằng đây là một trò đùa độc ác và dại dột.

---

(1) Còn gọi là Aten (N . D)

(2) Xem phần phụ lục

(3) Nguyên bản : thần Nimpha, vị Nữ thần tượng trưng cho những sức mạnh tự nhiên khác nhau, trong thần thoại Hylạp (N. D)

Nhưng đó không phải là chuyện đùa. Phái viên được cử đến chính là nhà thơ Tiatêi nổi tiếng, mà từng câu thơ của ông đã làm rực cháy trái tim của những người nghe. Ngay cả giờ đây đọc những bài thơ của ông cũng vậy. Những sức mạnh mà người Xpactơ đòi hỏi ở người Aphinơ, là sức mạnh sẵn có trong họ, nhưng là những sức mạnh tiềm tàng. Chúng cần phải được thức tỉnh.

Và từng câu thơ của nhà thơ đã làm được điều này. Lời thơ đã tưới lên từng đường gân, bắp thịt của các chiến sĩ một lòng quả cảm không gì kiềm chế được, làm tâm hồn họ rực cháy. Đó không phải là những con người đau khổ bị khuất phục bởi những nỗi không may. Dường như đội Phalangơ (1) của các vị thần từ trên trời phái xuống đang đứng trước diễn đàn đầy kích động. Với một sức mạnh được tăng gấp hàng chục lần, các chiến sĩ lao vào kẻ thù và hất tung chúng ra khỏi biên cương của mảnh đất ruột thịt.

Trong những ngày này của chúng ta cũng vậy. Và không quá khuếch đại, nếu chúng ta nói rằng những vấn đề toán học được đặt ra một cách rõ ràng và có sức hấp dẫn về mặt toán học, cũng có khả năng làm thức tỉnh trong con người những sức mạnh tinh thần vĩ đại. Một trong những vấn đề như vậy chính là vấn đề đã được kể lại trong cuốn sách mỏng này — vấn đề giải các bài toán lớn. Dường như vấn đề này được bắt đầu từ những vấn đề rất tầm thường, bé nhỏ, nhưng đã dẫn đến những kết quả góp thêm phần vinh quang và tự hào của khoa học toán học. Đặc tính tầm thường nhỏ bé của vấn đề chỉ là do tưởng tượng — hư ảo, còn thực sự, đây lại là một vấn đề khó khăn khác thường, và vì vậy, lại có triển vọng và sức hấp dẫn khác thường...

---

(1) Đội chấp kích của Hylạp Cổ đại (N. D)

Các bạn thân mến! Hãy bắt tay giải những bài toán khó! Cả những bài toán vừa được đặt ra, cả những bài toán mà hàng chục năm thậm trí hàng trăm năm nay chưa giải được. Bao điều khổ ải sẽ chờ đợi bạn. Bạn sẽ tuyệt vọng khi nhận thấy rằng bạn đã mất đi những năm tháng một cách vô ích, để đi tìm kiếm một bóng ma lướt qua cuộc đời bạn. Có thể như thế lắm. Nhưng cũng có thể bạn sẽ được tặng thưởng một cách hậu hĩ, khi vào một ngày tuyệt đẹp, bạn đã đạt tới cái mục tiêu hằng mơ ước mà bạn đã phải trải qua một chặng đường lâu dài và gian khổ. Trong trường hợp ngược lại, bạn sẽ không thể lãnh đạm, hờ hững, vì đó sẽ là cái chết về mặt tinh thần.

Chúng ta đã bắt đầu cuốn sách mỏng của chúng ta bằng những câu thơ của Đăngtơ về khát vọng hiểu biết vô hạn mà con người phải có trong cuộc sống. Chúng tôi còn dẫn thêm một trích đoạn cũng từ trường ca «Địa ngục» của Đăngtơ. Các bạn còn nhớ, được nhà thơ La Mã cổ đại Viecgili dẫn dắt, Đăngtơ bỗng nghe thấy những lời rên xiết của nhiều linh hồn và yêu cầu người dẫn đường giải thích cho ông rõ, đó là những lời rên xiết của ai, và tội lỗi của những người đang rên la kia thế nào.

*Kinh hoàng, tôi bỗng cúi đầu*
*Bật ra câu hỏi: «Tiếng kêu đâu mà?*
*Vì sao họ phải rên la?*
*Nạn nhân của cuộc sống xa thẳm nào?»*
*Sẽ sàng thầy giảng cho tôi:*
*Rằng đây số phận những người đáng khinh*
*Sống không hề biết quang vinh,*
*Sống trong nhơ bẩn, hôi tanh dòng đời.*
*Mọi công lý, họ xa rời*

*Và phần tình nghĩa họ thôi luận bàn.*
*Mọi hình phạt, quá nhẹ nhàng*
*So cùng tội lỗi họ mang trong người.*
*Chẳng cần phán xét một lời,*
*Nhìn qua và rảo bước thôi, miễn bàn.*

Thế đấy! Nhìn qua và rảo bước ngang qua thôi!

Và đó là thí dụ về ba tình thế mà không thể nào dửng dưng bỏ qua được. Chúng tôi đã chọn chúng một cách hú họa từ trong lịch sử toán học, một lịch sử đầy rẫy những tình tiết như vậy — những tình tiết bi hùng, đầy nhiệt tình cao cả và sự dũng cảm của những công dân, lý thú và ngộ nghĩnh.

***

— Đó nó đó! Hãy tóm bắt lấy nó!

Tổng giám mục Kirin, bằng một cử chỉ đầy quyền lực, chỉ vào chiếc kiệu hoa, trên đó có một phụ nữ trẻ, đẹp.

Với tiếng rú điên dại, đám đông đang bao quanh vị tổng giám mục lao đến bên chiếc kiệu hoa. Bốn cô cao lớn khiêng kiệu thoáng chốc đã bị quật ngã, và hàng chục cánh tay bẩn thỉu, thô bạo xỉa vào mặt người phụ nữ.

— Mang nó lại đây! Mang lại đây!

Tổng giám mục Kirin tiếp tục nổi cơn giận dữ điên loạn.

— Lôi nó lại đây, cái con mụ đa thần và con mọt sách tối tăm ấy!

Hipatia cố gắng che tránh đầu mình khỏi những đòn đánh của những giáo dân cuồng tín một cách vô ích. Sau khi túm lấy tóc bà, một tên mặc áo đuôi tôm, vẻ hung ác, xô đẩy đám đông bằng cánh tay hộ pháp của mình và điệu người phụ nữ bất hạnh về chỗ vị tổng giám mục Kirin.

Sau khi đẩy bà đến trước mặt vị tổng giám mục, hắn đứng ngay bên cạnh, hai chân giang rộng, hai tay khoanh chéo trước ngực, sẵn sàng thanh toán bất kỳ người nào dám đến cứu giúp người phụ nữ này.

— Những người giáo dân anh em của tôi!

Bằng một giọng nói oang oang, Kirin kêu to, cố gắng lấn át tiếng ồn ào của đám đông đang bị kích động. — Những người anh em yêu quý của tôi! Con mụ đa thần giáo ti tiện này không chịu thừa nhận học thuyết của vị cha thần thánh của chúng ta. Nhiều năm nó đã tuyên truyền, thuyết giáo những giáo lý chống đối thần linh của toán học và triết học. Nhiều năm nó đã gieo nọc độc vào sự nghiệp của nhà thờ Gia-tô thần thánh của chúng ta! Đã đến lúc phải thanh toán con mụ bất lương này! Phải giết chết con ác quỷ này đi! Phải quét sạch thành phố được thần linh bảo trợ này khỏi tội lỗi ghê tởm và tư tưởng sa đọa này!

Tiếng rú man rợ lay động cả quảng trường. Những tu sĩ ẩn cư rách rưới, bẩn thỉu, hàng chục năm không tắm gội, mù quáng vì nhà thờ Gia tô, đã làm tổn thất một trí tuệ của nhân loại, lao vào người phụ nữ bất hạnh.

Chuyện đó xảy ra vào năm 415, tại Alecxanđri. Hipatia vùng Alecxanđri là một nhà toán học nữ đầu tiên mà chúng ta được biết. Bà đã bị đám đông giáo dân cuồng tín, tin theo lời tổng giám mục Kirin, hành hạ, giày xé cho đến chết, chỉ vì bà đã dám tiếp tục giảng dạy triết học và toán học ở Viện bảo tàng Alecxanđri, đồng thời bình luận các công trình của những bậc tiền bối vĩ đại không sợ mọi nỗi đe dọa nào...

***

... Người dân Xiraquy thật khó bị ngạc nhiên vì những chuyện bất ngờ. Nhưng chính chuyện bất ngờ xẩy ra vào giữa một trưa hè nóng bỏng trong một đại hội thi đấu Ôlimpic đầu tiên, đã làm cho họ — những người đã quen bình thản trước mọi chuyện xẩy ra, giống như những người dân Ôlimpơ quen trải qua những ngày dài vô hạn và đầy những cảnh mơ mộng thanh bình — không thể giữ vẻ thờ ơ mãi được. Trên đường phố chính của thành phố dọc theo những tảng đá lát đường nóng bỏng dưới nắng mặt trời thiêu đốt, một ông già hất cao bộ râu, đang lao nhanh, vẻ đầy phấn khởi kêu to mãi một câu «Ơrica! Ơrica!» (1). Ông già gần như hoàn toàn trần truồng, bọt xà phòng từng vệt phủ trên lưng ông, và chốc lại rơi xuống đất, theo nhịp chạy nhanh và đôi khi đột ngột của ông.

Theo sau ông già là một đám đông trẻ em chạy theo, ồn ào, làm cả dọc bờ biển đều nghe thấy. Từ khắp mọi phía, những người dân Xiraquy đang vui hội, vội đổ xô về phía có tiếng ồn này. Một bộ phận lao theo đám trẻ con. Một bộ phận khác, vẻ phân vân, đứng lại, nhìn cảnh tượng đáng tức cười này, và tìm cách dò hỏi những người ngồi rỗi ven đường nguyên nhân của cảnh huyên náo này.

Đến trước ngôi nhà của Hêrông, cuộc chạy đua kết thúc. Ông già chạy trước dừng lại trước bậc tam cấp

---

(1) Tôi đã tìm ra (N. D)

con thở dồn để lấy lại hơi, và sau khi sửa lại điệu bộ một chút, đã kêu lên bằng một giọng trang trọng:

— Hoàng thượng! Tôi đã tìm ra! Tôi đã biết được có bao nhiêu vàng trong vương miện của Người.

Không có tiếng trả lời

— Hoàng thượng! — Ông già cố cao giọng — Tôi đã tìm ra phương pháp để biết được là người thợ kim hoàn có lừa dối Người hay không?

Vẫn chẳng có tiếng trả lời nào cả. Đám đông kêu rú lên. Co ai đó đang cố gắng tìm hiểu xem ông già kỳ quặc này là ai và ông ta từ đâu đến, nhiều người trả lời: đã thấy ông già xuất hiện bên bờ biển từ mấy hôm trước, ngồi vẽ những hình phức tạp trên cát. Người ta đoán rằng, chắc có lẽ đây chính là người mà mấy ngày trước đã từ Agrighentơ vượt biển tới đây cùng với Hêrông, rằng đây là một người thân thuộc nào đó của Hêrông. Mọi người đề nghị cử người đi tìm Hêrông mà có người đã nhìn thấy ở bến cảng, bên bốn con tàu lớn từ Cácphaghen vừa cập bến.

Một người thợ làm đồ gốm, tóc hói, đi từ ngõ cụt ở phía đông quảng trường, nói rằng ông già tên là Acsimet. Chính là Hêrông đã gọi tên ông già như vậy, khi hai hôm trước đây, họ đã nói chuyện với nhau bên pho tượng người lùi to lớn trên quảng trường thành phố. Ngay lập tức có nhiều giọng nói xác nhận điều này...

Câu chuyện nói trên xẩy ra vào thế kỷ thứ 3 trước công nguyên. Người ta kể lại rằng Acsimet đã làm như vậy khi ông phát minh ra định luật nhúng chìm vật thể nào trong chất lỏng — một định luật nổi tiếng của mình.

***

... Công việc thật là khó khăn. Thậm chí ngay cả với ông, một người đã quen với công việc mà nhiều người khác phải buông tay, bất lực trước nó. Những con số, con số và con số... Những cột số, những trang số, từng chồng những trang giấy dày kín những số. Những tính toán và lại những tính toán...

Đồng hồ treo tường đã điểm hai giờ rưỡi. Tiếng chuông đồng hồ ngân vang trong cảnh tĩnh mịch khuya vắng làm mọi người giật mình, giống như tiếng súng thần công nổ giữa buổi trưa. Ole đứng dậy khỏi bàn. Căn buồng chìm trong bóng tối. Ánh sáng của ngọn nến độc nhất đặt trên bàn và được che kín một cách thận trọng bởi chiếc chao đèn bằng giấy, chỉ đủ chiếu sáng một hình tròn nhỏ phía dưới chao đèn.

Vài bước chân nhẹ bước trên chiếc thảm mềm. Vài chiếc phẩy tay bực dọc. Và rồi trạng thái xuất thần — mơ màng sâu kín, do làm việc mệt mỏi nhiều giờ, lại ập đến. Đau tức ở ngực. Đau nhức ở vùng ngang thắt lưng. Đã mấy lần cố giật mạnh đôi mắt một cách cực nhọc. Vì đâu lại có những sự đau yếu đến như vậy? Mà mới vào tuổi hai mươi tám!

Trong thoáng chốc, muốn vứt bỏ tất cả và chui vào đống chăn nệm ấm áp, mềm mại để ngủ vùi ngủ kỹ như một con culi. Và ngủ đã đầy để bù lại những đêm dài mất ngủ. Nhưng điều đó không thể được. Còn danh dự của ông danh dự của nhà bác học thành lập tấm bản đồ. Trong đúng ba ngày đêm phải thực hiện xong nhiệm vụ quan trọng của nhà nước, phải hoàn tất cho dù bất kỳ điều kiện nào. Thật khó nói, vì sao ông lại lãnh trách nhiệm này một cách xốc nổi như vậy! Một công việc mà những người khác đòi hỏi đến vài tháng!

Cho dù công việc thực sự khó khăn! Nhưng đồng thời nó cũng thật hấp dẫn. Hấp dẫn đến mức, nhà toán học quên ăn, quên ngủ, tự nguyện hiến mình cho sự hài hòa đến mê say của những mối liên hệ phụ thuộc chặt chẽ và kế tiếp.

Ole lấy bàn tay dụi mắt. Cái đau dường như đã dịu đi.

Và rồi lại những chữ số, những công thức, những chữ số.. Ole đang trầm tư, suy nghĩ. Đây là cuộc sống của ông. Cuộc sống sẽ không còn ý nghĩa nếu thiếu những khoái cảm do nhạc điệu toán học mang lại. Có ai đó trong số những nhà hình học lớn tuổi đã nói mới hay làm sao — Cuộc sống đẹp vì trong cuộc sống, người ta có thể nghiên cứu toán học. Dường như đã đến thời kỳ không thể vứt bỏ tất cả và cần phải suy nghĩ về những vấn đề đã được chố lại trong đầu..

Công việc đã được hoàn thành đúng thời hạn. Nhưng nó cũng để lại một dấu vết quái đản và đáng sợ — một mắt — mắt phải của ông, đau nhức trong suốt thời gian cuối, đã không chịu nổi cường độ làm việc quá sức người và đã chịu hậu quả tai hại. Nhà toán học hai mươi chín tuổi đã bị chột một mắt.

Nhưng ông vẫn không ngừng tính toán. Đối với ông, khi không thể tính toán được nữa, thì cuộc sống cũng chấm dứt. Sau khi ông chết, người ta nói: Ole đã ngừng tính và ngừng sống, và chính sự thật là thế — phải tính vì còn sống.

Ole là một trong những nhà toán học vĩ đại nhất của mọi thời đại. Ông ra đời vào ngay đầu thế kỷ 18, ở Thụy sĩ, nhưng gần nửa cuộc đời, ông đã sống ở nước Nga. Ông mất ở nước Nga và di hài ông cũng yên nghỉ đời đời trên đất nước Nga. Và những người xô viết có quyền gọi Ole là nhà toán học của đất nước mình.

∴

Và thế đấy, một người đã bị những giáo dân cuồng tín giầy xéo, hành hạ cho đến chết. Một người khác quên hết thế giới xung quanh đến mức lao khỏi bồn tắm, gần như trong cảnh mẹ vừa sinh ra mà chạy lướt trên đường phố. Người thứ ba mất cả một con mắt của mình, chỉ vì làm việc căng thẳng quá mức .. Như thế, phải chăng công tác nghiên cứu khoa học mà kết quả của nó là một hậu quả cay độc, là chẳng có nghĩa gì chăng? Và phải chăng công tác nghiên cứu khoa học vẫn có giá trị, cho dù cả những nỗi đau khổ tàn nhẫn, cả những sự giễu cợt của nhưng kẻ nhỏ nhen, cả đến việc có thể dẫn đến cái chết, đều không thể ngăn chặn những người tình nguyện dũng cảm, vô tư, hào hiệp tách rời nó? Vâng, chắc có thể là như vậy. Nếu khác đi, làm sao mà Hipatia dám đứng dậy chống lại Kirin đầy quyền lực? làm sao Acsimét lại dám xem thường những quy tac sơ đẳng của « Phép lịch sự đúng mức » ? Làm sao mà Ole lại vượt qua được nỗi đau đớn dày vò để thực hiện những tính toán rất quan trọng và đầy trách nhiệm.

Toán học — đó là một vũ khí, nhờ đó con người nhận thức và chinh phục thế giới quanh mình. Nhưng đây lại là một vũ khí đặc biệt. Nó không chỉ chinh phục thế giới bên ngoài. Nó còn bắt cả nhưng người quan tâm nghiên cứu nó phải khuất phục mình. Và sau khi đã bị khuất, nó còn bắt con người tự nguyện ấy phải chịu mọi hy sinh vì khoa học mà nó đòi hỏi.

Để làm được một cái gì đó thực sự có giá trị trong toán học, cần phải yêu mến toán học, giống như mỗi một trong số ba nhà toán học mà chúng ta đã nhắc tới ở trên, cũng như hàng chục và hàng trăm những người khác đang mê say toán học đến mức đáng tị nạnh. Không tranh luận với vị tổng giám mục điên rồ, không trần truồng chạy ra đường phố, không hy sinh cả con mắt mình vì khoa học, nhưng hãy làm dù chỉ một phần nhỏ bé, như mỗi người trong số họ đã làm, và đời đời thế giới vẫn còn biết ơn bạn

# PHẦN PHỤ LỤC (1)

*Bách khoa toàn thư* — Công trình lao động tập thể của nhóm các nhà bác học và nhà văn Pháp, đứng đầu là Đ. Điđrô. Trong thành phần của nhóm còn có J. Đalambe, S. Môngtexkiơ, F. Vante, J. J. Rutxô,... Tên gọi đầy đủ của công trình này là : « Bách khoa toàn thư hay từ điển giải thích các khoa học, nghệ thuật và nghề thủ công ».

*Cuộc chiến tranh ba mươi năm* (1618 — 1648). Cuộc chiến tranh toàn châu Âu lần đầu tiên, trong đó có hai khối quân sự xung đột nhau : một khối là Aixơlen, Áo, Đức, Ba Lan ; một khối khác là Đan Mạch, Thụy Điển, Pháp.

*Đêlôxơ* — Một hòn đảo trên biển Egêi, trên đó có đền thờ Apôlôn. Do ảnh hưởng của khí độc thoát ra từ một hang động cách đền thờ không xa, Piphia, vị trí tế của đền thờ này bị ngất lịm đi, trong thời gian đó bật ra những tiếng rên la, mê sảng. Những tiếng kêu mê sảng này được giải thích như « tiếng nói của thần linh ».

*Đêmôxô* — Tên gọi chung của người Hy Lạp cổ đại

*Hêliôxơ* — Thần Mặt Trời của người Hy Lạp cổ đại

*Iezuit* — Những người thuộc dòng tu do tu sĩ Tây Ban Nha.

Igơnati Lôiôlơ sáng lập năm 1534. Để đạt được những mục tiêu của mình, những người thuộc dòng tu này không từ một thủ đoạn gì. Đây là một trong những dòng tu phản động nhất.

---

(1) Có giảm bớt và sắp xếp lại (D. Đ)

*Lakêđêmôn* — Một tên gọi khác của Xpactơ, nhà nước chiếm hữu nô lệ trong Hy Lạp cổ đại.

*Laplanđia* — Lãnh thổ phía bắc Phần Lan.

*Lômbacđia* — Vùng Tây bắc Italia, với thành phố chính là Milan.

*Lôparơ* — Đại diện dân tộc thiểu số sống ở phần đông Bắc Na-Uy, bắc Thụy Điển, và bắc Phần Lan. Có tên gọi khác là người Laplandia, người Xaami.

*Lôretô* — Thành phố ở Italia, nổi tiếng như một nơi hành hương đến mẫu thần Lôretô, như thường gọi.

*Muskel* — Súng bắn tay, có khóa ngòi nổ.

*Ôicumena* (Eicumena) — theo sự hình dung của những người Hy Lạp cổ đại, đó là toàn bộ các miền trên Trái Đất (chủ yếu là lưu vực Địa Trung Hải), có con người sống.

*Ôracun* — a) Vị tư tế, truyền đạt câu giải đáp của thần linh cho những người mê tin. b) Nơi xảy ra « sự tiên tri »

*Phorixlanđia* — Vùng lịch sử ven bờ biển Bắc, thuộc Hà Lan hiện nay.

*Rumbơ* — Một trong 32 phân khoảng của địa bàn

*Sovabia* — Một vùng lịch sử ở nước Đức.

*Sơtatgantơ* (ở Hà Lan, khoảng thế kỷ 16 — 17) — chức tước của người đại diện có quyền lực tối cao.

*Tơriat* — Ba nhân vật (đối tượng hay khái niệm) có liên quan gì đó với nhau. Tơriat Menckhomơ — là những *tiết diện nón*, mà sau này được gọi tên là êlip, hypecbôn và parabôn.

*Trường bách khoa* — Trường cao đẳng ở Pari, được thành lập vào thời kỳ cách mạng tư sản Pháp 1789 — 1793. Trường đào tạo những kỹ sư để lãnh những cương vị kỹ thuật quốc gia.

*Turăng* — Tỉnh ở phía tây nước Pháp, nằm trong lưu vực sông Loarơ

*Xtvila* — Vị tiên tri thời La Mã cổ đại.

## MỤC LỤC

Trang

N. I. COVANTXOV

# TOÁN HỌC VÀ CHẤT LÃNG MẠN


| | |
|---|---|
| Người dịch | : NGUYỄN KHẮC ĐĂNG |
| Biên tập | : ĐO ĐỨC ỨNG |
| Sửa bản in | : BÙI THỊ CHINH |
| Trình bày bìa | : VŨ THÀNH |
| Trình bày kỹ mỹ thuật | : LẠI PHÚ ĐẠI |





NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

In 8.100 cuốn, khổ 13 × 19 tại Nhà máy in sách KHKT.
Số in 131. Số XB 33/86
In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 1986.

## ĐÍNH CHÍNH

**« Toán học và chất lãng mạn »**

| Trang | Dòng | In sai | Sửa lại |
|---|---|---|---|
| 7 | 13↑ | Và khả năng tiếp nhận... | Phải năng học hỏi đến |
| 29 | 10↑ | ...không thể thờ ơ trước... | ...tiếng rên rỉ tủ thương của... |
| 68 | 13↑ | ...đen tối nhất... | ...đen nhất... |
| 91 | 7 | ...công trình... | ...phương trình... |

Giá : 8đ00